COLUNAS DE CONCRETO ARMADO SOLICITADAS POR CARGAS AXIAIS EXCÊNTRICAS

NOBUO YAMAGATA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M. Sc.)

Aprovada por:

Prof. Fernando Luiz Lobo B. Carneiro
Presidente

Prof. Luiz Bevilacqua

Prof. Yosiaki Nagato

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
FEVEREIRO DE 1973

R E S U M O

Examina-se o problema da determinação da capacidade de carga das colunas de concreto armado com seções transversais em forma de círculo ou coroa circular, quando solicitadas por cargas axiais excêntricas.

Os efeitos da variação da geometria da linha elástica e da não-linearidade dos diagramas tensão-deformação do concreto e do aço são analisados através de métodos numéricos. O processo de cálculo desenvolvido foi programado para a utilização de um computador na construção de ábacos destinados à determinação da capacidade de carga das colunas em estudo.

As hipóteses adotadas baseiam-se nas recomendações do Comitê Européen du Béton - Fédération Internationale de la Précontrainte (CEB-FIP).

SUMMARY

In this thesis we analyse the behaviour of beam-columns with circular or annular cross sections under eccentric longitudinal load.

The influence of the changes in shape of the elastic and the non-linearity of the stress-strain curves for both concrete and reinforcement steel is considered through numerical methods. A computer program for the numerical calculation was developed for plotting graphs used in the determination of bearing capacity of columns being studied.

The basic assumptions are from the CEB-FIP Recommendations.

ÍNDICE

pg.

CAPÍTULO I

Introdução 1

CAPÍTULO II

Processo de Cálculo 8

2.1 - Hipóteses 9

2.2 - Esforços solicitantes em função da distribuição de deformações normais 12

2.2.1 - Seções circulares de concreto 12

2.2.2 - Armadura 15

2.2.3 - Seções de concreto armado em forma de círculo ou coroa circular 18

2.3 - Resistência da seção transversal 21

2.4 - Esforços solicitantes em função da curvatura e da deformação normal média 22

2.5 - Colunas solicitadas por cargas axiais centradas 24

2.6 - Colunas solicitadas por cargas axiais excêntricas 28

2.6.1 - Curvas momento-curvatura 28

2.6.2 - Deformadas de colunas solicitadas por cargas axiais centradas 32

2.6.3 - Capacidade de carga 37

		pg.
	2.7 - Carregamentos de longa duração	42
CAPÍTULO III	Aplicação	45
BIBLIOGRAFIA		53
APÊNDICE		55

NOTAÇÃO

d_e	Diâmetro externo da coluna
d_i	Diâmetro interno da coluna
d_a	Diâmetro da circunferência ao longo da qual se distribuem as barras da armadura longitudinal
$B = \pi \dfrac{d_e^2 - d_i^2}{4}$	Área da seção transversal da coluna
A	Área da seção transversal da armadura longitudinal
γ_a	Coeficiente de minoração da resistência do aço
γ_b	Coeficiente de minoração da resistência do concreto
R_{ak}	Valor característico da resistência do aço
$R_a^* = \dfrac{R_{ak}}{\gamma_a}$	Valor de cálculo da resistência do aço
R'_{bk}	Valor característico da resistência à compressão do concreto
$R_b'^* = \dfrac{R'_{bk}}{\gamma_b}$	Valor de cálculo da resistência à compressão do concreto
$p = \dfrac{R_a^* A}{0{,}85 R_b'^* B}$	Taxa mecânica de armadura
M	Momento fletor
$m = \dfrac{M}{0{,}85 R_b'^* B d_e}$	
M_o	Momento aplicado
$m_o = \dfrac{M_o}{0{,}85 R_b'^* B d_e}$	
N'	Esforço normal (positivo se de compressão)

$n' = \frac{N'}{0,85R_b'*B}$	
N_o'	Carga axial aplicada (positivo se de compressão)
$n_o' = \frac{N_o'}{0,85R_b'*B}$	
e	Excentricidade da carga axial
L	Comprimento da coluna
$\ell = \frac{L}{d_e}$	Esbeltez da coluna
R	Raio de curvatura
$k = \frac{d_e}{R}$	
ε_m'	Deformação normal média em uma seção
ϕ	Relação entre a deformação lenta final do concreto e a instantânea

CAPITULO I

INTRODUÇÃO

O presente trabalho trata do problema da determinação da capacidade de carga das colunas de concreto armado com seções transversais em forma de círculo ou coroa circular, quando solicitadas por cargas axiais excêntricas.

Inicialmente, para uma melhor definição do problema examinado, faremos uma breve descrição do comportamento das colunas solicitadas simultaneamente a flexão e compressão.

Desde que a carga axial seja considerável, a deformação das colunas assim solicitadas pode afetar sensivelmente os seus esforços solicitantes internos. Conforme indicado no exemplo da fig. 1, os momentos fletores calculados sem a consideração da deformação da coluna (momentos fletores de 1a. ordem) são majorados por uma parcela resultante da associação da carga axial a esta deformação (momentos feltores de 2a. ordem). A influência deste efeito de 2a. ordem no comportamento da coluna depende do tipo do diagrama tensão-deformação do seu material.

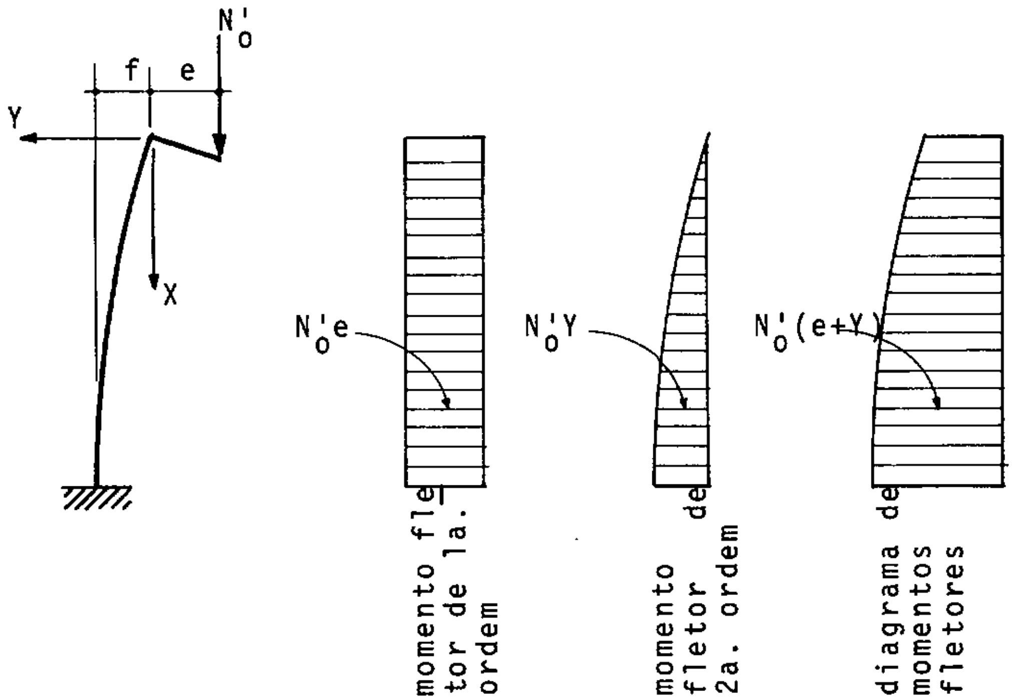
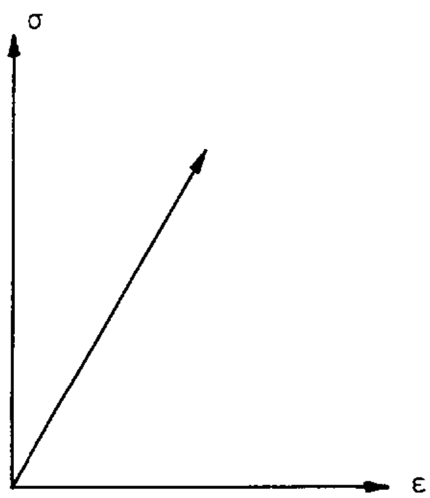


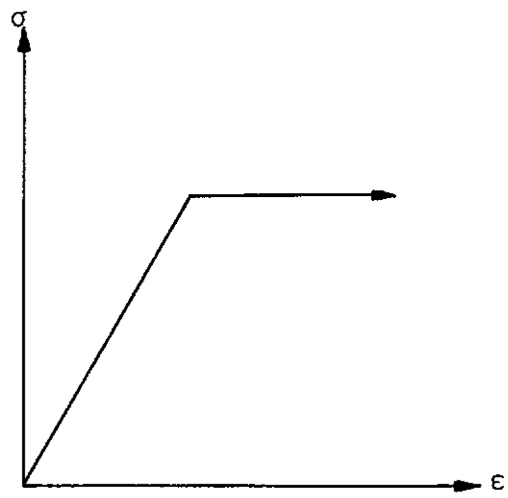
Fig. 1

O comportamento da coluna da fig. 1 pode ser estudado relacionando a carga axial N_o' com a deformação correspondente, caracterizada pela flecha f da sua extremidade livre. A curva assim definida representa as diversas configurações de equilíbrio da coluna e a sua derivada indica o tipo do equilíbrio. O equilíbrio é estável quando $\frac{dN_o'}{df} > 0$ e instável quando $\frac{dN_o'}{df} < 0$.

Para materiais elástico-lineares e elasto-plásticos ideais (fig. 2), a aplicação da teoria de 2a. ordem conduz, respectivamente, aos comportamentos representados pelas curvas (a) e (b) da fig. 3. As colunas de materiais elástico-lineares apresentam um comportamento sempre estável, embora a flecha tenda a valores muito grandes quando a carga axial se aproxima de um certo valor. As colunas de materiais elasto-plásticos apresentam um comportamento qualitativamente diferente, caracterizado pela ocorrência de instabilidade do equilíbrio. Observe-se que, embora a influência da deformação da coluna nos seus esforços solicitantes internos seja considerada na teoria de 2a. ordem, ela só é válida para pequenas deformações.



a) materiais elástico-lineares perfeitos



b) materiais elasto-plásticos perfeitos

Fig. 2

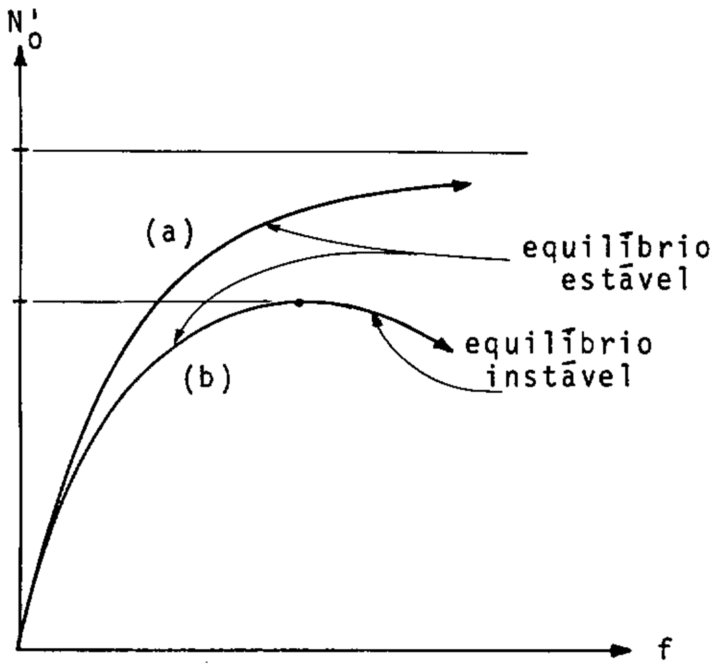


Fig. 3

As colunas de concreto armado apresentam um comportamento semelhante ao das colunas de materiais elasto-plásticos. Como o concreto e o aço apresentam limitações de resistência, verificam-se dois tipos de comportamento, associados, principalmente, à esbeltez da coluna. Conforme indicado pelas curvas (a) e (b) da fig. 4, a capacidade de carga pode ser limitada: (a) pelo esgotamento da capacidade resistente dos materiais; (b) pela ocorrência de instabilidade do equilíbrio. O comportamento (a) é típico das colunas curtas e o (b) das colunas longas.

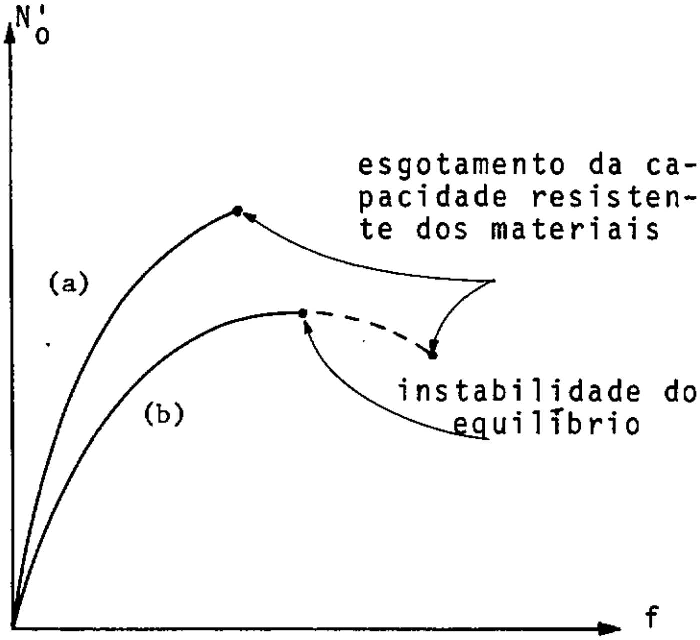


Fig. 4

Para cargas de longa duração a redução da capacidade de carga devida à deformação lenta do concreto deve ser considerada. Esta redução é particularmente sensível no caso das colunas longas, já que a deformação lenta pode aumentar consideravelmente a sua deformação e, portanto, o efeito de 2a. ordem.

No presente trabalho examinamos dois tipos de carregamentos quanto à sua duração: os de curta duração, onde a deformação lenta não é considerada, e os de longa duração, onde a deformação lenta é considerada de modo aproximado. Em ambos os casos a análi se é realizada a partir de diagramas tensão-deformação independentes do tempo.

Embora a não-linearidade dos diagramas tensão-deformação do concreto e do aço seja considerada, admite-se que a curva de descarga coincide com a de carga. Os resultados obtidos desta forma correspondem ao comportamento real da coluna quando as cargas e excentricidades crescem de forma a não provocar inversão no sentido de crescimento das tensões na coluna. Como a capacidade de carga é maior quando o carregamento é aplicado de forma a provocar esta inversão, estes resultados podem ser utilizados independentemente da forma como o carregamento é aplicado. Isto decorre do fato de que a simplificação introduzida nos diagramas tensão-deformação implica em considerar que a coluna é mais deformável do que na realidade o é. No caso de cargas axiais centradas esta simplificação conduz à teoria de Engesser-Shanley para a determinação da carga correspondente à bifurcação do equilíbrio (teoria do módulo de elasticidade tangente).

As hipóteses adotadas a respeito do comportamento do concreto e do aço baseiam-se nas recomendações do Comité Européen du Béton - Fédération Internationale de la Précontrainte (CEB-FIP) (1,2). Não serão consideradas as possibilidades de ocorrer colapso por esforço cortante e instabilidade local na coluna

No Capítulo II fazemos o estudo das colunas em questão, deduzindo um processo para o cálculo da sua capacidade de carga. Este processo foi programado para a utilização de um computador na construção de ábacos para dimensionamento. Apresentamos no Apêndice a listagem do programa.

CAPÍTULO II

PROCESSO DE CÁLCULO

O desenvolvimento que se segue refere-se às colunas de concreto armado com eixo inicialmente reto e seções transversais com características constantes ao longo do comprimento, em forma de círculo ou coroa circular. Considera-se que as barras da armadura longitudinal se distribuem ao longo de uma circunferência, com espaçamento constante, e que o número destas barras é suficientemente grande para permitir a substituição da armadura real por outra contínua e uniformemente distribuída ao longo de toda a circunferência (Fig. 5).

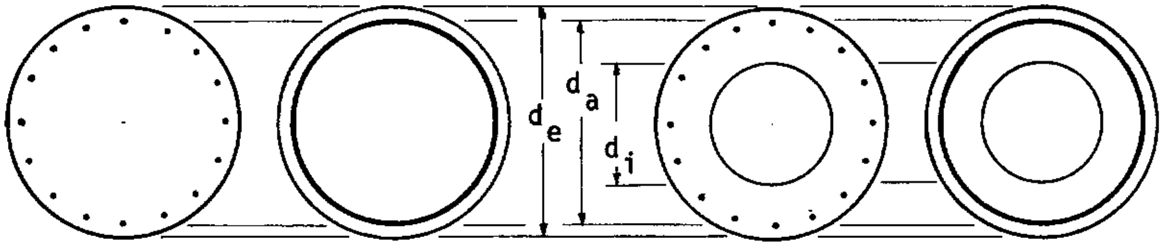


Fig. 5

2.1 - Hipóteses

Adotemos as seguintes hipóteses:

(a) As seções transversais permanecem planas e normais ao eixo da coluna, estando implícito que a aderência entre o concreto e a armadura será considerada perfeita e que a deformação devida ao esforço cortante será desprezada;

(b) A resistência de uma seção transversal é limitada pela ocorrência de uma deformação considerada excessiva na armadura ou pelo esmagamento do concreto. Limita-se o alongamento relativo da armadura em 10/1000 (zona 1 da fig. 6). Considera-se que o esmagamento do concreto ocorre quando o seu encurtamento relativo atinge 3,5/1000 em seções parcialmente comprimidas (zona 2) ou 3,5/1000 - 0,75ε'_{bi} em seções totalmente comprimidas (ε'_{bi} é o encurtamento relativo mínimo da seção - zona 3);

(c) A relação entre tensões e deformações normais no concreto é representada pelo diagrama da fig.7, onde se considera que o concreto não resiste à tração;

(d) A relação entre tensões e deformações normais no aço CA-24 é representada pelo diagrama da fig. 8 e, nos aços CA-40 e CA-50, pelo diagrama da fig. 9, onde se considera a combinação mais desfavorável dos diagramas relativos a aços naturais (tipo A) e encruados (tipo B).

Nos diagramas tensão-deformação admite-se que a curva de descarga coincide com a de carga.

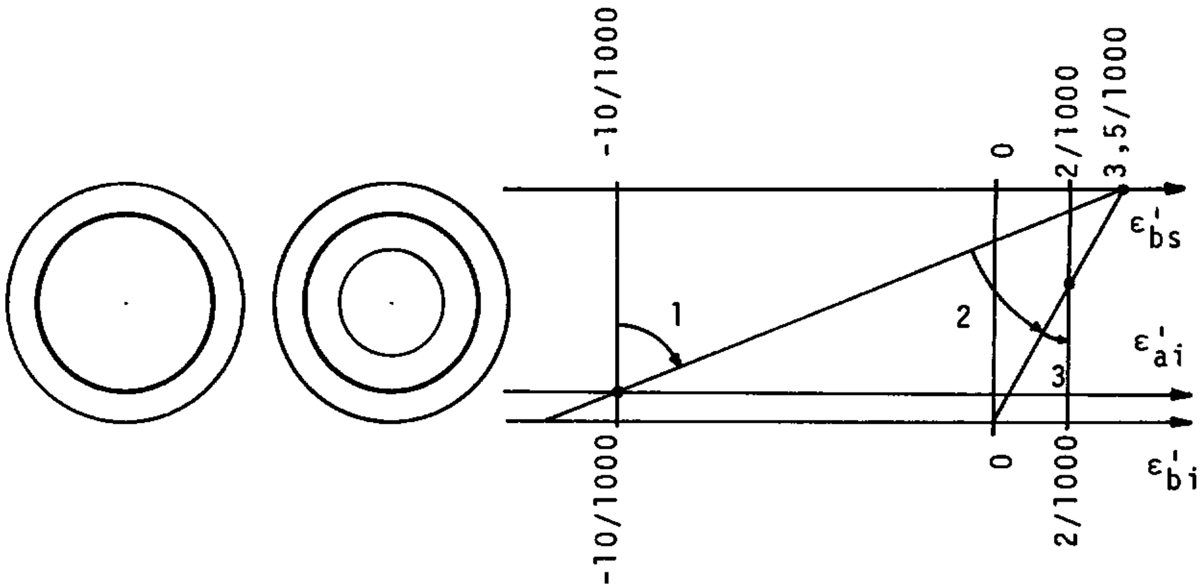


Fig. 6

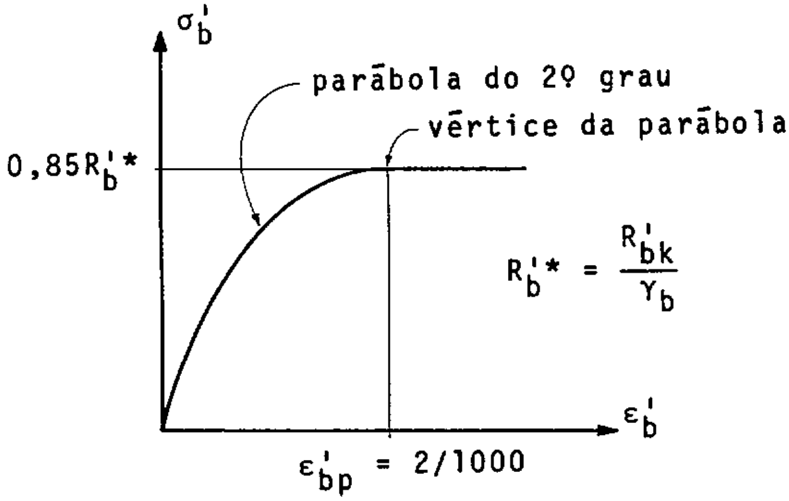
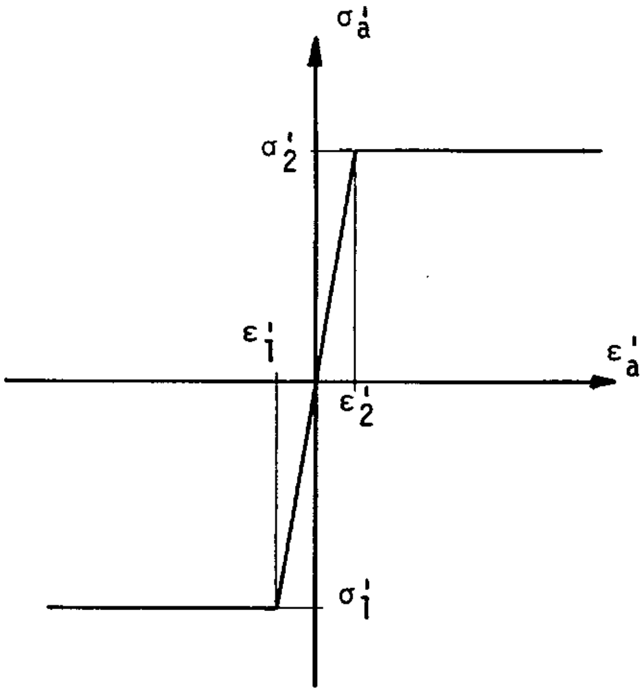


Fig. 7



Aço CA-24

$R_{ak} = 24000 kgf/cm^2$

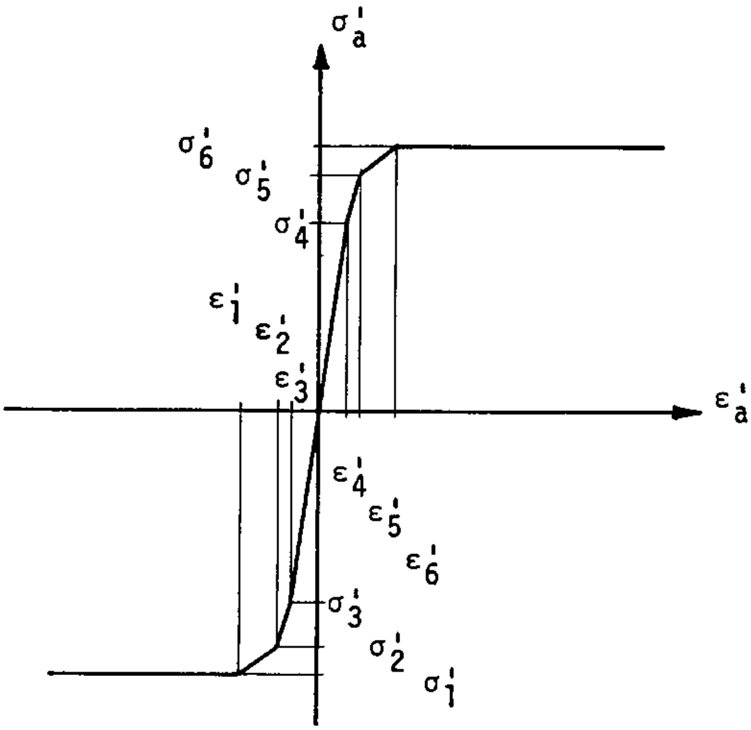
$E_a = 2100000 kgf/cm^2$

$R_a^* = \dfrac{R_{ak}}{\gamma_a}$ $(\gamma_a = 1,15)$

$$\sigma_2' = -\sigma_1' = R_a^*$$

$$\varepsilon_2' = -\varepsilon_1' = \frac{R_a^*}{E_a}$$

Fig. 8



Aço CA-40

$R_{ak} = 4000 kgf/cm^2$

Aço CA-50

$R_{ak} = 5000\ kgf/cm^2$

$E_a = 2100000 kgf/cm^2$

$R_a^* = \dfrac{R_{ak}}{\gamma_a}$ $(\gamma_a = 1.15)$

$$\sigma_6' = -\sigma_1' = R_a^*$$

$$\varepsilon_6' = -\varepsilon_1' = \frac{R_a^*}{E_a} + \frac{2}{1000}$$

$$\sigma_5' = -\sigma_2' = 0,9 R_a^*$$

$$\varepsilon_5' = -\varepsilon_2' = 0,9 \frac{R_a^*}{E_a} + \frac{0,25}{1000}$$

$$\sigma_4' = -\sigma_3' = 0,7 R_a^*$$

$$\varepsilon_4' = -\varepsilon_3' = 0,7 \frac{R_a^*}{E_a}$$

Fig. 9

2.2 - Esforços solicitantes em função da distribuição de deformações normais

Deduziremos, inicialmente, as relações entre esforços solicitantes e deformações normais para seções circulares de concreto e para a armadura. A partir destas, as relações correspondentes às seções de concreto armado em forma de círculo ou coroa circular serão deduzidas por superposição.

2.2.1 - Seções circulares de concreto

Sejam ε'_{bs} e ε'_{bi} as deformações normais máxima e mínima em uma seção circular de concreto. De acordo com a hipótese (a), a distribuição das deformações normais nesta seção é expressa por (fig.10):

$$\varepsilon'_b = k_1 + k_2 \operatorname{sen}\beta \qquad (1)$$

onde:

$$k_1 = \frac{\varepsilon'_{bs} + \varepsilon'_{bi}}{2}$$

$$k_2 = \frac{\varepsilon'_{bs} - \varepsilon'_{bi}}{2}$$

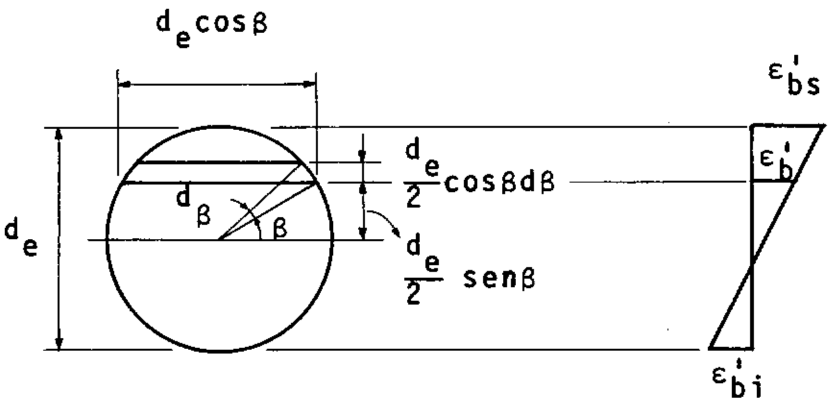


Fig. 10

De acordo com a hipótese (c), a relação entre tensões e deformações normais no concreto é expressa por:

$$\sigma'_b = 0 \qquad \text{para } \varepsilon'_b \leqslant 0$$

$$\sigma'_b = 0{,}85R'^{*}_b \left(2\varepsilon'_b - \frac{\varepsilon'^{2}_b}{\varepsilon'_{bp}}\right)\frac{1}{\varepsilon'_{bp}} \qquad \text{para } 0 \leqslant \varepsilon'_b \leqslant \varepsilon'_{bp} \qquad (2)$$

$$\sigma'_b = 0{,}85R'^{*}_b \qquad \text{para } \varepsilon'_b \geqslant \varepsilon'_{bp}$$

As equações 1 e 2 definem a distribuição de tensões nesta seção, isto é:

$$\sigma'_b = 0 \qquad \text{para } \beta \leqslant \beta_1$$

$$\sigma'_b = 0{,}85R'^{*}_b \left[k_1\left(2-\frac{k_1}{\varepsilon'_{bp}}\right) + 2k_2\left(1 - \frac{k_1}{\varepsilon'_{bp}}\right)\operatorname{sen}\beta - \frac{k_2^{2}}{\varepsilon'_{bp}}\operatorname{sen}^2\beta\right]\frac{1}{\varepsilon'_{bp}} \qquad \text{para } \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2 \qquad (3)$$

$$\sigma'_b = 0{,}85R'^{*}_b \qquad \text{para } \beta \geqslant \beta_2$$

Os limites β_1 e β_2 são os valores de β correspondentes às deformações $\varepsilon'_b = 0$ e $\varepsilon'_b = \varepsilon'_{bp}$ (eq. 1).

Para que seja verificado o equilíbrio de forças nesta seção (fig.10), deve-se ter:

$$N_b' = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_b' \frac{d_e^2}{2} \cos^2\beta d\beta$$

$$M_b = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_b' \frac{d_e^3}{4} \operatorname{sen}\beta\cos^2\beta d\beta$$

Exprimindo σ_b' em função de β (eq. 3) e efetuando as integrações, tem-se:

$$N_b' = 0{,}85\, R_b'^{*} \frac{\pi\ d_e^2}{4}\ F_1$$

$$M_b = 0{,}85 R_b'^{*} \frac{\pi\ d_e^3}{4}\ F_3 \tag{4}$$

onde:

$$F_1 = \frac{1}{\pi}\left\{ \left[B_1(\beta + \frac{\operatorname{sen}2\beta}{2}) - 2B_2 \frac{\cos^3\beta}{3} + \frac{B_3}{4} (\beta - \frac{\operatorname{sen}4\beta}{4})\right]_{\beta_2}^{\beta_1} + \right.$$

$$\left. + \left[\beta + \frac{\operatorname{sen}2\beta}{2}\right]_{\beta_2}^{\pi/2} \right\}$$

$$F_2 = \frac{1}{\pi} \left[-B_1 \frac{\cos^3\beta}{3} + \frac{B_2}{8} (\beta - \frac{\operatorname{sen}4\beta}{4}) - B_3 \frac{\cos^3\beta}{5} (\operatorname{sen}^2\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3})\right]_{\beta_1}^{\beta_2} - \left[\frac{\cos^3\beta}{3}\right]_{\beta_2}^{\pi/2} \tag{5}$$

$$B_1 = \frac{k_1}{\varepsilon'_{bp}} \left(2 - \frac{k_1}{\varepsilon'_{bp}}\right)$$

$$B_2 = \frac{2k_2}{\varepsilon'_{bp}} \left(1 - \frac{k_1}{\varepsilon'_{bp}}\right)$$

$$B_3 = -\left(\frac{k_2}{\varepsilon'_{bp}}\right)^2$$

2.2.2 - Armadura

Sejam ε'_{as} e ε'_{ai} as deformações normais máxima e mínima em uma seção da armadura. De acordo com a hipótese (a) a distribuição das deformações normais nesta seção é expressa por (fig. 11):

$$\varepsilon'_a = k_3 + k_4 \operatorname{sen}\alpha \qquad (6)$$

onde:

$$k_3 = \frac{\varepsilon'_{as} + \varepsilon'_{ai}}{2}$$

$$k_4 = \frac{\varepsilon'_{as} - \varepsilon'_{ai}}{2}$$

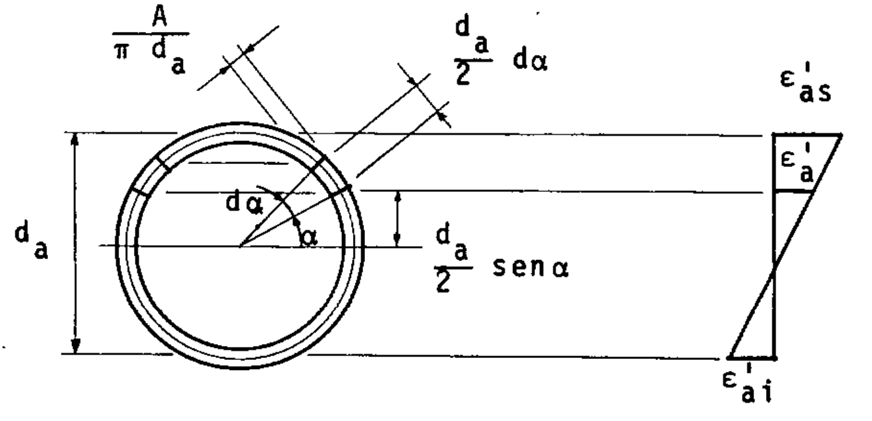


Fig. 11

De acordo com a hipótese (d), a relação entre tensões e deformações normais na armadura é expressa por:

$$\sigma'_a = \sigma'_1 \qquad \text{para } \varepsilon'_a \leqslant \varepsilon'_1$$

$$\sigma'_a = \sigma'_j + \frac{\sigma'_{j+1}-\sigma'_j}{\varepsilon'_{j+1}-\varepsilon'_j}(\varepsilon'_a-\varepsilon'_j) \qquad \text{para } \varepsilon'_j \leqslant \varepsilon'_a \leqslant \varepsilon'_{j+1},$$

$$j = 1,n$$

$$\sigma'_a = \sigma'_{n+1} \qquad \text{para } \varepsilon'_a \geqslant \varepsilon'_{n+1}$$

(7)

Os valores de σ'_j e ε'_j estão indicados nas figuras 5 e 6, com n = 1 para o aço CA-24 e n = 5 para os aços CA-40 e CA-50.

As equações 6 e 7 definem a distribuição de tensões nesta seção, isto é:

$$\sigma'_a = \sigma'_1 \qquad \text{para } \alpha \leqslant \alpha_1$$

$$\sigma'_a = \sigma'_j + \frac{\sigma'_{j+1}-\sigma'_j}{\varepsilon'_{j+1}-\varepsilon'_j}(k_4 \operatorname{sen}\alpha + k_3 - \varepsilon'_j) \qquad \text{para } \alpha_j \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{j+1}$$

$$j = 1,n$$

$$\sigma'_a = \sigma'_{n+1} \qquad \text{para } \alpha \geqslant \alpha_{n+1}$$

(8)

Os limites α_j são os valores de α correspondentes às deformações $\varepsilon_a' = \varepsilon_j'$ (eq.6).

Para que seja verificado o equilíbrio de forças nesta seção (fig.11), deve-se ter:

$$N_a' = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_a' \frac{A}{\pi} \, d\alpha$$

$$M_a = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_a' \frac{A \; d_a}{2\pi} \, \text{sen}\alpha d\alpha$$

Exprimindo σ_a' em função de α (eq.8) e efetuando as integrações, tem-se:

$$\begin{aligned} N_a' &= R_a^* \; A \; F_3 \\ M_a &= R_a^* \; A \; d_e \; F_4 \end{aligned} \qquad (9)$$

onde:

$$F_3 = \frac{1}{\pi \; R_a^*} \Big\{ \sigma_1' \alpha_1 - \sigma_{n+1}' \alpha_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \Big[C_j \; (\alpha_{j+1} - \alpha_j) - D_j \; (\cos\alpha_{j+1} - \cos\alpha_j) \Big] \Big\}$$

$$F_4 = \frac{1}{\pi\ R_a^*} \Bigg\{ -\sigma_1' \cos\alpha_1 + \sigma_{n+1}' \cos\alpha_{n+1} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \Bigg[- \frac{C_j}{2} (\cos\alpha_{j+1} - \cos\alpha_j) +$$

$$+ \frac{D_j}{4} \Bigg(\alpha_{j+1} - \alpha_j - \frac{\mathrm{sen}\, 2\alpha_{j+1}}{2} +$$

$$+ \frac{\mathrm{sen}\ \alpha_j}{2} \Bigg) \Bigg] \Bigg\} \qquad (10)$$

$$C_j = \sigma_j' + \frac{\sigma_{j+1}' - \sigma_j'}{\varepsilon_{j+1}' - \varepsilon_j'} (k_3 - \varepsilon_j')$$

$$D_j = \frac{\sigma_{j+1}' - \sigma_j'}{\varepsilon_{j+1}' - \varepsilon_j'} k_4$$

2.2.3 - <u>Seções de concreto armado em forma de círculo ou coroa circular</u>

Sejam ε_s' e ε_i' as deformações máxima e mínima em uma seção de concreto armado em forma de coroa circular. De acordo com a hipótese (a), as deformações normais extremas na armadura e no perímetro interno da seção são expressas por (fig. 12):

$$\varepsilon_{1s}' = (1 + \frac{d_a}{d_e}) \frac{\varepsilon_s' - \varepsilon_i'}{2} + \varepsilon_i'$$

$$\varepsilon'_{1i} = \varepsilon'_s + \varepsilon'_i - \varepsilon'_{1s}$$

$$\varepsilon'_{2s} = (1 + \frac{d_i}{d_e}) \frac{\varepsilon'_s - \varepsilon'_i}{2} + \varepsilon'_i$$

$$\varepsilon'_{2i} = \varepsilon'_s + \varepsilon'_i - \varepsilon'_{2s}$$

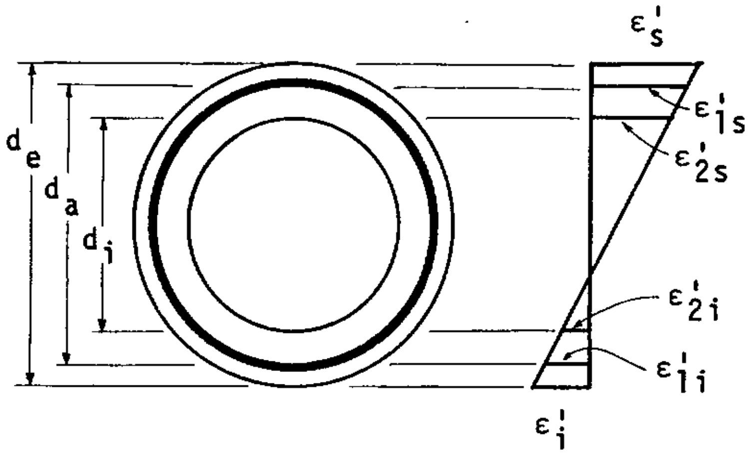


Fig.12

Superpondo as parcelas dos esforços solicitantes relativas ao concreto (eq.4) e à armadura (eq.9), tem-se:

$$N' = 0{,}85R_b'^{*} \frac{\pi}{4} (d_e^2 F_1' - d_i^2 F_1'') + R_a^{*} A F_3'$$

$$M = 0{,}85R_b'^{*} \frac{\pi}{4} (d_e^3 F_2' - d_i^3 F_2'') + R_a^{*} A d_a F_4'$$

onde:

F_1' e F_2' são expressas pelas equações 5, tomando-se $\varepsilon_{bs}' = \varepsilon_s'$ e

$\varepsilon_{bi}' = \varepsilon_i'$

F_1'' e F_2'' são expressas pelas equações 5, tomando-se $\varepsilon_{bs}' = \varepsilon_{2s}'$ e

$\varepsilon_{bi}' = \varepsilon_{2i}'$

F_3 e F_4 são expressas pelas equações 10, tomando-se $\varepsilon_{as}' = \varepsilon_{1s}'$ e

$\varepsilon_{ai}' = \varepsilon_{1i}'$

Exprimindo o esforço normal e o momento fletor através das relações adimensionais

$$n' = \frac{N}{0{,}85 R_b'^{*}\ B} \qquad \text{e}$$

$$m = \frac{M}{0{,}85 R_b'^{*}\ B\ d_e} \quad ,$$

onde $B = \pi\ \frac{d_e^2 - d_i^2}{4}$ (área da seção transversal),

tem-se:

$$n' = \frac{F_1' - \frac{d_i^2}{d_e^2} F_1''}{1 - \frac{d_i^2}{d_e^2}} + p\ F_3' \qquad (11)$$

$$m = \frac{F_2' - \dfrac{d_i^3}{d_e^3} F_2''}{1 - \dfrac{d_i^2}{d_e^2}} + p \frac{d_a}{d_e} F_4' \tag{12}$$

onde:

$$p = \frac{R_a^* A}{0{,}85 R_b'^* B} \quad \text{(taxa mecânica de armadura)}$$

As seções circulares de concreto armado podem ser consideradas um caso particular onde $\frac{d_i}{d_e} = 0$.

2.3 - Resistência da Seção Transversal

As diversas combinações de esforço normal e momento fletor que provocam o esgotamento da capacidade resistente das seções transversais em estudo podem ser determinadas através das expres - sões 11 e 12, calculando os esforços solicitantes correspondentes às distribuições de deformações normais esquematizadas na fig. 6 (ver hipótese b).

Como as hipóteses do item 2.1 foram estabelecidas pelo CEB-FIP de modo a indicarem uma resistência menor que a real, tanto para carregamentos de curta quando de longa duração, podemos considerar que a resistência das seções transversais independe da duração do carregamento.

2.4 - Esforços solicitantes em função da curvatura e da deformação normal média

Consideremos um trecho compreendido entre duas seções transversais muito próximas de uma coluna. Após a deformação, como a curvatura pode ser considerada constante neste trecho, tem-se (fig. 13):

$$\Delta\phi = \frac{\widehat{BB'}}{R} = \frac{\widehat{AA'}}{R-\frac{d_e}{2}} = \frac{\widehat{CC'}}{R+\frac{d_e}{2}}$$

logo:

$$\frac{1}{R} = \frac{\widehat{CC'} - \widehat{AA'}}{\widehat{BB'}\ d_e}$$

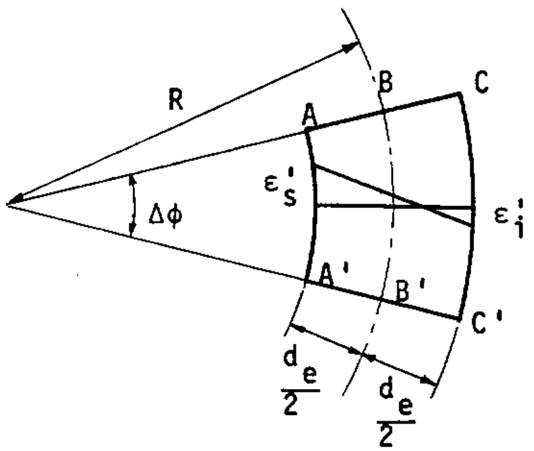


Fig. 13

Sendo ΔL o comprimento inicial deste trecho e como o esforço normal e o momento fletor também podem ser considerados constantes, tem-se:

$$\overset{\frown}{AA'} = (1 - \varepsilon_s')\Delta L$$

$$\overset{\frown}{BB'} = (1 - \frac{\varepsilon_s' + \varepsilon_i'}{2})\Delta L$$

$$\overset{\frown}{CC'} = (1 - \varepsilon_i')\Delta L$$

logo:

$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_s' - \varepsilon_i'}{(1 - \frac{\varepsilon_s' + \varepsilon_i'}{2})d_e}$$

Exprimindo a curvatura através da relação adimensional $k = \frac{d_e}{R}$:

$$k = \frac{\varepsilon_s' - \varepsilon_i'}{1 - \varepsilon_m'} \qquad (13)$$

onde:

$$\varepsilon_m' = \frac{\varepsilon_s' + \varepsilon_i'}{2} \text{ (deformação média)} \qquad (14)$$

Exprimindo ε_s' e ε_i' em função da curvatura e da deformação média e substituindo nas equações 11 e 12, obtêm-se:

$$n' = n'(k, \varepsilon_m') \qquad (15)$$

$$m = m(k, \varepsilon_m') \qquad (16)$$

2.5 - Colunas solicitadas por cargas axiais centradas

A capacidade de carga das colunas solicitadas por cargas axiais centradas deve ser determinada de acordo com a teoria de Engesser-Shanley (teoria do módulo de elasticidade tangente), uma vez que se considera que, nos diagramas tensão - deformação, a curva de descarga coincide com a de carga.

Consideremos uma coluna de material elástico não-linear solicitada a compressão simples (fig.14.a). A teoria de Engesser-Shanley baseia-se no fato de que, para curvaturas muito pequenas, as tensões podem ser consideradas proporcionais às deformações normais das seções (fig.14 .b), isto é, $\sigma' = E_t\, \varepsilon'$, onde E_t é o módulo de elasticidade tangente do material (fig. 14.c). A carga correspondente à bifurcação do equilíbrio pode ser calculada pela fórmula de Euler, uma vez que a coluna se comporta como as de material elástico linear. Assim, tem-se:

$$N'_{crit} = \pi^2 \frac{E_t\, I}{L^2}$$

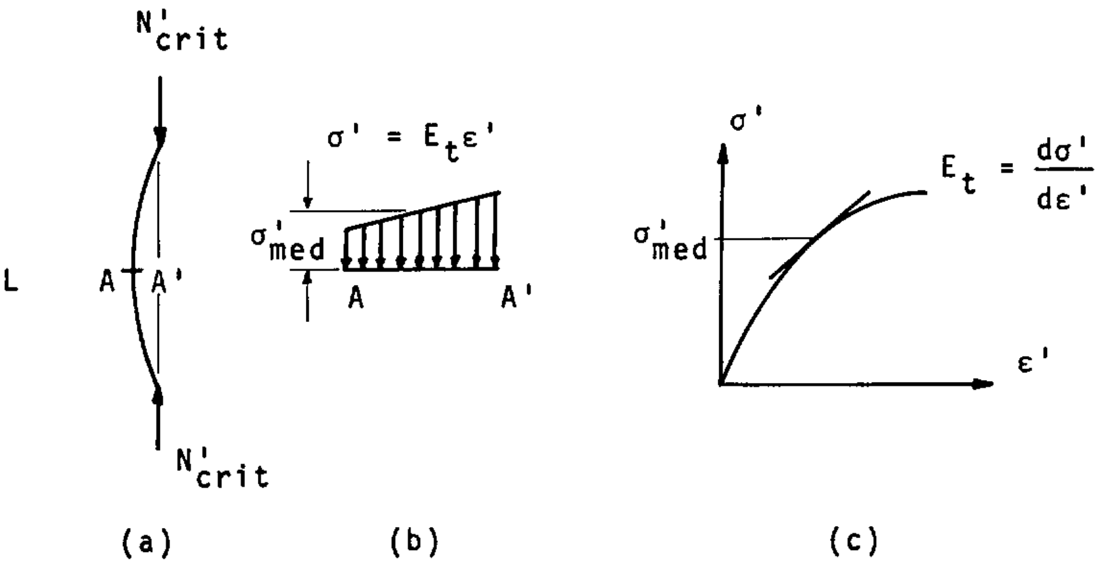


Fig. 14

O valor de N'_{crit} não pode ser obtido diretamente da eq. 17 porque E_t é função da tensão média e, portanto, da carga axial.

Como $E_t\ I$ é a rigidez à flexão da coluna, tem-se:

$$E_t\ I = \frac{M}{1/R}$$

Logo:

$$N'_{crit} = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{M}{1/R}$$

Exprimindo esta equação em função das variáveis adimensionais anteriormente adotadas, tem-se:

$$n'_{crit} = \frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{m}{k} \tag{18}$$

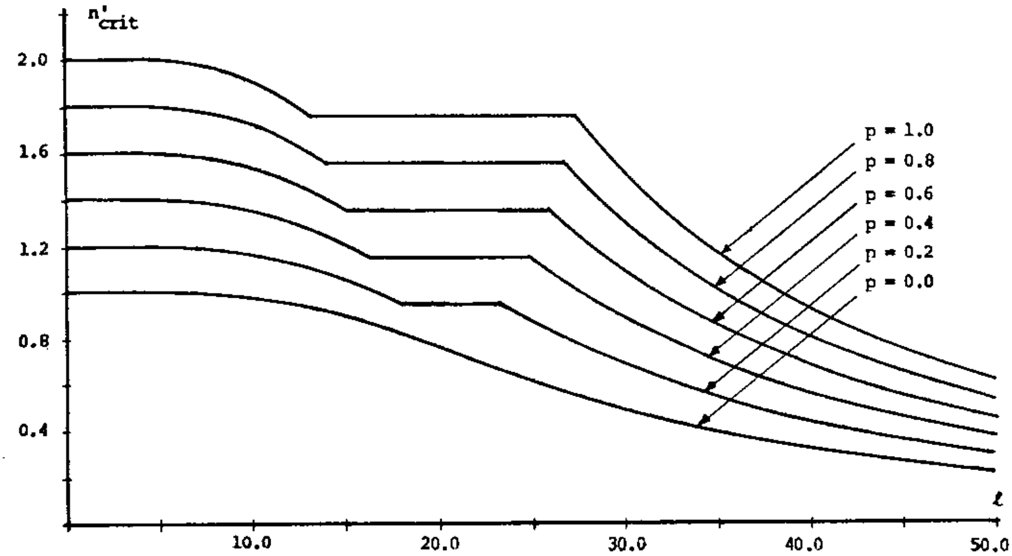
$$\ell = \frac{L}{d_e} \text{ (esbeltez da coluna)}$$

Sejam n_i' e m_i o esforço normal e o momento fletor correspondentes a uma curvatura k_Δ muito pequena e a uma deformação média ε_{mi}' arbitrada (eqs. 15 e 16). De acordo com a eq. 18, a esbeltez associada à carga crítica n_i' é expressa por:

$$\ell = \pi \sqrt{\frac{m_i}{k_\Delta n_i'}}$$

Procedendo desta forma para diversas deformações médias, podemos determinar as curvas esbeltez-carga crítica correspondentes às seções examinadas (fig. 15). As descontinuidades observadas nestas curvas devem-se às descontinuidades angulares dos diagramas tensão-deformação adotados para os aços. Os valores convenientes de n'_{crit} podem ser deduzidos através de interpolações lineares.

A escolha de k_Δ exige certo cuidado. A curvatura deve ser suficientemente pequena para a rigidez calculada $\frac{m_i}{k_\Delta}$ possa ser confundida com E_t I e suficientemente grande para evitar erros apreciáveis de truncamento. O valor $k_\Delta = 10^{-6}$ mostrou-se satisfatório para cálculos realizados com 10 algarismos significativos (computador IBM-1130 operando com precisão expandida).



$\frac{d_i}{d_e} = 0.0$ $\frac{d_a}{d_e} = 0.9$

Fig. 15

2.6 - Colunas solicitadas por cargas axiais excêntricas

2.6.1 - Curvas momento-curvatura

As equações 15 e 16 definem as curvas momento-curvatura de uma seção, isto é, as curvas que relacionam o momento fletor com a curvatura, para valores constantes do esforço normal. Como não é possível explicitar as suas equações, elas devem ser determinadas por pontos.

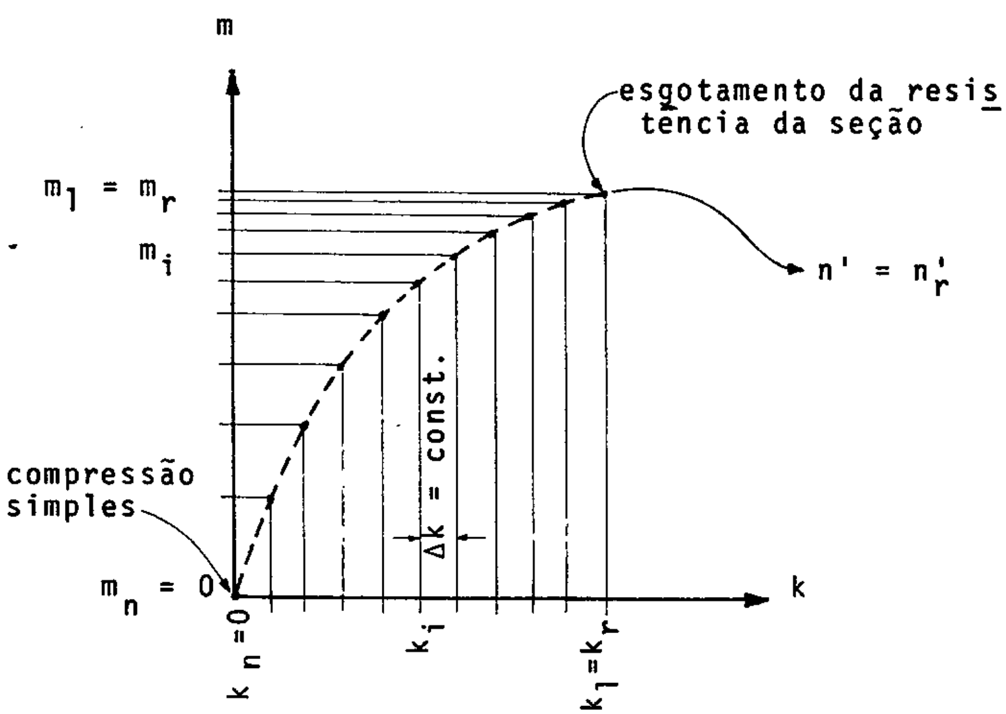


Fig. 16

Sejam n'_r, m_r, k_r e $\varepsilon'_{m,r}$ o esforço normal, o momento fletor, a curvatura e a deformação média correspondentes a uma distribuição de deformações normais arbitrada de acordo com a hipótese (b) (eqs. 11, 12, 13 e 14). Os pontos extremos da curva momento-curvatura correspondente a n'_r (ver fig. 16) são $m_1 = m_r$, $k_1 = k_r$ (esgotamento da resistência da seção transversal) e $m_n = 0$, $k_n = 0$ (compressão simples). Os demais pontos devem ser determinados arbitrando valores k_i para a curvatura e determinando as deformações médias $\varepsilon'_{m,i}$, que satisfazem à equação

$$n' = n'(k_i, \varepsilon'_m) \qquad (19)$$

no ponto $n' = n'_r$

Com os valores k_i e $\varepsilon'_{m,i}$, determinam-se os momentos fletores m_i através da eq. 16.

A equação $n'_r = n'(k_i, \varepsilon'_m)$ pode ser resolvida pelo processo iterativo de Newton-Raphson[10], que descrevemos a seguir.

Seja $\bar{n}'$ o esforço normal correspondente a uma deformação média $\bar{\varepsilon}'_m$. Expandindo a equação 19 no ponto $n' = \bar{n}'$ em série de Taylor e considerando apenas o termo linear:

$$n'_r = \bar{n}' + \left[\frac{dn'}{d\varepsilon'_m}\right]_{\varepsilon'_m = \bar{\varepsilon}'_m} \delta\varepsilon'_m \qquad (20)$$

onde $\delta\varepsilon'_m$ é o acréscimo que se deve dar a $\bar{\varepsilon}'_m$ para obter a deformação média correspondente a n'_r.

Conhecida a derivada da curva no ponto $\varepsilon'_m = \bar{\varepsilon}'_m$, este acréscimo pode ser calculado pela equação 20. A deformação média procurada seria, então: $\varepsilon'_{m,ap} = \varepsilon'_m + \delta\varepsilon'_m$

Devido à aproximação envolvida na eq. 20, o valor $\varepsilon'_{m,ap}$ assim calculado não deve ser o correto, o que pode ser verificado pela eq.19, calculando o esforço normal n'_{ap} correspondente a esta deformação média. Se a aproximação desejada não foi alcançada, inicia-se novo ciclo com $\bar{n}' = n'_{ap}$ e $\bar{\varepsilon}'_m = \varepsilon'_{m,ap}$.

Este processo converge rapidamente desde que $\bar{\varepsilon}'_m$ seja suficientemente próximo do valor correto. Adotando $\bar{\varepsilon}'_m = \varepsilon'_{m,i-1}$ (observe-se que $\varepsilon'_{m,1} = \varepsilon'_{m,r}$) para a determinação de m_i, verificou-se que é necessário uma média de 3 ciclos para se conseguir um erro menor que $n'_r \cdot 10^{-5}$.

A derivada envolvida na eq. 18 pode ser determinada calculando o esforço normal n'_Δ correspondente a $\bar{\varepsilon}'_m + \Delta\varepsilon'_m$ e considerando que:

$$\left[\frac{dn'}{d\varepsilon'_m}\right]_{\varepsilon'_m=\bar{\varepsilon}'_m} = \frac{n'_\Delta - \bar{n}'}{\Delta\varepsilon'_m}$$

A definição deste acréscimo exige certo cuidado. Ele deve ser suficientemente pequeno para que a secante possa ser confundida com a tangente e suficientemente grande para evitar erros de truncamento apreciáveis na operação $\frac{n'_\Delta - \bar{n}'}{\Delta\varepsilon'_m}$. A seguinte expressão para a definição de $\Delta\varepsilon'_m$ mostrou-se satisfatória para cálculos realizados com 10 algarismos significativos:

$$\Delta\varepsilon'_m = \bar{\varepsilon}'_m \cdot 10^{-3} + 10^{-7}$$

onde o termo 10^{-7} destina-se a evitar que o acréscimo se anule quando $\bar{\varepsilon}'_m = 0$.

Apresentamos na fig. 17 a interpretação geométrica do método utilizado.

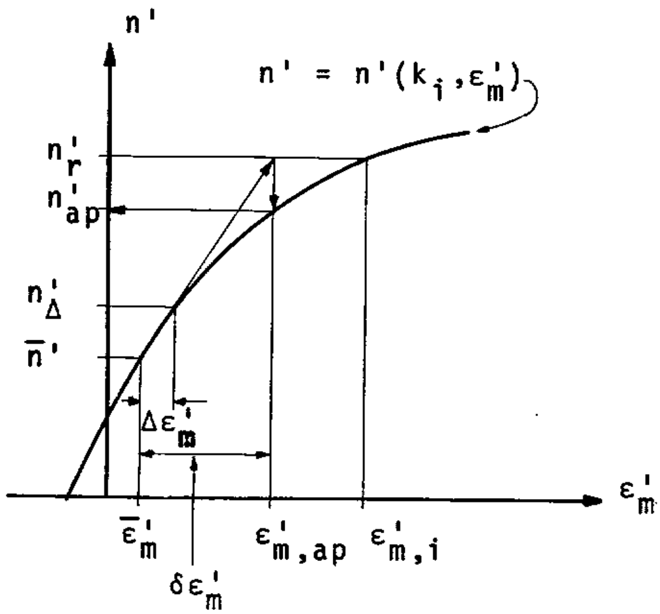


Fig. 17

2.6.2 - Deformadas de colunas solicitadas por cargas axiais centradas

Consideremos a deformada fletida em equilíbrio de uma coluna solicitada por cargas axiais centradas (fig. 18). Ao longo desta deformada, o esforço normal, o momento fletor e a curvatura são expressos por:

$$N' = \frac{N'_o}{\left[1 + (Y')^2\right]^{1/2}}$$

$$M = N'_o \,.\, Y$$

$$\frac{1}{R} = - \frac{Y''}{\left[1 + (Y')^2\right]^{3/2}}$$

Adotando as simplificações relativas a pequenas deformações e exprimindo estas equações em função das variáveis adimensionais anteriormente adotadas, tem-se:

$$n' = n'_o \qquad (21)$$

$$m = n'_o \,.\, y \qquad (22)$$

$$k = - y'' \qquad (23)$$

onde:

$$n'_o = \frac{N'_o}{0,85R'^{*}_b\ B}$$

$$x = \frac{X}{d_e}$$

$$y = \frac{Y}{d_e}$$

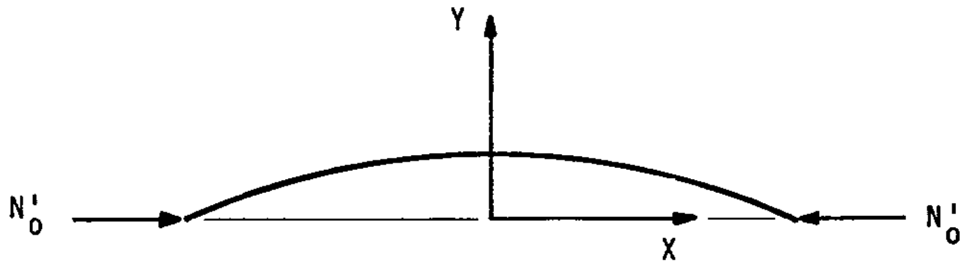


Fig. 18

Como o esforço normal pode ser considerado constante ao longo da deformada (eq. 21), a curva que representa a sua equação diferencial

$$y'' = \varphi(y) \tag{24}$$

pode ser deduzida (utilizando as eqs. 22 e 23) da curva momento - curvatura cujo parâmetro é igual à carga axial aplicada n'_o.

As soluções desta equação diferencial devem ser determinadas considerando as seguintes condições de contorno, onde $y_{máx}$ é a flecha máxima da deformada:

$$[x]_{y=y_{máx}} = 0$$

$$[y']_{y=y_{máx}} = 0 \qquad (25)$$

Variando o valor de $y_{máx}$, obtêm-se as deformadas relativas a colunas com diversos comprimentos.

Para obtenção destas soluções, consideremos que y'' varia linearmente com y entre cada dois pontos consecutivos da curva. Em um trecho genérico j (ver fig. 19), a equação 24 assume, então, a forma $-y'' = a_j y + b_j$

onde:

$$a_j = - \frac{y''_j - y''_{j+1}}{y_j - y_{j+1}}$$

$$b_j = - y''_j - a_j y_j$$

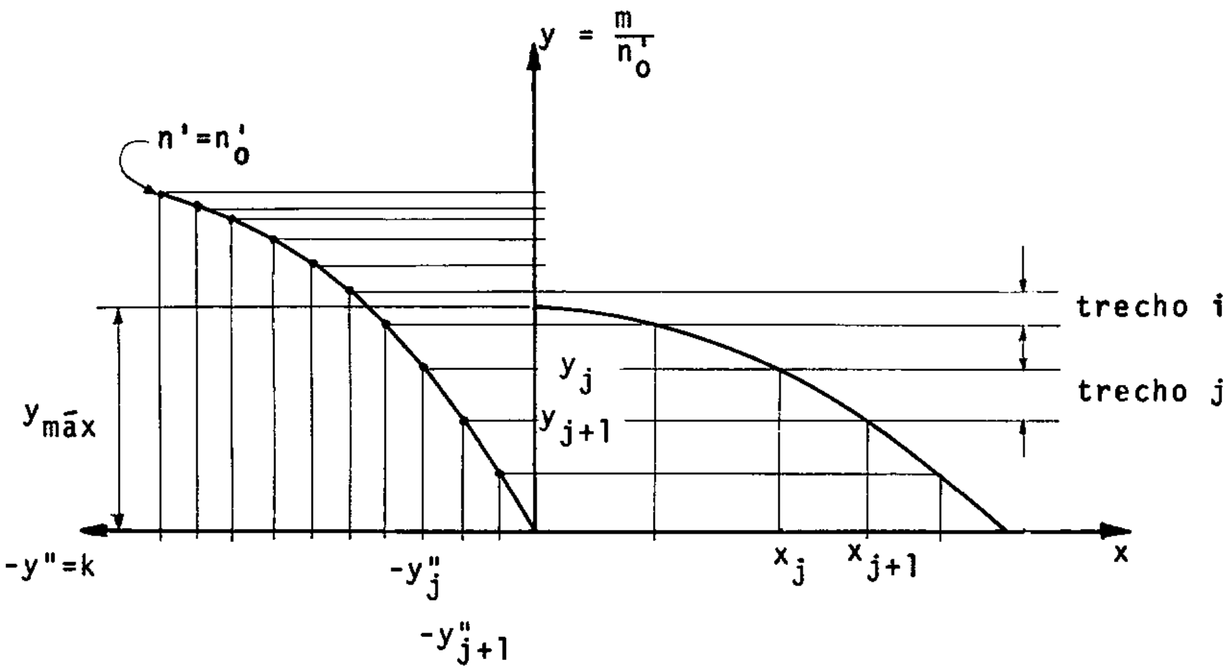


Fig. 19

A solução geral desta equação diferencial é:

$$y = c_j \cos(\sqrt{a_j}\ x) + d_j \operatorname{sen}(\sqrt{a_j}\ x) - \frac{b_j}{a_j}$$

Definidas as condições de contorno

$$[x]_{y=y_j} = x_j \quad \text{e}$$

$$[y']_{y=y_j} = y'_j \quad ,$$

as constantes c_j e d_j são dadas por:

$$c_j = (y_j + \frac{b_j}{a_j})\cos(\sqrt{a_j}\ x_j) - \frac{y_j'}{\sqrt{a_j}}\ \mathrm{sen}(\sqrt{a_j}\ x_j)$$

$$d_j = (y_j + \frac{b_j}{a_j})\mathrm{sen}(\sqrt{a_j}\ x_j) + \frac{y_j'}{\sqrt{a_j}}\ \cos(\sqrt{a_j}\ x_j)$$

(26)

As condições de contorno do trecho seguinte são:

$$x_{j+1} = \frac{2}{\sqrt{a_j}}\ \mathrm{arctg}\ \frac{d_j + \sqrt{d_j^2 + c_j^2 - (y_{j+1} + \frac{b_j}{a_j})^2}}{y_{j+1} + \frac{b_j}{a_j} + C_j}$$

$$y_{j+1}' = \sqrt{a_j}\left[- c_j\mathrm{sen}(\sqrt{a_j}\ x_{j+1}) + d_j\cos(\sqrt{a_j}\ x_{j+1})\right]$$

(27)

As constantes c_j e d_j (eq. 26) do trecho inicial da deformada (trecho i da fig. 19) podem ser determinadas utilizando as condições de contorno expressas pelas eq. 25. As condições de contorno do próximo trecho podem, então, ser calculadas pelas eq. 27. Procedendo desta forma até o último trecho, completamos a determinação da deformada, uma vez que ela é simétrica em relação ao eixo y.

2.6.3 - Capacidade de carga

Consideremos um trecho de comprimento ℓ de uma das deformadas associadas à carga axial centrada n_o' (fig. 20). Desprezando o encurtamento axial e considerando as aproximações relativas a pequenas deformações, podemos considerar que este trecho representa a deformada de uma coluna simplesmente apoiada de comprimento ℓ, quando solicitada por cargas axiais de intensidade n_o' e excentricidades $e_1 = y_1$ e $e_2 = y_2$.

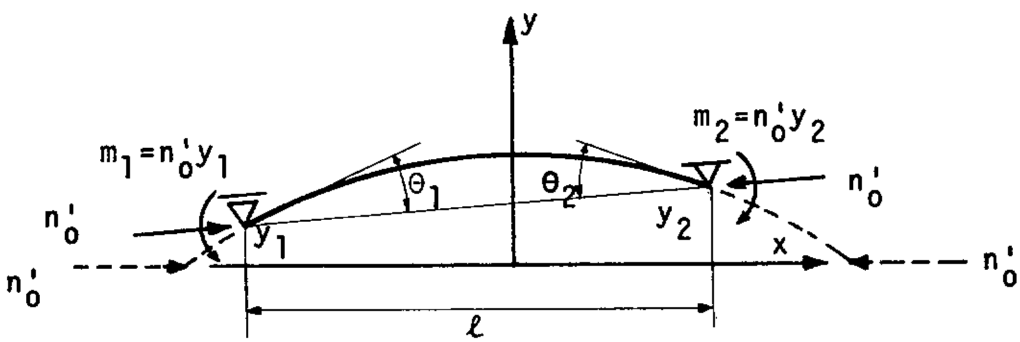


Fig. 20

Determinando trechos de comprimento ℓ nas diversas defromadas associadas a n_o' tais que $\frac{y_1}{y_2} = c^{\underline{te}}$, obtém-se as deformadas assumidas por uma coluna de comprimento ℓ quando solicitada por cargas axiais de intensidade n_o' e excentricidades que variam mantendo uma relação constante. Indicamos na fig. 21 os casos onde

$\frac{e_1}{e_2} = 1$, $\frac{e_1}{e_2} = 0$ e $\frac{e_1}{e_2} = -1$.

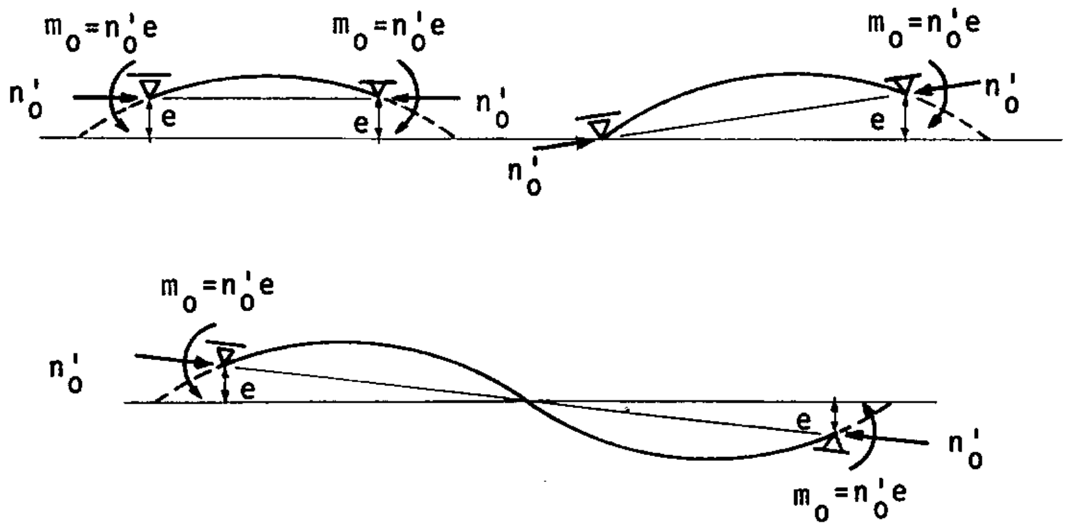


Fig. 21

O comportamento destas colunas pode ser examinado relacionando o crescimento das excentricidades com a rotação de uma das extremidades (fig. 22). O trecho da curva onde $\frac{de}{d\Theta} > 0$ indica as deformadas em equilíbrio estável e $\frac{de}{d\Theta} < 0$ as em equilíbrio instável. Verificam-se dois tipos de comportamento. No primeiro a coluna é sempre estável, e a excentricidade da carga é, portanto, limitada pela resistência da seção transversal (curva a da fig. 22). No segundo a coluna apresenta instabilidade do equilíbrio, quando a excentricidade atinge, então, o seu valor máximo (curva b). O comportamento destas colunas tende do primeiro para o segundo tipo à medida que n'_o, ℓ ou $\frac{e_1}{e_2}$ cresce (e_2 sendo a excentricidade de maior valor absoluto).

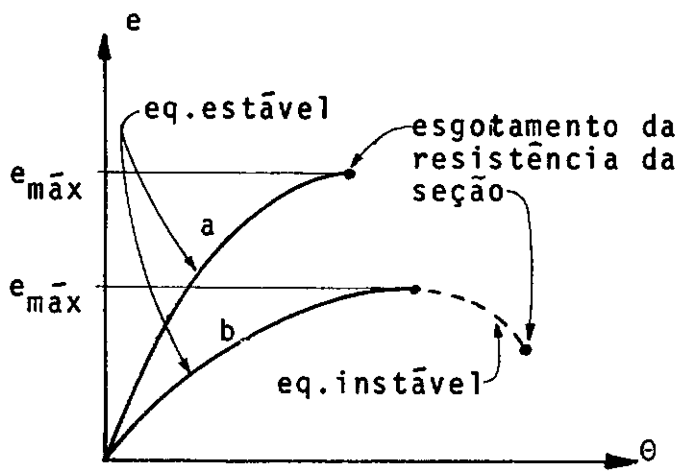


Fig. 22

As colunas solicitadas por carregamentos onde $\frac{e_1}{e_2} = -1$ exigem um tratamento especial. Como o momento é nulo no centro destas colunas, o seu comportamento seria idêntico ao de uma coluna com a metade do comprimento, quando solicitadas por cargas axiais de mesma intensidade e excentricidades que variam mantendo a relação $\frac{e_1}{e_2} = 0$ (curva OAB da fig. 23). Estas colunas($\frac{e_1}{e_2} = -1$) apresentam, porém, uma bifurcação de equilíbrio associada à tendência de se passar de uma deformada com dupla curvatura para outra com curvatura simples (ramo AC).

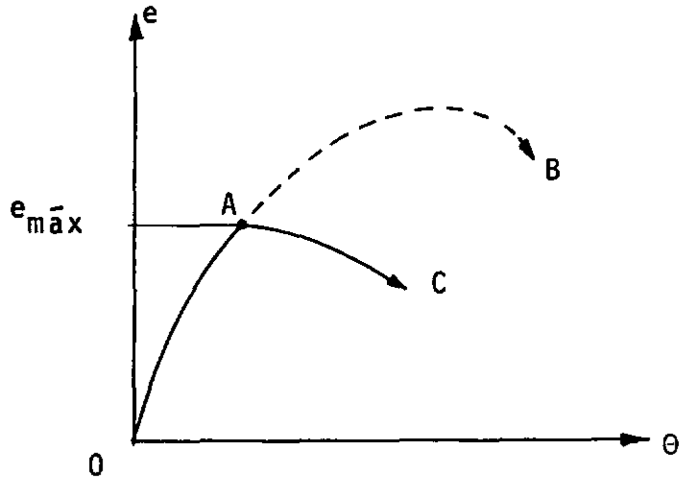


Fig. 23

As informações relativas ao ramo AC podem ser determinadas na deformada associada à carga axial cujo comprimento total é igual ao da coluna examinada. Esta deformada se caracteriza pelo fato de que, qualquer que seja o trecho escolhido, as excentricidades mantêm sempre a relação $\frac{e_1}{e_2} = -1$ (fig. 24). A excentricidade correspondente à bifurcação do equilíbrio é numericamente igual à flecha central desta deformada.

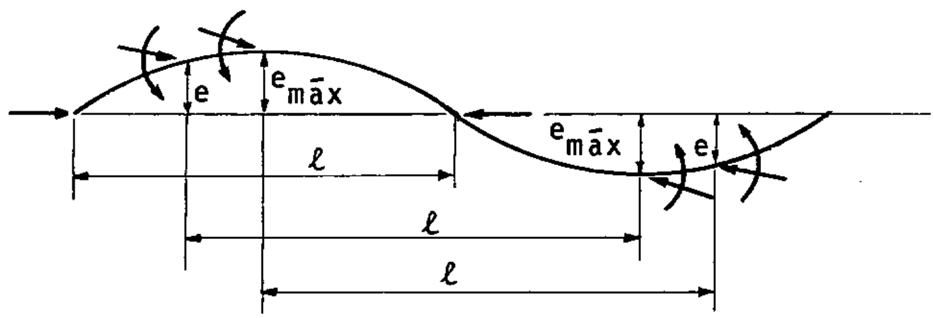


Fig. 24

Para a determinação de uma deformada de comprimento total ℓ, podemos utilizar o seguinte processo iterativo:

(a) Entre as diversas deformadas associadas à carga axial considerada, determinam-se as que têm comprimentos imediatamente superior e inferior ao fixado. Define-se assim um intervalo de variação para $y_{máx}$, no interior do qual está o valor correspondente ao comprimento fixado.

(b) Utilizando o procedimento estabelecido no item 2.6.2, calcula-se o comprimento da deformada cuja flecha máxima é o valor médio do intervalo.

(c) Comparando este comprimento com o fixado, obtém-se um novo intervalo, metade do anterior.

(d) Repetem-se os itens (b) e (c) até alcançar a aproximação desejada.

Nas deformadas assim determinadas verifica-se que uma diminuição na carga axial corresponde a um aumento da flecha central, o que significa que o equilíbrio das deformadas indicadas na fig. 24 é instável. A excentricidade correspondente à bifurcação do equilíbrio é, portanto, a excentricidade máxima aplicável a estas colunas.

2.7 - Carregamentos de Longa Duração

Como a deformação lenta do concreto não foi considerada, o processo desenvolvido nos itens anteriores para a análise do efeito de 2a. ordem só é válido para carregamentos de curta duração.

Este processo pode, entretanto, ser estendido para uma análise aproximada dos carregamentos de longa duração pela simples inclusão da deformação lenta final no diagrama tensão- deformação do concreto, isto é substituindo o parâmetro $\varepsilon'_{bp} = 2/1000$ deste diagrama (ver fig. 7) por $\varepsilon'_{bp} = (1 + \phi)\ 2/1000$, onde ϕ é a relação entre a deformação lenta final e a instantânea. Esta aproximação tende a superestimar o efeito de 2a. ordem porque a deformação lenta é considerada em função das tensões finais da coluna.

Para que o processo possa ser repetido para o novo valor de ε'_{bp}, resta indicar como foram determinados os pontos finais das curvas momento-curvatura (esgotamento da resistência da seção transversal).

Para o novo valor de ε'_{bp}, a curvatura k_r e a deformação média $\varepsilon'_{m,r}$ correspondentes a n'_r e m_r não são conhecidas uma vez que a hipótese relativa à resistência da seção transversal (hipótese b) está associada ao diagrama do concreto para solicitações de curta duração (ε'_{bp} = 2/1000).

Os novos valores de k_r e $\varepsilon'_{m,r}$ foram determinados resolvendo numericamente o seguinte sistema de equações:

$$n'_r = n'\ (k,\ \varepsilon'_m)$$

$$m_r = m(k,\ \varepsilon'_m) \qquad (28)$$

Utilizou-se o processo iterativo de Newton-Raphson[10] para solução de sistemas de equações, que se descreve a seguir:

Sejam $\bar{n}'$ e $\bar{m}$ o esforço normal e o momento fle tor correspondentes a uma curvatura $\bar{k}$ e a uma deformação média $\bar{\varepsilon}'_m$, calculados através das eq. 15 e 16. Expandindo as eq. 28 nos pontos $n' = \bar{n}'$ e $m = \bar{m}$ em séries de Taylor e considerando apenas os termos lineares, têm-se:

$$n'_r = \bar{n}' + \left[\frac{\partial n'}{\partial k}\right]_{k=\bar{k}} \delta k + \left[\frac{\partial n'}{\partial \varepsilon'_m}\right]_{\varepsilon'_m=\bar{\varepsilon}'_m} \delta\varepsilon'_m$$

$$m_r = \bar{m} + \left[\frac{\partial m}{\partial k}\right]_{k=\bar{k}} \delta k + \left[\frac{\partial m}{\partial k}\right]_{\varepsilon'_m=\bar{\varepsilon}'_m} \delta\varepsilon'_m$$

(29)

onde δk e $\delta\varepsilon'_m$ são os acréscimos que se devem dar a $\bar{k}$ e $\bar{\varepsilon}'_m$ para obter a deformação média e a curvatura correspondentes a n'_r e m_r.

Procede-se, então, de modo análogo ao indicado no item 2.6.1, observando que os valores k_r e $\varepsilon'_{m,r}$ daquele item foram adotados como valores iniciais de $\bar{k}$ e $\bar{\varepsilon}'_m$. Verificou-se que é necessário uma média de 6 ciclos para se conseguir erros menores que $n'_r \cdot 10^{-5}$ e $m_r \cdot 10^{-5}$.

CAPITULO III

APLICAÇÃO

O processo de cálculo desenvolvido no capítulo anterior foi programado para a utilização de um computador na elaboração de ábacos destinados à determinação da capacidade de carga das colunas em estudo.

A primeira parte do programa cuja listagem apresentamos no Apêndice destina-se ao cálculo e traçado das curvas que representam as diversas combinações de esforço normal e momento fletor que provocam o esgotamento da capacidade resistente das seções transversais (ver item 2.3). Estas curvas são apresentadas na forma de ábacos cujos parâmetros são o tipo do aço da armadura longitudinal e as relações $\frac{d_i}{d_e}$ e $\frac{d_a}{d_e}$. Cada curva destes ábacos refere-se a uma determinada taxa de mecânica de armadura. Apresentamos um destes ábacos na fig. 25.

A capacidade de carga das colunas curtas pode ser determinada através destes ábacos, independentemente do tipo e da duração do carregamento, já que a redução de resistência devida à deformação destas colunas pode ser desprezada.

A segunda parte do programa destina-se ao cálculo e traçado das curvas que representam as diversas combinações de cargas axiais e momentos que, quando aplicados às extremidades das colunas, provocam o esgotamento da sua capacidade de carga. O programa só examina os casos onde $\frac{e_1}{e_2} = 1$, $\frac{e_1}{e_2} = 0$ e $\frac{e_1}{e_2} = -1$ (ver fig. 21).

Estas curvas são apresentadas na forma de ábacos cujos parâmetros são o tipo do aço e a taxa mecânica da armadura longitudinal e as relações $\frac{d_i}{d_e}$, $\frac{d_a}{d_e}$ e $\frac{e_1}{e_2}$. Cada curva destes ábacos refere-se a uma determinada relação $\frac{\ell}{d_e}$ entre o comprimento da coluna e o seu diâmetro externo. A parte superior refere-se a cargas de curta duração ($\phi = 0$) e a parte inferior a cargas de longa duração ($\phi \neq 0$). Apresentamos 3 destes ábacos nas figs. 26, 27 e 28.

Os dados de entrada do programa são os seguintes, devendo ser perfurados em campos sequenciais de 10 colunas:

a) Características da seção de concreto e da armadura (1 cartão):

1º campo: $DVB = \frac{d_i}{d_e}$

2º campo: $DAB = \frac{d_a}{d_e}$

3º campo: SIGMA =
- $-R_{ak}$ se for aço natural
- $+R_{ak}$ se for aço encruado

(em k_{gf}/cm^2)

4º campo: ITA =
- -1 para o traçado dos ábacos da 1a. parte
- 0 para indicar o fim dos dados
- +1 para o traçado dos ábacos da 2a. parte

b) Se ITA = -1 (1 cartão):

1º campo: PMAX = taxa mecânica máxima de armadura do ábaco referente à 1a.parte do programa.

Retornar ao item (a) para fornecer os dados relativos à próxima seção.

c) Se ITA = +1 (1 cartão):

1º campo: FI = coeficiente de deformação lenta a considerar nos cálculos relativos a cargas de longa duração

2º campo: NEN = número de pontos a considerar no traçado dos ábacos referentes à 2a. parte do programa.

3º campo: NPMC = número de pontos a considerar nas curvas momento-curvatura

4º campo: NDEF = número de deformadas a considerar na determinação da capacidade de carga.

5º campo: P = taxa mecânica de armadura

Retornar ao item (c) para o traçado de ábacos referentes a outros valores da taxa mecânica de armadura. Para fornecer os dados relativos à próxima seção, fazer P < 0 e retornar ao item (a).

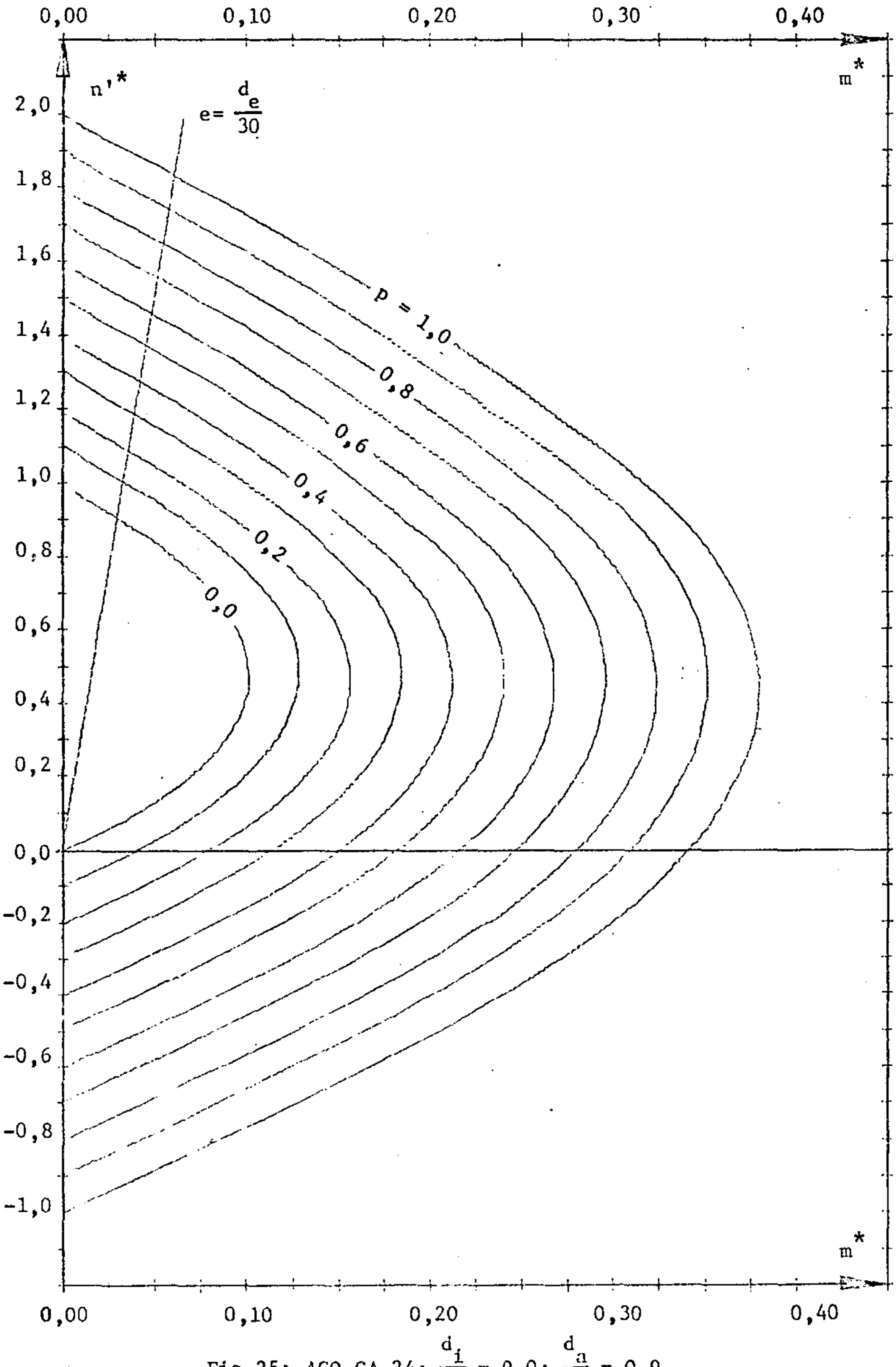


Fig.25: AÇO CA-24; $\frac{d_i}{d_e} = 0,0$; $\frac{d_a}{d_e} = 0,9$

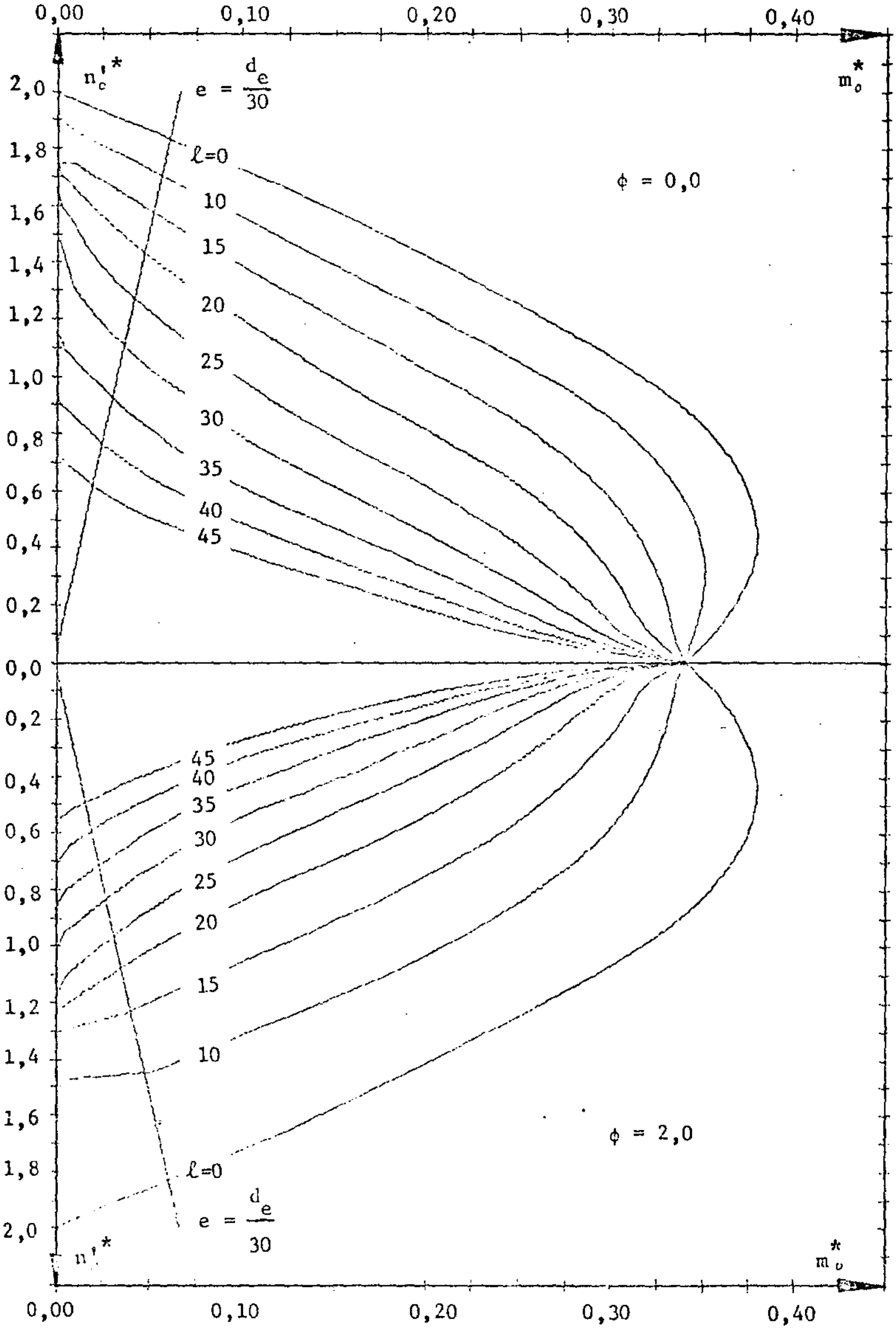


Fig.26: AÇO CA-24; $\frac{d_i}{d_e} = 0,0$; $\frac{d_a}{d_e} = 0,9$; p = 1,0; $\frac{e_1}{e_2} = 1,0$

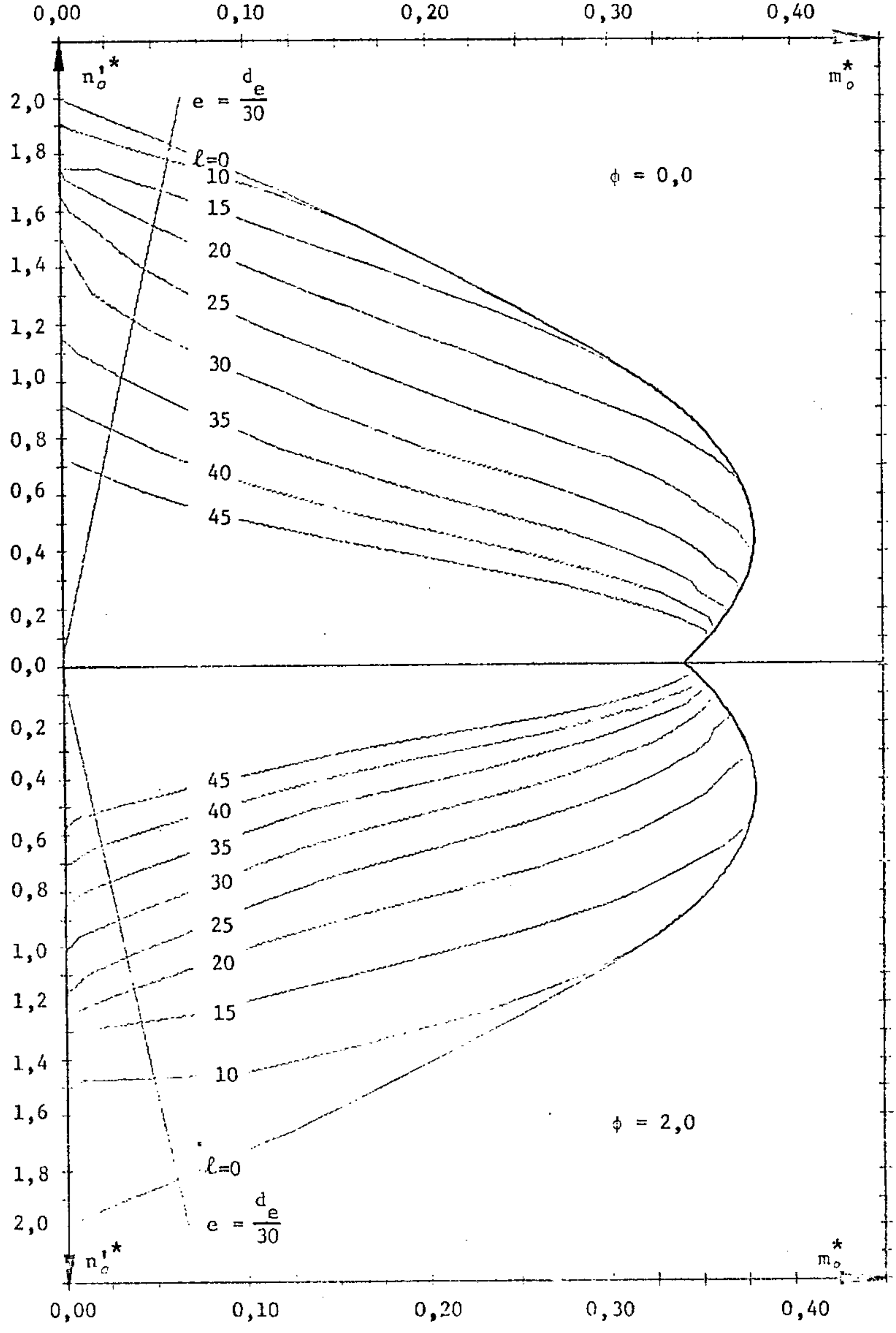


Fig.27: AÇO CA-24; $\frac{d_i}{d_e}$ = 0,0; $\frac{d_a}{d_e}$ = 0,9; p = 1,0; $\frac{e_1}{e_2}$ =0,0

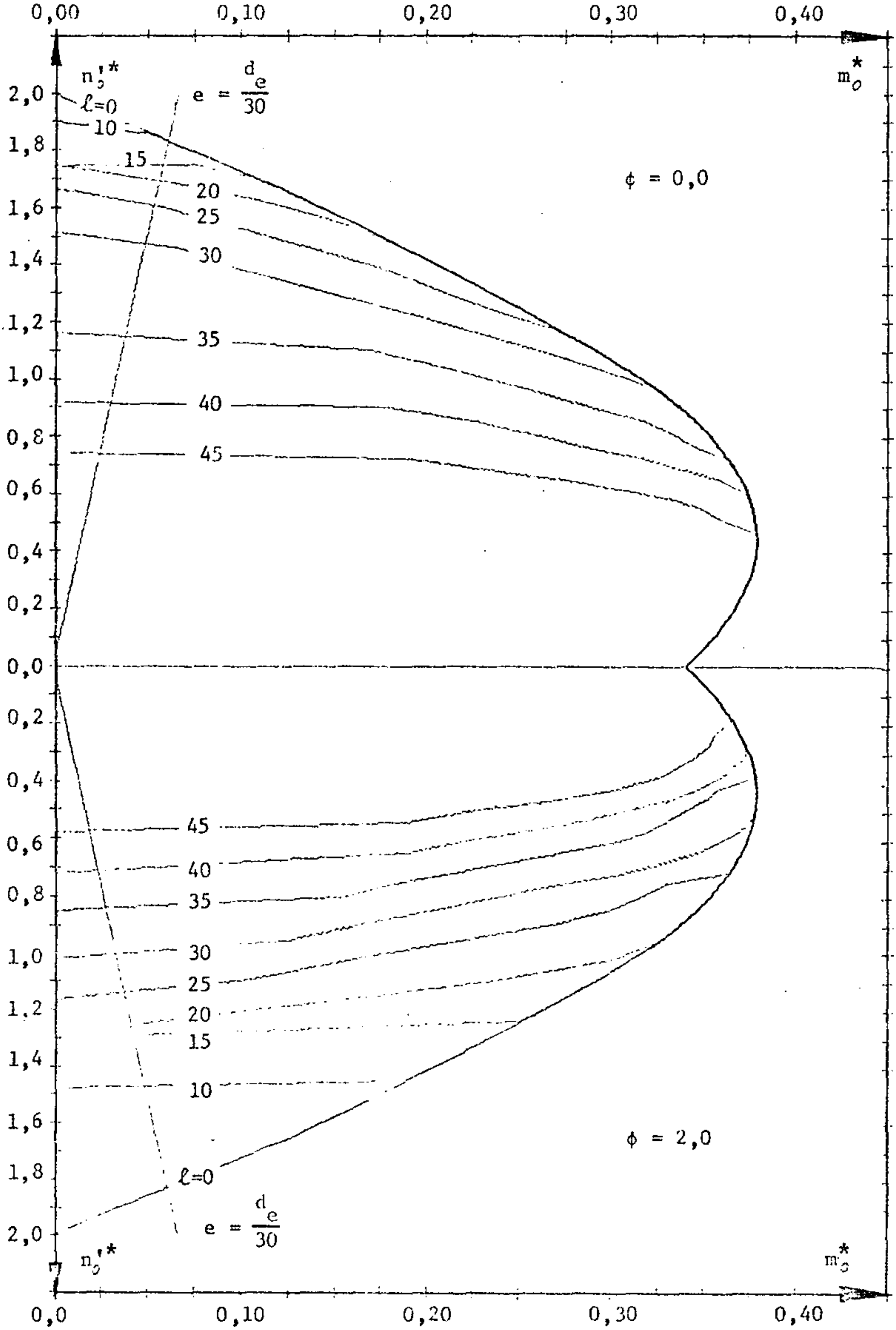


Fig.28: AÇO CA-24; $\frac{d_i}{d_e} = 0,0$; $\frac{d_a}{d_e} = 0,9$; $p = 1,0$; $\frac{e_1}{e_2} = -1,0$

BIBLIOGRAFIA

1. Recommandations Internationales pour le Calcul et l'Exécution des Ouvrages en Béton, Principes et Recommandations (rédaction juin 1970), Comité Européen du Béton - Fédération Internationale de la Précontrainte, Paris.
2. Recommandations Internationales pour le Calcul et l'Exécution des Ouvrages en Béton, Compléments (projet de février 1971), Comité Européen du Béton - Fédération Internationale de la Précontrainte, Paris.
3. Bulletin d'Information nº 76, Contribution à la Préparation du Manuel de Calcul CEB-FIP "Flexion-Compression", mars 1971, Comité Européen du Béton - Fédération Internationale de la Précontrainte, Paris.
4. Bulletin d'Information nº 77, Contribution à la Préparation du Manuel de Calcul CEB-FIP "Flambement", avril 1971, Comité Européen du Béton - Fédération Internationale de la Précontrainte, Paris.
5. Velloso, Dirceu A., - Flambagem na Flexão Composta, edição do autor, 1961.
6. Galambos, Theodore V., - Structural Members and Frames, Prentice-Hall, Inc., 1968.
7. Bleich, F., - Buckling Strenght of Metal Structures, McGraw-Hill Book Co., 1952.
8. Burgermeister, Gustav, e Stenp, Herbert, e Kretzschmar, Horst, Stabilitatstheorie, Akademie-Verlag, 1966.

9. Timoshenko, Stephen P., e Gere, James M., Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Co., 1961.

10. Gurfinkel, German e Robinson, Arthur, Determination of Strain Distribution and Curvature in a Reinforced Concrete Section Subjected to Bending Moment and Longitudinal Load, ACI Journal, july 1967.

11. Mac Gregor, James G., e Breen, John E., Design of Slender Concrete Columns, ACI Journal, january 1970.

12. Faessel, P., e Robinson, J.R., e Morrisset, A., Tables d'É-tats Limites Ultimes des Poteaux en Bēton Armē, Eyrolles, 1972.

13. Goyal, Brij B., e Jackson, Neil, Slender Concrete Columns Under Sustained Load, Journal of the Structural Division, ASCE, november 1971.

14. Ketter, Robert L., Further Studies of the Strenght of Beams Columns, Journal of the Structural Division, ASCE, august 1961.

A P E N D I C E

```
// FORTRAN
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
C     *********************
C     *  SUBRCTINA ESFSC  *
C     *********************
      SUBROUTINE ESFSC
      REAL D(10),CT1(9),CT2(9),NB,MB,NA,MA
      REAL S(10),C(10),A(10),H(9),G(9)
      COMMON PI,PI2,DT,DVB,DVBQ,DVBC,DAB,SIGMA,NDL,D,CT1,CT2,
     1CONSB,CONSC,CONSD,P,DM,CV,IMN,NB,MB,NA,MA
      EQUIVALENCE (S1,S(1)),(S2,S(2)),(S3,S(3)),(S4,S(4)),
     1(S5,S(5)),(S6,S(6)),(S7,S(7)),(S8,S(8)),(S9,S(9)),
     2(S10,S(10))
      EQUIVALENCE (C1,C(1)),(C2,C(2)),(C3,C(3)),(C4,C(4)),
     1(C5,C(5)),(C6,C(6)),(C7,C(7)),(C8,C(8)),(C9,C(9)),
     2(C10,C(10))
      EQUIVALENCE (A1,A(1)),(A2,A(2)),(A3,A(3)),(A4,A(4)),
     1(A5,A(5)),(A6,A(6)),(A7,A(7)),(A8,A(8)),(A9,A(9)),
     2(A10,A(10))
      EQUIVALENCE (G1,G(1)),(G2,G(2)),(G3,G(3)),(G4,G(4)),
     1(G5,G(5)),(G6,G(6)),(G7,G(7)),(G8,G(8)),(G9,G(9))
      EQUIVALENCE (H1,H(1)),(H2,H(2)),(H3,H(3)),(H4,H(4)),
     1(H5,H(5)),(H6,H(6)),(H7,H(7)),(H8,H(8)),(H9,H(9))
      D2=D(2)
      D6=D(6)
      DB=ABS(CV*(1-DM)/2)
      DA=DB*DAB
      DV=DB*DVB
      IF(CV-1.E-10)10,10,30
   10 DO 20 I=1,NDL
      S(I)=SIGN(1.0,D(I)-DM)
      C(I)=0.0
   20 A(I)=SIGN(PI2,S(I))
      GO TO 110
   30 DO 40 I=1,2
   40 S(I)=(D(I)-DM)/DB
      DO 50 I=3,4
   50 S(I)=(D(I)-DM)/DV
      DO 60 I=5,NDL
   60 S(I)=(D(I)-DM)/DA
      DO 100 I=1,NDL
      IF(ABS(S(I))-1)80,90,90
   80 C(I)=SQRT(1-S(I)**2)
      A(I)=ATAN(S(I)/C(I))
      GO TO 100
   90 S(I)=SIGN(1.0,S(I))
      C(I)=0.0
      A(I)=SIGN(PI2,S(I))
```

```
100 CONTINUE
110 B1=DM*(2-DM/D2)/D2
    B2=2*DB*(1-DM/D2)/D2
    B3=-(DB/D2)**2
    A21=A2-A1
    SC2=S2*C2
    SC1=S1*C1
    S2Q=S2*S2
    C2Q=C2*C2
    C2C=C2Q*C2
    S1Q=S1*S1
    C1Q=C1*C1
    C1C=C1Q*C1
    IF(IMN)130,120,120
120 NB=B1*(A21+SC2-SC1)-B2*(C2C-C1C)*DT+B3*(A21-SC2*(C2Q-S2Q)+
   1SC1*(C1Q-S1Q))*0.25+PI2-A2-SC2
    IF(IMN)130,130,140
130 MB=-B1*(C2C-C1C)/3+B2*(A21-SC2*(C2Q-S2Q)+SC1*(C1Q-S1Q))*
   10.125-B3*(C2C*(S2Q+DT)-C1C*(S1Q+DT))*0.2+C2C/3
140 IF(DVB-1.E-7)180,150,150
150 B2=B2*DVB
    B3=B3*DVBQ
    A43=A4-A3
    SC4=S4*C4
    SC3=S3*C3
    S4Q=S4*S4
    C4Q=C4*C4
    C4C=C4Q*C4
    S3Q=S3*S3
    C3Q=C3*C3
    C3C=C3Q*C3
    IF(IMN)170,160,160
160 NB=NB-(B1*(A43+SC4-SC3)-B2*(C4C-C3C)*DT+B3*(A43-SC4*(C4Q-
   1S4Q)+SC3*(C3Q-S3Q))*0.25+PI2-A4-SC4)*DVBQ
    IF(IMN)170,170,180
170 MB=MB-(-B1*(C4C-C3C)/3+B2*(A43-SC4*(C4Q-S4Q)+SC3*(C3Q-S3Q))
   1*0.125-B3*(C4C*(S4Q+DT)-C3C*(S3Q+DT))*0.2+C4C/3)*DVBQ
180 NB=NB/CONSB
    MB=MB/CONSB
    IF(P-1.E-7)190,190,200
190 NA=0.0
    MA=0.0
    GO TO 280
200 IF(SIGMA)210,190,240
210 A65=A6-A5
    C65=C6-C5
    SC5=S5*C5
    SC6=S6*C6
    IF(IMN)230,220,220
220 NA=CONSC*(-A6-A5+(DM*A65-DA*C65)/D6)
```

```
      IF(IMN)230,230,280
  230 MA=CONSD*(C6+C5+(-DM*C65+DA*(A65-SC6+SC5)/2)/D6)
      GO TO 280
  240 A65=A6-A5
      A76=A7-A6
      A87=A8-A7
      A98=A9-A8
      A109=A10-A9
      C65=C6-C5
      C76=C7-C6
      C87=C8-C7
      C98=C9-C8
      C109=C10-C9
      SC5=S5*C5
      SC6=S6*C6
      SC7=S7*C7
      SC8=S8*C8
      SC9=S9*C9
      SC10=S10*C10
      DO 250 I=5,9
      G(I)=CT1(I)*DM+CT2(I)
  250 H(I)=CT1(I)*DA
      IF(IMN)270,260,260
  260 NA=CONSC*(-A10-A5+G5*A65+G6*A76+G7*A87+G8*A98+G9*A109-H5*
     1C65-H6*C76-H7*C87-H8*C98-H9*C109)
      IF(IMN)270,270,280
  270 MA=CONSD*(C10+C5-G5*C65-G6*C76-G7*C87-G8*C98-G9*C109+(H5*
     1(A65-SC6+SC5)+H6*(A76-SC7+SC6)+H7*(A87-SC8+SC7)+H8*(A98-
     2SC9+SC8)+H9*(A109-SC10+SC9))/2)
  280 RETURN
      END
// DUP
*DELETE             ESFSC
*STORE      WS  UA  ESFSC          1E36

// EJECT
// FORTRAN
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
C     *********************
C     *  SUBROTINA GRAF1  *
C     *********************
      SUBROUTINE GRAF1
      REAL D(10),CT1(9),CT2(9),NB,MB,NA,MA
      REAL LAB(9),NMAX,NMIN,MMAXI,ENB(141),MFB(141),ENA(141),
     1MFA(141),NAB(101),MAB(101,9,3),NCRIT(9,2),MZERO,X(141),
     2Y(141),PMA(11)
      INTEGER IGR(4)
      COMMON PI,PI2,DT,DVB,DVBQ,DVBC,DAB,SIGMA,NDL,D,CT1,CT2,
```

```
     1CONSB,CONSC,CONSD,P,DM,CV,IMN,NB,MB,NA,MA
      COMMON NG,TETA,HL,VL,IGR,LAB,NEN,NDEF,ITA,PMAX,NMAX,NMIN,
     1MZERO,MMAXI,NCRIT,ENB,MFB,ENA,MFA,NAB,MAB,NPMC,PREC
      INMAX=NEN*2-1
      IM1=NEN-1
      IM2=NEN+1
      DO 30 I=1,4
      DX=IGR(I)*0.1
      J=0
   10 J=J+1
      IF(NMAX-DX*(J+0.1))20,20,10
   20 IF(J-10)40,40,30
   30 CONTINUE
   40 NDXP=J+1
      J=0
      IF(ITA)50,70,70
   50 J=J+1
      IF(-NMIN-DX*(J+0.1))60,60,50
   60 NDXN=J+1
      IEF=1
      GO TO 80
   70 NDXN=NDXP
      IEF=3
   80 DO 110 I=1,4
      DY=IGR(I)*0.01
      J=0
   90 J=J+1
      IF(MMAXI-DY*(J+0.1))100,100,90
  100 IF(J-10)120,120,110
  110 CONTINUE
  120 NDY=J+1
      NDX=NDXP+NDXN-1
      NDXG=2*(NDXP+NDXN)
      DXG=DX/2
      NDYG=2*NDY
      DYG=DY/2
      EX=(21.0/2.54)/(NDXG*DXG)
      EY=(14.0/2.54)/(NDYG*DYG)
      XES=NDXP*DX
      XEI=-NDXN*DX
      YEE=-NDY*DY
      XPI=XEI-(3.0/2.54)/EX
      YPI= (5.0/2.54)/EY
      XPS=XPI+(28.0/2.54)/EX
      YPD=YPI-(21.5/2.54)/EY
      DO 680 IE=1,IEF
      CALL SCALE(EX,EY,XPI,YPI)
      CALL EPLOT(2,XPI,YPD)
      CALL EPLOT(0,XPS,YPD)
      CALL EPLOT(0,XPS,YPI)
```

```
      CALL EPLOT(-1,XPI,YPI)
      CALL EGRID(0,XEI,YEE,DXG,NDXG)
      CALL EGRID(1,XES,YEE,DYG,NDYG)
      CALL EGRID(2,XES,0.0,DXG,NDXG)
      CALL EGRID(3,XEI,0.0,DYG,NDYG)
      XI=XEI-2*VL/EX
      DESL=2*HL/EY
      DO 140 I=1,NDY
      Z=-YEE-DY*I+1.E-8
      YI=-Z+DESL
      CALL ECHAR(XI,YI,HL,VL,TETA)
  140 WRITE(7,150)Z
  150 FORMAT(F4.2)
      YI=6*HL/EY
      DESL=0.5*VL/EX
      DO 170 I=1,NDX
      Z=XEI+DX*I
      XI=Z-DESL
      CALL ECHAR(XI,YI,HL,VL,TETA)
      Z=Z+SIGN(1.E-8,Z)
      IF(ITA)170,160,160
  160 Z=ABS(Z)
  170 WRITE(7,180)Z
  180 FORMAT(F4.1)
      XI=XES+VL/EX
      DESL=2*HL/EY
      DO 190 I=1,NDY
      Z=DY*(I-1)+1.E-8
      YI=-Z+DESL
      CALL ECHAR(XI,YI,HL,VL,TETA)
  190 WRITE(7,150)Z
      CALL EPLOT(-2,0.0,YEE)
      CALL EPLOT(0,0.0,0.0)
      XI=XES-DX
      YI=XI/30
      CALL EPLOT(-1,XI,-YI)
      IF(ITA)200,330,330
  200 DO 320 IP=1,11
      PM=PMAX*(11-IP)/10+1.E-8
      PMA(IP)=PM
      DO 210 IN=1,141
      I=142-IN
      X(IN)=ENB(I)+ENA(I)*PM
  210 Y(IN)=MFB(I)+MFA(I)*PM
      IF((-1)**IP)240,220,220
  220 CALL EPLOT(-2,X(141),-Y(141))
      DO 230 IN=2,140
      I=142-IN
  230 CALL EPLOT(0,X(I),-Y(I))
      CALL EPLOT(-1,X(1),-Y(1))
```

```
      GO TO 320
  240 CALL EPLOT(-2,X(1),-Y(1))
      DO 290 I=1,140
  290 CALL EPLOT(0,X(I),-Y(I))
      CALL EPLOT(-1,X(141),-Y(141))
  320 CONTINUE
      XI=XPI-4*VL/EX
      CALL ECHAR(XI,YPI,HL,VL,TETA)
      WRITE(7,325)(PMA(IP),IP=1,11)
  325 FORMAT('CURVAS PARA P=',11F5.2)
      GO TO 650
  330 DO 640 IL=1,9
      DO 360 I=1,IM1
      IF(NAB(I)-NCRIT(IL,1))340,350,350
  340 X(I)=NAB(I)
      Y(I)=MAB(I,IL,IE)
      GO TO 360
  350 X(I)=NCRIT(IL,1)
      Y(I)=0.0
  360 CONTINUE
      X(NEN)=0.0
      Y(NEN)=MZERO
      I=INMAX+1
      DO 390 IN=IM2,INMAX
      I=I-1
      IF(-NAB(I)-NCRIT(IL,2))370,380,380
  370 X(I)=NAB(I)
      Y(I)=MAB(I,IL,IE)
      GO TO 390
  380 X(I)=-NCRIT(IL,2)
      Y(I)=0.0
  390 CONTINUE
      IF((-1)**IL)480,400,400
  400 IF(-X(INMAX)-0.2*NAB(1))410,420,420
  410 CALL EPLOT(-2,X(NEN),-Y(NEN))
      GO TO 440
  420 CALL EPLOT(-2,X(INMAX),-Y(INMAX))
      I=INMAX+1
      DO 430 IN=IM2,INMAX
      I=I-1
  430 CALL EPLOT(0,X(I),-Y(I))
  440 IF(X(1)-0.2*NAB(1))450,460,460
  450 CALL EPLOT(-1,X(NEN),-Y(NEN))
      GO TO 640
  460 CALL EPLOT(0,X(NEN),-Y(NEN))
      I=NEN
      DO 470 IN=2,IM1
      I=I-1
  470 CALL EPLOT(0,X(I),-Y(I))
      CALL EPLOT(-1,X(1),-Y(1))
```

```
      GC TC 640
  480 IF(X(1)-0.2*NAB(1))640,490,49C
  49C CALL EPLCT(-2,X(1),-Y(1))
      DC 540 I=2,IM1
  540 CALL EPLOT(0,X(I),-Y(I))
      IF(-X(INMAX)-0.2*NAB(1))570,580,58C
  570 CALL EPLCT(-1,X(NEN),-Y(NEN))
      GO TO 640
  580 CALL EPLOT(0,X(NEN),-Y(NEN))
      DO 620 I=IM2,INMAX
  620 CALL EPLCT(0,X(I),-Y(I))
      CALL EPLCT(-1,X(INMAX),-Y(INMAX))
  640 CONTINUE
      CALL EPLCT(-2,0.0,0.0)
      XI=XEI+DX
      YI=XI/30
      CALL EPLCT(-1,XI, YI)
      XI=XPI-4*VL/EX
      CALL ECHAR(XI,YPI,HL,VL,TETA)
      WRITE(7,645)(LAB(IL),IL=1,9)
  645 FORMAT('CURVAS PARA L=',9F5.1)
  650 XI=XPI+(32.0/2.54)/EX
      YI=YPI
  680 CALL EPLOT(1,XI,YI)
      RETURN
      END
// DUP
*DELETE                 GRAF1
*STORE        WS   UA   GRAF1             1E36

// EJECT
// FORTRAN
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
*IOCS(2501READER,1403PRINTER,TYPEWRITER,PLOTTER)
C     ********************
C     *  PROGRAMA TESE1  *
C     ********************
      REAL D(10),CT1(9),CT2(9),NB,MB,NA,MA
      REAL EBP(2),LAB(9),T(10),EBS(141),EBI(141),ENB(141),
     1MFB(141),ENA(141),MFA(141),NMAX,NMIN,MZERO,MMAX,MMAXI
      REAL N,L,NAN,NPO,NCRIT(9,2),NCOMP,NMC,NI,MI,NP,MP,N1,M1,N2,
     1M2,C(51),Y(51),C1(51),C2(51),C21(51),RC1(51)
      REAL XE(51),YE(51),YLE(51),C3(51),C4(51),LAUX,MINS(9,3),
     1NAB(101),MAB(101,9,3),XMAX(51),YMAX(51)
      INTEGER IGR(4)
      COMMON PI,PI2,DT,DVB,DVBQ,DVBC,DAB,SIGMA,NDL,D,CT1,CT2,
     1CONSB,CONSC,CONSD,P,DM,CV,IMN,NB,MB,NA,MA
      COMMON NC,TETA,HL,VL,IGR,LAB,NEN,NDEF,ITA,PMAX,NMAX,NMIN,
```

```
     1MZERO,MMAXI,NCRIT,ENB,MFB,ENA,MFA,NAB,MAB,NPMC,PREC
C1     LEITURA DOS DADOS E DEFINICAO DE CONSTANTES
      PREC=0.00001
      NG=0
      PI=3.141592654
      PI2=PI/2
      TETA=-PI2
      CT=2.0/3.0
      HL=0.2/2.54
      VL=0.25/2.54
      IGR(1)=1
      IGR(2)=2
      IGR(3)=5
      IGR(4)=10
      IFF=2
      EBP(1)=0.002
      EA=2100000.0
      D(1)=0.0
      D(3)=0.0
      GA=1.15
      LAB(1)=0.0
      LAB(2)=10.0
      LAB(3)=15.0
      LAB(4)=20.0
      LAB(5)=25.0
      LAB(6)=30.0
      LAB(7)=35.0
      LAB(8)=40.0
      LAB(9)=45.0
   10 READ(8,20)DVB,DAB,SIGMA,ITA
   20 FORMAT(3F10.0,I10)
      IF(ITA)40,30,40
   30 CALL EXIT
   40 CALL DATSW(15,ICH)
      WRITE(5,45)DVB,DAB,SIGMA,ITA
   45 FORMAT(///8X,'DVB',7X,'DAB',5X,'SIGMA',7X,'ITA'/1X,3F10.2,
     1I10)
      DVBQ=DVB*DVB
      DVBC=DVBQ*DVB
      CONSB=PI*(1-DVBQ)
      RCALC=ABS(SIGMA/GA)
      IF(SIGMA)50,50,60
   50 D(5)=-RCALC/EA
      D(6)=-D(5)
      NDL=6
      GO TO 80
   60 T(5)=-RCALC
      T(6)=-0.9*RCALC
```

```
      T(7)=-0.7*RCALC
      T(8)=-T(7)
      T(9)=-T(6)
      T(1C)=RCALC
      D(5)=T(5)/EA-0.002
      D(6)=T(6)/EA-0.0C026
      D(7)=T(7)/EA
      D(8)=-D(7)
      D(9)=-D(6)
      D(1C)=-D(5)
      NDL=10
      DO 70 I=5,9
      CT1(I)=(T(I+1)-T(I))/((D(I+1)-D(I))*RCALC)
   70 CT2(I)=T(I)/RCALC-CT1(I)*D(I)

C2    CAPACIDADE DE CARGA DA SECAC

   80 IMN=0
      D(2)=EBP(1)
      D(4)=EBP(1)
      EBS(1)=-0.010
      EBI(1)=-0.01C
      DO 90 I=2,21
      EBS(I)=EBS(I-1)+0.0005
   90 EBI(I)=EBS(I)-2*(0.010+EBS(I))/(1+DAB)
      DO 100 I=22,41
      EBS(I)=EBS(I-1)+0.000175
  100 EBI(I)=EBS(I)-2*(0.010+EBS(I))/(1+DAB)
      DEBI=-EBI(41)/80
      DO 11C I=42,121
      EBS(I)=0.0035
  110 EBI(I)=EBI(I-1)+DEBI
      DO 120 I=122,141
      EBI(I)=EBI(I-1)+0.0001
  120 EBS(I)=0.0035-0.75*EBI(I)
      P=1.C
      CONSC=P/PI
      CONSD=CONSC*DAB/2
      DO 13C I=1,141
      DM=(EBS(I)+EBI(I))/2
      CV=(EBS(I)-EBI(I))/(1-DM)
      CALL ESFSC
      ENB(I)=NB
      MFB(I)=MB
      ENA(I)=NA
  130 MFA(I)=MA
      IF(ITA)140,30,150
  14C READ(8,145)PMAX
  145 FORMAT(F10.0)
      WRITE(5,146)PMAX
```

```
  146 FCRMAT(7X,'PMAX'/1X,F1C.2)
      P=PMAX
      GC TO 160
  150 READ(8,155)FI,NEN,NPMC,NDEF,P
  155 FORMAT(F1C.C,3I1C,F10.C)
      IF(P)1C,156,156
  156 WRITE(5,157)FI,NEN,NPMC,NDEF,P
  157 FORMAT(9X,'FI',7X,'NEN',6X,'NPMC',6X,'NDEF',9X,'P'/F1C.2,
     13I10,F10.2)
      EBP(2)=EBP(1)*(1+FI)
      NTEN=NEN-1
      NENAB=2*NEN-1
      NTMC=NPMC-1
      NDMC=NTMC-1
      NTDEF=NDEF-1
  160 IF(ICH-1)161,161,165
  161 WRITE(5,162)
  162 FORMAT(/1X,'CAPACIDADE DE CARGA DA SECAO (P=1.0)'/9X,'ES',
     18X,'EI',8X,'EA',8X,'NB',8X,'NA',8X,'MB',8X,'MA',8X,'NT',8X,
     2'MT')
      DO 163 I=1,141
      ENT=ENB(I)+ENA(I)
      EFT=EFB(I)+EFA(I)
      DA=EBS(I)-(1+DAB)*(EBS(I)-EBI(I))/2
  163 WRITE(5,164)EBS(I),EBI(I),DA,ENB(I),ENA(I),MFB(I),MFA(I),
     1ENT,EFT
  164 FORMAT(1X,9F10.5)


C3    MOMENTO PARA ESFORCO NORMAL NULO E MOMENTO MAXIMO

  165 DO 170 I=20,141
      V=ENB(I)+ENA(I)*P
      IF(V)17C,17C,175
  170 CONTINUE
  175 H=MFB(I)+MFA(I)*P
      MZERO=H-(H-MFB(I-1)-MFA(I-1)*P)*V/(V-ENB(I-1)-ENA(I-1)*P)
      NAB(NEN)=0.0
      DO 176 IL=1,9
      DO 176 IE=1,3
  176 MAB(NEN,IL,IE)=MZERO
      DO 180 I=2,141
      MMAXI=MFB(I-1)+MFA(I-1)*P
      IF(MFB(I)+MFA(I)*P+1.E-8-MMAXI)185,180,18C
  18C CONTINUE
  185 NMAX=ENB(141)+ENA(141)*P
      NMIN=ENA(1)*P
      IF(ICH-1)186,186,188
  186 WRITE(5,187)NMAX,NMIN,MZERO,MMAXI
  187 FORMAT(/1X,4F10.5/)
```

```
  188 IF(ITA)190,30 ,195
  190 CALL GRAF1
      GO TO 10
  195 CONSC=P/PI
      CONSD=CONSC*DAB/2
      IF(ICH-1)196,196,198
  196 WRITE(5,197)P,(LAB(IL),IL=1,9)
  197 FORMAT(//1X,'ABACOS PARA P=',F5.2/10X,'L',9F10.2)

C4    CARGA CENTRADA CRITICA

  198 IMN=0
      CV=0.000001
      AUX=PI**2/CV
      TOL=0.001*NMAX
      DO 310 IF=1,2
      D(2)=EBP(IF)
      D(4)=EBP(IF)
      IF(EBP(IF)+D(5))200,200,210
  200 DMI=-D(5)
      GO TO 220
  210 DMI=EBP(IF)
  220 DM=DMI
      NCRIT(1,IF)=NMAX
      DO 300 IL=2,9
      DM=DM+0.0001
  230 DM=DM-0.0001
      CALL ESFSC
      L= SQRT(AUX*(MB+MA)/(NB+NA))
      IF(L-LAB(IL))230,240,240
  240 DMAN=DM+0.0001
      DMPO=DM
      CALL ESFSC
      NPO=NB+NA
      DM=DMAN
      CALL ESFSC
      NAN=NB+NA
  250 DM=(DMAN+DMPO)/2
      CALL ESFSC
      N=NB+NA
      L=SQRT(AUX*(MB+MA)/N)
      IF(NAN-NPO-TOL)280,280,260
  260 IF(L-LAB(IL))270,270,275
  270 DMAN=DM
      NAN=N
      GO TO 250
  275 DMPO=DM
      NPO=N
      GO TO 250
  280 NCRIT(IL,IF)=(NAN+NPO)/2
```

```
      IF(NCRIT(IL,IF)-NMAX)3CC,3C0,290
  290 NCRIT(IL,IF)=NMAX
  300 CONTINUE
      IF(ICH-1)301,3C1,310
  301 WRITE(5,302)IF,(NCRIT(IL,IF),IL=1,9)
  3C2 FORMAT(3X,'NCRIT(',I1,')',9F10.7)
      WRITE(5,36C)
  360 FORMAT(/)
  31C CONTINUE
      NAB(1)=NMAX
      NAB(NENAB)=-NMAX
      DO 340 IL=1,9
      CO 340 IE=1,3
      MAB(1,IL,IE)=0.C
  340 MAB(NENAB,IL,IE)=C.C

C5    CURVAS MOMENTO-CURVATURA

      CN=NMAX/NTEN
      IMC=140
      DO 720 IN=2,NTEN
      INN=NENAB+1-IN
      NCOMP=CN*(NEN-IN)
      IMC=IMC+1
  370 IMC=IMC-1
      NMC=ENB(IMC)+ENA(IMC)*P
      IF(NCOMP-NMC)37C,380,380
  380 MMAX=MFB(IMC)+MFA(IMC)*P
      DO 385 IE=1,3
  385 MINS(1,IE)=MMAX
      TOLN=NMC*PREC
      TOLM=MMAX*PREC
      CO 710 IF=1,IFF
      C(2)=EBP(IF)
      D(4)=EBP(IF)
      CC 390 IL=2,9
      CO 39C IE=1,3
  39C MINS(IL,IE)=C.C
      GO TO (400,41C),IF
  400 DMAX=(EBS(IMC)+EBI(IMC))/2
      CMAX=(EBS(IMC)-EBI(IMC))/(1-DMAX)
      NIT=0
      GC TC 500
  41C IMN=0
      NITA=C
      NIT=0
      DMI=DMAX
      CVI=CMAX
      DM=DMI
      CV=CVI
```

```
      CALL ESFSC
      NI=NB+NA
      MI=MB+MA
  420 NP=NMC
      MP=MMAX
  430 DM1=DMI
      CV1=CVI
      N1=NI
      M1=MI
  440 DM2=DM1*1.001+1.E-6
      CV2=CV1*1.001+1.E-6
      IF(NIT-NITA-10)460,460,450
  450 NP=(NI+NP)/2
      MP=(MI+MP)/2
      NITA=NIT
      GO TO 430
  460 DM=DM2
      CV=CV1
      CALL ESFSC
      N2=NB+NA
      M2=MB+MA
      DND=(N1-N2)/(DM1-DM2)
      DMD=(M1-M2)/(DM1-DM2)
      DM=DM1
      CV=CV2
      CALL ESFSC
      N2=NB+NA
      M2=MB+MA
      DNC=(N1-N2)/(CV1-CV2)
      DMC=(M1-M2)/(CV1-CV2)
      DM1=((NP-N1)*DMC-(MP-M1)*DNC)/(DND*DMC-DNC*DMD)+DM1
      CV1=((NP-N1)*DMD-(MP-M1)*DND)/(DNC*DMD-DND*DMC)+CV1
      DM=DM1
      CV=CV1
      CALL ESFSC
      NIT=NIT+1
      N1=NB+NA
      M1=MB+MA
      IF(ABS(N1-NP)-TOLN)470,470,440
  470 IF(ABS(M1-MP)-TOLM)480,480,440
  480 DMI=DM1
      CVI=CV1
      NI=N1
      MI=M1
      IF(ABS(NP-NMC)-TOLN)490,490,420
  490 CMAX=CV1
      DMAX=DM1
  500 C(1)=CMAX
      Y(1)=MMAX/NMC
      DMI=DMAX
```

```
      DC=CMAX/NDMC
      DO 501 I=2,NDMC
  501 C(I)=(NTMC-I)*DC
      IF(C(NDMC)-0.000001)502,502,503
  502 C(NTMC)=C(NDMC)/2
      GO TO 504
  503 C(NTMC)=0.000001
  504 IF(ICH-1)505,505,507
  505 WRITE(5,506) P,NMC,MMAX,IF,Y(1),C(1),DMAX,NIT
  506 FORMAT(//11X,    'CURVA MOMENTO-CURVATURA PARA P=',F5.3/38X,
     1'NMC=',F10.5/37X,'NMAX=',F10.5/39X,'IF=',I2/25X,'Y',14X,'C'
     2,13X,'DM',7X,'NIT'/11X,3F15.6,I10)
  507 DO 580 I=2,NTMC
      TOLC=C(I)*PREC
      CVA=C(I-1)
      IMN=1
      NIT=0
      NITA=0
      CV=C(I)
      DM=DMI
      CALL ESFSC
      NI=NB+NA
  510 CV=C(I)
  520 DM1=DMI
      N1=NI
  530 DM2=DM1*0.999-1.E-6
      IF(NIT-NITA-10)550,550,540
  540 CV=(CV+CVA)/2
      NITA=NIT
      GO TO 520
  550 DM=DM2
      CALL ESFSC
      N2=NB+NA
      DM1=DM1+(NMC-N1)*(DM1-DM2)/(N1-N2)
      DM=DM1
      CALL ESFSC
      NIT=NIT+1
      N1=NB+NA
      IF(ABS(N1-NMC)-TOLN)560,560,530
  560 DMI=DM1
      NI=N1
      CVA=CV
      IF(ABS(CV-C(I))-TOLC)570,570,510
  570 IMN=-1
      CALL ESFSC
      Y(I)=(MB+MA)/NMC
      IF(ICH-1)571,571,580
  571 WRITE(5,572) Y(I),C(I),DM,NIT
  572 FORMAT(11X,3F15.6,I10)
  580 CONTINUE
```

```
      C(NPMC)=0.0
      Y(NPMC)=0.0
      DO 600 I=2,NTMC
      COEF=C(I-1)/Y(I-1)
      IF(COEF-C(I)/Y(I))590,600,600
  590 Y(I)=C(I)/COEF
  600 CONTINUE
      DO 610 I=1,NTMC
      C1(I)=(C(I)-C(I+1))/(Y(I)-Y(I+1))
      C2(I)=C(I)-C1(I)*Y(I)
      C21(I)=C2(I)/C1(I)
  610 RC1(I)=SQRT(C1(I))
      IF(ICH-1)611,611,615
  611 WRITE(5,612)
  612 FORMAT(11X,'CONSTANTES')
      WRITE(5,613) (C1(I),C2(I),C21(I),RC1(I),I=1,NTMC)
  613 FORMAT(11X,4F15.8)
      WRITE(5,614)
  614 FORMAT(11X,'DEFORMADAS')
  615 DY=(Y(1)-Y(NTMC))/NTCEF

C6    DEFORMADAS (CARGAS AXIAIS CENTRADAS)

      TOLY=Y(1)/1000
      DO 695 ND=1,NDEF
      YIN=Y(1)-DY*(ND-1)-1.E-7
      YMAX(ND)=YIN
      DO 620 I=1,NPMC
      IF(YIN-Y(I))620,630,630
  620 CONTINUE
  630 INIC=I-1
      YE(INIC)=YIN
      XE(INIC)=0.0
      YLE(INIC)=0.0
      DO 640 I=INIC,NTMC
      A1=YE(I)+C21(I)
      A2=YLE(I)/RC1(I)
      ARC=RC1(I)*XE(I)
      A3=SIN(ARC)
      A4=COS(ARC)
      C3(I)=A1*A4-A2*A3
      C4(I)=A1*A3+A2*A4
      YE(I+1)=Y(I+1)
      XE(I+1)=2*ATAN((C4(I)+SQRT(C4(I)**2+C3(I)**2-(YE(I+1)+
     1C21(I))**2))/(YE(I+1)+C21(I)+C3(I)))/RC1(I)
      ARC=RC1(I)*XE(I+1)
      YLE(I+1)=RC1(I)*(-C3(I)*SIN(ARC)+C4(I)*COS(ARC))
      IF(ICH-1)635,635,640
  635 WRITE(5,636) ND,I,C3(I),C4(I),YE(I),YLE(I),XE(I),YE(I+1),
     1YLE(I+1),XE(I+1)
```

```
  636 FORMAT(11X,2I5,2F15.8,6F10.6)
  640 CONTINUE
      XMAX(ND)=XE(NPMC)

C7    CARGAS DE INSTABILIDADE PARA K=1

      DO 690 IL=2,9
      LAUX=LAB(IL)/2
      DO 650 I=INIC,NPMC
      IF(LAUX-XE(I))660,660,650
  650 CONTINUE
      AUX=0.0
      GO TO 670
  660 I=I-1
      ARC=RC1(I)*LAUX
      AUX=NMC*(C3(I)*COS(ARC)+C4(I)*SIN(ARC)-C21(I))
  670 IF(AUX-MINS(IL,1))690,690,680
  680 MINS(IL,1)=AUX
  690 CONTINUE

C9    CARGAS DE INSTABILIDADE PARA K=0

      DO 1070 IL=2,9
      LAUX=LAB(IL)-XE(NPMC)
      IF(ND-1)1000,1000,1020
 1000 IF(LAUX)1010,1010,1020
 1010 MINS(IL,2)=MMAX
      GO TO 1070
 1020 LAUX=ABS(LAUX)
      DO 1030 I=INIC,NPMC
      IF(LAUX-XE(I))1040,1040,1030
 1030 CONTINUE
      AUX=0.0
      GO TO 1050
 1040 I=I-1
      ARC=RC1(I)*LAUX
      AUX=NMC*(C3(I)*COS(ARC)+C4(I)*SIN(ARC)-C21(I))
 1050 IF(AUX-MINS(IL,2))1070,1070,1060
 1060 MINS(IL,2)=AUX
 1070 CONTINUE
      DO 1080 IL=3,9,2
      ILL=(IL+1)/2
 1080 MINS(IL,3)=MINS(ILL,2)
      DO 1160 IL=2,8,2
      LAUX=LAB(IL)/2-XE(NPMC)
      IF(ND-1)1090,1090,1110
 1090 IF(LAUX)1100,1100,1110
 1100 MINS(IL,3)=MMAX
      GO TO 1160
 1110 LAUX=ABS(LAUX)
```

```
      DO 1120 I=INIC,NPMC
      IF(LAUX-XE(I))1130,1130,1120
 1120 CONTINUE
      AUX=0.0
      GO TO 1140
 1130 I=I-1
      ARC=RC1(I)*LAUX
      AUX=NMC*(C3(I)*COS(ARC)+C4(I)*SIN(ARC)-C21(I))
 1140 IF(AUX-MINS(IL,3))1160,1160,1150
 1150 MINS(IL,3)=AUX
 1160 CONTINUE
  695 CONTINUE

C10   CARGAS DE INSTABILIDADE PARA K=-1

      DO 1260 IL=2,9
      LAUX=LAB(IL)/2
      DO 1170 ND=1,NDEF
      IF(XMAX(ND)-LAUX)1170,1180,1180
 1170 CONTINUE
      MINS(IL,3)=0.0
      GO TO 1260
 1180 IF(ND-1)1185,1185,1190
 1185 MINS(IL,3)=MMAX
      GO TO 1260
 1190 YANT=YMAX(ND-1)
      YPOS=YMAX(ND)
 1200 IF(YANT-YPOS-TOLY)1240,1240,1210
 1210 YIN=(YANT+YPOS)/2
      DO 1211 I=1,NPMC
      IF(YIN-Y(I))1211,1212,1212
 1211 CONTINUE
 1212 INIC=I-1
      YE(INIC)=YIN
      XE(INIC)=0.0
      YLE(INIC)=0.0
      DO 1213 I=INIC,NTMC
      A1=YE(I)+C21(I)
      A2=YLE(I)/RC1(I)
      ARC=RC1(I)*XE(I)
      A3=SIN(ARC)
      A4=COS(ARC)
      C3(I)=A1*A4-A2*A3
      C4(I)=A1*A3+A2*A4
      YE(I+1)=Y(I+1)
      XE(I+1)=2*ATAN((C4(I)+SQRT(C4(I)**2+C3(I)**2-(YE(I+1)+
     1C21(I))**2))/(YE(I+1)+C21(I)+C3(I)))/RC1(I)
      ARC=RC1(I)*XE(I+1)
      YLE(I+1)=RC1(I)*(-C3(I)*SIN(ARC)+C4(I)*COS(ARC))
 1213 CONTINUE
```

```
      XMAXI=XE(NPMC)
      IF(XMAXI-LAUX)1220,122C,123C
 1220 YANT=YIN
      GC TC 1200
 123C YPOS=YIN
      GC TC 1200
 1240 AUX=NMC*(YANT+YPCS)/2
      IF(AUX-MINS(IL,3))125C,126C,1260
 1250 MINS(IL,3)=AUX
 1260 CONTINUE
      GO TO (700,7C5),IF
  700 CC 701 IL=1,9
      DO 701 IE=1,3
  7C1 MAB(IN,IL,IE)=MINS(IL,IE)
      NAB(IN)=NMC
      GO TC 7C7
  7C5 CC 706 IL=1,9
      CC 706 IE=1,3
  7C6 MAB(INN,IL,IE)=MINS(IL,IE)
      NAB(INN)=-NMC
  707 IF(ICH-1)708,708,71C
  7C8 WRITE(5,7C9)(NMC,(MINS(IL,IE),IL=1,9),IE=1,3)
  709 FCRMAT(1X,10F1C.7)
  710 CONTINUE
      IF(ICH-1)711,711,720
  711 WRITE(5,36C)
  720 CONTINUE
      NAB(NEN)=C.C
      CC 722 IL=1,9
      DC 722 IE=1,3
  722 MAB(NEN,IL,IE)=MZERO
      CALL GRAF1
      GC TC 150
      END
```