ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE VIGAS SANDWICH PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

ROBERTO CARDOSO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

Sergio Fernandes Villaça

Sydney Santos

Paulo Alcantara Gomes

Roberto Fernandes de Oliveira

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
OUTUBRO DE 1973

Ã Ana Lucia

A G R A D E C I M E N T O S

Aos Professores Paulo Alcântara Gomes e Sergio Fernandes Villaça, pela orientação prestada a este trabalho.

Ao Professor Fernando Luiz Lobo B. Carneiro pela compreensão dispensada.

Aos Professores da COPPE, na pessoa do seu Diretor, Professor Sidney M. G. Santos.

À Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro prestado.

À Marlene, pela confecção gráfica deste trabalho.

S U M Á R I O

O método dos Elementos Finitos é usado no presente trabalho visando uma análise estática e dinâmica de vigas sandwich submetidas a cargas axiais, bem como para a determinação das cargas críticas de instabilidade.

Os elementos desenvolvidos são, também , aplicáveis a vigas onde deformações, devido ao esforço cortante, são significantes.

Programas foram desenvolvidos para ambas as análises, estática e dinâmica.

É feita a análise estática de uma viga sandwich em balanço e obtida a sua resposta a uma carga transversal dinâmica.

É analisada, também, a convergência dos resultados e comparado o uso de ambas as matrizes de massa, consistente e diagonal.

SUMMARY

In view of the static and dynamic analysis of sandwich beams submitted to axial loads as well as for the determination of instability critical loads the Finite Element Method has been used in the present work.

The developed elements are also applied to beams where the shear strain has been taken into account.

Programs have been developed both to the static and the dynamic analysis.

The static analysis of a Cantilever sandwich beam has been done and for dynamical transversal load its response was obtained.

The convergency of the results has been also analysed and compared the use of both consistent and diagonal mass matrices.

ÍNDICE

CAPÍTULOS	PÁG.
I - HIPÓTESES E RELAÇÕES BÁSICAS NA VIGA SANDWICH	2
1.1 - HIPÓTESES BÁSICAS	2
1.2 - RELAÇÃO DE DESLOCAMENTOS	3
1.3 - RELAÇÃO DEFORMAÇÕES-DESLOCAMENTOS	7
1.4 - RELAÇÃO TENSÕES-DEFORMAÇÕES	9
1.5 - RELAÇÃO DE DEFORMAÇÕES	10
II - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	12
2.1 - INTRODUÇÃO	12
2.2 - ENERGIA CINÉTICA	13
2.3 - ENERGIA POTENCIAL	16
2.4 - DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	19
III - ELEMENTOS FINITOS DE VIGA SANDWICH	22
3.1 - INTRODUÇÃO	22
3.2 - ELEMENTO FINITO L	25
3.3 - MODIFICAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS	26
3.4 - ELEMENTO FINITO Q	28
IV - ANÁLISE ESTÁTICA	29
4.1 - INTRODUÇÃO	29
4.2 - PROGRAMA DESENVOLVIDO	29
4.3 - VIGA EM BALANÇO	30

V - VIBRAÇÕES LIVRES E CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM 36

5.1 - INTRODUÇÃO 36

5.2 - DETERMINAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS 36

5.3 - DETERMINAÇÃO DAS CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM 37

5.4 - RESULTADOS 38

VI - RESPOSTA DINÂMICA 47

6.1 - INTRODUÇÃO 47

6.2 - MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL 47

6.3 - INTEGRAIS DE DUHAMEL 50

6.4 - RESPOSTA DINÂMICA DE UMA VIGA EM BALANÇO 52

VII - CONCLUSÕES 55

VIII - BIBLIOGRAFIA 58

IX - NOTAÇÕES 60

X - APÊNDICE 63

INTRODUÇÃO

O tipo mais simples de uma viga sandwich consiste em duas lâminas finas e fortes de material pesado, separadas por espessa camada de material leve e fraco. Obviamente a rigidez da viga assim formada é muito maior do que a da comum, do mesmo material de que são feitas as faces, e de mesmo peso.

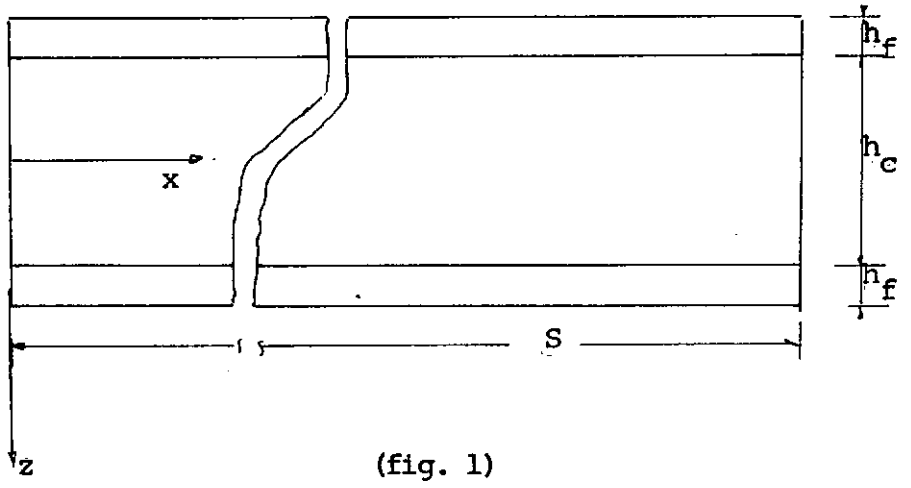
As análises que são feitas das estruturas sandwich, geralmente lançam mão de algumas hipóteses simplificadoras. Dentre estas pode-se observar as considerações de rigidez infinita ao cisalhamento nas faces, e, no núcleo, módulo de elasticidade nulo.

Uma solução analítica que não lance mão destas simplificações, torna-se bastante complexa e de difícil aplicação. Uma teoria bastante geral é a de Yi-Yuan Yu(2). Esta, considera o efeito da distorção e da inércia de rotação tanto no núcleo quanto nas faces. Além disto, não impõe nenhuma restrição na magnitude das relações de espessuras, densidades de materiais, e constantes elásticas do núcleo e das faces. Os elementos finitos desenvolvidos no presente trabalho, terão como base a teoria de Yi-Yuan Yu.

I - HIPÓTESES E RELAÇÕES BÁSICAS NA VIGA SANDWICH

1.1 - HIPÓTESES BÁSICAS

No presente trabalho, considera-se viga sandwich o elemento estrutural linear composto de três camadas: a face superior, a face inferior e o núcleo (fig. 1) . Na formulação desenvolvida, não há restrição quanto às relações de espessuras, densidades de materiais e constantes elásticas do núcleo e das faces, que são idênticas. Sem perda de generalidade, considerar-se-á unitária a largura da viga.



(fig. 1)

Serão válidas ainda, as seguintes hipóteses:

a) Deslocamentos e deformações suficientemente pequenos, de tal modo que a teoria da elasticidade linear seja aplicada.

b) Vínculo perfeito entre as camadas adjacentes da estrutura.

c) O deslocamento transversal, isto é, na direção z (fig. 1) dos pontos de uma secção transversal é o mesmo.

d) A linha material reta, originariamente normal à superfície média da respectiva camada, permanece reta após a deformação, porém não mais normal à superfície média. A diferença na deformação por cisalhamento das diversas camadas, é apresentada no dobramento da secção transversal nas interfaces.

e) O material das faces e o do núcleo são linearmente elásticos.

f) A flexão e a distensão de todas as camadas serão levadas em consideração. Entretanto, o estabelecido pode ser modificado em qualquer camada, bastando que se lhe dê um módulo de Young nulo.

g) As tensões cisalhantes produzem distorções em todas as camadas. No entanto, o estabelecido pode ser modificado em qualquer camada, bastando que se lhe dê um módulo de cisalhamento infinito (isto é, suficientemente grande).

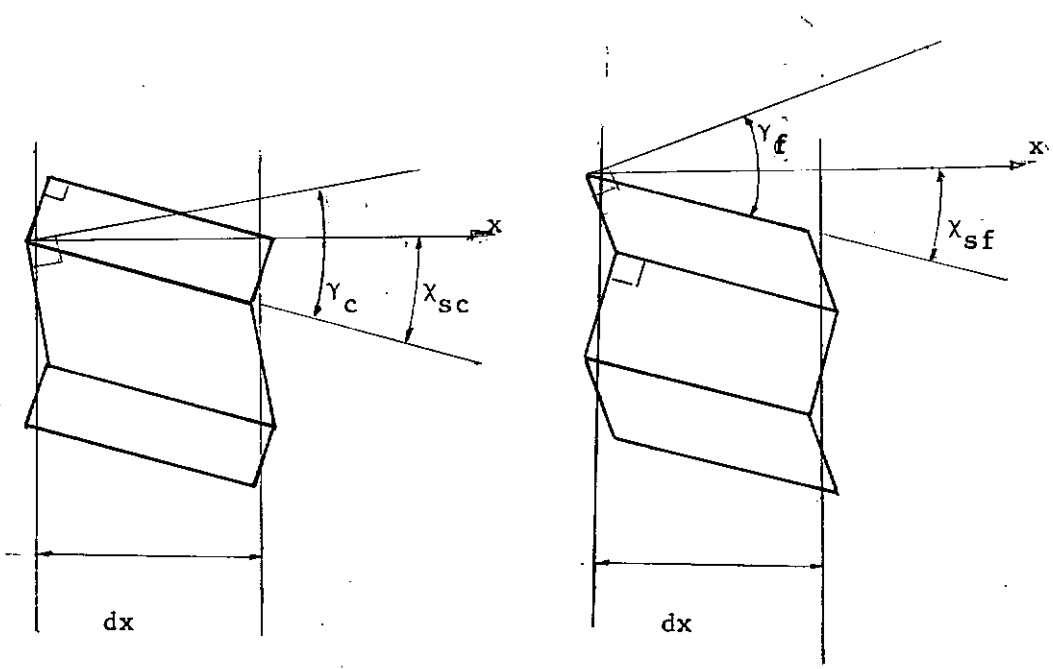
1.2 - RELAÇÃO DE DESLOCAMENTOS

A inclinação da viga pode ser dividida entre as contribuições devidas à deformação de flexão pura e à

de cisalhamento puro (ref. 3) :

$$\frac{dw}{dx} = \chi = \chi_b + \chi_s \qquad (1.2.1)$$

Levando em conta o ítem d acima, considere-se um elemento diferencial da viga sob distorção somente no núcleo (fig. 2a), e depois apenas nas faces (fig. 2b).



Cisalhamento no Núcleo(fig.2a) Cisalhamento nas Faces(fig.2b)

(fig. 2) Deformações devidas ao cortante.

Com este tipo de deformação, não há distensão das camadas, donde o deslocamento axial de cada superfície média é nulo. Assim, o deslocamento axial nas interfaces

deve ser o mesmo quando relacionado à superfície média do núcleo ou das faces. Para o caso do cortante resistido apenas pelo núcleo (fig. 2a), esta condição fornece:

$$u\ (\ z = h_c/2\ ) = (\ \gamma_c - \chi_{sc}\ )\ h_c/2 = \chi_{sc}\ h_f/2$$

E para o caso do cortante resistido apenas pelas faces (fig. 2b):

$$u\ (\ z = -h_c/2\ ) = (\ \gamma_f - \chi_{sf}\ )\ h_f/2 = \chi_{sf}\ h_c/2$$

Somando estas duas equações e usando ... $d = h_c + h_f$ (distância entre as superfícies médias das faces), tem-se:

$$\chi_s = \chi_{sc} + \chi_{sf} = \gamma_c\ h_c/d + \gamma_f\ h_f/d \qquad (1.2.2)$$

Os deslocamentos axiais dos pontos de uma secção transversal na viga sandwich, podem ser determinados pela composição dos deslocamentos obtidos nos casos de flexão pura, distorção no núcleo e distorção nas faces. Assim, para o deslocamento axial no núcleo tem-se:

$$u_c = -z_c\ \chi_b + z_c\ (\ \gamma_c - \chi_{sc}\ ) - z_c\ \chi_{sf}$$

que, simplificando, fica:

$$u_c = - z_c (\chi - \gamma_c) \qquad (1.2.3.1)$$

Para a face inferior tem-se:

$$u_f^i = -\chi_b (d/2 + z_f) - z_f \chi_{sc} + z_f (\gamma_f - \chi_{sf})$$

que, através de algumas operações aritméticas, fica:

$$u_f^i = -z_f (\chi - \gamma_f) - \frac{d}{2} \chi + \frac{h_c}{2} \gamma_c + \frac{h_f}{2} \gamma_f \qquad (1.2.3.2)$$

Para a face superior, da mesma forma, tem-se:

$$u_f^s = -z_f (\chi - \gamma_f) + \frac{d}{2} \chi - \frac{h_c}{2} \gamma_c - \frac{h_f}{2} \gamma_f \qquad (1.2.3.3)$$

O deslocamento transversal, devido ao ítem c das hipóteses básicas, é o mesmo para todas as camadas. Assim:

$$w_c = w_f^i = w_f^s = w \qquad (1.2.3.4)$$

As equações anteriores, visando facilitar sua utilização, podem ser expressas em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} w \\ u_c \\ u_f^s \\ u_f^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_c & z_c & 0 \\ 0 & -z_f + \frac{d}{2} & \frac{-h_c}{2} & z_f - \frac{h_f}{2} \\ 0 & -z_f - \frac{d}{2} & \frac{h_c}{2} & z_f + \frac{h_f}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \chi \\ \gamma_c \\ \gamma_f \end{Bmatrix}$$

$$\{ U^* \} = [H] \{ U \} \qquad (1.2.3)$$

1.3 - RELAÇÃO DEFORMAÇÕES-DESLOCAMENTOS

A relação deformações-deslocamentos para a viga sandwich pode ser expressa através das seguintes equações como em YI-YUAN-YU (ref. 2), onde as deformações são expressas em função de componentes de deformação.

$$\varepsilon_{xc} = \frac{du_c}{dx} = \varepsilon^o_{xc} + z_c \kappa_{xc}$$

$$\varepsilon_{xf}^{s,i} = \frac{du_f^{s,i}}{dx} = \varepsilon_{xf}^{o\,s,i} + z_f \kappa_{xf}^{s,i}$$

$$\gamma_{zxc} = \frac{du_c}{dz} + \frac{dw}{dx} = \gamma_c$$

$$\gamma_{zxf}^{s,i} = \frac{du_f}{dz} + \frac{dw}{dx} = \gamma_f$$

(1.3.1)

Através das equações (1.2.3), as componentes de deformação nas equações (1.3.1) podem ser expressas por

$$\varepsilon_{xc}^{o} = 0$$

$$\varepsilon_{xf}^{o\,s,i} = \pm \frac{d}{2}\frac{d\chi}{dx} + \frac{h_c}{2}\frac{d\gamma_c}{dx} + \frac{h_f}{2}\frac{d\gamma_f}{dx}$$

$$\kappa_{xc} = -\frac{d\chi}{dx} + \frac{d\gamma_c}{dx}$$

$$\kappa_{xf}^{s,i} = -\frac{d\chi}{dx} + \frac{d\gamma_f}{dx}$$

(1.3.2)

1.4 - RELAÇÃO TENSÕES-DEFORMAÇÕES

A relação tensões-deformações é simples , pois o material segue a lei de Hooke e pode-se escrevê-la sob a forma matricial seguinte:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xc} \\ \tau_{zxc} \\ \sigma^{s}_{xf} \\ \tau^{s}_{zxf} \\ \sigma^{i}_{xf} \\ \tau^{i}_{zxf} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_c G_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_f G_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_f G_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xc} \\ \gamma_{zxc} \\ \varepsilon^{s}_{xf} \\ \gamma^{s}_{zxf} \\ \varepsilon^{i}_{xf} \\ \gamma^{i}_{zxf} \end{Bmatrix}$$

assim: $\{ \sigma \} = [D] \{ e \}$ (1.4.1)

Na relação acima, pode-se observar λ_c e λ_f que são fatores corretivos tensão-cisalhamento (análogos ao usado na Teoria de Viga Timoshenko). YI-YUAN-YU expressa na referência 2 e demonstra nas referências 11 e 12, que tais fatores corretivos para o tipo comum de construção

sandwich (faces finas e fortes de material pesado e um núcleo espesso de material leve e fraco) possuem valores muito próximos da unidade. Nos exemplos que serão apresentados, tais valores serão considerados unitários. Entretanto, para uma aplicação generalizada desta formulação, é necessário determinar mais precisamente estes parâmetros.

1.5 - RELAÇÃO DE DEFORMAÇÕES

Pode-se ainda, com a finalidade de facilitar as operações matemáticas, definir um vetor formado pelas componentes de deformação:

$$\{\varepsilon\}^T = \{ \kappa_{xc} \; \gamma_{xzc} \; \varepsilon^{o\,s}_{xf} \; \kappa^{s}_{xf} \; \gamma^{s}_{xzf} \; \varepsilon^{o\,i}_{xf} \; \kappa^{i}_{xf} \; \gamma^{i}_{xzf} \}^T$$

que relacionamos com o vetor de deformação fica:

$$\{e\} = \begin{bmatrix} z_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\varepsilon\}$$

$$\{e\} = [C] \{\varepsilon\} \tag{1.5.1}$$

II - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.1 - INTRODUÇÃO

Considera-se a estrutura subdividida em elementos finitos de viga sandwich. Tais elementos terão largura unitária e serão simétricos em relação à superfície média do núcleo (fig. 3).

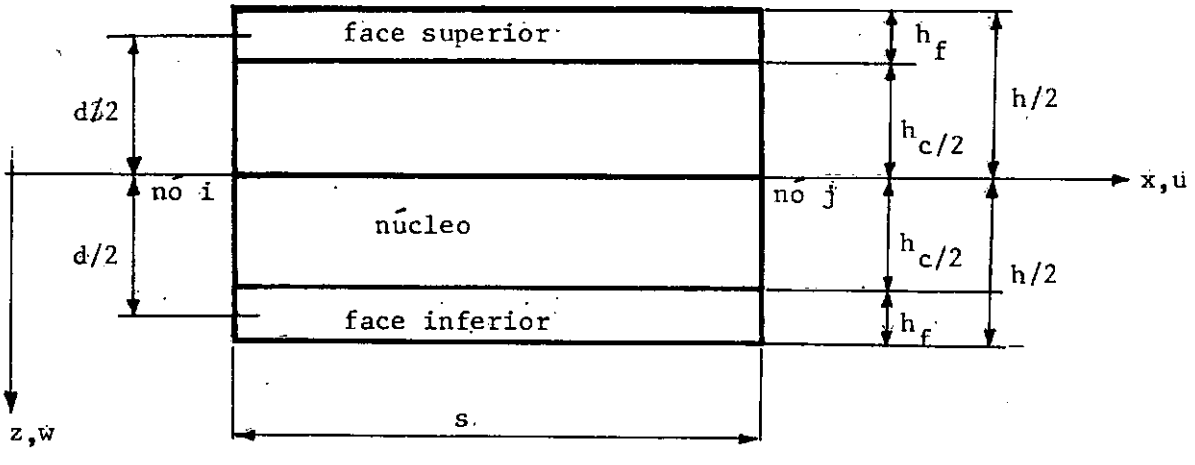


fig. 3 - Elemento de Viga Sandwich.

Considera-se que, em qualquer instante, os deslocamentos {u} (equação (1.2.3)) de um ponto, podem ser expressos em função dos deslocamentos nodais $\{U^e\}$ do elemento que o contém, através de expressões [A] independentes do tempo:

$$\{ u\ (x,t) \} = [A\ (x)] \quad \{ U\ (t) \}^e \qquad (2.1.1)$$

As deformações $\{\varepsilon\}$ num ponto em dado instante, poderão também ser expressas em função dos deslocamentos nodais do elemento que o contém, bastando, a partir das equações (1.5), fazer as devidas derivações nos coeficientes de $[A]$. Assim:

$$\{ \varepsilon (x,t) \} = [B (x)] \{ U (t) \}^e \tag{2.1.2}$$

O vetor das velocidades de um ponto, num dado instante, pode ser expresso, devido ao fato dos coeficientes de $[A]$ serem independentes do tempo, em função do vetor das velocidades nodais do elemento que o contém pela equação:

$$\{ \dot{u} (x,t) \} = [A (x)] \{ \dot{U} (t) \}^e \tag{2.1.3}$$

2.2 - ENERGIA CINÉTICA

Considerando a densidade e as velocidades

de deslocamento de seus pontos nas direções x e z, a energia cinética da viga sandwich pode ser expressa por:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^S \int_h \{\rho_c \dot{w}_c^2 + \rho_f \dot{w}_f^{i\,2} + \rho_f \dot{w}_f^{s\,2} +$$

$$+ \rho_c \dot{u}_c^2 + \rho_f \dot{u}_f^{i\,2} + \rho_f \dot{u}_f^{s\,2}\} \; dh.\, dx$$

(2.2.1)

onde a integração ao longo da altura deve ser adequada ao aspecto físico da viga, isto é, as parcelas correspondentes ao núcleo, face superior e face inferior são integradas no núcleo, na face superior e na face inferior respectivamente.

Levando-se em conta as equações (1.2.3) e (2.1.1) e considerando:

$$[\rho'] = [(\rho_c + 2\rho_f) \quad \rho_c \quad \rho_f \quad \rho_f]$$

(2.2.2)

obtem-se:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{N=1}^{NE} \int_0^S (\{\dot{U}\}^e)^T [A]^T \int_h [H]^T [\rho'] [H] dh \; [A] \; \{\dot{U}\}^e dx$$

(2.2.3)

Resolvendo a integral ao longo da altura, obtém-se:

$$[\rho] = \begin{bmatrix} \rho_c h_c + 2\rho_f h_f & 0 & 0 & 0 \\ & \rho_c \frac{h_c^3}{12} + \rho_f \left(\frac{h_f^3}{6} + \frac{d h_f^2}{2}\right) & -\rho_c \frac{h_c^3}{12} - \rho_f \frac{h_c\, d}{2} h_f & -\rho_f \left(\frac{h_f^3}{6} + \frac{h_f^2\, d}{2}\right) \\ & & \rho_c \frac{h_c^2}{12} + \rho_f \frac{h_c^2}{2} h_f & \rho_f h_c \frac{h_f^2}{2} \\ & & & \rho_f x \frac{2\, h_f^3}{3} \\ \text{simétrica} & & & \end{bmatrix} \tag{2.2.4}$$

Pode-se, então, definir a matriz de massa do Elemento, como:

$$[m] = \int_0^s [A]^T [\rho] [A] \, ds \tag{2.2.5}$$

E a energia cinética da viga pode ser expressa por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{NE} (\{\dot{u}\}^e)^T [m] \{\dot{u}\}^e \tag{2.2.6}$$

Para a obtenção da matriz de massa da viga Sandwich pode-se proceder de outra maneira: considerar a massa da estrutura concentrada nos pontos nodais. Desta maneira obtem-se uma matriz diagonal para a matriz de massa da estrutura. Nesta matriz, o termo referente à inércia na direção do deslocamento transversal em um nó é formado pela contribuição da massa de um comprimento tributário em cada elemento vizinho (a metade deste). Para o efeito de inércia de rotação (com relação a χ_b) em cada pontonodal, considera-se o momento de inércia da secção transversal da viga sandwich multiplicado pelo comprimento tributário dos elementos vizinhos. A escolha da matriz de massa, diagonal ou não, será discutida no capítulo V.

2.3 - ENERGIA POTENCIAL

Considerando as energias de deformação e potencial das forças externas, a energia potencial total pode ser expressa por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \tau \, \varepsilon \, dv - \frac{1}{2} \int_0^S P\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 ds - \int_V u \, \chi \, dv \qquad (2.3.1)$$

Não será levada em conta a energia de deformação por compressão devida à força axial P, independente do tempo, pois esta não influencia na flexão da viga.

Vale aqui a observação que foi feita na equação (2.2.1) e, também, deve-se levar em conta que x, simbolizando uma força de massa, pode ser considerada uma força concentrada ou distribuída desde que, aqui, também, a integração seja adequada.

Levando-se em conta as equações (1.4.1), (1.5.1) e (2.1), obtém-se:

$$U = \sum_{n=1}^{NE} \frac{1}{2} \int_0^s (\{u\}^e)^T [B]^T \left(\int_h [C]^T [D][C] \, dh \right) [B]\{u\}^e \, dx$$

$$- \int_0^s (\{u\}^e)^T [A]^T \{x\} \, dx - \int_0^s (\{u\}^e)^T [A_2]^T P [A_2]\{u\}^e \, dx$$

Resolvendo a integral do primeiro termo da equação anterior, obtem-se:

$$\int_h [C]^T [D][C]\, dh = [E_c \times h^3_{c/12}\ G_c h_c\ E_f \times h_f\ E_f \times h^3_{f/12}\ G_f h_f$$

$$E_f \times h_f\ \ E_f \times h^3_{f/12}\ G_f h_f] = [k']$$

(2.3.2)

Onde se pode observar os termos referentes à flexão ($E_c I_c$) e cisalhamento ($G_c A_c$) do núcleo e efeito de membrana ($E_f A_f$), flexão ($E_f I_f$) e cisalhamento ($G_f A_f$) de cada face.

Pode-se então, definir a matriz de rigidez do elemento como

$$[k] = \int_0^S [B]^T [k'] [B]\, dx$$

(2.3.3)

a matriz de rigidez geométrica do elemento como

$$[k_g] = P \int_0^S [A_2]^T [A_2]\, dx$$

(2.3.4)

e o vetor de cargas nodais equivalente do elemento como

$$\{F\}^e = \int_0^S [A]^T \{X\}\, dx$$

(2.3.5)

donde a energia potencial total da viga pode ser expressa por:

$$U = \sum_{N=1}^{NE} (\{U\}^e)^T \left(\frac{1}{2} ([k] - [k_g])\{U\}^e - \{F\}^e\right) \tag{2.3.6}$$

2.4 - DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

A partir das equações (2.2.1) e (2.3.1) obtém-se a expressão da ação:

$$A_c = \int_{t_1}^{t} (T - U)\, dt \tag{2.4.1}$$

Explicitamente fica

$$A_c = \int_{t_1}^{t} \frac{1}{2} \sum_{N=1}^{NE} \left((\{\dot{U}\}^e)^T [m] \{\dot{U}\}^e - (\{U\}^e)^T \times \right.$$

$$\left. \times \left(([k] - [k_g]) \{U\}^e - 2\{F\}^e \right) \right) dt \tag{2.4.2}$$

A análise dinâmica da viga sadwich pode ser feita através do princípio de Hamilton, que é traduzido matematicamente pela primeira variação do funcional A_c ser nula. Aplicado na equação anterior, tem-se:

$$\delta A_c = \sum_{N=1}^{NE} \delta A_c^e = 0 \qquad (2.4.3)$$

Assim, minimizando o funcional em cada elemento, estará minimizado na estrutura.

Aplicando as Equações de Euler, a minimização do funcional A_c^e em cada elemento finito obtém-se:

$$[m] \{\ddot{U}\}^e + ([k] - [k_g]) \{U\}^e = \{F\}^e \qquad (2.4.4)$$

A partir da equação (2.4.3), o conjunto das equações minimizantes (2.4.4) pode ser escrito simplesmente

$$[M] \{\ddot{U}\} + ([K] - [K_g]) \{U\} = \{F\} \qquad (2.4.5)$$

onde:

$[M]$ - Matriz de Massa da Estrutura

$[K]$ - Matriz de Rigidez da Estrutura

$[K_g]$ - Matriz de Rigidez Geométrica da estrutura

$\{F\}$ - Vetor das Forças Nodais da Estrutura

sendo:

$$K_{ij} = \Sigma\ k^e_{ij}$$

$$K_{gij} = \Sigma\ k^e_{gij}$$

$$M_{ij} = \Sigma\ m^e_{ij}$$

$$F_i = \Sigma\ F^e_i$$

III - ELEMENTOS FINITOS DE VIGA SANDWICH

3.1 - INTRODUÇÃO

A precisão da solução obtida pelo método dos elementos finitos na formulação de deslocamentos, depende da habilidade na escolha das funções deslocamento [A] assumidas para representar o verdadeiro estado de deformação da estrutura. Para a análise de viga sandwich desenvolvida, onde as deformações por cisalhamento e flexão são consideradas tanto no núcleo quanto nas faces, é importante que as deformações tipo membrana, flexão e cisalhamento e suas interações sejam bem representadas. Isto é obtido ao se cumprir os critérios de convergência do capítulo 3.2 de ZIENKIEWICZ (ref. 7) e que aqui são apresentados (com a devida adaptação às notações desta tese).

Critério 1. As funções de interpolação [A] devem ser tais que com uma conveniente escolha de $\{U\}^e$ qualquer valor constante de $\{u\}$ ou de suas derivadas presentes no funcional A_c possa ser representado quando o comprimento do elemento tender a zero.

Critério 2. As funções de interpolação [A] devem ser escolhidas de tal maneira que nas interfaces dos elementos $\{u\}$ e suas derivadas, até a primeira ordem me

nor do que as que ocorrem no funcional A_c, sejam contínuas.

Para uma escolha conveniente de $\{U\}^e$, observando a equação (1.2.3), verifica-se que são necessários quatro graus de liberdade ($w, \chi, \gamma_c, \gamma_f$) por nó em cada extremo do elemento de viga sandwich. Definidos tais deslocamentos nodais fica implícito que tem-se, no mínimo, um campo de deslocamento transversal cúbico e variações lineares para as rotações de cisalhamento nas faces e no núcleo. Vê-se então, que as funções de interpolação $[A]$ representativas deste campo satisfazem os critérios de convergência. O primeiro elemento desenvolvido nesta tese usará este campo de deslocamento. Outro elemento será desenvolvido possuindo o mesmo campo de deslocamento transversal, isto é, cúbico mas com variações quadráticas para as rotações de cisalhamento nas faces e no núcleo

3.2 - ELEMENTO FINITO L

Este elemento possui uma variação cúbica de deslocamento transversal e variações lineares de rotação, devido ao cisalhamento tanto nas faces quanto no núcleo. Para a representação de tal campo usar-se-ão funções de interpolação com a ajuda de uma coordenada normalizada que é definida por

$$\xi = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_i}{s}$$

onde x_i e x_j são as ordenadas dos nós de um elemento de comprimento s (fig. 3)

Assim para

$$\{u\}^T = [w \quad \chi \quad \gamma_c \quad \gamma_f]^T \tag{3.2.1}$$

$$\{U\}^{e^T} = \{u\ (0) \quad u\ (1)\}^T \tag{3.2.2}$$

ter-se-á, na equação (2.1.1) $[A]$ igual a

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1-3\xi^2+2\xi^3 & s\xi(1-2\xi+\xi^2) & 0 & 0 & \xi^2(3-2\xi) & s\xi^2(\xi-1) & 0 & 0 \\ 6\xi(\xi-1)/s & (1-4\xi+3\xi^2) & 0 & 0 & 6\xi(1-\xi)/s & (3\xi-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\xi) & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\xi) & 0 & 0 & 0 & \xi \end{array}\right] \tag{3.2.3}$$

e, na equação (2.1.2) a partir de (3.2.3), [B] igual a

$$\frac{1}{s}\begin{bmatrix} 6(1-2\xi)/s & (4-6\xi) & -1 & 0 & 6(2\xi-1)/s & (2-6\xi) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s(1-\xi) & 0 & 0 & 0 & s\xi & 0 \\ 3d(2\xi-1)/s & d(3\xi-2) & h_{c/2} & h_{f/2} & 3d(1-2\xi)/s & 1(3\xi-1) & -h_{c/2} & -h_{f/2} \\ 6(1-2\xi)/s & (4-6\xi) & 0 & -1 & 6(2\xi-1)/s & (2-6\xi) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & s(1-\xi) & 0 & 0 & 0 & s\xi \\ 3d(1-2\xi)/s & d(2-3\xi) & -h_{c/2} & -h_{f/2} & 3d(2\xi-1) & d(1-3\xi) & h_{c/2} & h_{f/2} \\ 6(1-2\xi)/s & (4-6\xi) & 0 & -1 & 6(2\xi-1)/s & (2-6\xi) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & s(1-\xi) & 0 & 0 & 0 & s\xi \end{bmatrix}$$

(3.2.4)

As matrizes de rigidez, de rigidez geométrica e de massa, e do vetor das cargas nodais equivalentes são deduzidos a partir das equações (2.3.3), (2.3.4), (2.2.5) e (2.3.5), respectivamente. Basta fazer nas mesmas as devidas substituições das matrizes [A] e [B] e integrar. Essas matrizes encontram-se de forma explicitada nas subrotinas SANDL, RISAN, MASAL, respectivamente. Quanto aos vetores das cargas nodais e-

quivalentes, basta consultar os de um elemento de viga simples. Isto se faz pelo fato do campo de deslocamento transversal do elemento de viga sandwich desenvolvido ser igual ao de um elemento de viga simples.

3.3 - MODIFICAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS

Ao ser feito o acoplamento dos elementos finitos para a representação da estrutura global, usualmente, a continuidade deve ser mantida para todos os deslocamentos correspondentes a grau de liberdade, que ocorrem nos nós. Entretanto quando o cisalhamento transversal é incluído, a condição de continuidade de rotação devida ao cisalhamento χ_s deve ser removida para que possa haver o ponto anguloso da curvatura associado à descontinuidade da tensão cisalhante resultante que ocorre no caso de uma carga concentrada. Neste caso apenas os seguintes deslocamentos nodais precisam ser utilizados para manter a continuidade necessária:

1 - O deslocamento transversal w

2 - A rotação associada com a flexão pura χ_b

3 - Os ângulos de dobramento nas interfaces

$$\gamma = \gamma_c - \gamma_f$$

Assim, o vetor das cargas nodais equivalentes e as matrizes de rigidez, de rigidez geométrica e de massa

precisam ser transformados afim de serem expressos em função dos seguintes deslocamentos nodais.

$$\{r\}^T = \{w_i \; \chi_{bi} \; \gamma_i \; w_j \; \chi_{bj} \; \gamma_j \; \vdots \; \gamma_{fi} \; \gamma_{fj}\}^T \tag{3.3.1}$$

A transformação é simples e pode ser feita a partir das definições

$$\gamma = \gamma_c - \gamma_f$$

$$\chi_b = \chi - h_c\gamma_{c/d} - h_f\gamma_{f/d}$$

tem-se então

$$\{r\} = [T] \; \{U\}^e \tag{3.3.2}$$

Pode-se observar que os deslocamentos nodais dados pela equação (3.3.1) são mais vantajosos que os da equação (3.2.2) para expressar as condições de contorno necessárias em um suporte engastado. Em tal local, o deslocamento transversal w, a rotação devido ao momento χ_b e o ângulo de dobramento γ são todos nulos enquanto a rotação total e as distorções γ_c e γ_f não são nulas. Os deslocamentos nodais $\{r\}$ do elemento permitem considerar tal descontinuidade no apoio mas no caso da força concentrada considerada num nó qualquer é

necessário fazer a condensação dos dois últimos graus de liberdade da equação (3.3.1). No programa isto é feito através das subrotinas ROTA, CONDE e CONMA.

3.4 - ELEMENTO FINITO Q

Este elemento possui uma variação cúbica de deslocamento transversal e variações quadráticas de rotação devido ao cisalhamento tanto nas faces quanto no núcleo. Para que estas variações quadráticas possam ser feitas considerar-se-á um nó interno (no meio do elemento) com dois graus de liberdade correspondentes às rotações de cisalhamento nas faces γ_c e no núcleo γ_f.

Assim: $$(\{U\}^e)^T = \{u(o) \quad u(1) \quad u(1/2)\}^T$$

Após a dedução das matrizes faz-se a condensação dos dois graus de liberdade correspondentes, nas matrizes obtidas, ao nó interno. Quanto à utilização deste elemento serve os mesmos comentários feitos no elemento anterior. As matrizes de rigidez, de rigidez geométrica e de massa deste elemento encontram-se de forma explicitada nas subrotinas SANDQ, RISAN e MASAQ. Deve-se observar que após a condensação dos graus de liberdade internos do elemento Q a matriz de rigidez geométrica é a mesma para os dois elementos. Devido a isto utiliza-se a mesma subrotina RISAN.

IV - ANÁLISE ESTÁTICA

4.1 - INTRODUÇÃO

No presente capítulo será considerada a análise estática de viga sandwich axialmente carregada. A equação de equilíbrio estático será obtida a partir da equação de movimento. Desprezando-se, então, na equação (2.4.5) o têrmo relativo às forças de inércia, obtém-se a equação do equilí - brio estático:

$$([K] - [K_g])\ \{U\} = \{F\} \qquad (4.1)$$

4.2 - PROGRAMA DESENVOLVIDO

Desde que no capítulo II já foram determinadas as matrizes $[K]$ e $[K_g]$ e o vetor $\{F\}$, para a obtenção do vetor dos deslocamentos nodais $\{U\}$ basta resolver o sistema de equações (4.1). De posse destes pode-se calcular as tensões e esforços na estrutura. Para isto foi desenvolvido um programa para computador, o qual segue o padrão dos programas desenvolvidos para a análise matricial das estrutural usando o método dos deslocamentos. Devido a este fato não será apresentado o programa.

4.3 - VIGA EM BALANÇO

Considere-se uma viga sandwich de largura unitária com uma carga unitária no extremo livre. A viga possui as seguintes características:

$h_c = 0.5$ in, $E_c = 2x10^4$ lb/in^2, $G_c = 10^4$ lb/in^2, $(\lambda_c = 1)$

$$\rho_c = 0.001126 \text{ lb/in}^3$$

$h_f = 0.04$ in, $E_f = 10^7$ lb/in^2, $G_f = 4x10^6 x$lb/in^2, $(\lambda_f = 1)$

$$\rho_f = 0.09669 \text{ lb/in}^3$$

Vão = 10 in, carga P = 1.0 lb

No gráfico 4.1 apresentam-se os resultados obtidos, para a deflexão da viga, com o elemento L desenvolvido, os quais são comparados com a solução analítica de YI-YUAN-YU (ref.2). (Os elementos tipo Q dão melhores resultados). As análises feitas com os mesmos elementos L e Q, mas com as matrizes modificadas devido a mudança de graus de liberdade, (possibilitando as deformações devido ao cortante no engaste) dão, respectivamente, melhores resultados.

No grafico 4.2 apresentam-se os valores obtidos para a flecha na extremidade livre para as hipóteses de

se usar uma malha, de elementos, uniforme (facilidade no preparo dos dados de entrada no programa, maior rapidez na montagem da matriz de rigidez global da estrutura) e com maior concentração de elementos perto do engaste (melhor convergência para o mesmo número de elementos). Observa-se,então a evidente conveniência da concentração de elementos junto ao engaste. (sendo uma viga bi-apoiada o único exemplo em que uma malha uniforme seria mais conveniente)

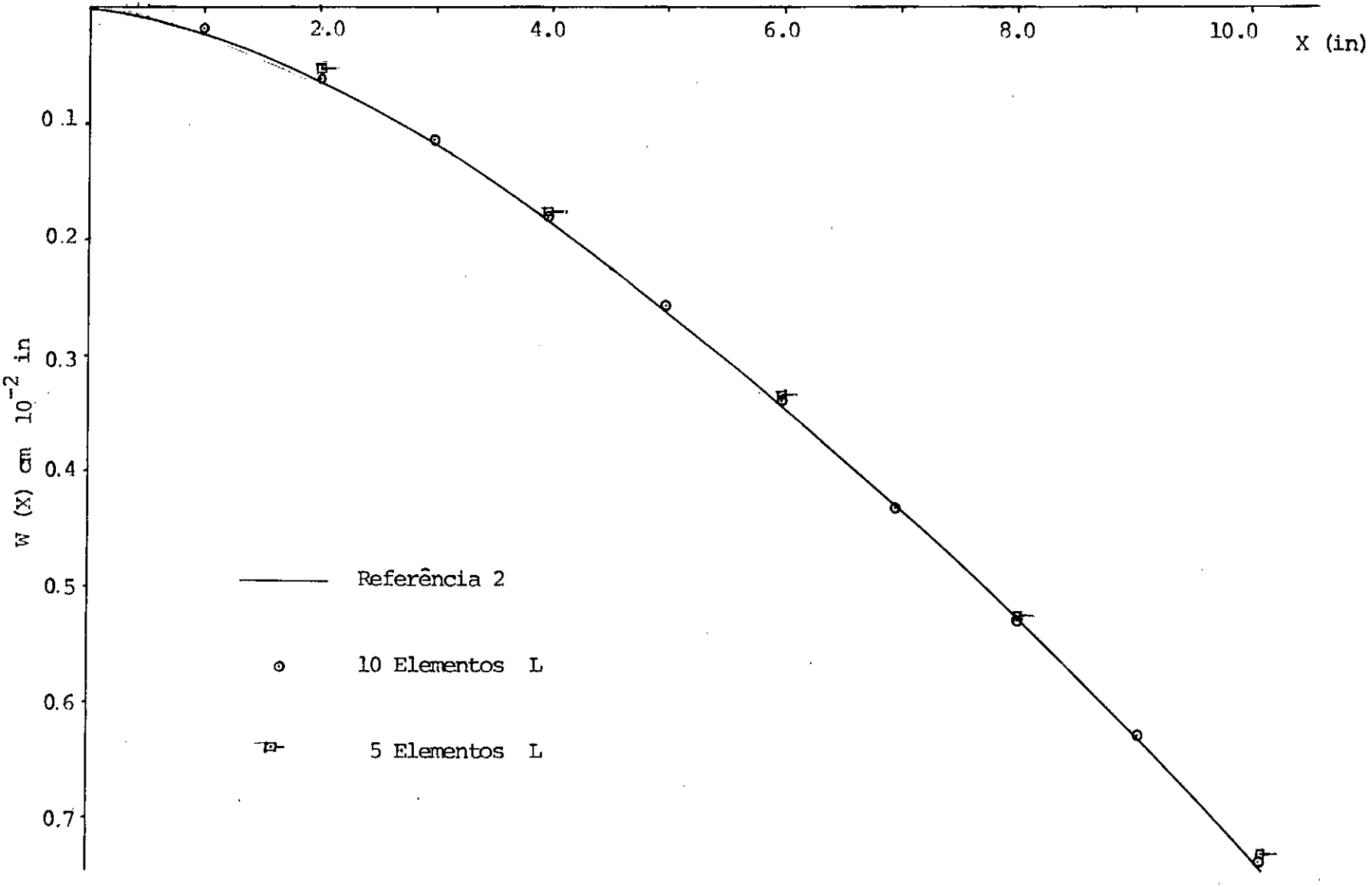
Além disso,a análise da distribuição do cortante para o núcleo e para as faces é feita e resultados expressivos são observados no gráfico 4.3, onde são indicados os resultados obtidos por:

a) secção 1.2 de PLANTEMA (ref. 3) - Não leva em conta o empenamento e a rigidez à flexão das faces, nem a rigidez a flexão do núcleo.
b) secção 1.3 de PLANTEMA (ref. 3) - Não leva em conta o empenamento das faces, nem a rigidez a flexão do núcleo.
c) Teoria de YI-YUAN-YU (ref. 2) - Considera o empenamento e flexão em todas as camadas
d) Elementos Finitos de Viga SANDWICH:
   1 - 5 elementos L (do mesmo comprimento)
   2 - 5 elementos Q (do mesmo comprimento)
   3 - 5 elementos L (comprimento variável)
   4 - 5 elementos Q (comprimento variável)

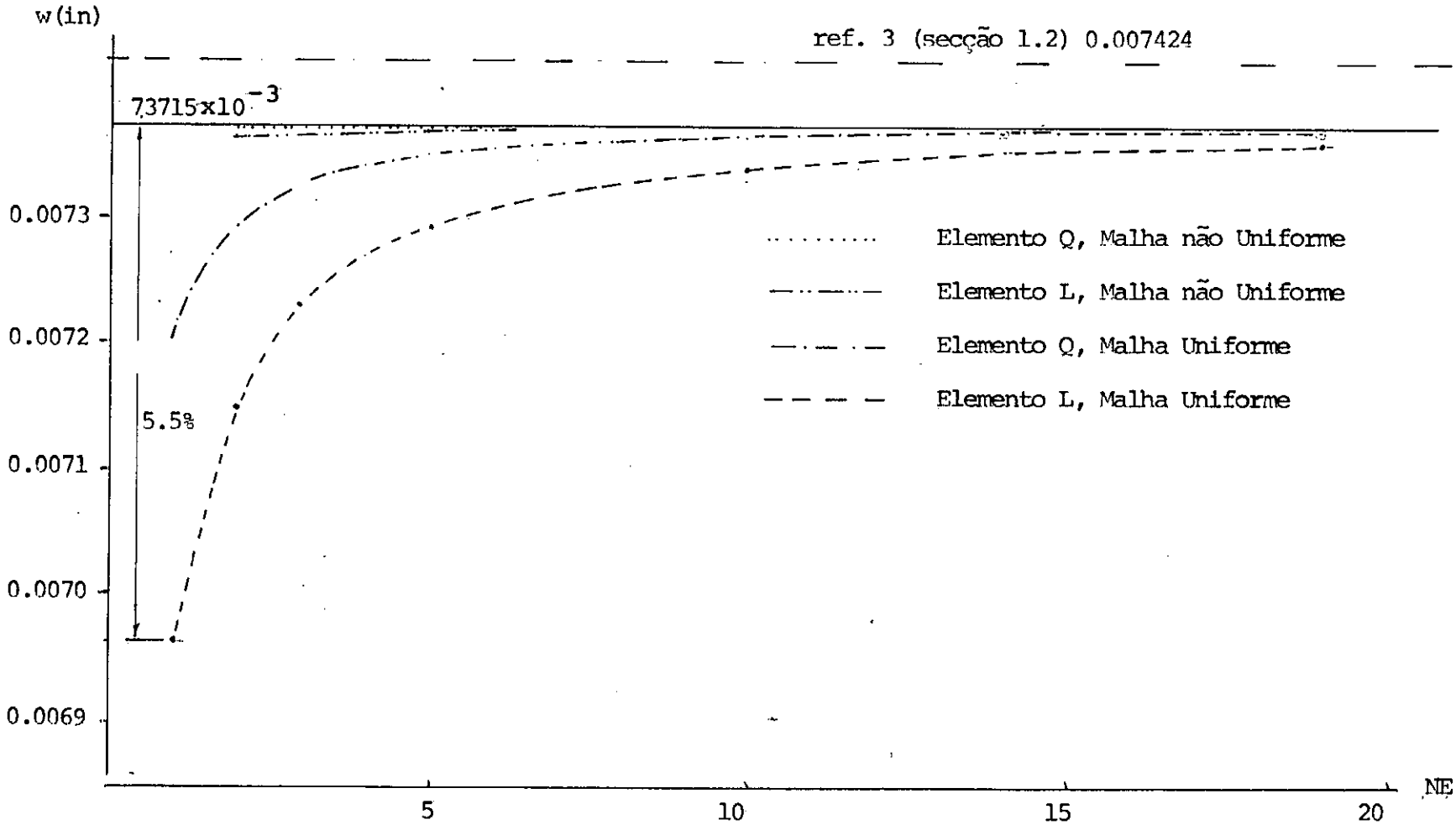
Pode-se observar, novamente, a conveniên-

cia de se usar uma malha não uniforme (elementos menores junto ao engaste). Tem-se assim, uma melhor reprodução da variação do Cortante absorvido pelo núcleo. Tal reprodução é o que torna conveniente o uso de uma malha não uniforme

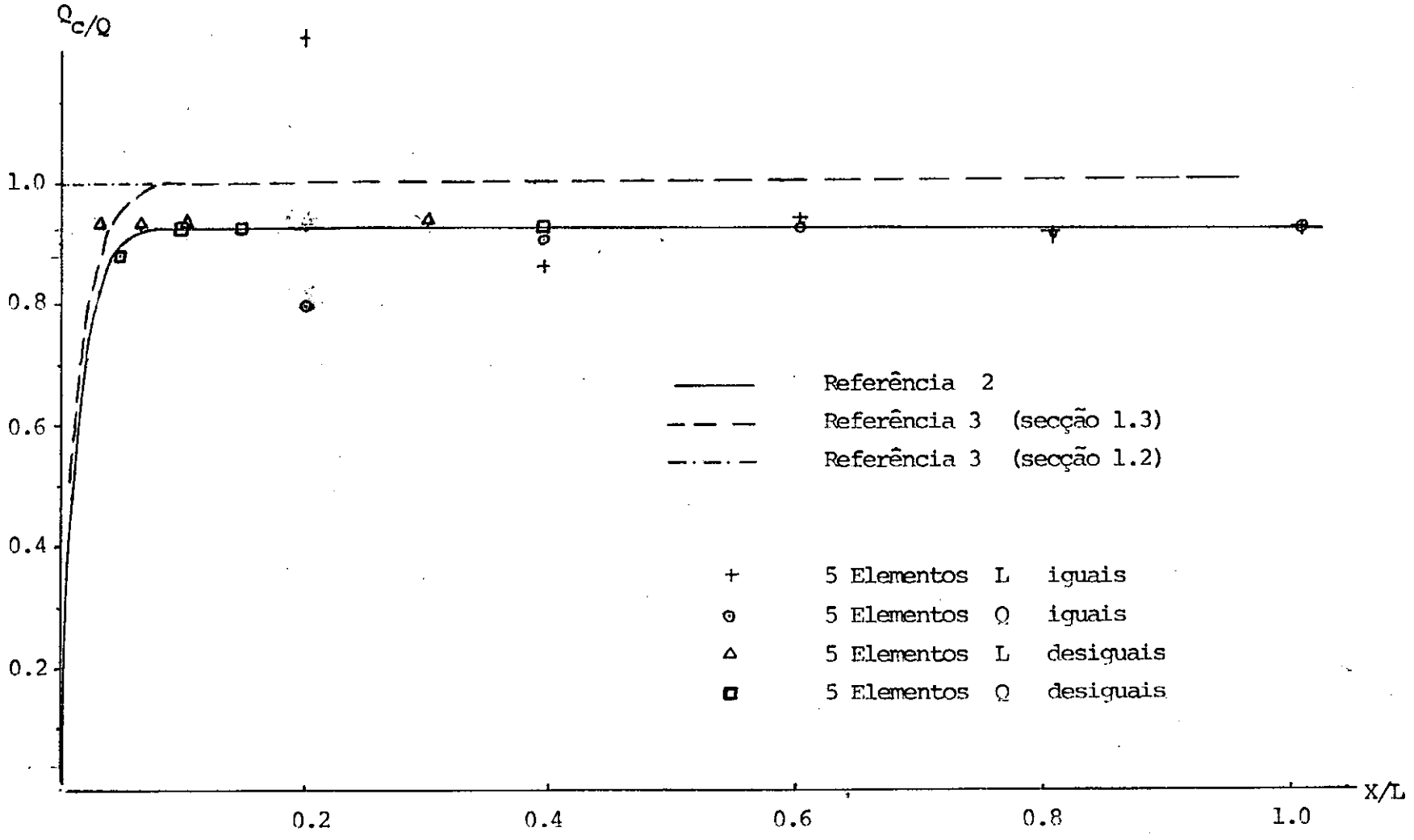
No engaste, pela Teoria de Yi-Yuan Yu o núcleo ainda absorve 1.54% do Cortante. Usando os graus de liberdade da equação (3.3.1) (sub-rotina ROTAD) e liberando γ_f do engaste para uma malha de 10 elementos L e Q obtém-se que o núcleo absorve 1.55% e 1.54% respectivamente.



4.1 - Deflexão de uma Viga Balanço



4.2 - Análise de convergência dos elementos



4.3 - Distribuição do Cortante entre a face e o núcleo

V - VIBRAÇÕES LIVRES E CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM

5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentada a análise das vibrações livres de vigas sandwich axialmente carregadas. O conhecimento de tais movimentos oscilatórios, que são uma propriedade característica da estrutura, pois dependem da distribuição de massa e de rigidez desta, são importantes pré requisitos para a determinação da resposta dinâmica da estrura.

Serão, também, determinadas as cargas críticas de flambagem, pois, da mesma forma, podem ser tratadas como um problema de autovalores.

5.2 - DETERMINAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

Desprezando-se na equação (2.4.5) o vetor {F} correspondente ao carregamento transversal tem-se:

$$[M]\{\ddot{U}\} + ([K] - [K_g])\{U\} = \{o\} \qquad (5.2.1)$$

Desde que o movimento vibratório seja harmônico os deslocamentos nodais podem ser expressos por:

$$\{U\} = \{U_0\} \text{ sen } \omega t$$

onde ω é a frequência de vibração e $\{U_0\}$ é o vetor constituído pelas amplitudes máximas dos deslocamentos $\{U\}$ e t é o tempo.

Substituindo esta equação na anterior obtem-se:

$$\omega^2 [M]\{U_0\} = ([K] - [K_{\bar{g}}]) \{U_0\} \qquad (5.2.2)$$

O problema, então, fica sendo a determinação dos autovalores ω e seus autovetores $\{U_0\}$. Deve-se notar que o vetor $\{U_0\}$ aparecendo dos dois lados da equação (5.2.2) deixa de expressar valores quantitativos e passa a representar valores relativos.

A resolução do problema de autovalor é feita no programa elaborado através da subrotina NEGIE que é uma adaptação de uma existente em ZIENKIEWICZ (7). Nesta subrotina, por um processo iterativo, obter-se-á, em ordem crescente, tantos quantos forem necessários, e possíveis, auto-valores e respectivos autovetores.

5.3 - DETERMINAÇÃO DAS CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM

Como caso particular do anterior pode-se

determinar as cargas críticas da estrutura desprezando-se na equação (5.2.1) a influência das forças de inércia.

$$([K] - [K_g])\ \{U\} = \{0\}$$

A solução segue a mesma rotina anterior , só que agora o autovalor corresponde a carga de flambagem e o autovetor a forma de flambagem respectiva. Pode-se,assim , determinar quantas interessarem e forem possíveis, cargas críticas de flambagem com suas respectivas formas de flambagem.

A determinação da carga crítica fundamental pode ser feita de outra maneira, fazendo na equação (5.2.1) a carga axial ser incrementada. A carga crítica corresponderá à passagem da frequência fundamental pelo valor zero. Tal não poderá ser determinado diretamente mas pode ser interpolado fazendo uso do fato de que quando a carga axial se torna maior que o carga crítica fundamental, a 1ª frequência passa a ser imaginária. (este é o recurso usado para determinar a carga crítica de flambagem quando se usa matriz de massa diagonal).

5.4 - RESULTADOS

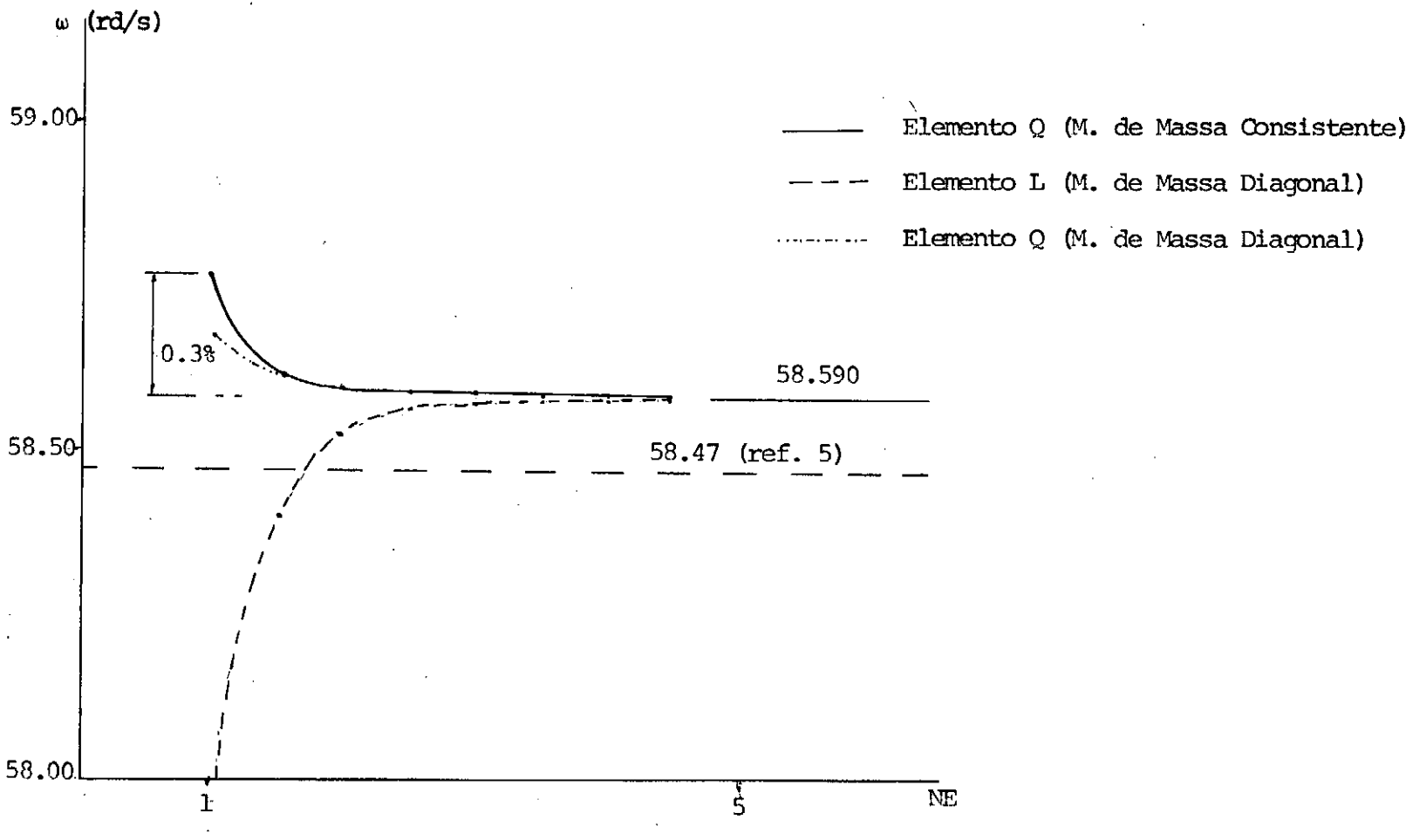
Para uma viga com as mesmas característi-

cas da considerada na análise estática e de comprimento de 20 in serão determinadas algumas frequências naturais e também algumas cargas críticas de flambagem. Os resultados são comparados com os de Villaça (ref. 5), que não considera a rigidez à flexão do núcleo e das faces em relação aos seus planos médios, e considera infinita a rigidez ao cisalhamento das faces. Os resultados deste são, então, limites para os quais tendem os obtidos com os elementos desenvolvidos quando também forem feitas tais hipóteses. Serão apresentados em maior número os resultados obtidos com o elemento tipo Q visto que, já na análise estática, foi o que apresentou melhor convergência. Os exemplos aproveitam a simetria da viga só para serem plotados e não para a obtenção dos resultados.

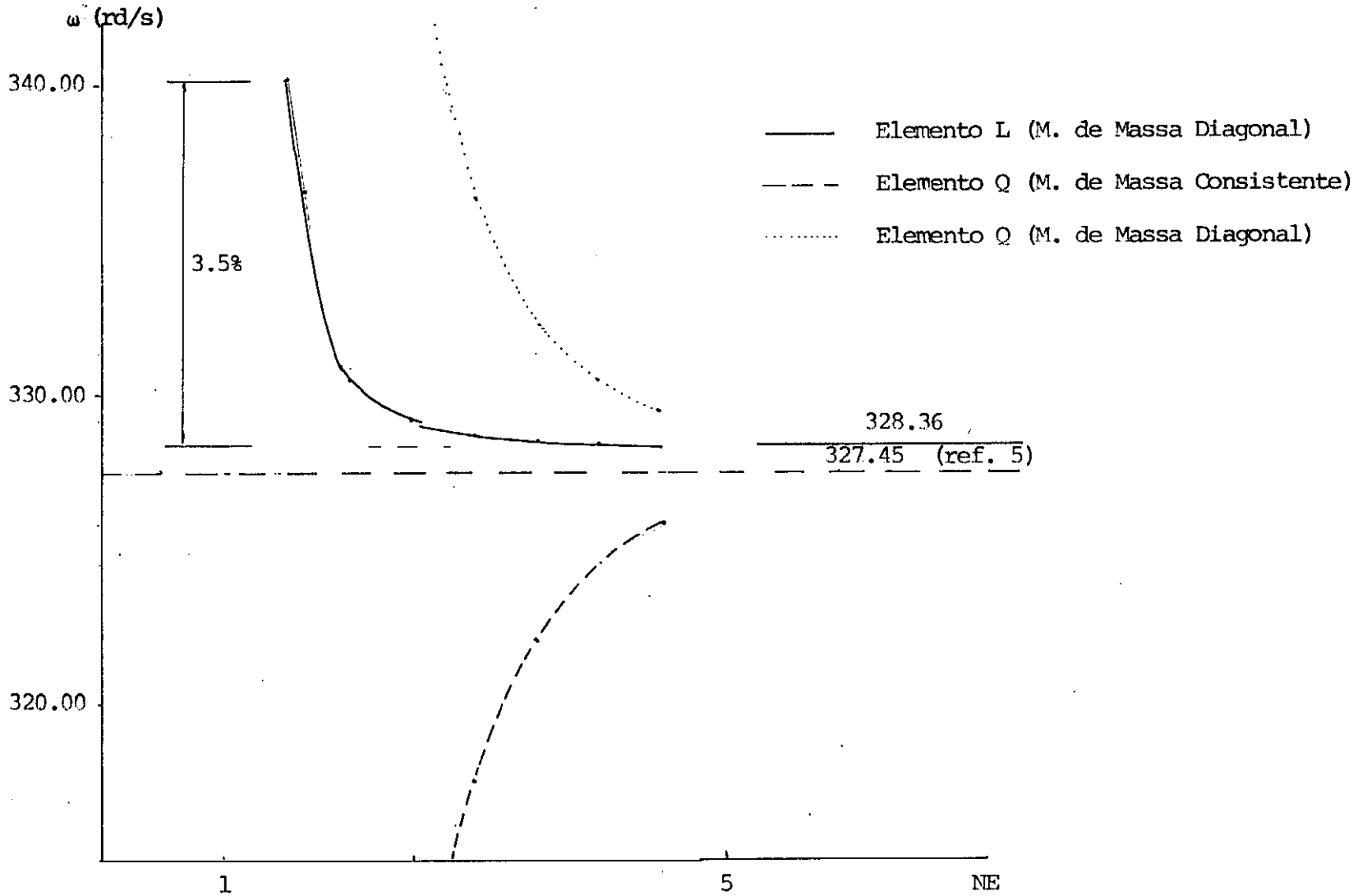
Nos gráficos 5.1 são indicados as convergências das frequências para horizontais que serão consideradas as soluções exatas.

Nos gráficos 5.2 são indicadas as convergências das cargas críticas de flambagem para horizontais que serão consideradas as soluções exatas. À guisa de ilustração no caso da viga bi-apoiada, foram feitas, também, as mesmas considerações que Villaça (ref. 5)

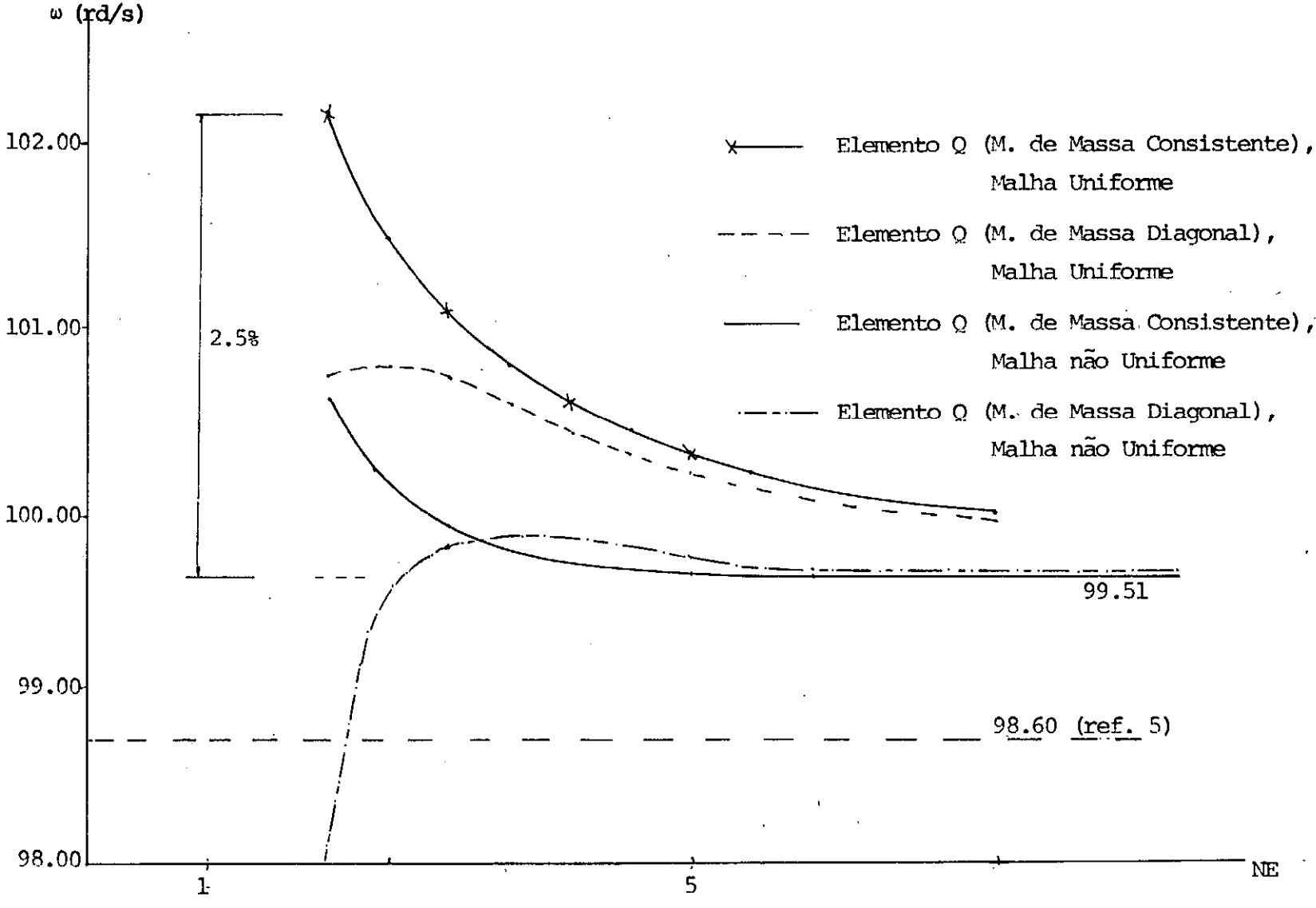
No gráfico 5.3 é indicada a convergência da 1ª frequência da viga bi-apoiada, com uma carga axial igual a 30% da primeira carga de flambagem.



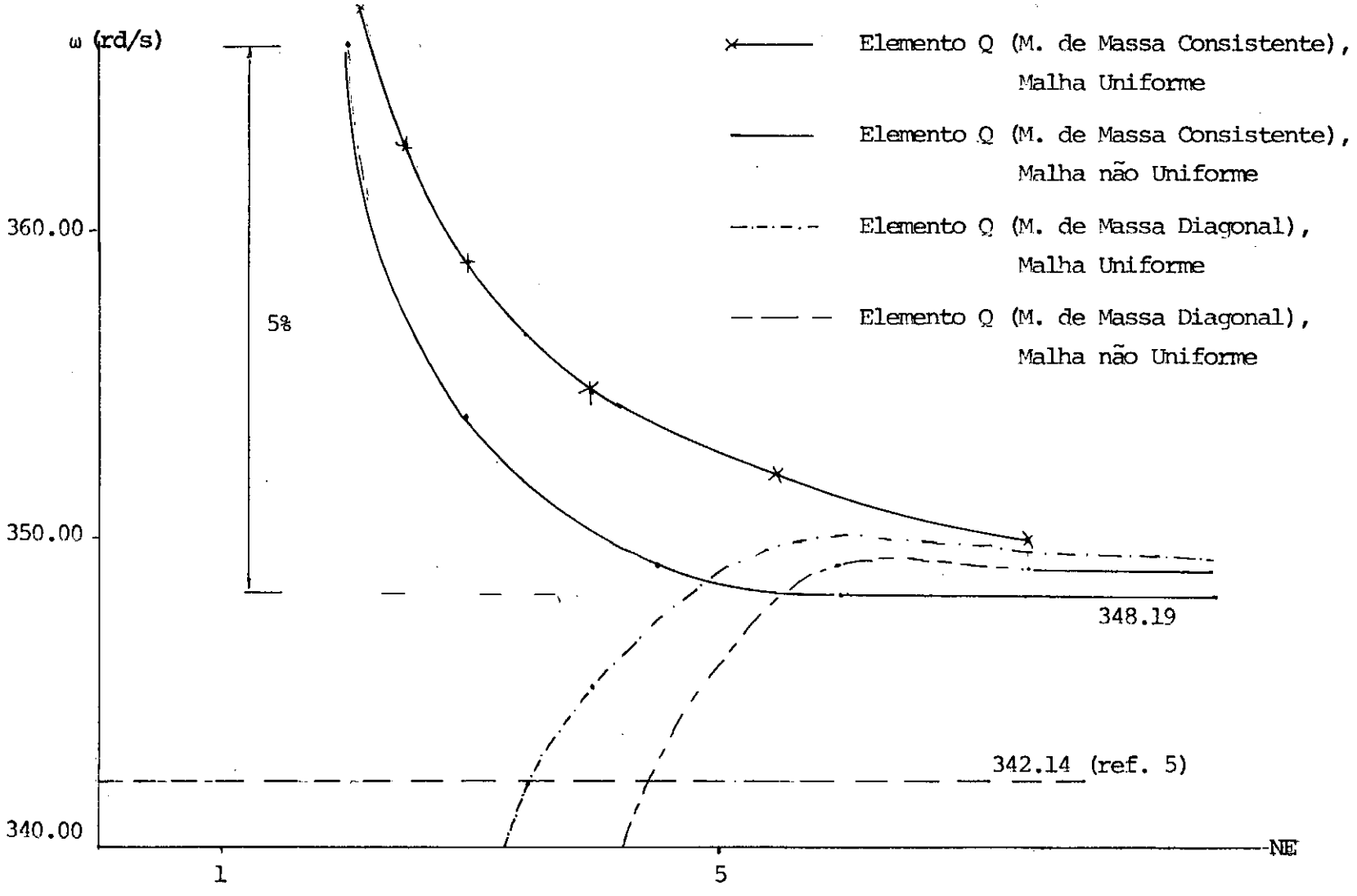
5.1.1 - 1ª Frequência Natural (Bi-Apoiada)



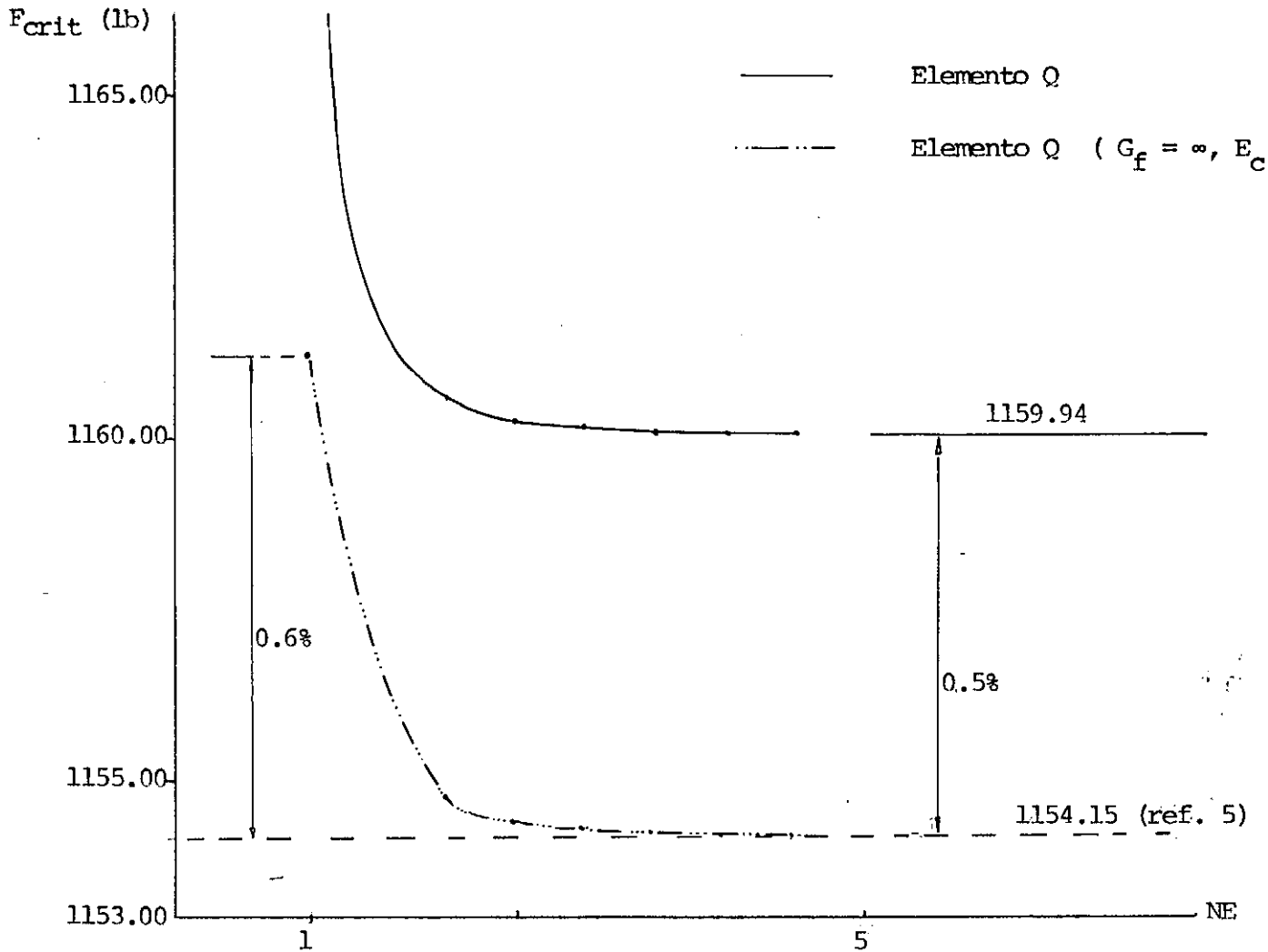
5.1.2 - 3ª Frequência Natural (Bi-Apoiada)



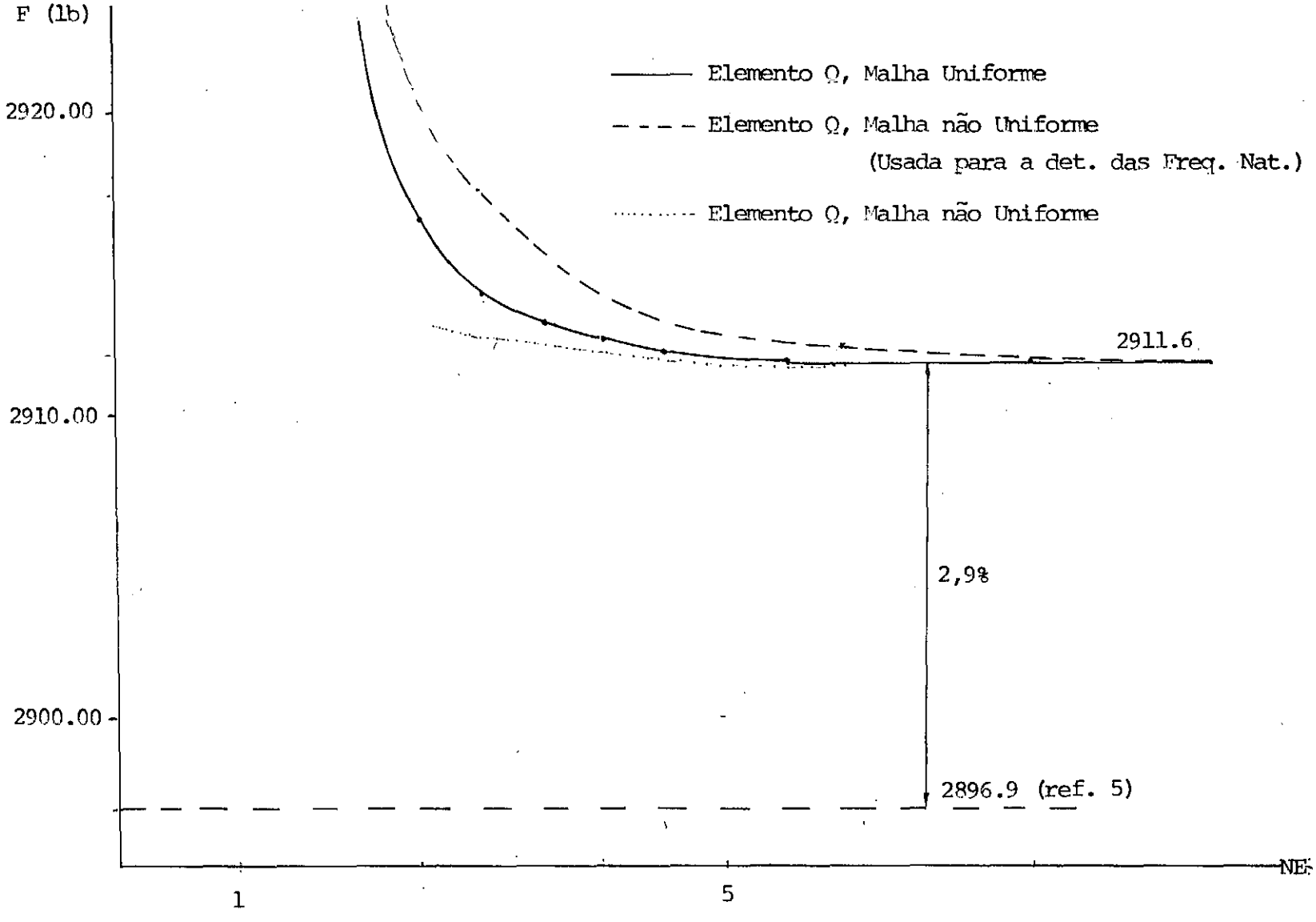
5.1.3 - 1ª Frequência Natural (Bi-engastada)



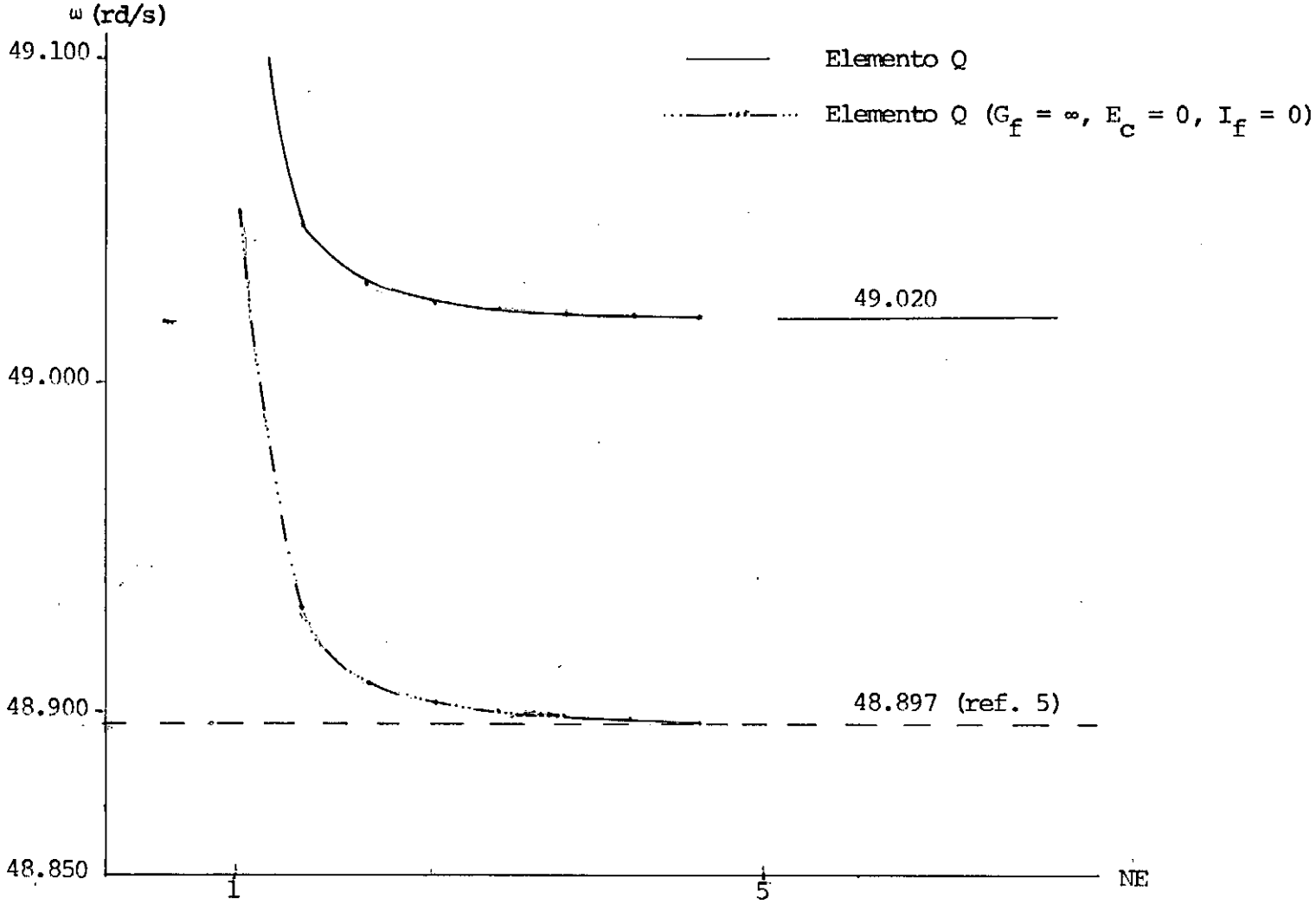
5.1.4 - 3ª Frequência Natural (Bi-engastada)



5.2.1 - 1ª Carga Crítica de Instabilidade (Bi-apoiada)



5.2.2 - 1ª Carga Crítica de Instabilidade (Bi-engastada)



5.3.1 - 1ª Frequência (Bi-apoiada) Carga Axial = 30% Carga de Flambagem

VI - RESPOSTA DINÂMICA

6.1 - INTRODUÇÃO

No presente capítulo far-se-á a determinação da resposta dinâmica e uma força excitadora conhecida em função do tempo e cuja posição não varia.

Para a solução do sistema de equações diferenciais (2.4.5) será usado o método de superposição modal. Em tal método supoem-se conhecidas as frequências e modos normais do sistema estrutural. Em geral consegue-se uma boa precisão no cálculo da resposta com o uso de poucos modos normais, (Devido a isto é que se usou o método iterativo para a determinação das frequências).

6.2 - MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL

O conceito básico do método é considerar a resposta do sistema como sendo uma combinação linear dos modos normais de vibração:

$$\{U\} = [U_o]\ \{n\} \qquad (6.1)$$

onde $\{U\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais, $[U_o]$ a matriz cujas colunas $\{U_o\}$ são os modos normais de vibração considera-

dos na determinação da resposta dinâmica e $\{\eta\}$ o vetor constituido por deslocamentos generalizados (variáveis com o tempo) associados aos modos normais.

Substituindo a equação (6.1) na (2.4.5) obtém-se:

$$[M]\ [U_o]\ \{\ddot{\eta}\} + ([K] - [K_g])\ [U_o]\ \{\eta\} = \{F\} \tag{6.2}$$

Utilizando agora a propriedade de ortogonalidade com relação a matriz de massa e de rigidez da estrutura dos modos normais de vibração, indicadas por

$$\{U_o\}_n^T\ [M]\ \{U_o\}_m = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ M_n^* & \text{para } m = n \end{cases} \tag{6.3}$$

$$\{U_o\}_n^T\ ([K]-[K_g])\{U_o\}_m = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ K_n^* & \text{para } m = n \end{cases}$$

e premultiplicando a equação (6.2) por $\{U_o\}_n^T$ obtém-se:

$$M_n^*\ \ddot{\eta}_n + K_n^*\ \eta_n = F_n^* \tag{6.4}$$

onde:

$$F_n^* = \{U_o\}_n^T \{F\}$$

Que representa uma equação diferencial Linear correspondente ao n-ésimo modo normal.

Assim o sistema de equações diferenciais lineares (2.4.5) foi desacoplado e tem-se um conjunto de equações diferenciais independentes onde em cada equação a variável a determinar é um deslocamento generalizado.

A solução da equação (6.4) que corresponde ao modo normal pode ser obtida usando o método da integral de Duhamel. Assim:

$$\eta_n = \eta_n(0) \cos \omega_n t + \dot{\eta}_n(0)\, \omega_n^{-1} \operatorname{sen} \omega_n t + M_n^{*-1}\, \omega_n^{-1} \int_o^t \operatorname{sen} \omega_n (t-\tau)\, F_n(\tau)\, d\tau \qquad (6.5)$$

onde $\eta_n(0)$ e $\dot{\eta}_n(0)$ são os valores iniciais de η_n e $\dot{\eta}_n$.

Substituindo $\{\eta\}$de (6.5) em (6.1) obtém-se os deslocamentos nodais. Faltam ainda os valores de $\{\eta(0)\}$ e $\{\dot{\eta}(0)\}$ que serão determinados em função dos deslocamentos nodais $\{U(0)\}$ e

das velocidades nodais $\{\dot{U}(0)\}$ iniciais supostos conhecidos. Premultiplicando ambos os lados da equação (6.1) por $[U_o]^T [M]$ obtém-se:

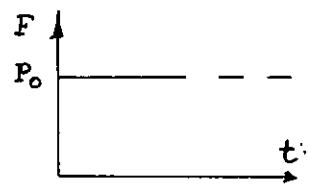
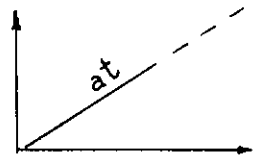
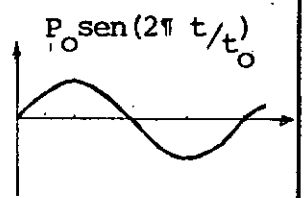
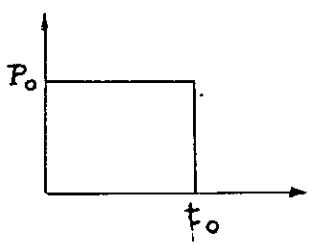
$$\eta_n(0) = M_n^{*-1} \{U_o\}^T [M] \{U(0)\}$$

$$\dot{\eta}_n(0) = M_n^{*-1} \{U_o\}^T [M] \{\dot{U}(0)\}$$

6.3 - INTEGRAIS DE DUHAMEL

Nas soluções práticas a carga F(t) e consequentemente as cargas generalizadas F^* são usualmente aproximadas por funções simples para as quais as integrais de Duhamel podem ser determinadas exatamente. Przemieniecki (8) apresenta uma tabela com grande variedade de funções com suas respectivas integrais de Duhamel. Na subrotina DUHAM foram programadas algumas integrais de Duhamel de funções que são apresentadas no quadro seguinte. Qualquer outro tipo de função que se tenha é só introduzir na subrotina uma declaração com a sua integral de Duhamel.

Quadro 6.1

TIPO	FUNÇÃO $F^*(t)$	$\int_0^t \text{sen}\,[\omega(t-\tau)]\,F^*(\tau)\,d\tau$
1		$\frac{P_o}{\omega}(1 - \cos \omega t)$
2		$\frac{a}{\omega}\left(t - \frac{\text{sen}\ \omega t}{\omega}\right)$
3		$\frac{P_o\ t_o}{\omega^2 t_o^2 - 4\pi^2}\left(\omega t_o \text{ sen } 2\pi\frac{t}{t_o} - 2\pi \text{ sen } t\right)$
4		$\frac{P_o}{\omega}(1 - \cos \omega t)$ $\quad t \le t_o$ $\frac{P_o}{\omega}\left[\cos \omega (t-t_o) - \cos \omega t\right]$ $\quad t \ge t_o$

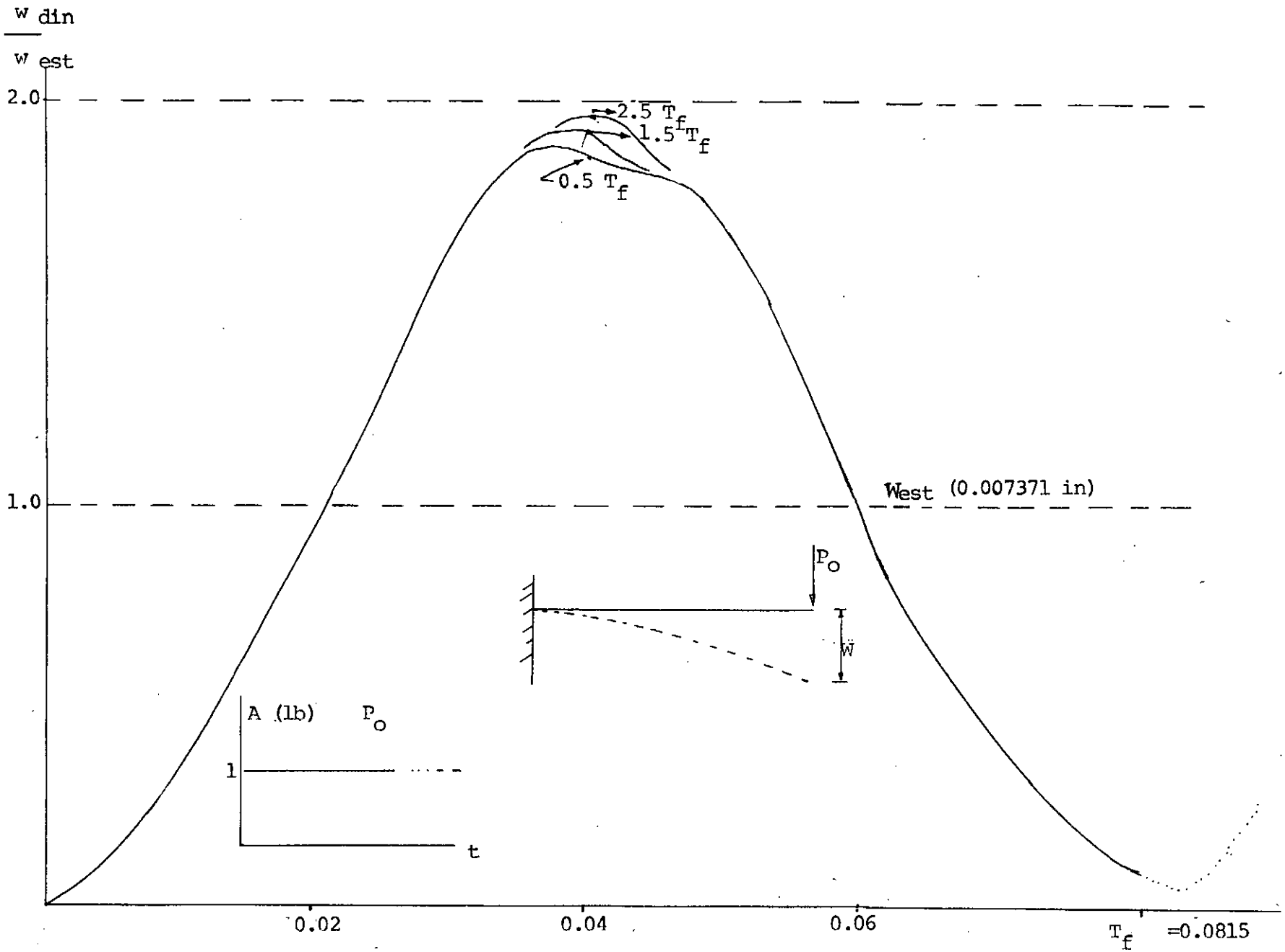
6.4 - RESPOSTA DINÂMICA DE UMA VIGA EM BALANÇO

Para os exemplos apresentados a seguir foi utilizada a Viga em Balanço da análise estática.

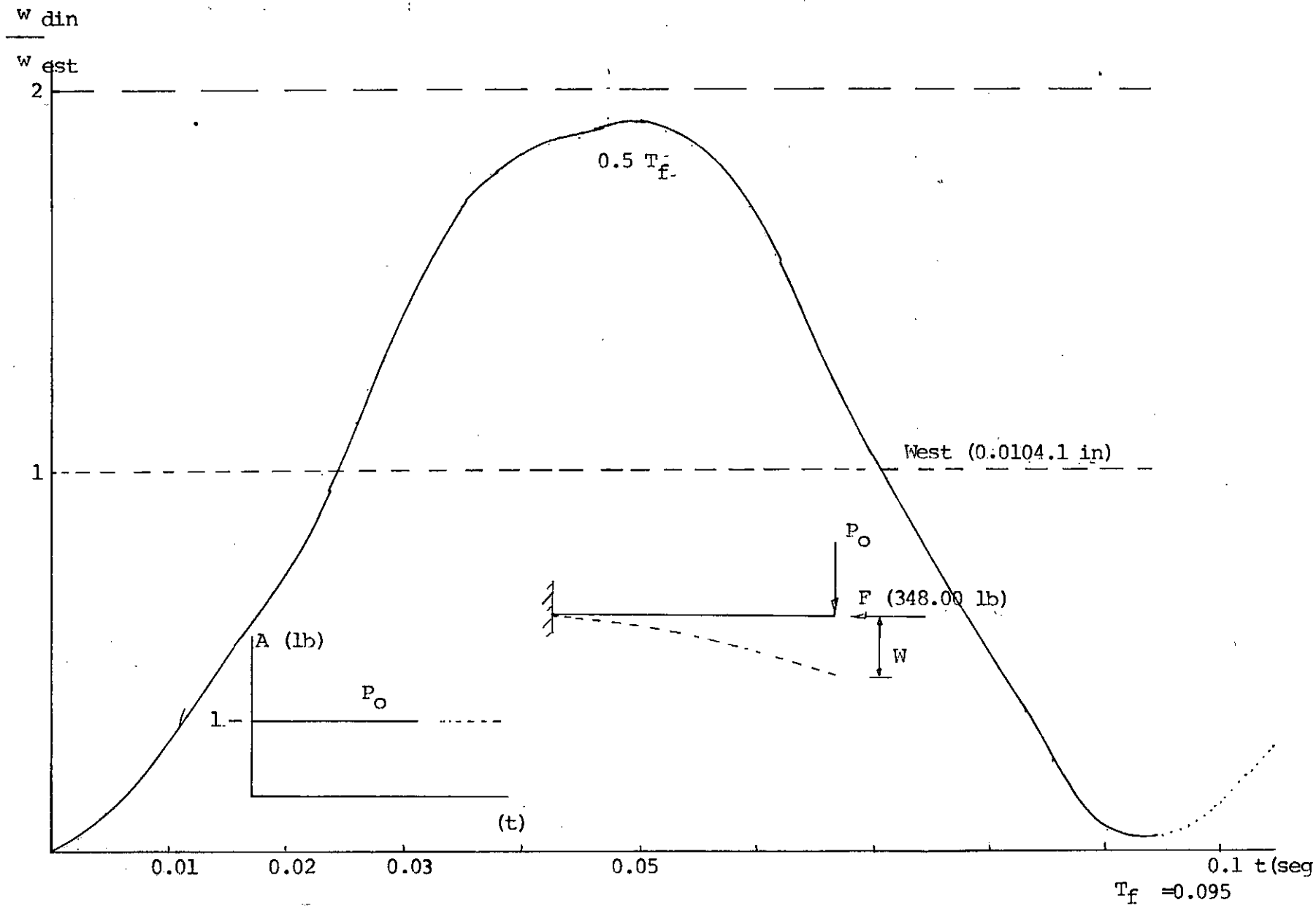
No primeiro exemplo, a carga concentrada no extremo livre tem a variação do tipo 1 do quadro (6.1)

No segundo exemplo, o mesmo, só que há uma carga comprimindo axialmente a estrutura e igual a 0.3 da carga de flambagem.

Nos dois exemplos os deslocamentos comuns calculados em intervalos de tempo igual a 1/40 do primeiro período natural da viga.



6.1 - Resposta Dinâmica da Viga a uma Carga Transversal



6.2 - Resposta Dinâmica da Viga (Comprimida axialmente) a uma Carga Transversal

VII - CONCLUSÕES

a) O elemento Q apresenta melhores resultados que o elemento L.

b) Modificando características mecânicas das camadas, pode-se representar o elemento de viga sandwich obtido através de outros enfoques. (inclusive um elemento de viga simples com sensibilidade ao esforço cortante).

c) Para ambos os elementos, na análise estática, é possível garantir que a convergência para a solução exata se dá por valores inferiores de flecha já que se tratam de elementos conformes.

d) Na análise dinâmica é possível garantir que a convergência para as frequências exatas se dá por valores superiores quando se usa a matriz de massa consistente. O mesmo não ocorre quando se usa matriz de massa diagonal.

e) Na geração da malha de elementos deve-se levar em conta, como fator importante na aceleração da convergência, a necessidade de intensificar o número de elementos junto ao engaste.

f) A malha que dá bons resultados para as frequências naturais não é tão satisfatória para a determinação das Cargas de Flambagem (no caso de engaste) e vice-versa.

Além destas conclusões, chegou-se a outras baseadas em dados fornecidos pela subrotina de autovalores usada. O uso de outras (e deve ser experimentado) pode vir a modificar alguma coisa nas conclusões.

g) O uso da matriz diagonal de massa não oferece acentuada vantagem na formulação desenvolvida. A consideração da economia de memória de computador não tem grande valor, pois o uso de matriz de massa consistente guardada em banda (principalmente numa estrutura linear, isto é, uma estrutura em que uma dimensão domina) diminui esta vantagem. No programa elaborado onde é feita a condensação global dos graus de liberdade referentes a γ_c e γ_f dos elementos (com isto deixa de haver "zeros" na matriz diagonal), aparece a necessidade de ser feita, e, no programa apresentado é feita, a condensação da matriz de massa consistente ao nível global, o que demanda tempo e memória. O gasto a mais em tempo é pequeno, tendo em conta que, em cada análise, o que gasta mais tempo é a obtenção dos autovalores. Foi, também, experimentado o uso de ser considerada, na matriz de massa consistente do elemento, apenas a interação entre os graus de liberdade w e χ Os resultados foram bem próximos dos obtidos com a condensação de $[M]$ (tal fato se deve a serem os graus de liberdade condensados de menor influência que os não condensados), e com a vantagem da economia de memória.

h) A obtenção das cargas críticas de flambagem é mais um fa-

to a confirmar a vantagem de uso da matriz de "massa" consistente. A obtenção da primeira carga crítica de flamba - gem através do uso da matriz de massa diagonal é um processo lento e de menor precisão. Neste caso não há necessidade de se fazer a condensação da matriz de rigidez geométrica global, pois os graus de liberdade eliminados não afetam nesta (as linhas e colunas de $[K_g]$ correspondentes a γ_c e γ_f são formadas só de zeros), quando são mantidos os deslocamentos nodais dados por (3.2.2)).

VIII - BIBLIOGRAFIA

1 - ABEL, J.F., & POPOV, E.P., STATIC AND DYNAMIC FINITE ELEMENT ANALYSIS OF SANDWICH STRUCTURES. Proc. conf. Matrix Methods Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AFFDL-TR-68-150

2 - YU, Y.Y., A NEW THEORY OF ELASTIC SANDWICH PLATES -ONE-DIMENSIONAL CASE. J.App. Mech., Vol. 26, Nº 3, September 1959, pp. 415 - 421

3 - PLANTEMA, F.J., SANDWICH CONSTRUCTION. John Wiley & Sons, inc. 1966

4 - ALLEN, H.G., ANALYSIS AND DESIGN OF STRUCTURAL SANDWICH PANELS., Pergamon Press Ltd., 1969.

5 - VILLAÇA, S.F., ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS SANDWICH COMPRIMIDAS. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, Tese de Mestrado, 1970.

6 - AHMED, K.M., DYNAMIC ANALYSIS OF SANDWICH BEAMS. Journal of Sound and Vibration (1972) 21 (3), 263-276.

7 - ZIENKIEWICZ, O.C., THE FINITE ELEMENT METHOD IN ENGINEERING SCIENCE. 2nd. London, Mcgraw-Hill, 1971

8 - PRZEMIENIECKI, J.S., THEORY OF MATRIX STRUCTURAL ANALYSIS. New York, Mcgraw-Hill, 1968.

9 - VENÂNCIO FILHO, F., MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE ESTRUTURAL, Notas de Aula, ITA, 1972.

10 - BRUCH. Y.A., ANÁLISE DINÊMICA DE PLACAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ. Tese de Mestrado. 1973

11 - YU, Y.Y., SIMPLE THICKNESS - SHEAR MODES OF VIBRATION OF INFINITE SANDWICH PLATES. J.App. Mech., Vol. , Nº , December 1959, pp. 679 - 681

12 - YU, Y.Y., VIBRATION OF ELASTIC SANDWICH CYLINDRICAL SHELLS. J. App. Mech., Vol. , Nº , December 1960, pp. 653 - 662

13 - YU, Y.Y., FORCED FLESURAL VIBRATIONS OF SANDWICH PLATES IN PLANES STRAIN. J. App., Vol. Nº , September 1960, pp. 535 - 540.

IX - NOTAÇÕES

A_c - Ação

$[A]$ - Matriz das Funções de Interpolação

$[B]$ - Matriz que Relaciona os Componentes de Deformações com os Deslocamentos Nodais do Elemento

$[C]$ - Matriz que Relaciona as Deformações com as Componentes de Deformações

$[D]$ - Matriz que Relaciona as Tensões com as Deformaçõs no Elemento

d - Distância entre as Superfícies Média das Faces (h_c+h_f)

$\{e\}$ - Vetor Deformação

E - Módulo de Elasticidade

f - Frequência de Vibração (Hz)

G - Módulo de Cisalhamento

$[H]$ - Matriz que relaciona Deslocamentos

h - Altura da Viga

h_f - Altura do Núcleo

h_c - Altura de cada Face

$[K]$ - Matriz de Rigidez Global

$[K_g]$ - Matriz de Rigidez Geométrica Global

$[k]$ - Matriz de Rigidez do Elemento

$[k_g]$ - Matriz de Rigidez Geométrica do Elemento

S - Comprimento da Viga

s - Comprimento do Elemento

$[M]$ - Matriz de Massa Consistente Global

$[m]$ - Matriz de Massa Consistente do Elemento

NE - Número de Elementos

P - Força Axial

P_{cr} - Carga Crítica de Instabilidade

$\{P\}$ - Vetor das Cargas Aplicadas diretamente nos Nós da Estrutura.(Cargas Nodais Equivalentes da Estrutura)

$[T]$ - Matriz de Transformação

T - Energia Cinética da Viga

t - Variável tempo

U - Energia Potencial Total da Viga

$\{U\}$ - Vetor dos Deslocamentos Nodais da Estrutura

$\{U\}^e$ - Vetor dos Deslocamentos Nodais do Elemento

$\{U_o\}$ - Vetor dos Valores relativos de um Autovetor

$[U_o]$ - Matriz dos Valores relativos de um Autovetor

u - Deslocamento Axial de um Ponto

z_c - Altura em Relação à Superfície Média do Núcleo

z_f - Altura em Relação à Superfície Média da Face considerada

w - Deslocamento Transversal

γ_c - Distorção do Núcleo

γ_f - Distorção nas Faces

$\{\varepsilon\}$ - Vetor das Componentes de Deformação

ε - Componentes de Deformação

$\{\eta\}$ - Vetor dos deslocamentos generalizados

ξ - Ordenada Natural em um Elemento

κ - Componente de Deformação

λ_c - Fator Corretivo Tensão de Cisalhamento-Distorção nas faces

λ_f - Fator Corretivo Tensão de Cisalhamento-Distorção no Núcleo

ρ_c - Massa Específica do Material Componente das Faces

ρ_f - Massa Específica do Material Componente do Núcleo

$\{\sigma\}$ - Vetor Tensão

σ - Tensão Normal

τ - Tensão Cisalhante

χ - Rotação

χ_b - Rotação devido ao Momento Fletor

χ_s - Rotação devido ao Cortante

ω - Frequência Circular ($2\pi f$)

\+ - Os subscritos c ou f indica núcleo e face, respectivamente, e os superescritos s ou i indica se é referente a face superior ou face inferior.

X - APÊNDICE

Programa Desenvolvido

No presente trabalho foi desenvolvido um programa automático para um computador IBM/360 modelo 40 em linguagem FORTRAN IV, G. Devido ao problema existente na determinação dos autovalores de um sistema com muitos graus de liberdade: má convergência e grande gasto tanto de tempo quanto de memória de computador, no programa foi feita a condensação, ao nível da estrutura, dos graus de liberdade com menor influência em cada elemento finito. Pode-se,em um próximo passo, fazer a condensação de quaisquer graus de liberdade que se queira.

```
      SUBROUTINE SANDL(XE,ESPC,ELAC,GC,ESPF,ELAF,GF,NGLN,SE)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
      REAL*8 INV
      DIMENSION SE(10,10)
      A=ELAC*ESPC**3/12.
      B=GC*ESPC
      C=ELAF*ESPF**3/12.
      D=GF*ESPF
      F=ELAF*ESPF
      DE=ESPC+ESPF
      AJU=2.*A+DE**2*F+4.*C
      INV=1./XE
      SE(1,1)=6.*INV**3*AJU
      SE(1,2)=3.*INV**2*AJU
      SE(1,3)=0.
      SE(1,4)=0.
      SE(1,5)=-SE(1,1)
      SE(1,6)=SE(1,2)
      SE(1,7)=0.
      SE(1,8)=0.
      SE(2,2)=2.*INV*AJU
      SE(2,7)=INV*(A+ESPC*F*DE*0.5)
      SE(2,8)=INV*(F*ESPF*DE*0.5+2.*C)
      SE(2,5)=-SE(1,2)
      SE(2,6)=INV*AJU
      SE(2,3)=-SE(2,7)
      SE(2,4)=-SE(2,8)
      SE(3,3)=INV*(A+0.5*ESPC**2*F)+XE*B/3.
      SE(3,4)=INV*0.5*ESPC*ESPF*F
      SE(3,5)=0.
      SE(3,6)=SE(2,7)
      SE(3,7)=-INV*(A+0.5*ESPC**2*F)+XE*B/6.
      SE(3,8)=-SE(3,4)
      SE(4,4)=INV*(0.5*ESPF**2*F+2.*C)+2./3.*D*XE
      SE(4,5)=0.
      SE(4,6)=SE(2,8)
      SE(4,7)=-SE(3,4)
      SE(4,8)=-INV*(0.5*ESPF**2*F+2.*C)+1./3.*XE*D
      SE(5,5)=SE(1,1)
      SE(5,6)=-SE(1,2)
      SE(5,7)=0.
      SE(5,8)=0.
      SE(6,6)=SE(2,2)
      SE(6,7)=SE(2,3)
      SE(6,8)=SE(2,4)
      SE(7,7)=SE(3,3)
      SE(7,8)=SE(3,4)
      SE(8,8)=SE(4,4)
      DO 10 I=2,8
      DO 10 J=1,I
```

```
 10 SE(I,J)=SE(J,I)
    IF(NGLN-3)102,101,102
101 IV=8
    CALL ROTA(SE,ESPC,ESPF)
    CALL CONDE(SE,IV)
102 RETURN
    END

    SUBROUTINE MASAL(S,ESPC,ROC,ESPF,ROF,M,NGLN,SE)
    IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
    DIMENSION SE(10,10)
    REAL*8 M(10,10)
    DE=ESPC+ESPF
    A=(ESPC*ROC+2.*ESPF*ROF)*S
    B=(ROC*ESPC**3/12.+ROF*(ESPF**3/6.+DE**2*ESPF/2.))*S
    C=(-ROC*ESPC**3/12.0-ROF*ESPC*DE*ESPF/2.)*S
    D=(-ROF*(ESPF**3/6.+ESPF**2*DE/2.))*S
    E=(ROC*ESPC**3/12.+ROF*ESPC**2*ESPF/2.)*S
    F=(ROF*ESPC*ESPF**2/2.)*S
    G=(ROF*ESPF**3*2./3.)*S
    M(1,1)=13./35.*A+6./5.*B/S**2
    M(1,2)=11./210.*S*A+1./10./S*B
    M(1,3)=-1./2./S*C
    M(1,4)=-1./2./S*D
    M(1,5)=9./70.*A-6./5./S**2*B
    M(1,6)=-13./420.*S*A+1./10./S*B
    M(1,7)=M(1,3)
    M(1,8)=M(1,4)
    M(2,2)=1./105.*S**2*A+2./15.*B
    M(2,3)=1./12.*C
    M(2,4)=1./12.*D
    M(2,5)=-M(1,6)
    M(2,6)=-1./140.*S**2*A-1./30.*B
    M(2,7)=-M(2,3)
    M(2,8)=-M(2,4)
    M(3,3)=1./3.*E
    M(3,4)=1./3.*F
    M(3,5)=-M(1,7)
    M(3,6)=M(2,7)
    M(3,7)=1./6.*E
    M(3,8)=1./6.*F
    M(4,4)=1./3.*G
    M(4,5)=-M(1,8)
    M(4,6)=M(2,8)
    M(4,7)=M(3,8)
    M(4,8)=1./6.*G
    M(5,5)=M(1,1)
    M(5,6)=-M(1,2)
    M(5,7)=-M(1,7)
    M(5,8)=-M(1,8)
```

```
      M(6,6)=M(2,2)
      M(6,7)=M(2,3)
      M(6,8)=M(2,4)
      M(7,7)=M(3,3)
      M(7,8)=M(3,4)
      M(8,8)=M(4,4)
      DO 1 I=1,8
      DO 1 J=1,I
    1 M(I,J)=M(J,I)
      IF(NGLN-3)102,101,102
  101 IV=8
      CALL ROTA(M,ESPC,ESPF)
      CALL CONMA(M,SE,IV)
  102 RETURN
      END

      SUBROUTINE ROTAD(SE,ESPC,ESPF)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
C      ESTA SUBROUTINE TRANSFORMA OS DESLOCAMENTOS NODAIS
C      MAS SEM PREPARAR PARA CONDENSAR
      DIMENSION SE(10,10),T(8,8),CMULT(8)
      DE=ESPC+ESPF
      DO 100 I=1,8
      DO 100 J=1,8
  100 T(I,J)=0.
      DO 101 I=1,8
  101 T(I,I)=1.
      T(2,3)=ESPC/DE
      T(2,4)=1.
      T(3,4)=1.
      T(6,7)=ESPC/DE
      T(6,8)=1.
      T(7,8)=1.
      DO 3 I=1,8
      DO 2 J=1,8
      CMULT(J)=0.
      DO 2 K=1,8
    2 CMULT(J)=CMULT(J)+SE(I,K)*T(K,J)
      DO 3 J=1,8
    3 SE(I,J)=CMULT(J)
      DO 13 I=1,8
      DO 12 J=1,8
      CMULT(J)=0.
      DO 12 K=1,8
   12 CMULT(J)=CMULT(J)+SE(K,I)*T(K,J)
      DO 13 J=1,8
   13 SE(J,I)=CMULT(J)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SANDQ(XE,ESPC,ELAC,GC,ESPF,ELAF,GF,NGLN,SE)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
      REAL*8 INV
C      ESTA SUBROTINA MONTA A MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO
C      CONSIDERANDO UMA VARIACAO QUADRATICA A DEFORMACAO DE
C      CORTANTE
      DIMENSION SE(10,10)
      A=ELAC*ESPC**3/12.
      B=GC*ESPC
      C=ELAF*ESPF**3/12.
      D=GF*ESPF
      F=ELAF*ESPF
      DE=ESPC+ESPF
      AJU=2.*A+DE**2*F+4.*C
      INV=1./XE
      SE(1,1)=6.*INV**3*AJU
      SE(1,2)=3.*INV**2*AJU
      SE(1,3)=-4.*INV**2*A-2.*INV**2*ESPC*DE*F
      SE(1,4)=-2.*INV**2*ESPF*DE*F-8.*INV**2*C
      SE(1,5)=-SE(1,1)
      SE(1,6)=SE(1,2)
      SE(1,7)=SE(1,3)
      SE(1,8)=SE(1,4)
      SE(1,9)=-2.*SE(1,7)
      SE(1,10)=-2.*SE(1,4)
      SE(2,2)=2.*INV*AJU
      SE(2,3)=-3.*INV*A-3./2.*INV*DE*ESPC*F
      SE(2,4)=-1.5*INV*DE*ESPF*F-6.*INV*C
      SE(2,5)=-SE(1,2)
      SE(2,6)=INV*AJU
      SE(2,7)=1./3.*SE(2,3)
      SE(2,8)=1./3.*SE(2,4)
      SE(2,9)=-4.*SE(2,7)
      SE(2,10)=-4.*SE(2,8)
      SE(3,3)=INV*(7./3.*A+7./6.*ESPC**2*F)+2./15.*XE*B
      SE(3,4)=7./6.*INV*ESPC*ESPF*F
      SE(3,5)=-SE(1,7)
      SE(3,6)=SE(2,7)
      SE(3,7)=INV*(1./3.*A+1./6.*ESPC**2*F)-1./30.*XE*B
      SE(3,8)=1./7.*SE(3,4)
      SE(3,9)=-INV*(8./3.*A+4./3.*ESPC**2*F)+1./15.*XE*B
      SE(3,10)=-8.*SE(3,8)
      SE(4,4)=INV*(7./6.*ESPF**2*F+14./3.*C)+4./15.*XE*D
      SE(4,5)=-SE(1,8)
      SE(4,6)=SE(2,8)
      SE(4,7)=SE(3,8)
      SE(4,8)=INV*(1./6.*ESPF**2*F+2./3.*C)-1./15.*XE*D
      SE(4,9)=-8.*SE(4,7)
      SE(4,10)=-INV*(16./3.*C+4./3.*ESPF**2*F)+2./15.*XE*D
      SE(5,5)=SE(1,1)
```

```
      SE(5,6)=-SE(1,2)
      SE(5,7)=-SE(1,3)
      SE(5,8)=-SE(1,4)
      SE(5,9)=-SE(1,9)
      SE(5,10)=-SE(1,10)
      SE(6,6)=SE(2,2)
      SE(6,7)=SE(2,3)
      SE(6,8)=SE(2,4)
      SE(6,9)=SE(2,9)
      SE(6,10)=SE(2,10)
      SE(7,7)=SE(3,3)
      SE(7,8)=SE(3,4)
      SE(7,9)=SE(3,9)
      SE(7,10)=SE(3,10)
      SE(8,8)=SE(4,4)
      SE(8,9)=SE(4,9)
      SE(8,10)=SE(4,10)
      SE(9,9)=INV*(16./3.*A+8./3.*ESPC**2*F)+8./15.*XE*B
      SE(9,10)=16.*SE(3,8)
      SE(10,10)=INV*(8./3.*ESPF**2*F+32./3.*C)+16./15.*XE*D
      DO 2 I=1,10
      DO 2 J=1,I
    2 SE(I,J)=SE(J,I)
C      FAZ-SE A CONDENSACAO DOS GRAUS DE LIBERDADE DO NO
C      INTERIOR
      IV=10
      CALL CONDE(SE,IV)
C
C      NO CASO DE SER COM MATRIZ DE MASSA DIAGONAL USAR
C     CALL ROTAD(SE,ESPC,ESPF)
C      MAS NGLN=4  SE NGLN=3 NAO E NECESSARIO ROTAD
C
      IF(NGLN.NE.3)GO TO 102
      IV=8
C      TRANSFORMA-SE A MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE 4
C      GRAUS DE LIBERDADE POR NO PARA O DE 3 GRAUS
      CALL ROTA(SE,ESPC,ESPF)
      CALL CONDE(SE,IV)
  102 RETURN
      END

      SUBROUTINE MASAQ(S,ESPC,ROC,ESPF,ROF,M,NGLN,SE)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
      REAL*8 M(10,10)
C      ESTA SUBROTINA CALCULA A MATRIZ DE MASSA PARA O
C      ELENTO COM 10 GRAUS DE LIBERDADE
      DIMENSION SE(10,10)
      DE=ESPC+ESPF
      A=(ESPC*ROC+2.*ESPF*ROF)*S
      B=(ROC*ESPC**3/12.+ROF*(ESPF**3/6.+DE**2*ESPF/2.))*S
```

```
C=(-ROC*ESPC**3/12.0-ROF*ESPC*DE*ESPF/2.)*S
D=(-ROF*(ESPF**3/6.+ESPF**2*DE/2.))*S
E=(ROC*ESPC**3/12.+ROF*ESPC**2*ESPF/2.)*S
F=(ROF*ESPC*ESPF**2/2.)*S
G=(ROF*ESPF**3*2./3.)*S
M(1,1)=13./35.*A+6./5.*B/S**2
M(1,2)=11./210.*S*A+1./10./S*B
M(1,3)=-0.1*C/S
M(1,4)=-0.1*D/S
M(1,5)=9./70.*A-6./5./S**2*B
M(1,6)=-13./420.*S*A+1./10./S*B
M(1,7)=M(1,3)
M(1,8)=M(1,4)
M(1,9)=8.*M(1,3)
M(1,10)=8.*M(1,4)
M(2,2)=1./105.*S**2*A+2./15.*B
M(2,3)=7./60.*C
M(2,4)=7./60.*D
M(2,5)=-M(1,6)
M(2,6)=-1./140.*S**2*A-1./30.*B
M(2,7)=-0.05*C
M(2,8)=-0.05*D
M(2,9)=-1./15.*C
M(2,10)=-1./15.*D
M(3,3)=2./15.*E
M(3,4)=2./15.*F
M(3,5)=-M(1,3)
M(3,6)=M(2,7)
M(3,7)=-0.25*M(3,3)
M(3,8)=-0.25*M(3,4)
M(3,9)=0.5*M(3,3)
M(3,10)=0.5*M(3,4)
M(4,4)=2./15.*G
M(4,5)=-M(1,4)
M(4,6)=M(2,8)
M(4,7)=M(3,8)
M(4,8)=-0.25*M(4,4)
M(4,9)=M(3,10)
M(4,10)=0.5*M(4,4)
M(5,5)=M(1,1)
M(5,6)=-M(1,2)
M(5,7)=-M(1,3)
M(5,8)=-M(1,4)
M(5,9)=-M(1,9)
M(5,10)=-M(1,10)
M(6,6)=M(2,2)
M(6,7)=M(2,3)
M(6,8)=M(2,4)
M(6,9)=M(2,9)
M(6,10)=M(2,10)
```

```
      M(7,7)=M(3,3)
      M(7,8)=M(3,4)
      M(7,9)=M(3,9)
      M(7,10)=M(3,10)
      M(8,8)=M(4,4)
      M(8,9)=M(4,9)
      M(8,10)=M(4,10)
      M(9,9)=4.*M(3,3)
      M(9,10)=4.*M(3,4)
      M(10,10)=4.*M(4,4)
      DO 2 I=1,10
      DO 2 J=1,I
    2 M(I,J)=M(J,I)
C       CONDENSACAO DE 10 PARA 8 GRAUS DE LIBERDADE
      IV=10
      CALL CONMA(M,SE,IV)
C
      IF(NGLN.NE.3)GO TO 102
      IV=8
C       GRAUS DE LIBERDADE POR NO PARA O DE 3 GRAUS
C       TRANSFORMA-SE A MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO DE 4
      CALL ROTA(M,ESPC,ESPF)
      CALL CONMA(M,SE,IV)
  102 RETURN
      END

      SUBROUTINE NEGIE(EGG,W,NV,FRE,JB,NAUTO,XAUTO)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
      INTEGER*4 L1,L2
      DIMENSION EGG(40,40),X(40),XAUX(40),XUX(40),W(40,40)
     *,FRE(40),XAUTO(40,8),CMULT(40)
C       ESTA SUBROTINA DETERMINA OS AUTOVALORES COM AS
C       MATRIZES DE RIGIDEZ E DE ''MASSA'' QUADRADAS
      L2=6
      CALL SAIND(NV,EGG)
      DO 39 I=1,NV
      DO 38 J=1,NV
      CMULT(J)=0.
      DO 37 K=1,NV
   37 CMULT(J)=CMULT(J)+EGG(I,K)*W(K,J)
   38 CONTINUE
      DO 39 J=1,NV
      EGG(I,J)=CMULT(J)
   39 CONTINUE
C       EGG--EINGENVALUE MATRIX  H
C       W--MASS MATRIX
      TEST=0.1E-7
C       O VALOR DE  TEST PODE SER MODIFICADO
      NIT=2000
C       TEST--ACCURACY REQUIRED
```

```
C       NIT--MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS
        ITS=NIT
        DO 1 II=1,NAUTO
        DO 66 I=1,NV
        XUX(I)=1.
   66   X(I)=1.
   14   DO 30 I=1,NV
        XAUX(I)=0.
        DO 30 K=1,NV
   30   XAUX(I)=XAUX(I)+EGG(I,K)*X(K)
         IF(DABS((EIG-XAUX(1))/XAUX(1)).LT.TEST)GO TO 50
        EIG=XAUX(1)
        DO 57 I=1,NV
   57   X(I)=XAUX(I)/EIG
        ITS=ITS-1
        IF(ITS)21,21,25
   21   WRITE(L2,22)
   22   FORMAT(//,' ITERATION COUNT EXCEEDED',//)
        GO TO 50
C       REPEAT
   25   DO 26 I=1,NV
   26   XUX(I)=X(I)
   42   FORMAT(4E16.8)
        GO TO 14
   50   FRE(II)=EIG
        WRITE(L2,13)II,FRE(II)
        WRITE(L2,42)(X(I),I=1,NV)
        DO 51 JO=1,NV
   51   XAUTO(JO,II)=X(JO)
   13   FORMAT(I10,E16.8)
C       FORM ZOOED MATRIX
        DO 31 J=1,NV
        XUX(J)=0.
        DO31 K=1,NV
   31   XUX(J)=XUX(J)+X(K)*W(K,J)
        XAUX(1)=0.
        DO 32 K=1,NV
   32   XAUX(1)=XAUX(1)+XUX(K)*X(K)
        AA=EIG/XAUX(1)
        DO 68 I=1,NV
   68   XAUX(I)=X(I)*AA
        DO 110 I=1,NV
        DO 110 J=1,NV
  110   EGG(I,J)=EGG(I,J)-XAUX(I)*XUX(J)
        J=NIT-ITS
        WRITE(L2,111)J
  111   FORMAT(//,' O NUMERO DE ITERACOES FOI',I5,//)
    1   CONTINUE
        RETURN
        END
```

```
      SUBROUTINE DUHAM(AM,I,TE,ITIPO,FREQ,DUHA,TEZO)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
C      ESTA MATRIZ CALCULA A INTEGRAL DE DUHAMEL PARA
C      FUNCOES DA TABELA 6.1
      DIMENSION AM(8),FREQ(40)
      FRO=FREQ(I)
      GO TO(1,2,3,4),ITIPO
    1 DUHA=AM(I)*(1.-DCOS(FRO*TE))/FRO
      GO TO 5
    2 DUHA=AM(I)*(TE-DSIN(FRO*TE)/FRO)/FRO
      GO TO 5
    3 PII=3.14149265359*2.
      DUHA=AM(I)*TEZO/((FRO*TEZO)**2-PII**2)
      DUHA=DUHA*(FRO*TEZO*DSIN(PII*TE/TEZO)-PII*DSIN(FRO*TE))
      GO TO 5
    4 IF(TEZO.GT.TE)GO TO 6
      DUHA=AM(I)*(1.-DCOS(FRO*TE))/FRO
      GO TO 5
    6 DUHA=AM(I)*(DCOS(FRO*(TE-TEZO))-DCOS(FRO*TE))/FRO
    5 CONTINUE
C      PARA NOVA FUNCAO E SO OLHAR NO LIVRO DO PREZ
      RETURN
      END

      SUBROUTINE CONDE(SE,NG)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
C      ESTA SUBROTINA FAZ A CONDENSACAO DOS 2 ULTIMOS
C      DESLOCAMENTOS DA MATRIZ DE RIGIDES DO ELEMENTO
      DIMENSION SE(10,10)
      N=NG
      M=NG-1
      L=NG-2
      DET=SE(M,M)*SE(N,N)-SE(M,N)**2
      SE(N,M)=SE(M,M)
      SE(M,M)=SE(N,N)/DET
      SE(N,N)=SE(N,M)/DET
      SE(M,N)=-SE(M,N)/DET
      SE(N,M)=SE(M,N)
      DO 1 I=1,L
      DO 1 J=M,N
      SE(J,I)=0.
      DO 1 K=M,N
    1 SE(J,I)=SE(J,I)+SE(K,J)*SE(I,K)
      DO 3 I=1,L
      DO 3 J=1,I
      DO 2 K=M,N
    2 SE(J,I)=SE(J,I)-SE(J,K)*SE(K,I)
    3 SE(I,J)=SE(J,I)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE CONMA(A,SE,NB)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
C      ESTA SUBROTINA FAZ A CONDENSACAO DOS 2 ULTIMOS
C      DESLOCAMENTOS NA MATRIZ DE 'MASSA' DO ELEMENTO
      DIMENSION A(10,10),SE(10,10)
      N=NB
      M=N-1
      L=N-2
      DO 1 I=1,L
      DO 1 J=M,N
      DO 1 K=M,N
    1 A(J,I)=A(J,I)-A(J,K)*SE(K,I)
      DO 4 I=1,L
      DO 4 J=1,I
      DO 2 K=M,N
    2 A(J,I)=A(J,I)-SE(K,J)*A(K,I)
      DO 3 K=M,N
    3 A(J,I)=A(J,I)-A(J,K)*SE(K,I)
    4 A(I,J)=A(J,I)
      RETURN
      END



      SUBROUTINE ROTA(SE,ESPC,ESPF)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
C      ESTA SUBROTINA TRANSFORMA A MATRIZ DEVIDO A MUDANCA
C      DOS DESLOCAMENTOS NODAIS CONSIDERADOS
      DIMENSION SE(10,10),T(8,8),CMULT(8)
      DE=ESPC+ESPF
      DO 100 I=1,8
      DO 100 J=1,8
  100 T(I,J)=0.
      T(1,1)=1.
      T(2,2)=1.
      T(2,3)=ESPC/DE
      T(2,7)=1.
      T(3,3)=1.
      T(3,7)=1.
      T(4,7)=1.
      T(5,4)=1.
      T(6,5)=1.
      T(6,6)=ESPC/DE
      T(6,8)=1.
      T(7,6)=1.
      T(7,8)=1.
      T(8,8)=1.
      DO 3 I=1,8
```

```
      DO 2 J=1,8
      CMULT(J)=0.
      DO 2 K=1,8
    2 CMULT(J)=CMULT(J)+SE(I,K)*T(K,J)
      DO 3 J=1,8
    3 SE(I,J)=CMULT(J)
      DO 13 I=1,8
      DO 12 J=1,8
      CMULT(J)=0.
      DO 12 K=1,8
   12 CMULT(J)=CMULT(J)+SE(K,I)*T(K,J)
      DO 13 J=1,8
   13 SE(J,I)=CMULT(J)
      RETURN
      END


      SUBROUTINE RISAN(XE,RIS,ESPC,ESPF,NGLN,SE,ICO)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
C      ESTA SUBROTINA MONTA A MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMETRICA
C      DO ELEMENTO COM 4 GRAUS DE LIBERDADE POR NO
      DIMENSION RIS(10,10),SE(10,10)
      DO 1 I=1,10
      DO 1 J=1,I
    1 RIS(J,I)=0.
      RIS(1,1)=1.2/XE
      RIS(1,2)=0.1
      RIS(1,5)=-RIS(1,1)
      RIS(1,6)=RIS(1,2)
      RIS(2,2)=XE/7.5
      RIS(2,5)=-RIS(1,2)
      RIS(2,6)=-0.25*RIS(2,2)
      RIS(5,5)=RIS(1,1)
      RIS(5,6)=RIS(2,5)
      RIS(6,6)=RIS(2,2)
      DO 2 I=1,10
      DO 2 J=1,I
    2 RIS(I,J)=RIS(J,I)
C       SE FOR MATRIZ DE MASSA DIAGONAL( MUDANCA DE GRAUS DE LIB)
C       USAR     (EXCETO SE NGLN=3)
C      CALL ROTAD(RIS,ESPC,ESPF)
      IF(NGLN-3)102,101,102
  101 IV=8
      CALL ROTA(RIS,ESPC,ESPF)
      IF(ICO.GT.0) GO TO 14
      CALL CONMA(RIS,SE,IV)
      GO TO 102
   14 CALL CONDE(RIS,IV)
  102 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SAIND(N,S)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
      DIMENSION S(40,40),G(40),H(40)
C      ESTA SUBROTINA INVERTE A SUBROTINA PELO METODO DE
C      PARTICAO
      NN=N-1
      S(1,1)=1.0/S(1,1)
      DO 110 M=1,NN
      K=M+1
      DO 60 I=1,M
      G(I)=0.0
      DO 60 J=1,M
   60 G(I)=G(I)+S(I,J)*S(J,K)
      D=0.0
      DO 70 I=1,M
   70 D=D+S(K,I)*G(I)
      E=S(K,K)-D
      S(K,K)=1.0/E
      DO 80 I=1,M
   80 S(I,K)=-G(I)*S(K,K)
      DO 90 J=1,M
      H(J)=0.0
      DO 90 I=1,M
   90 H(J)=H(J)+S(K,I)*S(I,J)
      DO 100 J=1,M
  100 S(K,J)=-H(J)*S(K,K)
      DO 110  I=1,M
      DO 110 J=1,M
  110 S(I,J)=S(I,J)-G(I)*S(K,J)
      RETURN
      END
```

```
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z),INTEGER*2(I-N)
      REAL*8 MDI(8)
      INTEGER*4 L1,L2
      DIMENSION X(30),NA(10),IA(10,4),S(40,4),PS(40,40),
     *PP(40,40),SE(10,10),LRC(120),ASSA(40,4),ASAN(10,10),
     *FREQ(40),LRL(120),LRCL(120),LRP(120),LRCP(120),LR(120)
     *,RIS(10,10)
      DIMENSION XA(40),QO(40),VQC(40),XU(40),P(40),T(8)
     *,AM(8),EQC(8),EVQO(8),PI(4),FRE(40,8)
     *,EP(8),P1(4)
      DIMENSION ASPP(40,4),ASPS(40,40)
      EQUIVALENCE(PS(1600),P1(4))
C
C       ANALISE DA RESPOSTA DINAMICA DA VIGA SANDWICH
C
      L1=5
      L2=6
      LB=4
C       ESTE PROGRAMA NAO FOI OTIMIZADO - E APENAS DIDATICO
C       SE QUIZER VARIAR O NUMERO DE FREQ. BASTA MUDAR NAUTO
      NAUTO=3
    8 WRITE(L2,10)
C       SE NAO DESEJAR AS CARGAS DE FLAMBAGEM FAZER
C             ICO=0    E    FORCA=0.
      ICO=-1
   10 FORMAT(//,65('-'))
      WRITE(L2,10)
      READ(L1,14)
   14 FORMAT(80H
     *                                )
      WRITE(L2,14)
      NNPE=2
C       NNPE - NUMERO DE NOS EXTERNOS DO ELEMENTO(2)
C         VL - COMPRIMENTO DA VIGA
C         NN - NUMERO DE NOS
C       NNDP - NUM. DE NOS COM DESLOCAMENTO PRESCRITO
C       NGLN - NUM. DE GRAUS DE LIBERDADE POR NO EXTERNO
C         IG - CODIGO DE GERACAO AUTOMATICA DOS PONTOS NODAIS
C         LV - TESTE DE ANALISE DINAMICA COM CARGA AXIAL
C       SO CARGAS DE FLAMBAGEM(LV MENOR QUE 0)
C       SO FREQUENCIA NATURAL (LV IGUAL A 0)
C       FREQ. NAT. COM CARGA AXIAL (LV MAIOR QUE 0)
      READ(L1,20) VL,NN,NNDP,NGLN,IG,LV
   20 FORMAT(F5.0,5I5)
C       TESTE PARA VERIFICAR SE AINDA HA PROBLEMA
      IF(NN.EQ.0)GO TO 990
      WRITE(L2,22)
   22 FORMAT(//'    VL    NN NNDP NGLN    IG    LV'/)
      WRITE(L2,20)VL,NN,NNDP,NGLN,IG,LV
      NN2=NN*NGLN
```

```
      NE=NN-1
C      TESTE PARA VER SE HA GERACAO AUTOMATICA DOS P. NODAIS
      IF(IG.EQ.0)GO TO 40
      AZI=VL/NE
      DO 32 I=1,NN
      X(I)=(I-1)*AZI
   32 CONTINUE
      GO TO 50
   40 CONTINUE
      READ(L1,36)(I,X(I),I=1,NN)
   50 WRITE(L2,34)
   34 FORMAT(//' C O O R D E N A D A S  D O S  N O S'//)
      WRITE(L2,36)(I,X(I),I=1,NN)
   36 FORMAT(I5,F10.2)
      WRITE(L2,52)
   52 FORMAT(//' D E F I N I C A O  D E  A P O I O S'//)
      DO 54 I=1,NNDP
      READ(L1,58)NA(I),(IA(I,J),J=1,NGLN)
   54 WRITE(L2,58)NA(I),(IA(I,J),J=1,NGLN)
   58 FORMAT(9I5)
C      ATE AQUI OS PROGRAMAS SAO IGUAIS
      WRITE(L2,60)
   60 FORMAT(//' PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS'//)
      READ(L1,62) ESPC,ELAC,GC,ESPF,ELAF,GF,ROC,ROF
   62 FORMAT(2(F10.6,2F10.0),2F10.7)
C       ESPC - ESPESSURA DO NUCLEO
C       ELAC - MODULO DE ELASTICIDADE DO NUCLEO
C         GC - MODULO DE RIGIDEZ AO CISALHAMENTO DO NUCLEO
C       ESPF - ESPESSURA DE UMA FACE(SAO IGUAIS)
C       ELAF - MODULO DE ELASTICIDADE DA FACE
C         GF - MODULO DE RIGIDEZ AO CISALHAMENTO DAS FACES
C        ROC - DENSIDADE DO MATERIAL DO NUCLEO
C        ROF - DENSIDADE DO MATERIAL DAS FACES
      WRITE(L2,62)ESPC,ELAC,GC,ESPF,ELAF,GF,ROC,ROF
      WRITE(L2,10)
C      SE IDINA MAIOR QUE ZERO HAVERA ANAL. DA RESP. DINAM.
      READ(L1,58)IDINA
      IF(IDINA.GT.0)WRITE(L2,701)
  701 FORMAT(' HA ANALISE DA RESPOSTA DINAMICA')
C      ZERAGEM E POSTERIOR MONTAGEM DOS INDICES CONTADORES
C      LR E LRC - POSICAO DO GRAU DE LIBERDADE NA ESTRUTURA
C      LRL E LRCL - POS. DO G. LIB. NA MATRIZ DOS G.L. PRINC.
C      LRP E LRCP - POS. DOS G.L. NA MATRIZ DOS G.L. SECUND.
      DO 55 I=1,NN2
      LRC(I)=0
      LR(I)=0
      LRL(I)=0
      LRCL(I)=0
      LRP(I)=0
      LRCP(I)=0
```

```
   55 CONTINUE
      DO 150 I=1,NNDP
      DO 150 J=1,NGLN
      IF(IA(I,J).GT.0)GO TO 150
      IB=NGLN*(NA(I)-1)+J
      LR(IB)=1
      IF(J.GT.2)GO TO 147
      LRL(IB)=1
      GO TO 150
  147 LRP(IB)=1
  150 CONTINUE
      LRC(1)=LR(1)
      LRCL(1)=LRL(1)
      LRCP(1)=LRP(1)
      DO 152 IB=2,NN2
      LRCL(IB)=LRCL(IB-1)+LRL(IB)
      LRCP(IB)=LRCP(IB-1)+LRP(IB)
  152 LRC(IB)=LRC(IB-1)+LR(IB)
      ILIV=NN2/2-LRCL(NN2)
      IRES=NN2/2-LRCP(NN2)
      IF(IRES.GT.40) GO TO 1000
C      ZERAGEM DAS AREAS DE TRABALHO
   89 DO 66 I=1,ILIV
      DO 65 KASSA=1,4
      ASSA(I,KASSA)=0.
      S(I,KASSA)=0.
   65 CONTINUE
      DO 66 J=1,IRES
      ASPS(J,I)=0.
   66 PS(J,I)=0.
      DO 67 I=1,IRES
      DO 68 KASSA=1,4
   68 ASPP(I,KASSA)=0.
      DO 67 J=1,IRES
   67 PP(I,J)=0.
      JBMAX=0
C      MONTAGEM DAS MATRIZES GLOBAIS
      DO 106 KJ=1,NE
      IF(IG.EQ.0)GO TO 92
      IF(KJ.GT.1)GO TO 94
   92 XE=X(KJ+1)-X(KJ)
      CALL SANDQ(XE,ESPC,ELAC,GC,ESPF,ELAF,GF,NGLN,SE)
C      SE QUIZER USAR C ELEMENTO  L USAR COMO
C      CALL SANDL(XE,ESPC,ELAC,GC,ESPF,ELAF,GF,NGLN,SE)
C      TESTE  PARA DETERMINAR
C      CARGAS DE FLAMBAGEM (ICO=-1)
C      FREQUENCIAS NATURAIS SEM CARGA AXIAL (ICO=0)
C      FREQUENCIAS COM CARGA AXIAL (ICO MAIOR QUE 0)
      IF(ICO)80,91,93
   80 CALL RISAN(XE,ASAN,ESPC,ESPF,NGLN,SE,ICO)
```

```
      FORCA=0.
      GO TO 94
   93 CALL RISAN(XE,RIS,ESPC,ESPF,NGLN,SE,ICO)
   91 CALL MASAQ(XE,ESPC,ROC,ESPF,ROF,ASAN,NGLN,SE)
C       NO CASO DO ELEMENTO USADO SER O L USAR
C  91 CALL MASAL(XE,ESPC,ROC,ESPF,ROF,ASAN,NGLN,SE)
   94 CONTINUE
      IONTA=(KJ-1)*NGLN
      DO 100 L=1,NNPE
      DO 100 K=1,NNPE
      DO 100 J=1,NGLN
      JE=NGLN*(L-1)+J
      J1=IONTA+JE
      IF(LR(J1).GT.0)GO TO 100
      DO 99 I=1,NGLN
      IE=NGLN*(K-1)+I
      IB=IONTA+IE
      JB=JE-IE+1
      IF(LR(IB).GT.0)GO TO 99
      IF(J.GT.2)GO TO 200
      ISC=J1/2+1-LRCL(J1)
      IF(I.GT.2)GO TO 199
      ISL=IB/2+1-LRCL(IB)
      IF(ISC.LT.ISL)GO TO 99
      ICOL=ISC-ISL+1
      ASSA(ISL,ICOL)=ASSA(ISL,ICOL)+ASAN(IE,JE)
      S(ISL,ICOL)=S(ISL,ICOL)+SE(IE,JE)-FORCA*RIS(IE,JE)
      GO TO 99
  199 ISL=IB/2-LRCP(IB)
      PS(ISL,ISC)=PS(ISL,ISC)+SE(IE,JE)-FORCA*RIS(IE,JE)
      ASPS(ISL,ISC)=ASPS(ISL,ISC)+ASAN(IE,JE)
      GO TO 99
  200 IF(I.LT.3)GO TO 99
      ISC=J1/2-LRCP(J1)
      ISL=IB/2-LRCP(IB)
      PP(ISL,ISC)=PP(ISL,ISC)+SE(IE,JE)-FORCA*RIS(IE,JE)
      IF(ISC.LT.ISL)GO TO 99
      ICOL=ISC-ISL+1
      IF(JBMAX.GE.ICOL)GO TO 104
      JBMAX=ICOL
      IF(LB.LT.JBMAX)GO TO 1000
  104 ASPP(ISL,ICOL)=ASPP(ISL,ICOL)+ASAN(IE,JE)
   99 CONTINUE
  100 CONTINUE
  106 CONTINUE
C      CONDENSACAO  DA MATRIZ DE RIGIDEZ
      CALL SAIND(IRES,PP)
      DO 209 I=1,IRES
      DO 208 J=1,ILIV
      FREQ(J)=0.
```

```
      DO 207 K=1,IRES
  207 FREQ(J)=FREQ(J)+PP(I,K)*PS(K,J)
  208 CONTINUE
      DO 209 J=1,ILIV
      PP(I,J)=FREQ(J)
  209 CONTINUE
C      OBTENCAO DE -M10*(K00-1)*K01-K10*(K00-1)*M01
      DO 232 I=1,ILIV
      DO 230 J=1,ILIV
      FREQ(J)=0.
      DO 230 K=1,IRES
  230 FREQ(J)=FREQ(J)+ASPS(K,I)*PP(K,J)
      DO 232 J=1,ILIV
  232 ASPS(J,I)=-FREQ(J)
      DO 234 I=1,ILIV
      DO 234 J=1,I
      ASPS(J,I)=ASPS(J,I)+ASPS(I,J)
  234 ASPS(I,J)=ASPS(J,I)
C      OBTENCAO DE K10*(K00-1)*M00*(K00-1)*K01
      DO 239 I=1,ILIV
      DO 238 J=1,IRES
      FREQ(J)=0.
      DO 235 K=1,JBMAX
      KA=J+K-1
      IF(KA.GT.IRES)GO TO 236
  235 FREQ(J)=FREQ(J)+PP(KA,I)*ASPP(J,K)
  236 CONTINUE
      DO 237 K=2,JBMAX
      KA=J-K+1
      IF(KA.LT.1)GO TO 238
  237 FREQ(J)=FREQ(J)+PP(KA,I)*ASPP(KA,K)
  238 CONTINUE
      DO 239 J=1,ILIV
      DO 239 K=1,IRES
  239 ASPS(I,J)=ASPS(I,J)+FREQ(K)*PP(K,J)
C      SOMA DE M11
      DO 245 I=1,ILIV
      DO 245 J=1,I
      IF(I-J-JBMAX)240,244,244
  240 JI=I-J+1
      ASPS(J,I)=ASPS(J,I)+ASSA(J,JI)
      ASPS(I,J)=ASPS(J,I)
  244 CONTINUE
  245 CONTINUE
      DO 219 I=1,ILIV
      DO 218 J=1,I
      FREQ(J)=0.
      DO 217 K=1,IRES
  217 FREQ(J)=FREQ(J)+PS(K,J)*PP(K,I)
  218 CONTINUE
```

```
      DO 219 J=1,I
      IF(I-J-JBMAX)220,222,222
  220 JI=I-J+1
      PP(J,I)=S(J,JI)-FREQ(J)
      GO TO 219
  222 PP(J,I)=-FREQ(J)
  219 CONTINUE
      DO 223 I=1,ILIV
      DO 223 J=1,I
  223 PP(I,J)=PP(J,I)
C      CHAMADA DA MATRIZ DE AUTOVALORES
      NISC=ILIV
      CALL NEGIE(PP,ASPS,NISC,FREQ,JBMAX,NAUTO,FRE)
      DO 229 J=1,NAUTO
      IF(FREQ(J).GT.0)GO TO 229
      WRITE(L2,601)
      WRITE(L2,700) FREQ(J)
  601 FORMAT(/' ESTE AUTOVALOR SERA IMAGINARIO',/)
      FREQ(J)=-FREQ(J)
  229 FREQ(J)=DSQRT(1./FREQ(J))
  700 FORMAT(8E15.6)
      IF(ICO)300,310,320
  300 WRITE(L2,10)
      WRITE(L2,303)
  303 FORMAT(//,' AS CARGAS REAIS DE FLAMBAGEM SAO AS ',/)
      DO 302 I=1,NAUTO
  302 FREQ(I)=FREQ(I)**2
      FORC=FREQ(1)*0.1
      WRITE(L2,700)(FREQ(J),J=1,NAUTO)
      ICO=0
      WRITE(L2,10)
      IF(ICO.GT.LV) GO TO 8
      GO TO 89
  310 WRITE(L2,311)
  311 FORMAT(//,' AS FREQUENCIAS REAIS DE CARGA NULA SAO',/)
      WRITE(L2,700)(FREQ(J),J=1,NAUTO)
      WRITE(L2,10)
      IF(IDINA.GT.0)GO TO 420
  314 ICO=1
      FORCA=ICO*FORC*3
      IF(ICO.GT.LV) GO TO 8
      GO TO 89
  320 WRITE(L2,321)
      WRITE(L2,700)(FREQ(J),J=1,NAUTO)
  321 FORMAT(/,' AS FREQ. REAIS DE VIGA CARREG. SERAO'/)
      WRITE(L2,10)
      IF(IDINA.GT.0)GO TO 421
  324 ICO=ICO+1
      IF(ICO-LV)89,8,8
 1000 WRITE(L2,10)
```

```
      WRITE(L2,10)
      GO TO 8
C       FORMACAO DOS VETORES MASSA DESACOPLANTE
  420 CONTINUE
      DO 63 I=1,ILIV
      P(I)=0.
      QO(I)=C.
      VQO(I)=0.
   63 CONTINUE
      READ(L1,58)NNC,NCD
      WRITE(L2,58)NNC,NCD
      IF(NNC.LT.1)GO TO 380
      WRITE(L2,368)
  368 FORMAT(//'  C A R G A S  N O S  N O S'//)
      NGL=2
      DO 372 I=1,NNC
      READ(L1,400) K,(P1(L),L=1,NGL)
      WRITE(L2,400)K,(P1(L),L=1,NGL)
      DO 372 L=1,NGL
      IB=NGL*(K-1)+L
      IB=IB-LRCL(IB)
  372 P(IB)=P1(L)
  380 IF(NCD.EQ.0)GO TO 388
      READ(L1,384) QC
  384 FORMAT(F10.1)
      WRITE(L2,386)QC
  386 FORMAT(//,' CAR. UNIF.',/,' Q=',F9.3,' POR UN. DE CO',//)
      T(1)=XE*QC/2.
      T(2)=XE**2*QC/12.
      T(5)=T(1)
      T(6)=-T(2)
      DO 390 I=1,NE
      IONTA=(KJ-1)*NGLN
      DO 390 L=1,NNPE
      DO 390 J=1,NGL
      JE=NGLN*(L-1)+J
      IB=IONTA+JE
      IF(LR(IB).GT.0)GO TO 390
      ISC=IB/2+1-LRCL(IB)
      P(ISC)=P(ISC)+T(JE)
  390 CONTINUE
  388 CONTINUE
C       ITIPO - CODIGO DO TIPO DE VARIACAO DA CARGA VARIAVEL
C       LEITURA DO IND. INDIC. DO TIPO DE VAR. DA CARGA
C         TEZO - TEMPO DE DURACAO DA CARGA UNIFORME(ITIPO=3)
C         TEZO - PERIODO DA CARGA TIPO SENOIDAL(ITIPO=4)
      READ(L1,400)ITIPO,TEZO
      WRITE(L2,704)
  704 FORMAT(//,' T. CARG. TZERO',//)
      WRITE(L2,400)ITIPO,TEZO
```

```
C       LEITURA DOS INDICES INDICADORES DE DESLOCAMENTOS
C       E VELOCIDADES NODAIS INICIAIS
        READ(L1,58)IQO,IVQO
        WRITE(L2,706)
  706   FORMAT(//,' IQO    IVQO'/)
        WRITE(L2,58)IQO,IVQO
        IF(IQO.EQ.0)GO TO 410
        WRITE(L2,398)
  398   FORMAT(//' DESLOCAMENTOS INICIAIS NODAIS'//)
        DO 402 I=1,IQO
        READ(L1,400)K,(PI(L),L=1,NGLN)
  400   FORMAT(I5,8F10.2)
        WRITE(L2,400)K,(PI(L),L=1,NGLN)
        DO 402 L=1,NGLN
        IB=NGLN*(K-1)/2+L
        IB=IB-LRCL(IB)
  402   QO(IB)=PI(L)
  410   IF(IVQO.EQ.0)GO TO 418
        WRITE(L2,411)
  411   FORMAT(//' VELOCIDADES NODAIS INICIAIS'//)
        DO 416 I=1,IVQO
        READ(L1,400)K,(PI(L),L=1,NGLN)
        WRITE(L2,400)K,(PI(L),L=1,NGLN)
        IB=NGLN*(K-1)/2+L
        DO 416 L=1,NGLN
        IB=IB-LRCL(IB)
  416   VQO(IB)=PI(L)
  418   CONTINUE
C
  421   DO 460 I=1,NAUTO
        MDI(I)=0.
        AM(I)=0.
        EVQO(I)=0.
        EQO(I)=0.
        DO 438 J=1,NISC
        XA(J)=0.
        DO 432 K=1,NISC
  432   XA(J)=XA(J)+FRE(K,I)*ASPS(J,K)
  438   CONTINUE
C       FORMACAO DO VETOR CARGA DESACOPLANTE
        DO 439 J=1,NISC
  439   MDI(I)=MDI(I)+XA(J)*FRE(J,I)
        DO 442 J=1,NISC
  442   AM(I)=AM(I)+FRE(J,I)*P(J)
        IF(IQO.EQ.0)GO TO 448
        DO 446 J=1,NISC
  446   EQO(I)=EQO(I)+MDI(I)*XA(J)*QO(J)
  448   IF(IVQO.EQ.0)GO TO 460
        DO 452 J=1,NISC
  452   EVQO(I)=EVQO(I)+MDI(I)*XA(J)*VQO(J)
```

```
460 CONTINUE
     WRITE(L2,10)
    PII=3.141592653589793
    TFU=2.*PII/FREQ(1)
    WRITE(L2,708)TFU
708 FORMAT(/,' O TEMPO FUND. E',F10.6,'SEG',//)
    WRITE(L2,10)
    DO 600 JB=1,40
     WRITE(L2,10)
    TE=TFU*JB/40.
    DO 500 I=1,NAUTO
    EP1=EQO(I)*DCOS(FREQ(I)*TE)
    EP2=EVQO(I)*DSIN(FREQ(I)*TE)/FREQ(I)
    CALL DUHAM(AM,I,TE,ITIPO,FREQ,DUHA,TEZO)
    EP3=DUHA/MDI(I)/FREQ(I)
500 EP(I)=EP1+EP2+EP3
    WRITE(L2,502)JB
502 FORMAT(//' PARA A FRACAO',I5,' OS DESLOCAMENTOS SAO'//)
    DO 510 L=1,NISC
    XU(L)=0.
    DO 510 K=1,NAUTO
510 XU(L)=XU(L)+FRE(L,K)*EP(K)
    IRE=ILIV+1
    DO 530 J=1,NN
    DO 530 I=3,4
    IEC=NN2+1-NGLN*(J-1)-I
    IF(LR(IEC).GT.0)GO TO 528
    IRE=IRE-1
    IEC=IEC/2+1
    XU(IEC)=XU(IRE)
    GO TO 530
528 IEC=IEC/2+1
    XU(IEC)=0.
530 CONTINUE
    WRITE(L2,504)
504 FORMAT(3X,'NO',8X,'FLECHA',4X,'ROT. TOTAL',//)
    WRITE(L2,505)(I,XU(2*I-1),XU(2*I),I=1,NN)
505 FORMAT(I5,2F14.8)
600 CONTINUE
    IF(ICO)1000,314,324
990 CALL EXIT
    END
```