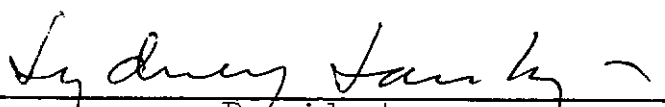
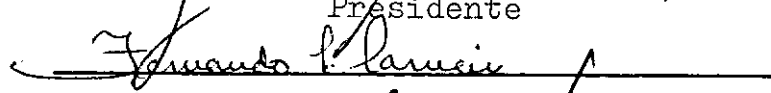




ESTUDO DE MEMBRANAS ELÁSTICAS  
QUADRADAS SUPORTADAS  
PELOS VERTICES

AUGUSTO BENEDITO OTONI NETO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS  
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

  
Presidente  
  
  


RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
JANEIRO DE 1973

-ii-

Pelo incentivo e compreensão

em todos os momentos,

ao meu pai

-iii-

Agradeço aos professores e amigos

SIDNEY M. GOMES DOS SANTOS

e

YOSIAKI NAGATO

pela ajuda prestada na confecção deste trabalho

\* \* \*

## S I N O P S E

Este trabalho tem por objetivo estudar o comportamento de uma membrana quadrada elástica suportada pelos vértices quando sob a ação de carregamentos uniformemente distribuídos.

É apresentada a formulação matemática do problema, seguida da descrição do ensaio realizado em um modelo experimental, construído nos laboratórios da COPPE.

São indicados os resultados das deflexões e das tensões em vários pontos da membrana, sendo esses analisados sob o ponto de vista da Teoria Matemática da Elasticidade.

É apresentada a obtenção do módulo de elasticidade longitudinal do material da membrana através de ensaios em laboratório e o diagrama tensão-deformação do mesmo.

## S Y N O P S I S

This work has the purpose of study the behaviour of an elastic square membrane supported by the vertex, under the action of uniform loads.

The mathematical formulation of the problem is set down, followed by the description of the experiment with a model built in one of COPPE'S laboratory.

The results of deflection and stresses on several points of the membrane are shown and analysed through the Theory of Elasticity.

It is also presented an easy way to find the longitudinal modulus of elasticity of the membrane material through laboratory experiments and it is plotted a strain-stress curve of this material.

\* \* \*

Í N D I C E

Pág.

CAPÍTULO 1

Introdução.....	1
-----------------	---

CAPÍTULO 2

<u>Dissertação teórica</u> : obtenção das equações gerais das membranas e resolução através do uso de diferenças finitas.....	4
---	---

CAPÍTULO 3

Determinação Experimental:

3.1 - Montagem e efetivação do ensaio.....	41
3.2 - Determinação das tensões máximas na membrana.....	58
3.3 - Determinação do módulo de elasticidade longitudinal da borracha utilizada.....	65

CAPÍTULO 4

Conclusões.....	72
-----------------	----

<u>SIMBOLOGIA</u> .....	74
-------------------------	----

<u>BIBLIOGRAFIA</u> .....	76
---------------------------	----

ANEXO (1)

Programa automático de resolução do sistema de  
equações derivados da rel. (6)

ANEXO (2)

Programa automático de resolução do sistema de  
equações derivados da rel. (9)

\* \* \*

## CAPÍTULO 1

### Introdução

O objetivo do presente trabalho foi estudar um caso corrente de membrana elástica com apoios pontuais.

Em decorrência da necessidade urgente em que se acham envolvidos os nossos técnicos de procurar e pesquisar novos materiais para soluções mais práticas e baratas no campo da construção civil, um novo caminho nos é apresentado: a utilização de membranas como estruturas.

Ser-nos-ia difícil apresentar todas as vantagens que esse tipo de estrutura oferece.

Enumeremos algumas como, por exemplo, o pequeno peso em relação ao das estruturas correntes, a facilidade de transporte do material até a obra, a possibilidade de vencerem grandes vãos, o baixo custo de montagem e outras de igual importancia.

Logicamente, como toda regra tem exceção, existem alguns problemas que terão de ser solucionados no futuro, como, por exemplo, a dificuldade no sistema de drenagem quando usamos a membrana como cobertura, pois nesse caso toda água de chuva tende a se escoar para o centro da mesma e somos obrigados a usar um dreno central que esteticamente deverá ser bem estudado para não prejudicar a obra.

Outro problema que nos é apresentado se refere aos



efeitos dinâmicos que o vento pode exercer sobre esse tipo de estrutura. Parece-nos que, quando esse efeito de vento sobre as membranas for bem estudado e solucionado, a cobertura de grandes vãos utilizando membranas será, sem dúvida, o método mais simples e econômico que o projetista terá a sua disposição.

As membranas têm sido utilizadas por muitos povos no decorrer da história. Os árabes a usam constantemente por ser barata, rápida de se armar e de fácil transporte. Na construção dos pavilhões da Vila Olímpica de Munique utilizou-se uma estrutura funicular que, mesmo não sendo uma membrana, provou a viabilidade de obras diferentes das rotineiras.

Na era dos grandes empreendimentos e da fabricação em série é indispensável que os engenheiros olhem para novos horizontes e procurem através da técnica materiais e métodos mais aprimorados, mais industrializados e de menor custo.

Nesse trabalho procuramos estudar as deflexões e as tensões que aparecerão em uma membrana elástica quadrada, suportada pelos vértices, quando sob o efeito de carregamentos distribuídos uniformemente.

Foi-nos difícil encontrar material bibliográfico relativo ao assunto, pois o problema ainda não foi bem estudado.

Apesar dessas dificuldades e da complexidade matemática das equações apresentadas, esperamos que esse trabalho seja útil a quem proventura queira continuar.

\* \* \*

## CAPÍTULO 2

Dissertação teórica: Obtenção da equação geral das membranas e resolução através do uso de diferenças finitas.

Suponhamos uma membrana elástica quadrada cuja aresta vale  $A$ , suportada pelos quatro vértices.

Consideremos que esta membrana esteja sob a ação de um carregamento uniformemente distribuído  $q$ , pequeno para que as tensões se confinem no campo hookeano.

Como a membrana e o carregamento são simétricos, ambos em relação aos eixos médios que passam pelo centro paralelos às arestas, basta-nos estudar um quarto da peça porque teremos os outros por simetria.

Dividamos, então, um quarto da membrana em 16 pontos, de maneira que a distância entre eles, medida paralelamente às arestas, valha  $a = A/6$ , conforme mostra a figura (1).

É importante notar que a escolha desse número de pontos de divisão foi totalmente arbitrária, julgando o autor que o estudo do comportamento da membrana dividida desta maneira serve para se ter uma idéia bem razoável dos fenômenos que podem ocorrer.

Tomemos dois eixos ortogonais  $X$  e  $Y$ , paralelos às arestas da membrana, de modo que  $Y$  passe por uma das arestas e  $X$  pela outra.

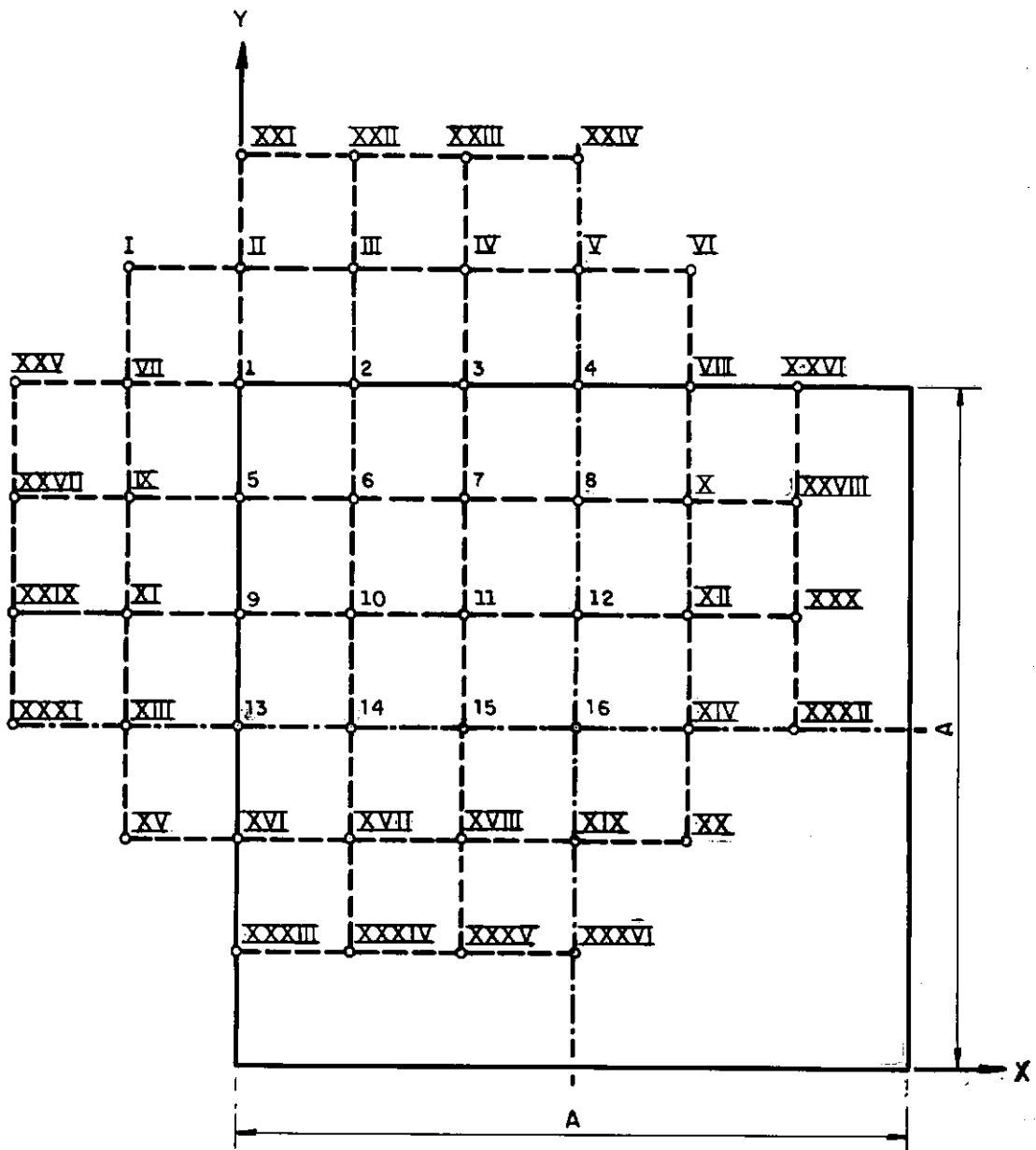


FIG. (1)

Tomemos um eixo Z, perpendicular a X e Y, passando pelo ponto de encontro dos mesmos e orientado para baixo.

O procedimento natural a ser aplicado no cálculo das deformações e tensões em qualquer ponto desta estrutura seria resolver a equação básica da membrana que a seguir apresentamos.

Tomemos um elemento infinitesimal de dimensões  $dx \cdot dy$ . Chamemos  $T_x$ ,  $T_y$  e  $T_{xy}$ , respectivamente as forças por unidade de comprimento atuantes normalmente às arestas de direção Y, normalmente às arestas de direção X e paralelamente às mesmas, conforme mostra a figura (2).

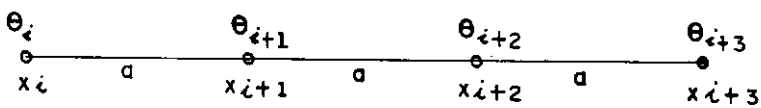
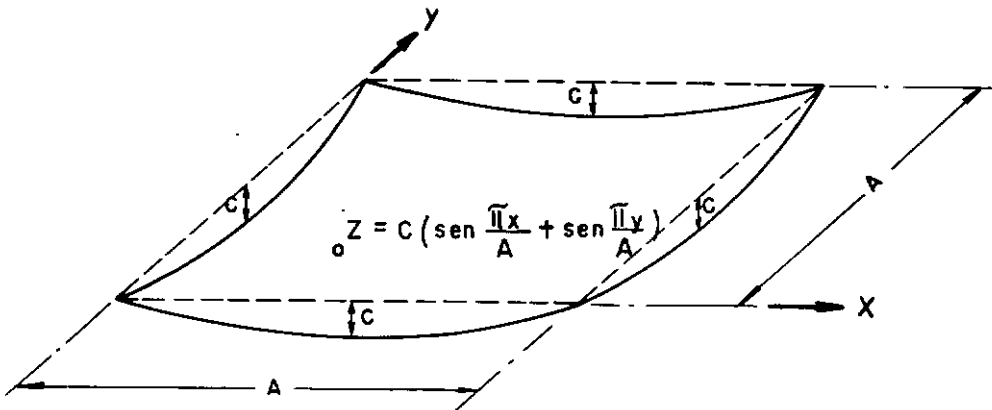
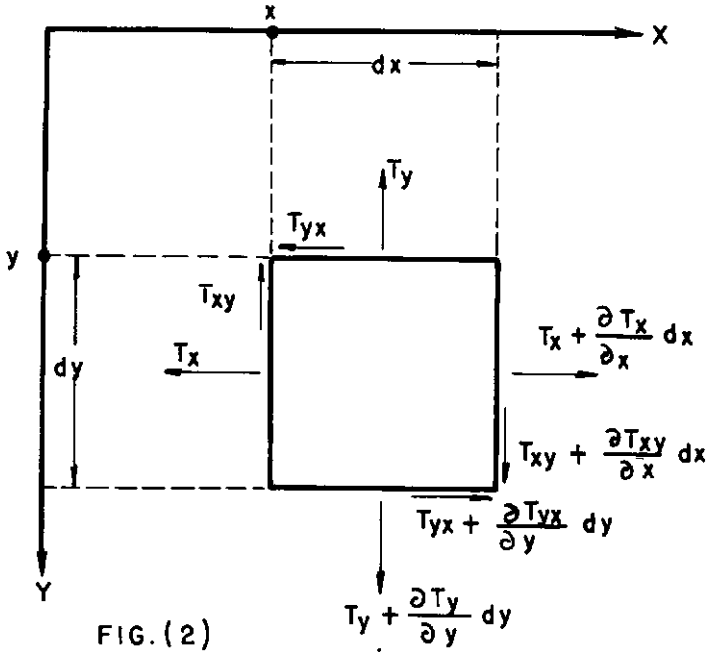
Considerando-se a peça homogênea, temos  $T_{xy} = T_{yx}$ .

Sendo  $du$ ,  $dv$  e  $dz$  as diferenciais dos deslocamentos do elemento infinitesimal considerado, segundo as direções X e Y e Z, temos as seguintes deformações relativas: (\*)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned} \right\} \text{rel. (1)}$$

---

(\*) - a dedução das expressões da rel. (1), pode ser vista nas páginas 384 e 385 do livro 4 da bibliografia.



Tomando as derivadas segundas dessas expressões e fazendo um arranjo conveniente:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} \quad \text{rel. (2)}$$

Explicitando  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  em função de  $T_x$ ,  $T_y$  e  $T_{xy}$ , chamando  $h$  a espessura da membrana,  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal,  $G$  o módulo de elasticidade transversal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson do material da membrana, temos:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{hE} (T_x - \nu T_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{hE} (T_y - \nu T_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{hG} T_{xy} \end{aligned} \right\} \quad \text{rel. (3)}$$

Usando uma função  $F$ , denominada "função-tensão" e definida por:

$$\left. \begin{aligned} T_x &= h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ T_y &= h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ T_{xy} &= -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \text{rel. (4)}$$

e introduzindo essas expressões nas relações (3), temos:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{xy} &= -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \text{rel. (5)}$$

Tomando as derivadas das relações (5) e substituindo na relação (2):

$$\boxed{\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left[ \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right]}$$

rel. (6)



A outra equação que caracteriza o comportamento da membrana pode ser deduzida da seguinte maneira:

Aplicamos as equações de equilíbrio ao elemento infinitesimal considerado:

1) Soma das forças na direção X :

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dy dx = 0$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} = 0} \quad \text{rel. (7)}$$

2) Soma das forças na direção Y :

$$\frac{\partial T_y}{\partial y} dy dx + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} dx dy = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = 0} \quad \text{rel. (8)}$$

3) Projeção das forças normais a X sobre a direção Z :  
ver figura (11)

$$- T_x dy \frac{\partial Z}{\partial x} + (T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx) \left( \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} dx \right) dy$$

desprezando-se os infinitésimos superiores à 2ª ordem:

$$T_x \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial T_x}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial x} dx dy$$

4) Projeção das forças normais a Y sobre a direção Z :

$$T_y \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial T_y}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial y} dx dy$$

5) Projeção das forças tangenciais da direção X sobre a direção Z : ver figura (12).

$$- T_{yx} dx \frac{\partial Z}{\partial x} + (T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} dy) \left( \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} dy \right) dx$$

desprezando-se os infinitésimos superiores à 2ª ordem:

$$T_{yx} \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial x} dy dx$$

6) Projeção das forças tangenciais da direção Y sobre a direção Z :

$$T_{xy} \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} dy dx$$

7) Resultante da carga q :

$$q dy dx$$

8) Soma das projeções das forças sobre o eixo dos Z igual à zero:

Somando e simplificando, como  $T_{xy} = T_{yx}$ , temos:

$$\begin{aligned} T_x \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial T_x}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial x} + T_y \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial T_y}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial y} + 2 T_{xy} \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial x} + \\ + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} + q = 0 \end{aligned}$$

Usando-se a função-tensão  $F$ , definida anteriormente:

Obteremos a segunda equação que procuravamos:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + \frac{q}{h} = 0$$

Rel. (9)

Teremos então formado o sistema de duas equações a duas incógnitas que resolverá o problema:

$$\begin{aligned} \nabla^4 F = E \left[ \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{q}{h} = 0 \end{aligned}$$

Essas equações são válidas também para placas de es-

pequena muito pequena cujos momentos fletores possam ser desprezados em comparação com as forças normais.

A resolução desse sistema pelos métodos clássicos torna-se bastante difícil e não a encontramos na bibliografia.

Tivemos então que lançar mão de orientação diversa.

Adotamos como 1º roteiro partir de uma equação da membrana deformada que satisfizesse às condições geométricas do problema, mas que também contivesse constantes a serem determinadas por condição de equilíbrio.

A expressão adotada foi:

$$Z_i = C \left( \sin \frac{\pi x_i}{A} + \sin \frac{\pi y_i}{A} \right)$$

em que  $(x_i, y_i, Z_i)$  são as coordenadas de um ponto da membrana,  $A$  as dimensões da mesma e  $C$  uma incógnita a determinar pela condição de que a reação nos pilares seja um quarto do carregamento, tudo de acordo com a figura (3).

Esses valores de  $Z$ , nos pontos considerados da malha, levados às rel. (6) transformada em diferenças finitas, permitiu-nos obter um primeiro grupo das funções  $F$ .

Esse grupo de valores levados às rel. (9) expressa em diferenças finitas, possibilitou-nos novo grupo de valores de  $Z$ , com  $C$  determinado pela condição de extremidade mencionada.

Se os novos  $Z$  coincidissem com os iniciais a superfície de partida seria a solução do problema.

Como isso não ocorreu, adotamos os novos  $Z$  como definidores de nova superfície de ensaio.

A ideia era repetir esse roteiro tantas vezes quanto necessário, o que equivale a ter admitido um pressuposto: o da convergência do processo.

De fato, tendo em vista o teorema de Kirchhoff da correspondência biunívoca entre a peça deformada e o carregamento, a superfície que satisfizesse às rel. (6) e (9), obtida por iteração na forma enunciada, deveria ser a solução do problema.

Expressemos então a rel.(6) em diferenças finitas:

Sendo  $a = \frac{A}{6}$  a distância entre os pontos da malha e  $(0,0)$  o ponto onde serão aplicadas as equações:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 F_{0,0}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F_{0,0}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 F_{0,0}}{\partial x^2 \partial y^2} = \\ & = \frac{1}{a^4} \left[ 20 F_{0,0} - 8 (F_{1,0} + F_{0,1} + F_{-1,0} + \right. \\ & \quad \left. + F_{0,-1}) + 2 (F_{1,1} + F_{1,-1} + F_{-1,1} + F_{-1,-1}) + \right. \\ & \quad \left. + (F_{0,2} + F_{2,0} + F_{-2,0} + F_{0,-2}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z_{0,0}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4 a^2} (z_{1,1} - z_{1,-1} - z_{-1,1} + \\ & \quad + z_{-1,-1}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z_{0,0}}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} (z_{1,0} - 2 z_{0,0} + z_{-1,0})$$

$$\frac{\partial^2 z_{0,0}}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} (z_{0,1} - 2 z_{0,0} + z_{0,-1})$$

Substituindo esses valores na relação(6):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^4} \left[ 20 F_{0,0} - 8 (F_{1,0} + F_{0,1} + F_{-1,0} + F_{0,-1}) + \right. \\ & + 2 (F_{1,1} + F_{1,-1} + F_{-1,1} + F_{-1,-1}) + (F_{0,2} + F_{2,0} + \\ & + F_{-2,0} + F_{0,-2}) \left. \right] = E \left[ \frac{1}{16 a^4} (z_{1,1} - z_{1,-1} - \right. \\ & - z_{-1,1} + z_{-1,-1})^2 - \frac{1}{a^4} (z_{1,0} - 2 z_{0,0} + \\ & + z_{-1,0}) (z_{0,1} - 2 z_{0,0} + z_{0,-1}) \left. \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & 20 F_{0,0} - 8 (F_{1,0} + F_{0,1} + F_{-1,0} + F_{0,-1}) + \\ & + 2 (F_{1,1} + F_{1,-1} + F_{-1,1} + F_{-1,-1}) + (F_{0,2} + \\ & + F_{2,0} + F_{-2,0} + F_{0,-2}) = E \left[ \frac{1}{16} (z_{1,1} - z_{1,-1} - \right. \\ & - z_{-1,1} + z_{-1,-1})^2 - (z_{1,0} - 2 z_{0,0} + z_{-1,0}) (z_{0,1} - \\ & - 2 z_{0,0} + z_{0,-1}) \left. \right] \end{aligned}$$

Visto que a equação geral das membranas somente é aplicável aos pontos internos nas mesmas, temos:

- para o ponto 6:

$$\begin{aligned}
 & 20 F_6 - 8 F_2 - 8 F_7 - 8 F_{10} - 8 F_5 + 2 F_1 + 2 F_3 + \\
 & + 2 F_{11} + 2 F_9 + F_{IX} + F_{III} + F_8 + F_{14} = \\
 & = E \left[ \frac{1}{16} (z_9 + z_3 - z_1 - z_{11})^2 - (z_5 - 2 z_6 + \right. \\
 & \left. + z_7) (z_2 - 2 z_6 + z_{10}) \right]
 \end{aligned}$$

- para o ponto 7:

$$\begin{aligned}
 & 20 F_7 - 8 F_3 - 8 F_8 - 8 F_{11} - 8 F_6 + 2 F_2 + 2 F_4 + \\
 & + 2 F_{12} + 2 F_{10} + F_5 + F_{IV} + F_X + F_{15} = \\
 & = E \left[ \frac{1}{16} (z_{10} + z_4 - z_2 - z_{12})^2 - (z_6 - 2 z_7 + \right. \\
 & \left. + z_8) (z_3 - 2 z_7 + z_{11}) \right]
 \end{aligned}$$

- para o ponto 8:

$$\begin{aligned}
 & 20 F_8 - 8 F_4 - 8 F_X - 8 F_{12} - 8 F_7 + 2 F_3 + \\
 & + 2 F_{VIII} + 2 F_{XII} + 2 F_{11} + F_6 + F_V + F_{XXVIII} + \\
 & + F_{16} = E \left[ \frac{1}{16} (z_{11} + z_{VIII} - z_3 - z_{XII})^2 - \right.
 \end{aligned}$$



$$- (z_7 - 2 z_8 + z_X) (z_4 - 2 z_8 + z_{12}) \Big]$$

- para o ponto 10:

$$\begin{aligned} & 20 F_{10} - 8 F_6 - 8 F_{11} - 8 F_{14} - 8 F_9 + 2 F_5 + \\ & + 2 F_7 + 2 F_{15} + 2 F_{13} + F_{XI} + F_2 + F_{12} + F_{XVII} = \\ & = E \left[ \frac{1}{16} (z_{13} + z_7 - z_5 - z_{15})^2 - (z_9 - 2 z_{10} + \right. \\ & \left. + z_{11}) (z_6 - 2 z_{10} + z_{14}) \right] \end{aligned}$$

- para o ponto 11:

$$\begin{aligned} & 20 F_{11} - 8 F_7 - 8 F_{12} - 8 F_{15} - 8 F_{10} + 2 F_6 + \\ & + 2 F_8 + 2 F_{16} + 2 F_{14} + F_9 + F_3 + F_{XII} + F_{XVIII} = \\ & = E \left[ \frac{1}{16} (z_{14} + z_8 - z_6 - z_{16})^2 - (z_{10} - 2 z_{11} + \right. \\ & \left. + z_{12}) (z_7 - 2 z_{11} + z_{15}) \right] \end{aligned}$$

- para o ponto 12:

$$20 F_{12} - 8 F_8 - 8 F_{XII} - 8 F_{16} - 8 F_{11} + 2 F_7 +$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 F_X + 2 F_{XIV} + 2 F_{15} + F_{10} + F_4 + F_{XXX} + \\
 & + F_{XIX} = E \left[ \frac{1}{16} (z_{15} + z_X - z_7 - z_{XIV})^2 - (z_{11} - \right. \\
 & \left. - 2 z_{12} + z_{XII}) (z_8 - 2 z_{12} + z_{16}) \right]
 \end{aligned}$$

- para o ponto 14:

$$\begin{aligned}
 & 20 F_{14} - 8 F_{10} - 8 F_{15} - 8 F_{XVII} - 8 F_{13} + 2 F_9 + \\
 & + 2 F_{11} + 2 F_{XVIII} + 2 F_{XVI} + F_{XIII} + F_6 + F_{16} + \\
 & + F_{XXXIV} = E \left[ \frac{1}{16} (z_{XVI} + z_{11} - z_9 - z_{XVIII})^2 - \right. \\
 & \left. - (z_{13} - 2 z_{14} + z_{15}) (z_{10} - 2 z_{14} + z_{XVII}) \right]
 \end{aligned}$$

- para o ponto 15:

$$\begin{aligned}
 & 20 F_{15} - 8 F_{11} - 8 F_{16} - 8 F_{XVIII} - 8 F_{14} + 2 F_{10} + \\
 & + 2 F_{12} + 2 F_{XIX} + 2 F_{XVII} + F_{13} + F_7 + F_{XIV} + \\
 & + F_{XXXV} = E \left[ \frac{1}{16} (z_{XVII} + z_{12} - z_{10} - z_{XIX})^2 - \right. \\
 & \left. - (z_{14} - 2 z_{15} + z_{16}) (z_{11} - 2 z_{15} + z_{XVIII}) \right]
 \end{aligned}$$

- para o ponto 16:

$$\begin{aligned}
 & 20 F_{16} - 8 F_{12} - 8 F_{XIV} - 8 F_{XIX} - 8 F_{15} + 2 F_{11} + \\
 & + 2 F_{XII} + 2 F_{XX} + 2 F_{XVIII} + F_{14} + F_8 + F_{XXXII} + \\
 & + F_{XXXVI} = E \left[ \frac{1}{16} (z_{XVIII} + z_{XII} - z_{11} - z_{XX})^2 - \right. \\
 & \left. - (z_{15} - 2 z_{16} + z_{XIV}) (z_{12} - 2 z_{16} + z_{XIX}) \right]
 \end{aligned}$$

Veremos agora como iremos exprimir os valores das funções  $\underline{z}$  e  $\underline{F}$  nos pontos vizinhos aos 9 pontos interiores.

Através da simetria da membrana tiramos as seguintes relações:

$F_{VIII}$	$= F_3$	$z_{VIII}$	$= z_3$
$F_X$	$= F_7$	$z_X$	$= z_7$
$F_{XII}$	$= F_{11}$	$z_{XII}$	$= z_{11}$
$F_{XIV}$	$= F_{15}$	$z_{XIV}$	$= z_{15}$
$F_{XX}$	$= F_{11}$	$z_{XX}$	$= z_{11}$
$F_{XIX}$	$= F_{12}$	$z_{XIX}$	$= z_{12}$
$F_{XVIII}$	$= F_{11}$	$z_{XVIII}$	$= z_{11}$
$F_{XVII}$	$= F_{10}$	$z_{XVII}$	$= z_{10}$

$F_{XVI}$	=	$F_9$	$z_{XVI}$	=	$z_9$
$F_{XXXIII}$	=	$F_5$	$z_{XXXIII}$	=	$z_5$
$F_{XXXIV}$	=	$F_6$	$z_{XXXIV}$	=	$z_6$
$F_{XXXV}$	=	$F_7$	$z_{XXXV}$	=	$z_7$
$F_{XXXVI}$	=	$F_8$	$z_{XXXVI}$	=	$z_8$
$F_{XXVI}$	=	$F_2$	$z_{XXVI}$	=	$z_2$
$F_{XXVIII}$	=	$F_6$	$z_{XXVIII}$	=	$z_6$
$F_{XXX}$	=	$F_{10}$	$z_{XXX}$	=	$z_{10}$
$F_{XXXII}$	=	$F_{14}$	$z_{XXXII}$	=	$z_{14}$
$F_{VI}$	=	$F_{IV}$	$z_{VI}$	=	$z_{IV}$
$F_{XV}$	=	$F_{XI}$	$z_{XV}$	=	$z_{XI}$

Usemos a interpolação de Lagrange para obter o valor de uma função em um ponto vizinho a 3 pontos cujos valores das funções são conhecidos, como mostra a figura (4).

Sendo  $\underline{a}$  a distância entre esses pontos, temos:

$$\theta_i = A_1 \theta_{i+1} + A_2 \theta_{i+2} + A_3 \theta_{i+3}$$

em que:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{(x_i - x_{i+2})(x_i - x_{i+3})}{(x_{i+1} - x_{i+2})(x_{i+1} - x_{i+3})} \\ A_2 = \frac{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+3})}{(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_{i+3})} \\ A_3 = \frac{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})}{(x_{i+3} - x_{i+1})(x_{i+3} - x_{i+2})} \end{array} \right.$$

ou ainda:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{(-2a)(-3a)}{(-a)(-2a)} = 3 \\ A_2 = \frac{(-a)(-3a)}{a(-a)} = -3 \\ A_3 = \frac{(-a)(-2a)}{2a \cdot a} = 1 \end{array} \right.$$

logo:

$$\boxed{\theta_i = 3 \theta_{i+1} - 3 \theta_{i+2} + \theta_{i+3}}$$

Aplicando essa interpolação temos:

$F_2$	$= 3F_6 - 3F_{10} + F_{14}$	$z_2$	$= 3z_6 - 3z_{10} + z_{14}$
$F_3$	$= 3F_7 - 3F_{11} + F_{15}$	$z_3$	$= 3z_7 - 3z_{11} + z_{15}$
$F_4$	$= 3F_8 - 3F_{12} + F_{16}$	$z_4$	$= 3z_8 - 3z_{12} + z_{16}$
$F_1$	$= 3F_2 - 3F_3 + F_4$	$z_1$	$= 3z_2 - 3z_3 + z_4$
$F_5$	$= 3F_6 - 3F_7 + F_8$	$z_5$	$= 3z_6 - 3z_7 + z_8$
$F_9$	$= 3F_{10} - 3F_{11} + F_{12}$	$z_9$	$= 3z_{10} - 3z_{11} + z_{12}$
$F_{13}$	$= 3F_{14} - 3F_{15} + F_{16}$	$z_{13}$	$= 3z_{14} - 3z_{15} + z_{16}$
$F_{III}$	$= 3F_2 - 3F_6 + F_{10}$	$z_{III}$	$= 3z_2 - 3z_6 + z_{10}$
$F_{IV}$	$= 3F_3 - 3F_7 + F_{11}$	$z_{IV}$	$= 3z_3 - 3z_7 + z_{11}$
$F_V$	$= 3F_4 - 3F_8 + F_{12}$	$z_V$	$= 3z_4 - 3z_8 + z_{12}$
$F_{II}$	$= 3F_1 - 3F_5 + F_9$	$z_{II}$	$= 3z_1 - 3z_5 + z_9$
$F_I$	$= 3F_{II} - 3F_{III} + F_{IV}$	$z_I$	$= 3z_{II} - 3z_{III} + z_{IV}$
$F_{VII}$	$= 3F_1 - 3F_2 + F_3$	$z_{VII}$	$= 3z_1 - 3z_2 + z_3$
$F_{IX}$	$= 3F_5 - 3F_6 + F_7$	$z_{IX}$	$= 3z_5 - 3z_6 + z_7$
$F_{XI}$	$= 3F_9 - 3F_{10} + F_{11}$	$z_{XI}$	$= 3z_9 - 3z_{10} + z_{11}$
$F_{XIII}$	$= 3F_{13} - 3F_{14} + F_{15}$	$z_{XIII}$	$= 3z_{13} - 3z_{14} + z_{15}$
$F_{XXI}$	$= 3F_{II} - 3F_I + F_5$	$z_{XXI}$	$= 3z_{II} - 3z_I + z_5$
$F_{XXII}$	$= 3F_{III} - 3F_2 + F_6$	$z_{XXII}$	$= 3z_{III} - 3z_2 + z_6$
$F_{XXIII}$	$= 3F_{IV} - 3F_3 + F_7$	$z_{XXIII}$	$= 3z_{IV} - 3z_3 + z_7$

$$\begin{array}{lcl}
 F_{XXIV} = 3F_V - 3F_4 + F_8 & | & z_{XXIV} = 3z_V - 3z_4 + z_8 \\
 F_{XXV} = 3F_{VII} - 3F_1 + F_2 & | & z_{XXV} = 3z_{VII} - 3z_1 + z_2 \\
 F_{XXVII} = 3F_{IX} - 3F_5 + F_6 & | & z_{XXVII} = 3z_{IX} - 3z_5 + z_6 \\
 F_{XXIX} = 3F_{XI} - 3F_9 + F_{10} & | & z_{XXIX} = 3z_{XI} - 3z_9 + z_{10} \\
 F_{XXXI} = 3F_{XIII} - 3F_{13} + F_{14} & | & z_{XXXI} = 3z_{XIII} - 3z_{13} + z_{14}
 \end{array}$$

Aplicando esses valores na equação, temos o seguinte sistema:

$$\left[ \begin{array}{cccccccccc}
 -16 & -4 & 2 & -4 & 8 & -4 & 2 & -4 & 20 \\
 1 & 0 & -1 & -4 & 8 & -4 & 2 & -4 & 2 \\
 2 & -4 & 2 & 0 & -8 & 8 & 0 & 4 & -4 \\
 1 & -4 & 2 & 0 & 8 & -4 & -1 & -4 & 2 \\
 2 & -5 & 2 & -5 & 16 & -7 & 2 & -7 & 2 \\
 0 & 4 & -5 & 2 & -16 & 18 & 0 & 4 & -7 \\
 2 & 0 & 0 & -4 & -8 & 4 & 2 & 8 & -4 \\
 0 & 2 & 0 & 4 & -16 & 4 & -5 & 18 & -7 \\
 0 & 0 & 2 & 0 & 8 & -16 & 2 & -16 & 20
 \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{14} \\ F_{15} \\ F_{16} \end{array} \right\} = E \cdot \left\{ \begin{array}{c} W_6 \\ W_7 \\ W_8 \\ W_{10} \\ W_{11} \\ W_{12} \\ W_{14} \\ W_{15} \\ W_{16} \end{array} \right\}$$

Sendo:

$$\begin{aligned}
 W_6 = & \frac{1}{16} ( - 9 z_6 + 12 z_7 - 3 z_8 + 12 z_{10} - 16 z_{11} + \\
 & + 4 z_{12} - 3 z_{14} + 4 z_{15} - z_{16} )^2 - (z_6 - 2 z_7 + \\
 & + z_8) (z_6 - 2 z_{10} + z_{14})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_7 = & \frac{1}{16} ( - 3 z_6 + 3 z_8 + 4 z_{10} - 4 z_{12} - z_{14} + z_{16} )^2 - \\
 & - (z_6 - 2 z_7 + z_8) (z_7 - 2 z_{11} + z_{15})
 \end{aligned}$$

$$W_8 = (2 z_8 - 2 z_7) (z_8 - 2 z_{12} + z_{16})$$

$$\begin{aligned}
 W_{10} = & \frac{1}{16} ( - 3 z_6 + 4 z_7 - z_8 + 3 z_{14} - 4 z_{15} + z_{16} )^2 - \\
 & - (z_{10} - 2 z_{11} + z_{12}) (z_6 - 2 z_{10} + z_{14})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{11} = & \frac{1}{16} (z_{14} + z_8 - z_6 - z_{16})^2 - (z_{10} - 2 z_{11} + \\
 & + z_{12}) (z_7 - 2 z_{11} + z_{15})
 \end{aligned}$$

$$W_{12} = (2 z_{12} - 2 z_{11}) (z_8 - 2 z_{12} + z_{16})$$

$$W_{14} = (2 z_{14} - 2 z_{10}) (z_{14} - 2 z_{15} + z_{16})$$



$$W_{15} = (2 z_{15} - 2 z_{11}) (z_{14} - 2 z_{15} + z_{16})$$

$$W_{16} = (2 z_{16} - 2 z_{15}) (2 z_{12} - 2 z_{16})$$

Expressemos a 2ª equação geral das membranas, relação (9), em diferenças finitas.

Sabendo-se que:

$$\frac{\partial^2 F_{0,0}}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} (F_{1,0} - 2 F_{0,0} + F_{-1,0})$$

$$\frac{\partial^2 F_{0,0}}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} (F_{0,1} - 2 F_{0,0} + F_{0,-1})$$

$$\frac{\partial^2 F_{0,0}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4a^2} (F_{1,1} - F_{1,-1} - F_{-1,1} + F_{-1,-1})$$

temos a rel. (9) transformada em:

$$\begin{aligned} & (F_{0,1} - 2 F_{0,0} + F_{0,-1}) (Z_{1,0} - 2 Z_{0,0} + Z_{-1,0}) + \\ & + (F_{1,0} - 2 F_{0,0} + F_{-1,0}) (Z_{0,1} - 2 Z_{0,0} + Z_{0,-1}) - \\ & - \frac{1}{8} (F_{1,1} - F_{1,-1} - F_{-1,1} + F_{-1,-1}) (Z_{1,1} - Z_{1,-1} - \\ & - Z_{-1,1} + Z_{-1,-1}) = - \frac{q a^4}{h} \end{aligned}$$

Aplicando essa equação aos pontos interiores da malha, segundo a figura (1), vem

- para o ponto 6:

$$(F_2 - 2F_6 + F_{10}) (Z_7 - 2Z_6 + Z_5) + (F_7 - 2F_6 + F_5)$$

$$(Z_2 - 2Z_6 + Z_{10}) - \frac{1}{8} (F_3 - F_1 + F_9 - F_{11}) (Z_3 - \\ - Z_1 + Z_9 - Z_{11}) = - \frac{qa^4}{h}$$

- para o ponto 7:

$$(F_3 - 2F_7 + F_{11}) (Z_8 - 2Z_7 + Z_6) + (F_8 - 2F_7 + F_6)$$

$$(Z_3 - 2Z_7 + Z_{11}) - \frac{1}{8} (F_4 - F_2 + F_{10} - F_{12})$$

$$(Z_4 - Z_2 + Z_{10} - Z_{12}) = - \frac{qa^4}{h}$$

- para o ponto 8:

$$(F_4 - 2F_8 + F_{12}) (Z_X - 2Z_8 + Z_7) + (F_X - 2F_8 + F_7)$$

$$(Z_4 - 2Z_8 + Z_{12}) - \frac{1}{8} (F_{VIII} - F_3 + F_{11} - F_{XII})$$

$$(Z_{VIII} - Z_3 + Z_{11} - Z_{XII}) = - \frac{qa^4}{h}$$

- para o ponto 10:

$$\begin{aligned} & (F_6 - 2F_{10} + F_{14}) (Z_{11} - 2Z_{10} + Z_9) + (F_{11} - 2F_{10} + \\ & + F_9)(Z_6 - 2Z_{10} + Z_{14}) - \frac{1}{8} (F_7 - F_5 + F_{13} - F_{15}) \\ & (Z_7 - Z_5 + Z_{13} - Z_{15}) = - \frac{qa^4}{h} \end{aligned}$$

- para o ponto 11:

$$\begin{aligned} & (F_7 - 2F_{11} + F_{15}) (Z_{12} - 2Z_{11} + Z_{10}) + (F_{12} - 2F_{11} + \\ & + F_{10})(Z_7 - 2Z_{11} + Z_{15}) - \frac{1}{8} (F_8 - F_6 + F_{14} - F_{16}) \\ & (Z_8 - Z_6 + Z_{14} - Z_{16}) = - \frac{qa^4}{h} \end{aligned}$$

para o ponto 12:

$$\begin{aligned} & (F_8 - 2F_{12} + F_{16}) (Z_{XII} - 2Z_{12} + Z_{11}) + (F_{XII} - \\ & - 2F_{12} + F_{11}) (Z_8 - 2Z_{12} + Z_{16}) - \frac{1}{8} (F_X - F_7 + \\ & + F_{15} - F_{XIV}) (Z_X - Z_7 + Z_{15} - Z_{XIV}) = - \frac{qa^4}{h} \end{aligned}$$

- para o ponto 14:

$$(F_{10} - 2F_{14} + F_{XVII}) (Z_{15} - 2Z_{14} + Z_{13}) + (F_{15} -$$

$$- 2F_{14} + F_{13}) (Z_{10} - 2Z_{14} + Z_{XVII}) - \frac{1}{8} (F_{11} - F_9 + \\ + F_{XVI} - F_{XVIII}) (Z_{11} - Z_9 + Z_{XVI} - Z_{XVIII}) = - \frac{qa^4}{h}$$

- para o ponto 15:

$$(F_{11} - 2F_{15} + F_{XVIII}) (Z_{16} - 2Z_{15} + Z_{14}) (F_{16} - \\ - 2F_{15} + F_{14}) (Z_{11} - 2Z_{15} + Z_{XVIII}) - \frac{1}{8} (F_{12} - F_{10} + \\ + F_{XVII} - F_{XIX}) (Z_{12} - Z_{10} + Z_{XVII} - Z_{XIX}) = - \frac{qa^4}{h}$$

para o ponto 16:

$$(F_{12} - 2F_{16} + F_{XIX}) (Z_{XIV} - 2Z_{16} + Z_{15}) + (F_{XIV} - \\ - 2F_{16} + F_{15}) (Z_{12} - 2Z_{16} + Z_{XIX}) - \frac{1}{8} (F_{XII} - \\ - F_{11} + F_{XVIII} - F_{XX}) (Z_{XII} - Z_{11} + Z_{XVIII} - Z_{XX}) = - \\ = \frac{qa^4}{h}$$

Utilizando as relações de simetria entre os diversos pontos da malha e a interpolação da Lagrange já definida anteriormente, teremos formado o seguinte sistema de equações:

$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$	$A_{1,4}$	$A_{1,5}$	$A_{1,6}$	$A_{1,7}$	$A_{1,8}$	$A_{1,9}$
$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	$A_{2,3}$	$A_{2,4}$	$A_{2,5}$	$A_{2,6}$	$A_{2,7}$	$A_{2,8}$	$A_{2,9}$
$A_{3,1}$	$A_{3,2}$	$A_{3,3}$	$A_{3,4}$	$A_{3,5}$	$A_{3,6}$	$A_{3,7}$	$A_{3,8}$	$A_{3,9}$
$A_{4,1}$	$A_{4,2}$	$A_{4,3}$	$A_{4,4}$	$A_{4,5}$	$A_{4,6}$	$A_{4,7}$	$A_{4,8}$	$A_{4,9}$
$A_{5,1}$	$A_{5,2}$	$A_{5,3}$	$A_{5,4}$	$A_{5,5}$	$A_{5,6}$	$A_{5,7}$	$A_{5,8}$	$A_{5,9}$
$A_{6,1}$	$A_{6,2}$	$A_{6,3}$	$A_{6,4}$	$A_{6,5}$	$A_{6,6}$	$A_{6,7}$	$A_{6,8}$	$A_{6,9}$
$A_{7,1}$	$A_{7,2}$	$A_{7,3}$	$A_{7,4}$	$A_{7,5}$	$A_{7,6}$	$A_{7,7}$	$A_{7,8}$	$A_{7,9}$
$A_{8,1}$	$A_{8,2}$	$A_{8,3}$	$A_{8,4}$	$A_{8,5}$	$A_{8,6}$	$A_{8,7}$	$A_{8,8}$	$A_{8,9}$
$A_{9,1}$	$A_{9,2}$	$A_{9,3}$	$A_{9,4}$	$A_{9,5}$	$A_{9,6}$	$A_{9,7}$	$A_{9,8}$	$A_{9,9}$

$$\begin{Bmatrix} z_6 \\ z_7 \\ z_8 \\ z_{10} \\ z_{11} \\ z_{12} \\ z_{14} \\ z_{15} \\ z_{16} \end{Bmatrix} = - \frac{qa^4}{h} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad -30-$$

$$A_{1,1} = -\frac{65}{8} F_6 + \frac{92}{8} F_7 - \frac{19}{8} F_8 + \frac{65}{8} F_{10} - \frac{108}{8} F_{11} + \\ + \frac{27}{8} F_{12} - \frac{19}{8} F_{14} + \frac{36}{8} F_{15} - \frac{9}{8} F_{16}$$

$$A_{1,2} = \frac{92}{8} F_6 - \frac{144}{8} F_7 + \frac{36}{8} F_8 - \frac{76}{8} F_{10} + \frac{144}{8} F_{11} - \\ - \frac{36}{8} F_{12} + \frac{20}{8} F_{14} - \frac{48}{8} F_{15} + \frac{12}{8} F_{16}$$

$$A_{1,3} = -\frac{19}{8} F_6 + \frac{36}{8} F_7 - \frac{9}{8} F_8 + \frac{11}{8} F_{10} - \frac{36}{8} F_{11} + \\ + \frac{9}{8} F_{12} - \frac{1}{8} F_{14} + \frac{12}{8} F_{15} - \frac{3}{8} F_{16}$$

$$A_{1,4} = \frac{65}{8} F_6 - \frac{76}{8} F_7 + \frac{11}{8} F_8 - \frac{81}{8} F_{10} + \frac{108}{8} F_{11} - \\ - \frac{27}{8} F_{12} + \frac{27}{8} F_{14} - \frac{36}{8} F_{15} + \frac{9}{8} F_{16}$$

$$A_{1,5} = -\frac{108}{8} F_6 + \frac{144}{8} F_7 - \frac{36}{8} F_8 + \frac{108}{8} F_{10} - \frac{144}{8} F_{11} + \\ + \frac{36}{8} F_{12} - \frac{36}{8} F_{14} + \frac{48}{8} F_{15} - \frac{12}{8} F_{16}$$

$$A_{1,6} = \frac{27}{8} F_6 - \frac{36}{8} F_7 + \frac{9}{8} F_8 - \frac{27}{8} F_{10} + \frac{36}{8} F_{11} - \\ - \frac{9}{8} F_{12} + \frac{9}{8} F_{14} - \frac{12}{8} F_{15} + \frac{3}{8} F_{16}$$

$$A_{1,7} = -\frac{19}{8} F_6 + \frac{20}{8} F_7 - \frac{1}{8} F_8 + \frac{27}{8} F_{10} - \frac{36}{8} F_{11} + \\ + \frac{9}{8} F_{12} - \frac{9}{8} F_{14} + \frac{12}{8} F_{15} - \frac{3}{8} F_{16}$$

$$A_{1,8} = \frac{36}{8} F_6 - \frac{48}{8} F_7 + \frac{12}{8} F_8 - \frac{36}{8} F_{10} + \frac{48}{8} F_{11} - \\ - \frac{12}{8} F_{12} + \frac{12}{8} F_{14} - \frac{16}{8} F_{15} + \frac{4}{8} F_{16}$$

$$A_{1,9} = - \frac{9}{8} F_6 + \frac{12}{8} F_7 - \frac{3}{8} F_8 + \frac{9}{8} F_{10} - \frac{12}{8} F_{11} + \\ + \frac{3}{8} F_{12} - \frac{3}{8} F_{14} + \frac{4}{8} F_{15} - \frac{1}{8} F_{16}$$

$$A_{2,1} = - \frac{9}{8} F_6 + F_7 + \frac{9}{8} F_8 + \frac{12}{8} F_{10} - 2F_{11} - \\ - \frac{12}{8} F_{12} - \frac{3}{8} F_{14} + F_{15} + \frac{3}{8} F_{16}$$

$$A_{2,2} = F_6 - 4F_7 + F_8 + 4F_{11} - 2F_{15}$$

$$A_{2,3} = \frac{9}{8} F_6 + F_7 - \frac{9}{8} F_8 - \frac{12}{8} F_{10} - 2F_{11} + \\ + \frac{12}{8} F_{12} + \frac{3}{8} F_{14} + F_{15} - \frac{3}{8} F_{16}$$

$$A_{2,4} = \frac{12}{8} F_6 - \frac{12}{8} F_8 - 2F_{10} + 2F_{12} + \frac{4}{8} F_{14} - \\ - \frac{4}{8} F_{16}$$

$$A_{2,5} = - 2F_6 + 4F_7 - 2F_8$$

$$A_{2,6} = - \frac{12}{8} F_6 + \frac{12}{8} F_8 + 2F_{10} - 2F_{12} - \frac{4}{8} F_{14} + \\ + \frac{4}{8} F_{16}$$

$$A_{2,7} = -\frac{3}{8} F_6 + \frac{3}{8} F_8 + \frac{4}{8} F_{10} - \frac{4}{8} F_{12} - \\ - \frac{1}{8} F_{14} + \frac{1}{8} F_{16}$$

$$A_{2,8} = F_6 - 2F_7 + F_8$$

$$A_{2,9} = \frac{3}{8} F_6 - \frac{3}{8} F_8 - \frac{4}{8} F_{10} + \frac{4}{8} F_{12} + \\ + \frac{1}{8} F_{14} - \frac{1}{8} F_{16}$$

$$A_{3,1} = 0$$

$$A_{3,2} = 2F_8 - 4F_{12} + 2F_{16}$$

$$A_{3,3} = 2F_7 - 4F_8 + 4F_{12} - 2F_{16}$$

$$A_{3,4} = 0$$

$$A_{3,5} = 0$$

$$A_{3,6} = -4F_7 + 4F_8$$

$$A_{3,7} = 0$$

$$A_{3,8} = 0$$

$$A_{3,9} = 2F_7 - 2F_8$$



$$A_{4,1} = -\frac{9}{8} F_6 + \frac{12}{8} F_7 - \frac{3}{8} F_8 + F_{10} - 2F_{11} + \\ + F_{12} + \frac{9}{8} F_{14} - \frac{12}{8} F_{15} + \frac{3}{8} F_{16}$$

$$A_{4,2} = \frac{12}{8} F_6 - 2F_7 + \frac{4}{8} F_8 - \frac{12}{8} F_{14} + 2F_{15} - \\ - \frac{4}{8} F_{16}$$

$$A_{4,3} = -\frac{3}{8} F_6 + \frac{4}{8} F_7 - \frac{1}{8} F_8 + \frac{3}{8} F_{14} - \\ - \frac{4}{8} F_{15} + \frac{1}{8} F_{16}$$

$$A_{4,4} = F_6 - 4F_{10} + 4F_{11} - 2F_{12} + F_{14}$$

$$A_{4,5} = -2F_6 + 4F_{10} - 2F_{14}$$

$$A_{4,6} = F_6 - 2F_{10} + F_{14}$$

$$A_{4,7} = \frac{9}{8} F_6 - \frac{12}{8} F_7 + \frac{3}{8} F_8 + F_{10} - 2F_{11} + \\ + F_{12} - \frac{9}{8} F_{14} + \frac{12}{8} F_{15} - \frac{3}{8} F_{16}$$

$$A_{4,8} = -\frac{12}{8} F_6 + 2F_7 - \frac{4}{8} F_8 + \frac{12}{8} F_{14} - 2F_{15} + \\ + \frac{4}{8} F_{16}$$

$$A_{4,9} = \frac{3}{8} F_6 - \frac{4}{8} F_7 + \frac{1}{8} F_8 - \frac{3}{8} F_{14} + \\ + \frac{4}{8} F_{15} - \frac{1}{8} F_{16}$$

$$A_{5,1} = -\frac{1}{8} F_6 + \frac{1}{8} F_8 + \frac{1}{8} F_{14} - \frac{1}{8} F_{16}$$

$$A_{5,2} = F_{10} - 2F_{11} + F_{12}$$

$$A_{5,3} = \frac{1}{8} F_6 - \frac{1}{8} F_8 - \frac{1}{8} F_{14} + \frac{1}{8} F_{16}$$

$$A_{5,4} = F_7 - 2F_{11} + F_{15}$$

$$A_{5,5} = -2F_7 - 2F_{10} + 8F_{11} - 2F_{12} - 2F_{15}$$

$$A_{5,6} = F_7 - 2F_{11} + F_{15}$$

$$A_{5,7} = \frac{1}{8} F_6 - \frac{1}{8} F_8 - \frac{1}{8} F_{14} + \frac{1}{8} F_{16}$$

$$A_{5,8} = F_{10} - 2F_{11} + F_{12}$$

$$A_{5,9} = -\frac{1}{8} F_6 + \frac{1}{8} F_8 + \frac{1}{8} F_{14} - \frac{1}{8} F_{16}$$

$$A_{6,1} = 0$$

$$A_{6,2} = 0$$

$$A_{6,3} = 2F_{11} - 2F_{12}$$

$$A_{6,4} = 0$$

$$A_{6,5} = 2F_8 - 4F_{12} + 2F_{16}$$

$$A_{6,6} = -2F_8 - 4F_{11} + 8F_{12} - 2F_{16}$$

$$A_{6,7} = 0$$

$$A_{6,8} = 0$$

$$A_{6,9} = 2F_{11} - 2F_{12}$$

$$A_{7,1} = 0$$

$$A_{7,2} = 0$$

$$A_{7,3} = 0$$

$$A_{7,4} = 2F_{14} - 4F_{15} + 2F_{16}$$

$$A_{7,5} = 0$$

$$A_{7,6} = 0$$

$$A_{7,7} = 2F_{10} - 4F_{14} + 4F_{15} - 2F_{16}$$

$$A_{7,8} = -4F_{10} + 4F_{14}$$

$$A_{7,9} = 2F_{10} - 2F_{14}$$

$$A_{8,1} = 0$$

$$A_{8,2} = 0$$

$$A_{8,3} = 0$$

$$A_{8,4} = 0$$

$$A_{8,5} = 2F_{14} - 4F_{15} + 2F_{16}$$

$$A_{8,6} = 0$$

$$A_{8,7} = 2F_{11} - 2F_{15}$$

$$A_{8,8} = -4F_{11} - 2F_{14} + 8F_{15} - 2F_{16}$$

$$A_{8,9} = 2F_{11} - 2F_{15}$$

$$A_{9,1} = 0$$

$$A_{9,2} = 0$$

$$A_{9,3} = 0$$

$$A_{9,4} = 0$$

$$A_{9,5} = 0$$

$$A_{9,6} = {}^4F_{15} - {}^4F_{16}$$

$$A_{9,7} = 0$$

$$A_{9,8} = {}^4F_{12} - {}^4F_{16}$$

$$A_{9,9} = - {}^4F_{12} - {}^4F_{15} + 8F_{16}$$

O uso do prolongamento de Lagrange foi a solução que adotamos por nos parecer a única viável. De fato: com a derivada de quarta ordem precisamos de dois pontos virtuais externos.

Ora, sabemos que:

$$\sigma_y = 0 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \text{ nas bordas segundo X,}$$

mas essa expressão envolve valores de x e de F ao longo da borda e não normalmente a ela; de modo que só com o prolongamento referido conseguimos o que desejávamos.

Foram feitos vários testes utilizando-se diversas grandezas de q, A, h e E e não conseguimos determinar valores de c coerentes, ou seja obter uma convergência do processo, em decorrência possivelmente dos fatores seguintes ou de alguns em conjunto:

- a) equação da superfície inicial muito afastada da forma verdadeira.
- b) erro de lógica nos programas automáticos de resolução dos sistemas de equações, apresentadas nos anexos (1) e (2), que haja escapado a quantos os examinaram.
- c) interpolação dos valores das funções nos pontos de borda e virtuais usando a fórmula de Lagrange, provavelmente pouco refinada para o caso em foco.

No entanto, essa interpolação supunha continuidade das funções  $\underline{F}$  e  $\underline{Z}$ , o que se verificava para os  $\underline{Z}$  iniciais.

Não chegamos a insistir nesse roteiro, devido aos resultados não se apresentarem bons, levando a crêr que a convergência, se existisse, seria extremamente lenta.

Por essa razão decidimos retomar o estudo por via experimental.

Para completar a dissertação acima, falemos brevemente na condição de equilíbrio que nos permitiu determinar  $\underline{C}$ .

Na figura (14) exige-se que:

$$\frac{q A^2}{4} = 2 T_{x_v} \cdot a \cdot \sin \alpha$$

onde  $\sin \alpha \approx \frac{Z_2}{a}$

Foi essa equação que forneceu os valores de C .

\* \* \*

## CAPÍTULO 3

### Determinação experimental

#### 3.1 - Montagem e efetivação do ensaio

Utilizamos uma membrana de borracha natural com dimensões de 72 x 72 x 0,10 cm, sujeita a três casos de carregamento distribuído.

Interessa-nos medir as deflexões de 16 pontos conforme mostra a figura (1), para esses carregamentos.

Esse modelo experimental foi construído no laboratório de estruturas da COPPE, sendo adotada uma escala modelo-protótipo de 1:1 .

A montagem consta de uma mesa cujos quatro montantes são constituídos por cantoneiras metálicas de 2 1/2 x 2 1/2 x 1/4", contraventados horizontalmente à meia altura por cantoneiras de 2 x 2 x 1/4" .

A altura da mesa foi projetada com 100 cm, de modo a oferecer facilidades no manuseio para um operador em pé.

No tópo de cada um desses montantes foram soldadas placas metálicas triangulares de 1/2" de espessura com um furo num local previamente escolhido e por esse furo irá ser introduzido um parafuso de 1/4" com porcas, cuja finalidade é suportar os vértices da membrana e nivela-los corretamente.



Sobre duas cantoneiras do contraventamento horizontal foram soldadas outras duas cantoneiras de  $2 \times 2 \times 1/4$ " a uma certa distância e foram feitos dois furos distantes de 20 cm em uma delas e um outro furo na outra, de modo que, em planta, se situassem segundo um triângulo isósceles.

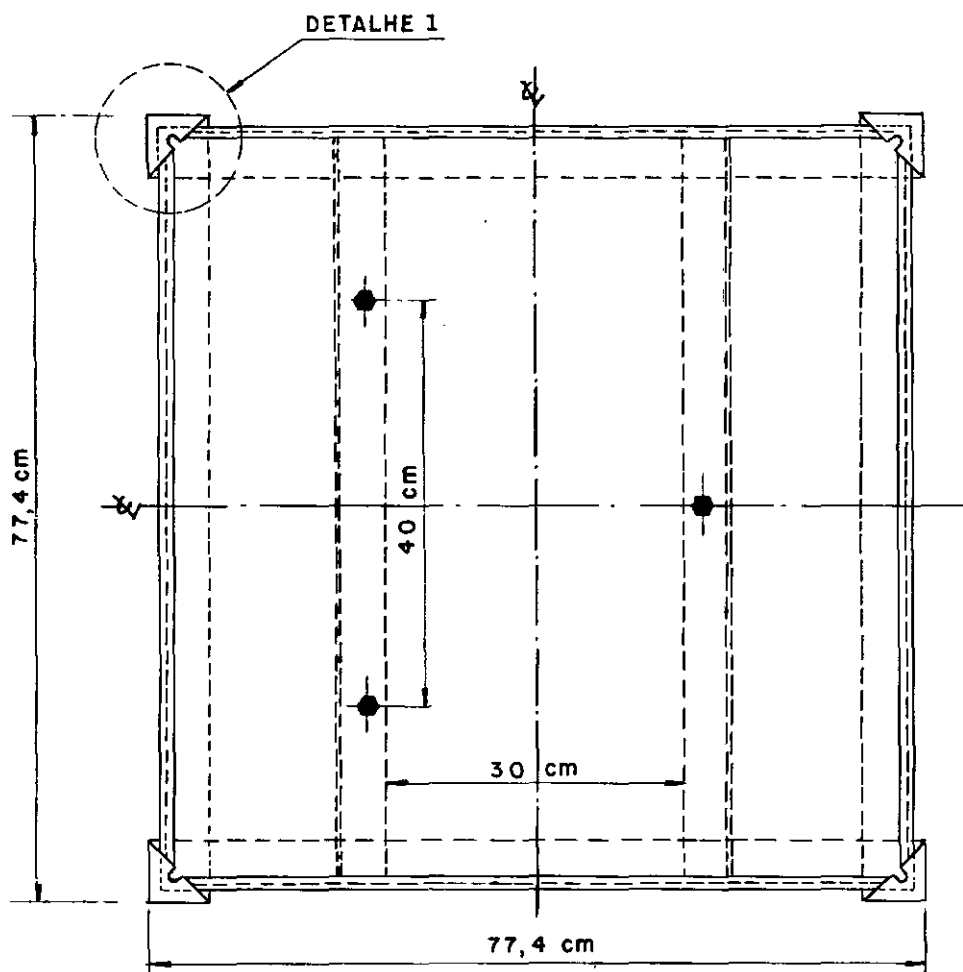
Por esses furos foram colocados parafusos niveladores de  $1/2$ " com porcas, cuja finalidade é sustentar um dispositivo de apoio da membrana. Esse dispositivo de apoio é constituído por uma placa de vidro de 6 mm de espessura sobre a qual a membrana deverá ficar ajustada antes do início da experiência, uma peça de feltro de 1 mm de espessura cuja finalidade é assentar melhor a placa de vidro e finalmente uma peça de madeira compensada de 3 cm de espessura, sustentada pelos três parafusos niveladores.

Os parafusos niveladores situados no tampo dos quatro montantes distam entre si de 72 cm, de eixo à eixo, de modo que realmente se possa assimilar o apoio produzido por esses parafusos a apoios pontuais nos vértices da membrana.

Para termos uma uniformidade de tensões nos apoios, fizemos olhais de 1,5 cm de raio ao redor de cada vértice da membrana, de modo que as porcas exerçam pressão efetivamente nesses olhais.

Os detalhes do modelo são mostrados na figura (5).

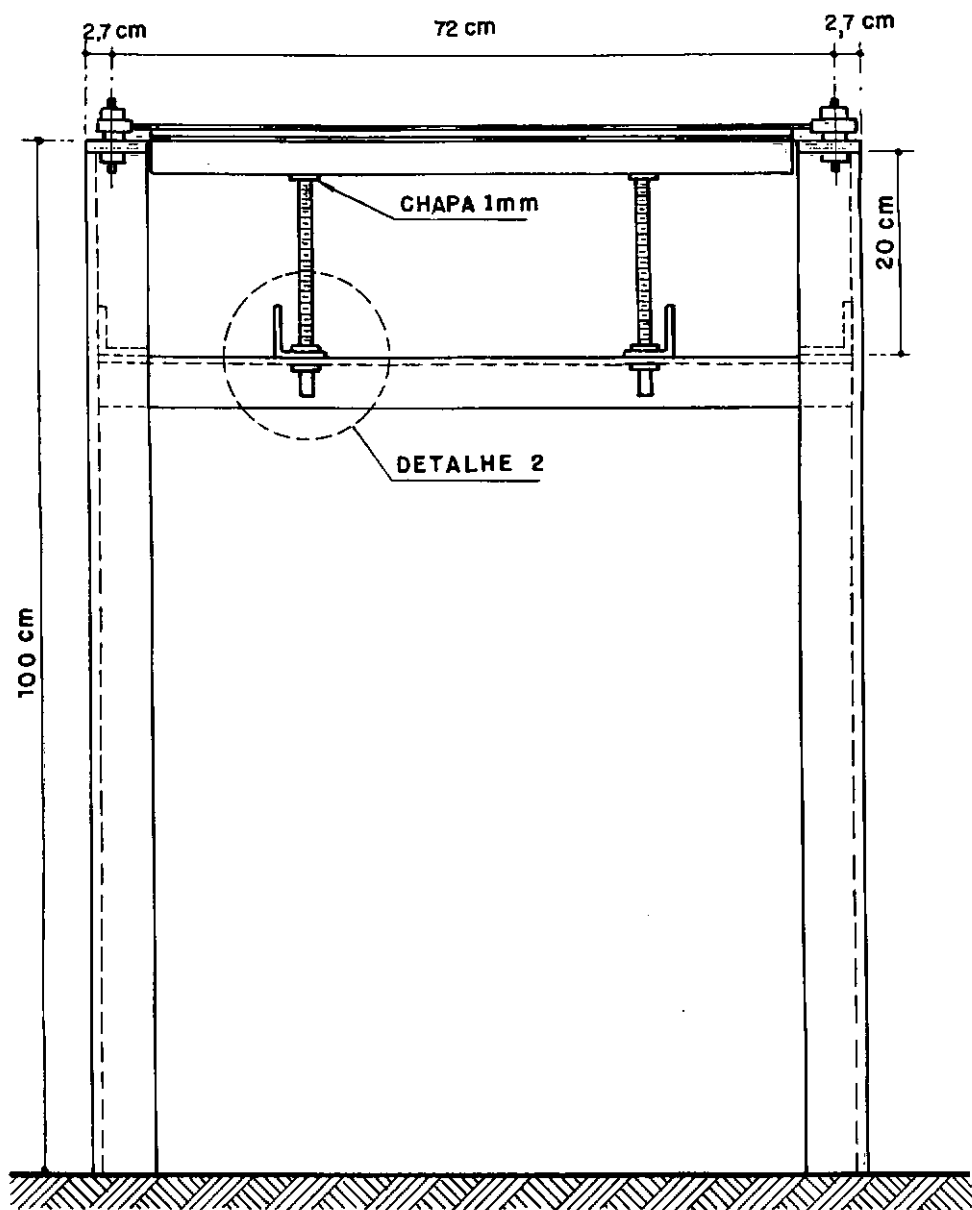
O material escolhido para a confecção da membrana foi uma borracha natural, que devido à sua grande elasticidade, apresentará flechas de magnitudes ótimas a serem medidas.



VISTA SUPERIOR DO MODELO

Esc. 1:7,5

FIG.(5) A



VISTA FRONTAL DO MODELO

Esc. 1 : 7,5

FIG. (5) B

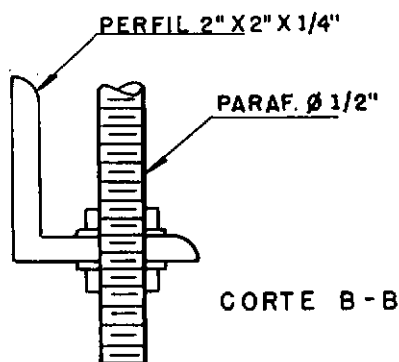
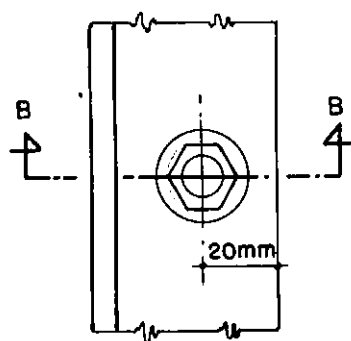
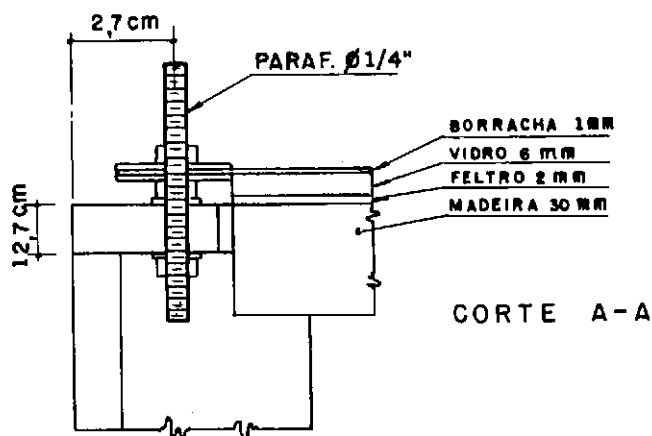
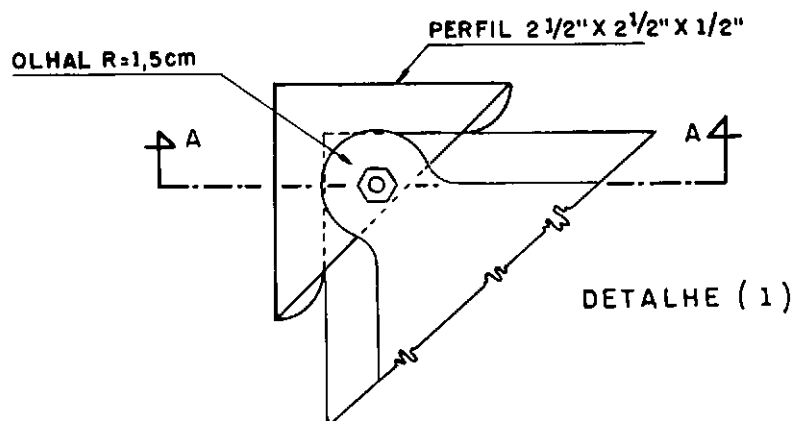


FIG. (5) C

Esc. 1:2

Como vimos no capítulo anterior, dividiremos um quarto da nossa membrana em uma malha uniforme de 16 pontos com 12 cm de lado, no caso em estudo, pontos esses desenhados levemente na membrana.

Utilizaremos três carregamentos distribuídos: o primeiro, apenas o peso próprio da membrana que vale  $q_1 = 1,5 \text{ kg/m}^2$ , o segundo  $q_2 = 3,0 \text{ kg/m}^2$  e o terceiro  $q_3 = 4,5 \text{ kg/m}^2$ .

Os carregamentos  $q_2$  e  $q_3$  serão simulados por placas de borracha cortadas em formato de quadrados de 10 cm de lado e colocadas sobre toda a membrana, de uma maneira tal que os pontos cujas flechas irão ser medidas fiquem visíveis para um observador situado acima da membrana.

O carregamento  $q_2$  é constituído pelo peso próprio da membrana mais o peso de uma camada de placas, anteriormente mencionada, distribuída por toda a membrana.

O carregamento  $q_3$  é constituído pelo peso próprio da membrana mais o peso de duas camadas de placas.

Foi verificado que, como as deformações não irão ser muito grandes, as placas se mantêm na sua posição inicial em relação à membrana devido ao atrito, ou seja, não há deslizamento das placas por sobre a membrana.

A medida dos deslocamentos dos pontos considerados da membrana será realizada utilizando-se uma mesa de coordenadas da marca AVA G, modelo 68 1004, que fornece uma precisão de 1 mm nas leituras.

A experiência começa, para cada um dos carregamentos, nivelando-se perfeitamente a membrana e fazendo-se que todos os seus pontos estejam a uma mesma cota que será anotada.

Nesse estágio a membrana deverá estar suportada pelos quatro parafusos niveladores nos vértices e pelo dispositivo de apôio.

A próxima etapa será a entrada da membrana em carregamento, o que será feito simplesmente ao se abaixar o dispositivo de apôio através dos seus três parafusos niveladores.

Nessa situação a membrana estará suportada somente pelos seus vértices.

Desloca-se o estilete da mesa de coordenadas até que ele toque levemente nos pontos traçados sobre a membrana e lê-se então, em cada ponto, qual o seu deslocamento da posição de equilíbrio inicial.

Após lermos os deslocamentos dos 16 pontos considerados, volta-se ao primeiro estágio, ou seja, sobe-se com o dispositivo de apôio e com ele suporta-se a membrana, nivela-se a mesma outra vez de modo que tenhamos todos os seus pontos à uma mesma cota, aplica-se um novo carregamento e prossegue-se nos mesmos procedimentos citados anteriormente.

Uma fotografia do modelo está representada na figura (6) e os valores dos deslocamentos desses 16 pontos para os

três casos de carregamento empregados constam dos quadros (1), (2) e (3).

A partir dos quadros (1), (2) e (3) foram feitas as figuras (7), (8) e (9) que representam graficamente as conformações finais da membrana para cada um dos três casos de carregamento.

Devemos notar que as deformações nos sentidos X e Y foram tão pequenas que não conseguimos medi-las com o uso da mesa de coordenadas.

A figura (10) mostra a variação da flecha máxima dessa membrana de 72 x 72 x 0,1 cm para vários carregamentos.

\* \* \*

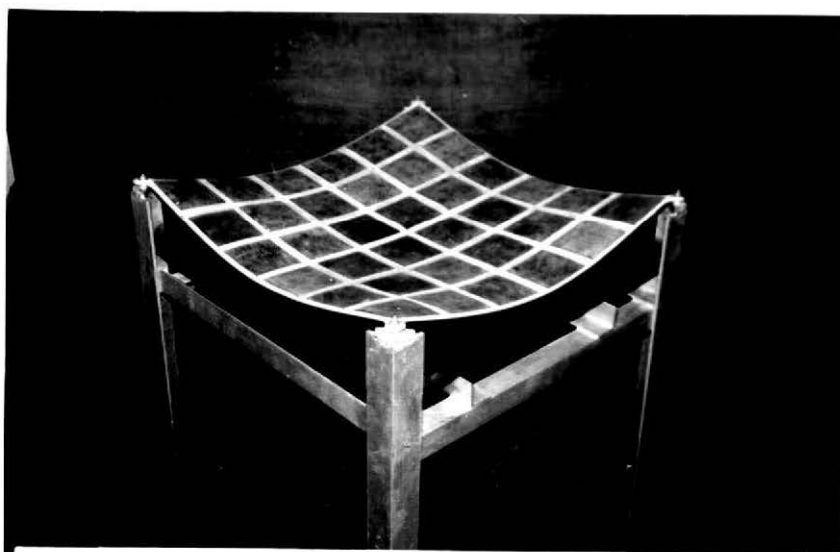
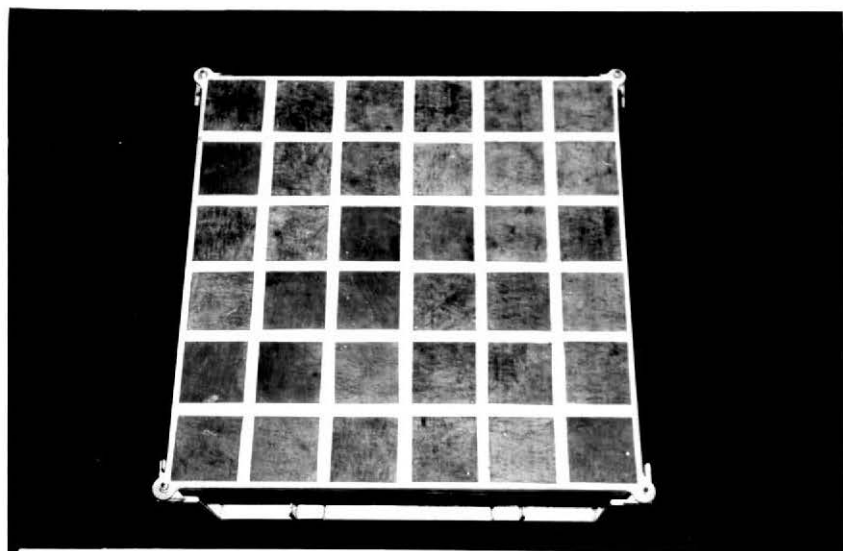


FIG.(6)



QUADRO (1)

Deslocamento em mm, para a carga  $q_1 = 1,5 \text{ kg/m}^2$

PONTOS	z INÍCIO	z FIM
1	0	0
2	0	22
3	0	40
4	0	47
5	0	22
6	0	32
7	0	46
8	0	53
9	0	40
10	0	46
11	0	55
12	0	60
13	0	47
14	0	53
15	0	60
16	0	63

QUADRO (2)

Deslocamento em mm, para a carga  $q = 3,0 \text{ kg/m}^2$

PONTOS	z INÍCIO	z FIM
1	0	0
2	0	25
3	0	46
4	0	57
5	0	25
6	0	39
7	0	56
8	0	64
9	0	46
10	0	56
11	0	68
12	0	74
13	0	57
14	0	64
15	0	74
16	0	77

QUADRO (3)

Deslocamento em mm, para a carga  $q_3 = 4,5 \text{ kg/m}^2$

PONTOS	z INÍCIO	z FIM
1	0	0
2	0	30
3	0	54
4	0	64
5	0	30
6	0	44
7	0	64
8	0	73
9	0	54
10	0	64
11	0	77
12	0	82
13	0	64
14	0	73
15	0	82
16	0	86

DESLOCAMENTOS VERTICAIS DA MEMBRANA, EM mm

PARA A CARGA  $q_1 = 1,5 \text{ kg/m}^2$

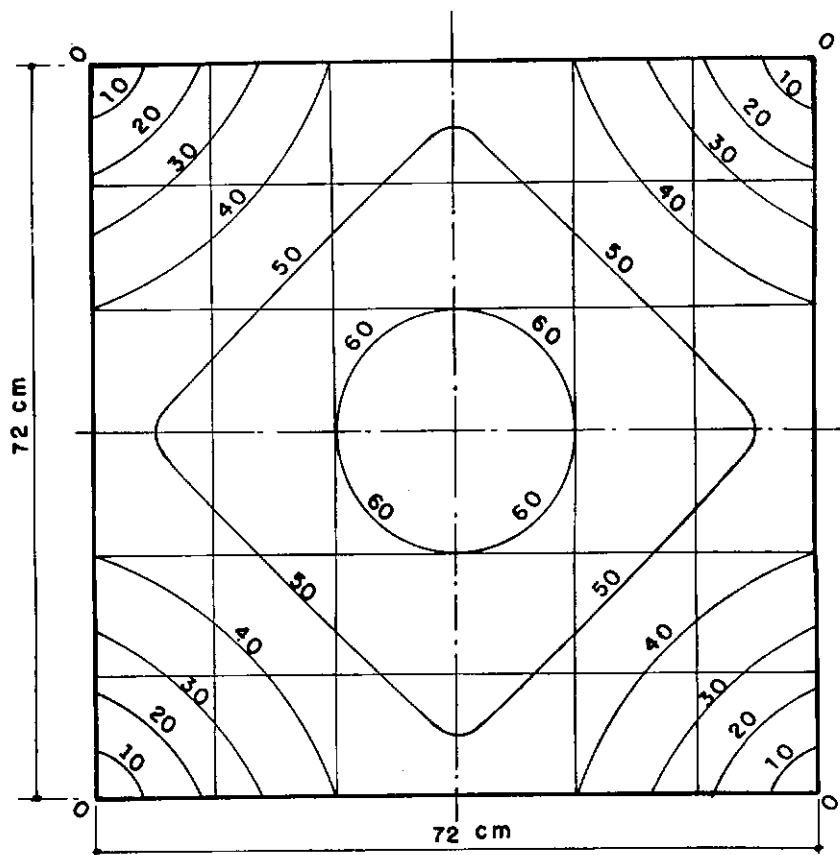


FIG. (7)

DESLOCAMENTOS VERTICAIS DA MEMBRANA, EM mm

PARA A CARGA  $q_z = 3,0 \text{ kg/m}^2$

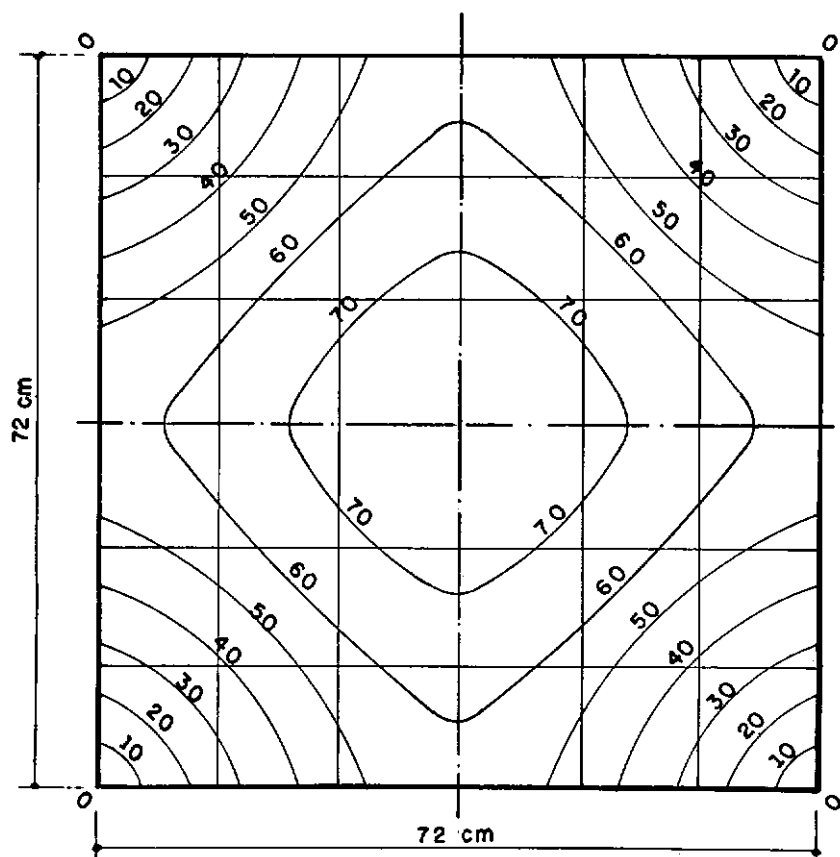


FIG. (8)

DESLOCAMENTOS VERTICAIS DA MEMBRANA, EM mm

PARA A CARGA  $q_3 = 4,5 \text{ kg/m}^2$

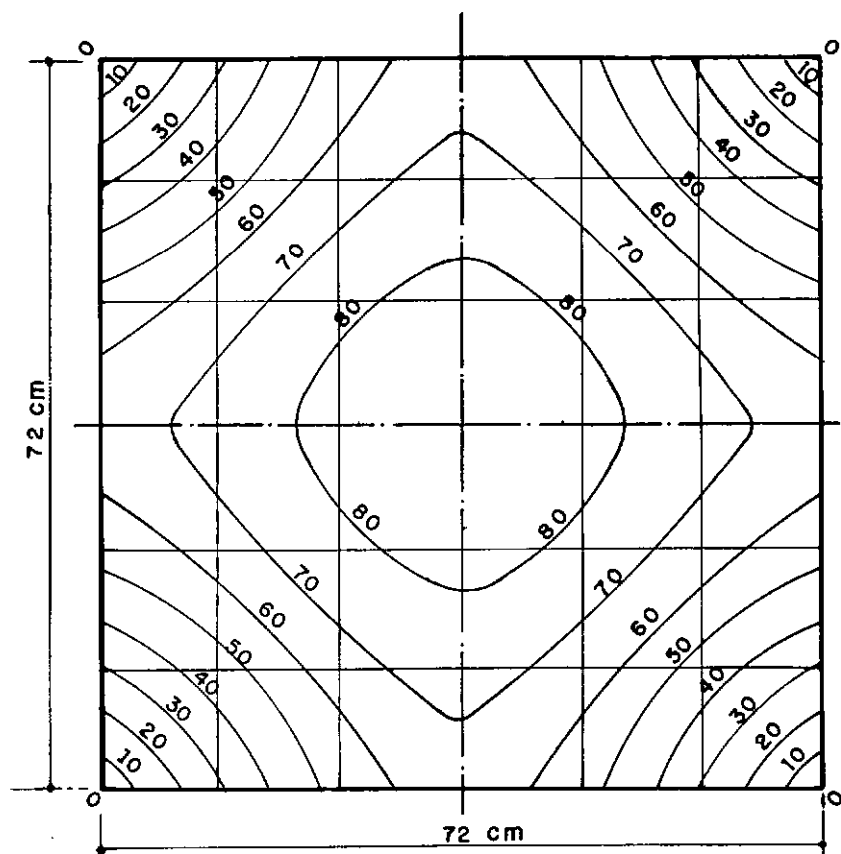


FIG. (9)

# DIAGRAMA CARGAS - FLEXAS MÁXIMAS

MEMBRANA 72x72x0,1 cm

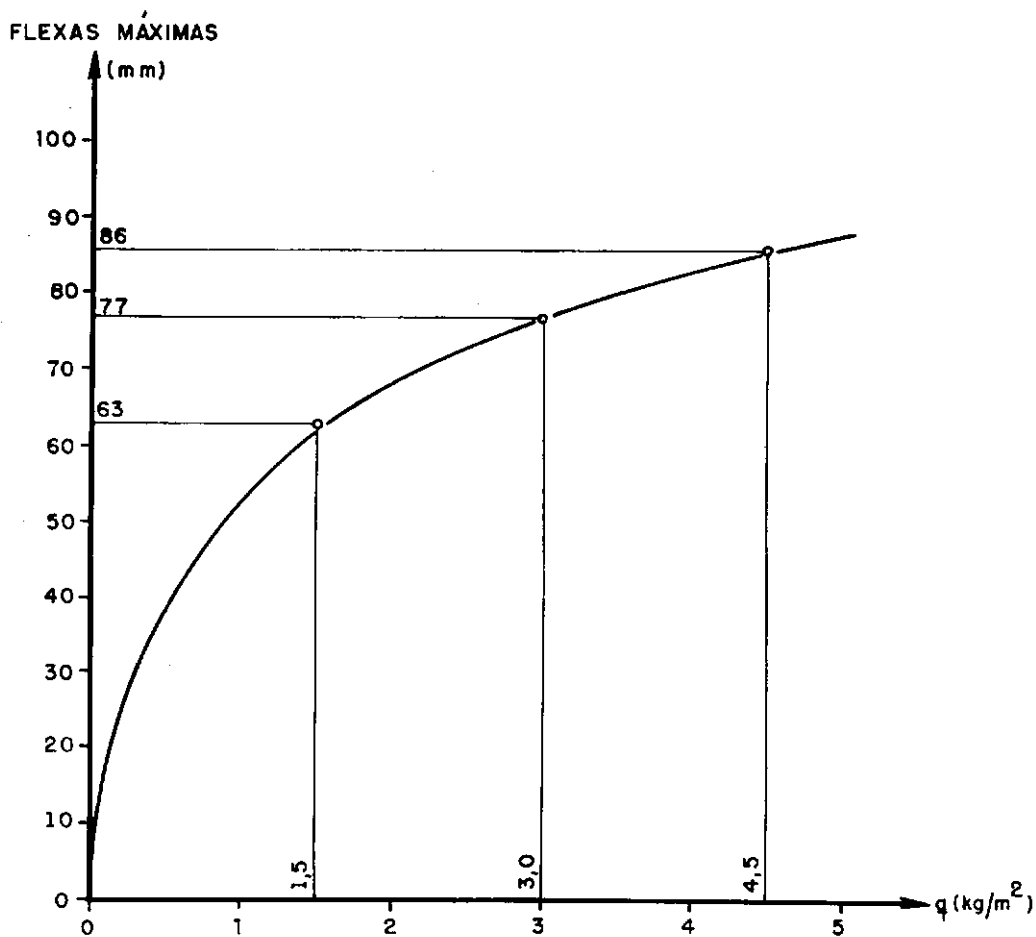


FIG. (10)

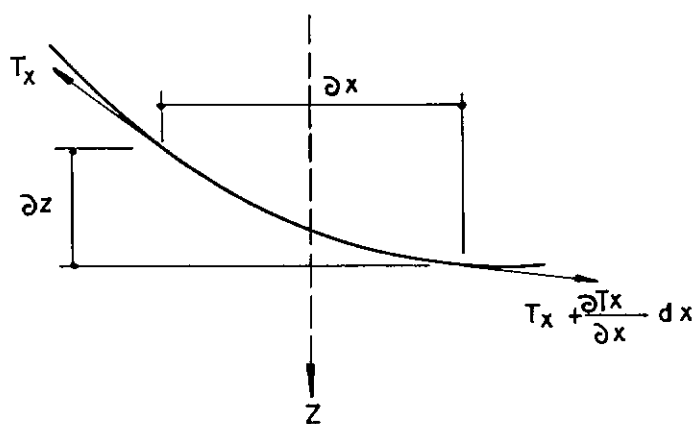


FIG. (11)

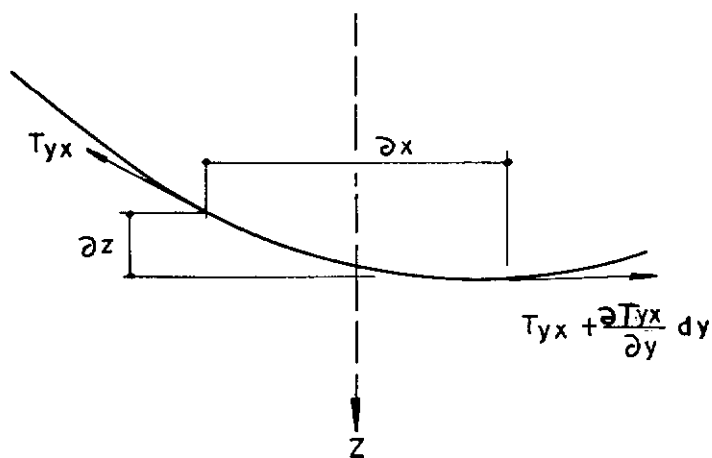


FIG. (12)



### 3.2 - Determinação das tensões máximas na membrana

No ponto central da membrana, sendo esta quadrada, o estado de tensões está representado na figura (13).

Nesse ponto central as tensões normais tem a mesma magnitude e a tensão tangencial  $T_{xy}$  é nula.

Como esse ponto central apresenta a flecha máxima, temos que nesse ponto:

$$\left. \begin{aligned} T_{xy} &= 0 \\ T_x &= T_y \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \text{ rel. (10)}$$

Aplicando os valores da relação (10) na relação (9):

$$\boxed{2 T_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + q = 0} \quad \text{rel. (11)}$$

As forças normais por unidade de comprimento no ponto central da membrana são dados por:

$$T_x = T_y = - \frac{q}{2} \frac{1}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}$$

Se utilizarmos diferenças finitas centrais com as subdivisões apresentadas na figura (1):

$$T_x = T_y = - \frac{q}{2} \frac{1}{\frac{2}{a^2} (z_{15} - z_{16})}$$

$$T_x = T_y = - \frac{q a^2}{4} \frac{1}{(z_{15} - z_{16})} \quad \text{rel. (12)}$$

As tensões normais no centro da membrana são as correspondentes às forças  $T_x$  e  $T_y$  no centro da mesma.

Chamando  $h$  a espessura da membrana:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{T_x}{h} = - \frac{q a^2}{4 h} \frac{1}{(z_{15} - z_{16})}$$

rel. 913)

As tensões normais que aparecerão nos vértices da membrana segundo as direções X e Y serão denominadas  $\sigma_{x_v}$  e  $\sigma_{y_v}$ .

Nos vértices a soma das projeções dessas forças nor-

mais, no eixo dos  $z$ , será igual à quarta parte da resultante da carga  $q$  sobre a membrana.

Consideremos um dos vértices da membrana de dimensões  $A \cdot A$ , conforme mostra a figura (14).

Sendo  $a$  a distância entre o ponto próximo da periferia da membrana e o vértice, a força média segundo a aresta entre esses pontos será  $T_{x_v \text{ méd}}$ .  $a$  que devido à membrana ser quadrada é igual à  $T_{y_v \text{ méd}}$ .  $a$

Podemos então escrever a condição de equilíbrio das forças nos vértices da membrana.

$$\boxed{2 T_{x_v} \cdot a \cdot \sin \alpha = \frac{q A^2}{4}} \quad \text{rel. (14)}$$

Sabendo-se que  $\text{tg } \alpha = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\text{vértice}} =$

$= \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_{\text{vértice}}$ , temos:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{\text{tg}^2 \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha}}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}}$$

Substituindo esse valor de  $\sin \alpha$  na rel. (14):

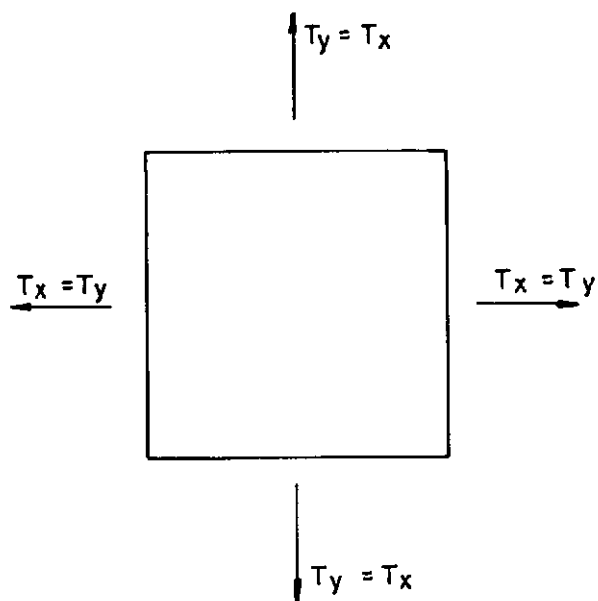


FIG. (13)

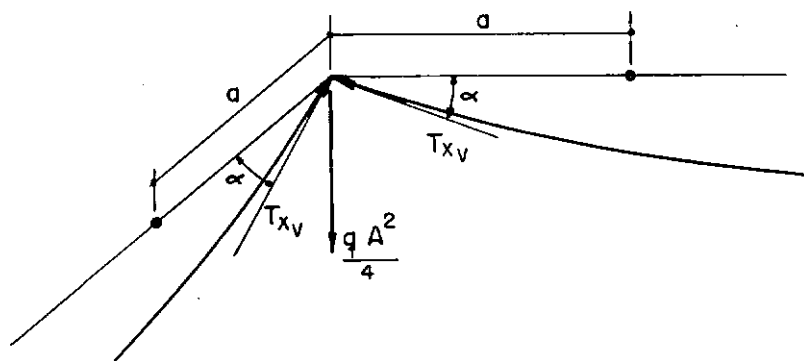


FIG. (14)

$$\pm 2 T_{x_v} a \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} = \frac{q A^2}{4}$$

ou

$$T_{x_v} = T_{y_v} = \pm \frac{q A^2}{8a} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}$$

rel. (15)

Utilizando diferenças finitas com as subdivisões apresentadas na figura (1):

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\text{vértice}} = \frac{1}{a} (z_2 - z_1)$$

Logo:

$$T_{x_v} = T_{y_v} = \pm \frac{q A^2}{8a} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{a^2} (z_2 - z_1)^2}{\frac{1}{a^2} (z_2 - z_1)^2}}$$

ou

$$T_{x_v} = T_{y_v} = \pm \frac{q A^2}{8a} \sqrt{\frac{a^2 + (z_2 - z_1)^2}{(z_2 - z_1)^2}}$$

rel. (16)

Como  $z_1 = 0$ , as tensões segundo X e Y nos vértices serão: (\*)

$$\sigma_{x_v} = \sigma_{y_v} = \frac{T_{x_v}}{h} = \pm \frac{q A^2}{8ah} \sqrt{\frac{a^2 + z_2^2}{z_2^2}}$$

rel. (17)

Comparemos as tensões no centro da membrana com as tensões nos vértices.

$$\begin{aligned} \text{no centro} : \sigma_x &= \frac{q a^2}{4h} \frac{1}{z_{15} - z_{16}} = \\ &= - \frac{q a^2}{h} \left( \frac{1}{4} \frac{1}{z_{15} - z_{16}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{nos vértices: } \sigma_{x_v} &= \pm \frac{q A^2}{8ah} \sqrt{\frac{a^2 + z_2^2}{z_2^2}} = \pm \\ &\pm \frac{q a^2}{h} \left( 4,5 \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{z_2}{a}\right)^2}{z_2^2}} \right) \approx \\ &\approx \pm \frac{q a^2}{h} \left( 4,5 \sqrt{\frac{1}{z_2^2}} \right) = \pm \frac{q a^2}{h} \left( \frac{4,5}{z_2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{comparando esses valores: } k \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{z_{15} - z_{16}} = \frac{4,5}{z_2}$$

(\*) - essas tensões são relativas a pontos infinitamente próximos aos vértices.

$$\therefore k = 18 \frac{z_{15} - z_{16}}{z_2}$$

para as experiências realizadas com os três tipos de carregamento, temos:

$$1^{\circ} \text{ carregamento: } |z_{15} - z_{16}| = 3 \quad ; \quad z_2 = 22 \quad ;$$

$$\frac{z_{15} - z_{16}}{z_2} = \frac{3}{22}$$

$$2^{\circ} \text{ carregamento: } |z_{15} - z_{16}| = 3 \quad ; \quad z_2 = 25 \quad ;$$

$$\frac{z_{15} - z_{16}}{z_2} = \frac{3}{25}$$

$$3^{\circ} \text{ carregamento: } |z_{15} - z_{16}| = 4 \quad ; \quad z_2 = 30 \quad ;$$

$$\frac{z_{15} - z_{16}}{z_2} = \frac{4}{30}$$

tomando-se um valor médio, temos:  $\left( \frac{z_{15} - z_{16}}{z_2} \right)_{\text{méd}} = 0,14$

$$\text{Então } k = 18 \cdot 0,14 = 2,52 > 1$$

Daí, verificamos que as tensões nos vértices são 2,52 vezes maiores que as tensões no centro da membrana, pa ra esse caso particular estudado.

Devemos então, para efeito de verificação da estabilidade da membrana, levar em conta as tensões nos vértices.

No quadro (4) estão representados os valores das tensões no centro e nos vértices da membrana de 72 x 72 x 0,1 cm para os três carregamentos utilizados.

QUADRO (4)

Tensões no centro e nos vértices da membrana de  
72 x 72 x 0,1 cm

CARGA q (kg/m <sup>2</sup> )	TENSÕES NO CENTRO (kg/cm <sup>2</sup> )	TENSÕES NOS VÉRTICES (kg/cm <sup>2</sup> )
1,5	0,180	0,448
3,0	0,360	0,795
4,5	0,405	1,000

3.3 - Determinação do módulo de elasticidade longitudinal da borracha utilizada

O módulo de elasticidade longitudinal do material da membrana será determinado através de medições realizadas em laboratório.

Tomaremos duas amostras desse material e vamos traçar os seus diagramas tensão-deformação e obter para cada um deles um valor do seu módulo de elasticidade. Tomaremos



então, a média entre os valores obtidos.

Utilizaremos para o ensaio do módulo de elasticidade duas peças de 400 x 20 x 1 mm da borracha em estudo, cortadas em duas direções perpendiculares da amostra.

Na parte média dessas peças marcaremos dois traços distantes entre si de 100 mm . Esses traços servirão de base para as nossas medidas.

Colaremos duas peças de madeira de 40 x 20 x 5 mm em uma das extremidades da peça de borracha, uma de cada lado e faremos o mesmo na outra extremidade. Utilizaremos a cola Araldite.

Sustentaremos então uma das extremidades da peça contra um perfil metálico situado à uma certa altura do chão, utilizando uma garra.

Na outra extremidade da peça faremos um furo nas placas de madeira e aí colocaremos um gancho que irá receber um prato de balança, aonde serão postos os pesos, conforme a figura (15).

Utilizaremos os seguintes pesos: peso do prato (30g), peso do prato mais 100g (130g), peso do prato mais 200g (230g), peso do prato mais 300g (330g), peso do prato mais 400g (430g), peso do prato mais 500g (530g).

Para as medidas dos acréscimos de comprimento da base de medida de 100 mm, utilizaremos um catetômetro WILD HEERBRUGG tipo KM343, com precisão de décimo de milímetro.

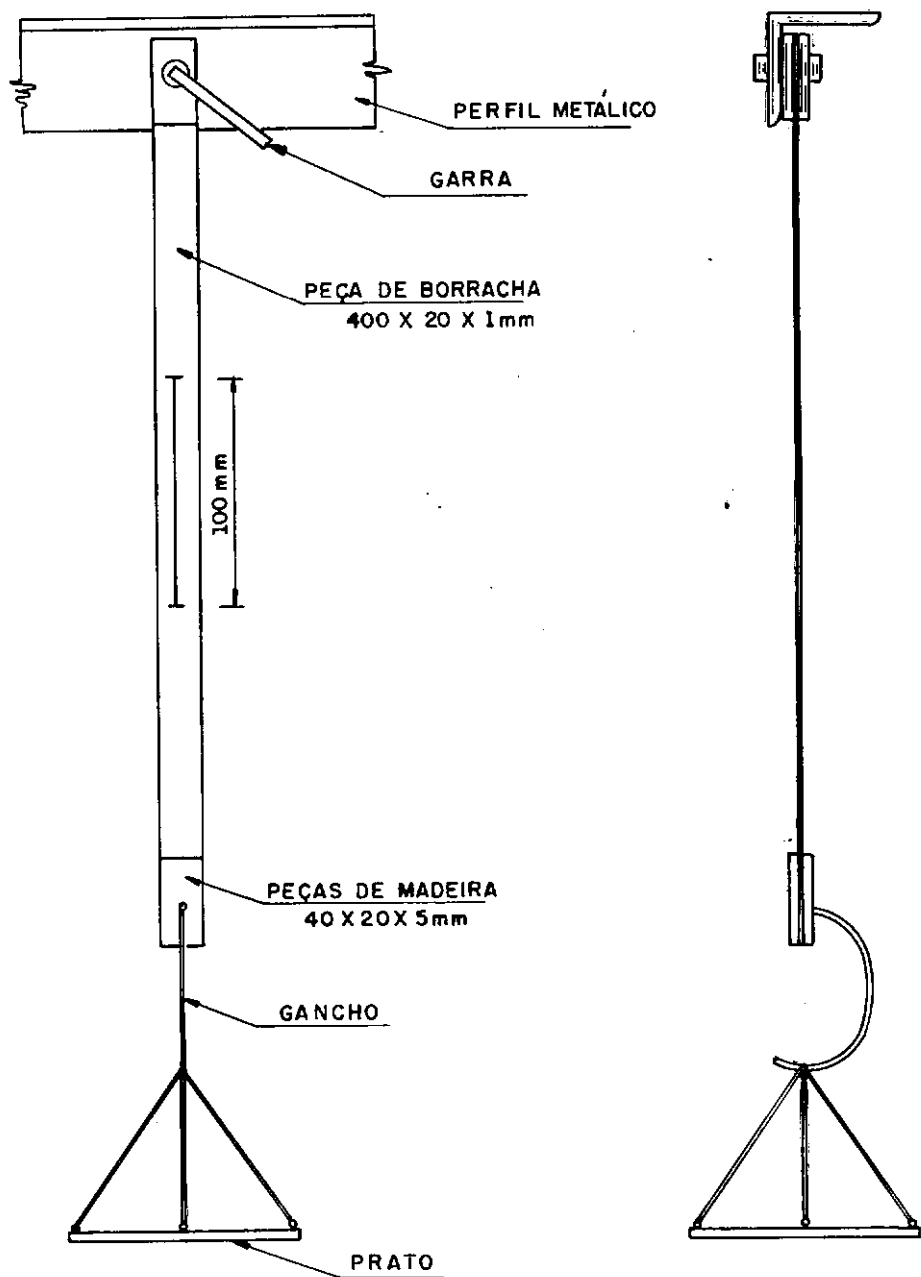


FIG.(15)

Sendo a seção transversal da peça de 20 x 1 mm ou seja  $0,20 \text{ cm}^2$ , as tensões que utilizaremos serão obtidas dividindo-se a carga aplicada em kg, por  $0,20 \text{ cm}^2$ .

Leremos o comprimento da base de medida e para cada um desses carregamentos obteremos um novo comprimento.

Os acréscimos  $\Delta \ell$  serão obtidos pela diferença entre os novos comprimentos e o comprimento inicial da base de medida.

As deformações relativas serão encontradas, dividindo-se os acréscimos  $\Delta \ell$  pelo comprimento inicial da base de medidas.

Os resultados das tensões e deformações para cada uma das duas amostras estão representados nos quadros (5) e (6).

Podemos então traçar os diagramas tensão-deformação para cada uma dessas amostras e ajustar entre elas um valor médio, conforme a figura (16).

O valor aproximado do módulo de elasticidade longitudinal  $E$  desse material em estudo será obtido pela tangente na origem à curva tensão-deformação ajustada.

Através da figura(16)calculamos:

$$E = \text{tg } \alpha \approx 47,5 \text{ kg/cm}^2$$

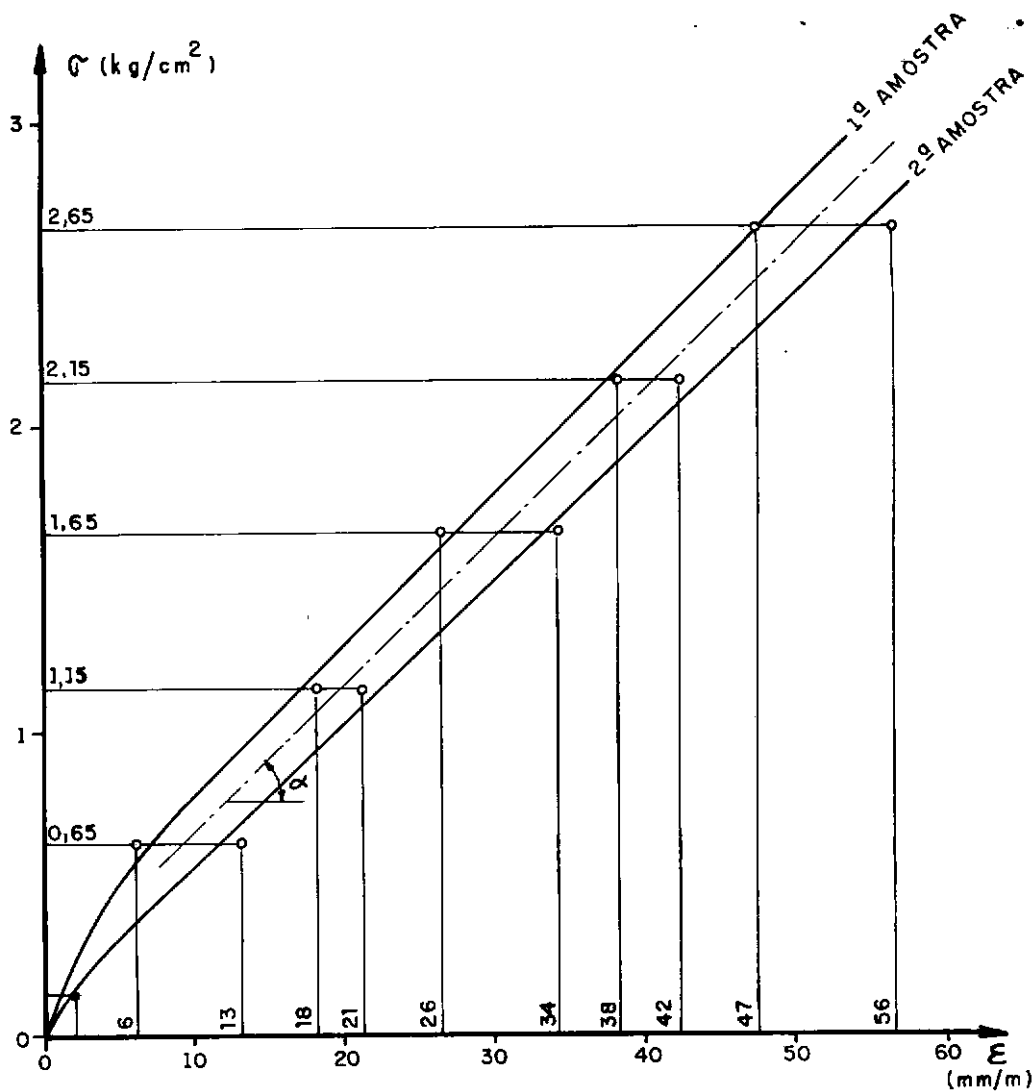


FIG. (16)

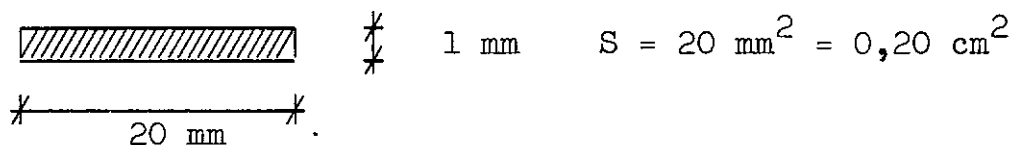
1ª AMOSTRA



QUADRO (5)

PESO (g)	TENSÃO NORMAL $\sigma$ (kg/cm <sup>2</sup> )	COMPR. INICIAL $l$ (x 10 <sup>-3</sup> m)	ACRÉSCIMO $\Delta l$ (x 10 <sup>-3</sup> m)	DEFORMAÇÃO $\epsilon = \Delta l / l$
30	0,15	100,1	0,2	0,002
130	0,65	100,1	0,6	0,006
230	1,15	100,1	1,8	0,018
330	1,65	100,1	2,6	0,026
430	2,15	100,1	3,8	0,038
530	2,65	100,1	4,7	0,047

2ª AMOSTRA



QUADRO (6)

PESO (g)	TENSÃO NORMAL $\sigma$ (kg/cm <sup>2</sup> )	COMPR. INICIAL $l$ (x 10 <sup>-3</sup> m)	ACRÉSCIMO $\Delta l$ (x 10 <sup>-3</sup> m)	DEFORMAÇÃO $\epsilon = \Delta l / l$
30	0,15	100,1	0,2	0,002
130	0,65	100,1	1,3	0,013
230	1,15	100,1	2,1	0,021
330	1,65	100,1	3,4	0,034
430	2,15	100,1	4,2	0,042
530	2,65	100,1	5,6	0,056

## CAPÍTULO 4

### Conclusões

A equação diferencial que caracteriza o comportamento das membranas elásticas é de solução extremamente difícil. Não encontramos em nossa pesquisa bibliográfica referências que justifiquem esperanças na integração da mesma.

O método numérico das diferenças finitas foi o recurso de que lançamos mão para procurar resolver o problema, se bem que com as limitações inerentes à ferramenta matemática utilizada.

Pensamos continuar nossos estudos em nível mais adiantado, explorando esse ângulo que, a nosso entender, representa o fator de maior significação e dificuldade.

Para vencer os impecilhos acima referidos, fomos levados a utilizar um modelo físico com vistas a determinar experimentalmente os fatores necessários à definição dos deslocamentos verticais em vários pontos da membrana, com o que nos foi possível utilizar esses resultados para, através de deduções matemáticas, determinar tensões em pontos característicos da mesma.

Os resultados obtidos são coerentes e mostram a possibilidade de se adotar a marcha de cálculo sugerida, para se verificar o dimensionamento de membranas elásticas do tipo das que estudamos.

Consideramos os estudos que desenvolvemos como passo inicial para o trato de questões relacionadas com esse tipo de estrutura.

É conveniente que eles sejam continuados em estágios mais evoluídos, visando não só encontrar soluções para o problema, como principalmente verificar a influência de outros tipos de apóio e carregamentos, bem como no aspecto construtivo considerar o caso da drenagem das águas pluviais e calcular o efeito dinâmico do vento.

Os tipos de apóio e de dispositivos de montagem da membrana, poderão ser objeto de estudos mais detalhados, aspectos esses que envolvem considerações de montagem e operacionais importantes para o emprêgo prático de tal gênero de estrutura.

\* \* \*



## SIMBOLOGIA

A	- comprimento das arestas da membrana
a	- comprimento do trecho da malha em que foi dividida a membrana
q	- carregamento uniformemente distribuído que atua na membrana
h	- espessura da membrana
E	- módulo de elasticidade longitudinal do material da membrana
G	- módulo de elasticidade transversal do material da membrana
$\nu$	- coeficiente de Poisson do material da membrana
T	- forças por unidade de comprimento
z	- deslocamentos verticais de pontos da membrana
dx, dy	- comprimentos de um elemento infinitesimal da membrana, nas direções X e Y
du, dv, dz	- diferenciais dos deslocamentos de um elemento infinitesimal da membrana, segundo as direções X, Y e z
$\epsilon_x, \epsilon_y$	- deformações relativas de um elemento infinitesimal da membrana, segundo as direções X e Y
$\gamma_{xy}$	- distorção de um elemento infinitesimal da membrana, segundo o plano XY
F	- função-tensão da membrana, associada à T e h
c	- deslocamento vertical máximo das arestas da membrana, para um determinado carregamento

- $\theta_i$  - valor de uma função qualquer contínua num ponto  $i$
- $A_j$  - coeficiente da expressão de Lagrange, para interpolação de uma função  $\theta$  num ponto  $i$ , vizinho à  $j$  pontos cujo valores de  $\theta$  são conhecidos
- $w_k$  - expressões em função de  $z$
- $\sigma_x, \sigma_y$  - tensões normais atuantes em um ponto da membrana, segundo as direções  $X$  e  $Y$
- $\alpha$  - ângulo que a tangente à aresta da membrana nos vértices forma com a horizontal
- $k$  - coeficiente utilizado para comparação.

\* \* \*

BIBLIOGRAFIA

- 1 - DAVIES, R.M. - Space Structures, Oxford and Edinburgh, Blackwell Scientific Publications, 1967.
- 2 - OTTO, FREI/TROSTEL, R. - Tensile Structures, vol. I, Massachussets Institute of Technology Press, 1970
- 3 - TIMOSHENKO, S.P./GOODIER, J.N. - Theory of Elasticity, Mc.Graw - Hill Book Co., 1970.
- 4 - TIMOSHENKO, S.P./WOINOWSKY - KRIEGER, S. - Theory of Plates and Shells, Mc. Graw-Hill Book Co., 1970.
- 5 - AMES, W.F. - Non-Linear Partial Differential Equations, New York, Academic Press, 1971.
- 6 - DUGAR'YAN, S.M. - Theory of Shells and Plates, Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1966.
- 7 - BATEMAN, H. - Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1964.
- 8 - ABRAMOWITZ, MILTON/STEGUN, IRENE A. - Handbook of Mathematical Functions, New York, Dover Publications, Incorporation, 1965.
- 9 - HENCKY, H. - Die Berechnung dünner rechteckiger Platten mit verschwindender Biegungsteifigkeit, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 1, V.D.I. Ver-

lag G.M.B.H., Berlin, 1921.

- 10 -KAISER, RUDOLF - Rechnerische und experimentelle Ermittlung der Durchbiegungen und Spannungen von quadratischen Platten bei freier Auflagerung an den Rändern, Ränder, gleichmäßig verteilter Last und groben Ausbiegungen, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 16, V.D.I. - Verlag G.M.B.H. - Berlin, 1936

\* \* \*

amm

A N E X O (1)

A N E X O (2)

A N E X O (1)

// JCB T COFF 10FF

CTCN05B4

(8004,65170734)

NUCLEO DE COMPUTACAO ELETRONICA - UFRJ

CCCC	COFF	00FF	CCCC
CC01	1CFF	10FF	CC01

V2 M09 ACTUAL 32K CCNFIG 32K

// FCR ALGUSTO BENEDITO CTONI NETO

\*CNE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

SUBROUTINE CTCNI(A,B,N,KS)

DIMENSION A(1),B(1)

TCL = C.

KS = C

JJ = -N

DO 65 J = 1,N

JY = J + 1

JJ = JJ + N + 1

BIGA = 0.

IT = JJ - J

DO 30 I = J,N

IJ = IT + I

IF(ABS(BIGA)-ABS(A(IJ))) 20,30,30

20 BIGA = A(IJ)

IMAX = I

30 CONTINUE

IF(ABS(BIGA)-TCL) 35,35,40

35 KS = 1

RETURN

40 I1 = J + N\*(J-2)

IT = IMAX - J

DO 50 K = J,N

I1 = I1 + N

I2 = I1 + IT

SAVE = A(I1)

A(I1) = A(I2)

A(I2) = SAVE

50 A(I1) = A(I1) / BIGA

SAVE = B(IMAX)

B(IMAX) = B(J)

B(J) = SAVE/BIGA

IF(J-N) 55,70,55

55 ICS = N\*(J-1)

DO 65 IX = JY,N

IXJ = ICS + IX

IT = J - IX

DO 60 JX = JY,N

IXJX = N\*(JX-1) + IX

JJX = IXJX + IT

60 A(IXJX) = A(IXJX) - (A(IXJ) \* A(JJX))

65 B(IX) = B(IX) - (B(J)\*A(IXJ))

70 NY = N - 1

IT = N \* N

DO 80 J = 1,NY

IA = IT - J

IB = N - J



```

      IC = N
      DO 80 K = 1,J
      P(1K) = P(1K) - A(1A)*B(1C)
      1A = 1A - N
80  IC = IC - 1
      RETURN
      END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR CTCNI  
COMMON      C    VARIABLES      32    PROGRAM      506

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0025 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE      WS    0A    CTCNI  
CART ID 00FF    DB ADDR 58D0    DB CNT    0021

// FOR      AUGUSTO BENEDITO CTCNI NETO

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ICCS(2501READER,1403PRINTER)

```

      DIMENSION Z(16),W(9),A(9,9),B(9)
      WRITE(5,100)
100  FORMAT('  ', 'CALCULO DE MEMBRANAS -TESE- AUGUSTO BENEDITO OTONI NE
      1TC',/)
      WRITE(5,101)
101  FORMAT('  DEFLEXOES DA MEMBRANA',/)
      READ(8,102)((Z(I),I=1,16)
102  FORMAT(8F10.5,/8F10.5)
      WRITE(5,103)(I,Z(I),I=1,16)
103  FORMAT('  Z(',I2,',') =',F10.5,' CM',/)
      READ(8,104)E
104  FORMAT(F10.1)
      WRITE(5,105)E
105  FORMAT('  MODULO DE ELASTICIDADE E =',F10.1,' QUILOS POR CENTIMETR
      10 QUADRADO',/)
      W(1) = (((-9.*Z(6)+12.*Z(7)-3.*Z(8)+12.*Z(10)-16.*Z(11)+4.*Z(12)-3.
      1*Z(14)+4.*Z(15)-Z(16))*2.)/16.) - (Z(6)-2.*Z(7)+Z(8))*(Z(6)-2.*Z(
      210)+Z(14))
      W(2) = (((-3.*Z(6)+3.*Z(8)+4.*Z(10)-4.*Z(12)-Z(14)+Z(16))*2.)/16.)
      1-(Z(6)-2.*Z(7)+Z(8))*(Z(7)-2.*Z(11)+Z(15))
      W(3) = (2.*Z(8)-2.*Z(7))*(Z(8)-2.*Z(12)+Z(16))
      W(4) = (((-3.*Z(6)+4.*Z(7)-Z(8)+3.*Z(14)-4.*Z(15)+Z(16))*2.)/16.)
      1- (Z(10)-2.*Z(11)+Z(12))*(Z(6)-2.*Z(10)+Z(14))
      W(5) = (((Z(14)+Z(8)-Z(6)-Z(16))*2.)/16.) - (Z(10)-2.*Z(11)+Z(12))
      1*(Z(7)-2.*Z(11)+Z(15))
      W(6) = (2.*Z(12)-2.*Z(11)) * (Z(8)-2.*Z(12)+Z(16))
      W(7) = (2.*Z(14)-2.*Z(10)) * (Z(14)-2.*Z(15)+Z(16))
      W(8) = (2.*Z(15)-2.*Z(11)) * (Z(14)-2.*Z(15)+Z(16))
      W(9) = (2.*Z(16)-2.*Z(15)) * (2.*Z(12)-2.*Z(16))
      READ(8,106)((A(M,N),N=1,9),M=1,9)

```

```

106 FORMAT(9F8.2)
    WRITE(5,107)
107 FORMAT('  MATRIZ A',/)
    WRITE(5,108)((A(M,N),N=1,9),M=1,9)
108 FORMAT(9F8.2,/)
    WRITE(5,109)(J,W(J),J=1,9)
109 FORMAT('  W(',12,') =',F10.3,/)
    DO 200 J=1,9
200  B(J) = E*W(J)
    CALL CTCNI(A,B,9,KS)
    WRITE(5,111)
111 FORMAT('  VALORES DAS FUNCOES TENSAC NOS PONTOS CONSIDERADOS',/)
    WRITE(5,112)B
112 FORMAT(' ',5F20.3,/' ',4F20.3)
    CALL EXIT
    END

```

FEATURES SUPPORTED  
 ONE WORD INTEGERS  
 ICCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
 COMMON C VARIABLES 270 PROGRAM 978

END OF COMPILATION

// XEQ

A N E X O (2)

// JOB T 00FF 10FF

OTON10C4

(8004,65170734

NUCLEO DE COMPUTACAO ELETRONICA - UFRJ

0000	00FF	00FF	0000
0001	10FF	10FF	0001

V2 M09 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR AUGUSTO BENEDITO OTONI NETO

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

SUBROUTINE OTONI(A,B,N,KS)

DIMENSION A(1),B(1)

TOL = 0.

KS = 0

JJ = -N

DO 65 J = 1,N

JY = J + 1

JJ = JJ + N + 1

BIGA = 0.

IT = JJ - J

DO 30 I = J,N

IJ = IT + I

IF(ABS(BIGA)-ABS(A(IJ))) 20,30,30

20 BIGA = A(IJ)

IMAX = I

30 CONTINUE

IF(ABS(BIGA)-TOL) 35,35,40

35 KS = 1

RETURN

40 I1 = J + N\*(J-2)

IT = IMAX - J

DO 50 K = J,N

I1 = I1 + N

I2 = I1 + IT

SAVE = A(I1)

A(I1) = A(I2)

A(I2) = SAVE

50 A(I1) = A(I1) / BIGA

SAVE = B(IMAX)

B(IMAX) = B(J)

B(J) = SAVE/BIGA

IF(J-N) 55,70,55

55 IQS = N\*(J-1)

DO 65 IX = JY,N

IXJ = IQS + IX

IT = J - IX

DO 60 JX = JY,N

IXJX = N\*(JX-1) + IX

JJX = IXJX + IT

60 A(IXJX) = A(IXJX) - (A(IXJ) \* A(JJX))

65 B(IX) = B(IX) - (B(J)\*A(IXJ))

70 NY = N - 1

IT = N \* N

DO 80 J = 1,NY

IA = IT - J

IB = N - J

```

      IC = N
      DO 80 K = 1,J
      B(IB) = B(IB) - A(IA)*B(IC)
      IA = IA - N
80    IC = IC - 1
      RETURN
      END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR OTONI  
COMMON 0 VARIABLES 32 PROGRAM 506

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0025 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE WS UA OTONI  
CART ID 00FF DB ADDR 5970 DB CNT 0021

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*IOCS(2501READER,1403PRINTER)

DIMENSION A(9,9),B(9),F(9)

WRITE(5,100)

100 FORMAT(' ','DETERMINACAO DOS Z',//)

READ(8,101)(F(L),L=1,9)

101 FORMAT(9F8.2)

F6 = F(1)

F7 = F(2)

F8 = F(3)

F10= F(4)

F11= F(5)

F12= F(6)

F14= F(7)

F15= F(8)

F16= F(9)

A(1,1) = -(65./8.)\*F6+(92./8.)\*F7-(19./8.)\*F8+(65./8.)\*F10-(108./8.)\*F11+(27./8.)\*F12-(19./8.)\*F14+(36./8.)\*F15-(9./8.)\*F16

A(1,2) = (92./8.)\*F6-(144./8.)\*F7+(36./8.)\*F8-(76./8.)\*F10+(144./8.)\*F11-(36./8.)\*F12+(20./8.)\*F14-(48./8.)\*F15+(12./8.)\*F16

A(1,3) = -(19./8.)\*F6+(36./8.)\*F7-(9./8.)\*F8+(11./8.)\*F10-(36./8.)\*F11+(9./8.)\*F12-(1./8.)\*F14+(12./8.)\*F15-(3./8.)\*F16

A(1,4) = (65./8.)\*F6-(76./8.)\*F7+(11./8.)\*F8-(81./8.)\*F10+(108./8.)\*F11-(27./8.)\*F12+(27./8.)\*F14-(36./8.)\*F15+(9./8.)\*F16

A(1,5) = -(108./8.)\*F6+(144./8.)\*F7-(36./8.)\*F8+(108./8.)\*F10+(144./8.)\*F11+(36./8.)\*F12-(36./8.)\*F14+(48./8.)\*F15-(12./8.)\*F16

A(1,6) = (27./8.)\*F6-(36./8.)\*F7+(9./8.)\*F8-(27./8.)\*F10+(36./8.)\*F11-(9./8.)\*F12+(9./8.)\*F14-(12./8.)\*F15+(3./8.)\*F16

A(1,7) = -(19./8.)\*F6+(20./8.)\*F7-(1./8.)\*F8+(27./8.)\*F10-(36./8.)\*F11-(9./8.)\*F12-(9./8.)\*F14+(12./8.)\*F15-(3./8.)\*F16

A(1,8) = (36./8.)\*F6-(48./8.)\*F7+(12./8.)\*F8-(36./8.)\*F10+(48./8.)\*F11-(12./8.)\*F12+(12./8.)\*F14-(16./8.)\*F15+(4./8.)\*F16

$A(1,9) = -(9./8.)*F6+(12./8.)*F7-(3./8.)*F8+(9./8.)*F10-(12./8.)*F11+(3./8.)*F12-(3./8.)*F14+(4./8.)*F15-(1./8.)*F16$   
 $A(2,1) = -(9./8.)*F6+F7+(9./8.)*F8+(12./8.)*F10-2.*F11-(12./8.)*F12-(3./8.)*F14+F15+(3./8.)*F16$   
 $A(2,2) = F6-4.*F7+F8+4.*F11-2.*F15$   
 $A(2,3) = (9./8.)*F6+F7-(9./8.)*F8-(12./8.)*F10-2.*F11+(12./8.)*F12+1+(3./8.)*F14+F15-(3./8.)*F16$   
 $A(2,4) = (12./8.)*F6-(12./8.)*F8-2.*F10+2.*F12+(4./8.)*F14-(4./8.)*F16$   
 $A(2,5) = -2.*F6+4.*F7-2.*F8$   
 $A(2,6) = -(12./8.)*F6+(12./8.)*F8+2.*F10-2.*F12-(4./8.)*F14+(4./8.)*F16$   
 $A(2,7) = -(3./8.)*F6+(3./8.)*F8+(4./8.)*F10-(4./8.)*F12-(1./8.)*F14+(1./8.)*F16$   
 $A(2,8) = F6-2.*F7+F8$   
 $A(2,9) = (3./8.)*F6-(3./8.)*F8-(4./8.)*F10+(4./8.)*F12+(1./8.)*F14-1-(1./8.)*F16$   
 $A(3,1) = 0.$   
 $A(3,2) = 2.*F8-4.*F12+2.*F16$   
 $A(3,3) = 2.*F7-4.*F8+4.*F12-2.*F16$   
 $A(3,4) = 0.$   
 $A(3,5) = 0.$   
 $A(3,6) = -4.*F7+4.*F8$   
 $A(3,7) = 0.$   
 $A(3,8) = 0.$   
 $A(3,9) = 2.*F7-2.*F8$   
 $A(4,1) = -(9./8.)*F6+(12./8.)*F7-(3./8.)*F8+F10-2.*F11+F12+(9./8.)*F14-(12./8.)*F15+(3./8.)*F16$   
 $A(4,2) = (12./8.)*F6-2.*F7+(4./8.)*F8-(12./8.)*F14+2.*F15-(4./8.)*F16$   
 $A(4,3) = -(3./8.)*F6+(4./8.)*F7-(1./8.)*F8+(3./8.)*F14-(4./8.)*F15+1+(1./8.)*F16$   
 $A(4,4) = F6-4.*F10+4.*F11-2.*F12+F14$   
 $A(4,5) = -2.*F6+4.*F10-2.*F14$   
 $A(4,6) = F6-2.*F10+F14$   
 $A(4,7) = (9./8.)*F6-(12./8.)*F7+(3./8.)*F8+F10-2.*F11+F12-(9./8.)*F14+(12./8.)*F15-(3./8.)*F16$   
 $A(4,8) = -(12./8.)*F6+2.*F7-(4./8.)*F8+(12./8.)*F14-2.*F15+(4./8.)*F16$   
 $A(4,9) = (3./8.)*F6-(4./8.)*F7+(1./8.)*F8-(3./8.)*F14+(4./8.)*F15-1-(1./8.)*F16$   
 $A(5,1) = -(1./8.)*F6+(1./8.)*F8+(1./8.)*F14-(1./8.)*F16$   
 $A(5,2) = F10-2.*F11+F12$   
 $A(5,3) = (1./8.)*F6-(1./8.)*F8-(1./8.)*F14+(1./8.)*F16$   
 $A(5,4) = F7-2.*F11+F15$   
 $A(5,5) = -2.*F7-2.*F10+8.*F11-2.*F12-2.*F15$   
 $A(5,6) = F7-2.*F11+F15$   
 $A(5,7) = (1./8.)*F6-(1./8.)*F8-(1./8.)*F14+(1./8.)*F16$   
 $A(5,8) = F10-2.*F11+F12$   
 $A(5,9) = -(1./8.)*F6+(1./8.)*F8+(1./8.)*F14-(1./8.)*F16$   
 $A(6,1) = 0.$   
 $A(6,2) = 0.$   
 $A(6,3) = 2.*F11-2.*F12$   
 $A(6,4) = 0.$   
 $A(6,5) = 2.*F8-4.*F12+2.*F16$   
 $A(6,6) = -2.*F8-4.*F11+8.*F12-2.*F16$   
 $A(6,7) = 0.$

```

A(6,8) = 0.
A(6,9) = 2.*F11-2.*F12
A(7,1) = 0.
A(7,2) = 0.
A(7,3) = 0.
A(7,4) = 2.*F14-4.*F15+2.*F16
A(7,5) = 0.
A(7,6) = 0.
A(7,7) = 2.*F10-4.*F14+4.*F15-2.*F16
A(7,8) = 4.*F10+4.*F14
A(7,9) = 2.*F10-2.*F14
A(8,1) = 0.
A(8,2) = 0.
A(8,3) = 0.
A(8,4) = 0.
A(8,5) = 2.*F14-4.*F15+2.*F16
A(8,6) = 0.
A(8,7) = 2.*F11-2.*F15
A(8,8) = 4.*F11-2.*F14+8.*F15-2.*F16
A(8,9) = 2.*F11-2.*F15
A(9,1) = 0.
A(9,2) = 0.
A(9,3) = 0.
A(9,4) = 0.
A(9,5) = 0.
A(9,6) = 4.*F15-4.*F16
A(9,7) = 0.
A(9,8) = 4.*F12-4.*F16
A(9,9) = -4.*F12-4.*F15+8.*F16
WRITE(5,102) F6,F7,F8,F10,F11,F12,F14,F15,F16
102 FORMAT(' ', 'F6 =',F8.2,/, ' F7 =',F8.2,/, ' F8 =',F8.2,/, ' F10 =',
1',F8.2,/, ' F11 =',F8.2,/, ' F12 =',F8.2,/, ' F14 =',F8.2,/, ' F15
2 =',F8.2,/, ' F16 =',F8.2,/)
WRITE(5,103)
103 FORMAT(' MATRIZ A',//)
WRITE(5,104) ((A(I,J),J=1,9),I=1,9)
104 FORMAT(9F10.2,/)
READ(8,105) CONST
105 FORMAT(F10.2)
WRITE(5,106) CONST
106 FORMAT(' CONST =',F10.2,/)
C CONST E IGUAL A -Q VEZES A PEQUENO ELEV. A 4 SOBRE H
DO 200 J=1,9
200 B(J) = CONST
CALL OTONI(A,B,9,KS)
WRITE(5,107)
107 FORMAT(' FLEXAS NOS PONTOS CONSIDERADOS',/)
WRITE(5,108)B
108 FORMAT(' ',5F20.3,/' ',4F20.3)
CALL EXIT
END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON 0 VARIABLES 254 PROGRAM 2920

// JOB T COFF 10FF

CTON0584

(8004,65170734)

NUCLEO DE COMPUTACAO ELETRONICA - UFRJ

CCCC	COFF	00FF	CCCC
CCC1	1CFF	10FF	CC01

V2 PC9 ACTUAL 32K CCAFIG 32K

// FOR AUGUSTO BENEDITO CTONI NETO

\*CNE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

SUBROUTINE CTCNI(A,B,N,KS)

DIMENSION A(1),B(1)

TCL = 0.

KS = 0

JJ = -N

CC 05 J = 1,N

JY = J + 1

JJ = JJ + N + 1

BIGA = 0.

IT = JJ - J

CC 30 I = J,N

IJ = IT + I

IF(ABS(BIGA)-ABS(A(IJ))) 20,30,30

20 BIGA = A(IJ)

IMAX = I

30 CONTINUE

IF(ABS(BIGA)-TCL) 35,35,40

35 KS = 1

RETURN

40 II = J + N\*(J-2)

IT = IMAX - J

CC 50 K = J,N

I1 = II + N

I2 = I1 + IT

SAVE = A(I1)

A(I1) = A(I2)

A(I2) = SAVE

50 A(I1) = A(I1) / BIGA

SAVE = B(IMAX)

B(IMAX) = B(J)

B(J) = SAVE/BIGA

IF(J-N) 55,70,55

55 ICS = N\*(J-1)

CC 05 IX = JY,N

IXJ = ICS + IX

IT = J - IX

CC 00 JX = JY,N

IXJX = N\*(JX-1) + IX

JXX = IXJX + IT

60 A(IXJX) = A(IXJX) - (A(IXJ) \* A(JXX))

65 B(IX) = B(IX) - (B(J)\*A(IXJ))

70 NY = N - 1

IT = N \* N

CC 00 J = 1,NY

IA = IT - J

IT = N - J



```

      IC = A
      CC EC K = 1,J
      B(IH) = P(IH) - A(IA)*B(IC)
      IA = IA - A
80    IC = IC - 1
      RETLKA
      EAC

```

FEATLRES SUPPORTED  
CNE WORD INTEGERS

CERE REQUIREMENTS FOR CTCNI  
COMMON C VARIABLES 32 PROGRAM 506

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0025 (HEX)

END OF COMPILETIME

// CLP

\*STORE WS UA CTCNI  
CART IC OFF CB ADDR 5800 EB CNT 0021

// FOR AUGUSTO BENEDITO CTCNI NETO

\*CNE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ICCS(250,READER,1403,PRINTER)

```

      DIMENSION Z(16),W(9),A(9,9),B(9)
      WRITE(5,100)
100  FORMAT(' ','CALCULO DE MEMBRANAS -TESE- AUGUSTO BENEDITO OTONI NE
      ITC',//)
      WRITE(5,101)
101  FORMAT(' DEFLEXOES DA MEMBRANA',//)
      REAC(8,102)(Z(I),I=1,16)
102  FORMAT(8F10.5,/8F10.5)
      WRITE(5,103)(I,Z(I),I=1,16)
103  FORMAT(' Z(',I2,',) =',F10.5,' CM',//)
      REAC(8,104)E
104  FORMAT(F10.1)
      WRITE(5,105)E
105  FORMAT(' MÓDULO DE ELASTICIDADE E =',F10.1,' QUILOS POR CENTIMETR
      IC CLACRACC',//)
      W(1) = (((-9.*Z(6)+12.*Z(7)-3.*Z(8)+12.*Z(10)-16.*Z(11)+4.*Z(12)-3.
      1*Z(14)+4.*Z(15)-Z(16))*2.)/16.) - (Z(6)-2.*Z(7)+Z(8))*(Z(6)-2.*Z(
      210)+Z(14))
      W(2) = (((-3.*Z(6)+3.*Z(8)+4.*Z(10)-4.*Z(12)-Z(14)+Z(16))*2.)/16.)
      1-(Z(6)-2.*Z(7)+Z(8))*(Z(7)-2.*Z(11)+Z(15))
      W(3) = (2.*Z(8)-2.*Z(7))*(Z(8)-2.*Z(12)+Z(16))
      W(4) = (((-3.*Z(6)+4.*Z(7)-2*(8)+3.*Z(14)-4.*Z(15)+Z(16))*2.)/16.)
      1-(Z(10)-2.*Z(11)+Z(12))*(Z(6)-2.*Z(10)+Z(14))
      W(5) = (((Z(14)+Z(8)-Z(16)-Z(16))*2.)/16.) - (Z(10)-2.*Z(11)+Z(12))
      1*(Z(7)-2.*Z(11)+Z(15))
      W(6) = (2.*Z(12)-2.*Z(11)) * (Z(8)-2.*Z(12)+Z(16))
      W(7) = (2.*Z(14)-2.*Z(10)) * (Z(14)-2.*Z(15)+Z(16))
      W(8) = (2.*Z(15)-2.*Z(11)) * (Z(14)-2.*Z(15)+Z(16))
      W(9) = (2.*Z(10)-2.*Z(15)) * (2.*Z(12)-2.*Z(16))
      RLAL(8,106)((A(M,N),N=1,9),M=1,3)

```

```

106 FORMAT(9F8.2)
WRITE(5,107)
107 FORMAT('  MATRIZ A',/)
WRITE(5,108)((A(M,N),N=1,9),M=1,9)
108 FORMAT(9F8.2,/)
WRITE(5,109)(J,W(J),J=1,9)
109 FORMAT('  W('',12,'') =',F10.3,/)
DO 200 J=1,9
200 B(J) = E*W(J)
CALL CTEN1(A,P,9,KS)
WRITE(5,111)
111 FORMAT('  VALORES DAS FUNCOES TENSAC NOS PONTOS CONSIDERADOS',/)
WRITE(5,112)B
112 FORMAT(' ',3F20.3,/' ',4F20.3)
CALL EXIT
END

```

## FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

ICCS

## CORE REQUIREMENTS FOR

COMPLA	C	VARIABLES	270	PROGRAM	978
--------	---	-----------	-----	---------	-----

## END OF COMPILATION

// XEQ

RELACIONAMENTO ENTRE OS DADOS

// JOB T 00FF 10FF

OTONI0C4 (8004,65170734)

NUCLEO DE COMPUTACAO ELETRONICA - UFRJ

0000	00FF	00FF	0000
0001	10FF	10FF	0001

V2 M09 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR AUGUSTO BENEDITO OTONI NETO

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

```

SUBROUTINE OTONI(A,B,N,KS)
DIMENSION A(1),B(1)
TOL = 0.
KS = 0
JJ = -N
DO 65 J = 1,N
JY = J + 1
JJ = JJ + N + 1
BIGA = 0.
IT = JJ - J
DO 30 I = J,N
IJ = IT + I
IF(ABS(BIGA)-ABS(A(IJ))) 20,30,30
20 BIGA = A(IJ)
IMAX = I
30 CONTINUE
IF(ABS(BIGA)-TOL) 35,35,40
35 KS = 1
RETURN
40 I1 = J + N*(J-2)
IT = IMAX - J
DO 50 K = J,N
I1 = I1 + N
I2 = I1 + IT
SAVE = A(I1)
A(I1) = A(I2)
A(I2) = SAVE
50 A(I1) = A(I1) / BIGA
SAVE = B(IMAX)
B(IMAX) = B(J)
B(J) = SAVE/BIGA
IF(J-N) 55,70,55
55 IQS = N*(J-1)
DO 65 IX = JY,N
IXJ = IQS + IX
IT = J - IX
DO 60 JX = JY,N
IXJX = N*(JX-1) + IX
JJX = IXJX + IT
60 A(IXJX) = A(IXJX) - (A(IXJ) * A(JJX))
65 B(IX) = B(IX) - (B(J)*A(IXJ))
70 NY = N - 1
IT = N * N
DO 80 J = 1,NY
IA = IT - J
IB = N - J

```

```

IC = N
DO 80 K = 1,J
B(1B) = B(1B) - A(1A)*B(1C)
1A = 1A - N
80 IC = IC - 1
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR OTONI  
COMMON 0 VARIABLES 32 PROGRAM 506

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0025 (HEX)

END OF COMPILEATION

// DUP

```

*STORE WS UA OTONI
CACT ID 00FF DB ADDR 5970 DB CNT 0021

```

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*10C5(2501READER,1403PRINTER)

DIMENSION A(9,9),B(9),F(9)

WRITE(5,100)

100 FORMAT(' ', 'DETERMINACAO DOS Z', //)

READ(8,101)(F(L),L=1,9)

101 FORMAT(9F16.2)

F6 = F(1)

F7 = F(2)

F8 = F(3)

F10 = F(4)

F11 = F(5)

F12 = F(6)

F14 = F(7)

F15 = F(8)

F16 = F(9)

A(1,1) = -(65./8.)\*F6+(92./8.)\*F7-(19./8.)\*F8+(65./8.)\*F10-(108./8.)\*F11+(27./8.)\*F12-(19./8.)\*F14+(36./8.)\*F15-(9./8.)\*F16

A(1,2) = (92./8.)\*F6-(144./8.)\*F7+(36./8.)\*F8-(76./8.)\*F10+(144./8.)\*F11-(36./8.)\*F12+(20./8.)\*F14-(48./8.)\*F15+(12./8.)\*F16

A(1,3) = -(19./8.)\*F6+(36./8.)\*F7-(9./8.)\*F8+(11./8.)\*F10-(36./8.)\*F11+(9./8.)\*F12-(1./8.)\*F14+(12./8.)\*F15-(3./8.)\*F16

A(1,4) = (65./8.)\*F6-(76./8.)\*F7+(11./8.)\*F8-(81./8.)\*F10+(108./8.)\*F11-(27./8.)\*F12+(27./8.)\*F14-(36./8.)\*F15+(9./8.)\*F16

A(1,5) = -(108./8.)\*F6+(144./8.)\*F7-(36./8.)\*F8+(108./8.)\*F10+(144./8.)\*F11+(36./8.)\*F12-(36./8.)\*F14+(48./8.)\*F15-(12./8.)\*F16

A(1,6) = (27./8.)\*F6-(36./8.)\*F7+(9./8.)\*F8-(27./8.)\*F10+(36./8.)\*F11-(9./8.)\*F12+(9./8.)\*F14-(12./8.)\*F15+(3./8.)\*F16

A(1,7) = (36./8.)\*F6-(48./8.)\*F7+(12./8.)\*F8-(36./8.)\*F10+(48./8.)\*F11-(12./8.)\*F12+(12./8.)\*F14-(16./8.)\*F15+(4./8.)\*F16

```

A(1,9) = -(9./8.)*F6+(12./8.)*F7-(3./8.)*F8+(9./8.)*F10-(12./8.)*F
11+(3./8.)*F12-(3./8.)*F14+(4./8.)*F15-(1./8.)*F16
A(2,1) = -(9./8.)*F6+F7+(9./8.)*F8+(12./8.)*F10-2.*F11-(12./8.)*F1
12-(3./8.)*F14+F15+(3./8.)*F16
A(2,2) = F6-4.*F7+F8+4.*F11-2.*F15
A(2,3) = (9./8.)*F6+F7-(9./8.)*F8-(12./8.)*F10-2.*F11+(12./8.)*F12
1+(3./8.)*F14+F15-(3./8.)*F16
A(2,4) = (12./8.)*F6-(12./8.)*F8-2.*F10+2.*F12+(4./8.)*F14-(4./8.)
1.*F16
A(2,5) = -2.*F6+4.*F7-2.*F8
A(2,6) = -(12./8.)*F6+(12./8.)*F8+2.*F10-2.*F12-(4./8.)*F14+(4./8.
1)*F16
A(2,7) = -(3./8.)*F6+(3./8.)*F8+(4./8.)*F10-(4./8.)*F12-(1./8.)*F1
14+(1./8.)*F16
A(2,8) = F6-2.*F7+F8
A(2,9) = (3./8.)*F6-(3./8.)*F8-(4./8.)*F10+(4./8.)*F12+(1./8.)*F14
1-(1./8.)*F16
A(3,1) = 0.
A(3,2) = 2.*F8-4.*F12+2.*F16
A(3,3) = 2.*F7-4.*F8+4.*F12-2.*F16
A(3,4) = 0.
A(3,5) = 0.
A(3,6) = -4.*F7+4.*F8
A(3,7) = 0.
A(3,8) = 0.
A(3,9) = 2.*F7-2.*F8
A(4,1) = -(9./8.)*F6+(12./8.)*F7-(3./8.)*F8+F10-2.*F11+F12+(9./8.)
1.*F14-(12./8.)*F15+(3./8.)*F16
A(4,2) = (12./8.)*F6-2.*F7+(4./8.)*F8-(12./8.)*F14+2.*F15-(4./8.)*
1.*F16
A(4,3) = -(3./8.)*F6+(4./8.)*F7-(1./8.)*F8+(3./8.)*F14-(4./8.)*F15
1+(1./8.)*F16
A(4,4) = F6-4.*F10+4.*F11-2.*F12+F14
A(4,5) = -2.*F6+4.*F10-2.*F14
A(4,6) = F6-2.*F10+F14
A(4,7) = (9./8.)*F6-(12./8.)*F7+(3./8.)*F8+F10-2.*F11+F12-(9./8.)*
1.*F14+(12./8.)*F15-(3./8.)*F16
A(4,8) = -(12./8.)*F6+2.*F7-(4./8.)*F8+(12./8.)*F14-2.*F15+(4./8.)
1.*F16
A(4,9) = (3./8.)*F6-(4./8.)*F7+(1./8.)*F8-(3./8.)*F14+(4./8.)*F15-
1*(1./8.)*F16
A(5,1) = -(1./8.)*F6+(1./8.)*F8+(1./8.)*F14-(1./8.)*F16
A(5,2) = F10-2.*F11+F12
A(5,3) = (1./8.)*F6-(1./8.)*F8-(1./8.)*F14+(1./8.)*F16
A(5,4) = F7-2.*F11+F15
A(5,5) = -2.*F7-2.*F10+8.*F11-2.*F12-2.*F15
A(5,6) = F7-2.*F11+F15
A(5,7) = (1./8.)*F6-(1./8.)*F8-(1./8.)*F14+(1./8.)*F16
A(5,8) = F10-2.*F11+F12
A(5,9) = -(1./8.)*F6+(1./8.)*F8+(1./8.)*F14-(1./8.)*F16
A(6,1) = 0.
A(6,2) = 0.
A(6,3) = 2.*F11-2.*F12
A(6,4) = 0.
A(6,5) = 2.*F8-4.*F12+2.*F16
A(6,6) = -2.*F8-4.*F11+8.*F12-2.*F16
A(6,7) = 0.

```

```

A(6,8) = 0.
A(6,9) = 2.*F11-2.*F12
A(7,1) = 0.
A(7,2) = 0.
A(7,3) = 0.
A(7,4) = 2.*F14-4.*F15+2.*F16
A(7,5) = 0.
A(7,6) = 0.
A(7,7) = 2.*F10-4.*F14+4.*F15-2.*F16
A(7,8) = 4.*F10+4.*F14
A(7,9) = 2.*F10-2.*F14
A(8,1) = 0.
A(8,2) = 0.
A(8,3) = 0.
A(8,4) = 0.
A(8,5) = 2.*F14-4.*F15+2.*F16
A(8,6) = 0.
A(8,7) = 2.*F11-2.*F15
A(8,8) = 4.*F11-2.*F14+8.*F15-2.*F16
A(8,9) = 2.*F11-2.*F15
A(9,1) = 0.
A(9,2) = 0.
A(9,3) = 0.
A(9,4) = 0.
A(9,5) = 0.
A(9,6) = 4.*F15-4.*F16
A(9,7) = 0.
A(9,8) = 4.*F12-4.*F16
A(9,9) = -4.*F12-4.*F15+8.*F16
WRITE(5,102) F6,F7,F8,F10,F11,F12,F14,F15,F16
102 FORMAT(' ',F6=' ',F8.2,/, ' F7 =',F8.2,/, ' F8 =',F8.2,/, ' F10 =',
F8.2,/, ' F11 =',F8.2,/, ' F12 =',F8.2,/, ' F14 =',F8.2,/, ' F15
2 =',F8.2,/, ' F16 =',F8.2,/)
WRITE(5,103)
103 FORMAT(' MATRIZ A',/)
WRITE(5,104) ((A(I,J),J=1,9),I=1,9)
104 FORMAT(9F10.2,/)
READ(8,105) CONST
105 FORMAT(F10.2)
WRITE(5,106) CONST
106 FORMAT(' CONST =',F10.2,/)
C CONST E IGUAL A -Q VEZES A PEQUENO ELEV. A 4 SOBRE H
DO 200 J=1,9
200 B(J) = CONST
CALL OTONI(A,B,9,KS)
WRITE(5,107)
107 FORMAT(' FLEXAS NOS PONTOS CONSIDERADOS',/)
WRITE(5,108)B
108 FORMAT(' ',5F20.3,/, ' ',4F20.3)
CALL EXIT
END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON 0 VARIABLES 254 PROGRAM 2920

PAGE 5 OTON10C4

END OF COMPILATION

// \*