ANÁLISE DE ESTABILIDADE ELÁSTICA PELO METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

HUMBERTO LUIZ DA COSTA PEREIRA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA-NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

2473

remand

RIO DE JANEIRO ESTADO DA GUANABARA - BRASIL DEZEMBRO DE 1973

à Zélia e Humberta, Tobias e Germana.

SUMÁRIO

- ii -

Neste trabalho é analisada a estabilidade elástica de estruturas, utilizando o método dos elementos finitos.

Procurou-se inicialmente apresentar um sumário dos critérios gerais de estabilidade, para em seguida, baseando-se ne<u>s</u> tes critérios, introduzir-se uma modificação no processo desenvolvido por Gallagher e outros.

Foi elaborado um programa de cálculo automático e aplicado a diversos casos de vigas, pórticos e arcos planos.

ABSTRACT

- iii -

In this paper we study the elastic stability of structures, using the finite elements method.

In the first part it is presented an overall view of the stability criteria, and the essential differences among them.

Using the criteria of the stationary value of the potential energy we have modified the method of Gallagher.

It was prepared a computer program for the analysis of the stability problems and we present some applications for the case of beams, frames and archs.

SIMBOLOGIA

[]	matriz quadrada
[] ^t	matriz transposta
[] ⁻¹	matriz inversa
{ } }	vetor coluna
{r}}	vetor dos deslocamentos nodais da estrutura
{p}	vetor dos deslocamentos nodais do elemento
{R}	vetor das forças nodais da estrutura
[ĸ _T]	matriz de rigidez de um elemento
[k]	matriz de rigidez convencional de um elemento
[ĸ _G]	matriz de rigidez incremental de um elemento
[K _T]	matriz de rigidez da estrutura
[к]	matriz de rigidez convencional da estrutura
[ĸ _g]	matriz de rigidez incremental da estrutura
α	parâmetro que define o nível de um carregamento
ε	deformação específica
λ	raiz de uma equação característica
u,u,Ö	deslocamentos
٩ _i	coordenada generalizada
4 _i	velocidade generalizada
(c _{ik})	matriz que transforma coordenadas generalizadas em for-
	ças generalizadas
(g _{ik})	matriz que transforma velocidades generalizadas em for-
:	ças generalizadas
Qi	força generalizada
Pi	carga crítica
. V	energia potencial

V(1)	energia de deformação interna
v(e)	potencial das forças externas
T	energia cinética
W	trabalho

INDICE

vi

CAPÍTULO I

1 - CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE	1.
1.1 - Generalidades	1.
1.2 - Critério do Equilíbrio	з.
1.3 - Critério da Energia	6.
1.4 - Critério Cinemático	15.
2 - CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS	19.
3 - ANÁLISE CRÍTICA DOS CRITÉRIOS. CONCEITOS DE ESTABILIDADE	24.
CAPÍTULO II	
1 - ANÁLISE DE ESTABILIDADE ELÁSTICA PELO MÉTODO DOS ELEMEN- TOS FINITOS	51.
2 - MATRIZ DE RIGIDEZ PARA UM ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO	56.
3 - PROCESSO DE GALLAGHER PARA A ANÁLISE DE ESTABILIDADE E-	
LÁSTICA	65.
4 - PROCESSO DE GALLAGHER MODIFICADO	72.
CAPÍTULO III	
1 - PROGRAMA AUTOMÁTICO HPAEE	78.
l.l - Finalidade	78.
1.2 - Subrotinas do Programa	78.
1.3 - Processo Automático para Determinar o Parâmetro Crítico	80.

- vii -	
1.4 - Significado das Principais Variáveis do Programa	83
IFALL	
1.5 - Fluxograma do Programa	09.
1.6 - Manual de Entrada do Programa	96.
	•
CAPITULO IV	
1 - APLICAÇÕES	97.
1.1 - Viga sobre Fundação Elástica	97.
1.2 - Portico Simples de Três Andares	99.
1.3 - Arco Circular Simples Bi-Engastado	102.
	-
CAPÍTULO V	
1 - CONCLUSÕES	105.
APÊNDTCE	106.
BTRI.TOGRAFTA	145.
	· .
	-

CAPITULO I

- Qa

- 1 -

1 - CRITERIOS DE ESTABILIDADE

1.1 - Generalidades

A teoria da estabilidade elástica desenvolveu-se i<u>n</u> dependentemente das teorias de estabilidade existentes. Para isto concorreu a investigação de estabilidade de posições de equilíbrio, associada com o conceito de carga crítica. O mérito deste proced<u>i</u> mento deve-se a Leonhard Euler, que em seu trabalho "De Curvis Elasticis", publicado em 1744, colocou o problema da estabilidade de uma coluna e apontou o caminho certo para a sua solução teórica. Este seu trabalho é a base do método do equilíbrio, ou método de Euler.

A teoria de Euler permaneceu longo tempo sem aplica ção prática, pois, os principais materiais estruturais usados, então, eram a pedra e a madeira. Sõ com a utilização intensiva do aço na construção, no princípio do século XIX, principalmente 🦷 em obras d'arte ferroviārias, ē que o problema voltou a preocupar 05 projetistas. Acontece que os resultados obtidos pela teoria de Euler, no caso de colunas curtas e de comprimento médio, não concordáram com os resultados de testes experimentais. Este fato foi o responsável pelo abandono quase total de sua teoria. Muitos pe<u>s</u> quisadores, entretanto, procuraram conciliar a teoria de Euler com os resultados experimentais. Finalmente, foi reconhecido que em todos os casos onde houvera discrepância, o limite elástico tinha sido excedido. Assim, ficou estabelecido o limite elástico do material como o limite de validade da teoría de Euler.

Todo este contratempo, que ocorreu do divorcio en-

tre a teoria e as propriedades dos materiais, provocou o retardamento da teoria da estabilidade elástica.

Posteriormente, com o aprimoramento dos processos tecnológicos, foram obtidos aços mais resistentes. Com isto, foi possível construir elementos estruturais mais esbeltos. Combinando estes elementos, os projetos puderam, com uma redução de peso, atender suas finalidades e se tornaram cada vez mais comuns. A el<u>e</u> vação do limite elástico do material e a esbeltez dos elementos, portanto, ampliaram as situações onde a hipótese da estrutura ser elástica se verifica.

No princīpio deste sēculo, Timoshenko (1) deu uma grande contribuição, quando usou extensivamente o criterio da ene<u>r</u> gia na solução aproximada de cargas criticas em problemas de estabilidade elástica. Estas soluções estão intimamente ligadas com o método de Ritz (2) e vários pesquisadores como Trefftz (3), Budiansky e Hu (4), propuseram modificações para determinar um limite inferior das cargas criticas.

Ziegler (5), por razões que serão expostas mais adia<u>n</u> te, recomenda um terceiro critério, o critério cinemático.

Em seguida, serã feita uma apresentação nos critêrios citados e uma análise crítica sobre eles.

O conteudo das seções seguintes deste capítulo ach<u>a</u> se, essencialmente, nos livros de Ziegler (5) e Leipholz (6) .

2 -

1.2 - Critério do Equilíbrio

Os métodos empregados para determinar se um sistema, em uma dada configuração, é estável ou não, são o resultado da aplicação de um certo critério. O método de Euler, ou método do equlíbrio, parte da premissa de que devem coexistir distintas conf<u>i</u> gurações de equilíbrio, para uma mesma condição de carga, na ocasião em que uma configuração deixa de ser estável, o que correspo<u>n</u> deria a um equilíbrio neutro, ou indiferente.

Seja para exemplificar, uma coluna bi-rotulada, de seção transversal constante, homogênea, elástica e que obedece a lei de Hooke. Sejam ainda: ℓ , o comprimento da coluna e α = EI, a sua rigidez a flexão. Deseja-se estudar o comportamento da col<u>u</u> na, quando submetida a uma carga axial, P, crescente, de compre<u>s</u> são, agindo sobre sua extremidade superior. A coluna está referida ao sistema de eixos indicado na figura. (1.2.1).



FIGURA(1.2.1)

3 -

Assumindo que a forma defletida seja uma possível posição de equilíbrio, ela deve satisfazer ã equação diferencial linearizada:

$$y^{ii} + k^2 y = 0$$
,

 $k^2 = P/\alpha$.

(1.2.1)

(1.2.2)

(1.2.3)

$$y(0) = 0$$
, $y(t) = 0$

$$y = A \cos kx + B \sin kx \qquad (1.2.4)$$

Da primeira condição (1.2.3), vem que

$$A = 0$$
 (1.2.5)

e da segunda,

$$B \, sen \, k \, \ell = 0 \, (1.2.6)$$

Para k arbitrārio, a eq. (1.2.6) implica em B=O,

o que, em presença de (1.2.5), significa que a <u>unica</u> solução poss<u>í</u>

vel ē y ≡ 0 , ou seja, a solução trivial de (1.2.1).

5 -

Para $B \neq 0$, os valores de k dados por

$$k_n = n\pi/\ell$$
, $(n = 1, 2, 3, ...)$ (1.2.7)

verificam (1.2.6) e a solução não trivial de (1.2.1), para um dado n , ē

$$y_n = B \, \text{sen} \, (n\pi \, x/\ell)$$
 (1.2.8)

Como B é arbitrário, (1.2.8) fornece distintas configurações de equilíbrio para um mesmo valor de k e, portanto, de P.

Com este resultado pode-se, aplicando o criterio, $e_{\underline{x}}$ plicar o comportamento da coluna quando P cresce desde o valor zero. De (1.2.2) e (1.2.7) tira-se que

$$P_n = n^2 \pi^2 \alpha / \ell^2 , \quad (n = 1, 2, 3, ...) \quad (1.2.9)$$

Assim, para a coluna carregada com $0 \le P \le P_1$, a forma reta $\overline{e} e_{\underline{s}}$ tāvel, por ser a ūnica forma possīvel de equilibrio. Quando $P_{\underline{a}}$ tinge o valor P_1 , esta forma, de acordo com o critério, \overline{e} instavel. A carga P_1 \overline{e} chamada de primeira carga critica da coluna e o modo como esta se deforma (dado por (1.2.8) para n = 1), de pr<u>i</u> meiro modo de flambagem. De uma maneira geral, a primeira carga critica \overline{e} a de interesse na pratica, pois, atingida esta carga, as deflexões da coluna podem vir a ser excessivas. Matematicamente, entretanto, admitindo-se que a equação (1.2.1) permaneça valida, quando P for maior que P_1 , a unica forma possível de equilíbrio será, ainda, a forma reta. Quando P atinge o valor P_2 , a coluna volta a flambar, só que, agora, de um outro modo.

- 6

Na figura (1.2.2) estão representados os três prime<u>i</u> ros modos de flambagem da coluna em estudo.



FIGURA 1.2.2

1.3 - Critério da Energia

A energia potencial total, ou simplesmente, energia potencial de um sistema elástico, é dada por:

$$v = v^{(i)} + v^{(e)}$$
 (1.3.1)

onde $V^{(i)}$ é a energia de deformação interna e $V^{(e)}$, o potencial das cargas externas.

O lugar geométrico de todos os pontos de um sistema,

em um dado instante, é chamado de configuração do sistema. Esta configuração pode ser referida a um sistema de eixos cartesianos, tri-dimensional, e ser representada por uma função, a qual não pode ser arbitrária por duas razões:

 ela deve satisfazer às condições de continuidade, até uma certa ordem de suas derivadas, isso, de acordo com a natureza do problema. Por exemplo, numa coluna a sua fratura não é desejada, logo, a função que representará a sua configuração deverá ser continua e ter primeira derivada continua. Já no caso de uma corda, bastará ela ser simplesmente continua.

2 - ela deve ser compativel com as ligações do sistema . As funções que satisfazem àquelas condições são chamadas de <u>fun-</u> <u>ções admissíveis</u>.

No estudo das funções de n variāveis, um conjunto de n números (y_1, y_2, \dots, y_n) , é visto como um ponto em um espaço n-dimensional. Aqui também é conveniente associar cada co<u>n</u> figuração a um ponto de um espaço, o espaço das funções admissíveis.

Em cada ponto, h, do espaço das funções admissiveis,a energia potencial do sistema assume um certo valor real. A<u>s</u> sim,ela e uma função real,cujo dominio de definição e constituido por um conjunto de funções;tal entidade e conhecida como um funcional.

Para os propositos seguintes, e necessário que dado um ponto em um espaço de funções admissiveis, se possa falar de uma vizinhança em torno deste ponto. Para isto, supõe-se que tenha sido definido o conceito de norma neste espaço. (Análogo ao conceito de distância de um ponto a sua origem no espaço euclideano). Ver (7, pp 5,7).

Seja h_0 uma configuração em equilibrio de um sistema <u>conservativo</u>. Admitindo que o funcional V seja continuo, para a norma definida, e que δh seja uma variação admissivel na vizinhança de h_0 (significando com isto que toda função $h_0 + \delta h$ é, ainda, uma função admissivel), pode-se expandir o funcional em série de Taylor:

$$V(h_0 + \delta h) = V(h_0) + (\partial V/\partial h)_{h_0} \delta h$$

 $+(1/2)(\partial^2 V/\partial h^2)_{h_0} \delta h^2 + ...$

$$= V (h_{o}) + \delta V (h_{o}) + \frac{1}{2} \delta^{2} V (h_{o}) + \dots \qquad (1.3.2)$$

Mas, de acordo com o princípio dos trabalhos virtuais :

$$\delta V(h_{p}) = 0$$
 (1.3.3)

e, portánto:

$$V(h_0 + \delta h) = V(h_0) + (1/2)\delta^2 V(h_0) + \dots$$
 (1.3.4)

Logo, quando o sistema passa de uma configuração de equilíbrio para uma configuração vizinha, o incremento da energia potencial é dado, em uma primeira aproximação, pela metade de sua segunda variação.

Nos sistemas conservativos, a energia total, soma das energias potencial e cinética, é uma constante. Quando o sistema muda de configuração hã, simplesmente, uma redistribuição das duas formas de energia. Partindo-se deste fato e da expressão (1.3.4), estabelece-se a condição para a estabilidade da configuração de equilibrio h. . Nesta configuração, toda energia se encontra em forma de energia potencial e um acrescimo desta energia so ē possível, se causas externas intervierem no sistema. Portanto, se a segunda variação da energia potencial for positiva, a configuração de equilibrio será estável, desde que cessadas as causas exte<u>r</u> nas que intervieram no sistema, ele retornarã à sua configuração inicial. Se houver alguma configuração vizinha a h, em que se verifique um decrescimo da energia potencial, indicado por uma segunda variação da energia potencial negativa, um correspondente acrescimo da energia cinetica faz com que o sistema se afaste ainda mais da configuração de equilíbrio, que serã, então, instável. A fronteira de estabilidade serã, portanto, determinada pela condição:

- 9 -

$$\delta^2 V(h_0) = 0$$
 (1.3.5)

No caso dos sistemas conservativos, a aplicação do catério do equilíbrio implica na condição (1.3.5). Realmente, o critério do equilíbrio estipula que além da configuração de equilí brio trivial, h_0 , existe, para a mesma condição de carga, pelo menos uma configuração de equilíbrio não trivial, $h_1 = h_0 + \Delta h$. Da expansão em série de Taylor, vem que:

$$V(h_1) = V(h_0) + \delta V(h_0) + (1/2)(\partial^2 V/\partial h^2)_{h_0} (\Delta h)^2 + \dots (1.3.6)$$

Por outro lado,

$$\delta V(h_1) = \delta V(h_0 + \Delta h) = \partial V(h_1)/\partial (\Delta h) \cdot \delta (\Delta h)$$
 (1.3.7)

Derivando (1.3.6) em relação a ∆h e substituindo em (1.3.7), vem:

$$\delta V (h_1) = (\partial^2 V/\partial h^2)_h \Delta h + \delta(\Delta h) \qquad (1.3.8)$$

Mas, como h_l é uma configuração de equilíbrio,

$$\delta V(h_1) = 0$$
 (1.3.9)

e δ (Δh), \bar{e} arbitrario:

$$(\partial^2 V/\partial h^2)_{h_0} \cdot \Delta h = 0$$
 (1.3.10)

e, consequentemente:

$$\delta^2 V(h_0) = (\partial^2 V/\partial h^2)_{h_0} (\Delta h)^2 = 0$$
 (1.3.11)

Assim, o criterio da energia pode resumir-se em encontrar uma configuração de equilibrio não trivial que satisfaça (1.3.9). Por ou tro lado, (1.3.9) é a condição necessária para o funcional V (h) ter um extremo em $h = h_1$. Timoshenko usou este fato para determinar diretamente, por métodos aproximados, a função $h = h_1$ que Agora, se o sistema de referência tomado for a prōpria configuração de equilibrio trivial, h_o :

$$V(h_0 \equiv 0) = 0$$
 (1.3.12)

e de (1.3.7), tira-se que:

$$V(\delta h) = V(h) = (1/2)\delta^2 V(h_0)$$
 (1.3.13)

Desta forma, a estabilidade do sistema serã decidida pela própria natureza da energia potencial. De fato, da discussão precedente conclue-se que a configuração de equilibrio serã estável se, V(h) for positiva definida, isto é, se:

$$V(h \equiv 0) = 0, V(h \neq 0) > 0$$
 (1.3.14)

dentro de uma vizinhança suficientemente pequena de h_0 . Serā in<u>s</u> tāvel se, \tilde{V} (h) for negativa definida, negativa semidefinida ou indefinida, isto ē, se V (h) for negativa em pelo menos uma configuração admissīvel não trivial. A fronteira de estabilidade serā determinada pela existência de pelo menos uma configuração de equilibrio não trivial em que V(h) = 0, ao mesmo tempo em que n<u>e</u> nhuma configuração admissīvel torne V (h) negativa, ou seja,qua<u>n</u> do a energia potencial for positiva semidefinida, ou ainda, estacionária. Condição, esta, determinada por (1.3.9).

Para a coluna bi-rotulada, jā estudada pelo critē-

rio do equilibrio, a energia de deformação interna é dada por:

$$v^{(i)} = \int_{0}^{\ell} (M^2/2\alpha) dx = (\alpha/2) \int_{0}^{\ell} y^{\mu^2} dx$$
 (1.3.15)

Como consequência da deflexão, as extremidades da coluna aproxima<u>m</u> se uma da óutra de:

$$\int_{0}^{2} (ds - dx) = \int_{0}^{2} (\sqrt{(1 + y'^{2})} - 1) \cdot dx = (P/2) \int_{0}^{2} y'^{2} dx$$
(1.3.16)

onde somente os termos até o segundo grau em y' foram retidos.Des te modo, a energia potencial é:

$$V = (\alpha/2) \int_{0}^{\frac{1}{2}} y^{\mu^{2}} dx - (P/2) \int_{0}^{\frac{1}{2}} y^{\mu^{2}} dx \qquad (1.3.17)$$

Da condição (1.3.9) vem que:

$$\delta V = \alpha \int_{0}^{Q} y^{*} \, \delta y^{*} \, dx - P \int_{0}^{Q} y^{*} \, \delta y^{*} \, dx = 0 , \qquad (1.3.18)$$

para variações admissíveis $\delta y(x)$ de y(x).

Fazendo-se $\eta(x) = \delta y(x)$ e notando-se que:

 $\delta y' = \eta' e \delta y'' = \eta''$

(1.3.19)

- 12 -

tem-se, após integrar por partes (1.3.18), a seguinte equação:

$$\int_{0}^{\ell} (\alpha y^{iv} + Py^{iv}) \eta dx + \alpha \eta' y^{iv} \bigg|_{0}^{\ell} - \eta y^{iv} \bigg|_{0}^{\ell} - P \eta y^{iv} \bigg|_{0}^{\ell} = 0 (1.3.20)$$

Sendo 📊 uma variação admissível ,

e

$$\eta(0) = 0 \quad e \quad \eta(\ell) = 0 \quad (1.3.21)$$

e, portanto, os dois últimos termos de (l.3.20), são nulos. Como a equação (l.3.20) tem que ser verificada para todo η , tem-se su-cessivamente que:

$$y^{\mu}(0) = 0$$
, $y^{\mu}(\ell) = 0$ (1.3.22)

$$\alpha y^{\dagger V} + P y^{*} = 0$$
 (1.3.23)

(para este ūltimo resultado, ver o Lema l de GELFAND e FOMIN (7, p9)).

Com a notação usada na seção anterior, a solução <u>ge</u> ral de (1.3.23) \tilde{e}

$$y = A \cos kx + B \sin kx + C x/2 + D$$
 (1.3.24)

Aplicando-se as condições de contorno geométricas (ver (1.2.3)) e

as condições de contorno físicas, (1.3.22), ā (1.3.24), obtem-se o sistema de equações homogêneas em A, B, C e D:

$$0 = A + D$$

$$0 = A \cos k\ell + B \sin k\ell + C + D$$

$$0 = -A k^{2}$$

$$0 = -A k^2 \cos k\ell - B k^2 \sin k\ell$$

que tem soluções não triviais para

—

ou ainda:

$$k^{+}$$
 sen $k\ell = 0$ (1.3.27)

(1.3.25)

Para k ≠ 0 tem-se que: new Kl=0 n= Kl= nTi (vi= 1.11......)

$$k = n \pi$$
 (1.3.28)

e, portanto, a primeira carga, crítica é:

$$P_1 = \pi^2 \alpha / \ell^2$$
 (1.3.29)

$$k^2 = \frac{P}{d} = \frac{P}{d} = \frac{P}{d} = \frac{m^2 \pi^2}{\ell^2} d$$
, $m = 1 = \frac{\pi^2 d}{\ell^2}$

Para toda carga P > P₁ a energia potencial, dada por (1.3.17), não mais serã positiva definida e, consequentemente, a coluna serã, de acordo com o critério, instável.

1.4 - Critério Cinemático

Critérios cinemáticos são aplicados em problemas de estabilidade em mecânica celeste, em teoria do contrôle, em circu<u>i</u> tos elétricos, etc. Como a passagem de uma forma de equilibrio de um sistema elástico para uma outra forma de equilibrio é, em verd<u>a</u> de, um processo cinemático , nada mais natural a extensão dos critérios cinemáticos a este tipo de problema. Neste sentido, formula-se o problema da seguinte forma:

Seja um sistema em equilibrio, estado que é design<u>a</u> do como estado não perturbado. Agora,perturbações, que são varia ções de deslocamentos provocadas por causas externas ao sistema(c<u>o</u> mo forças acidentais, choques, etc.), fazem com que o sistema se afaste do estado não perturbado. Dependendo, então, do movimento subsequente do sistema, ou seja, da sequência das configurações a<u>s</u> sumidas pelo sistema, pode-se decidir sobre a estabilidade da configuração de equilíbrio. O critério é, então, assim enunciado:

"uma configuração de equilibrio de um sistema é estável, se as variações de deslocamentos permanecem suficientemente pequenas, em todo instante t > 0, para perturb<u>a</u> ções iniciais, também, suficientemente pequenas".

O limite superior abaixo do qual pode-se considerar as variações de deslocamentos como suficientemente pequenas, depe<u>n</u> de do próprio sistema e de suas tensões admissíveis.

Seja a mesma coluna bi-rotulada da fig. (1.2.1),ago

- 15 -

ra repetida na fig. (1.4.1), e seja μ a sua massa por unidade de comprimento.



FIGURA (1.4.1)

Assume-se que perturbações iniciais, suficientemente pequenas, fazem com que a coluna oscile em torno de sua configuração de equilibrio trivial. Decorrente deste movimento, forças de inércia atuando em um élemento infinitesimal, são dadas por:

$$d T = \mu \tilde{y} (\xi, t) d\xi$$
 (1.4.1)

onde $\ddot{y} = d^2 y/dt^2$.

A equação da elastica, de acordo com o princípio de d'Alembert, é derivada, agora, da equação integro-diferencial:

$$\alpha y^{\mu}(x,t) = -P y(x,t) + Q_{1}x - \mu \int_{0}^{n} \ddot{y}(\xi,t)(x - \xi) d\xi$$
 (1.4.2)

onde Q_1 é a reação que, juntamente com Q_2 , equilibra as forças de inércia. As condições de contorno geométricas que devem ser sa tisfeitas pela elástica, são:

$$y(0,t) = 0$$
 e $y(t,t) = 0$ (1.4.3)

Como Q_1 ē função sõ de t, pode-se diferenciar (1.4.2) duas vezes em relação à x, obtendo-se:

$$\alpha y^{**}(x,t) + P y^{*}(x,t) + \mu y (x,t) = 0$$
 (1.4.4)

Esta é uma equação diferencial a derivadas parciais de quarta ordem em x e segunda ordem em t e requer, além das condições iniciais, mais duas condições de contorno,

$$y^{\mu}(0,t) = 0$$
, $y^{\mu}(\ell,t) = 0$ (1.4.5)

as quais exprimem a nulidade do momento fletor nas extremidades da coluna.

A solução geral de (1.4.2), ou (1.4.4), é obtida su perpondo-se um número infinito das chamadas vibrações naturais:

 $y_m(x,t) = sen(m\pi x/\ell) (A_m \cos \omega_m t + B_m sen \omega_m t) (m = 1,2,...)$ (1.4.6)

A substituição de (1.4.6) em (1.4.4) conduz ã:

$$\mu \omega_{\rm m}^2 = ({\rm m}^2 \pi^2 / {\rm l}^2) \ (\alpha \ {\rm m}^2 \pi^2 / {\rm l}^2 - {\rm P}) \ (1.4.7)$$

condição que deve ser satisfeita para y_m não trivial. Esta condição é chamada equação frequencial, ou equação característica.

Dependendo do sinal do termo que contém P , três casos podem se apresentar:

i) $\omega_m^2 = \sigma^2 > 0$, para todo m

ii) $\omega_m^2 = 0$, para algum m (1.4.8)

iii) $\omega_m^2 = -\sigma^2 > 0$, para algum m

No primeiro caso, as frequências são sempre reais e distintas,a ex pressão (1.4.6) mantém suas características e a coluna oscilara harmonicamente, com amplitudes determinadas pelas condições iniciais. No segundo caso, a solução (1.4.6) degenera para:

$$y_m = sen (m \pi x/\ell) (A_m + B_m t)$$
 (1.4.9)

e as deflexões crescerão ilimitadamente com o tempo, a despeito das condições iniciais serem pequenas. Finalmente, no terceiro ca so, as deflexões vêm a ser, também, ilimitadas. De fato, como:

 $\cos i\sigma t = \cosh \sigma t = \sin i\sigma t = i \sinh \sigma t$ (1.4.10)

a solução (1.4.6) assume a forma:

$$y_m(x,t) = sen(m \pi x/\ell)(A_m \cosh \sigma t + i B_m senh \sigma t)$$
 (1.4.11)

Mas, tanto a parte real como a parte imaginária de (1.4.11), devem satisfazer (1.4.4) e, assim, a solução pode ser escrita como:

$$y_m(x,t) = sen(m \pi x/\ell) (A_m \cosh \sigma t + B_m \sinh \sigma t)$$
 (1.4.12)

a qual, crescerá sem limite com o tempo.

Assim, de acordo com o critério, conclue-se que a coluna será estável sempre que:

$$m^2\pi^2/\ell^2 - P > 0$$
, para todo m (1.4.13)

Como o menor valor de m ē 1, a coluna serā estāvel para:

$$P < P_1 = \alpha \pi^2 / \ell^2$$
 (1.4.14)

e instavel para toda carga $P \ge P_1$

2 - CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS

Quando exposto o critério da energia, fez-se a restrição que o mesmo so era aplicável aos sistemas conservativos. Is to, porque em contraposição aos sistemas conservativos existem os não conservativos. Esta diferenciação é feita de acordo com os ti pos de forças que neles atuam e está relacionada com o trabalho rea lizado pelas forças sobre os sistemas.

Para fixar idéias, seja C a trajetória de uma par tícula ligando os pontos P_1 e P_2 . Seja, ainda, F uma força que atua sobre a partícula ao longo desta trajetória. Fig. (2.1).



FIGURA (2.1)

Com a notação indicada na fig. (2.1), o trabalho realizado por F, sobre a partícula, é dado ou por:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

(2.1)

ou por:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} F \cdot y dt \qquad (2.2)$$

onde, nesta última expressão, os tempos $t_1 e t_2$ correspondem às posições $P_1 e P_2$ sobre C. A expressão (2.2) tem uma val<u>i</u> dade mais geral que a expressão (2.1). De fato, esta só é válida quando \underline{F} for do tipo $\underline{F}(\underline{r})$, ou seja, quando a força derivar de um potencial. Neste caso, o trabalho por ela realizado sobre a partícula, dependerá unicamente da posição relativa dos pontos P_1 e P_2 . No sentido corrente, são estas forças aquelas definidas como conservativas.

- 21 -

Considerando a partícula como parte de um sistema, os pontos P_1 e P_2 representarão as posições ocupadas pela partícula quando o sistema assume, respectivamente, as configurações $d_1 e d_2 e a trajetória C será o caminho percorrido pela partí$ cula quando o sistema assumir configurações intermediárias, <math>d, en tre $d_1 e d_2$. O trabalho realizado sobre a partícula, será rea lizado sobre o sistema e o trabalho total, será dado pela soma dos trabalhos realizados sobre cada uma das partículas do sistema. É conveniente frisar, que na expressão (2.2), y não se refere à ve locidade do ponto de aplicação da força F e sim, da partícula so bre a qual ela atua. Assim, se uma força F atua sequencialmente sobre diferentes particulas de um sistema, o trabalho por ela realizado, será igual a soma dos trabalhos realizados sobre cada uma das partículas.

Forças conservativas são, agora, definidas

COMO

aquelas cujo trabalho, durante um deslocamento admissível do sist<u>e</u> ma, dependera unicamente das configurações inicial, \mathcal{A}_1 , e final, \mathcal{A}_2 , do sistema.

Naturalmente, as forças que derivam de um potencial estão enquadradas nesta definição e são, portanto, conservat<u>i</u> vas. Os sistemas aqui considerados são elásticos e como suas forças internas sempre derivam de um potencial, a discussão da natur<u>e</u> za do sistema fica restrita ãs forças externas.

As forças externas são ou forças ativas (cargas),ou forças reativas (reações). As primeiras são determinadas a priori, como função de r, v e t, enquanto as reações só podem ser determinadas ao longo do movimento.

Uma reação pode ser tal que o seu trabalho seja nulo durante qualquer deslocamento admissível do sistema. Neste caso, de acordo com a definição dada, tal reação é uma força conservativa. Por exemplo, a reação normal à direção livre de um apoio simples. Por outro lado, existem reações cujo trabalho é negativo, são chamadas dissipativas e são não conservativas, pois, elas próprias dependerão do movimento do sistema. Por exemplo, as reações desenvolvidas por fricção na superfície de contáto com o seu supo<u>r</u> te, de um corpo em movimento. Reações fazendo trabalho positivo, em geral, não existem.

As forças ativas, como foi dito, são determinadas a priori, no caso mais geral, como função de r, y e t. As que dependem explicitamente do tempo, são chamadas não estacionárias e as demais são estacionárias. As forças <u>não estacionárias</u> são do

- 22 -

tipo F (r,t) e são, logicamente, não conservativas. Por exemplo, as forças pulsantes. As forças estacionárias são dependentes ou independentes da velocidade. No primeiro caso, elas podem ser tais que o seu trabalho durante todo deslocamento admissível do sistema (deslocamento real), seja nulo. Como é o caso das forças de Corio lis, das forças de Lorentz e dos momentos giroscopicos. Tais forças são designadas como giroscópicas e são, de acordo com a defini ção, conservativas. As cargas que dependem da velocidade e que realizam trabalho positivo são rarissimas e sem importância. A quelas fazendo um trabalho negativo, são chamadas dissipativas е são não conservativas. Exemplo destas últimas são as forças de fricção desenvolvidas num corpo em movimento, devidas a resistencia do ar. As forças estacionárias independentes da velocidade são: as já citadas, que derivam de um potencial, e que são chamadas, para diferenciar das giroscópicas, de forças conservativas não giroscópicas; e aquelas forças que além de depender do vetor posição r, seguem alguma lei pre-determinada, de acordo com as confi gurações intermediárias assumidas pelo sistema. De um modo geral, todas as forças ativas que independem da velocidade e não derivam de um potencial, são chamadas de circulatórias. Um exemplo destas forças são as forças "follower", que serão tratadas mais adiante, em um problema com elas associado. Adianta-se, desde jã, que tais forças são não conservativas.

Claro que, em um sistema podem atuar, simultaneamen te, todas as forças acima relacionadas. Entretanto, algumas combi nações delas são mais frequentes. De acôrdo com a presença daquelas forças, tem-se a seguinte classificação dos sistemas: A) Sistemas Conservativos

- 1) Não giroscópicos: quando estão presentes, somente,forças co<u>n</u> servativas não giroscópicas.
- 2) Giroscópicos : quando ao lado de forças não giroscópicas, existem forças giroscópicas.

B) Sistemas não Conservativos

- 1) Dissipativos : quando ao lado de forças conservativas atuam forças dissipativas (ativas ou reativas).
- 2) Circulatórios : quando ao lado de forças conservativas atuam forças circulatórias.
- 3) Não estacionários:quando pelo menos uma das forças, depende explicitamente do tempo.

3 - ANÁLISE CRÍTICA DOS CRITÉRIOS.CONCEITOS DE ESTABILIDADE

Ver-se-á, agora, como se comportam os critérios ante a classificação dos sistemas, dada na seção anterior. As definições, os princípios e os teoremas seguintes serão estabelecidos para sistemas com um número finito de graus de liberdade e será fei ta a hipótese de que permaneçam válidos para sistemas contínuos. Os sistemas serão supostos lineares ou passíveis de uma linearização. Por serem o objeto dos próximos capítulos, dar-se-á uma maior atenção aos sistemas conservativos não giroscópicos. Para os demais sistemas, só serão dadas algumas indicações e um exemplo de sistema puramente circulatório será examinado. Os enganos que foram cometidos na tentativa de empregar critérios que eram impróprios para certas classes de proble mas, motivaram a aproximação da teoria da estabilidade elástica, da teoria geral da estabilidade. Esta, por sua vez, foi o alvo de diversos pesquisadores que intentaram uma teoria unificada, pois, proliferavam diferentes conceitos de estabilidade. Deste esforço, foi reconhecido como o conceito mais adequado, o conceito de estabilidade de Lyapunov, o qual é um conceito cinemático. Por esta razão, o critério cinemático será usado como termo de comparação para com os demais critérios.

As equações do movimento de um sistema são o ponto de partida para a análise de sua estabilidade por meio de um crit<u>é</u> rio cinemático. Um sistema linear, com um número finito, n, de graus de liberdade, tem o seu movimento governado por um sistema de equações diferenciais lineares, uma para cada grau de liberdade. Assim, se as coordenadas generalizadas são denotadas por \bar{q}_k , as equações diferenciais do movimento têm a forma:

 $\sum_{k=1}^{n} (m_{ik} \ddot{\bar{q}}_{k} + g_{ik} \dot{\bar{q}}_{k} + c_{ik} \dot{\bar{q}}_{k}) + h_{i} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad (3.1)$

onde os \bar{m}_{ik} , g_{ik} , c_{ik} e h_i dependem das propriedades do sistema e do seu carregamento. Se pelo menos um dos coeficientes, ou uma das quantidades $(h_i)^{l}$, é uma função do tempo, o sistema é chama do heterônomo; caso contrário, o sistema é dito autônomo.

As eqs. (3.1), pressupõem que o sistema seja holon \hat{o} mico, isto é, que suas restrições geométricas sejam exprimidas por

- 25 -

equações finitas, ou equações diferenciais que sejam integráveis. Assim, um incremento δq_i de uma coordenada generalizada, represe<u>n</u> ta um deslocamento admissível e todo conjunto de velocidades generalizadas \dot{q}_i , representa um estado de movimento admissível.

No que vem a seguir, so serão tratados sistemas au-

A solução geral de (3.1) é obtida por superposição de uma integral particular à solução geral do sistema de equações homogêneas:

$$\sum_{k=1}^{\tilde{\Sigma}} (m_{ik} \, \bar{q}_k + g_{ik} \, \bar{q}_k + c_{ik} \, \bar{q}_k) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$$
(3.2)

Uma solução particular de (3.1) é:

$$\bar{q}_i = a_i$$
 (i = 1,2,...,n) (3.3)

onde os a; são constantes satisfazendo às equações lineares

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik} a_{k} = -h_{i} \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad (3.4)$$

As equações diferenciais de equilíbrio estático, são obtidas fazendo-se \ddot{q}_{k} e \dot{q}_{k} 'iguais a zero em (3.1). Daí, conclu<u>e</u> se que toda configuração de equilíbrio do sistema no estado carregado representa uma solução particular de (3.1). 1 Uma instabilidade estática do sistema ocorre, quan do pelo menos um dos |a; | de (3.4) é excessivo. É sempre possível introduzir as coordenadas \bar{q}_k de um modo tal que os h; , de h. (3.1), sejam nulos quando o sistema está descarregado. Se os permanecem nulos durante o processo de carregamento, o sistema ē perfeito, caso contrário, é imperfeito. De acordo com (3.4), ò sistema perfeito sempre admite a configuração de equilíbrio trivial (h_i = 0 , i = 1,2,...,n em (3.4)), enquanto toda configuração de equilíbrio do sistema imperfeito é não trivial. Se o deter minante da matriz (c_{ik}) é diferente de zero, o sistema perfeito so admite a configuração de equilíbrio trivial; o sistema imperfei to tem uma configuração de equilíbrio que é única e finita. Quando este determinante é zero, o sistema perfeito admite configurações de equilíbrio não triviais; e os a, do sistema imperfeito (ou pe lo menos alguns deles), tornam-se infinitos. Assim, uma instabili dade estática é indicada pelo aparecimento de configurações de equilíbrio não triviais do sistema perfeito.

Seja, agora, introduzir um novo conjunto de coordenadas:

$$q_i = \bar{q}_i - a_i$$
, (i = 1,2,...,n) (3.5)

medidas a partir da configuração de equilíbrio do sistema carregado. As velocidades e acelerações generalizadas correspondentes são:

 $\dot{q}_{i} = \dot{\bar{q}}_{i}, \dot{\bar{q}}_{i} = \ddot{\bar{q}}_{i}, (i = 1, 2, ..., n)$

(3.6)

Substituindo os \bar{q}_i , \bar{q}_i e \bar{q}_i , em função destas novas coordenadas em (3.1), obtem-se as equações (3.2). Assim, a solução geral do sistema de equações homogêneas, representa o mov<u>i</u> mento na vizinhança da configuração de equilíbrio. Assumindo-se que este movimento tenha sido originado por perturbações simples, descritas pelas condições iniciais.

$$q_i(0) = q_{i0}, \dot{q}_i(0) = \dot{q}_{i0}$$
 (i = 1,2,...,n) (3.7)

e que $|q_{i0}|$ e $|\dot{q}_{i0}|$ sejam quantidades suficientemente pequenas, então, a configuração de equilibrio do sistema no estado carregado é estável, no conceito de <u>estabilidade de Lyapunov</u>, se para todo t > 0, os $|q_i(t)|$ e $|\dot{q}_i(t)|$ permanecerem suficientemente pequenos. Caso contrário, diz-se que o sistema, naquela conf<u>i</u> guração de equilíbrio, tem uma <u>instabilidade cinemática</u>.

Pode-se intepretar geometricamente este resultado num espaço euclideano de 2n dimensões (espaço-fase), com coordenadas (q_i, \dot{q}_i) , (i = 1, 2, ..., n), onde cada ponto deste espaço de<u>s</u> creve o movimento do sistema no espaço físico. Se $q = (q_i, \dot{q}_i)$ denota o raio vetor de um ponto P no espaço-fase, a equação:

$$q^2 = q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2 + q_1^2 + \ldots + q_n^2 = \eta^2$$
 (3.8)

onde η é uma constante, representa uma hiperesfera de raio η e centro $0(q_i = 0, q_i = 0)$. De acordo com a definição dada acima, a configuração de equilíbrio, representada pela origem no espaço-fase, é estável, se e somente se, o ponto fase permanecer no inte-

- 28 -
rior da hiperesfera de raio n arbitrariamente pequeno,quando sua posição inicial estiver no interior de uma hiperesfera de centro 0 e com raio, também arbitrariamente pequeno.

Em muitos problemas os dois tipos de instabilidade, estática e cinemática, ocorrem para uma mesma condição de carga,co mo por exemplo, a coluna bi-rotulada estudada nas seções precedentes. Entretanto, este não é sempre o caso, como se verá mais adiante.

Se o sistema é linear, pode-se mostrar que o critério cinemático é suficiente para determinar os dois tipos de inst<u>a</u> bilidade. De fato, colocando a solução de (3.2) na forma:

$$q_k = A_k e^{\lambda \tau}$$
 (k = 1,2,...,n) (3.9)

e substituindo-a em (3.2), vem que

 $\sum_{k=1}^{n} (m_{ik} \lambda^{2} + g_{ik} \lambda + c_{ik}) A_{k} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad (3.10)$

A solução trivial, $A_k = 0$ (k = 1,2,...,n), corresponde à configuração de equilíbrio trivial. Soluções não triviais existem, se e somente se:

det $(m_{ik} \lambda^2 + g_{ik} \lambda + c_{ik}) = 0$, (i,k = 1,2,...,n) (3.11)

A equação (3.11) é chamada equação característica de (3.2).

Uma configuração de equilíbrio não trivial é do ti-

$$q_k = A_k$$
 (k = 1,2,...,n) (3.12)

onde os A_k são constantes nem todas nulas. As expressões (3.12) são obtidas de (3.9) com $\lambda = 0$. Por outro lado, $\lambda = 0$ é uma raiz de (3.11), se e somente se:

$$det (c_{i\nu}) = 0 (3.13)$$

Logo, a condição (3.13) determina uma instabilidade estática, seja ela obtida pelo critério cinemático ou do equilíbrio.

Para determinar em que condições se dão instabilid<u>a</u> des cinemáticas, se faz necessário analisar, em toda a sua extensão, o movimento do sistema na vizinhança de sua configuração de equilíbrio trivial, ou seja, analisar a solução geral de (3.2). Se λ for uma raiz real de (3.11), a solução proposta, (3.9), man terá o seu aspecto. Os A_k serão quantidades reais, satisfazendo, para o valor de λ dado, o sistema de equações (3.10). Se (3.11) admitir uma raiz complexa, admitirá, também, a sua conjugada. Os A_k correspondentes serão da forma A'_k ± i A''_k e a solução (3.9) assumirá o seguinte aspecto:

 $q_k = e^{\lambda' t} (A_k' \cos \lambda'' t - A_k'' \sin \lambda'' t)$

 $\pm i e^{\lambda' t} (A_k'' \cos \lambda'' t + A_k' \sin \lambda'' t), (k = 1, 2, ..., n)$ (3.15)

- 30 ·

po:

onde $\lambda' \in \lambda''$ serão, respectivamente, as partes real e imaginãria das raízes conjugadas. Sendo (3.15) solução de (3.2), também o serão suas partes real e imaginária. Agrupando os termos que contêm a função seno e os que contêm a função coseno, as soluções correspondentes ao par de raízes complexas conjugadas, serão:

$q_{k} = (C_{1} A_{k}' + C_{2} A_{k}'') e^{\lambda' t} \cos \lambda'' t$

e

 $q_k = (C_3 A_k^1 - C_4 A_k^n) e^{\lambda' t} sen \lambda'' t$ (k = 1,2,...,n) (3.16)

Se todas as raizes forem distintas, as 2n soluções correspondentes serão ortogonais entre sí e formarão um conjunto completo de soluções linearmente independentes. A solução geral de (3.2) será, en tão, a combinação linear destas soluções, e os 2n coeficientes de<u>s</u> ta combinação serão ajustados para que sejam satisfeitas as condições iniciais, dadas por (3.7). Uma instabilidade cinemática aparecerá, se pelo menos um conjunto de condições iniciais resultar num movimento ilimitado, o que acontecerá quando uma das soluções, (3.9) ou (3.16) for ilimitada.

Assim, se as raízes forem distintas, pode-se analisar o movimento do sistema a partir dos valores por elas assumidos. Considerando os números reais como um caso particular dos números complexos, tem-se as seguintes alternativas para uma dada raiz:

- (i) ela tem parte real positiva: a solução correspon dente crescerá ilimitadamente com o tempo.
- (ii) ela tem parte real negativa: a solução correspon dente tenderá assintoticamente para zero quando o tempo cresce.
- (iii) ela é puramente imaginária: a solução correspondente oscilarã harmonicamente em torno da configuração de equilibrio trivial.
- (iv) ela é nula: neste caso foi visto que a solução correspondente é constante e indeterminada e representa configurações de equilibrio não triviais.

Portanto, segundo o conceito de estabilidade de Lyapunov, a configuração de equilíbrio trivial do sistema será estável, se todas as raizes são do tipo (ii) ou (iii), e instável se pelo menos uma das raízes é do tipo (i). Uma das raízes sendo nula, nada se poderá afirmar, além de que o equilíbrio é instável estaticamente.

Agora, se existem raizes múltiplas, não se tem mais um conjunto completo de soluções linearmente independentes. Para completá-lo são adicionadas soluções formadas por potenciais de t multiplicadas pelas soluções correspondentes às raízes múltiplas. Estas soluções têm as mesmas propriedades assintóticas das soluções (3.9) e (3.16), exceto quando as raízes que lhes dão origem são nulas ou puramente imaginárias, pois, neste caso elas crescerão ilimitadamente com o tempo. Com isto, se completa a discussão.

Neste ponto, ja é patente a superioridade de critério cinemático em relação aos critérios estáticos (do equilíbrio e da energia), no que se refere à generalidade. Por outro lado, os critérios estáticos são muito mais simples. Por isso, é importante precisar como, e a que classe de sistemas, são aplicáveis estes critérios. Com esta finalidade, alguns teoremas serão enunciados. O teorema seguinte, devido a Lagrange, é o único princípio geral que fornece resultados imediatos para uma extensiva classe de sistemas.

TEOREMA DE LAGRANGE

"Na hipótese da energia total, E = V + T, ser uma função continua das coordenadas q_i e das velocidades generalizadas \dot{q}_i , o equilibrio de um sistema, que contêm somente forças conservativas (giroscópicas ou não giroscópicas) e dissipativas, será estável sempre que a energia potencial, V, for positiva definida".

Para a demonstração deste teorema, ver (5, p 36).

Note-se que este teorema nada afirma sobre a estab<u>i</u> lidade do equilíbrio, na hipótese da energia potencial não ser positiva definida.

As equações (3.2) podem ser obtidas por meio das equações de Lagrange (8, p 458 a 472):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{i}} - \frac{\partial T}{\partial q_{i}} = Q_{i} \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad (3.17)$$

onde os Q_i são coeficientes das variações das coordenadas q_i na

expressão do trabalho virtual:

$$dW = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \qquad (3.18)$$

No caso linear, a energia cinética é uma forma quadrática positiva definida das velocidades generalizadas (9, pp 171, 172)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} m_{ik} \dot{q}_{i} \dot{q}_{k}$$
(3.19)

A matriz (m_{ik}) é constante e simétrica (caso contrário, os termos aceleração não teriam a forma simples indicada nas eqs. (3.2)). Além disso, ela é positiva definida.

As forças generalizadas, Q_i, podem ser independentes ou não das velocidades. No primeiro caso, elas são dadas por:

$$Q_{i} = -\sum_{k=1}^{n} c_{ik} q_{k}$$
 (i = 1,2,...,n) (3.20)

e no segundo caso, por:

$$Q_{i} = -\sum_{k=1}^{n} g_{ik} \dot{q}_{k}$$
 (i = 1,2,...,n) (3.21)

A matriz (c_{ik}) é constante e no caso mais geral, assimétrica. D<u>e</u> compondo-a em suas partes simétrica e antimétrica, dadas, respectivamente, por:

$$c_{ik} = \frac{1}{2} (c_{ik} + c_{ki})$$

(3.22)

$$C_{ik}^{"} = \frac{1}{2} (c_{ik} - c_{ki})$$

pode-se mostrar que as forças generalizadas circulatórias são representadas por $(c_{ik}^{"})$, enquanto as forças não circulatórias são dadas por $(c_{ik}^{!})$. Realmente, assumindo que forças circulatórias, não estejam presentes, o trabalho dW, dado por (3.18), será uma diferencial exata. Por outro lado, a condição necessária e sufici ente para que tal aconteça é que:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = c_{ik} - c_{ki} = 2 c_{ik}'' = 0 \quad (i,k = 1,2,\ldots,n) \quad (3.23)$$

O que comprova a afirmativa feita.

Alternativamente, as forças generalizadas dos sist<u>e</u> mas conservativas não giroscópicos, podem ser obtidos de

$$Q_{i} = -\frac{\partial V}{\partial q_{i}}$$
 (i = 1,2,...,n) (3.24)

onde V é a energia potencial do sistema. Neste caso, as equações de Lagrange assumem a forma especial:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i}} - \frac{\partial L}{\partial q_{i}} = 0$$

(3.25)

- 35 -

onde L = T - V, é o potencial cinemático do sistema, ou Lagran giano. A energia potencial, no caso linear, é uma forma quadrática, não necessariamente positiva definida, das coordenadas generalizadas:

$$V = (1/2) \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_{i} q_{k}$$
(3.26)

onde a matriz (c_{ik}) é, como foi visto, constante e simétrica.

A matriz (g_{ik}) é constante e, no caso mais geral, assimétrica. Ela pode, também, ser decomposta em suas partes simé trica, (g_{ik}) , e antimétrica, (g_{ik}) , as quais representarão, res pectivamente, forças dissipativas e giroscópicas. Para provar esta afirmação, seja tomar a expressão do trabalho realizado sobre o sistema pelas forças dependentes da velocidade, durante o movimento <u>real</u> do sistema. Desta expressão tira-se, sucessivamente, que:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (\sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i) dt = \int_{t_1}^{t_2} (-\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k) dt =$$

$$= \int_{+}^{2} (- \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}^{i} \dot{q}_{i} \dot{q}_{k}^{i}) dt \qquad (3.27)$$

De que se conclue, que as parcelas $g_{ik}^{"}$, que foram canceladas, r<u>e</u> presentam, realmente, as forças giroscópicas.

Agora, serão examinados cada um dos sistemas rela-

cionados no fim da seção 2.

SISTEMAS CONSERVATIVOS NÃO GIROSCÓPICOS

Para estes sistemas, as equações diferenciais do mo vimento podem ser derivadas por meio das equações de Lagrange, na sua forma (3.25), com T e V dados, respectivamente, por (3.19) e (3.26). Alternativamente, pode-se aplicar as equações de Lagran ge, após uma transformação linear das coordenadas, dada por:

$$\phi_{i} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} q_{k} \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad . \quad (3.28)$$

com $det(\alpha_{ik}) \neq 0$, e de uma maneira tal que, as duas formas quadráticas, (3.19) e (3.26), assumam, simultaneamente, as chamadas formas normais:

$$\Gamma = (1/2) \sum_{i=1}^{n} m_{i} \dot{\phi}_{i}^{2}$$
 (3.29a)

$$V = (1/2) \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i^2$$
 (3.29b)

onde os m_i são quantidades positivas. Desta última forma, são obtidas equações diferenciais independentes para cada coordenada:

$$m_i \dot{\phi}_i^2 + c_i \phi_i = 0$$
 (i = 1,2,...,n) (3.30)

Com a solução de (3.30) na forma:

$$\phi_i = A_i e^{i}$$
 (i = 1,2,...,n) (3.31)

obtém-se a condição necessária e suficiente para a existência de soluções não triviais de (3.30):

det
$$(m_i \lambda_i^2 + c_i) = 0$$
 (i = n) (3.32)

cujas raízes são:

$$\lambda_{i}^{2} = -c_{i}/m_{i}$$
 (i = 1,2,...,n) (3.33)

Sob a transformação de coordenadas realizada, as rai zes de (3.11), com (g_{ik}) = 0 , não se alteram.* Assim, a discussão sobre a estabilidade do equilíbrio do sistema podera ser feita a partir de (3.33), permanecendo válidas as conclusões da discussão feita anteriormente. De acordo com (3.33), as raízes serão iguais e de sinais opostos, a menos que elas sejam nulas. A hipótese de raízes múltiplas, afora um par eventual de raízes nulas, está fora de cogitação, pois se este fosse o caso, não se teria mais um sistema de n equações independentes, e, consequentemente, o sistema teria um número menor de graus de liberdade. Nestas con dições, o equilíbrio do sistema será estável, tanto quanto todos c_i sejam positivos, e instável se pelo menos um dos c_i for os negativo ou nulo. Por outro lado, a forma quadrática (3.29b) é po sitiva definida tanto quanto todos os c; sejam positivos. Logo, pode-se afirmar que:

• Ver (10, p. 321)

TEOREMA 1

"A configuração de equilibrio de um sistema linear será estável, se a energia potencial for positiva definida; caso contrário, ela será instável".

Chamando de P um parâmetro que identifique o nível do carregamento, é possível escrever a energia potencial do sistema na forma:

$$V = V^{(i)} - P U$$
 (3.34)

com $V^{(i)}$ independente do carregamento, desde que os deslocamentos de sistema sejam supostos pequenos, isto é, que a geometria de sistema sob o carregamento dado, pouco se altere em relação à geometria inicial. Segundo a terminologia de Ziegler, tais sistemas são chamados <u>sistemas simples</u>. Em um sistema com um número finito de partículas, tem-se, de acordo com (3.26) e (3.34), que:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik} - Pb_{ik}) q_i q_k$$
 (3.35)

onde (a_{ik}) é positiva definida e (b_{ik}) é ou positiva definida ou indefinida. Para P = 0 e mesmo para valores pequenos de P, V será positiva definida e do teorema 1, se conclue que o sistema será estável. Entretanto, para valores suficientemente grandes de P, V não mais será positiva definida e o sistema será, então, instável. A transição se dará para um certo valor P = P₁. Do ponto de vista do critério cinemático, para val<u>o</u> res de P, suficientemente pequenos, todas as raízes serão pares de raízes conjugadas puramente imaginárias e o sistema será,então, estável. À medida que P se aproxima de P₁, um destes pares tenderá a se anular, o que acontecerá quando P for igual a P₁. Para este parâmetro, o sistema será instável tanto estaticamente, como cinematicamente. Para certos valores P₂ > P₁, P₃ > P₂,..., do parâmetro, outros pares de raízes se anularão. Desde que, o equilíbrio é instável para todo P > P₁, isto não terá mais impo<u>r</u> tância.

De acordo com o critério do equilíbrio, uma primeira configuração de equilíbrio não trivial aparecerá quando P for igual a P_1 , do que se conclue que o sistema será estável para to do P menor que P_1 e instável para $P = P_1$. Além disso, o sis tema será instável, ainda, para $P = P_2$, $P = P_3$,... Contudo, n<u>a</u> da se pode afirmar sobre a estabilidade ou instabilidade de sistema para P entre P_1 e P_2 , P_2 e P_3 ,...

SISTEMAS CONSERVATIVOS GIROSCÓPICOS

Aqui, o que se deseja analisar, é a estabilidade de um movimento. Claro que se pode resolver o problema como o de um equilíbrio relativo, aplicando o princípio de d'Alembert. Mas, pe<u>r</u> manece, o fato de se estar tratando com um problema intrinsecamente cinemático. Isto, sugere ser o critério cinemático, o único capaz de fornecer todas as respostas à questão, o que é verdade. Entretanto, algumas informações úteis podem ser obtidas, por meio dos critérios estáticos.

- 40 -

Não se deve esquecer que a natureza do problema, por se tratar de um movimento, dependerá do sistema de referência tom<u>a</u> do. Por exemplo, um cilindro em rotação será um problema do tipo aqui considerado, se o sistema de referência tomado, girar com o cilindro. Já no caso de se tomar um sistema de referência fixo, o problema passará a ser, ele próprio, um problema típico de vibração, com instabilidades indicadas pelo aparecimento de ressonâncias.

O equilibrio de um sistema conservativo não girosc<u>ó</u> pico é estável, quando a energia potencial do sistema é positiva definida e instável, caso esta condição não se verifique. De aco<u>r</u> do com o teorema de Lagrange, o equilíbrio deste sistema, se estável, o continuará sendo, quando forças giroscópicas lhe forem adicionadas. Porém, quando ele for instável, nada assegura que ele deva assim permanecer, isto é, forças giroscópicas podem ter efeito estabilizante no equilíbrio do sistema.

Se o problema é simples, sua energia potencial é da da por (3.35), só que agora, espera-se que o parâmetro P represente uma força centrífuga e, por isso, possa ser interpretado como o quadrado de uma velocidade angular. Aplicando um raciocínio análogo ao que foi feito para os sistemas conservativos não giroscópicos, encontrar-se-á um parâmetro P_1 , para o qual a energia potencial deixa de ser positiva definida. Este fato, é caracteri zado pelo aparecimento de pelo menos uma configuração de equilíbrio não trivial, e como forças giroscópicas não interferem em tal ocasião, pode-se garantir que instabilidades estáticas sempre esta rão presentes no sistema quando o parâmetro P for crescendo des-

- 41 -

de o valor zero. Assim, quando o parâmetro for menor que P_1 , o sistema será estável, desde que, a energia será positiva definida. Quando P assumir o valor P_1 , bem como $P_2 > P_1$, $P_3 > P_2$,..., configurações de equilíbrio não triviais, indicarão o aparecimento de instabilidades estáticas no sistema. Contudo, nos intervalos entre P_1 e P_2 , P_2 e P_3 ,..., nada se poderá afirmar e o único critério capaz de resolver esta questão, será o critério cinemático.

As equações diferenciais do movimento, são dadas por (3.2). As matrizes (m_{ik}) e (c_{ik}), são constantes e simétricas e a matriz (g_{ik}) é constante e antimétrica. A equação característica é dada por (3.11). Devido à estrutura daquelas matrizes, as raízes da equação característica aparecerão sempre em pares λ_i , - λ_i , tendo uma delas parte real positiva, a menos que elas sejam puramente imaginárias ou nulas. Assim, em um sistema simples,quan do P for menor que P_1 , todas as raízes serão puramente imaginá rias. Quando P for crescendo, pelo menos um par destas raízes tenderá a se anular, o que acontecerá para P igual a P. . De fa to, a condição para que o sistema tenha raízes nulas é dada por det (c_{ik}) = 0, ou seja, a mesma condição para que o sistema admita configurações de equilíbrio não triviais. Assim, para este valor do parâmetro o sistema será instável estaticamente e, também, cinematicamente. Mas, ultrapassado o valor P, , aquele par de raízes poderá voltar a ser um par de raízes puramente imaginárias. Isto, explica o fato do sistema ser estavel, mesmo com a energia potencial do sistema sendo negativa definida.

- 42 -

SISTEMAS DISSIPATIVOS

Todos os sistemas são na realidade dissipativos. Se ja pela presença do atrito nas ligações, o que impede parcialmente deslocamentos que deveriam ser livres, seja devido à própria resis tência de ar, ou ainda, devido à fricção interna no sistema. Como foi visto, as forças dissipativas dependem do estado do movimento, de que se depreende ser o critério cinemático, mais uma vez, o ún<u>i</u> co apropriado. Mas, similarmente aos sistemas conservativos giro<u>s</u> cópicos, critérios estáticos podem, também, ter sua utilidade, pri<u>n</u> cipalmente, se o sistema, na ausência das forças dissipativas, for conservativo não giroscópico.

As equações diferenciais do movimento são dadas por (3.2), com todas as matrizes constantes, sendo (m_{ik}) e (c_{ik}) si métricas e (g_{ik}) , no caso mais geral, assimétrica. A equação ca racterística é dada por (3.11), mas, suas raízes não mais serão pa res de raízes iguais e de sinais opostos.

A comparação entre sistemas dissipativos e sistemas conservativos não giroscópicos é similar àquela feita entre estes últimos e os sistemas conservativos giroscópicos, até o momento precedente em que a energia potencial deixa de ser positiva defin<u>i</u> da. Daí por diante, de acordo com o teorema 1, os sistemas conse<u>r</u> vativos não giroscópicos deixam de ser estáveis, quando, então, <u>pe</u> lo menos uma das raízes de sua, equação característica é nula ou <u>po</u> sitiva. O primeiro caso corresponde a uma instabilidade estática e é caracterizado pelo fato do termo constante det (c_{ik}) ser nulo. Como isto se dá independentemente de forças giroscópicas e

- 43 -

dissipativas, nos sistemas dissipativos ocorrerá o mesmo. No segundo caso, também nos sistemas dissipativos pelo menos uma das raízes será positiva. De fato, assumindo-se

- 44 -

- a) que as forças dissipativas só sejam introduzidas no sistema conservativo não giroscópico no instante em que uma das raízes da equação característica seja positiva;
- b) que esta introdução seja realizada por acréscimos pr<u>o</u> porcionais dos elementos da matriz (g_{it}) ,

tem-se as seguintes alternativas para o comportamento daquela raíz ao longo deste procedimento:

- 1) a raiz se anula;
- 2) a raiz se torna puramente imaginária;
- 3) a raiz permanece positiva.

A primeira alternativa não poderá se realizar, desde que, uma raiz nula independe de forças dissipativas. Raízes puramente imaginárias são indício de um movimento periódico, o qual, é proibido em sistemas dissipativos. Resta, portanto, a última alternativa.Temse, assim,provado que: "Sistemas dissipativos, na ausência de forças giroscópicas, se comportam exatamente como o seu correspondente sistema conservativo não giroscópico."

Por outro lado, aplicando-se o mesmo raciocínio ac<u>i</u> ma com a matriz (g_{ik}) incorporando, simultaneamente, forças giroscópicas e dissipativas, chega-se à conclusão que:

TEOREMA 3

"Forças dissipativas podem anular o efeito estabilizante de forças giroscópicas"

Com este resultado, a estabilização giroscópica pe<u>r</u> de um pouco a sua importância. Mas, na maioria das vezes, efeitos dissipativos podem ser minimizados e representar efeitos secundãrios.

SISTEMAS CIRCULATÓRIOS

Em primeiro lugar, seja colocar o problema conhecido como coluna de Beck. Na fig. (3.1) está representada uma coluna de seção transversal constante, homogênea, elástica e que obed<u>e</u> ce à lei de Hocke. Ela é engastada na extremidade inferior e livre na superior. Sejám, α = EI, a sua rigidez à flexão e ℓ , o seu comprimento. A força P, de compressão, que atua na extremidade superior da coluna, é tal que, quando esta se deforma, a força gira com a seção extrema da coluna e permanece sempre tangencial ao

seu eixo deformado.



FIGURA (3.1)

Seja, agora, aplicar o critério do equilíbrio. Para uma configuração de equilíbrio não trivial, a equação diferencial da elástica é:

$$\alpha y'' = P(f - y) - P\phi(\ell - x)$$
 (3.36)

onde f e ϕ são, respectivamente, a deflexão e o ângulo de rot<u>a</u> ção da seção transversal, na extremidade superior da coluna. Na equação (3.36), em virtude da hipótese das pequenas deformações, t<u>o</u> mou-se $P_x \cong P$ e $P_v \cong P\phi$.

As condições de contorno que devem ser satisfeitas pela elástica são:

y	(0)	Ŧ	0		
y t	(0)	Ŧ	0		
y	(2)	=	f		•
y 1	(2)	=	ф.		

A solução geral de (3.36), fazendo uso da notação:

 $k^2 = P/\alpha \qquad (3.38)$

 $y = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx + f - \phi (l - x)$ (3.39)

Aplicando as condições de contorno, obtém-se as seguintes expressões:

é

 $B + f - l\phi = 0$ $k A + \phi = 0$ sen kl A + cos kl B = 0 k cos kl A - k sen kl B = 0

(3.40)

(3.37)

O determinante da matriz formada pelos coeficientes de A, B, f e ϕ , é igual a -k, e, portanto, diferente de zero para todos os valores de P diferentes de zero. Isto significa, de acordo com o critério, que não existe, para nenhum valor P \neq 0, uma forma de equilibrio trivial na vizinhança da forma reta da coluna.

Poder-se-ia então, concluir que a coluna não flamba

para nenhum valor de P maior que zero, o que parece improvável. Realmente, aplicando o critério cinemático, determina-se que, para uma carga

$$P \ge P_1 = 20,05 \alpha/\ell^2$$
 (3.41)

as deflexões são ilimitadas, a despeito de suas condições iniciais serem pequenas e, portanto, a coluna é instável.

Ante esta divergência, a primeira observação a ser feita, é a constatação de que o problema em tela é não conservativo.

De fato, a fig. (3.2) exibe duas maneira distintas da coluna atingir o estado (3). No caso (a), uma translação até o estado (2) é seguida de uma rotação; o trabalho da força é igual a zero. No caso (b), uma rotação leva a coluna ao estado (2) e uma posterior translação a leva até (3); e o trabalho realizado é neg<u>a</u> tivo.

A força em questão, é um exemplo das forças "follow er", e o problema tratado é, portanto, do tipo circulatório.

Só este contraexemplo é suficiente para eliminar o critério do equilíbrio da relação dos critérios admissíveis, para este tipo de sistema. Como não tem sentido se falar no critério da energia, o único critério que pode ser efetivamente aplicado é o critério cinemático. Só eventualmente, é que o critério de equi líbrio poderia ser aplicado. Por exemplo, em uma coluna de Beck, prismática, com as mesmas condições de apoio nas duas extremidades,

- 48 -

pois neste caso, a condição det (c_{ik}) = 0 se verifica em face da simetria.

Neste sistema, fica bem marcada a distinção entre os dois tipos de instabilidade, a estática e a cinemática.



FIGURA (3.2)

SISTEMAS NÃO ESTACIONÁRIOS

O que caracteriza tais sistemas, é a presença de for ças que dependem, elas próprias, explicitamente do tempo. Os coeficientes da equação diferencial do movimento são, também, dependen tes do tempo. Como em tais sistemas a massa, ou melhor, a distribuição da massa, desempenha um papel preponderante e critérios estáticos não a levam em conta, tem-se:

- 49 -

"Problemas de estabilidade do tipo não estacionário, não podem ser resolvidos por métodos estáticos".

CAPITULO II

51 -

1 - ANÁLISE DE ESTABILIDADE ELÁSTICA PELO METODO DOS ELEMENTOS FI-NITOS

O objetivo deste e dos próximos capítulos é analisar a estabilidade de estruturas elásticas que estejam enquadradas na classe dos sistemas conservativos não giroscópicos. Em geral, os processos de análise de estabilidade consistem em verificar а estabilidade da estrutura para diversos níveis de carregamento. Pa ra os sistemas aqui considerados, se nestas verificações o carreg<u>a</u> mento for inferior ao primeiro "carregamento crítico", chegar-se-á, de acordo com os resultados do capítulo anterior, à conclusão que a estrutura é estável, seja qual for o critério empregado. Entretanto, ultrapassado aquele carregamento, só os critérios cinemático e da energia comprovarão a instabilidade da estrutura. No que diz respeito especificamente ao critério da energia, tem-se de acordo com o Teorema 1 (pg. 39, cap. I), que uma configuração será estavel ou instavel, tanto quanto a energia potencial naquela configuração seja positiva definida ou não. Assim, o problema de verificação de estabilidade de uma estrutura pelo critério da ener gia consiste em:

1) construir para o nível do carregamento dado a expressão que dá a energia potencial da estrutura.

2) verificar se a mesma é positiva definida ou não.

Por outro lado, no capítulo anterior,a maior parte dos conceitos, princípios e teorema foi estabelecida para sistemas com um número finito de graus de liberdade. Além disso, foi feita a hipótese de que os mesmos permaneciam válidos para sistemas que fossem continuos. Contudo, mesmo que os sistemas sejam contínuos, na maior parte das vezes é necessário discretizá-los, para então po ceder a sua resolução. Dentre os métodos de discretização, aquele que vem merecendo uma maior atenção é o método dos elementos finitos. Este método consiste em subdividir em subdomínios(elementos) o domínio em que o problema é definido e assumir que a energia potencial do sistema possa ser igual a soma das contribuições da energia potencial de cada elemento. Além disso, assume-se que a energia potencial em cada elemento é função de um número finito de parâmetros.

Existem várias formulações para implementar modelos de elementos finitos, todas elas interessadas nas equações de equi líbrio interno do elemento, bem como nas relações tensão-deforma ções e deformação-deslocamentos e, ainda, nas condições de contorno do elemento (com tensões ou deslocamentos prescritos). Assumin do-se que tanto as relações tensão-deformações como as condições de contorno que envolvem deslocamentos, sejam satisfeitas identica mente, um modelo será encontrado em que as únicas variáveis independentes serão os deslocamentos (11). Este é o chamado modelo de deslocamentos e o método baseado neste modelo, o método dos deslocamentos, tem sido o mais aplicado, e também o mais estudado, na análise matricial de estruturas.

A análise dos sistemas estruturais correntes pode, em geral, basear-se na geometria da estrutura indeformada,isto sen do possível quando, a menos de deslocamentos de corpo rígido, as deformações e os deslocamentos possam ser considerados pequenos.

- 52 -

Se, além disso, as relações tensão-deformações forem lineares, a análise será reduzida a uma formulação matricial linear (12). Assim, neste tipo de análise as relações entre as cargas aplicadas e a resposta da estrutura (deslocamentos), bem como as relações tensão-deformações e deformação-deslocamentos, serão lineares.

Agora, existem estruturas em que não mais persistem as hipóteses feitas anteriormente. Por exemplo, os deslocamentos poderão vir a ser de tal ordem, que as equações de equilíbrio sõ. poderão ser escritas em relação à geometria deformada. Por outro lado, mesmo que os deslocamentos sejam efetivamente pequenos, pode rão existir na estrutura tensões que, em presença destes deslocamentos, a levarão a uma situação de instabilidade, situação esta que não poderá ser prevista sem que se considere a estrutura na sua configuração deformada. Assim, em ambos os casos, a análise tera que ser efetuada no ambito da analise não linear. Os tipos de não linearidade apontados acima, são referidos como não lineari dades geométricas e serão as únicas aqui consideradas. Além disso, será feita a hipótese de que as deformações permaneçam pequenas, mesmo em presença de grandes deslocamentos.

Por se tratar de um método em que os deslocamentos são as variáveis primárias, o método dos deslocamentos tem sido o preferido para estender o método dos elementos finitos à análise não linear. Esta extensão é efetuada por técnicas incrementais ou i+arativas, cada uma delas convenientemente linearizadas, podendo ainda a primeira, envolver em cada um dos seus passos técnicas it<u>e</u> rativas.

A técnica incremental consiste em analisar a estru-

- 53 -

tura, sob cada incremento de carga, baseada na geometria obtida no passo anterior. As primeiras tentativas neste sentido, entretanto, desprezaram as contribuições de termos de ordem mais alta que a primeira nas relações deformação-deslocamentos existentes nos elementos, o que, por si só, impossibilita levar em conta as contribuições dos elementos individuais à instabilidade da estrutura. Tal seria o caso, ao se analisar a estrutura da fig. (1.1) sem se levar em conta o efeito das rotações sobre a deformação específica na direção axial dos elementos.



Em vista disso, procurou-se considerar as não line<u>a</u> ridades desde o início dos problemas, isto é, a partir das relações existentes nos elementos. Esta necessidade torna-se premente quando se deseja analisar, por exemplo, a estabilidade de uma col<u>u</u> na solicitada por forças axiais de compressão.

Um artigo de Martin (13), faz um levantamento do que foi feito entre os anos de 1958 e 1965, procede a uma análise crítica do problema e estabelece um procedimento consistente, com base na teoria da elasticidade não linear, para derivar as matrizes de rigidez necessárias para a análise de grandes deslocamentos e de estabilidade.

Em 1963, Gallagher e Padlog (14), estabeleceram um processo para análise de estabilidade baseado no princípio da ener gia potencial estacionária, restrito aos casos de instabilidades em que os efeitos dos deslocamentos nodais finitos, não tinham relevância na ocorrência daquelas instabilidades. Mais tarde, estes mesmos autores, e mais Gellatly e Mallett, estenderam e ampliaram este trabalho (15). O processo descrito por estes autores é particularmente recomendado quando a distribuição das forças axiais (no caso de estruturas formadas por elementos unidimensionais) ou das forças de membrana (no caso das placas e cascas), não é conhecida a priori.

A seguir, será analisada a estabilidade de estruturas planas formadas por elementos unidimensionais, cujos deslocamentos permanecem limitados até o instante em que a estrutura se torna instável. Para isto, serão introduzidas ligeiras modificações no processo descrito na publicação (15), com a finalidade de se construir um programa automático. Antes disso, será deduzida a matriz de rigidez para um elemento de pórtico plano, segundo o pr<u>o</u> cedimento proposto por Martin. 2 - MATRIZ DE RIGIDEZ PARA UM ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO

Define-se como matriz de rigidez aquela que transforma deslocamentos generalizados (ou nodais) em forças generaliz<u>a</u> das (ou nodais). Escrevendo-se as expressões (3.20) da seção do cap. I em forma matricial, reconhece-se na matriz (c_{ik}) a matriz ora definida. Comparando aquelas expressões com a expressão(3.26), da mesma seção, conclue-se que os elementos desta matriz são dados por:

$$c_{ik} = \partial^2 V / \partial q_i \partial q_k \qquad (2.1)$$

Sejam os q_i deslocamentos generalizados em função dos quais se podem obter os deslocamentos em qualquer ponto do el<u>e</u> mento de pórtico plano indicado na fig. (2.1). Como o elemento ao se deformar permanece no plano formado pelos eixos x e y, é s<u>u</u> ficiente considerar os deslocamentos nodais (u_1 , v_1 , θ_1 , u_2 , v_2 , θ_2) indicados na figura, para que seja assegurada a compatibilidade dos deslocamentos nas interseções (nós) dos elementos. Assumese que a seção transversal, A, é constante ao longo do elemento e que I, é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo dos z. Além disso, assume-se que o elemento é constitu<u>i</u> do por um material homogêneo, elástico e que obedece a lei de Hooke.

56 ·



57

FIGURA (2.1)

Como no elemento não figura nenhuma carga externa, toda energia potencial se encontra em forma de energia de deformação. Desta forma,tem-se que:

$$V = (1/2) \int_{\Omega} \sigma_{x} \varepsilon_{x} d\Omega = (1/2) E \int_{\Omega} \varepsilon_{x}^{2} d\Omega \qquad (2.2)$$

onde Ω é o volume do elemento e E , o módulo de elasticidade longitudinal do material.

A deformação específica na direção axial, ε_{χ} , pode ser separada em duas parcelas, como:

 $\varepsilon_{\rm x} = \varepsilon_{\rm o} + \varepsilon_{\rm a}$

onde ε_0 é a deformação sofrida pelo elemento desde o instante em que a estrutura está descarregada, até o instante em que se dá o equilíbrio entre as forças internas e o carregamento aplicado. A parcela ε_a pode ser encarada como a parte da deformação que se dá quando a estrutura é levada até uma configuração vizinha âquela do equilíbrio.

Substituindo (2.3) em (2.2), vem:

$$V = \frac{1}{2} E \int_{\Omega} \varepsilon_{0}^{2} d\Omega + \frac{1}{2} E \int_{\Omega} 2\varepsilon_{0} \varepsilon_{a} d\Omega + \frac{1}{2} E \int_{\Omega} \varepsilon_{a}^{2} d\Omega = V_{0} + V_{1} + V_{2}$$
(2.11)

A primeira integral, V_0 , é a energia de deformação presente no instante em que se dá o equilíbrio, e sendo constante, não contribuirá para os elementos da matriz de rigidez (ver(2.1)). Assim, o incremento da energia potencial resumir-se-á às duas últimas integrais.

Segundo a teoria elementar da Resistência dos Materiais, ϵ_a , é dada por:

É

$$a = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - y \frac{d^2v}{dx^2}$$
(2.5)

Como o termo (1/2) $(du/dx)^2$ é pequeno quando comparado com du/dx,pode ser omitido em (2.5), o mesmo não acontecendo com o ter mo (1/2) $(dv/dx)^2$, pois sem sua presença é impossível proceder a qualquer análise de estabilidade (ver eq. (1.3.17) da seção 1.3 do cap. I). Deste modo vem:

$$\varepsilon_{a} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^{2} - y \frac{d^{2}v}{dx^{2}}$$
 (2.6)

Substituindo (2.6) em V_1 e V_2 , de (2.4), vem:

$$V_{1} = E\varepsilon_{0} \int \int \int (\frac{du}{dx} - y \frac{d^{2}v}{dx^{2}}) dx dy dz + \frac{1}{2} E\varepsilon_{0} \int \int \int (\frac{dv}{dx})^{2} dx dy dz$$
(2.7)

$$V_2 = \frac{1}{2} E \int \int \int \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 - 2y \frac{du}{dx} \frac{d^2v}{dx^2} + y^2 \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right] dx dy dz$$

+ $\frac{1}{2} E \int \int \int \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \right)^4 + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \right)^2 - y \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \right)^2 \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} \right] \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$ (2.8)

Neste ponto, convém introduzir os deslocamentos no interior do elemento em função dos deslocamentos generalizados. A escolha destas funções é um passo importante dentro da tecnologia dos elementos finitos. Os critérios para esta escolha foram estabelecidos por Zienkiewicz (12). De acordo com eles, as funções devem ser tais que:

- não haja nenhuma deformação no elemento quando os deslocamentos nodais forem compativeis com um movimen to de corpo rígido.
- quando os deslocamentos nodais forem compativeis com uma condição de deformação unitária constante, esta mesma condição deve ser obtida a partir das funções escolhidas.

Estas condições são denominadas de condições de completidade.

59

Por outro lado, o comportamento do elemento deve ser explicado a partir do conhecimento dos deslocamentos nodais, do que se conclue que deve haver uma concordância nos números de deslocamentos nodais e generalizados.

A função u(x) tem que ser no mínimo da forma:

$$u(x) = q_1 + q_2 x$$
 (2.9)

para atender as condições de completidade.Enquanto isso, o desloca mento transversal, v, tem que ter uma forma cúbica para atender à condição de cisalhamento constante (dada por $d^3v/dx^3 = cte.$), permitindo, consequentemente, uma variação linear ligando os momen tos nas extremidades do elemento. Assim, vem:

$$v(x) = q_{2} + q_{\mu}x + q_{5}x^{2} + q_{6}x^{3} \qquad (2.10)$$

Com isto, tem-se também satisfeita a condição de haver um mesmo n \underline{u} mero de deslocamentos nodais e generalizados no elemento.

Agora, fazendo-se as integrações ao longo das seções transversais e introduzindo-se as derivadas presentes em(2.7) e (2.8) em função dos deslocamentos generalizados, vem:

$$V_{1} = E \varepsilon_{0}^{A} \int_{0}^{t} q_{2} dx + \frac{1}{2} E \varepsilon_{0}^{A} \int_{0}^{t} (q_{4}^{2} + 4q_{5}^{2}x^{2} + 9q_{6}^{2}x^{4} + 4q_{4}q_{5}x$$

- 61 -

+ $6q_{4}q_{6} x^{2} + 12q_{5}q_{6}x^{3}$) dx

(2.11)

 $V_2 = \frac{1}{2} E \int_{-\infty}^{\infty} A q_2^2 + I (4q_5^2 + 36q_6^2x^2 + 24q_5 q_6 x) dx$

 $+ \frac{E}{2} \int_{0}^{x} \frac{1}{4} (q_{4} + 2q_{5} x + 3q_{6} x^{2})^{4} + q_{2} (q_{4} + 2q_{5} x + 3q_{6} x^{2})^{2} dx$ (2.12)

Nestas expressões, os termos lineares nos q_i não contribuem para a matriz de rigidez e os de ordem maior ou igual à terceira não figuram na expressão da energia potencial(ver (3.26), cap. I). Assim, com $P^{O} = E\varepsilon_{O}A$ representando a força axial no elemento, no instante em que se da o equilíbrio entre as forças in ternas e o carregamento aplicado, tem-se, finalmente, a expressão da energia potencial como uma forma quadrática dos deslocamentos generalizados:

 $V = \overline{V} + \overset{\pm}{V},$

$$\vec{v} = \frac{1}{2} E \left(q_2^2 A \ell + 4 q_5^2 I \ell + 12 q_6^2 I \ell^3 + 12 q_5 q_6 I \ell^2 \right)$$
(2.13)
$$\vec{\bar{v}} = \frac{P^{\circ}}{2} \left(q_4^2 \ell + \frac{4}{3} q_5^2 \ell^3 + \frac{9}{5} q_6^2 \ell^5 + 2 q_4 q_5 \ell^2 + 2 q_4 q_6 \ell^3 + 3 q_5 q_6 \ell^4 \right)$$

(2.14)

Chamando de a_{ik} e b_{ik} os elementos da matriz de rigidez obtidos, respectivamente, de \overline{V} e \overline{V} por (2.1), vem:

$$\begin{bmatrix} Al & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1l & 6 & 1l^2 \\ 0 & 6 & 1l^2 & 12 & 1l^3 \\ (2) & (5) & (6) \end{bmatrix}$$

(2,15)



(2.16)

Agora, tem-se todo o comportamento do elemento em função de seis deslocamentos generalizados. Se os elementos que compõem a estrutura, fossem independentes, ter-se-ia, então, ao t<u>o</u> do, 6n deslocamentos generalizados, sendo n o número total de elementos. Introduzindo-se,porém, as restrições impostas pelos apoios e as decorrentes das equações de compatibilidade nos nós da estrutura, aquele número será reduzido. A maneira mais fácil de se introduzir estas restrições é transformar os deslocamentos gen<u>e</u> ralizados em deslocamentos nodais a partir das relações existentes nos elementos. Seja, então, particularizar u, v e dv/dx, para x = 0 e x = 2 e escrever o resultado em forma matricial:

$$\begin{cases} u_{1} \\ v_{1} \\ \theta_{1} \\ \theta_{2} \\ v_{2} \\ \theta_{2} \\ \theta_{2} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell & \ell^{2} & \ell^{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\ell & 3\ell^{2} \end{bmatrix} \begin{cases} q_{1} \\ q_{2} \\ q_{3} \\ q_{4} \\ q_{5} \\ q_{6} \\ \end{cases}$$

(2.17)

 $\{p\} \qquad \left[\phi_{0}\right] \qquad \{q\} \qquad (2.18)$

Seja [C] a matriz que transforma deslocamentos generalizados em forças generalizadas e [S] a matriz que transforma deslocamentos nodais em forças nodais. Esta última, pode ser obtida da primeira através de:

$$\left[S \right] = \left(\left[\phi_{o} \right]^{-1} \right)^{t} \left[C \right] \left[\phi_{o} \right]^{-1}$$
(2.19)

A matriz $\begin{bmatrix} \phi_0 \end{bmatrix}^{-1}$, obtida por inversão de $\begin{bmatrix} \phi_0 \end{bmatrix}$ de

(2.18), ē:

$$\Phi_{0} \Big]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2^{2}} & -\frac{2}{2} & 0 & \frac{3}{2^{2}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{2^{3}} & \frac{1}{2^{2}} & 0 & -\frac{2}{2^{3}} & \frac{1}{2^{2}} \end{bmatrix}$$
(2.20)

Preenchendo com zeros os termos que estão faltando nas matrizes $\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} e$ efetuando as operações indicadas em (2.19), vem:

$$\begin{bmatrix} A \\ \overline{\chi} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{12}{\chi^3} \\ \frac{6}{\chi^2} \\ -\frac{4}{\chi^3} \\ \frac{1}{\chi^2} \\ 0 \\ -\frac{12}{\chi^3} \\ \frac{6}{\chi^2} \\ 0 \\ -\frac{6}{\chi^2} \\ \frac{2}{\chi} \\ \frac{1}{\chi} \\ \frac{1}{\chi} \\ 0 \\ -\frac{6}{\chi^2} \\ \frac{12}{\chi} \\ -\frac{12}{\chi} \\ -\frac{6}{\chi^2} \\ \frac{12}{\chi} \\ -\frac{6}{\chi^2} \\ -\frac{1}{\chi^2} \\ -\frac{6}{\chi^2} \\ -\frac{4}{\chi} \\ -\frac{1}{\chi} \\$$

- 64


65

finalmente, a matriz de rigidez do elemento será, então, dada por:

$$\begin{bmatrix} k_T \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_G \end{bmatrix} \right)$$
 (2.23)

(2.22)

3 - PROCESSO DE GALLAGHER PARA A ANÁLISE DE ESTABILIDADE ELÁSTICA

Antes de apresentar o processo propriamente dito se rão descritos os passos que deverão ser cumpridos para se passar a análise do nível do elemento para o nível da estrutura. No método dos deslocamentos esta passagem resulta nas relações que ligam os deslocamentos nodais da estrutura com as forças nodais correspondentes (ou ações), ou o que é o mesmo, na matriz de rigidez da estrutura. Como foi visto, os termos da matriz de rigidez são derivados da energia potencial, e como a hipótese básica do método dos elementos finitos é que a energia potencial no domínio completo s<u>e</u>

ja igual a soma das energias potencial dos elementos, conclue-se que os termos da matriz de rigidez da estrutura serão iguais a soma das contribuições dos termos da matriz de rigidez dos seus elementos. Por outro lado, os deslocamentos nodais escolhidos Dara se escrever as relações existentes nos elementos têm, em geral, as direções dos eixos de um sistema de referência que depende da orientação do elemento, o qual é chamado sistema local do elemento. Assim, antes de se montar a matriz de rigidez da estrutura, é necessário que se faça uma transformação tal que os deslocamentos e as forças correspondentes, em um mesmo no, estejam nas direções dos eixos de um único sistema de referência previamente escolhido para aquele nó. Estes sistemas de referência são chamados de sistemas globais locais. Pode acontecer que seja possível tomar em todos os nos sistemas de referência cujos eixos tenham a mesma direção e sentido dos eixos de um sistema único de referência, neste caso, es te último sistema é chamado de sistema global da estrutura. Assumindo que tenham sido feitas estas transformações, obtem-se, então, a matriz de rigidez da estrutura da maneira acima descrita.

Sem perda de generalidade, daqui por diante a anál<u>i</u> se será feita usando como veículo de ilustração a matriz de rigidez que foi deduzida na seção anterior, e onde se falar de força axial, esta palavra poderá ser substituida por forças de membrana, a não ser que não seja o caso.

Chamando de { r } a relação dos deslocamentos nodais da estrutura, livres de se realizarem, e de { R } , o vetor das forças nodais correspondentes (vetor das ações), o qual é obtido superpondo-se o vetor das forças aplicadas aos nos da estrutu

- 66 -

ra com o vetor das forças nodais equivalentes às cargas aplicadas nos elementos, vem que:

$$\{R\} = [K_T] \{r\}$$
(3.1)

onde a matriz $\begin{bmatrix} K_T \end{bmatrix}$ é obtida a partir das matrizes $\begin{bmatrix} k_T \end{bmatrix}$ dadas por (2.23), após terem sido feitas as transformações convenientes. Alternativamente, pode-se obter a matriz de rigidez montando-se se paradamente as matrizes cujos elementos provêm de $\begin{bmatrix} k \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} k_G \end{bmatrix}$. Deste modo, a equação (3.1) é escrita na forma:

$$\{R\} = \left(\left[K\right] + \left[K_{G}\right]\right) \{r\} \qquad (3.2)$$

A matriz $\begin{bmatrix} K \end{bmatrix}$ é a matriz de rigidez convencional, ou seja, a mesma que é usada na análise linear e que independe do carregamento aplicado. A matriz $\begin{bmatrix} K_G \end{bmatrix}$, que é o resultado de se ter considerado o termo não linear, 1/2 (dv/dx)², na relação deformação-deslocamentos (ver (2.25) deste capítulo), é designada matriz de rig<u>i</u> dez incremental, ou matriz de rigidez geométrica, ou, ainda, matriz de rigidez com tensões iniciais. A primeira designação provem do fato de ser esta, a matriz que deve ser somada à matriz de rigidez convencional para se obter os deslocamentos em um novo incremento das cargas, quando se está fazendo uma análise não linear de uma estru tura pelo processo incremental. Neste caso, ε_0 é a deformação obtida até um passo anterior ãquele que está sendo considerado, e ε_a , o incremento na deformação devido ao novo incremento das cargas. A segunda designação pretende que esta matriz corrija a geometria da estrutura em cada incremento das cargas. Finalmente, a última designação deriva do fato de ser esta matriz dependente do estado de tensão nos elementos, no instante que precede a um novo incremento das cargas. Aqui, será usada a designação matriz de r<u>i</u> gidez incremental.

Seja, agora, { R_0 } o vetor das ações para um determinado carregamento aplicado na estrutura e λ , um parâmetro real que multiplicado por { R_0 } fornece { R } na eq. (3.2).Se a distribuição das forças axiais na estrutura é conhecida a priori, isto é, sem que seja necessário proceder a qualquer análise de de<u>s</u> locamentos da estrutura, e se a estrutura é tal que os seus deslocamentos permanecem limitados até o instante em que se dá a sua instabilidade, então, somente a intensidade da distribuição das forças axiais variará com o carregamento e a eq. (3.2) poderá ser escrita na forma:

$$\{R\} = \lambda \{R_{O}\} = \left(\left[K\right] + \lambda \left[K_{G_{O}}\right]\right) \{r\}$$
(3.3)

onde $\begin{bmatrix} K_{G_0} \end{bmatrix}$ é a matriz de rigidez incremental para $\lambda = 1$. A condição para que o carregamento { R } seja crítico de acordo com o critério do equilíbrio é dada por

det
$$\left(\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} K_{G_{O}} \end{bmatrix} \right) = 0$$
 (3.4)

Por outro lado, os valores de λ que satisfazem (3.4), são os autovalores da equação:

· 68 -

$$\left(\left[K \right] + \lambda \left[K_{G_{o}} \right] \right) \left\{ r \right\} = 0$$
 (3.5)

O menor valor de λ obtido de (3.5) será, então, o primeiro parâmetro crítico e a análise de estabilidade será efetuada de acordo com a discussão feita na seção 3 do cap. I, na parte em que são tr<u>a</u> tados os sistemas conservativos não giroscópicos. Este, é o processo descrito por Przemieniecki (16).

Acontece que muitas vezes a distribuição das forças axiais só pode ser determinada a partir do conhecimento dos deslocamentos nodais, os quais, por sua vez, dependem daquela distribui ção. Nestes casos, a própria distribuição variará com o nível do carregamento e o raciocínio anterior não mais poderá ser aplicado. O processo de Gallagher é recomendado exatamente para estes casos, embora permaneça a hipótese da não relevância sobre a ocorrência da instabilidade dos efeitos decorrentes de deslocamentos finitos. Agora será apresentada a sequência, como está descrita em (15) , que deverá ser seguida para a aplicação deste processo:

- define-se inicialmente um nível do carregamento aplicado à estrutura, por meio de um parâmetro α₁. Sen do { R } o vetor das ações do carregamento aplicado, espera-se que α₁ { R } seja um carregamento próximo ao primeiro carregamento crítico da estrutura.
- 2) para este nivel do carregamento, é feita uma previsão inicial das forças axiais nos elementos com [K_G] = 0 em (3.2). Assim, obtem-se:

69 -

$$\{\mathbf{r}\}^{\circ} = \left[K\right]^{-1} \alpha_{1} \{R\} \qquad (3.6)$$

e a partir destes deslocamentos são computadas as fo<u>r</u> ças axiais nos elementos.

3) de posse destas forças, é montada a matriz $\begin{bmatrix} K_G \end{bmatrix}^{\circ}$ e um novo vetor de deslocamentos é obtido de:

$$[r]^{1} = [K]^{-1} (\alpha_{1} \{R\} - [K_{G}]^{\circ} \{r\}^{\circ})$$
 (3.7)

4) o processo continua até que uma matriz incremental o<u>b</u> tida de:

$$\{r\}^{s+1} = [K]^{-1} (\alpha_1 \{R\} - [K_G]^s \{r\}^s)$$
 (3.8)

coincida com a matriz incremental obtida na iteração anterior, ou seja, de $\{r\}^{S}$.

5) conhecida a matriz incremental definitiva, a condição para que o carregamento seja crítico é que:

$$\det \left(\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_G \end{bmatrix} \right) = 0$$

Por outro lado, se o problema de autovalores

$$\left(\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} K_G \end{bmatrix} \right) \left\{ r \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

for resolvido e o menor valor de λ , λ_1 , for igual

a 1, a eq. (3.9) se verifica e $\alpha_1 \{R\}$ será o primeiro carregamento crítico. Se, entretanto, λ_1 for diferente de 1, a eq. (3.9) não se verifica, e o carregamento $\alpha_1 \{R\}$ estará abaixo ou acima do prime<u>i</u> ro carregamento crítico, dependendo do valor λ_1 ser, respectivamente, maior ou menor que 1.

6) caso $\alpha_1 \{R\}$ não seja o primeiro carregamento critico, o processo é repetido para outros níveis de ca<u>r</u> regamento, $\alpha_1 \{R\}$, $\alpha_3 \{R\}$,..., até que seja achado um parâmetro α_c que multiplicado por $\{R\}$ forneça o carregamento desejado. Mesmo que tal não aconteça, é possível que se plotando os valores de $\alpha_1 e \lambda (\alpha_1)$, $\alpha_2 e \lambda (\alpha_2)$, $\alpha_3 e \lambda (\alpha_3)$,..., o valor de α_c possa ser extrapolado ou interpolado, dependendo das posições relativas destes pontos. Um exemplo desta curva é o da figura (3.1).



FIGURA (3.1)

Do ponto de vista computacional, note-se que do pas so 2 ao passo 4 só foi necessário inverter a matriz [K] uma única vez, sendo as operações restantes, simplesmente, somas e mul tiplicações de matrizes. O problema de autovalores em 5 pode ser resolvido por um processo iterativo, por exemplo, o processo de Stodola. Escrevendo-se (3.10) na forma

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \{ r \} = -\lambda \begin{bmatrix} K_G \end{bmatrix} \{ r \}$$
(3.11)

e premultiplicando-se ambos os membros de (3.11) por $[K]^{-1}$, vem

$$\{r\} = -\lambda \left[K\right]^{-1} \left[K_{G}\right] \{r\}$$
(3.12)

e, portanto, a matriz $[K]^{-1}$, que pode sair intacta das operações nos passos anteriores, pode ser mais uma vez mantida na memória do computador e ser utilizada quando o processo se repetir para outros níveis do carregamento. Note-se, porém, que serão nece<u>s</u> sários dois espaços na memória para armazenar as matrizes de rigidez convencional e incremental. Além disso, devido à inversão, não poderá ser aproveitado o fato de serem aquelas matrizes do tipo banda.

4 - PROCESSO DE GALLAGHER MODIFICADO

A motivação inicial para modificar o processo de Gallagher, surgiu quando se tentou introduzir liberações nos elementos da estrutura, pois, neste caso, tanto a matriz [K] como a matriz $\begin{bmatrix} K_G \end{bmatrix}$ dependem das forças axiais induzidas nos elementos Co<u>n</u> sequentemente, o processo proposto para o refinamento da matriz in cremental perdeu o seu sentido e desapareceu um dos principais a-trativos de processo, ou seja, a permanência na memória do computa dor da matriz $[K]^{-1}$.

Em segundo lugar, mesmo que não fossem introduzidas liberações nos elementos, permaneceria uma inconveniência daquele processo, principalmente para computadores de pequeno porte, qual seja, a necessidade de ocupação de duas áreas de memória para o ar mazenamento das matrizes de rigidez convencional e incremental.

Finalmente, se o parâmetro α_1 , escolhido no passo 1, for tal que o nível do carregamento situe-se nas proximidades do segundo carregamento crítico, um resultado falso poderá ser en-Isto, porque da maneira como o processo foi formulado, contrado. a decisão sobre a estabilidade teve que ser feita por meio do critério do equilíbrio. Para contornar este problema, uma primeira solução seria guardar em uma nova área de memória a matriz K e no passo <u>5</u> compor esta matriz com $\begin{bmatrix} K_G \end{bmatrix}$ para, então, fazer a ve rificação pelo critério da energia. Uma segunda solução, com a mesma finalidade, seria inverter a matriz [K]⁻¹ para obter a matriz original. A terceira, seria montar outra vez a matriz [K] na área ocupada por $\left[\ {\tt K} \ \right]^{-1}$. A primeira solução teria a vantagem de preservar o processo, mas teria a inconveniência da criação de uma nova área de memoria (interna ou externa). A segunda solução destruiria a matriz [K]⁻¹; e repetido o processo para um novo nível do carregamento, a matriz [K] teria que ser mais uma vez invertida. A terceira solução seria praticamente equivalente ā segunda.

- 73 -

Para que fossem resolvidos simultaneamente todos os problemas apontados acima, procurou-se, então, reestruturar o processo de Gallagher dentro de novas diretrizes. Como se sabe, de acordo com o critério da energia a estabilidade de uma estrutura es tá relacionada com o tipo de forma assumida pela expressão da sua energia potencial, ou no caso mais geral, com a forma assumida pela segunda variação da energia potencial. Entretanto, o método aqui empregado reduziu o problema ao estudo de uma forma quadrática em n coordenadas generalizadas dada por:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k \qquad (4.1)$$

onde a matriz dos coeficientes (c_{ik}) é agora a matriz de rigidez da estrutura, $[K_T]$, e as coordenadas generalizadas são os deslocamentos nodais da estrutura. Por outro lado, a condição necess<u>á</u> ria e suficiente para que a forma quadrática (4.1) seja positiva definida é que todos os menores principais do determinante da matriz dos seus coeficientes sejam positivos; veja-se (10, pg 312).

Sabe-se, ainda, que a fronteira de estabilidade é estabelecida pela condição:

det
$$(c_{ik}) = det \left[K_{T}\right] = 0$$
 (4.2)

Como os coeficientes c_{ik} , ou seja, os termos da matriz de rigidez, são funções contínuas de um parâmetro α que identifica o n<u>í</u> vel do carregamento aplicado, assim também o será o determinante da matriz de rigidez. Deste modo, poder-se-ia traçar uma curva

- 74 -

continua det $\begin{bmatrix} K_T \end{bmatrix}$ versus α , a qual teria o aspecto representa do na fig. (4.1).



FIGURA (4.1)

Do quadro acima representado vê-se que conjugandose os critérios da energia e do equilíbrio, pode-se chegar a um processo para pesquisar a posição do ponto B na fig. (4.1). Abstraindo-se, por enquanto, dos processos computacionais, esta pesquisa resumir-se-ia em encontrar um parâmetro α que estivesse si tuado na região AB do eixo dos α e o mais próximo possível do ponto β . Caso a previsão inicial fosse tão grosseira que parâ metro atingisse um ponto além de C, o exame dos sinais dos menores principais acusaria tal fato. Poder-se-ia, ainda, encontrado um parâmetro α que estivesse na região AB e relativamente próximo de B, explorar a vizinhança deste ponto dentro de certos li mites e, então, encontrado um determinante com sinal negativo nesta vizinhança, procurar se aproximar de B por valores que estivessem à sua direita.

Agora, sera explicado como se deve proceder para c<u>a</u> da nível do carregamento:

1) resolve-se o sistema de equações (3.1) com $\begin{bmatrix} K_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \end{bmatrix}$

- 2) com o resultado obtido para os deslocamentos calculam se as forças axiais nos elementos e monta-se a matriz $\begin{bmatrix} K_T \end{bmatrix}$. Com esta nova matriz, resolve-se mais uma vez o sistema (3.1), recalculam-se as forças axiais e monta-se mais uma vez a matriz $\begin{bmatrix} K_T \end{bmatrix}$. O processo continua até que os deslocamentos obtidos em duas it<u>e</u> rações consecutivas sejam iguais dentro de uma aprox<u>i</u> mação desejada. Com isto, tem-se a matriz de rigidez da estrutura referida ao nível do carregamento em questão.
- 3) a resolução dos sistemas de equações sendo feita pelo algoritmo de Gauss, permite que, concomitantemente com a resolução de cada sistema, sejam computados os men<u>o</u> res principais do determinante, e naturalmente o próprio, sem que seja introduzido, praticamente, nenhum esforço computacional adicional. Assim, obtida a matriz de rigidez final tem-se, também, todas as informações necessárias para o procedimento da análise da estabilidade para o presente nível do carregamento.

Comparando-se este processo com o de Gallagher, mes mo sem considerar as inconveniências apontadas no início desta seção, chega-se a um resultado, no que diz respeito ao tempo gasto em computação, praticamente equivalente. Isto, porque apesar da resolução do sistema de equações envolver um número bem maior de operações do que as envolvidas em cada passo do processo iterativo para refinar a matriz de rigidez incremental, no presente processo, evita-se o problema de autovalores do processo anterior, o qual, poderá consumir um tempo considerável de computação.

Em um capítulo seguinte serão apresentados os testes realizados em algumas estruturas planas formadas por barras com eixo reto, que serviram para comprovar a eficiência do processo ora proposto.

CAPÍTULO III

1 - PROGRAMA AUTOMÁTICO HPAEE

1.1 - Finalidade

A finalidade do presente programa é analisar a est<u>a</u> bilidade de estruturas planas formadas por barras retas de seção transversal constante e que atendam às seguintes condições:

- 1) pertençam à classe dos sistemas conservativos não giroscópicos.
- 2) sejam colicitadas por forças contidas no plano formado por suas barras.
- 3) ao se deformarem, permaneçam no plano em que se enco<u>n</u> travam antes da deformação.
- 4) suas deformações sejam de tal ordem que os comprimentos e as áreas da seção transversal de suas barras, não sofram variações consideráveis (hipótese das pequenas deformações).
- 5) seus deslocamentos permaneçam limitados até o instante em que elas se tornem instáveis.

1.2 - Subrotinas do Programa ·

1.2.1 - Subrotina GILCA

Esta subrotina define:

- 79 -
- 1) a geometria da estrutura
- 2) as condições de apoio da estrutura
- a incidência dos elementos, ou seja, a orientação dos eixos do sistema local de cada um dos elementos.
- 4) o número e a localização das liberações dos elementos
- 5) o módulo de elasticidade longitudinal do material da estrutura.
- 6) o número de graus de liberdade da estrutura

1.2.2 - Subrotina HFVC

Forma o vetor das ações correspondentes aos desloc<u>a</u> mentos nodais livres da estrutura, combinando as ações nos nos com as ações equivalentes às cargas aplicadas nos elementos. Estas últimas são fornecidas por leitura direta.

1.2.3 - Subrotina HMMR

Calcula os termos da matriz de rigidez, $\begin{bmatrix} K_T \end{bmatrix}$, de um elemento de pórtico plano, referida ao sistema de eixos local do elemento. Faz as transformações convenientes para um sistema de eixos global e monta a matriz de rigidez, $\begin{bmatrix} K_T \end{bmatrix}$, da estrutura.

1.2.4 - Subrotina HRSCD

Resolve um sistema de equações pelo algoritimo de Gauss, ao mesmo tempo em que calcula o determinante. Informa ao programa principal se existe pelo menos algum menor principal do determinante com sinal negativo.

1.2.5 - Subrotina HCFA

Calcula as forças axiais nos elementos a partir dos deslocamentos nodais da estrutura.

1.3 - Processo Automático para Determinar o Parâmetro Crítico

A determinação da posição do ponto B, da fig. (4.1) do cap. II, pode ser feita por tentativas escolhendo-se um certo número dos parâmetros que definem o nível do carregamento. A eficiência deste processo, entretanto, depende do acerto da escolha daqueles parâmetros. Caso a primeira série dos parâmetros escolhidos não fosse bem sucedida, entrar-se-ia com uma nova série, e assim por diante. Para evitar isto e dar uma maior liberdade ao programa, introduziu-se um processo semelhante ao de Newton-Raphson.

Seja det_o, o determinante da matriz de rigidez convencional da estrutura e det, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} K_T \end{bmatrix}$ definida na seção 3 do cap. II. Como a matriz de rigidez convencional independe do carregamento aplicado, det_o será a ordenada na origem da curva indicada na fig. (4.1) do cap. II. Agora, se os valores det/det_o forem tomados como as novas ordenadas daquela curva, a ordenada na origem será sempre igual à unidade. Supon

- 80 -

do-se que a linha pontilhada, indicada na fig. (l.3.1), seja a cur va real det/det = f(α), o seguinte processo poderá ser usado pa ra determinar a posição do ponto B sobre o eixo dos α :

- escolhe-se um parâmetro qualquer, a₁; e determina-se f(a₁). Dai poderão se apresentar treŝ alternativas:
 a) f(a₁) positivo, com a₁ na região AB
 b) f(a₁) positivo, com a₁ além do ponto C
 c) f(a₁) negativo
- 2) Se no passo <u>1</u> obteve-se qualquer uma das alternativas <u>b</u> ou <u>c</u>, encerra-se o programa com uma mensagem. Se, entretanto, obteve-se a alternativa <u>a</u>, pa<u>s</u> sa-se uma reta ligando os pontos (0,1) e (α_1 , f(α_1). A intersecção desta reta com o eixo dos α serã, a<u>go</u> ra, um novo parâmetro, α_2 .
- 3) determina-se $f(\alpha_2)$, mas, não será mais necessário se preocupar com a posição de α_2 sobre o eixo dos α , pois, agora, ele deverá se encontrar na vizinhança do ponto B.
- 4) passa-se uma nova reta ligando os pontos $(\alpha_1, f(\alpha_1) e$ $(\alpha_2, f(\alpha_2) e$, como antes, determina-se um novo parâmetro α_3 .

5) o processo poderia continuar até que um $f(\alpha_i)$ fosse suficientemente pequeno, mas, como a convergência para o ponto B poderia não se dar dentro de um número aceitável de ciclos, é prefirível, então, limitar o número destes ciclos. Deste modo, se os resultados obtidos em uma primeira passagem do programa no comp<u>u</u> tador, não fossem satisfatórios, escolheria-se, não um, mas, dois parâmetros que estivessem próximos do ponto B, sendo um deles obtido na primeira passagem, e o processo se repetiria a partir do passo <u>4</u>.







1.4 - Significado das Principais Variáveis do Programa HPAEE

- NP variavel que no final da análise de uma es trutura, indica se ainda existe alguma outra para ser analisada. Ela será zero ou diferente de zero, caso a resposta seja, respectivamente, negativa ou positiva.
- NE número da estrutura a ser analisada.
 - E módulo de elasticidade do material da estrutura.

VARIÁVEIS RELACIONADAS COM A GEOMETRIA DA ESTRUTURA

M - número de elementos.

NJ - número de nos.

NRJ - número de nós com pelo menos uma direção restringida.

NR - número de direções restringidas.

NECL - número de elementos com liberações.

N - número de graus de liberdade.

X(I), Y(I) - abcissa e ordenada do no I, no sistema gl<u>o</u> bal.

JJ(I), JK(I) - números dos nós inicial e final do elemento I (ver fig. 1.4.1).

- NEL(I) indica se existe, ou não, liberações no elemento I.
 - = 0 se não existe
 - = 1 se existe.
 - L(I) comprimento do elemento I.
- CX(I), CY(I) coseno dos ângulos formados pela direção positiva do eixo dos x do sistema local do elemento I, respectivamente, com as direções positivas dos eixos x e y do sistema global.

RL(3*K-2), RL(3*K-1),

RL(3*K)

- indicam se existem restrições no nó K,pa ra a estrutura se deslocar, respectivamente, segundo as direções x e y, e em torno do eixo dos z, do sistema global.
 = 0 se não existe
 - = 1 se existe.
- IEL(I,J) indica se existe liberação na direção J do elemento I (ver fig. 1.4.1). = 0 se não existe = 1 se existe.



FIGURA (1.4.1)

VARIÁVEIS RELACIONADAS COM O CARREGAMENTO

NLJ - número de nos carregados.

- NLML número de elementos com as ações de engastamento fornecidas por leitura direta.
- A(3*K-2), A(3*K-1) forças aplicadas no nó K , dirigidas, res pectivamente, segundo os eixos x e y do sistema global. *
 - A(3*K) momento aplicado no nó K , dirigido segun do o eixo dos z do sistema global. *

AML(I,J) - ação do engastamento na direção J , devi da as cargas aplicadas no elemento.*

AC(J) - vetor das ações correspondentes aos deslocamentos nodais, não restringidos, da estrutura. (este vetor representará o <u>nível</u> <u>de referências</u> do carregamento aplicado à estrutura).



FIGURA (1.4.2)

* As forças aplicadas nos nos serão positivas, quando estiverem dirigidas segundo as direções positivas dos eixos do sistema global.

As ações do engastamento sobre o elemento serão positivas,quan do forem do mesmo sentido das forças indicadas na fig. (1.4.2) VARIÁVEIS RELACIONADAS COM O PROCESSO DA SEÇÃO

1.3 DESTE CAPÍTULO

- ALFA parâmetro que define o nível do carregamento.
- DET variavel que representa a relação det/det
- NKPP número máximo desejado de ciclos do proce<u>s</u> so.
 - NKP número do ciclo que está sendo realizado.
- PRD2 precisão desejada para verificar se o valor assumido por DET está próximo do zero.
- ALFA1, DET1 valores obtidos, respectivamente, para a abcissa e a ordenada do ponto que se supõe estar mais próximo do ponto B, em uma primeira análise da estrutura. Caso se es teja analisando a estrutura pela primeira vez, estas variáveis serão iguais, respectivamente, a 0 (zero) e 1 (hum).
 - NSD variável que assumirá o valor l(hum), quan do algum menor do determinante da matriz de rigidez da estrutura for negativo. Caso todos os menores sejam positivos, assumirá o valor 0 (zero).

VARIÁVEIS RELACIONADAS COM O PROCESSO QUE DETERMINA A MATRIZ DE RIGIDEZ

- NKS número máximo desejado de iterações
 - KS número da iteração que está sendo realizada.
- Pl(I) vetor formado pelos deslocamentos nodais obtidos na iteração KS-l (quando KS for l, Pl(I) será um vetor nulo).
- P2(I) vetor formado pelos deslocamentos nodais que se obtém na iteração KS .
 - vetor que, antes da resolução do sistema de equações, armazena o vetor das ações,AC(I), multiplicado pelo parâmetro, ALFA, que define o nível do carregamento.
- EN(I) vetor formado pelas forças axiais dos elementos.
 - PRD1 precisão desejada para se comparar os deslocamentos obtidos em duas iterações conse cutivas.

(I,J) - matriz de rigidez da estrutura.













- 94 -



1.6 - Manual de Entrada do Programa

·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Nº DE CARTÕES	VARIÁVEIS	FORMATO
1	NP	15
1	NE	F10.0
1	M, NJ, NR, NRJ, NECL, E	5I5, El0.l
NJ	J, X(J), Y(J)	I5, 2F10.4
м	I, JJ(I), JK(I), NEL(I), AX(I), IZ(I)	4I5, 2F15.7
NRJ	K, RL(3*K-2), RL(3*K-1), RL(3*K)	415
NECL	I, IEL(I,1),,IEL(I,6)	715
l	NLJ, NLML	215
NLJ	K, A(3*K-2), A(3*K-1), A(3*K)	I5, 3 F10.3
NLML	I, AML(I,1),,AML(I,6)	I5, 6 F10.3
1	ALFA, ALFAI, DETI	2F10.4, E10.4
1	NKS, NKPP, PRD1, PRD2	2I5, 2E10.1

CAPÍTULO IV

1 - APLICAÇÕES

1.1 - Viga sobre Fundação Elástica

Analisou-se a estabilidade de uma viga, de seção transversal constante, sobre fundação elástica, com as seguintes características:

L	-	comprimento	-	10,00	m
A	-	área da seção transversal	-	ĺ,00	m²
I _Z	-	momento de inércia	-	0,10	m4
E	-	módulo de elasticidade	-	10 ³ t/	/ m ²

O módulo da fundação, isto \overline{e} , a reação por unidade de comprimento da viga para uma deflexão unitária, foi tomado igual a 1,6 t/m².

A carga crítica, de compressão, agindo axialmente sobre uma das extremidades da viga, fig. (l.l.l-b), é calculada por:

$$P_{crit_{teo}} = \Pi^2 EI/L^2$$

onde L é um comprimento reduzido da viga, tabelado para alguns va lores da relação $\beta l^4/16EI$, na ref. (1). No caso presente, tem-se



IZ(1) a IZ(10) = 0,1 m⁴ IZ(11) a IZ(19) = 1,0 m⁴



ਿ



9

98 -

 $\beta \ell^{4}/16EI = 10 e L/\ell = 0,615$

Deste modo,

P_{crit} = 26,07 t.

A análise realizada pelo programa, com a viga subd<u>i</u> vidida em 10 elementos e a fundação simulada por meio de pêndulos, fig. (1.1.1-a), conduziu aos seguinte resultado:

P_{crit_{Prog} = 26,067 t.}

Sendo, por conseguinte, o erro cometido, de 0,01%.

Por outro lado, a carga crítica calculada por meio da ref. (1), foi obtida através de uma série com um número limitado de termos. Daí, fica explicado ter-se obtido, com o programa, uma carga crítica menor que aquela tomada como termo de comparação.

1.2 - Portico Simples de Três Andares

Na fig. (1.2.1) está representado um pórtico simples, de três andares, onde todas as barras têm mesmo comprimento, seção transversal e momento de inércia. Como segundo exemplo, an<u>a</u> lisou-se a estabilidade deste pórtico para o carregamento indicado naquela figura.

Dados para análise:

E - módulo de elasticidade = 10^{+} A - área da seção transversal = 10I = momento de inércia = 10^{-2} L = comprimento de uma barra = 10

A carga crítica da referência (17) é dada por:

 $P_{crit} = m EI/\ell^2$

onde m é um fator numérico que foi calculado, para pórticos com vários andares e carregado da mesma forma que na fig. (1.2.1), pelo método dos elementos finitos, mas, por um processo diferente d<u>a</u> queles apresentados nos capítulos anteriores.

Como a relação EI/l^2 aqui é figual a unidade, P_{crit} = m.

O resultado obtido pelo programa foi

$$P_{crit} = 4,442,$$

e o da ref. (17):

$$P_{crit} = 4,542$$

sendo, portanto, a diferença percentual de 2,2%.


FIGURA (1.2.1)

1.3 - Arco Circular Simples Bi-Engastado

Considere-se o arco circular bi-engastado,fig.(1.1), com seção transversal constante e constituido por um material elás tico e que obedece a lei de Hooke. Este arco, quando submetido a uma pressão uniformemente distribuida, q ,na direção radial, flam bará, em seu próprio plano, com uma pressão dada por:

 $q_{crit} = \gamma_1 EI/R^3$

onde

E, é o módulo de elasticidade do material

- I, é o momento de inércia da seção transversal em relação a um eixo baricêntrico, normal ao plano da figura.
- γ_1 , \tilde{e} um fator que se encontra tabelado em(l,p.301), para alguns valores do ângulo central.

Para o arco aqui considerado, γ_l é igual a 18,1. Assim, para uma relação EI/R³ unitária,a pressão crítica é :

^qcrit_{teo} = 18,1

Da análise realizada pelo programa, dividindo o arco em 12 partes iguais e substituindo-o por uma linha poligonal o<u>b</u> teve-se:

q_{crit_{prog} = 18,648}

O erro, de 3%, é em parte devido às aproximações feitas e em parte, pelo fato de não ter sido considerada na solução teórica a influên cia da relação AR^2/I .



CAPÍTULO V

- 105 -

1 - CONCLUSÕES

Os resultados anteriores mostram a eficiência do processo modificado de Gallagher para a análise da estabilidade elástica de estruturas constituidas por barras, notadamente vigas sobre fundações elásticas, arcos e pórticos de vários andares.

A teoria apresentada no Cap. I permitiu a justifica tiva matemática do processo e a consequente interpretação dos resultados obtidos nos exemplos analisados no capítulo anterior.

O processo pode ser aplicado, sem qualquer alteração do programa, a casos de estruturas formadas por barras de seção transversal variável.

O processo em questão pode ser também utilizado, com pequenas modificações no programa automático já elaborado, na análise de pórticos espaciais e placas. Estas alterações, consistem, principalmente, na inclusão das matrizes de rigidez, respectivamen te, de um elemento de pórtico espacial e de um elemento de placa, deduzidos com base no procedimento de Martin.

As etapas a serem seguidas posteriormente a este trabalho seriam, além de adaptação a outros tipos de estruturas, a construção de um programa para a análise não linear, tanto de origem geométrica como física, baseado em um processo incremental, no qual se verificaria a estabilidade, em cada incremento das cargas, pelo processo modificado de Gallagher. J/ FUR ONE WORD INTEGERS -LIST SOURCE PROGRAM SUBROUTINE GILCA(RL,CRL,JJ,JK,CX,CY,AAX,IIZ,L,MM,EE, *NND, NN, NEL, IEL, R, W) REAL L(40), I12(40), NE INTEGER RL(80), CRL(80), R, W DIMENSION AAX(40),CX(40),CY(40),JJ(40),JK(40),XX(30), *YY(30), NEL(40), IEL(40,6) READ(R.1)NE 1 FORMAT(F10.0) WRITE(W,2)NE 2 FURMAT(11,23X, COPPE/UFRJ PROGRAMA DE ENGEN!. ----*'HARIA CIVIL',//,18X,*ANALISE DE ESTABILIDADE ELASTI', ****CA DE PURTICOS PLANDS*////,33X,*ESTRUTURA*,** ** NUMERD', F5.0,////, 34X, 'HUMBERTO PEREIRA') WRITE(W,40) 4) FORMAT(//, 10X, READ(R, 3) MM, NNJ, NNR, NNRJ, NECL, EE 3 FORMAT(515,E10.1) C NECL-NUMERO DE ELEM. COM LIBERACOES NN=3*NNJ-NNR WRITE(W,4) 4 FORMAT(////,10X, DADOS DA ESTRUTURA*) WRITE(W.5) FORMAT(///,11x,*M*,6X,*NJ*,6X,*NR*,5X,*NRJ*, *4X, *NECL *, 7X, *N*, 10X, *E*) WRITE(W,6)MM, NNJ, NNR, NNRJ, NECL, NN, EE 6 FORMAT(/, 112, 518, E11.3) COORDENADAS DOS NOS DO 11 IC=1,NNJ READ(R, 10) J, XX(J), YY(J) 10 FORMAT(15,2F10.4) 11 CONTINUE WRITE(W,12) 12 FORMAT(//,10X,*COORDENADAS DOS NOS*//,13X,*NO*,9X,*X*,9X, **Y*./) WRITE(W,13)(J,XX(J),YY(J),J=1,NNJ) 13 FURMAT(10X,15,2F10.3) C INCIDENCIA E PROPRIEDADES GEOMETRICAS DOS ELEMENTOS DO 17 IC=1,MM READ(R, 14) [, JJ(I), JK(I), NEL(I), AAX(I), IIZ(I) 14 FORMAT(415,2F15.7) NEL=1 SE D ELER. TEM ALGUMA LIBERACAD С =0 SE NAO TEM 11I = 11(I) $JK1=JK{1}$ IF(JKI-JJI)15,16,16

106

15 JT=JJ1 JJI=JKI JKI≃JT 16 XCL=XX(JKI)-XX(JJI) YCL=YY(JKI)-YY(JJI) L(1)=SQRT(XCL*XCL+YCL*YCL) CX(I)=XCL/L(I) . 17 CY(I) = YCL/L(I)WRITE(W,7) 7 FURMAT(////,lox, INCIDENCIA E PROPRIEDADES GEOME", ***** TRICAS DOS ELEMENTOS!,) WRITE(W,18) 18 FORMAT(///,10X,*ELEM.*,3X,*NO INI,*,3X,*NO FIN.*,5X, **AREA*,6X,*MOM. DE INER.*> WRITE(W, 19)(I, JJ(I), JK(I), AAX(I), IIZ(I), I=1, MM) 19 FURMAT(113,19,110,2F14.6,) WRITE(W,60) 60 FORMAT(///,10X,*ELEM.*,6X,*COMPR.*9X,*CX*,14X,*CY*,//// WRITE(W,65)(I,L(I),CX(I),CY(I),I=1,MM) 65 FORMAT(I13,2F12.6,F15.6) CONDICUES DE APOIO, INDICE RL IGUAL A ZERO,LIGACAO LIVRE, IGUAL A 1, RESTRINGIDA NND=3*NNJ DD 20 K=1,NND 20 RL(K)=0 WRITE(W,21) 21 FORMAT(//,10X,*LIGACOES NOS NOS*,//,10X,*NO*,3X,*LIGACAO X* *,3%,"LIGAÇAO Y",3X,"LIGACAO Z",//) D0 23 IC=1,NNRJ READ(R, 22)K, RL(3*K-2), RL(3*K-1), RL(3*K) 22 FORMAT(415) 23 WRITE(W+24)K, RL(3*K-2), RL(3*K-1), RL(3*K) 24 FORMAT(4112) CRL(1)=RL(1) DD 25 K=2,NND 25 CRL(K)=CRL(K-1)+RL(K) DO 26 I=1,MM DÖ 26 J=1,6 26 IEL(I,J)=0IF(NECL)29,30,29 29 WRITE(W, 31) 31 FORMATI//,10X, LIBERACOES DOS ELEMENTOS :,//; #1JX;*ELEM_*;2X;*DIR 1*;2X;*DIR 2*;2X;*DIR 3*;2X *,2X,*DIR 4',2X,*DIR 5',2X,*DIR 6',///) DU 27 ICC=1,NECL READ(R,28)I,(IEL(I,J),J=1,6) 28 FORMAT(715) WRITE(W, 32) I, (IEL(I, J), J=1,6) 32 FORMAT(115,617) 27 CONTINUE

107 -

C

С

```
*AML(1,6)
   18 FORMAT(15,6F10.3)
   19 WRITE(W,20)I,AML(I,1),AML(I,2),AML(I,3),AML(I,4),AML(I,5)
     *.AML(1.6)
   20 FORMAT(115,6F12.6)
      CALCULU DO VETUR DE CARGAS
   21 DO 45 [=1.M
      J1=3*JJ(1)-2
      J2=3*JJ(1)-1
      13=3*11(1)
      J4=3≠JK(I)-2
      J5=3+JK(I)-1
      J6 = 3 \times JK(1)
      AE(J1) = AE(J1) - AML(I, 1) + CX(1) + AML(I, 2) + CY(I)
      AE(J2)=AE(J2)-AML(1,1)*CY(I)-AML(1,2)*CX(I)
      AE(J3)=AE(J3)-AML(I,3)
      AE(J4)=AE(J4)-AML(1,4)*CX(1)+AML(1,5)*CY(1)
      AE(J5)=AE(J5)-AML(I,4)*CY(I)-AML(I,5)*CX(I)
   45 AE(J6)=AE(J6)-AML(1,6)
      DO 47 K=1.ND
      IF(RL(K))47,46,47
   46 J=K-CRL(K)
      AC(J) = A(K) + AE(K)
   47 CONTINUE
      WRITE(W,60)
      RETURN
      END
// DUP
*DELETE
                     HEVC
                                       1634
STORE
             WS
                 UA
                     HEVC
                                       1E34
// FOR
#ONE WORD INTEGERS
VLIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE HMMR(MM, NND, JJ, JK, AAX, IIZ, EE, L, CX, CY,
     *RL,CRL,S,NN,NEL,IEL,EN)
      REAL L(40), IIZ(40)
      INTEGER RL(80), CRL(80), ROW, COL
      DIMENSION AAX(40),CX(40),CY(40),JJ(40),JK(40),S(80,80)
     ★,SH(6,6),SMR(6,6),SMD(6,6),KI(6),NEL(40),IEL(40,6),EN(40)
      ZERAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ ELASTICA
С
      DO 1 I=1,NND
      DO 1 J=1,NND
    I S(I,J)=0.
      DO 11 I=1,MM
С
      ZERAGEM DA MATRIZ SM
      DD 2 J=1.6
      DO 2 K=1.6
    2 SM(J.K)=0.
Ű
      OBTENCAD DA MATRIZ SM
      V=EE*IIZ(1)
```

```
Z = -EN(I)/L(I)
   SM(1,1) = EE * AAX(I)/L(I)
   SM(2,2)=V*12./L(I)/L(I)/L(I)+1.2*Z
   SM(3,2)=V*6./L(I)/L(I)+0.1#Z*L(I)
   SM(3,3)=V*4./L(I)+2.*Z*L(I)*L(I)/15.
   SM(4, 1) = -SM(1, 1)
   SM(4,4)=SM(1,1)
   SM(5,2)=-SM(2,2)
   SM(5,3) = -SM(3,2)
   SM(5,5)=SM(2,2)
   SM(6,2)=SM(3,2)
   SM(6,3)=V*2./L(I)-Z*L(I)*L(I)/30.
   SM(6,5)=-SM(3,2)
   SM(6,6)=SM(3,3)
   DO 3 J=1+6
   00 3 K=1,6
 3
   SM(J,K) = SM(K,J)
   IF(NEL(1))14,30,14
14 00 18 KL=1.6
   IF(IEL(1,KL))15,18,15
15 DU 16 K=1,6
   DU 16 J=1,6
16 SMR(K,J)=SM(K,J)
   DÜ 17 K=1,6
   DO 17 J=1,6
17 SM(K,J)=SMR(K,J)-SMR(K,KL)*SMR(KL,J)/SMR(KL,KL)
18 CONTINUE
   OBTENCAD DA MATRIZ SMR
30 DB 40 K=1.2
   DO 40 J=1.6
   SMR(J,3*K-2)=SM(J,3*K-2)*CX(I)-SM(J,3*K-1)*CY(1)
   SMR(J,3*K-1)=SM(J,3*K-2)*CY(I)+SM(J,3*K-1)*CX(I)
43 SMR(J,3*K)=SM(J,3*K)
   OBTENCAO DA MATRIZ SMD
   DO 4 K=1,6
   D0 4 J=1,2
   SMD(3*J-2,K)=CX(I)*SMR(3*J-2,K)-CY(I)*SMR(3*J-1,K)
   SMD(3*J-1;K)=CY(1)*SMR(3*J-2;K)+CX(1)*SMR(3*J-1;K)
 4 SMD(3*J,K)=SMR(3*J,K)
   MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ ELASTICA
   K1(1) = 3 \times JJ(1) - 2
   KI(2)≠3*JJ(I)-1
   KI(3)=3*JJ(I)
   KI(4)=3*JK(I)-2
   KI(5)=3*JK(I)-1
   KI(6)=3#JK(I)
   MK=0
 5 MK=MK+1
   KII=KI(MK)
   IF(RL(KII))10,6,10
```

C

C

C

- 110

6 ROW=KII-CRL(KII) S(ROW, ROW) = S(ROW, ROW) + SMD(MK, MK) IF(MK-6)7,11,11 7 KK=MK+1 DO 9 J=KK+6 KII=KI(J) IF(RL(KII))9.8.9 8 COL=KII-CRL(KII) S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(MK,J) 9 CONTINUE 10 IF(MK-6)5,11,11 11 CONTINUE DU 12 J=1,NND DD 12 K=1,NND S(K,J) = S(J,K)12 RETURN END // DUP *DELETE HMMR 1634 * STORE 1E34 ₩S UA HMMR // FUR **¤ONE WORD INTEGERS** #LIST SOURCE PROGRAM SUBROUTINE HRSCD(S,A,N,DET,IA,W,KR,NSD) INTEGER W DIMENSION S(80,80),A(80),H(80) NSD=0IA≖Û KR=0 DET=1.0E-10 00 50 L=1,N IF(ABS(S(L,L))-0.1E-05)70,70,5 5 DETT=DET*S(L,L) IF(ABS(DETT)-1.0E+10)51,52,52 52 KR=KR+1 DET=DET*1.0E-10*S(L,L) GO TO 53 51 DET=DETT **5**31 1P(DET)82,81,81 82 NSD=1 81 DO 10 J=L,N $H{J}=S{L,J}/S{L,L}$ 10 B=A(L)/S(L,L) KP.=L+1 00 20 K=KP.N DO 30 J=K,N 3) S(K,J)=S(K,J)-S(L,K)*H(J) 20 A(K)=A(K)-S(L,K)*B DO 40 IC=L.N 4⊝ S(L,IC)=H(IC)

50 A(L)=8 DO 60 IC=2,N L=N-IC+1LP = IC - 1DD 60 K=1,LP NP = N - K + 16) A(L)=A(L)-S(L,NP)*A(NP) GO TO 80. 70 IA=1 WRITE(W,75)L 75 FORMAT(//,10X, "ELEM. S/ A DIAGONAL NULD OU M/ PEQU, ",/ \$10X, LINHA NO. ', 15, /, 10X, 'ELEMENTOS DA LINHA' WRITE(W,78)(S(L,J),J=1,N) 78 FORMAT(10X,6815.7) 8) RETURN END // DUP **»DELETE** HRSCD 1834 *¥STORE* **พ**ร HR SCD 1E34 UA // FOR HONE WORD INTEGERS **#LIST SOURCE PROGRAM** SUBROUTINE HCFA(M, D, JJ, JK, CX, CY, AX, L, E, EN, RL, N, ND, W) REAL L(40) INTEGER RL(80),W DIMENSION EN(40),CX(40),CY(40),JJ(40),JK(40),D(80), *P(50),AX(40) J=N+1 00 11 K=1,ND JE=ND+1-K IF(KL(JE))10,9,10 9 4=4-1 P(JE)=D(J)GO TO 11. 10 P(JE)=0. 11 CONTINUE WRITE(W,21) 21 FORMAT(///,10X, 'DESLOCAMENTOS',///) NF=ND/3 DO 25 I=1,NF WRITE(W,24)I,P(3*I-2),P(3*I-1),P(3*I) 24 FORMAT(115,3F15.7) 25. CONTINUE DU 20 I=1.M J14=3*JJ(1)-2 J24=3*JJ(1)-1 K1A=3*JK(I)-2 K24=3*JK(I)-1 EN(1)=E*AX(1)/L(1)*(CX(1)*(P(J1A)-P(K1A))+CY(1)*(P(J2A)

#-P(K2A)))

- 112 -

2) CONTINUE RETURN END // DUP HCFA 1E34 #DELETE STORE UA HCFA 1E34 MS // FOR ⇒ONE WORD INTEGERS *ALIST SOURCE PROGRAM* %IUCS(2531 READER,1403 PRINTER) REAL L(40), IZ(40) INTEGER RL(BJ), CRL(BO), R, W DIMENSION_JJ(40),JK(40),CX(40),CV(40),AX(40),NEL(40); #16L(40,6),AC(80),EN(80),P1(80),S(80,80),P2(80) R≠3 ₩=5 22 READ(R.21)NP 21 FORMAT(15) CALL GILCA(RL,CRL,JJ,JK,CX,CY,AX,IZ,L,M,E,ND,N,NEL,IEL,R,W) CALL HEVC(ND,M,JJ,JK,CX,CY,AC,RL,CRL,R,W) READ(R,1)ALFA, ALFA1, DET1 1 FORMAT(2F10.4,E11.4) READ(R, 20)NKS, NKPP, PRD1, PRD2 2) FORMAT(215,2E10.1) NKP=0 16 NKP=NKP+1 IF(NKP-NKPP)35,35,17 35 DO 2 I≠1,M 2 EN(I)=0. DO 3 I=1,ND 3 P1(I)=0. KS=0 4 KS=KS+1 3 IF(KS-NKS)19,19,13 19 WRITE(W, 18)KS 18 FORMAT(//,10X, "ITERACAD NO.", I4) CALL HMMR(M,ND,JJ,JK,AX,IZ,E,L,CX,CY,RL,CRL, #S.N.NEL, IEL, EN) DO 5 I=1.ND 5 P2(1)=AC(1)*ALFA CALL HRSCD(S, P2, N, DET, IA, W, KR, NSD) IF(1A-1)6,17,6 6 WRITE(W, 26)DET, KR 26 FORMAT(//,10X, 'DETERMINANTE', E15.4, 2X, 'KR =',13) IF(KS-1)31,30,31 30 DETI=DET KRI = KR31 KR=KR-KRI DET=DET/DETI*10.**(10*KR) KKK=0

, ·

114 -

					•					
	DO 8-	I=1,	N	•			. '		N .	`.
	V=ABS	5(P2	I)-P	1([)}						
	IF(V-	PRD1	17.7	.9						•
7	KKK=1	Ĺ						. •	-	
8	CONTI	NUE	•	1					-	
	GO TO	10	• •	• -	-					
9	KKK=C)		1.1	1.1.1					•
10	IF(KK	(K-1)	11,1	3,11					•	
- 11	CALL	HCFA	(M.P	2,JJ,JH	GCX.CI	Y, AX,L,E	E.EN.P	L.N.N	D.W)	• .
	DO 12	2 1=1	•ND	Sec. 1			•		•	
12	P1(1)	=P2(1)						•	
	GOTO	1 4				-				
13	TEINK	(P-1)	60.6	0.74						•
60	IFIDE	T)70	.74.	74	•				•	
74	TEOP	T)85	.75.	75			•	11		
75	TEINS	0-11	85.8	0.80			- 19 A			
85	WRITE		41NK	р р					•	
14		τι//	1/.1	0 X. I PAR	AMETRO		11.12.	57.10	ET / I	167011
	WRITE	:/w.1	5141	EALDET						
15	ENDAN	T1//	E29	3.615	41					
	WOITE	: LW . 1	001	• > • L = > •	171					
100		T1//	11.1	^¥.!***	*****		*****	e shë she she she she s		***1
TOO	TEINE		T 1-D	002122	27 22			*****	*****	· • · • ·
. 22				NULIJE					· .	
	DCT2-	DET	Α							
·	CADA-	NCT?	-057	• •			-	•		
·	DETA		2-41	4				•		
• ·	DCIA-	- 8 C A G	2-AL	FA1 F82-061				· · ·		· · ·
	. ALFA-	-ALCAP	878L) 89	FAZ-UCI	240514	CI/CAPA				
	ALFAL DET1-	DETO	AZ			· .	.	:		
•						· · ·		· • •		
	- GO 10	10		- 4			· .			
34	WKIIE		4JAL	FA Na Artic	فريار وفريك وقريان	• د د د د د د د				
- 34	FUKMA		//+19	JX,*****	******	*******	· • • • • • • •	****	*****	** •
	#/// 1 l	0	PAKAI	MEIKU (RITICU	1.1210				
70	WKILL	LW+9	01							
.Añ			/+10/	Х 🛉 ЧРАКА	MEIKU	ESCULHI		LUK Q		'K1'+-
	**ME18	0.1	7+10	K, PARA	MEIKU	CRITICE	J-051	/ DEIL	J NEG	
			~ .							
80	WKIIE	(W, 9	51							
. 90	FURMA		7,10	X, PAR	MEIKU	ESCOLHI	00,00	DETEN	(MINAL	JU • • •
•	* MALL	IK QU	E.U.	SEGUNDU	PARAM	IETRO CR	UTIÇO	••//)		
	WRITE	(W, 1	4] NK			•				· .
· • • • •	WRITE	:{W+1	21 AL	FA,DET						
17	TECNP	122+	29+2	2				· ·	• .	
29	CALL	EXIT				· · · ·		· .		
	END				•			• •		
/_DU	P					· .	·	•		• *
DELE	TË	·	•	HPAEE		163	34			•
STOR	EÇI	WS	UA	HPAEE		183	34			

ESTRUTURA NUMERO 1.

HUMBERTO PEREIRA

DADOS DA ESTRUTURA

M	NJ	NR	NR J	NECL	Ň	E
19	20	21	11	9	39	0.100E 04

COORDENADAS DOS NOS

NÜ	X	Y
1	0.000	1.000
2	1.000	1.000
ذ	2.000	1.000
4	3.000	1.00 ૨
5	4.000	1.000
б	5.JJJJ	1.000
1	6.000	1.000
8	7. 000	1.000
9	8+000	1.00 0
10	9.000	1.000
11	10.000	1.00)
12	1.000	0.000
13	2.333	0 •00 0
14	3.000	∂.00 €
15	4.000	- 0 .00 0
16	5.000	0.000
17	6.700	0.000
18	7.000	0.000
19	8.000	0.00°
2 0	9.000	0.000

INCIDENCIA E PROPRIEDADES GEOMETRICAS DOS ELÉMENTOS

TLEM	. HO IHI.	NO EIN.	AREA	HOM. DE INER.
1	1	2	1.000000	0.100000
Ž	2	3	1.00.000	0.100000
3	3	• 4	1.000000	0.100000
4	• 4	5	1.000000	0.100000
5	5	6	1.000000	0.100000
6	6	7	1.000000	0,100000
7	- 7	8	1.009000	0.100000
.8	8	9	1.000000	0.100000
9	9	10	1.000000	0.100000
10	10	11	1.000000	0.100000
11	2	12	9.001600	1.000000
12	3	13	0.001600	1.000000
13	4	14	0.001600	1.000000
14	5	15	0.001600	1.000000
15	6	16	0.001600	1.990000
16	7	17	0.001600	1.00000
17	8	18	0.001600	1.000000
18	9	19	0.001600	1+909099
19	10	20	0.001600	1.000000
1				·
		•		
CLEM	. COMPR	• C)	K i	CY
		• •		
			-	
1	1,00000	1.000000	0.000	000
2	1.00 0 000	1,000000	0.0.0	000
3	1.000000	1.000000	0.000	000
4	1.0000000	1.000000	0.00	0000
5	1.000000	1.000 00	0.000	000
6	1.000/00	1.000000	0.00	10 00
• 7	000000	1.000000	0.000	(C Ü O
8	1.000000	1.000000	0.000	1000
. 9	1.000000	1.000000	0.000	000
10	1-000000	1.000000	0.000	000
11	1.000333	0.000000	-1.00	0000
12	1.000000	0.0000000	-1.000	000
13	1.000000	0.0000000	-1.300	10±0
14	1.0000000	0.0000000	-1.00	000
10	1.000000	0.000.00	-1.000	000
10	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	0.000000	-1.000	000
10	1.0000000	0.000000	~1.00	040
10	1.000000	0.000309	-1.00	
19	1-000000	0.000000	-1.000	1000 m
,		-		
LIGA	OES NOS NOS			
N0	LIGACAO X	LIGACAD Y	LIGACAD Z	
	· * * · · · ·	· · ·		. •
1	- 1	1	. 0	
11	· 0	· · · · ·		

+	· 1		. U
11	0	1	0
12	· 1	1	0
13	1	1	0
1.4	1	1	. 9
		· .	·

•	•				•
15 16 17 18 19 20		1 1 1 1 1 1	0 0 0 0 0 0		
LIBERACO	ES DOS ELEME	INTOS	•		
ELEM. D	IR 1 DIR 2	DIR 3 D	IR 4 DIR 5	DIR 6	
11 12 13 14 15 16 17 18 19	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0		0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	
			D41351722722	================================	*******
DADOS DO	CARREGAMENT	0			
NLJ	NLML				
1	0		• . · ·		
CARGAS A	PEICADAS NOS	NOS		ter.	
NO	FORCAX	FOR	CA Y	MOM Z	· · ·
11	-1.0000	, 0 .0	000	0.0000	
	===================	76233888888	======================================	===================	

- 117 -

۰.

ITERACAD NO. 1

•

DETERMINANTE -

0.3666E 05 KR = 10

DESLOCAMENTOS

		and the second	
1	0.0000000	0.0000.000	0.000000
2	-0.0240003	0.0000100	0.0000000
3	-ŭ₊9489007	0.00000000	0.0100000
4	0.0720011	0.0000000	0.0000000
5	-0.0960014	0.000000	0.0000000
6	-0.1200017	0.0000303	0.0000000
7	-0.1440020	0.0000000	0.0000000
8	-0.168-023	0.000000	0.0000000
9	-0.1920025	0.0000000	0.0000000
14	-0.2160026	0.0000000	0.0000000
11	-0.2400026	0.0000000	0.0000000
12	0.0000000	0.0000000	0.0240003
13	0.0000000	0.0000000	0.048000 7
14	0.000000	0.0000000	0.0720011
15	0.0000000	0.0000000	0.096.015
16	0.00000000	0.0000000	0.1200018
17	0.000000	0.0000000	0.1440021
18	0.0000000	0.000000.0	0.1680024
19	0.3955099	0.0000000	0.1920026
20	0.0000000	0.00000000	0.2160028

ITERACAD NO. 2

DETERMINANTE D.5543E 03 KR = 10

PARAMETRE NUMERO 1 DET / DETO

24-000 0-15126-01

ITERACAD NO. 1

DETERMINANTE

0.3666E 05 KR = 10

1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	-0.3222523	0.0000000	0.000000
3	-0.0445046	0.0000000	0.00000000
4	-0.0667570	0.0000000	0.000000
5	-0.0890092	0.0000000	0.0000000
6	-0.1112615	0.0000000	0.000000
7	-0.1335138	0.0000000	0.0000000
ื่ม	-0.1557660	0.0000000	0.0000000
9	-0.1780182	0.0000000	0.000000
10	-0.2002703	0.0000000	0.0000000
11	-0.2225223	0.0000000	0.0000000
12	0.000000	0.0000000	0.0222523
13	0.0000000	0.0000000	0.0445047
14	0.0000000	0.0000000	0.0667570
15	0.0000000	0.0000000	0.0890093
16	0.000000	0.0000000	0.1112616
17	0.0000000	0.0000000	0.1335139
18 .	0.0000000	0.0000000	0.1557661
19	0.0000000	0.0000000	0.1780183
2.1	0,000,000	0.0000000	0.2002705

ITERACAD NO. 2

DETERMINANTE 0.1190E 04

190E 04 KR = 10

PARAMETRU NUMERO 2

DET / DETÓ

22.251 0-3248E-01

ITERACAD ND. 1

DETERMINANTE 0.3666E 05 KR = 10

DESLOCAMENTOS

3	0.0000000	0.0000000	0.0000000
ž.	-0.0255230	0.0000000	0.00000000
3	-0.0510460	0.0000000	0.000000
4	-0.0765690	0.0000000	0.0000000

- 119

. U

. ·	•	
0.1020919	0.0000000	0.0000000
·U.1276149	0.0000000	0.0000000
0.1531378	0.0000000	0.0000000
0.1786607	0.0000000	0.0000000
0.2041835	0.000000	0.0000000
0.2297062	0.000000	0.0000000
0.2552288	0.000000	0.0000000
0.0000000	0.0000000	0.0255230
0.000.000	0.0000000	0.0510460

13	0.000.000	0.0000000	0.0510460
14	0.000000	0.0000000	0.0765690
15	0.000000	0.000000	0.1020920
16	0.000000	0.0000000	0.1276150
17	0.0000000	0.0000000	0.1531379
18	6.0000000	0.000000	0.1786638
19	0.000000	0.0000000	0.2041836
20	0.0000000	0.0000000	0.2297064

ITERACAO NO. 2

5 6

7

8

9

10

11 12

DETERMINANTE		0.1283E	03	KR =	1
--------------	--	---------	----	------	---

PARAMETRO NUMERO 3

25+522

0.3499E-02

DET 1 DETO

10

1

ITERACAD NO.

DETERMINANTE

0.3666E 05 KR

DESLOCAMENTOS

		T	
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	-0.0259179	0.0000000	0.0000000
3	-0.0518359	0.0000303	0.000000
4	-0.0777539	0.0000000	0.0000000
5	-0.1036718	0.0000000	0.000000
6	-0.1295897	0.000000	0.0000000
7	-0.1555076	0.0000000	0.0000000
8	-0.1814254	0.000000	0.000000
9	-0.2073431	0.000000	0.000000
10	- 0.2332609	0.0000000	0.0000000

4

12	0.0000000	0.0000000	0.0259179
13	0.0000000	0.000000	0.0518359
14	0.0000000	0.0000000	0.0777539
15	0.0000000	0.0000.00	0.1036718
16	0.0000000	0.0000000	0.1295898
17	0.0000000	0.0000000	0.1555076
18	0.0000000	0.0000000	0.1814255
19	0.0000000	0.0000000	0.2073435
2 0	0.000000	0.0000000	0.2332611

ITERACAD NO. 2

DETERMINANTE 0.3521E 02

KR = 10

ĐET

PARAMETRO NUMERO

25.917

4

0.96058-03

DETO

***** ***

1

ITERACAD NO.

化合金合合的新生物医药合物合合	0 314/E ()		_ 10
VETEKMINANTE	- U agooor U	13 KK	= 10

	· ·	•	
1	0.000000	0.0000000	0.0000000
· 2	-0.0260673	0.0000000	0.00000000
Ś.	-0.0521347	0.0000000	0.00000000
4	-0.0782020	0.0000000	0.0000000
5	-0.1042694	0.0000000	0.0000000
6	-0.1303367	0.0000000	0.0000000
7	-0.1564039	0.0000000	0.0000000
8	-0.1824711	0.000000	0.0000000
9	-0.2085383	0.0000000	0.0000000
10.	-0.2346054	0.0000000	0.0000000
11	-0.2606723	0.0000000	0.00000000
12	0.000.000	0.0000000	0.0260673
13	0.0000000	0.0000000	0.0521347
14	0.0000000	0.0000000	0.0782021
15	0.0000000	0.0000000	0.1042694
16	0.0000000	0.0000000	0.1303368
17	0.0000000	0.0000000	0.1564040
18	0.000.000	0.0000000	0.1824713

• 122 -

		•	
19	0.0000000	0.0000000	0.2085385
20	0.0000000	0.0000000	0.2346057

ITERACAD NO. 2

DETERMINANTE 0.1961E 01 KR = 10

PARAMETRU NUMERO 5 · DET / DETO

26.066 0.5349E-04

PARAMETRO CRITICO .

26.066963

COPPE/UFRJ - PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL ANALISE DE ESTABILIDADE ELASTICA DE PURTICOS PLANOS

ESTRUTURA NUMERO 2.

HUMBERTO PEREIRA

DADOS DA ESTRUTURA

м	NJ	NR	NR J	NECL	'N	. 1	Ē
9	8	6	2	0	18	0.100E 0	5

COORDENADAS DOS NOS

NO.	X	· . Y
1	0.000	0.000
2	0.000	10.000
3	0.000	20.000
4	0.000	30.000
5	10.000	0.000
6	10.000	10.000
7	10.900	20.000
8	10.000	30.000

INCIDENCIA E PROPRIEDADES GEOMETRICAS DOS ELEMENTOS

ELEM. NO INI, NO FIN. AREA MOM. DE INEF	ι.
1 1 2 10.000001 0.010000	
2 2 3 10.000001 0.010000	
3 3 4 10.000001 0.010000	
4 5 6 10.000001 0.010000	
5 6 7 10.00001 0.010000	
6 7 8 10.000001 0.010000	
7 2 6 10.000001 0.010000	
8 3 7 10.000001 0.010000	
9 4 8 10.000001 0.010000	

ELEM.	COMPR.	C	x		CY		
	•	•	•				
1	10.000001	0.000000) 1	L.0000	00		
2	10.000001	0.000000) .]	1.0000	000		
3	10.000001	0.000000		L.0000	000	•	•
4	10.000001	0.000000		L.9000 L.9000	100 100	•	
6	10.000001	0.000000) 1	.0000	000		
7	10.00001	1.000000) (0.000	000		
8	10.000001	1.000000) (0000+0000	00		
9	10.000001	1.000000) (3 . 0000	000		-
LIGAC	DES NOS NOS		•	•		·	
NO 1	LIGACAO X L	IGACAD Y	LIGACA	NO Z			. •
				•			
1	1	1		1			
5	1	1		1			
							-
		*********		:#===z	.=====	=========	****
	•		***		**		
	· .						
ត់ភាពទ		NTO	•			· .	
DADUS	DO CARREDANE		•				
						•	
NEJ	NLML						
2	0						
· · ·							
CARGA	S APLICADAS N	OS NOS					
C.HICOAL							
NO			CORC .		. •		
NU	FURLA	X	FURLA Y			MUM Z	
`.							
4	0.000	0.	-1.0000		·	0.0000	
8	0.000	1 0 	-1.0000			0.0000	
	i.		2				
		432 9 2825		*****		z =,======	====
ITEO							
IIEKA	LAU NU. L						

-

124

DETERMINANTE 0.3150E 09 KR = 3

DESLOCAMENTOS

	and the second	•	•
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	-0.0004000	-0.0000000
3	0.0000000	-0.0008000	-0.000000
4	0.0000000	-0.0012000	-0.0000000
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	-0.0004300	-0.0000000
7	0.0000000	-0.0008000	-0.00000000
8	0.0000000	-0.0012000	-0.0000000

ITERACAD NO. 2

DETERMINANTE	0.4274E	Q7	KR	=	3

PARAMETRU NUMERD 1

' DET / DETO

4.000 0.1356E-01

ITERACAD NO. 1

DETERMINANTE 0.3150E 09 KR = 3

	0.0000000	0.0000000	0.00000000
2	0.00000000	-0.0004055	-0.0000000
3	0.000.000	-0.0008110	-0.00000000
4	0.0000000	-0.0012165	-0.00000000
5	0.0000000	0.0000000	0.00000000
6	0.0000000	-0+0004055	-0.0000000
7	0.0000000	-0.0008110	-0.0000000
8 - 1	0.000000	-0.0012165	-0.00000000

			• •
	.	•	
	• • •	· · ·	
	-		
DETERMINAN	TE 0.374	2E 07 KR = 3	
		•	1
•	1		
		•	•
PARAMETRO	NUMERO 2	DET / DETO	
			•
	4.055	0.1188E-01	
	•		
		-	
****	****	****	•
			· · · ·
ITERACAD N	0. 1		
		*	
DETERMINAN	TE 0.315	DE 09 KR = 3	•
		· · ·	· · ·
•		•	
GESLOCAMEN	TOS		
DESECONNEN	100	•	
1	0.000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	-0-0004442	-0.0000000
2	0.00000000	-0-0008885	-0.0000000
	0.0000000	-0.0013327	-0.00000000
. 4	0.00000000	0.0000000	0.0300000
2	0.0000000		
0	0.0000000	-0.0004442	-0.0000000
1	0.000000		-0.0000000
8	0.0000000	-0.0013327	-0.0000000
		* 1 2	
	o 10		
HERACAU N	U• Z		
	T E 0.3E/	- vo o	•
DETERMINAN	IE 0.156	KR = 3	
· · ·			i.
	· ·		
nananada			•.
PARAMETRO	NUMERU	DET 7 DETO	
`			• •
		· · · · · · · · ·	
· · ·	4.442	0.4960E+03	

126

-

**** *****

PARAMETRO CRITICO

4.442559

COPPE/UFRJ - PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL Analise de estabilidade elastica de porticos planos

ESTRUTURA NUMERO 3.

HUMBERTO PEREIRA

DADOS DA ESTRUTURA

M	NJ	NR	NR J	NECL	Ň	E
12	13	6	2	· 0	33	0.100E 07

LOORDENADAS DOS NOS

NO	X	, Y
1	0.000	0.000
2	0.999	1.427
3	2.232	2.660
4	3.660	3.660
5	5.240	4.396
6.	6.923	4.848
7	8.660	5.000
8	10.396	4.848.
. 9	12.080	4.396
19	13.660	3.660
11	15.088	2.660
12	16.320	1.427
13	17-320	0.000

INCIDENCIA E PROPRIEDADES GEOMETRICAS DDS ELEMENTOS

ELEM.	NO INI,	NO FIN.	AREA	MUM. DE INER.
1	· <u>1</u>	2	0.010000	0.001000
2	2	3	0+010000	0.001000
3 .	3	4	0.010000	0.001000 .
· 4	4	5	0.010000	0.001000
5	5	. 6	0.015000	0.001000
6	. 6	7	0.01.000	0.001000

7 8 9 10 11 12	7 8 9 10 11 12	8 9 10 11 12 13	0.010000 0.010000 0.010000 0.010000 0.010000 0.010000	0.001000 0.001000 0.001000 0.001000 0.001000 0.001000
ELEM.	COMPR.	· . · · · · ·	сх	CY
• • •				
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 LIGACON NO L	1.743186 1.743018 1.743085 1.743108 1.743130 1.743130 1.743130 1.743185 1.743186 1.743186 1.743186 1.743186 1.743186 1.743186 1.743186 1.743186 1.74318 1.74318 1.74318 1.74318	0.57360 0.70710 J.81913 0.90632 0.96591 0.99619 0.96591 0.90632 0.81913 0.70710 0.57360	4 0.819 6 0.707 2 0.573 4 0.422 8 0.258 6 0.087 6 -0.387 8 -0.258 4 -0.422 2 -0.573 6 -0.707 5 -0.819 LIGACAD Z 1 1	9132 7107 3604 2583 3848 7142 7142 3848 2583 36004 7107 9132

· · · · · ·				
DADOS	DO CARREGAN	IENTO		
NLJ	NLML	 		•
11	0	· • •		

CARGAS APLICADAS NOS NOS

NO FORCA X FURCA Y

MOM Z

2	2.6739	-2.2437	0.0000
3	2.2437	-2.6739	9.9900
4	1.7453	-3.0230	 0.0000
5	1.1738	-3.2801	0.000
6	0.6061	-3.4376	0.00
7	0.0000	-3.4906	0.00
8	-0.6061	-3.4376	0.0000
9	-1.1938	-3.2801	. 0.0000
10	-1.7453	-3.0230	0.000
11	-2-2437	-2.6739	0.0000
12	-2.6739	-2,2437	0.0000
			. ·

ITERACAD NO. 1

DETERMINANTE 0.1850E 06

DESLOCAMENTOS

1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0038531	-0.0360998	-0.0250269
3	-0.0240217	-0.0947717	-0.0369135
4	0.0399780	-0.1648344	-0.0377907
5	0.0409298	-0.2308402	-0.0300956
6	0.0255641	-0.2777009	-0.0165348
7	-0.0000007	-0.2946234	-0.000003
8	-0.3255657	-0.2777019	0.0165344
9	-0.0409317	-0.2308420	0.0300953
10	-0.0399798	-0.1648363	0.0377909
11	-0.0240231	-0.0947728	0+0369141
12	-0.0938536	-0.0361002	0.0250275
13	0.0000000	0.0000000	0.000000

ITERACAD NO. 2

DETERMINANTE 0.5125E 04 KR = 10

DESLUCAMENTOS

1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	-0.0058681	-0.0305953	-0.0161274
3	0.0062757	-0.9831030	-0.0360460

130 -

KR = 10

4	0.0262965	-0.1616271	-0.0489446
5	0.0366238	-0.2517314	-0.0469344
- 6	0.0264382	-0.3248652	-0.0286758
7	0.0000016	-0.3530935	0.0000010
8	-0.0264346	-0.3248620	0.0286774
9	-0.0366199	-0.2517266	0.0469347
10	-0.0262928	-0.1616230	0.0489436
11	-9.0062732	-0.0831007	0.0360446
12	0.0058690	-0.0305947	0.0161263
13	0.0000000	0+0000000	0.0000000

ITERACAO NO. 3

DETERMINANTE 0.3424E 04 KR = 10

DESLOCAMENTOS

1	0.000000	0.0000000	0.0000000
Ż	-0.0071393	-0.0298084	-0.0148176
3	0.0036629	-0.0811220	-0.0355885
4	0.0240174	-0.1603332	~0.0502835
5	0.0357003	-0.2536611	-0.0493735
6	0.0264180	-0.3307159	-0.0305610
7	-0+0000112	-0.3607122	-0.0000066
8	-0.0264424	-0.3307370	0.0305513
9	-0.0357274	-0.2536921	0.0493718
10	-0-0240426	-0.1603604	0.0502897
11	-0.0036797	-0.0811371	0.0355983
12	0.0071336	-0.0298125	0.0148249
13	0.0000000	0.0000000	0.0000000

ITERACAD NO.

DETERMINANTE - 0.3305E 04

KR = 10

•			
1	0.0000000	0.000000	0.0000000
2	-0.0072437	-0.0297437	-0.0147100
3	0.0034491	-0.0809597	-0.0355524
4	0.0238338	+0.1602313	~0.0503977
5	0.0356318	-0.2538316	-0.0495787
6	0.0264253	-0.3312140	-0.0307168
7	-0.0000036	-0.3613514	-0.000018
8	-0.0264331	-0.3312202	0.0307137
9	-0.0356406	-0.2538415	0.0495778
10	-0.0238423	-0.1602405	0.0503995

132

ITERACAD NO. 5

DETERMINANTE

0.3295E 04 KR = 10

DESEDCAMENTOS

ł	0.0003000	0.000000	0.0000000
2	-0.0072543	-0.0297371	-0.0146986
3	0.0034255	-0.0809414	-0.0355462
.4	0.0238101	-0.1602142	-0.0504053
5	0.3356172	-0.2538365	-0.0495967
6	0-0264180	-0.3312500	+0.0307333
7	-0.0000103	-0.3614066	-0.0000058
8		-0.3312689	0.0307244
9.	-0.0356421	-0.2538647	0.0495950
10	-0.0238334	-0.1602392	0.0504109
11	-0.0034411	-0.0809553	0.0355552
12	0.0072491	-0.0297408	0.0147054
13	0-000000	0.0000000	0.0000000

KR = 10

ITERACAD NO. 6

DETERMINANTE

0.3295E 04

1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	-0.0072528	-0.0297381	-0.0147007
Э.	0.0034309	-0.0809462	-0.0355500
°, 4	0.0238194	-0.1602248	-0.0504091
5	0.0356285	-0.2538512	-0.0495978
6	0.0264288	-0.3312632	-0.0307302
7	-0.0000003	-0.3614114	0.0000000
8	-0.0264294	-0.3312628	0.0307303
9	-0-0356292	-0.2538512	3.0495974
10	-0.0233204	-0.1602256	0.0504038
11	-0.0034319	-0.03094 7 0	0.0355593
12	0.0072524	-0.0297384	0.0147012
13	0.0000000	0.0100100	0.0000000

PARAMETRO NUMERO 1 DET / DETO

8.000

0.1781E-01 ·

ITERACAD NO. 1

DETERMINANTE 0.1850E 06 KR = 10

DESLOCAMENTOS

1	0.000000	0.0000000	0.0000000
ĉ	0.0039229	-0.0367544	-0.0254807
3	0-0244573	-0-0964903	-0.0375829
4	0.0407029	-0.1678236	-0.0384760
5	0+0416720	-0.2350264	-0.0306414
6	0.0260276	-0.2827370	-0.0168347
7	-0+0000008	-0+2999665	-0.0000003
8	-0.0260294	-0.2827382	0.0168342
9	-0.0416740	-0.2350284	0.0306411
10	-0.0407049	-0.1678256	0.0384763
11	-0.0244588	-0.0964916	0.0375836
12	-0.0039235	-0.0367549	0.0254814
13	0.0000000	0.0000000	0.0000000

ITERACAD NO. 2

DETERMINANTE 0.4565E 04 KR = 10

+			
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	-0.0063153	-0.0309426	-0.0160773
3.	0.0057084	-0.0841065	-0.0365998
4	0+0261955	-0.1642656	-0.0501976
5	0.0370633	-0.2568565	-0.0484174
6	0.0269183	-U.3323227	~0.0296746
7	-0.0000027	-0.3615112	-0.0:0:0011
8	-0.0269241	-0.3323267	0.0296725
· 9	-0.0370700	-0.2568633	0.0484164
10	-0.0262021	-0.1642724	0.0501987
11	-0.0057130	-0-1841107	0.0366023

 12
 0.0063137
 -0.0309438

 13
 0.000000
 0.0000000

0.0160794

ITERACAU NO. 3

DETERMINANTE

0.2921E 04 KR = 10

DESLOCAMENTOS

i	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	-0.0077075	-0.0300791	-0-0146391
3	0.0328437	-0.0819266	-0.0360925
4	0.0236932	-0.1628345	-0.0516684
-5	0.0360555	-0.2589717	~0.0511039
6	0.0269086	-0.3387561	-0.0317500
-7	-0.0000018	-0.3698336	-0:0000009
8	-0.0269127	-0.3387594	0.0317485
9		-0.2589766	0.0511036
1)	-0.0236975	-0.1628390	0.0516693
11	-0.0028437	-0.0819292	0.0360941
12	0.0077064	-0.0300799	0.0146405
13	0.0000000	0.0000000	0.0000000

ITERACAD ND.

4

DETERMINANTE

0+2804E 04 KR = 10

DESLOCAMENTOS

1	0.0000000	0.0000000	0-0000000
2	-0.0078321	-0.0300.13	-0.0145090
3	0.0025801	-0.0817264	-0.0369418
4	0.0234599	-0.1626926	-0.0517946
5	0.0359538	-0.2591412	-0.0513431
6	0.0268973	-0.3393138	-0.0319389
7	-0.0000108	-0.3706226	-0.0000062
8	-0.0269209	-0.3393339.	0.0319294
9	-0.0359801	-0.2591714	0.0513411
10	-0. 1234845	-0.1627193	0.0518005
11	-0.0025964	-0.0817411	0.0360514
12	0.0078267	-0-0300052	0.0145161
13	0.0000000	0.000000	0.0000000

ITERACAD NO.

5

DETERMINANTE

0.2794E 04 KR = 10

DESLOCAMENTOS

1	0.0000000	0.00 00000	0.0000000
2	-0.0078384	-0.0299978	-0.0145036
3	0.0025709	-0.0317211	-0.0360451
4	0.0234596	-0.1627017	-0.0518100
5	0.3359659	-0.2591794	-0.0513616
6	0.0269148	-0.3393765	~0.0319473
7	0.0000054	-0.3706848	0.0000031
8	-0.0269031	-0.3393665	0.0319520
9	-0.)359528	-3.2591643	0.0513626
10	-0.0234473	-0.1626384	0.0518070
11	-0.0025627	-0.0817137	0.0360404
12	0.0078411	-0+0299959	0+0145000
13	0.00000000	0.0000000	0.000000

ITERACAD NO.

DETERMINANTE

0.2793E 04 K

6

04 KR = 10

DESLOCAMENTOS

1	0.0000000	0.0000.00	0.00000000
2	-0.0078394	-0.3299971	-0.0145024
- 3	0.0025685	-0.0817190	-0.0360443
4	0.0234568	-0.1626992	-0.0518102
5	D. 3359636	-0.2591781	-0.0513627
6	0.0269131	-0.3393773	-0.0319485
7	0.0000038	-0+3706873	0-0000024
8	-0.0269047	-0.3393695	0.0319522
9	-0.0359542	-0.2591664	0.0513634
19	-0.0234480	-0.1626892	0.0518078
14	-0.0025628	-0.0317136	0.0360407
12	0.0078412	-0.0299957	0.0144999
13	0.0000000	0.0000000	0.0000000

PARAMETRO NUMERO 2

RO 2

DET / DETO

8.145

0.1509E-01

ITERACAO NO.

1

DETERMINANTE

0.1850E 06 KR = 10

DESLOCAMENTOS

ł	600000000	0.0000000	0.0000000
ž	0.0043119	-0.0403984	-0.0280070
ŝ	0.0268822	-0.1069568	-0.0413091
4	0.0447385	-0.1844624	-0.0422907
5	0.0458037	-0.2583280	-0.0336793
6	02086082	-0.3107687	-0.0185037
7	-0.0000007	-3.3297563	-0'+0000002
ð	-0.0286099	-0.3107697	0.0185033
9	-0.0458055	-0.2583298	0.0336790
10	-0.0447434	-0.1844643	0.0422910
11	0.0263836	-0.1060580	0.0413097
12	-0.0043124	-0.0403988	0.0280077
13	0.0000000	0.0000000	0.00000000

ITERACAU NO. 2

DETERMINANTÉ

0.2084E 04 KR = 10

DESLOCAMENTOS

			·
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	-0.0092666	-0.0325811	-0.0153055
3	0.0015732	-0.0889240	-0.0394857
4	0.0247680	-0.1784021	-0.0576589
5	0.0391600	-0.2860298	-0.0575908
6	0.0295956	-0.3759584	-0.0359479
7	0.0000066	-0.4111503	-0.0000035
- 8	-0.0296099	-0.3759700	0.0359423
9	-0.0391760	-0-2860476	0.0575894
15.	-0.0247832	-0.1784183	0.0576623
11	0.0015835	-0.0889332	0.0394915
12	0.0092630	-0.0325836	0.0153131
13	0.00000000	0000000000	0.0000000

ITERACAD NO. 3

JETERMINANTE

0.7932E 03 KR = 10
DESLUCAMENTOS

1	0.0000000	0.0000000	0.000000
- 2	-0.0116275	-0.0310998	-0.0128261
3	-0.0033740	-0.0851018	-0.0385282
4	0.0203884	-0.1757409	-0.0601347
5	0.0373688	-0.2894462	-0.0622497
6	0.0295738	-0.3868929	-0.0395769
7	0.0000217	-0.4254634	0.0000131
8	-0.0295266	-0.3868513	0.0395965
9	-0-3373162	-0.2893844	0.0622533
10	-0.0203393	-0.1756870	0.0601222
11	0.0034062	-0.0850721	0.0385087
12	0-0116380	-0.0310922	0.0128120
15	0.0000000	0.0000000	0.0000000

UETERMINANTE	0.6865E-03	KR = 10
د. م	1	
ITERACAU NO.	4	

DESEDCAMENTOS

0+0000000	0.0000000	0+0000000
-0.0118935	-0.0309321	-0.0125445
-0.0039370	-0.0846635	-0.0384132
0.0198836	-0.1754237	-0.0604092
0.9371562	-0.2898123	-0.0627780
0.0295642	-0.3881157	-0.0399928
0.0000198	-0.4270765	0+0000118
-0.0295213	-0.3880780	0.0400106
-0.0371084	-0.2897564	0.0627811
-0.0193390	-0.1753748	0.0603980
0.0039664	-0.0846366	0.0383956
0+0119031	-0.0309252	0.0125317
0.000000	0.0000000	0.000000
	$\begin{array}{c} 0.0000000\\ -0.0118935\\ -0.0039370\\ 0.0198836\\ 0.0371562\\ 0.0295642\\ 0.0000198\\ -0.0295213\\ -0.0371084\\ -0.0193390\\ 0.0039664\\ 0.0119031\\ 0.0000000\end{array}$	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$

ITERACAD NO. 5

DETERMINANTE 0.6751E 03 KR = 10

1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	-0.0119246	-0.0309121	-0.0125107

3	-0.0040056	-0.0846088	-0.0383957
4	0.0198166	-0.1753753	-0.0604350
5	0.0371192	-0.2398342	-0.0628349
6	0.0295502	-0.3882339	-0.0400423
7	0.0000076	-0.4272476	0-0000044
8	-0.0295337	-0.3882198	0+0400490
9	-0.0371008	-0.2898129	0.0628364
10	-0.0197992	-0.1753563	0.0604309
11	0.0040173	-0.0845981	0.0383889
12	0.0119285	-0.0309094	0.0125056
13	0.0000000	0.000000	0.0000000
FERACA	0 NO• 6	•	·

DEFERMINANTE

0.6739E 03 KR = 10

DESECCAMENTOS.

ŀ	~~~ 0.000000		0.0000000	0.0000000
Ż	-0.0119352		-0.0309049	-0.0124977
3	-0.0040342		-0.0845838	-0.0383818
4	0.0197782		-0.1753367	-0.0604310
5	0.037.0825		-0.2898001	-0.0628442
6	0.0295196		-0.3882237	-0.0400598
. 7	-0.0000205	•	-0.4272683	-0.0000119
8	-0.0295641		-0.3882616	0.0400421
9	-0.0371320		-0.2898566	0+0628408
10	-0.0198246		-0.1753866	0.0604420
11	0.0940032		-0.0846118	. 0.0383998
12	0.0119248		-0.0309.23	0.0125113
13	0.0000000		0.0000000	0.0000000
				· .

PARAMETRO NUMERO

DET / DETO

8.952 0.3642E-02

1

3

ITERACAD NO.

DETERMINANTE

0.1850E 06 KR = 10

1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0 . J044355	-0.0415570	-0.0288102
3	0.0276531	-0.10 90 984	-0.0424938
4	0.0460215	-0.1897526	-0.0435036
5	0.0471173	-0.2657366	-0.0346452
6	0.0294287	-0.3196812	-0.0190344
7	-0.0000008	-0.3391619	-0.000003
8	-0.0294304	-0.3196823	0.0190340
9	-0.047i193	-0.2657384	0.0346449
10	-0.0460236	-0.1897546	0.0435038
11	-0.0276546	-0.1090997	0.0424944
12	-0.0044361	-0.0415574	0.0288109
13	0.0000000	0.00000000	0.000000

ITERACAD NO. 2

DETERMINANTE 0.1492E 04

KR = 10

DESLOCAMENTOS

1	0.000000	0.0000000	0.0000000
2	-0.0104052	-0.0329738	-0.0148441
3	-0.0001731	-0.0901132	-0.0403072
4	0.0239190	-0.1826307	-0.0602297
5	0.0396493	-0.2955429	-3.0639013
6	0.0304245	-0.3907118	-0.0382570
7	-0.0000209	-0.4281134	~0.0000119
8	-0.0304697	-0.3907500	0.0382390
9	-0.0396997	-9.2956001	0.0638976
10	-0.0239663	-0.1826815	0.0602409
11	0.0001415	-0.0901416	0.0403255
12	0.0103946	-0.0329813	0.0148579
13	0.000000	0.0000000	0.0000000

ITERACAD NO. 3

. •

DETERMINANTÉ 0.3214E 03 KR = 10

1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	-0.0132051	-0.0312109	-0.0118890
3	-0.0060701	-0.0855355	-0.0391376
4	0.0186791	-0.1793945	-0.0631634

5 6 7 8 9 10 11 12 13	0.0 0.0 -0.0 -0.0 -0.0 -0.0 0.0 0.0	375026 304060 000316 303376 374264 186077 061174 132208 000000		-0. -0. -0. -0. -0. -0. -0.	2995 4037 4451 4036 2994 1793 0854 0311 0000	459 094 484 573 166 922 997	-	0.06 0.04 0.03 0.04 0.06 0.06 0.03 0.03 0.01 0.05	64697 26030 20138 26310 64749 31459 91095 18683 30000
1 FERACAD	NO.	4	• ·				• •		
DETERMIN	ANTE	0.22	08E	03	KR	= 10	•		
DESLOCAM	ENTOS					,			
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13	$\begin{array}{c} 0 & 0 \\ -3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \end{array}$	000000 135950 069412 178103 376003 301930 001548 305280 373736 181604 067088 135181 000000	•). -0. -0. -0. -0. -0. -0. -0. -0. -0.	0000 0309 0848 1787 2997 4051 44554 3001 1791 0850 0310 0310	000 605 364 532 194 402 976 837 253 9474 9152 000		0.00 0.01 0.03 0.06 0.06 0.06 0.06 0.06 0.06 0.06	00000 14622 89021 34664 71738 32279 00906 30916 71472 35517 90392 15637 00000
ITERACAO	NO.	5		٠,				-	
DETERMIN	ANTE	0.29	97E	03	KR	= 10			
DESLOCAM	ENTOS	- - - -							
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11	0.00 -0.3 -0.00 0.00 0.00 0.00 -0.00 -0.00 -0.00 -0.00	000000 135930 068997 179244 371713 303742 000139 303440 371378 178929 069206	· · · · ·	0. -0. -0. -0. -0. -0. -0. -0. -0.	0000 0309 0348 1789 3000 4054 4474 4054 3000 1788 0848	000 649 846 930 9416 598 822 334 925 687 654		0.03 0.03 0.03 0.06 0.06 0.04 0.04 0.04 0.04 0.06 0.04 0.06 0.06	00000 14749 89588 35540 72393 32164 00083 32289 72416 35464 89465

12 13	0.013600	0 -0 0 0	.0309600 .000000	0.0114657 0.0000000
ITERACAD	NU• 6		· · ·	
DETERMIN	ANTE O.	2082E 03	KR = 10	
	•			
DESLOCAM	ENTOS	•.		· .
		· .	· · ·	
,	0.000000	. .	0000000	0.0.00000
1	-0.013507	0 – 0. D – 0	.0000000	
2	-0.0155910	-0. 1 -0	1848765	-0 0389566
4	0.017914	8 -0.	1788969	-0.0535588
5	0.037366	8 – 0.	3000473	-0-0672487
6	0.030373	3 –0.	4054811	-0.0432242
7	0.000013	2 -0.	4475112	0.0000077
8	-0.030544	7 -0	4054563	0.0432360
- 9	-0.037134	9 -0	.3000102	0.0672510
10	-0.017884	8 -0.	1788641	0.0635515
1	0.006930	1 -0,	0848582	0.0389448
12	0.013604	6 -0,	0309572	0.0114610
13	0+000000	0 - 0.	0000000	0-0000000
PARAMETR	D NUMERO 4	DET	/ DETO	
. · ·	9.209	0.11	125E-02	
· · ·				
*****	************	*****	*****	
·	* •		· .	•
ITERAC'AO	NO. 1			

DETERMINANTE

0.1850E 06 KR

= 10

DESLOCAMENTOS

ì	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0044908	-0.3420750	-0.0291693
3	0.0279978	-0.1104584	-0.0430235
4	0.0465952	-0.1921181	-0.0440459
:5	0.0477046	-0.2690494	-0.0350771

141

ь	0.0297955	-0.3236665	-0.0192718
7	-0.0000008	-0.3433901	-0.0000003
ರ	-0+0297973	-0.3236676	0.0192713
9	-0.0477067	-0.2690513	0.0350768
1.)	-0.0465973	-0.1921201	0.0440462
11	-0.0279993	-0.1104597	0+0430242
12	-0.0044914	-0.0420755	0.0291701
13	0.0000000	0.0000000	0.0000000
		-	

i	TE	RACAD	NO.	2	

DETERMINANTE 0.1254E 04 KR = 10

DESLOCAMENTOS

ı	0.0600000	0.0000000	n. 0000000
<u>з</u>	-0.0109428	-0.0331315	-0.0146086
3	-0.0010094	-0.0906030	-0.0406699
4	0.0235017	-0.1845091	-0.0614230
5	0.0398720	-0.2998796	-0.0624499
6	0.0308234	-0,3974934	~0.0393331
. 7	0+0000003	-0.4359092	0.0000005
8	-0.0308226	-0.3974920	0.0393337
9	-0.0398710	-0.2998776	0.0624499
10	-0.0235009	-0.1845078	0.0614224
11	0.0010097	-0.0906025	0.0406695
12	0.0109428	-0.0331315	0.0146085
13	0.0000000	0.0000000	0.000000

ITERACAO NO. 3

DETERMINANTE

0.1380E 03 KR = 10

	÷ .		
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	-0.0139948	-0.0312047	-0.0113731
3	-0.3074768	-0.0855612	-0.0393411
4	0.0176941	-0.1808388	-0.0645604
5	0.0374087	-0.3040266	-0.0684956
6	0+0306873	-0.4114458	-0.0440968
7	7 0+0000445	-0.4543409	-0.0000256
8	-0.0307836	-0.4115278	0.0440579
9	-0.0375161	-0.3041496	0.0684876
10	-0.0177950	-0.1809479	0.0645846
11	0.0074097	-0.0856221	0.0393805
12	0.0139725	-0.0312206	0.0114025

13

0.0000000

0.0000000

ITERACAO NO.

DETERMINANTE

0.4078E 02 KR = 10

BESLOCAMENTOS

1	0.000000	0.0000000	0.0000000
2	-0.0144740	-0.0308937	-0.0108382
З	-0.0085823	-0.0846595	-0.0390003
4	0.0165267	-0.1798996	-0.0648545
5	0.0366419	-0.3040239	-0.0693036
6	0.0302680	-0.4128752	-0.0448744
7	-0.0004195	-0.4566926	-0.0002451
8	-0.0311755	-0.4136548	0.0445057
9	-0.0376534	-0.3051893	0.0692306
ìΰ	-0.0174756	-0.1809289	0.0650850
11	0.0079522	-0.5852313	0.0393721
12	0.0142655	-0.0310419	0.0111134
13	0.0000000	0.0000000	0.0000000

ITERACAD ND. 5

DETERMINANTE

0.2936E 02

2 KR = 10

DESLOCAMENTOS

	•		
ì	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	-0.0146409	-0+0307790	-0.0106304
3	-0.0393432	-0.0842544	-0.0387677
4	0.0153954	-0.1792570	~0.9647745
5	0.0360297	-0.3034311	-0.0694438
6	0.0297531	-0.4126622	-0.0451620
. 7	-Ŭ.ĴuĴ8939	-0.4569954	-0.0005232
8	-0.0316871	-0+4143259	0.0443755
9 · `	-0.0381852	-0.3059168	0.0692894
10	-0-0179168	-0.1814504	0.0652668
11 .	0.0077018	-0.0854721	0.0395601
12	0.0141973	-0.0310944	0.0112161
13	0.0000000	0.0000000	0.00000000

ITERACAD ND.

6

DETERMINANTE

0.2778E 02 KR =

R = 10

DESLOCAMENTOS

1	0.0900000	0.0000000	0.0000000
Ź	-0.0147300	-0.0307159	-0.0105139
3	-0.0093086	-0.0340145	-0.0386147
4	0.0155017	-0.1788334	-0.0646857
5	0.0356159	-0.3029644	-0.0694829
6	Û. 0293853	-0.4123678	-0.0453193
7	-0.0012338	-0.4570243	-0.0007222
8	-0.0320545	-0.4146642	0.0442335
9	-0.0385909	-0.3063957	0.0692698
10	-0.0182913	-3.1818608	0.0653658
11	0.0074578	-0.0856947	0.0397085
12	0.0141181	-0.0311510	0.0113218
13	0.00000000	0.0000000	0.000000

0.7

PARAMETRO NUMERO 5

DET / DETO

9.324

9.15018-03

~****

PARAMETRÓ CRITICO

9.324172

BIBLIOGRAFIA

- TIMOSHENKO, S.P. e GERE, J.M. Theory of Elastic Stability 2 ed., McGraw-Hill, 1961.
- 2 RITZ, W. Uber eine neue Methode zur Lösung gewisser Varions probleme der Mathematischen Physik - Zeitschrift für Reine und Angewandt Mathematik, 1909.
- 3 TREFFTZ, E. Die Bestimmung der Knichlast gedrückter, rechteckiger Platten - Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 15, 1935.
- 4 BUDIANSKY, B. e PAI C. HU The Lagragian Multiplier Method of Finding Upper and Lower Limits to the Critical Stress ses.
- 5 ZIEGLER, H. Principles of Structural Stability Blaisdell Publishing Company, 1968.
- 6 LEIPHOLZ, H. Stability Theory Academic Press, 1970.
- 7 GELFAND, I.M. e FOMIN, S.V. Calculus of Variations Prentice Hall, 1963.
- 8 SYNGE e GRIFFITH Principles of Mechanics McGraw-Hill, 1948.
- 9 TONG, K.N. Theory of Mechanical Vibration John Wiley and Sons, 1960.
- 10 LANGHAAR Energy Methods in Applied Mechanics John Wiley and Sons, 1962.
- 11 TOTTENHAM, H. e BREBBIA, C. Finite Element Techniques in Structural Mechanics - Stress Analysis Publishers,
- 12 ZIENKIE. 3, O.C. The Finite Element Method in Engineering Science - McGraw-Hill, 1971.
- 13 MARTIN, H.C. On the Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems-Proceedings of Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson, Ohio, 1965, pp 697-714.

- 14 GALLAGHER, R.H. e PADLOG, J. Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis - AIAA Journal, vol. 1, nº 6, June 1963, pp 1437-1439.
- 15 GALLAGHER, R.H., GELLATLY, R.A., PADLOG, J. e MALLETT, R.H. -A Discrete Element Procedure for Thin-Shell Instability Analysis - AIAA Journal, Vol. 5, nº 1, January, 1967, pp 138-145.
- 16 PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of Matrix Structural Analysis -McGraw-Hill, 1968.
- 17 DONG, S.B. e WOLF Jr., J.A. Stability Analysis of Structures by a Reduced System of Generalized Coordinates - Ins titute Journal Solids Structures - Vol. 6, 1970, pp 1377 -1388.