

ASSOCIAÇÃO DE CASCAS DE REVOLUÇÃO COM CARREGAMENTO AXISSIMÉTRICO

ABIMAEI FERNANDO DOURADO LOULA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M. Sc.)

Aprovada por:

Fernando Lobo

Prof. Fernando Luiz Lobo Barbosa Carneiro  
Presidente

Sydney Gomes

Prof. Sydney Martins Gomes dos Santos

Paulo Alcantara Gomes

Prof. Paulo Alcantara Gomes

Edison Castro Prates de Lima

Prof. Edison Castro Prates de Lima

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
JUNHO DE 1973

A meus pais,  
A minha esposa.

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Fernando L. Lobo Corneiro pela sugestão do tema e orientação;

Ao Professor Antonio Carlos Reis Laranjeiras, Escola Politécnica da Bahia, pelo incentivo;

Aos Professores da COPPE e da EPUFBA;

Aos funcionários da COPPE, particularmente a Maria de Lourdes de Almeida e Maria de Fátima pela confecção gráfica deste trabalho;

Aos colegas pelo interesse que nos dedicou;

A CAPES, Fundação Politécnica e CNPq, pelo incentivo financeiro decisivo.

R E S U M O

O presente trabalho visa a análise de cascas com simetria de revolução, valendo-se do uso de soluções analíticas de elementos de cascas esféricas, cônicas e cilíndricas.

É usado um procedimento análogo ao método dos elementos finitos, diferindo apenas na escolha das funções deslocamento que aqui são as soluções das equações diferenciais correspondentes a cada elemento.

Além dos elementos citados acrescenta-se um elemento de placa circular e um anel de reforço.

Apresenta-se um programa, baseado no método dos deslocamentos, para análise de estruturas compostas destes elementos e de problemas mais gerais de cascas axissimétricas, por meio de uma discretização aproximada da geometria da casca.

A B S T R A C T

This work deals with the analysis of axissymmetrical shells by means of the available analytical solutions of spherical, conical and cylindrical elements.

A similar approach to the finite element method is used, the difference being on the choice of the displacement functions that are the solutions of the differential equations corresponding to each element.

A circular plate element and a stiffness ring element are still presented.

A computer program making use of the displacement method is presented, to permit the analysis of structures composed of these elements and a more general class of axissymmetric shells problems for which an approximated discretization of the shell geometry is performed.

I N D I C E

INTRODUÇÃO	vi
<u>CAPITULO I: Equações gerais das cascas de revolução</u>	
1.1 - Estruturas de superfície	1
1.2 - Esforços unitários num elemento de superfície	2
1.3 - Equações de equilíbrio	11
1.4 - Deformações	20
1.5 - Carregamento axissimétrico	32
1.6 - Instituição das equações de Meissner	
	34
<u>CAPITULO II: Integração da equação de Meissner</u>	
2.1 - Casca esférica, equação homogênea	44
2.2 - Soluções particulares	56
2.3 - Casca cônica	61
2.4 - Soluções particulares	70
2.5 - Casca cilíndrica	70
2.6 - Solução particular	74
2.7 - Placa circular	75
2.8 - Anel de reforço	78
<u>CAPITULO III: Método dos deslocamentos</u>	
3.1 - Introdução	81
3.2 - Equações gerais do método dos des- locamentos	83

3.3 - Matrizes de rigidez	84
3.4 - Cargas nodais equivalentes	90
3.5 - Esforços unitários finais	91
<b>CAPITULO IV: Programa</b>	
4.1 - Introdução	92
4.2 - Subrotinas que compõem o programa	93
4.3 - Descrição das subrotinas	94
4.4 - Manual de entrada	96
<b>CAPITULO V: Resultados e Conclusões</b>	
5.1 - Cone fechado carregado ao longo de um paralelo	100
5.2 - Casca esférica com pressão uniforme	105
5.3 - Reservatório de concreto armado	109
<b>CONCLUSÕES</b>	113
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	115
<b>APÊNDICE A</b>	
A1 - Uso da série assintótica	117
A2 - Sobre o cálculo da solução da casca cônica	118
A3 - Matrizes auxiliares	120
<b>APÊNDICE B</b>	
Programa	132

NOTAÇÕES

a	Raio da casca esférica
b e d	Dimensões do anel de reforço
$c_1, \dots, c_6$	Constantes a determinar
$\alpha_1$ e $\alpha_2$	Coordenadas definidas sobre a superfície média
$ds_1$ e $ds_2$	Largura média do elemento infinitesimal de casca
$\epsilon_\phi, \epsilon_\theta$ e $\gamma_{\theta\phi}$	Deformações na superfície média
x, v e w	Deslocamentos na superfície média
$x_A, v_A$ e $w_A$	Deslocamentos fora da superfície média
$\sigma_1$ e $\sigma_2$	Tensões normais
$\tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{2z}$	Tensões cisalhantes
$N_1, N_2, N_{12},$ $Q_1, Q_2, M_1,$ $M_2, M_{12}, M_{21},$ $M_{13}, M_{23}$	Esforços unitários atuantes num elemento de casca
$r_1$ e $r_2$	Raios de curvatura
r	Raio do círculo paralelo
h	Espessura da casca
$\theta$ e $\phi$	Ângulos de meridiano ou paralelo
$N_\phi, N_{\theta\phi}, M_\phi,$ $M_\theta, Q_\phi, Q_\theta,$ $N_{\theta\phi}, M_{\phi\theta}$	Esforços unitários na casca aximétrica
D	Rigidez a esforços normais
K	Rigidez a flexão
E	Módulo de elasticidade

v	Coeficiente de Poisson
R	Raio da placa ou do cilindro
y	Ordenada, nas cascas cônicas e cilíndricas
$p_\phi, p_z$ e $p_\theta$	Componentes das forças de superfície
x	Rotação do meridiano
$U = r_2 Q_\phi$	
P	Resultante das forças verticais
$L()$	Operador diferencial linear
$S_1, S_2, S_3,$	
$S_4$	Soluções homogêneas da casca esférica
$Z_1, Z_2,$	
$Z_3$ e $Z_4$	Soluções homogêneas da casca cônica
$x_p$ e $U_p$	Soluções particulares
$N_\phi M$ e $N_\theta M$	Esforços de membrana
$\rho = \frac{r}{R}$	
$N_r, Q_r, M_r$	Esforços unitários na placa circular
$R_a$	Raio do anel de reforço
X e Y	Eixos cartesianos (globais)
$\xi, \eta$ e $\beta$	Deslocamentos do elemento em eixos globais
H, V e M	Forças nodais do elemento em eixos globais
{F*}	Vetor de forças nodais
[S]	Matriz de rigidez do elemento
{d*}	Vetor deslocamentos nodais
[SK]	Matriz de rigidez da estrutura
{AC}	Vetor forças nodais da estrutura

{D}	Vetor deslocamentos nodais da estrutura
{AN}	Vetor das forças aplicadas nos nós
{AE}	Vetor das forças nodais equivalentes
{d}	Vetor deslocamentos generalizados
{F}	Vetor forças generalizadas
{C}	Vetor das constantes a determinar
[B]	Matriz que define o campo de deslocamentos
[DB]	Matriz que define o campo das forças
{AM}	Reações calculadas em regime de membrana com o sinal trocado
{dm}	Deslocamentos calculados em regime de membrana
{σ}	Vetor dos esforços unitários
{σ <sub>M</sub> }	Vetor dos esforços de membrana
[FE]	Matriz de funções que definem os esforços unitários

INTRODUÇÃO

Cascas de revolução encontram grande aplicação na engenharia. Podem ser utilizadas como cúpulas, como reservatórios e como parte de estruturas aeronáuticas. Frequentemente ocorrem cascas com espessuras e/ou raios de curvatura variáveis, para torná-las mais funcionais e executáveis.

Na análise destas estruturas tem-se a considerar além dos esforços de membrana, esforços de flexão que surgem nas ligações ou devido a descontinuidades no carregamento e na geometria da estrutura.

A equação diferencial das cascas aximétricas baseada na teoria da elasticidade clássica, originalmente formulada por H. Reissner, para casca esférica e posteriormente generalizada por E. Meissner tem solução exata conhecida para esfera, cone e cilindro de espessuras constantes. Para cascas de espessura variável alguns poucos casos particulares foram resolvidos analiticamente.

Métodos numéricos foram desenvolvidos com o objetivo de se encontrarem soluções para problemas mais gerais. Inicialmente foi utilizado o método das diferenças finitas e atualmente é

grande o sucesso do método dos elementos finitos. Vários elementos já foram apresentados para cascas aximétricas, começando por elementos tronco-cônicos até se chegar aos elementos iso-paramétricos que permitem variação de curvatura e espessura no próprio elemento.

Neste trabalho utilizam-se as soluções conhecidas e considera-se cada forma individualmente como um elemento da estrutura, fazendo-se posteriormente a montagem da mesma. Este procedimento permite uma análise precisa e rápida de estruturas compostas destas formas de solução conhecida e possibilita também a obtenção de soluções aproximadas para cascas de espessura variável e meridianos quaisquer desde que se utilizem muitos elementos esféricos ou cônicos, de acordo com a curvatura do meridiano e de modo a se poder admitir que a espessura de cada elemento seja constante, variando apenas de elemento para elemento.

É apresentado um programa automático para cálculo desse tipo de estruturas e ao final são mostrados resultados obtidos em três exemplos analisados.

## CAPÍTULO I

### EQUAÇÕES GERAIS DAS CASCAS DE REVOLUÇÃO

#### 1.1 - Estruturas de Superfície

Denominam-se estruturas de superfície aquelas em que duas de suas dimensões predominam sobre a terceira. De acordo com a superfície média estas estruturas podem ser: curvas ou planas.

As estruturas de superfície média plana são as chapas e placas. Chapas se são solicitadas por cargas no próprio plano da superfície e placas quando são solicitadas por ações normais ao referido plano.

Existem ainda as estruturas formadas de elementos de superfície média plana, que são as estruturas prismáticas laminationares e as poliédricas.

As estruturas de superfície média curva são as cascas. De particular interesse pelas suas aplicações práticas são as cascas de revolução, cuja superfície média é gerada por uma curva girando ao redor de um eixo, estando a curva e o eixo no mesmo plano.

Para as estruturas de superfície a teoria da elasticidade assume as seguintes hipóteses, que são conhecidas como hipóteses de Kirchoff-Love, excetuando a 1a. hipótese.

1. O material da estrutura é homogêneo, isotrópico e obedece a Lei de Hooke;

2. A espessura  $h$  é pequena em relação às dimensões e aos raios de curvatura da superfície média;

3. As tensões normais à superfície média são pequenas e desprezíveis em relação às demais tensões;

4. Os pontos pertencentes antes das deformações a retas normais a superfície média, encontram-se, após a deformação, sobre retas normais à superfície deformada;

5. As deformações são pequenas, de tal modo que é possível desprezar a influência dos deslocamentos no equilíbrio do elemento de superfície.

### 1.2 - Esforços unitários num elemento de superfície

Antes de definir os esforços atuantes, em um elemento de superfície, é necessário estabelecer um sistema de coordenadas.

Admita-se que um certo sistema de coordenadas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , definido sobre a superfície média, seja tal que a curva  $\alpha_1 = \text{const.}$  intercepte a curva  $\alpha_2 = \text{const.}$  em ângulo reto. E definindo o eixo  $z$  segundo o versor da normal no ponto de interseção das curvas

$\alpha_1 = \text{const.}$  e  $\alpha_2 = \text{const.}$  tem-se definido um sistema tri-ortogonal de coordenadas.

Tomando como origem um ponto  $O$ , a posição de um ponto  $P'$  da estrutura fica definida pela equação vetorial seguinte (Fig. 1.2.1):

$$\vec{s}(\alpha_1, \alpha_2, z) = \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2) + z \vec{n}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.2.1)$$

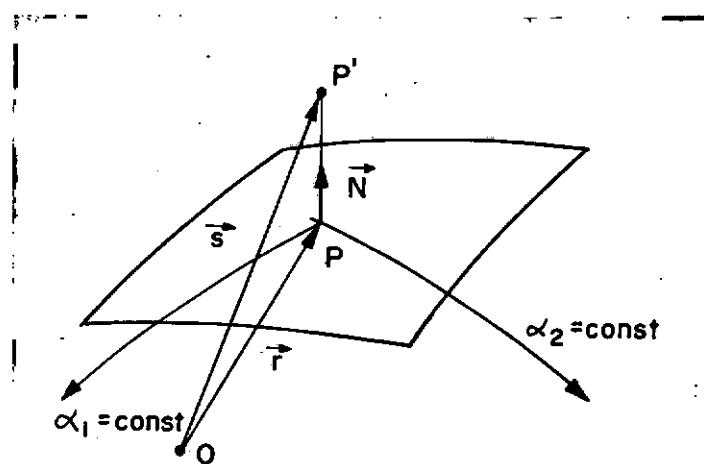
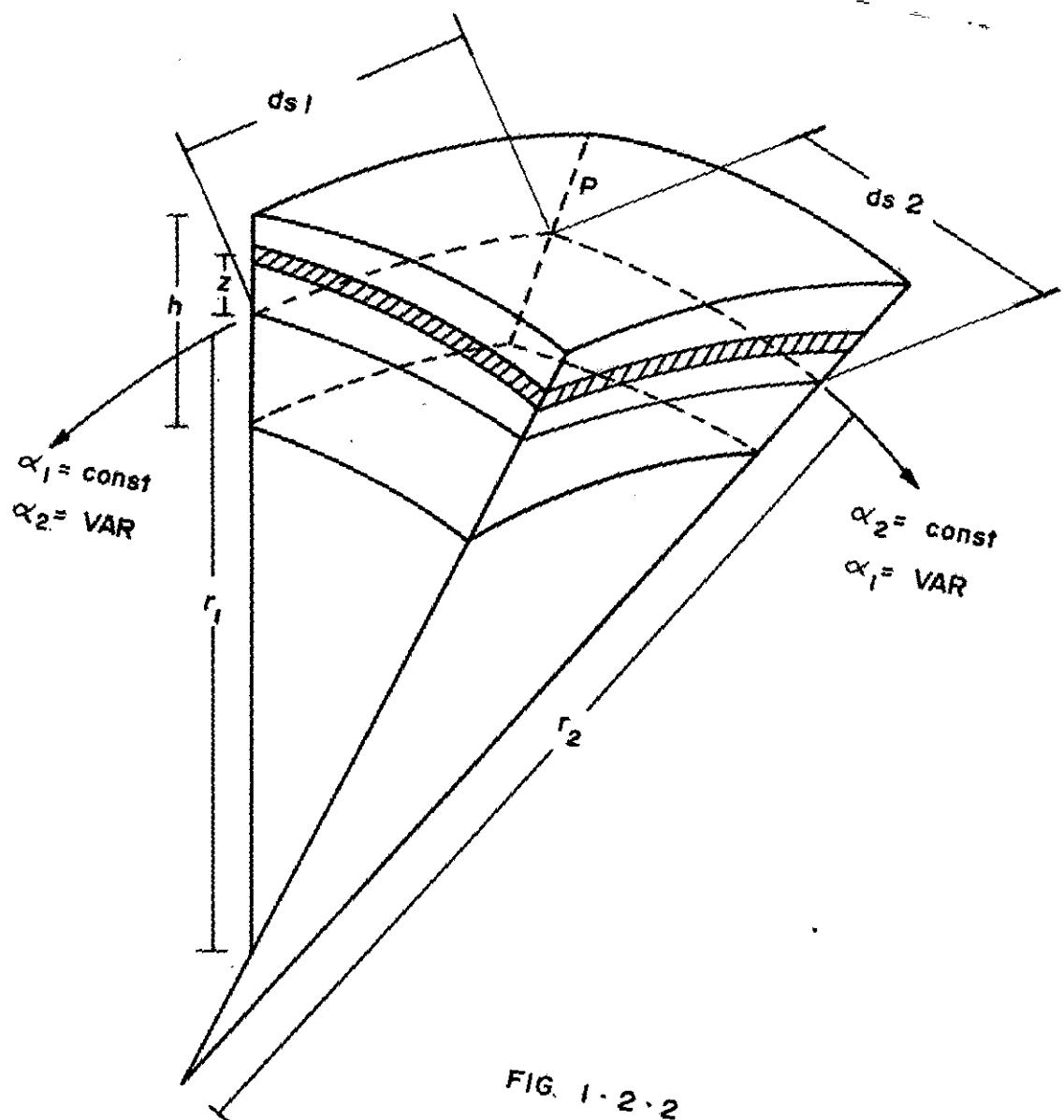


Fig. 1.2.1

Considera-se agora um elemento da estrutura definido por  $\alpha_1 = \text{const.}$ ,  $\alpha_1 + d\alpha_1 = \text{const.}$ ,  $\alpha_2 = \text{const.}$  e  $\alpha_2 + d\alpha_2 = \text{const.}$  (Fig. 1.2.2)



As faces laterais deste elemento têm uma altura finita  $h$  e larguras médias infinitesimais  $ds_1$  e  $ds_2$ , respectivamente segundo as curvas paramétricas  $\alpha_1 = \text{const.}$  e  $\alpha_2 = \text{const.}$

Considerando-se para cada uma das faces laterais que as forças, nelas atuantes, sejam localizadas na seção correspondente à largura média, tem-se forças e momentos resultantes que são infinitésimos de primeira ordem. Dividindo-se estas forças e momentos infinitesimais pela respectiva largura média da seção considerada, que é também infinitesimal obtém-se forças e momentos finitos, que se denominou esforços unitários (também chamados de tensões resultantes).

Decompondo-se estas forças e momentos, segundo tres direções ortogonais a saber: direção normal a face do elemento, direção tangente a superfície média contida no plano da seção e direção normal a superfície média, têm-se os esforços:  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_{12}$ ,  $N_{21}$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{21}$ ,  $M_{13}$ ,  $M_{23}$ .

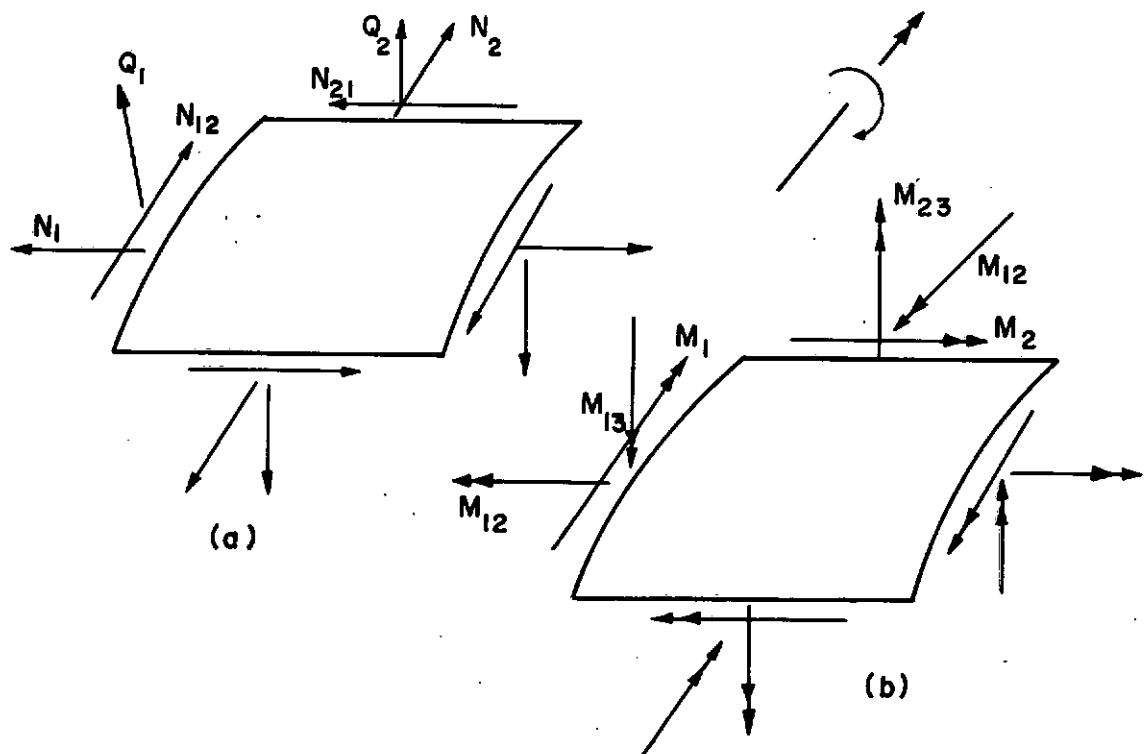


Fig. 1.2.3

Os esforços indicados na figura 1.2.3 podem assim ser definidos:

$N_1, N_2$  - forças unitárias agindo perpendicularmente às faces  $\alpha_1 = \text{const.}$  e  $\alpha_2 = \text{const.}$  respectivamente, e serão positivas quando derem tração na seção considerada.

$N_{12}, N_{21}$  - forças unitárias agindo nas seções  $\alpha_1 = \text{const.}$  e  $\alpha_2 = \text{const.}$  respectivamente e na direção da tangente.

$N_{12}$  será positivo na direção de  $\alpha_1 = \text{const.}$  quando  $N_1$  tiver o sentido positivo de  $\alpha_2 = \text{const.}$  O sinal de  $N_{21}$  é definido analogamente ao de  $N_{12}$ .

$Q_1, Q_2$  - forças unitárias agindo nas seções  $\alpha_1 = \text{const.}$  e  $\alpha_2 = \text{const.}$  respectivamente. São chamadas de força cortante.  $Q_1$  será positivo no sentido da normal quando a força  $N_1$  tiver o sentido positivo de  $\alpha_2 = \text{const.}$  O sinal de  $Q_2$  é definido similarmente ao de  $Q_1$ .

$M_1, M_2$  - momentos fletores unitários atuando nos planos normais à superfície média e às seções  $\alpha_1 = \text{const.}$  e  $\alpha_2 = \text{const.}$  respectivamente. Serão considerados positivos, quando provocarem tensões normais positivas nas fibras correspondentes a valores negativos de  $z$ .

$M_{12}, M_{21}$  - são momentos de torsão unitários que atuam respectivamente, nos planos das seções  $\alpha_1 = \text{const}$  e  $\alpha_2 = \text{const.}$  Serão considerados positivos quando provocarem tensões de cisalhamento positivas nas fibras correspondentes a valores de  $z$  positivos.

$M_{13}, M_{23}$  - são momentos fletores unitários atuando nos planos tangentes à superfície média e são perpendiculares, respectivamente, às seções  $\alpha_1 = \text{const}$  e  $\alpha_2 = \text{const.}$  Estes momentos são nulos conforme mostraremos posteriormente.

Estes esforços unitários originam uma distribuição de tensões em cada uma das faces laterais do elemento de superfície, como mostra a figura 1.2.4.

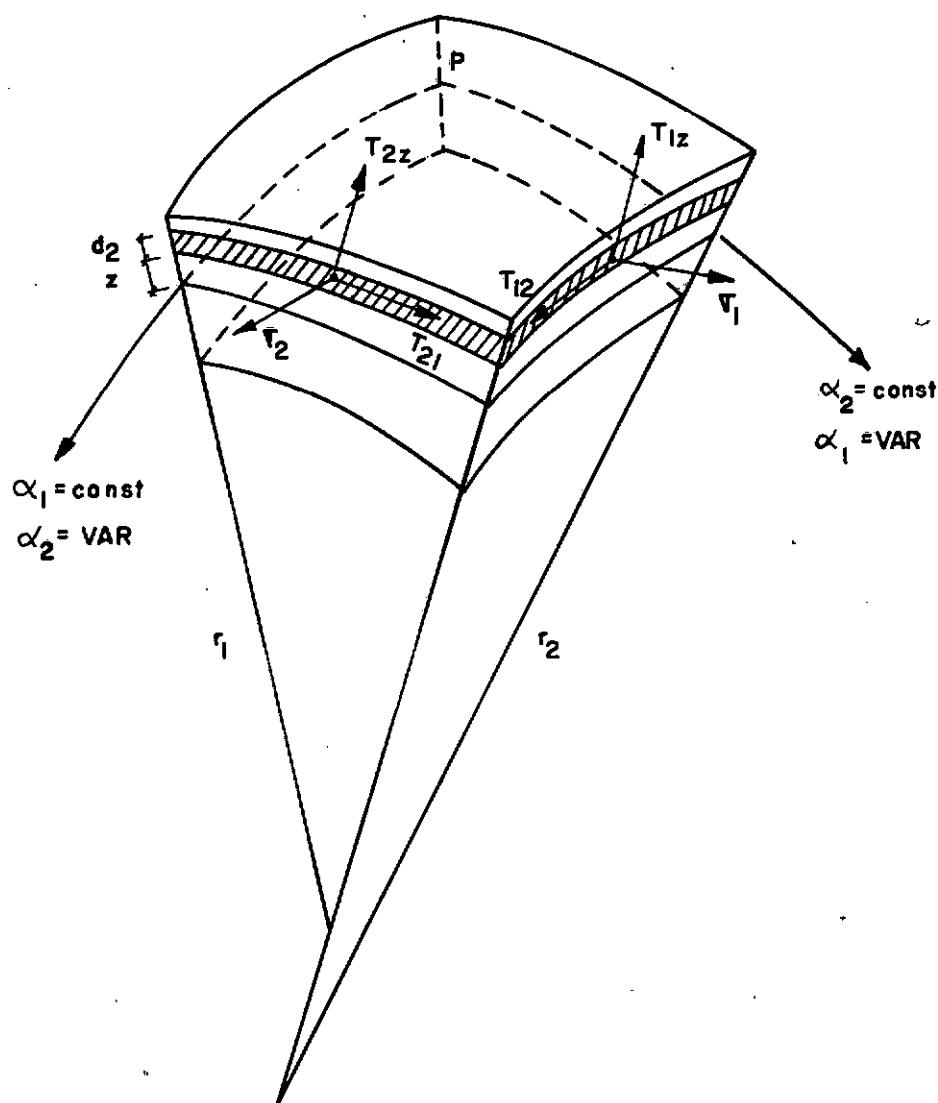


Fig. 1.2.4

Chamando-se de  $ds_1$  e  $ds_2$  as larguras médias respectivas das faces  $\alpha_1 = \text{const.}$  e  $\alpha_2 = \text{const.}$  é fácil ver que as larguras destas faces em função de  $z$  são respectivamente:

$$(1 + z/r_1)ds_1 \text{ e } (1 + z/r_2)ds_2$$

Sendo as larguras das faces infinitésimos é possível admitir que a distribuição de tensões  $\sigma$  e  $\tau$  é constante ao longo das mesmas.

Sendo  $N1$  a força unitária que age na seção  $\alpha_1 = \text{const.}$  podemos escrever:

$$N1ds_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1(1 + \frac{z}{r_1}) ds_1 dz$$

Resultando:

$$N1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1(1 + \frac{z}{r_1}) dz \quad (1.2.2)$$

Analogamente se obtém as expressões dos demais esforços unitários. Tem-se assim:

$$N2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2(1 + \frac{z}{r_2}) dz \quad (1.2.3)$$

$$N_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz \quad (1.2.4)$$

$$N_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} \left(1 + \frac{z}{r_1}\right) dz \quad (1.2.5)$$

$$Q_1 = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{1z} \left(1 + \frac{z}{r_1}\right) dz \quad (1.2.6)$$

$$Q_2 = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{2z} \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz \quad (1.2.7)$$

$$M_1 = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 + \frac{z}{r_1}\right) z dz \quad (1.2.8)$$

$$M_2 = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) z dz \quad (1.2.9)$$

$$M_{12} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \left(1 + \frac{z}{r_1}\right) z dz \quad (1.2.10)$$

$$M_{21} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} \left(1 + \frac{z}{r_1}\right) z dz \quad (1.2.11)$$

$$M_{13} = M_{23} = 0 \quad (1.2.12)$$

M13 e M23, resultam iguais a zero devido a distribuição uniforme das tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  ao longo da largura infinitesimal.

Embora  $\tau_{12} = \tau_{21}$ ,  $N_{12} \neq N_{21}$  e  $M_{12} \neq M_{21}$  quando  $r_1 \neq r_2$ .

Se se despreza  $z/r_1$  e  $z/r_2$  em relação à unidade tem-se sempre:

$$N_{12} = N_{21} \quad \text{e} \quad M_{12} = M_{21}$$

### 1.3 - Equações de equilíbrio

O objetivo deste trabalho restringe-se ao estudo das formas de revolução portanto a teoria que será desenvolvida a seguir, refere-se às cascas com simetria axial.

As linhas de curvatura da superfície de revolução são os meridianos e paralelos que por isso são usados como curvas ordenadas (Fig. 1.3.1).

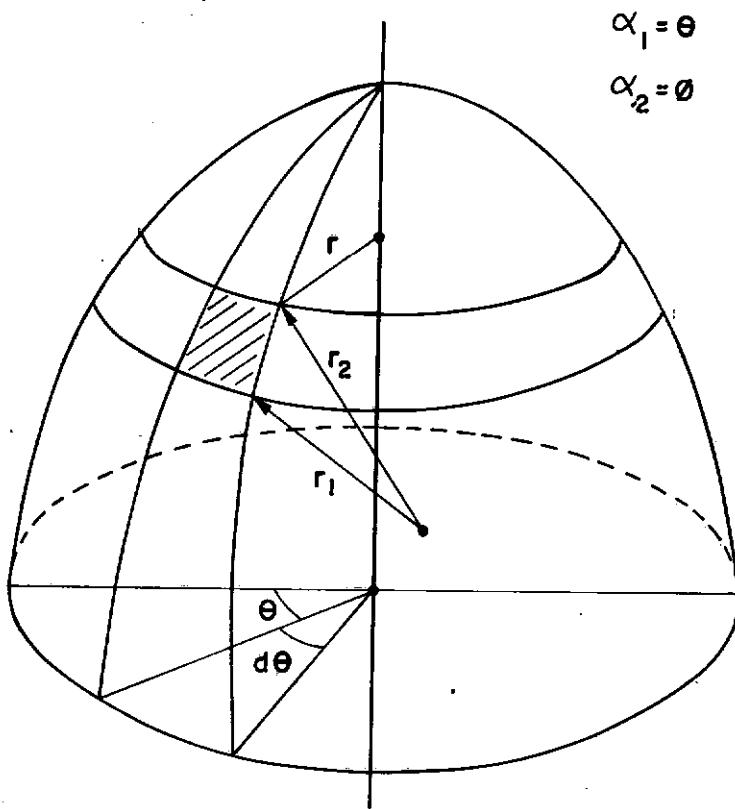


Fig. 1.3.1

O elemento infinitesimal de casca axissimétrica definido na fig. 1.3.1, por dois meridianos, segundo os ângulos  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  e por dois paralelos segundo os ângulos  $\phi$  e  $\phi + d\phi$  é visto ampliado na fig. 1.3.2 onde são mostradas as forças unitárias nele atuantes e na fig. 1.3.3 estão indicados os momentos unitários.

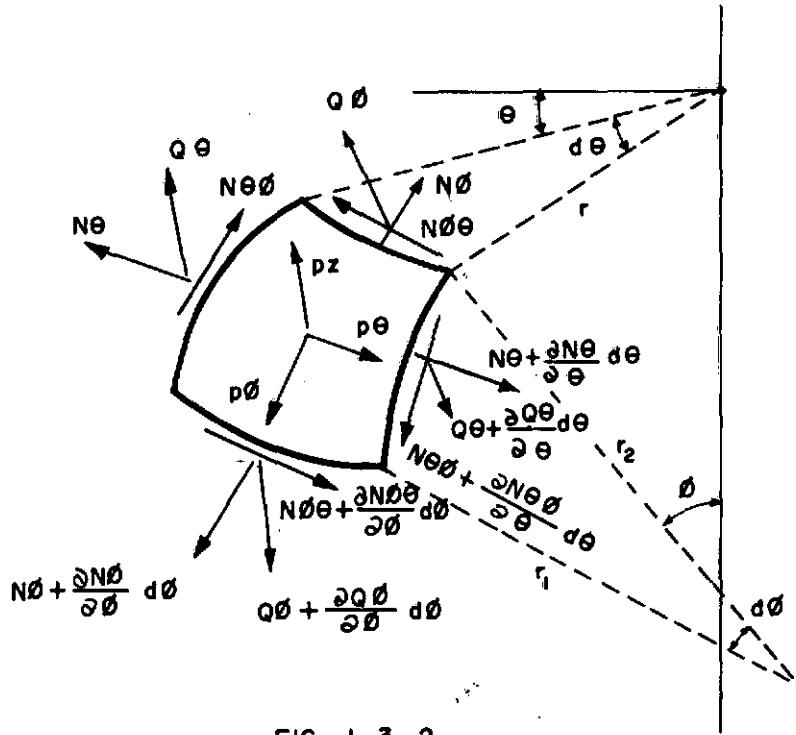


FIG. 1.3.2

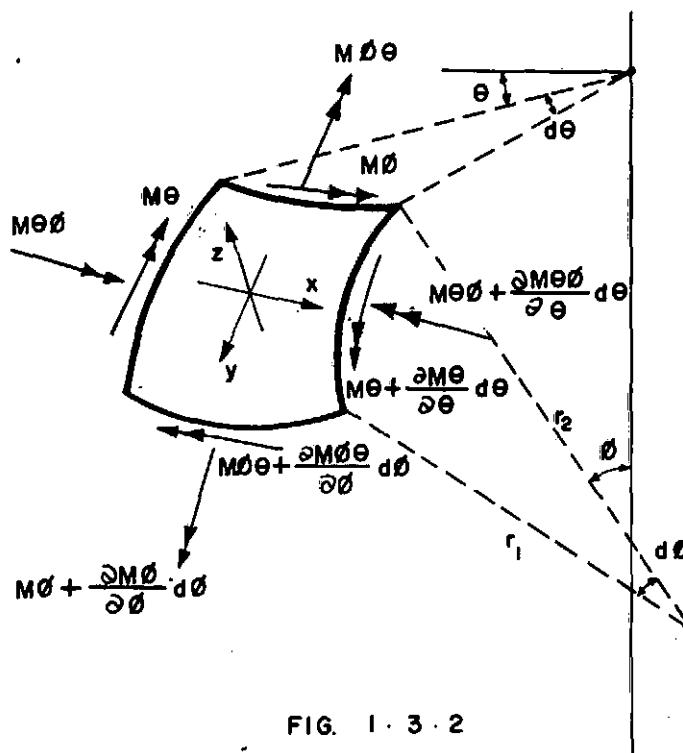


FIG. 1.3.2

Este sistema de forças e momentos (figs. 1.3.2 e 1.3.3) deve satisfazer a seis condições de equilíbrio que são: três para as forças nas direções das cargas  $p_\theta$ ,  $p_\phi$  e  $p_z$  e três para os momentos com respeito aos eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

### Equilíbrio das forças

#### 1) Forças paralelas à tangente ao meridiano

As forças  $N\theta\phi$  dão uma resultante paralela à tangente ao meridiano e orientada no sentido de  $\phi$  crescente:

$$\frac{\partial N\theta\phi}{\partial \theta} r_1 d\theta d\phi$$

Na mesma direção e sentido às forças meridionais  $N\phi$  tem uma resultante.

$$\frac{\partial (rN\phi)}{\partial \phi} d\phi d\theta$$

uma vez que tanto a força  $N\phi$  como a largura média  $r d\theta$  variam com  $\phi$ .

Como as forças  $N\theta r_1 d\phi$ , formam entre si um ângulo  $d\theta$ , da soma vetorial delas resulta uma força  $N\theta r_1 d\theta d\phi$ , na direção horizontal e dirigida para dentro. (Fig. 1.3.4). Decompondo-se esta força em duas componentes: uma normal à superfície média e outra paralela ao meridiano, esta última será:

-  $N\theta r_1 d\phi d\theta \cos\phi$ , com o sinal menos por ser orientada no sentido de  $\phi$  decrescente.

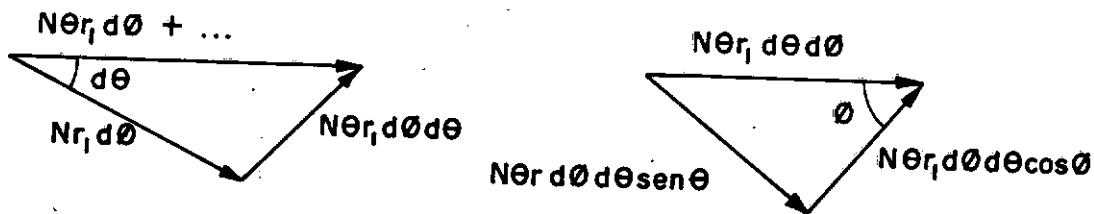


Fig. 1.3.4

As duas forças  $Q\phi r d\theta$  formam entre si um ângulo  $d\phi$ , compondo-as temos a resultante paralela à tangente ao meridiano e no sentido de  $\phi$  decrescente:

$$- Q\phi r d\theta d\phi$$

Finalmente temos que incluir a contribuição das forças externas, que é o produto da componente  $p\phi$  pela área do elemento  $rd\theta \cdot r_1 d\phi$

$$p\phi r_1 r \cdot d\theta d\phi$$

Reunindo as contribuições anteriormente descritas, tem-se a seguinte equação de equilíbrio para as forças paralelas à direção da tangente ao meridiano:

$$\frac{\partial N\theta\phi}{\partial\theta} r_1 d\theta d\phi + \frac{\partial}{\partial\phi} (rN\phi) d\phi d\theta - N\theta r_1 d\phi d\theta \cdot \cos\phi -$$

$$- Q\phi r d\theta d\phi + p\phi r r_1 d\theta d\phi = 0$$

Como  $d\theta d\phi$  é fator comum, vem:

$$\frac{\partial N\theta\phi}{\partial\theta} r_1 + \frac{\partial}{\partial\phi} (rN\phi) - N\theta r_1 \cos\phi - Q\phi r +$$

$$+ p\phi r r_1 = 0 \quad (1.3.1)$$

## 2) Equilíbrio das forças na direção do círculo paralelo

As forças  $N\phi\theta r d\theta$  dão uma resultante na direção do círculo paralelo e segundo o sentido de  $\theta$  crescente:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} (N\phi\theta r) d\theta d\phi$$

Da soma das forças  $N\theta r_1 d\phi$ , chega-se à resultante:

$$\frac{\partial (N\theta)}{\partial\theta} r_1 d\theta d\phi$$

Como as forças  $N\theta r_1 d\phi$  não são paralelas, suas componentes horizontais formam um ândulo  $d\theta$  e portanto têm uma resultante na direção da tangente ao círculo paralelo:

$$N\theta r_1 d\phi \cos\phi d\theta$$

As forças  $Q\theta r_1 d\phi$ , também formam entre si um ângulo  $d\theta$  e contribuem com uma força na direção do círculo paralelo segundo o sentido de  $\theta$  decrescente:

$$- Q\theta r_1 d\phi d\theta$$

E as forças externas contribuem com:

$$p\theta r_1 r d\theta d\phi$$

Temos, portanto:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (rN\phi\theta) d\phi d\theta + \frac{\partial N\theta}{\partial \theta} r_1 d\theta d\phi + N\theta\phi r_1 \cos\phi d\theta d\phi -$$

$$- Q\theta r_1 d\theta d\phi + p\theta r_1 r d\theta d\phi = 0$$

Que eliminando os fatores comuns, vem:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (rN\phi\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r_1 d\theta d\phi) + N\theta\phi r_1 \cos\phi -$$

$$- Q\theta r_1 + p\theta r_1 r = 0 \quad (1.3.2)$$

### 3) Equilíbrio das forças segundo a normal a superfície média

Pela fig. 1.3.4 vemos que as forças  $N\theta r_1 d\theta$  têm a resultante horizontal  $N\theta r_1 d\phi d\theta$ , que por sua vez origina uma componente na direção normal à casca e dirigida para dentro:

$$N\theta r_1 d\phi d\theta \sin\phi$$

Analogamente  $N_{\theta}$  tem uma componente no mesmo sentido:

$$N_{\theta} d\theta d\phi$$

As forças  $Q_{\theta} r d\theta$  não sendo iguais têm uma resultante também neste sentido:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (rQ\phi) d\phi d\theta$$

Também as forças  $Q_{\theta} r_1 d\phi$  contribuem com a parcela:

$$\frac{\partial Q\theta}{\partial \theta} r_1 d\phi d\theta$$

E a componente das forças externas é:

$$p z r_1 r d\phi d\theta$$

Tem-se, após simplificação, a terceira equação de equilíbrio de forças:

$$N_{\theta} r_1 \sin\phi + N_{\phi} \cdot r + \frac{\partial}{\partial \phi} (rQ\phi) + r_1 \frac{\partial Q\theta}{\partial \theta} - p z r_1 r = 0 \quad (1.3.3)$$

### Equilíbrio de momentos

#### 4) Equilíbrio dos momentos em relação ao eixo x

Tem-se a diferença entre os dois momentos  $M\phi r d\theta$ , a diferença entre os momentos  $M\theta r_1 d\phi$ , e o binário formado pelas duas forças  $Q\phi r d\theta$ . Ainda se tem um último termo devido ao fato de que os vetores  $M\theta r_1 d\phi$  não são paralelos, analogamente às forças  $N\theta r_1 d\phi$  estes momentos têm a componente:

$$M\theta r_1 d\phi \cos\phi d\theta$$

Chega-se então a seguinte condição de equilíbrio:

$$\frac{\partial(M\phi r)}{\partial\phi} d\theta d\phi + \frac{\partial M\theta}{\partial\theta} r_1 d\phi d\theta - Q\phi r d\theta r_1 d\phi - \\ - M\theta r_1 d\phi \cos\phi d\theta = 0$$

Simplificando, tem-se:

$$\frac{\partial(M\phi r)}{\partial\phi} + \frac{\partial M\theta}{\partial\theta} - Q\phi r r_1 - r_1 M\theta \cos\phi = 0 \quad (1.3.4)$$

#### 5) Equilíbrio dos momentos em relação ao eixo y

Aqui aparecem as componentes dos momentos  $M\theta r_1 d\phi$  e  $M\phi r d\theta$  e o binário formado pelas forças  $Q\theta r_1 d\phi$ , além da contribuição dos momentos  $M\theta r_1 d\phi$ , similar ao ilustrado na fig. 1.4.3 para as forças  $N\theta r_1 d\phi$ .

Tem-se após simplificação do fator  $d\theta/d\phi$  a equação de equilíbrio abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (rM\phi\theta) + r_1 \frac{\partial M\theta}{\partial \theta} + r_1 M\theta\phi \cos\phi - rr_1 Q\theta = 0 \quad (1.3.5)$$

### 6) Equilíbrio dos momentos em relação ao eixo z

Em relação ao eixo z tem-se a considerar os dois binários formados pelas forças  $N\theta r_1 d\phi$  e  $N\phi\theta r d\theta$  e as componentes das resultantes dos momentos  $M\theta r_1 d\phi$ , e dos momentos  $M\phi\theta r d\theta$ . Chega-se então a sexta equação de equilíbrio:

$$rr_1 N\theta\phi - rr_1 N\phi\theta - r_1 M\theta\phi \operatorname{sen}\phi + rM\phi\theta = 0$$

Como  $r = r_2 \operatorname{sen}\phi$  esta equação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{M\phi\theta}{r_1} - \frac{M\theta\phi}{r_2} = N\phi\theta - N\theta\phi \quad (1.3.6)$$

### 1.4 - Deforações

Está claro que as equações de equilíbrio instituídas na seção anterior, não são suficientes para tornar possível a determinação dos esforços atuantes numa casca, vez que se tem apenas seis equações (1.3.1 a 1.3.6) e dez incógnitas que são:

$N_\phi$ ,  $N_\theta$ ,  $M_\phi$ ,  $M_\theta$ ,  $Q_\phi$ ,  $Q_\theta$ ,  $N_\phi\theta$ ,  $N_\theta\phi$ ,  $M_\phi\theta$ ,  $M_\theta\phi$ . Tem-se então que buscar novas relações.

As demais equações necessárias e suficientes para tornar o problema determinado são encontradas recorrendo-se às relações tensões-deformações (Lei de Hook).

Nas figuras 1.4.1, estão mostrados os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  possíveis de ocorrer na superfície média de uma casca de revolução. Sendo:

$u$  = deslocamento segundo um círculo paralelo, ao nível da superfície média, considerado positivo no sentido de  $\theta$  crescente;

$v$  = deslocamento segundo um meridiano, ao nível da superfície média, positivo no sentido de  $\phi$  crescente;

$w$  = deslocamento segundo a normal à superfície média, positivo para fora.

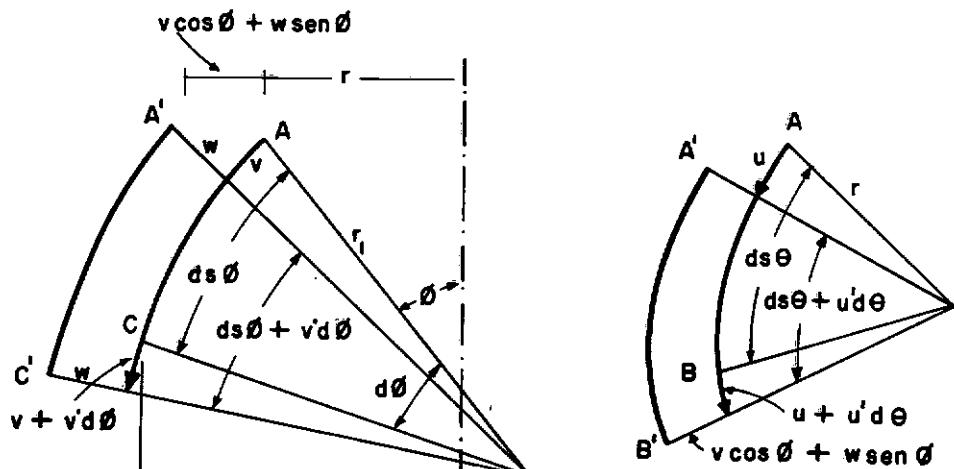
Em função destes deslocamentos determinam-se as deformações na superfície média:

$$\epsilon_\phi = \frac{\Delta ds_\phi}{ds_\phi} ; \quad \epsilon_\theta = \frac{\Delta ds_\theta}{ds_\theta} ; \quad \gamma_{\theta\phi} = \gamma_1 + \gamma_2$$

Para simplificação da notação adotar-se-á a seguinte convenção:

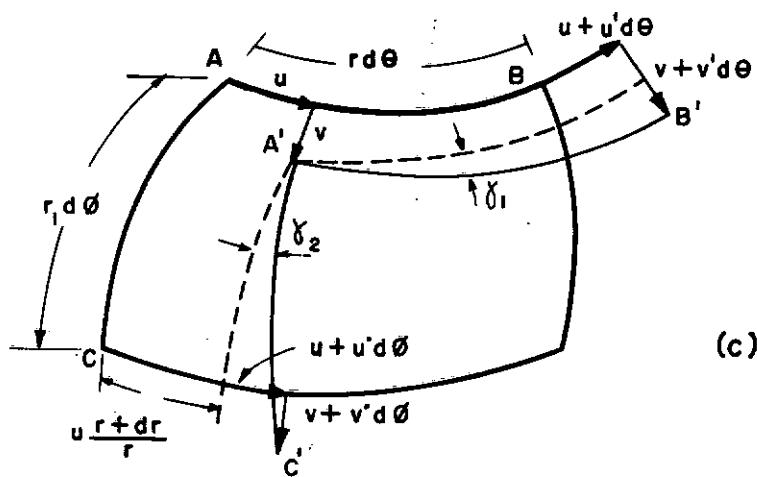
$$(\quad)^+ = \frac{\partial (\quad)}{\partial \Theta}$$

$$(\quad)^\circ = \frac{\partial (\quad)}{\partial \phi}$$



(a)

(b)



(c)

Fig. 1.4.1 - Contorno do elemento antes e após a deformação

### (a) deformacão no meridiano

(b) deformação no círculo paralelo

(c) meridiano e paralelo, mostrando o ângulo entre êles

Observando-se a fig. 1.4.1a, que mostra o deslocamento segundo o meridiano, é fácil ver que  $AC = ds\phi = r_1 d\phi$ , e que o ponto A se desloca de  $v$  e o ponto C de  $v + v' d\phi$ , cuja diferença é o alongamento da linha AC:

$$v' d\phi$$

Como os deslocamentos  $w$  dos pontos A e C não são na mesma direção, eles produzem um adicional alongamento na linha AC. Tem-se que o alongamento total da linha AC é:

$$\Delta ds\phi = (ds\phi + v' d\phi) \frac{r_1 + w}{r_1} - ds\phi$$

ou

$$\Delta ds\phi = \frac{w}{r_1} ds\phi + v' d\phi + \frac{w}{r_1} v' d\phi$$

O último termo desta expressão pode ser desprezado frente aos outros, por ser produto de dois deslocamentos. Procedendo esta eliminação e tendo em vista a definição de  $\epsilon\phi$ , chega-se a:

$$\epsilon\phi = \frac{v' + w}{r_1} \quad (1.4.1)$$

Da figura 1.4.1b, tem-se:

$$\Delta ds\theta = (ds\theta + u' d\theta) \frac{r + v \cos\phi + w \sin\phi}{r} - ds\theta$$

que após simplificações idênticas às anteriores, torna-se:

$$\Delta ds\theta = u' d\theta u + (v \cos\phi + w \sin\phi) \frac{ds\theta}{r}$$

Da definição de  $\epsilon\theta$ , escreve-se:

$$\epsilon\theta = \frac{u' + v \cos\phi + w \sin\phi}{r} \quad (1.4.2)$$

sendo  $\gamma\theta\phi$  a variação do ângulo entre meridiano e paralelo, pela figura 1.4.1c vê-se que:

$$\gamma\theta\phi = \gamma_1 + \gamma_2$$

e, que:

$$\gamma_1 = \frac{v' d\theta}{r d\theta + x' d\theta} \approx \frac{v'}{r} \quad ;$$

$$\gamma_2 = \frac{u + u' d\phi - x \left(1 + \frac{dr}{d\phi}\right)}{r_1 d\phi} = \frac{u}{r_1} - \frac{u}{r_1 r} \frac{dr}{d\phi}$$

Levando em conta que  $\frac{dr}{d\phi} = r_1 \cos\phi$ , resulta a seguinte expressão para  $\gamma\theta\phi$

$$\gamma\theta\phi = \frac{u}{r_1} - \frac{u}{r} \cos\phi + \frac{u'}{r} \quad (1.4.3)$$

As expressões 1.4.1 e 1.4.3 representam as deformações num ponto A0 da superfície média. As deformações num ponto A distando z da superfície média (fig. 1.4.2) são dadas por:

$$\epsilon\phi = \frac{v_A + w_A}{r_1 + z} \quad (1.4.4)$$

$$\epsilon_{\theta} = \frac{u' A + v A \cos \phi + w A \sin \phi}{(r_2 + z) \sin \phi} \quad (1.4.5)$$

$$\gamma_{\theta\phi} = \frac{u' A}{r_1 + z} - \frac{u A \cos \phi - v' A}{(r_2 + z) \sin \phi} \quad (1.4.6)$$

onde  $u'_A$ ,  $v'_A$  e  $w'_A$  são os deslocamentos do ponto A.

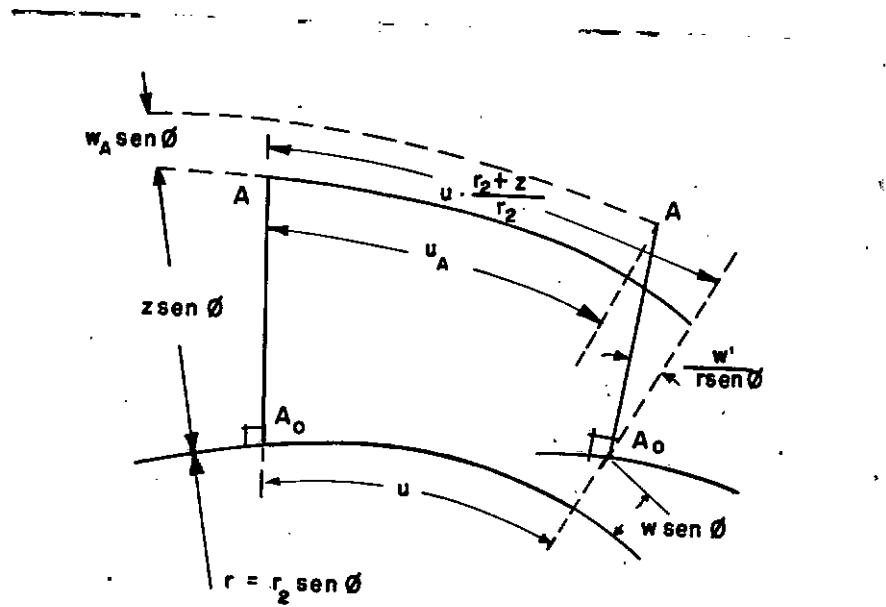


Fig. 1.4.2

Pode-se definir  $u_A$ ,  $v_A$  e  $w_A$  em função de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Pela figura 1.4.2, tem-se:

$$u_A = u \cdot \frac{r_2 + z}{r_2} - w \cdot \frac{z}{r} \quad (1.4.7)$$

$$v_A = v \cdot \frac{r_1 + z}{r_1} - w \cdot \frac{z}{r_1} \quad (1.4.8)$$

E como não se considera deformação ao longo da espessura

$$w_A = w \quad (1.4.9)$$

Substituindo-se os valores de  $u_A$ ,  $v_A$  e  $w_A$  definidos em 1.4.7 a 1.4.9 nas equações 1.4.4 a 1.4.6, após operações matemáticas, encontra-se:

$$\begin{aligned} \epsilon\phi &= \frac{v'}{r_1} - \frac{v''}{r_1} \cdot \frac{r_1'}{r_1} \cdot \frac{z}{r_1 + z} - \frac{w'''}{r_1} \cdot \frac{z}{r_1 + z} + \frac{w'}{r_1} \cdot \\ &\quad \frac{r_1'}{r_1} \cdot \frac{z}{r_1 + z} + \frac{w}{r_1 + z} \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

$$\begin{aligned} \epsilon\theta &= \frac{u'}{r} + \frac{v}{r_1} \cot\phi \cdot \frac{r_1 + z}{r_2 + z} - \frac{w''}{r \sin\phi} \cdot \frac{z}{r_2 + z} + \\ &\quad + \frac{w'}{r_1} \cot\phi \frac{z}{r_2 + z} + \frac{w}{r_2 + z} \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

$$\begin{aligned}
 \gamma\theta\phi &= \frac{u'}{r_2} \cdot \frac{r_2+z}{r_1+z} - \frac{u'r_1}{r_2^2} \cdot \frac{r_2+z}{r_1+z} \cot\phi + \frac{v'}{r_1 \sin\phi} \frac{r_1+z}{r_2+z} - \\
 &- \frac{w'}{r_1 \sin\phi} \left( \frac{1}{r_2+z} + \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{1}{r_1+z} \right) + \frac{w'}{r_2} \frac{\cot\phi}{\sin\phi} \left( \frac{z}{r_2+z} + \right. \\
 &\left. + \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{z}{r_1+z} \right) \quad (1.4.12)
 \end{aligned}$$

Substituindo-se estas expressões na lei de Hooke:

$$\sigma\phi = \frac{E}{1-v^2} (\epsilon\phi + v\epsilon\theta)$$

$$\sigma\theta = \frac{E}{1-v^2} (\epsilon\theta + v\epsilon\phi)$$

$$\tau\phi\theta = \frac{E}{2(1+v)} \gamma\phi\theta$$

E colocando-se as expressões obtidas nas integrais 1.2.2 a 1.2.5 e 1.2.8 a 1.2.11 que definem os esforços unitários (trocando-se os subscritos 1, 2 por  $\phi$ ,  $\theta$ ). Tem-se as relações entre os esforços unitários e os deslocamentos  $u$ ,  $v$ ,  $w$  para uma casca de revolução (1.4.13 a 1.4.20) onde  $K$  e  $D$  são as rigidezes da casca, definidos por:

$$K = \frac{E h^3}{12(1-v^2)}$$

$$D = \frac{E h}{1-v^2}$$

$$\begin{aligned}
 N\phi = D \left[ \frac{v' + w}{r_1} + v \frac{u' + v \cos \phi + w \sin \phi}{r} \right] + \frac{K}{r_1^2} \frac{r_2 - r_1}{r_2} \left[ \frac{v - w}{r_1} \frac{r_1}{r_1} + \right. \\
 \left. + \frac{w' + w}{r_1} \right] \quad (1.4.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N\theta = D \left[ \frac{u' + v \cos \phi + w \sin \phi}{r} + v \frac{v' + w}{r_1} \right] - \\
 - \frac{K}{r r_1} \frac{r_2 - r_1}{r_2} \left[ - \frac{v}{r_1} \frac{r_2 - r_1}{r_2} \cos \phi + \frac{w \sin \phi}{r_2} + \right. \\
 \left. + \frac{w'' + w' \cos \phi}{r} \right] \quad (1.4.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N\phi\theta = D \frac{1-v}{2} \left[ \frac{u'}{r_1} + \frac{v' - u \cos \phi}{r} \right] + \\
 + \frac{K}{r_1^2} \frac{1-v}{2} \frac{r_2 - r_1}{r_2} \left[ \frac{u'}{r_1} \frac{r_2 - r_1}{r_2} + \frac{u}{r_2} \frac{r_1 - r_2}{r_2} \cos \phi + \right. \\
 \left. + \frac{w'}{r} - \frac{w'}{r} \frac{r_1}{r} \cos \phi \right] \quad (1.4.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N\theta\phi = & D \frac{1-v}{2} \left[ \frac{u'}{r_1} + \frac{v' - x\cos\phi}{r} \right] + \\
 & + \frac{K}{rr_1} \frac{1-v}{2} \frac{r_2 - r_1}{r_2} \left[ \frac{v'}{r_1} \frac{r_2 - r_1}{r_2} - \frac{w'}{r_1} + \frac{w'\cos\phi}{r} \right] \quad (1.4.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M\phi = & K \left[ \frac{1}{r_1^2} (w'' - w \cdot \frac{r_1}{r_1} - w \frac{r_1 - r_2}{r_2}) - \right. \\
 & - \frac{v'}{r_1 r_2} + \frac{v}{r_1^2} \frac{r_1}{r_1} + v \frac{w''}{r^2} + v \frac{w'\cos\phi}{rr_1} - \\
 & \left. - v \frac{u'}{rr_2} - v \frac{v\cos\phi}{rr_1} \right] \quad (1.4.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M\theta = & IK \left[ \frac{w''}{r^2} + \frac{w'\cos\phi}{rr_1} - \frac{w}{r_2^2} \frac{r_2 - r_1}{r_1} - \frac{uu'}{rr_1} - \right. \\
 & - \frac{v\cos\phi}{rr_1} \frac{2r_2 - r_1}{r_2} + \frac{v}{r_1^2} (w'' - w \cdot \frac{r_1}{r_1}) - \\
 & \left. - \frac{v}{r_1^2} (v' - v \frac{r_1}{r_1}) \right] \quad (1.4.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M\phi\theta = & IK \frac{1-v}{2} \left[ 2 \frac{w''}{rr_1} - 2 \frac{w'}{r^2} \cos\phi - \frac{u'}{r_1 r_2} \frac{2r_1 - r_2}{r_1} + \right. \\
 & + \left. \frac{u}{r_2^2} \frac{2r_1 - r_2}{r_1} \cot\phi - \frac{v'}{rr_1} \right] \quad (1.4.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M\theta\phi = K \frac{1-v}{2} \left[ 2 \frac{w'}{rr_1} - 2 \frac{w'}{r^2} \cos\phi - \frac{u'}{r_1 r_2} + \right. \\
 \left. + \frac{u'}{r_2^2} \cot\phi - \frac{v'}{rr_1} \frac{2r_2 - r_1}{r_2} \right] \quad (1.4.20)
 \end{aligned}$$

Estas fórmulas são baseadas em duas hipóteses - que os deslocamentos são pequenos e que a normal à superfície média conserva-se normal durante a deformação.

Se se admite a hipótese de que a espessura é muito pequena em relação aos raios de curvatura, isto é, fazendo-se:

$$r_1 + z \approx r_1 \quad \text{e} \quad r_2 + z \approx r_2$$

e repetindo-se tudo que foi feito no caso anterior, chegam-se às seguintes equações simplificadas:

$$N\phi = D \left[ \frac{v' + w}{r_1} + v \frac{u' + v \cos\phi + w \sin\phi}{r} \right] \quad (1.4.21)$$

$$N\theta = D \left[ \frac{u' + v \cos\phi + w \sin\phi}{r} + v \frac{v' + w}{r_1} \right] \quad (1.4.22)$$

$$N\phi\theta = N\theta\phi = D \frac{1-v}{2} \left[ \frac{u'}{r_1} + \frac{v' - x \cos\phi}{r} \right] \quad (1.4.23)$$

$$M\phi = K \left[ \frac{1}{r_1} \left( \frac{w''}{r_1} \right) + \frac{v}{r} \left( \frac{w''}{r} + \frac{w'}{r_1} \cos\phi \right) \right] \quad (1.4.24)$$

$$M\Theta = K \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{w''}{r} + \frac{w'}{r_1} \cos\phi \right) + \frac{v}{r_1} \left( \frac{w'}{r_1} \right) \right] \quad (1.4.25)$$

$$M\phi\Theta = M\Theta\phi = k(1-v) \left[ \frac{w''}{r_1 r} - \frac{w'}{r^2} \cos\phi \right] \quad (1.4.26)$$

Nesta versão simplificada não existem diferenças entre  $N\phi\Theta$  e  $N\Theta\phi$  e entre  $M\phi\Theta$  e  $M\Theta\phi$ , o que viola a equação de equilíbrio 1.3.6 a menos que seja  $r_1$  igual a  $r_2$ . Mas isto é justificável uma vez que ambos os lados desta equação são bastante pequenos e assim sendo, serão sempre quase iguais. O que nos leva a eliminar esta equação por ser uma identidade.

Quer usando a forma simplificada quer usando a não simplificada, o problema de determinação dos esforços numa casca de revolução está perfeitamente determinado, já que temos os seguintes balanços entre incógnitas e equações.

- Versão simplificada: onze equações, que são cinco de equilíbrio (1.3.1 a 1.3.5) e as seis equações, 1.4.21 a 1.4.26, e também onze incógnitas que são  $N\phi$ ,  $N\Theta$ ,  $N\phi\Theta$ ,  $M\phi$ ,  $M\Theta$ ,  $M\phi\Theta$ ,  $Q\phi$ ,  $Q\Theta$ ,  $u$ ,  $v$  e  $w$ .

- Versão não simplificada: tem-se treze independentes equações que são cinco equações independentes entre as seis 1.3.1 a 1.3.6 e as oito 1.4.13 a 1.4.20 e igual número de incógnitas que

são as anteriores mais  $N\theta\phi$  e  $M\theta\phi$ .

### 1.5 - Carregamento axissimétrico

Se o carregamento tem a mesma simetria da casca, as expressões deduzidas para os esforços e deslocamentos simplificam-se consideravelmente, pois anulam-se:

- todas as derivadas em relação a  $\theta$
- os esforços  $N\theta\phi$ ,  $N\phi\theta$ ,  $M\theta\phi$ ,  $M\phi\theta$  e  $Q\theta$
- o deslocamento  $u$  e a componente  $p\theta$  das forças externas

Assim sendo as equações de equilíbrio ficam reduzidas a:

$$(rN\phi)' - r_1 N\theta\cos\phi - rQ\phi = -rr_1 p\phi \quad (1.5.1)$$

$$(rQ\phi)' + r_1 N\theta\sin\phi + rN\phi = rr_1 p_z \quad (1.5.2)$$

$$(rM\phi)' - r_1 M\theta\cos\phi = rr_1 Q\phi \quad (1.5.3)$$

E, as equações 1.4.13 a 1.4.20 ficam:

$$\begin{aligned} N\phi = D \left[ \frac{v' + w}{r_1} + \frac{v}{r_2} (v \cot\phi + w) \right] + \frac{K}{r_1^3} \frac{r_2 - r_1}{r_2} \left[ (v - w') \frac{r_1}{r_2} + \right. \\ \left. + w'' + w \right] \quad (1.5.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N\theta &= D \left[ \frac{1}{r_2} (v \cot\phi + w) + \frac{v}{r_1} (v' + w) \right] - \\
 &- \frac{K}{r_1 r_2} \frac{r_2 - r_1}{r_2} \left[ - \frac{v}{r_1} \frac{r_2 - r_1}{r_2} \cot\phi + \frac{w'}{r_1} \cot\phi + \frac{w}{r_2} \right] \\
 &\quad (1.5.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M\phi &= \frac{K}{r_1} \left[ \left( \frac{w' - v}{r_1} \right)' + (v' + w) \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} + \frac{v}{r_2} (w' - v) \cot\phi \right] \\
 &\quad (1.5.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M\theta &= \frac{K}{r_1} \left[ \frac{w' - v}{r_2} \cot\phi - \frac{v \cot\phi + w}{r_2} \frac{r_2 - r_1}{r_2} + \right. \\
 &\quad \left. + v \left( \frac{w' - v}{r_1} \right)' \right] \\
 &\quad (1.5.7)
 \end{aligned}$$

Para as expressões simplificadas 1.4.21 a 1.4.26 tem-se:

$$N\phi = D \left[ \frac{v' + w}{r_1} + v \frac{v \cos\phi + w \sin\phi}{r} \right] \quad (1.5.8)$$

$$N\theta = D \left[ \frac{v \cos\phi + w \sin\phi}{r} + v \frac{v' + w}{r_1} \right] \quad (1.5.9)$$

$$M\phi = \frac{K}{r_1} \left[ \left( \frac{w'}{r_1} \right)' + v \frac{w' \cos\phi}{r} \right] \quad (1.5.10)$$

$$M\theta = \frac{K}{r_1} \left[ \frac{w' \cos\phi}{r} + v \left( \frac{w'}{r} \right)' \right] \quad (1.5.11)$$

1.6 :- Instituição das equações de Meissner

O problema apresentado na seção anterior implica na solução de um sistema de sete equações a sete incógnitas, quer se use a forma simplificada quer não. O método de estudo que se apresenta nesta seção foi desenvolvido inicialmente por H. Reissner no caso de cascas esféricas e depois estendido às cascas de revolução por E. Meissner.

Este método consiste em reduzir o problema a um sistema de duas equações diferenciais nas incógnitas:

$$x = \frac{w' - v}{r_1} \quad (1.6.1)$$

$$U = r_2 Q\phi \quad (1.6.2)$$

Nota-se que  $x$  corresponde à rotação da tangente ao meridiano, sendo positiva no sentido do menor giro da tangente sobre a normal.

A solução pode ser separada em duas: uma homogênea, que corresponde a se supor a não existência de cargas externas e uma particular correspondente às cargas, que deverão ser juntadas posteriormente.

Inicialmente, vamos admitir a não existência de cargas externas, isto é:

$$p\phi = p_z = 0$$

Assim, as equações 1.5.1 a 1.5.3 ficam:

$$(rN\phi)' - r_1 N\theta \cos\phi - r Q\phi = 0 \quad (1.6.3)$$

$$(rQ\phi)' + r_1 N\theta \sin\phi + r N\theta = 0 \quad (1.6.4)$$

$$(rM\phi)' - r_1 M\theta \cos\phi = rr_1 Q\phi \quad (1.6.5)$$

Para se chegar as equações de Meissner, o que permitirá encontrar as soluções procuradas, deve-se proceder algumas simplificações nas equações gerais 1.5.4 a 1.5.7. Estas simplificações são as seguintes:

- Na equação 1.5.4 eliminam-se os termos que apresentam o fator  $K/r_1^2$ , frente aos termos em D, uma vez que  $K/(r_1^2 D) = h^2/(12r_1^2)$  que é muito pequeno.

- Idem para equação 1.5.4 para os termos que contêm o fator  $K/r_2^2$ .

- Nas expressões dos momentos, 1.5.6 e 1.5.7 pode-se desprezar os termos que contêm o fator  $r_2 - r_1$ , já que, em problemas que exista predominância de flexão, eles são pequenos em relação aos demais, e havendo predominância de esforços normais

não há necessidade de maior precisão na determinação dos momentos, por serem estes pequenos.

Procedidas estas simplificações, tem-se:

$$N\phi = D \left[ \frac{v^* + w}{r_1} + \frac{v}{r_2} (v \cot \phi + w) \right] \quad (1.6.6)$$

$$N\theta = D \left[ \frac{1}{r_2} (v \cot \phi + w) + \frac{v}{r_1} (v^* + w) \right] \quad (1.6.7)$$

$$M\phi = K \left[ \frac{x^*}{r_1} + \frac{v}{r_2} x \cot \phi \right] \quad (1.6.8)$$

$$M\theta = K \left[ \frac{x}{r_1} \cot \phi + \frac{x^*}{r_1} \right] \quad (1.6.9)$$

Levando-se estas últimas expressões de  $M\phi$  e  $M\theta$  à equação 1.6.5 e tendo em vista 1.6.2, chega-se a primeira das equações procuradas:

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1} x^* + \left[ \frac{r_2}{r_1} \cot \phi + \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^* + \frac{r_2}{r_1} \frac{k^*}{K} \right] x^* - \\ - \left[ \frac{r_2}{r_1} \cot^2 \phi + v - v \frac{K^* \cot \phi}{K} \right] x^* = \frac{r_1}{K} u \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

A segunda equação será instituída em função das duas primeiras equações de equilíbrio e das equações 1.6.6 e 1.6.7.

Das duas primeiras equações de equilíbrio chega-se a:

$$(rN\phi \operatorname{sen}\phi)^\circ + (rQ\phi \operatorname{cos}\phi)^\circ = 0$$

Esta equação expressa o fato de que a resultante vertical das forças atuantes num círculo paralelo não depende de  $\phi$ . Integrando esta equação tem-se:

$$rN\phi \operatorname{sen}\phi + rQ\phi \operatorname{cos}\phi = - \frac{P}{2\pi}$$

onde a constante  $P$  representa a resultante das forças verticais.

Desta última relação e das equações 1.6.3 e 1.6.4, resultam:

$$N\phi = -Q\phi \operatorname{cot}\phi - \frac{P}{2\pi r_2 \operatorname{sen}^2 \phi} \quad (1.6.11)$$

$$N\theta = -\frac{(r_2 Q\phi)^\circ}{r_1} + \frac{P}{2\pi r_1 \operatorname{sen}^2 \phi} \quad (1.6.12)$$

Das equações 1.6.6 e 1.6.7 obtem-se:

$$v^\circ + w = \frac{r_1}{D(1-v^2)} (N\phi - vN\theta) \quad (1.6.13)$$

$$v\operatorname{cot}\phi + w = \frac{1}{D(1-v^2)} (r_2 N\theta - vr_2 N\phi) \quad (1.6.14)$$

Derivando-se esta última equação, vem

$$v' \cot\phi - \frac{v}{\sin^2\phi} + w' = \frac{1}{(1-v^2)} \left[ \left( \frac{r_2^{N\theta}}{D} \right)' - v \left( \frac{r_2^{N\phi}}{D} \right)' \right]$$

E eliminando-se  $v'$  e  $w'$  destas três últimas equações, chega-se a:

$$r_1 x = \frac{1}{1-v^2} \left[ \left( \frac{r_2^{N\theta}}{D} \right)' - v \left( \frac{r_2^{N\phi}}{D} \right)' + \right. \\ \left. + (r_2 + vr_1) \frac{N\theta}{D} \cot\phi - (r_1 + vr_2) \frac{N\phi}{D} \cot\phi \right] \quad (1.6.14)$$

Desta última equação, tendo-se em vista 1.6.11 e 1.6.12 resulta a segunda equação do problema:

$$\frac{r_2}{r_1} u'' + \left[ \frac{r_2}{r_1} \cot\phi + \left( \frac{r_2}{r_1} \right)' - \frac{r_2}{r_1} \frac{D'}{D} \right] u' - \\ - \left[ \frac{r_1}{r_2} \cot^2\phi - v - v \frac{D'}{D} \cot\phi \right] u = \\ = -D(1-v^2)r_1 x + P g(\phi) \quad (1.6.15)$$

sendo:

$$g(\phi) = \frac{1}{2\pi \sin^2\phi} \left[ \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 r_2} \cot\phi + \left( \frac{r_2}{r_1} \right)' + \right. \\ \left. + \frac{vr_1 + r_2}{r_1} \frac{D'}{D} \right] \quad (1.6.16)$$

O sistema formado pelas equações 1.6.10 e 1.6.16, constitue as equações de Meissner na sua forma mais geral, em que variam os raios de curvatura e a espessura, nesta forma só é possível a solução numericamente.

Admitindo-se que a espessura seja constante e deixando-se o termo em  $P$  para ser tratado posteriormente, tem-se:

$$\frac{r_2}{r_1} u'' + \left[ \frac{r_2}{r_1} \cot\phi + \left( \frac{r_2}{r_1} \right)' \right] u' -$$

$$- \left[ \frac{r_1}{r_2} \cot^2\phi - v \right] u = - D(1-v^2) r_1 x$$

E,

$$\frac{r_2}{r_1} x'' + \left[ \frac{r_2}{r_1} \cot\phi + \left( \frac{r_2}{r_1} \right)' \right] x' -$$

$$- \left[ \frac{r_1}{r_2} \cot^2\phi + v \right] x = \frac{r_1 r_2}{k} Q\phi$$

O que sugere a introdução do operador linear:

$$L(\ ) = \frac{r_2}{r_1} \frac{(\ )''}{r_1} + \left[ \frac{r_2}{r_1} \cot\phi + \left( \frac{r_2}{r_1} \right)' \right] \frac{(\ )'}{r_1} -$$

$$- \frac{r_1}{r_2} \cot^2\phi \frac{(\ )}{r_1} , \quad (1.6.17)$$

que permite escrever:

$$L(U) + \frac{v}{r_1} U = - D(1 - v^2) \dot{x} \quad (1.6.18)$$

$$L(x) - \frac{v}{r_1} x = \frac{U}{K} \quad (1.6.19)$$

E facilmente separar as variáveis, da forma que segue:

$$\begin{aligned} LL(U) + vL\left(\frac{U}{r_1}\right) - \frac{v}{r_1} L(U) - \\ - \frac{v^2}{r_1^2} U = \frac{D(1-v^2)}{K} U \end{aligned} \quad (1.6.20)$$

Mesmo a solução desta equação no caso geral em que  $r_1$  e  $r_2$  variam com  $\phi$  só é possível numericamente, mas se o raio  $r_1$  for constante a equação 1.6.20 simplifica-se bastante e são conhecidas as soluções para a casca esférica ( $r_1 = r_2 = a$ ), para a casca cônica ( $r_1 = \infty$ ,  $\phi = \text{const.}$ ) e para a casca cilíndrica ( $r_1 = \infty$ ,  $\phi = \pi/2$ ), que serão tratadas no próximo capítulo.

Se na equação 1.6.20, faz-se  $r_1$  constante chega-se a-  
pós simplificações a:

$$LL(U) + \mu^4 U = 0 \quad (1.6.21)$$

onde  $\mu^4 = \frac{D(1-v^2)}{K} - \frac{v^2}{r_1^2}$  (1.6.22)

Esta equação 1.6.21 pode ser escrita nas seguintes formas:

$$L(L(U) + i\mu^2 U) - i\mu^2(L(U) + i\mu^2 U) = 0$$

$$L(L(U) - i\mu^2 U) + i\mu^2(L(U) - i\mu^2 U) = 0$$

O que demonstra que as soluções das duas equações

$$L(U) + i\mu^2 U = 0 \quad (1.6.23)$$

$$L(U) - i\mu^2 U = 0 \quad (1.6.24)$$

são soluções da equação 1.6.21.

Por causa do fator  $i$  a solução das equações 1.6.23 e 1.6.24, são complexas.

Supondo-se que as soluções da equação 1.6.23 sejam

$$U_1 = I_1 + iI_2; \quad U_2 = I_3 + iI_4$$

tem-se:

$$L(I_1 + iI_2) + i\mu^2(I_1 + iI_2) = 0$$

$$L(I_3 + iI_4) + i\mu^2(I_3 + iI_4) = 0$$

ou seja:

$$L(I_1) + iL(I_2) + i\mu^2 I_1 - \mu^2 I_2 = 0$$

$$L(I_3) + iL(I_4) + i\mu^2 I_3 - \mu^2 I_4 = 0$$

Separando-se a parte real da imaginária, tem-se que:

$$L(I_1) - \mu^2 I_2 = 0 \quad L(I_2) + \mu^2 I_1 = 0 \quad (1.6.25)$$

$$L(I_3) - \mu^2 I_4 = 0 \quad L(I_4) + \mu^2 I_3 = 0$$

É fácil ver que as soluções da equação (1.6.24) são:

$$U_3 = I_1 - iI_2 \quad U_4 = I_3 - iI_4$$

Das equações 1.6.25 deduz-se:

$$LL(I_1) \mu^4 I_1 = 0 \quad LL(I_2) + \mu^4 I_2 = 0$$

$$LL(I_3) + \mu^4 I_3 = 0 \quad LL(I_4) + \mu^4 I_4 = 0$$

Que equivale a dizer que a solução da equação 1.6.24 é:

$$U = c_1 I_1 + c_2 I_2 + c_3 I_3 + c_4 I_4 \quad (1.6.27)$$

sendo  $c_i$  constantes reais. Portanto, conhecidas as soluções complexas da equação 1.6.23 determinam-se as soluções reais da equação 1.6.21.

Uma vez conhecida a solução  $U$ , determina-se  $X$  pela equação 1.6.18:

$$\ddot{X} = - \frac{1}{r_1 Eh} [L(U) + vU] =$$

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{1}{r_1 Eh} [c_1 L(I_1) + c_2 L(I_2) + c_3 L(I_3) + \\
 &+ c_4 L(I_4) + v(c_1 I_1 + c_2 I_2 + c_3 I_3 + c_4 I_4)]
 \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= - \frac{1}{r_1 Eh} [c_1(vI_1 + \mu^2 I_2) + c_2(vI_2 - \mu^2 I_1) + \\
 &+ c_3(vI_3 + \mu^2 I_4) + c_4(vI_4 - \mu^2 I_3)] \quad (1.6.28)
 \end{aligned}$$

CAPÍTULO IIINTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE MEISSNER

O objetivo deste capítulo é apresentar a solução das equações de Meissner, para as cascas esféricas, cônicas e cilíndricas, explicitando-se as expressões dos esforços unitários e dos deslocamentos.

2.1 - Casca esférica, equação homogênea

Particularizando-se as equações 1.6.8, 1.6.9, 1.6.11 e 1.6.12, para  $r_1 = r_2 = a$ , tem-se:

$$M\phi = \frac{K}{a} (x \cdot + v x \cot\phi) \quad (2.1.1)$$

$$M\theta = \frac{K}{a} (x \cot\phi + v x \cdot) \quad (2.1.2)$$

$$N\phi = - Q\phi \cot\phi - \frac{P}{2\pi a \operatorname{sen}^2\phi} \quad (2.1.3)$$

$$N\theta = - Q\phi + \frac{P}{2\pi a \operatorname{sen}^2\phi} \quad (2.1.4)$$

Colocando-se, também:

$$x = \frac{w' - v}{a} \quad \text{e} \quad u = a Q\phi$$

Pelas expressões 1.6.13 e 1.6.14, determina-se  $v$  e  $w$ .

$$v = \operatorname{sen}\phi \left[ a(1+v) \int \frac{N\phi - N\theta}{Eh \operatorname{sen}\phi} d\phi + C \right] \quad (2.1.5)$$

$$w = -vcot\phi + \frac{a}{Eh} (N\theta - vN\phi) \quad (2.1.6)$$

O operador linear 1.6.17, torna-se:

$$L_1(\ ) = \frac{(\ )''}{a} + [\cot\phi] \frac{u'}{a} - \cot^2\phi \frac{(\ )}{a}$$

Desta forma as equações 1.6.18 e 1.6.19, após multiplicadas por  $a$  e tendo-se em conta a definição da constante  $D$ , são para a casca esférica:

$$u'' + \cot\phi u' - \cot^2\phi u + vu = -Ehax \quad (2.1.7)$$

$$x'' + \cot\phi x' - \cot^2\phi x - vx = \frac{ua}{k} \quad (2.1.8)$$

A solução deste sistema de equações é encontrada a partir de uma equação diferencial de segunda ordem do tipo 1.6.3, conforme foi mostrado anteriormente, esta equação, para o caso em questão, é de forma explícita, é a seguinte:

$$u'' + \cot\phi u' - \cot^2\phi u + i\mu^2 u = 0 \quad (2.1.9)$$

sendo,

$$\mu^4 = \frac{12(1-v^2)a^2}{h^2} - v^2$$

Apresenta-se a seguir a solução desta equação, evitando-se, deliberadamente, longas transformações matemáticas. Maiores detalhes podem ser encontrados na referência nº 1.

A fim de se eliminarem as funções trigonométricas, pode-se fazer a seguinte mudança de variáveis:

$$x = \sin^2 \phi$$

$$U = z \cdot \sin \phi = z \cdot x^{1/2}$$

E, a equação 2.1.9 passa a:

$$x(x-1) \frac{d^2 z}{dx^2} + \left(\frac{5}{2}x - z\right) \frac{dz}{dx} + \frac{1-i\mu^2}{4} z = 0 \quad (2.1.10)$$

que se reconhece como uma equação hipergeométrica, cuja forma geral é:

$$x(x-1) z'' + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma] z' + \alpha\beta z = 0$$

sendo no caso:

$$\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{5+4i\mu^2}}{4} \quad \beta = \frac{3 \pm \sqrt{5+4i\mu^2}}{4} \quad \gamma = 2$$

A equação hipergeométrica possui pontos singulares em  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = \infty$  em torno dos quais se obtêm soluções por série.

Como, no caso,  $x = \sin^2 \phi < 1$ , pode-se restringir o estudo das soluções ao redor do ponto singular  $x = 0$ .

A primeira solução desta equação é do tipo:

$$z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

E a segunda, já que  $\gamma$  é inteiro e as raízes da equação indicial

$$s(s-1) + \gamma s = 0$$

sendo  $s_1 = 0$  e  $s_2 = 1-\gamma$ , diferem de um número inteiro, será:

$$z_2 = z_1 \ell_n x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1}$$

Demonstra-se a seguinte lei de recorrência, entre um coeficiente genérico  $c_n$  e o primeiro  $c_0$ , para a série  $z_1$ :

$$c_n = \frac{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\alpha+1)\dots[s+\alpha+(n-1)][s+\beta+(n-1)]}{(s+1)(s+\gamma)(s+2)(s+\gamma+1)\dots(s+n)(s+\gamma+n-1)} c_0$$

sendo  $s_1 = 0$  e fazendo-se  $c_0 = 1$ , tem-se para a primeira solução

$$z_1 = s_1 + is_2 = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot 2} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{(1\cdot 2)(2\cdot 3)} x^2 + \dots + \frac{\alpha\dots(\alpha+n-1)\beta\dots(\beta+n-1)}{n!(n+1)!} x^n \quad (2.1.11)$$

Para obter a segunda solução emprega-se o métodos dos coeficientes indeterminados: toma-se a solução  $z_2$  e substitui-se a expressão da mesma e de suas derivadas na equação 2.1.10. Para que esta equação seja satisfeita deverão ser nulos os coeficientes e tendo-se em conta que  $\gamma = 2$ , resulta como a segunda solução

$$\begin{aligned}
 z_2 &= s_3 + is_4 = z_1 \ln x + \frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)} x^{-1} + \\
 &+ 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot 2} \left[ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2} \right] x + \dots \\
 &+ \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!(n+1)!} \left[ \sum_{s=0}^{n-1} \left( \frac{1}{\alpha+s} + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{1}{\beta+s} - \frac{2}{\beta+s} - \frac{2}{\alpha+s} \right) + \frac{1}{n+1} \right] x^n + \dots \quad (2.1.12)
 \end{aligned}$$

Separando-se os reais dos imaginários, nas equações 2.1.11 e 2.1.12. Elas podem ser escritas nas formas que seguem:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= s_1 + is_2 = (A_0 + iB_0) + (A_1 + iB_1)x + \\
 &+ (A_2 + iB_2)x^2 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_2 &= s_3 + is_4 = (s_1 + is_2)\ln x + (E_{-1} + iF_{-1})x^{-1} + \\
 &+ (E_0 + iF_0) + (E_1 + iF_1)x + (E_2 + iF_2)x^2 + \dots
 \end{aligned}$$

onde se conclue que:

$$s_1 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots A_n x^n$$

$$s_2 = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots B_n x^n$$

$$s_3 = s_1 \ln x + E_1 x^{-1} + E_0 + E_1 x + E_2 x^2 + \dots E_n x^n$$

$$s_4 = s_2 \ln x + F_1 x^{-1} + F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \dots F_n x^n$$

Da equação 2.1.11, escreve-se:

$$A_n + iB_n = (A_{n-1} + iB_{n-1}) \frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(n+1)}$$

Substituindo-se  $\alpha$  e  $\beta$  pelos seus valores conhecidos, e identificando-se as quantidades reais e imaginárias de um lado e doutro da igualdade, ficam estabelecidas as seguintes leis de recorrência para os coeficientes genéricos  $A_n$  e  $B_n$ :

$$A_n = A_{n-1} \frac{4n^2 - 2n - 1}{4n(n+1)} + B_{n-1} \frac{\mu^2}{4n(n+1)} \quad (2.1.13)$$

$$B_n = -A_{n-1} \frac{\mu^2}{4n(n+1)} + B_{n-1} \frac{4n^2 - 2n - 1}{4n(n+1)}$$

sendo  $A_0 = 1$ ;  $B_0 = 0$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$

Para determinar as leis de recorrência dos coeficientes  $E_n$  e  $F_n$  procede-se de maneira similar, encontrando-se:

$$E_n = A_n \left\{ \frac{1}{n+1} + \sum_{s=0}^{n-1} \left[ (6+8s) \frac{4s^2 + 6s + 1}{(4s^2 + 6s + 1)^2 + \mu^4} - \frac{2}{2+s} \right] \right\} =$$

$$-B_n \sum_{s=0}^{n-1} \left[ (6 + 8s) \frac{\mu^2}{(4s^2 + 6s + 1)^2 + \mu^4} \right]$$

$$F_n = B_n \left\{ \frac{1}{n+1} + \sum_{s=0}^{n-1} \left[ (6+8s) \frac{4s^2 + 6s + 1}{(4s^2 + 6s + 1)^2 + \mu^4} - \frac{2}{2+s} \right] \right\} + A_n \sum_{s=0}^{n-1} \left[ (6+8s) \frac{\mu^2}{(4s^2 + 6s + 1)^2 + \mu^4} \right] \quad (2.1.14)$$

Para  $n = 1, 2, 3, \dots$  e sendo:

$$E_{-1} = -\frac{4}{1+\mu^4}; \quad E_0 = 1; \quad F_{-1} = \frac{4\mu^2}{1+\mu^4}; \quad F_0 = 0$$

Deste modo tem-se as soluções  $z_1$  e  $z_2$  da equação 2.1.10 e por conseguinte as soluções  $U_1$  e  $U_2$  da equação 2.1.9, que são:

$$U_1 = \operatorname{sen}\phi z_1 = \operatorname{sen}\phi(s_1 + is_2)$$

$$U_2 = \operatorname{sen}\phi z_2 = \operatorname{sen}\phi(s_1 + is_4)$$

Pelo que foi mostrado na seção 1.6, as soluções reais do sistema formado pelas equações 2.1.7 e 2.1.8 e de acordo com 1.6.27 e 1.6.28, são:

$$U = \operatorname{sen}\phi(c_1 s_1 + c_2 s_2 + c_3 s_3 + c_4 s_4) \quad (2.1.15)$$

$$x = - \frac{\operatorname{sen} \phi}{aEh} [c_1(v s_1 + \mu^2 s_2) + c_2(v s_2 - \mu^2 s_1) + c_3(v s_3 + \mu^2 s_4) + c_4(v s_4 - \mu^2 s_3)] \quad (2.1.16)$$

Deve-se notar que a função  $g(\phi)$ , apresentada em 1.6.16 e excluída do tratamento geral por implicar numa solução particular, resulta igual a zero, para o caso da casca esférica. Portanto, mesmo existindo a projeção vertical  $P$ , de forças aplicadas nos bordos, as expressões 2.1.15 e 2.1.16 não são alteradas.

Para a determinação dos esforços unitários  $M\phi$ ,  $M\theta$  e  $N\theta$  necessita-se conhecer as derivadas  $\frac{dx}{d\phi}$  e  $\frac{dU}{d\phi}$ , em outras palavras conhecer as derivadas de  $\operatorname{sen} \phi s_i$  em relação à  $\phi$ , que são as seguintes:

$$Ds_1 = \frac{d(\operatorname{sen} \phi s_1)}{d\phi} = \cos \phi (A_0 + 3A_1 x + 5A_2 x^2 + \dots) = \\ = \cos \phi \sum_0^{\infty} (2n+1) A_n x^n$$

$$Ds_2 = \frac{d(\operatorname{sen} \phi s_2)}{d\phi} = \cos \phi (B_0 + 3B_1 x + 5B_2 x^2 + \dots) = \\ = \cos \phi \sum_0^{\infty} (2n+1) B_n x^n$$

$$Ds_3 = \frac{d(\operatorname{sen} s_3)}{d\phi} = \ln x \cdot Ds_1 + 2 \cos s_1 + \\ + \cos \phi \sum_{-1}^{\infty} (2n+1) c_n x^n$$

$$Ds_4 = \frac{d(\operatorname{sen}\phi s_3)}{d\phi} = \ell n x \ Ds_2 + 2\cos\phi s_2 + \\ + \cos\phi \sum_{-1}^{\infty} (2n+1) D_n x^n$$

Considerando as definições dos  $Ds_i$  e tendo-se em conta que  $U = aQ\phi$ , tem-se pelas equações 2.1.1 a 2.1.4 as expressões para os esforços unitários:

$$M\phi = - \frac{K}{Eha^2} \{ c_1 [vDs_1 + \mu^2 Ds_2 + v\cos\phi(v s_1 + \mu^2 s_2)] + \\ + c_2 [vDs_2 - \mu^2 Ds_1 + v\cos\phi(v s_2 - \mu^2 s_1)] + \\ + c_3 [vDs_3 + \mu^2 Ds_4 + v\cos\phi(v s_3 + \mu^2 s_4)] + \\ + c_4 [vDs_4 - \mu^2 Ds_3 + v\cos\phi(v s_4 - \mu^2 s_3)] \} \quad (2.1.17)$$

$$M\Theta = - \frac{K}{Eha^2} \{ c_1 [v(vDs_1 + \mu^2 Ds_2) + \cos\phi(v s_1 + \mu^2 s_2)] + \\ + c_2 [v(vDs_2 - \mu^2 Ds_1) + \cos\phi(v s_2 - \mu^2 s_1)] + \\ + c_3 [v(vDs_3 + \mu^2 Ds_4) + \cos\phi(v s_3 + \mu^2 s_4)] + \\ + c_4 [v(vDs_4 - \mu^2 Ds_3) + \cos\phi(v s_4 - \mu^2 s_3)] \} \quad (2.1.18)$$

$$Q\phi = \frac{U}{a} = \frac{\operatorname{sen}\phi}{a} (c_1 s_1 + c_2 s_2 + c_3 s_3 + c_4 s_4) \quad (2.1.19)$$

$$N\phi = - \frac{\cos\phi}{a} (c_1 s_1 + c_2 s_2 + c_3 s_3 + c_4 s_4) - c_5 \frac{1}{a \operatorname{sen}^2 \phi} \quad (2.1.20)$$

$$N\theta = - \frac{1}{a} (c_1 Ds_1 + c_2 Ds_2 + c_3 Ds_3 + c_4 Ds_4) + c_5 \frac{1}{a \operatorname{sen}^2 \phi} \quad (2.1.21)$$

Onde os termos em  $c_5$  correspondem ao caso de existir resultante vertical,  $P$ , das forças de bordo. Sendo:

$$c_5 = \frac{P}{2\pi}$$

Na determinação do deslocamento  $v$ , segundo um meridiano, levar-se-á primeiro em conta apenas a parte homogênea de  $N\phi$  e  $N\theta$ , que figuram na integral 2.1.5, tem-se então para o deslocamento  $v$ , sem consideração do termo referente a  $P$ :

$$v = - \frac{1+v}{Eh} \operatorname{sen}\phi (c_1 s_1 + c_2 s_2 + c_3 s_3 + c_4 s_4) + c_6 \operatorname{sen}\phi \quad (2.1.22)$$

sendo  $c_6$  a constante  $c$  que aparece na integral 2.1.5 e corresponde a deslocamento de corpo rígido na direção vertical.

Para se considerar a existência da componente vertical  $P$ , deve-se ter em conta que ela não pode existir sozinha, pois não é auto-equilibrada, portanto só tem sentido falar neste tipo de carga nodal, se atuante nas duas bordas simultaneamente e em equilíbrio. Para tornar determinada a relação força deslocamento procurada, admite-se a força  $P$  agindo no nó superior estando o nó inferior apoiado segundo o meridiano, conforme está mostrado na fig. 2.1.1.

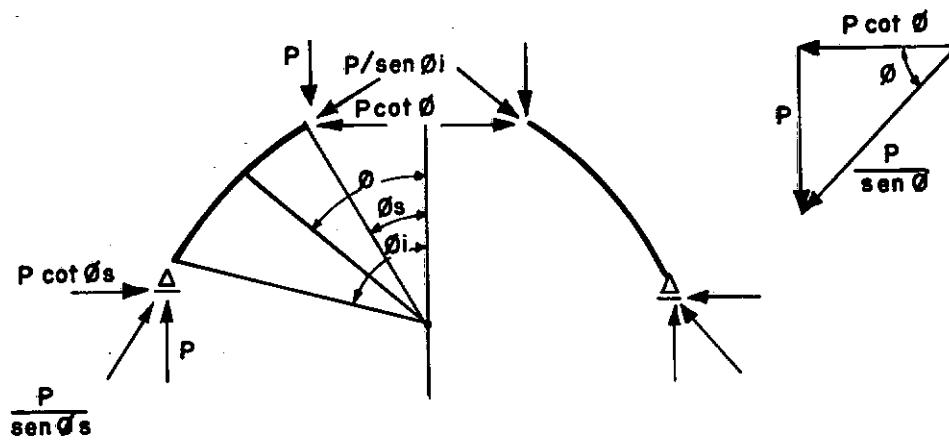


Fig. 2.1.1

Tomando-se agora na integral geral 2.1.5 os termos que dizem respeito a esta força e integrando entre os limites  $\phi_i$  e  $\phi$ , tem-se

$$v = \operatorname{sen}\phi \frac{(1+v)}{Eh} \cdot \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}^2\phi} - \frac{\cos\phi i}{\operatorname{sen}^2\phi i} - \ln \frac{\operatorname{tg}\phi/2}{\operatorname{tg}\phi i/2} \right]$$

ou seja, pondo  $c_5 = \frac{P}{2\pi}$ ;

$$v = \operatorname{sen}\phi \frac{(1+v)}{Eh} \left[ \frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}^2\phi} - \frac{\cos\phi i}{\operatorname{sen}^2\phi i} - \ln \frac{\operatorname{tg}\phi/2}{\operatorname{tg}\phi i/2} \right] c_5 \quad (2.1.23)$$

Reunindo-se as duas contribuições calculadas para o deslocamento  $v$ :

$$v = - \frac{1+v}{Eh} \operatorname{sen}\phi \left[ c_1 s_1 + c_2 s_2 + c_3 s_3 + c_4 s_4 - c_5 \left( \frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}^2\phi} - \frac{\cos\phi i}{\operatorname{sen}^2\phi i} - \ln \frac{\operatorname{tg}\phi/2}{\operatorname{tg}\phi i/2} \right) + c_6 \operatorname{sen}\phi \right] \quad (2.1.24)$$

Observa-se que a resultante vertical  $P$ , atuante na borda superior, surge como componente da resultante  $P/\operatorname{sen}\phi$ , segundo a direção do meridiano, que é na realidade a força externa aplicada à borda. A constante  $c_6$  inclui a possibilidade de ocorrer deslocamento vertical do apoio inferior, quando se considera a interação entre elementos.

Pela equação 2.1.6 determina-se w:

$$w = -v \cot \phi + \frac{1}{Eh} \left[ c_1 (Ds_1 - v \cos \phi s_1) + c_2 (Ds_2 - v \cos \phi s_2) + c_3 (Ds_3 - v \cos \phi s_3) + c_4 (Ds_4 - v \cos \phi s_4) \right] \quad (2.1.25)$$

## 2.2 - Soluções particulares

Na seção 1.6 ao instituir as equações gerais de Meissner, apenas foi levado em conta a parte homogênea das mesmas ou seja não foi considerada a existência de forças de superfície. Desejando-se considerar o efeito destas forças necessita-se determinar uma solução particular correspondente.

Tendo-se em conta  $p\phi$  e  $p_z$ , no sistema 1.6.18 e 1.6.19, aparece mais uma parcela  $F(\phi)$ :

$$L(U) + \frac{v}{r_1} U = -D(1-v^2) x + F(\phi)$$

$$L(x) - \frac{v}{r_1} x = \frac{U}{k}$$

No caso da casca esférica:

$$F(\phi) = (1 + v)p\phi a + p_z^* a$$

e de 2.1.7 a 2.1.8, vem:

$$\begin{aligned}
 U'' + \cot\phi U' - \cot^2\phi U + vU &= -Ehax + \\
 &+ (1+v)p\phi a + p_z a \\
 x'' + \cot\phi x' - \cot^2\phi x - vx &= \frac{Ua}{k}
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Apresenta-se a seguir a solução particular do sistema 2.2.1, para o caso do peso próprio, onde:

$$p\phi = g \operatorname{sen}\phi, \quad p_z = -g \cos\phi$$

resultando:

$$F(\phi) = (z + v)g \operatorname{sen}\phi$$

$$\begin{aligned}
 U'' + \cot\phi U' - \cot^2\phi U + vU &= -Ehax + \\
 &+ (2+v)g \operatorname{sen}\phi \\
 x'' + \cot\phi x' - \cot^2\phi x - vx &= \frac{Ua}{k}
 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Uma solução particular para este sistema, pode ser:

$$\begin{aligned}
 x_p &= A \operatorname{sen}\phi \\
 U_p &= B \cos\phi
 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Após determinadas as constantes A e B chega-se às seguintes expressões para  $x_p$  e  $U_p$ :

$$x_p = \frac{ga}{Eh} (2+v) \rho \operatorname{sen}\phi \tag{2.2.4}$$

$$U_p = \frac{gh^2}{12} \frac{2+v}{1-v} \rho \sin\phi \quad (2.2.5)$$

sendo:  $\rho = 1/(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{h^2}{a^2})$

Pelas equações 2.1.1 e 2.1.2 determina-se  $M_{\phi p}$  e  $M_{\theta p}$

$$M_{\phi p} = M_{\theta p} = \frac{gh^2}{12} \frac{2+v}{1-v} \rho \cos\phi \quad (2.2.6)$$

como  $Q_{\phi} = \frac{U}{a}$ , tem-se

$$Q_{\phi p} = - \frac{gh^2}{12a} \frac{2+v}{1-v} \rho \sin\phi \quad (2.2.7)$$

Aplicando-se as condições de equilíbrio 1.5.1 e 1.5.2 particularizadas para a casca esférica, encontra-se  $N_{\phi}$  e  $N_{\theta}$ :

$$N_{\phi} = \frac{gh^2}{12a} \frac{2+v}{1-v} \rho \cos\phi - \frac{ga}{1+\cos\phi} \quad (2.2.8)$$

$$N_{\theta} = \frac{gh^2}{12a} \frac{2+v}{1-v} \rho \cos\phi + \frac{ga}{1+\cos\phi} (1-\cos\phi-\cos^2\phi) \quad (2.2.9)$$

Nestes últimos esforços  $N_{\phi}$  e  $N_{\theta}$ , a primeira parcela deriva da solução  $Q_{\phi p}$ , a segunda deriva diretamente das componentes  $p_{\phi}$  e  $p_z$  do carregamento externo, pode-se então separá-los em:

$$\begin{aligned} N_{\phi} &= N_{\phi p} + N_{\phi M} \\ N_{\theta} &= N_{\theta p} + N_{\theta M} \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

onde:

$$N_{\phi}p = N_{\theta}p = \frac{gh^2}{12a} \frac{2+v}{1-v} \rho \cos\phi \quad (2.2.10)$$

$$N_{\phi}M = - \frac{ga}{1+\cos\phi} \quad (2.2.11)$$

$$N_{\theta}M = \frac{ga}{1+\cos\phi} (1 - \cos\phi - \cos^2\phi) \quad (2.2.12)$$

Em cascas de pequena espessura  $h$  em relação ao raio  $a$ ,  $N_{\phi}p$  e  $N_{\theta}p$  são desprezíveis em vista de  $N_{\phi}M$  e  $N_{\theta}M$ , como se pode observar pelas suas expressões. Pela mesma razão desprezam-se  $M_{\phi}p$ ,  $M_{\theta}p$ , e  $Q_{\phi}p$ . Consequentemente os únicos esforços relevantes a serem considerados serão  $N_{\phi}M$  e  $N_{\theta}M$ . Portanto, em cascas delgadas, os esforços correspondentes à solução particular poderão ser encontrados diretamente das equações de equilíbrio pela suposição de serem nulos  $M_{\phi}p$ ,  $M_{\theta}p$  e  $Q_{\phi}p$ . Procedendo-se deste modo, a equação 1.5.3 resulta uma identidade e as equações 1.5.1 e 1.5.2, particulares para a casca esférica, ficam:

$$(N_{\phi}M \operatorname{sen}\phi) - N_{\theta}M \cos\phi = -p\phi \cdot a \operatorname{sen}\phi \quad (2.2.13)$$

$$N_{\theta}M + N_{\phi}M = p\phi \cdot a \quad (2.2.14)$$

Este procedimento constitue o chamado regime de membrana,  $N_{\phi}M$  e  $N_{\theta}M$  são os esforços de membrana. É possível idealizar este regime de membrana quando as seguintes condições ocorrem simultaneamente:

- a) a variação das curvaturas normais da superfície média for contínua;
- b) a variação da espessura for contínua;
- c) a distribuição de forças externas for contínua;
- d) as forças externas aplicadas nas bordas livres e as reações dos vínculos forem paralelas à direção da tangente ao meridiano na borda correspondente.

No caso em questão, casca esférica com espessura constante, as duas primeiras condições são automaticamente atendidas.

A condição c poderá ser sempre atendida realizando-se uma discretização da estrutura em elementos tais, que, em cada elemento a distribuição de forças seja contínua, fazendo-se posteriormente a compatibilização dos deslocamentos, assim calculados, nas circunferências nodais destes elementos. Da mesma forma as condições de apoio podem ser inicialmente supostas atendendo à condição d, introduzindo-se depois as condições reais de apoio.

Pelo que foi visto pode-se resumir o seguinte método de cálculo para as cascas delgadas:

- 1) calculam-se os esforços  $N\phi M$  e  $N\theta M$  e os correspondentes deslocamentos,  $vM$ ,  $wM$  e  $XM$ , em regime de membrana.
- 2) faz-se a compatibilização de deslocamentos dos nós de elementos adjacentes, introduzem-se as condições de apoio e

calculam-se os esforços causados pelas perturbações locais geradas pelo atendimento das situações prescritas neste ítem.

3) os esforços finais serão as somas dos calculados nos itens 1 e 2.

No capítulo 3 será apresentada a formulação matricial do método dos deslocamentos, visando a automatização destes cálculos.

### 2.3 - Casca cônica

A casca cônica apresenta como particularidades  $r_1 = \infty$  e  $\phi = \text{constante}$ , o que obriga a escolha de outra variável, como abscissa, capaz de representar um ponto sobre o meridiano, por exemplo a distância  $y$  de um ponto qualquer do meridiano ao vértice do cone. (Fig. 2.3.1).

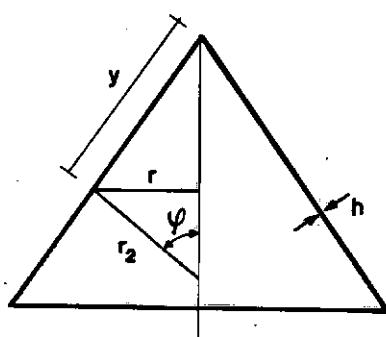


Fig. 2.3.1

Desta forma tem-se:

$$\frac{d(\ )}{dy} = \frac{1}{r_1} \frac{d(\ )}{d\phi} \quad (2.3.1)$$

$$r_2 = y \cdot \cot\phi \quad (2.3.2)$$

De 1.6.1, 1.6.2, 1.6.8, 1.6.9, 1.6.11 e 1.6.12 após feitos os limites quando  $r_1 \rightarrow \infty$ , tem-se as expressões de  $x$ ,  $U$  e dos esforços unitários:

$$x = \frac{dw}{dy} ; \quad U = r_2 Q\phi = y Q\phi \cot\phi \quad (2.3.3)$$

$$M_\phi = K \left[ \frac{dx}{dy} + \frac{v}{y} x \right] \quad (2.3.4)$$

$$M_\theta = K \left[ \frac{x}{y} + v \frac{dx}{dy} \right] \quad (2.3.5)$$

$$N_\phi = - \frac{U}{y} - \frac{P}{2\pi y \sin\phi \cos\phi} \quad (2.3.6)$$

$$N_\theta = - \frac{dU}{dy} \quad (2.3.7)$$

O operador linear 1.6.17, tem como limite ao tender  $r_1$  para infinito

$$L_1(\ ) = (y \frac{d^2(\ )}{dy^2} + \frac{d(\ )}{dy} - \frac{(\ )}{y}) \cot\phi \quad (2.3.8)$$

Nas equações 1.6.18 e 1.6.19 os termos em  $v/r_1$  desaparecem ao tender  $r_1$  para infinito, resultando:

$$L_1(U) = - D(1-v^2)x \quad (2.3.9a)$$

$$L_1(x) = \frac{U}{K} \quad (2.3.10a)$$

ou, de forma explícita e após multiplicadas por  $\operatorname{tg}\phi$

$$y \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{dU}{dy} - \frac{U}{y} = -Eht\operatorname{tg}\phi x \quad (2.3.9b)$$

$$y \frac{d^2x}{dy^2} + \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = \frac{\operatorname{tg}\phi U}{K} \quad (2.3.10b)$$

Como foi mostrado, na seção 1.6, a solução deste sistema (2.3.9 e 2.3.10), pode ser encontrada a partir da solução da equação (1.6.23), que neste caso seria:

$$y \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{dU}{dy} - \frac{U}{y} + i\mu_1^2 U = 0 \quad (2.3.11)$$

sendo  $\mu_1^4 = \frac{12(1-v^2)\operatorname{tg}^2\phi}{h^2}$  (2.3.12)

Visando a se trabalhar com variável adimensional, far-se-á a seguinte transformação de variáveis:

$$z = t\sqrt{t} = 2\mu_1 \sqrt{iy} \quad (2.3.13)$$

Resultando para a equação 2.3.11, na variável  $z$ ,

$$z^2 \frac{d^2 U}{dz^2} + z \frac{dU}{dz} + (z^2 - 2^2)U = 0 \quad (2.3.12)$$

A solução desta equação é:

$$U = D_1 J_2(z) + D_2 H_2^{(1)}(z)$$

levando em conta que  $z = t\sqrt{t}$ , vem

$$U = D_1 J_2(t\sqrt{t}) + D_2 H_2^{(1)}(t\sqrt{t}) \quad (2.3.13)$$

onde:

$J_2$  é chamada função de Bessel de primeira espécie e de segunda ordem

$H_2^{(1)}$  é chamada função de Bessel de terceira espécie e de segunda ordem. Também conhecida como função de Hankel.

Como estas funções têm argumentos complexos, a solução 2.3.13 consiste de uma parte real e outra imaginária, introduzindo as funções de Schleicher é possível separar os reais dos imaginários da maneira que segue,

$$\begin{aligned} J_2(t\sqrt{t}) = & - [z_1(t) + \frac{2}{t} z_2'(t)] - i [z_2(t) - \\ & - \frac{2}{t} z_1'(t)] \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

$$H_2^{(1)}(tr\sqrt{t}) = -[z_3(t) + \frac{2}{t} z_4'(t)] - i [z_4(t) - \frac{2}{t} z_3'(t)] \quad (2.3.15)$$

Onde:

$$()' = \frac{d(1)}{dt} \quad (2.3.16)$$

$$z_1(t) = \text{ber } t \quad (2.3.17)$$

$$z_2(t) = -\text{bei } t \quad (2.3.18)$$

$$z_3(t) = -\frac{2}{\pi} \text{kei } t \quad (2.3.19)$$

$$z_4(t) = -\frac{2}{\pi} \text{ker } t \quad (2.3.20)$$

sendo:

$$\text{ber } t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t/2)^{4n}}{(2n)!^2}$$

$$\text{bei } t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t/2)^{4n+2}}{(2n+1)!^2}$$

$$\begin{aligned} \text{ker } t &= -(c + \ell n \frac{t}{2}) \text{ber } t + \frac{\pi}{4} \text{bei } t - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sum_{s=1}^{2(n+1)} \frac{1}{s}}{(2n+2)!^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{4(n+1)} \end{aligned}$$

$$\operatorname{kei} t = - (c + \ell n \frac{t}{2}) \operatorname{bei} t - \frac{\pi}{4} \operatorname{ber} t +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sum_{s=1}^{2n+1} \frac{1}{s}}{(2n+1)!^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{4n+2}$$

$$c = 0.577215655 \quad (\text{constante de Euler-Mascheroni})$$

Com a finalidade de simplificar a notação não se escreverá mais o argumento ( $t$ ).

De acordo com o exposto na seção 1.6 e tendo em vista as equações 2.3.13 a 2.3.15, chega-se às soluções reais do sistema formado pelas equações 2.3.9 e 2.3.10.

$$\begin{aligned} U &= c_1(z_1 + \frac{2}{t} z_2^1) + c_2(z_2 - \frac{2}{t} z_1^1) + \\ &+ c_3(z_3 + \frac{2}{t} z_4^1) + c_4(z_4 - \frac{2}{t} z_3^1) \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Conhecida a solução  $U$ , determina-se a solução  $x$  pela equação 1.6.28, lembrando que o termo em  $v/r_1$ , resultou igual a zero, ao se fazer  $r_1 = \infty$ .

$$\begin{aligned} x &= - \frac{\mu_1^2}{Ehtg\phi} \left[ c_1(z_2 - \frac{2}{t} z_1^1) - c_2(z_1 + \frac{2}{t} z_2^1) + \right. \\ &\quad \left. + c_3(z_4 - \frac{2}{t} z_3^1) - c_4(z_3 + \frac{2}{t} z_4^1) \right] \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Uma vez determinadas as soluções homogêneas, passa-se a examinar a solução particular correspondente a função  $g(\phi)$  definida em 1.6.16. Admitindo a existência da resultante vertical  $P$ , o sistema 2.3.9a, 2.3.10a, completo, seria:

$$L(U) = -D(1-v^2) x + P \frac{g(\phi)}{r_1} \quad (2.3.23)$$

$$L(x) = \frac{U}{K} \quad (2.3.24)$$

sendo:  $\lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{g(\phi)}{r_1} = \frac{1}{2\pi y \operatorname{sen}^2 \phi}$

Substituindo  $g(\phi)$  em 2.3.23 e escrevendo esta equação e 2.3.24 de forma explícita, vem:

$$y \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{dU}{dy} - \frac{1}{y} U = -Ehtg\phi x + \frac{P \operatorname{tg}\phi}{2\pi y \operatorname{sen}^2 \phi}$$

$$y \frac{d^2 x}{dy^2} + \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} x = \frac{\operatorname{tg}\phi}{K} U$$

Observa-se que  $U = 0$  e  $x = \frac{P/(Eh)}{2\pi y \operatorname{sen}^2 \phi}$ , são soluções particulares do sistema acima. Portanto, a solução completa em  $x$  é:

$$x = -\frac{\mu_1^2}{Ehtg\phi} \left[ c_1(z_2 - \frac{2}{t} z_1) - c_2(z_1 + \frac{2}{t} z_2) + c_3(z_4 - \frac{2}{t} z_3) - c_4(z_3 + \frac{2}{t} z_4) \right] + \frac{c_5/(Eh)}{y \operatorname{sen}^2 \phi} \quad (2.3.25)$$

De posse das soluções  $U$  e  $\chi$ , determinam-se as expressões dos esforços unitários, partindo das equações 2.3.3 a 2.3.7.

$$Q\phi = \frac{\operatorname{tg}\phi}{y} \left[ c_1(z_1 + \frac{2}{t} z_2^i) + c_2(z_2 - \frac{2}{t} z_1^i) + \right. \\ \left. + c_3(z_3 + \frac{2}{t} z_4^i) + c_4(z_4 - \frac{2}{t} z_3^i) \right] \quad (2.3.26)$$

$$M\phi = \frac{2\operatorname{tg}\phi}{t^2} \left[ c_1(-t z_2^i + 2(1-\nu) z_2 - \frac{4(1-\nu)}{t} z_1^i) + \right. \\ \left. + c_2(t z_1^i - 2(1-\nu) z_1 - \frac{4(1-\nu)}{t} z_2^i) + \right. \\ \left. + c_3(-t z_4^i + 2(1-\nu) z_4 - \frac{4(1-\nu)}{t} z_3^i) + \right. \\ \left. + c_4(t z_3^i - 2(1-\nu) z_3 - \frac{4(1-\nu)}{t} z_4^i) \right] - \\ - c_5 \frac{K(1-\nu)}{Eh y^2 \operatorname{sen}^2 \phi} \quad (2.3.27)$$

$$M\Theta = \frac{2\operatorname{tg}\phi}{t^2} \left[ c_1(-\nu t z_2^i - 2(1-\nu) z_2 + \frac{4(1-\nu)}{t} z_1^i) + \right. \\ \left. + c_2(\nu t z_1^i + 2(1-\nu) z_1 + \frac{4(1-\nu)}{t} z_2^i) + \right. \\ \left. + c_3(-\nu t z_4^i - 2(1-\nu) z_4 + \frac{4(1-\nu)}{t} z_3^i) + \right. \\ \left. + c_4(\nu t z_3^i + 2(1-\nu) z_3 + \frac{4(1-\nu)}{t} z_4^i) \right] + \\ + \frac{(1-\nu)K}{Eh \operatorname{sen}^2 \phi y^2} c_5 \quad (2.3.28)$$

$$N\phi = -\frac{1}{y} \left[ c_1(z_1 + \frac{2}{t} z_2') + c_2(z_2 - \frac{2}{t} z_1') + c_3(z_3 + \frac{2}{t} z_4') + c_4(z_4 - \frac{2}{t} z_3') \right] - \frac{c_5}{y \sin \phi \cos \phi} \quad (2.3.29)$$

$$N\Theta = -\frac{2\mu_1^2}{t^2} \left[ c_1(t z_1' - 2z_1 - \frac{4}{t} z_2') + c_2(t z_2' - 2z_2 + \frac{4}{t} z_1') + c_3(t z_3' - 2z_3 + \frac{4}{t} z_4') + c_4(t z_4' - 2z_4 + \frac{4}{t} z_3') \right] \quad (2.3.30)$$

Para se determinar os deslocamentos  $v$  e  $w$ , recorrem-se às equações 1.6.13 e 1.6.14. De 1.6.13, uma vez feito o limite quando  $r_1$  tende a infinito, escreve-se:

$$v = \frac{1}{Eh} \int (N\phi - vN\Theta) dy + c \sin \phi \quad (2.3.31)$$

A partir de 1.6.14, e considerando que  $r_2 = y \cot \phi$  tem-se para o deslocamento  $w$ :

$$w = -v \cot \phi + \frac{y \cot \phi}{Eh} (N\Theta - vN\phi) \quad (2.3.32)$$

Partindo da equação 2.3.31 e procedendo de maneira análoga à que foi feita para a casca esférica, chega-se a expressão do deslocamento  $v$ :

$$\begin{aligned}
 v = & \frac{1}{Ehtg\phi} \left[ c_1(vz_1 + \frac{2(1+v)}{t} z_2') + c_2(vz_2 - \frac{2(1+v)}{t} z_1') + \right. \\
 & + c_3(vz_3 + \frac{2(1+v)}{t} z_4') + c_4(vz_4 - \frac{2(1+v)}{t} z_3') \left. \right] - \\
 & - c_5 \frac{1}{\sin\phi\cos\phi} (\ln \frac{y}{y_i} + v\cos^2\phi) + c_6 \sin\phi \quad (2.3.33)
 \end{aligned}$$

## 2.4 - Soluções Particulares

Os mesmos comentários feitos, com respeito à casca esférica, valem com relação a casca cônica, portanto, para casca cônica de pequena espessura, à solução particular correspondente às forças de superfície pode, também, ser substituída pela solução de membrana, que para este caso será encontrada pelas equações que seguem, deduzidas das condições de equilíbrio.

$$\frac{d(y N\theta_M)}{dy} - N\theta_M = -y p\phi \quad (2.4.1)$$

$$N\theta_M = pz y \cot\phi \quad (2.4.2)$$

## 2.5 - Casca Cilíndrica

As equações da casca cilíndrica serão deduzidas das referentes a casca cônica colocando-se,  $\phi = \frac{\pi}{2}$  e,  $r_2 = R$ , constante (Fig. 2.5.1)

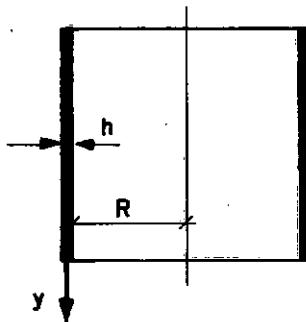


Fig. 2.5.1

Pelas equações 2.3.3 a 2.3.7, tem-se:

$$X = \frac{dw}{dy} \quad U = R Q \phi \quad (2.5.3)$$

$$M\phi = K \frac{dx}{dy} \quad (2.5.4)$$

$$M\theta = K \nu \frac{dx}{dy} \quad (2.5.5)$$

$$N\phi = - \frac{P}{2\pi R} \quad (2.5.6)$$

$$N\theta = - \frac{dU}{dy} \quad (2.5.7)$$

O operador 2.3.8, neste caso reduz-se a:

$$L_2() = R \frac{d^2()}{dy^2} \quad (2.5.8)$$

Sendo as equações análogas às 2.3.9 e 2.3.10, as seguin

tes

$$R \frac{d^2 U}{dy^2} = - Eh x \quad (2.5.9)$$

$$R \frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{U}{K} \quad (2.5.10)$$

Destas duas últimas equações, chega-se a:

$$\frac{d^4 U}{dy^4} + 4 \lambda^4 U = 0, \text{ sendo } \lambda^4 = \frac{3(1-v^2)}{R^2 h^2}$$

cuja solução é:

$$U = c_1 e^{-\lambda y} \cos \lambda y + c_2 e^{-\lambda y} \sin \lambda y + \\ + c_3 e^{-\lambda(\ell-y)} \cos(\ell-y) + c_4 e^{-\lambda(\ell-y)} \sin \lambda(\ell-y)$$

Com a finalidade de simplificar a notação, serão introduzidas as seguintes funções:

$$\gamma_1 = e^{-\lambda y} \cos \lambda y \quad \psi_1 = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\gamma_2 = e^{-\lambda y} \sin \lambda y \quad \psi_2 = \gamma_1 - \gamma_2$$

$$\gamma_3 = e^{-\lambda(\ell-y)} \cos \lambda(\ell-y) \quad \psi_3 = \gamma_3 + \gamma_4$$

$$\gamma_4 = e^{-\lambda(\ell-y)} \sin \lambda(\ell-y) \quad \psi_4 = \gamma_3 - \gamma_4$$

Em termos destas funções escreve-se:

$$U = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 + c_4\gamma_4 \quad (2.5.12)$$

De 2.5.9 determina-se  $\chi$

$$\chi = - \frac{2\lambda^2 R}{Eh} (c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1 + c_3\gamma_4 - c_4\gamma_3) \quad (2.5.13)$$

Fazendo uso das equações 2.5.3 a 2.5.7, determinam-se os esforços  $Q\phi$ ,  $M\phi$ ,  $M\theta$ ,  $N\phi$  e  $N\theta$ .

$$Q\phi = \frac{1}{R} (c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 + c_4\gamma_4) \quad (2.5.14)$$

$$M\phi = - \frac{2\lambda^3 R K}{Eh} (c_1\psi_2 + c_2\psi_1 - c_3\psi_4 - c_4\psi_3) \quad (2.5.15)$$

$$M\theta = - \frac{2\lambda^3 R K}{Eh} v(c_1\psi_2 + c_2\psi_1 - c_3\psi_4 - c_4\psi_3) \quad (2.5.16)$$

$$N\phi = - \frac{c_5}{R} \quad (2.5.17)$$

$$N\theta = \lambda(c_1\psi_1 - c_2\psi_2 - c_3\psi_3 + c_4\psi_4) \quad (2.5.18)$$

Para os deslocamentos  $v$  e  $w$  deduzem-se as seguintes expressões, partindo-se de 2.3.31 e 2.3.32:

$$v = \frac{1}{Eh} \int (N\phi - vN\theta) dy + c \operatorname{sen} \phi \quad (2.5.19)$$

$$w = \frac{R}{Eh} (N\theta - vN\phi) \quad (2.5.20)$$

Tendo em vista as expressões de  $N\phi$  e  $N\theta$  definidas em 2.5.17 e 2.5.18, encontra-se:

$$v = \frac{v}{Eh} (c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 + c_4\gamma_4) - \frac{c_5}{Eh} \frac{y}{R} + c_6 \quad (2.5.21)$$

$$w = \frac{R\lambda}{Eh} (c_1\psi_1 - c_2\psi_2 - c_3\psi_3 + c_4\psi_4) + \frac{v}{Eh} c_5 \quad (2.5.22)$$

## 2.6 - Solução particular

De mesmo modo que nos casos anteriores, relativos a cascas esféricas e cônicas, nas cascas cilíndricas delgadas substitue-se a solução particular referente a forças de superfície pela correspondente solução de membrana.

Os esforços unitários  $N\phi M$  e  $N\theta M$ , no caso em questão, serão dados pelas equações:

$$\frac{d(N\phi M)}{dy} = - p\phi \quad (2.6.1)$$

$$N\theta M = p z \cdot R \quad (2.6.2)$$

2.7 - Placa Circular

As equações da placa circular, também podem ser obtidas do estudo feito para o cone, fazendo-se o ângulo  $\phi$  igual a zero. (Fig. 2.7.1). (O eixo y neste caso se confunde com r).

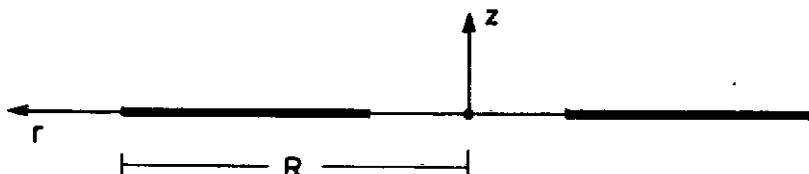


FIG. 2.7.1

Pelas equações 1.5.1 a 1.5.3, trocando o índice  $\phi$  por  $r$  e fazendo  $\phi = 0$ , tem-se:

$$\frac{d(r \, N_r)}{dr} - N_\theta = r \, p_r \quad (2.7.1)$$

$$\frac{d(r \, Q_r)}{dr} = r \, p_z \quad (2.7.2)$$

$$\frac{d(r \, M_r)}{dr} - M_\theta = r \, Q_r \quad (2.7.3)$$

De 1.5.8 a 1.5.11 tem-se, ao fazer  $\phi = 0$ :

$$N_r = D \left( \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} v \right) \quad (2.7.4)$$

$$N_\theta = D \left( \frac{1}{r} v + v \frac{dv}{dr} \right) \quad (2.7.5)$$

$$M_r = K \left( \frac{dx}{dr} + \frac{v}{r} x \right) \quad (2.7.6)$$

$$M\theta = K \left[ \frac{X}{r} + v \frac{dX}{dr} \right] \quad (2.7.7)$$

Observa-se que os esforços  $N_r$  e  $N\theta$ , no plano da placa, são independentes dos esforços atuantes no plano normal à mesma,  $Q_r$ ,  $M_r$  e  $M\theta$ .

Pelas equações 2.7.1, 2.7.4 e 2.7.5 chega-se a equação diferencial do deslocamento  $v$ , ao longo de  $r$ , fazendo  $p_r = 0$ .

$$r \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{dv}{dr} - \frac{1}{r} v = 0 \quad (2.7.8)$$

onde:

$$v = \frac{c_1}{\rho} + c_2 \rho \quad (2.7.9)$$

$$N_r = Eh \left( -\frac{c_1}{(1+v)R\rho^2} + \frac{c_2}{(1-v)R} \right) \quad (2.7.10)$$

$$N\theta = Eh \left( \frac{c_1}{(1+v)R\rho^2} + \frac{c_2}{(1-v)R} \right) \quad (2.7.11)$$

onde  $\rho = \frac{r}{R}$

De 2.7.2, não levando em conta a componente das forças externas  $p_z$ , vem:

$$\frac{d}{dr} (r Q_r) = 0 \quad (2.7.12)$$

De 2.7.3, 2.7.6 e 2.7.7, tem-se:

$$r \frac{d^2 x}{dr^2} + \frac{dx}{dr} - \frac{x}{r} = \frac{r Q_r}{K} \quad (2.7.13)$$

Integrando 2.7.12, vem:

$$r Q_r = C \cdot K \quad (2.7.14)$$

Substituindo  $r Q_r$  dado por 2.7.14 em 2.7.3, chega-se

a:

$$r \frac{d^2 x}{dr^2} + \frac{dx}{dr} - \frac{x}{r} = C \quad (2.7.15)$$

ou

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rx) \right] = \frac{C}{r}$$

Como  $x = \frac{dw}{dr}$ , tem-se

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dw}{dr}) \right] = \frac{C}{r} \quad (2.7.16)$$

cuja solução é:

$$w = c_3 \rho^2 \ln \rho + c_4 \rho^2 + c_5 \ln \rho + c_6 \quad (2.7.17)$$

Resultando as seguintes expressões para a rotação  $x$  e para os esforços  $M_r$ ,  $M_\theta$  e  $Q_r$ :

$$x = \frac{1}{R} (c_3 \rho (1 + \ell n \rho) + 2c_4 \rho + c_5 \frac{1}{\rho}) \quad (2.7.18)$$

$$M_r = \frac{K}{R^2} \left[ c_3 (3+v+2(1+v)\ell n \rho) + 2(1+v)c_4 - c_5 (1-v) \frac{1}{\rho^2} \right] \quad (2.7.19)$$

$$M_\theta = \frac{K}{R^2} \left[ c_3 (1+3v+2(1+v)\ell n \rho) + 2(1+v)c_4 + c_5 (1-v) \frac{1}{\rho^2} \right] \quad (2.7.20)$$

$$Q_r = \frac{K}{R^3} 4c_3 \frac{1}{\rho} \quad (2.7.21)$$

Tem-se, desta forma conhecida a solução homogênea da placa circular. Existindo forças de superfície,  $p_0$  ou  $p_r$  diferentes de zero, determina-se a solução particular ao caso de carregamento dado.

## 2.8 - Anel de Reforço

Comumente torna-se necessário fazer reforço em estruturas de cascas, através de anéis, que realizam um vínculo de engastamento elástico.

Apresentam-se, nesta seção, os coeficientes de rigidez do anel de reforço, admitindo que o mesmo seja de pequena dimensão e ocorra em nó da estrutura.

Os deslocamentos e esforços a serem considerados são o deslocamento horizontal  $w$  e a rotação  $\chi$ , a força horizontal total  $H$  e o momento fletor total  $M$ , atuante no plano normal a seção transversal do anel (Fig. 2.8.1)

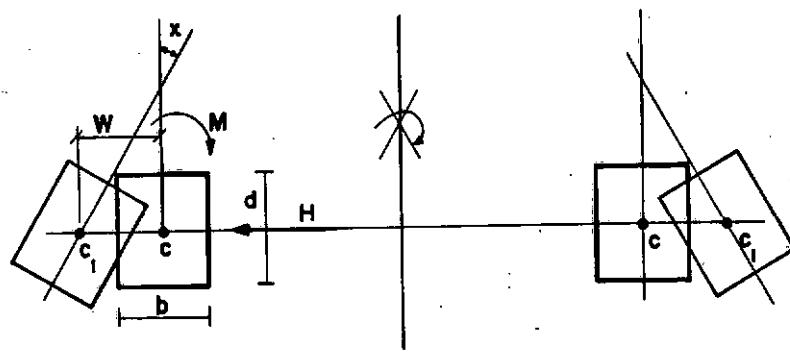


Fig. 2.8.1

Sendo  $b$  e  $d$  a largura e altura da seção transversal do anel, a força  $H$  e o momento  $M$  relacionam-se com o deslocamento  $w$  e a rotação  $\chi$  pelas expressões;

$$H = 2\pi \frac{E b d}{Ra} w \quad (2.8.1)$$

$$M = 2\pi \frac{E b d^3}{12Ra} \chi \quad (2.8.2)$$

Sendo, então, os coeficientes de rigidez do anel,

$$S_{11} = 2\pi \frac{E b d}{Ra} \quad (2.8.3)$$

$$S_{33} = 2\pi \frac{E b d^3}{12Ra} \quad (2.8.4)$$

Chamou-se  $S_{11}$  e  $S_{33}$ , por consistência com a numeração utilizada no próximo capítulo.

A rigidez do anel, assim calculada, será adicionada à rigidez do nó da estrutura, onde ocorre a existência de anel.

## CAPÍTULO III

### MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

#### 3.1 - Introdução

Nos dois capítulos anteriores foram apresentadas as soluções analíticas individuais de algumas formas axissimétricas. No presente capítulo será apresentada a formulação matricial do método dos deslocamentos com o objetivo de analisar estruturas compostas destes elementos.

Na Fig. 3.1.1, está representada a seção meridional de um reservatório axissimétrico, que constitue um típico exemplo de estrutura, automaticamente discretizável com os elementos cujas soluções foram apresentadas nos capítulos anteriores.

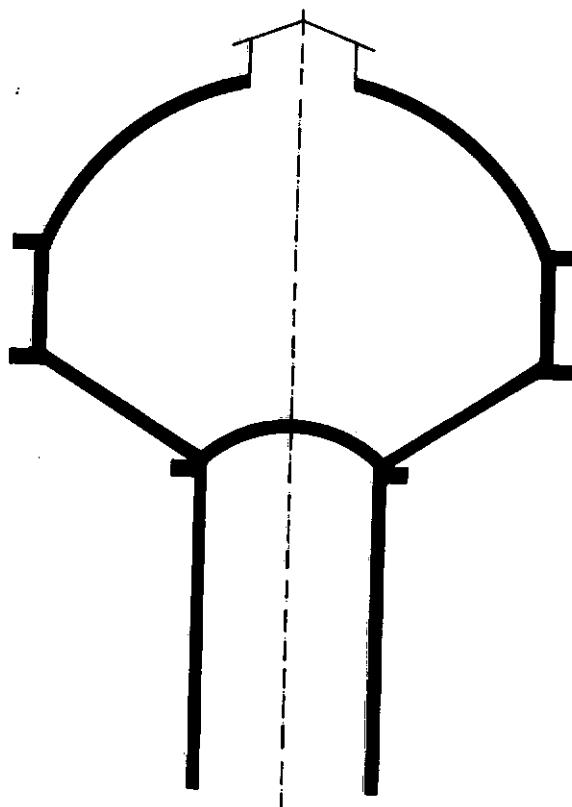


Fig. 3.1.1

Quando a espessura da casca for variável ou quando os raios de curvatura não coincidirem com os raios de curvatura das formas estudadas, pode-se proceder uma discretização aproximada, fazendo-se uso de um número de elementos tal que para cada um dos quais se possa admitir uma espessura média e adotando-se elementos cônicos sempre que  $r_1$  for maior que  $r_2$  e esférico quando  $r_1$  for menor que  $r_2$ .

Na Fig. 3.1.2 apresenta-se, a título ilustrativo, uma casca com raios de curvatura variáveis; o trecho  $\overline{AB}$  pode ser discretizado com elementos esféricos e o trecho  $\overline{BC}$  com elementos cónicos

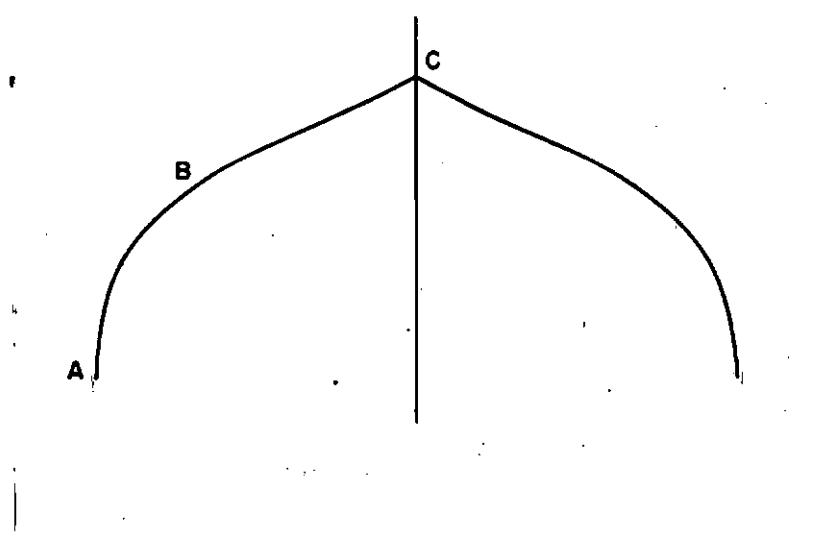


Fig. 3.1.2

### 3.2 - Equações gerais do método dos deslocamentos

As forças e deslocamentos nodais, de um elemento, se relacionam pela seguinte equação matricial:

$$\{F^*\} = [S]\{d^*\} \quad (3.2.1)$$

sendo  $[S]$  a matriz de rigidez do elemento.

Conhecida a matriz de rigidez  $[S]$ , do elemento, monta-se a matriz de rigidez  $[SK]$  da estrutura, por meio de uma simples transformação, que consiste em se somar, em cada nó da estrutura e segundo uma mesma direção, as contribuições de rigidez dos elementos que concorrem ao nó considerado.

De igual modo monta-se o vetor  $\{AC\}$  das forças nodais da estrutura. Chamando de  $\{D\}$  o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura, tem-se a seguinte equação:

$$\{AC\} = [SK]\{D\} \quad (3.2.2)$$

As forças nodais  $\{AC\}$ , são de dois tipos, forças diretamente aplicadas nos nós  $\{AN\}$  e forças nodais equivalentes  $\{AE\}$  correspondentes a forças de superfície atuantes em elementos. Portanto:

$$\{AC\} = \{AN\} + \{AE\} \quad (3.2.3)$$

### 3.3 - Matrizes de rigidez

Apresenta-se a seguir um procedimento para a determinação das matrizes de rigidez dos elementos axissimétricos estudados.

Para evitar o uso de matrizes de rotação, introduz-se um novo sistema de coordenadas,  $XOY$ , (Fig. 3.3.1), único para todos os elementos e coincidente com o sistema global da estrutura.

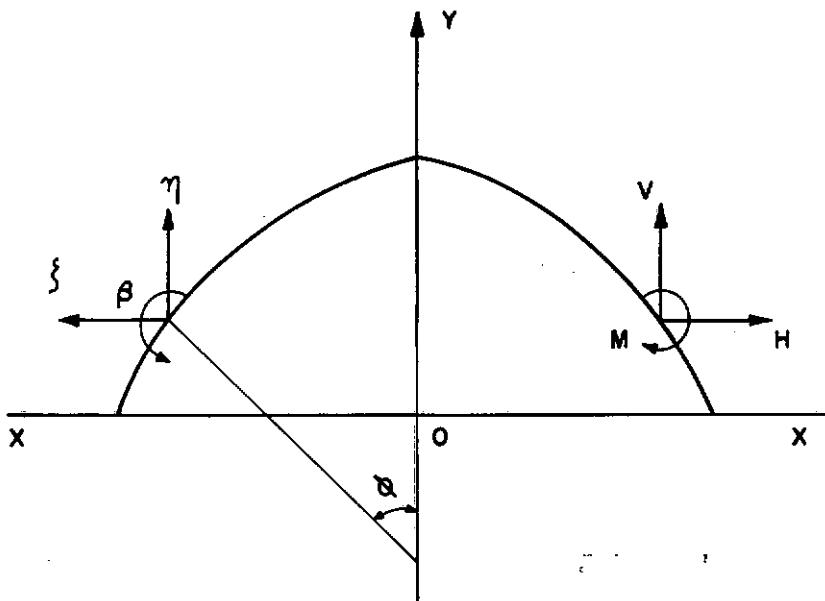


Fig. 3.3.1

Neste sistema de coordenadas, elegeu-se como novos côgnitas:

- para os deslocamentos  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\beta$ , sendo  $\xi$  o deslocamento segundo  $OX$ ,  $\eta$  o deslocamento segundo  $OY$  e  $\beta$  a rotação no sentido de  $Y$  para  $X$ .

- para forças  $H$ ,  $V$  e  $M$ , sendo  $H$  a força horizontal total atuante num círculo paralelo segundo  $\xi$ ,  $V$  é a resultante das forças verticais dirigida segundo  $\eta$  e  $M$  o momento total atuante

em um círculo paralelo segundo a rotação  $\beta$ .

Os deslocamentos  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\beta$  são assim relacionados com os deslocamentos  $v$ ,  $w$  e  $x$ .

$$\xi = w \operatorname{sen}\phi + v \cos\phi$$

$$\eta = w \cos\phi - v \operatorname{sen}\phi \quad (3.3.1)$$

$$\beta = -x$$

As forças  $H$ ,  $V$  e  $M$  relacionam-se com os esforços unitários,  $Q\phi$  e  $M\phi$ , conforme segue:

$$H = -2\pi r_2 Q\phi - P \operatorname{cot}\phi$$

$$V = P \quad (3.3.2)$$

$$M = -2\pi r M\phi$$

Conhecidas, que são, as expressões dos deslocamentos  $w$ ,  $v$  e  $x$  e dos esforços unitários  $Q\phi$  e  $M\phi$ , em termos das constantes  $c_1$  a  $c_6$ , também serão conhecidas as expressões dos deslocamentos  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\beta$  e das forças  $H$ ,  $V$  e  $M$  em função das mesmas constantes, assim sendo as equações 3.3.1 e 3.3.2 podem ser escritas sob a forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \beta \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_6 \end{Bmatrix} \quad (3.3.3)$$

$$\begin{Bmatrix} H \\ V \\ M \end{Bmatrix} = [\mathbf{DB}] \begin{Bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_6 \end{Bmatrix} \quad (3.3.4)$$

ou, mais compactamente,

$$\{d\} = [\mathbf{B}]\{C\} \quad (3.3.5)$$

$$\{F\} = [\mathbf{DB}]\{C\} \quad (3.3.6)$$

sendo

$\{d\}$  vetor deslocamento ou deslocamentos generalizados do elemento

$\{F\}$  vetor das forças generalizadas do elemento  
 $3 \times 1$

$\{C\}$  constantes a determinar  
 $6 \times 1$

$[\mathbf{B}]$  matriz das funções que definem o campo de deslocamentos

$[\mathbf{DB}]$  matriz das funções que definem o campo das forças

Em Apêndice apresentam-se explicitamente as matrizes  $[\mathbf{B}]$  e  $[\mathbf{DB}]$  para os elementos estudados.

Na figura 3.3.4 está representado um elemento genérico n, com indicação das direções positivas das forças e deslocamentos nodais do mesmo.

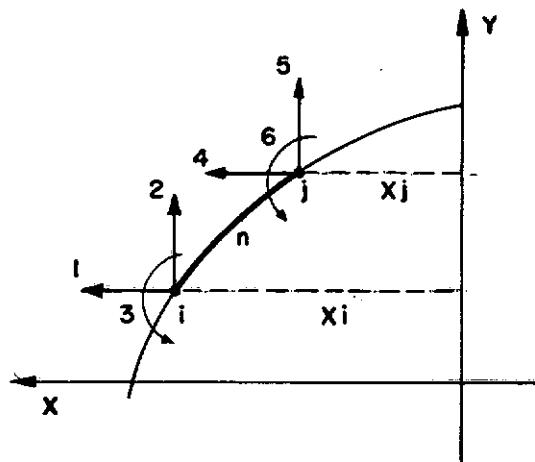


Fig. 3.3.4

O vetor deslocamentos nodais,

$$\{d^*\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_6 \end{Bmatrix}$$

e o vetor das forças nodais,

$$\{F^*\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_6 \end{Bmatrix},$$

são definidos pelas seguintes equações:

$$\{d^*\} = [B^*]\{C\} \quad (3.3.7)$$

$$\{F^*\} = [DB^*]\{C\} \quad (3.3.8)$$

onde,

$$[B^*] = \begin{bmatrix} [B] & \text{nó i} \\ [B] & \text{nó j} \end{bmatrix} \quad (3.3.9)$$

$$[DB^*] = \begin{bmatrix} [DB] & \text{nó i} \\ [DB] & \text{nó j} \end{bmatrix} \quad (3.3.10)$$

De 3.3.7 determinam-se as constantes  $c_1$  a  $c_6$ .

$$\{C\} = [B^*]^{-1} \{d^*\} \quad (3.3.11)$$

De 3.3.8 e 3.3.11, vem:

$$\{F^*\} = [DB^*] [B^*]^{-1} \{d^*\} ,$$

que pode ser escrita, na forma:

$$\{F^*\} = [S] \{d^*\} \quad (3.3.12)$$

onde,

$$[S] = [DB^*] [B^*]^{-1} \quad (3.3.13)$$

é a matriz de rigidez do elemento.

### 3.4 - Cargas nodais equivalentes

O vetor de cargas nodais equivalentes,  $\{AE\}$ , da estrutura, será montado a partir das cargas nodais equivalentes  $\{AML\}$ , do elemento, reunindo-se em cada nó da estrutura as contribuições de cargas dos elementos que concorrem ao referido nó.

Conforme se mostrou na seção 2.2, pode-se tomar como solução particular, devida a forças de superfície, a solução obtida em regime de membrana, desta forma tem-se a seguinte expressão para as cargas equivalentes  $\{AML\}$ ,

$$\{AML\} = \{AM\} + [S]\{d^*\} \quad (3.4.1)$$

sendo,

$\{AM\}$  - as reações calculadas em regime de membrana, com o sinal trocado

$\{d^*\}$  - os deslocamentos nodais, calculados no mesmo regime

Admitindo o elemento com o apoio de membrana no nó  $i$ , tem-se:

$$\{AM\} = 2\pi X_i N\phi M \left\{ \begin{array}{c} -\cos\phi_i \\ \sin\phi_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3.4.2)$$

### 3.5 - Esforços unitários finais

Uma vez montada a matriz de rigidez  $[SK]$  e o vetor de cargas nodais  $\{AC\}$ , determinam-se os deslocamentos nodais da estrutura,

$$\{D\} = [SK]^{-1} \{AC\} \quad (3.5.1)$$

Numa etapa final, calculam-se os esforços unitários a partir dos deslocamentos nodais e das forças de superfície.

Para um elemento genérico, estes esforços são dados por:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_M\} + [FE] [B^*]^{-1} \{d^* - d_M^*\} \quad (3.5.2)$$

sendo:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} Q\phi \\ N\phi \\ M\phi \\ N\theta \\ M\theta \end{Bmatrix} \quad (3.5.3)$$

$$\{\sigma_M\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N\phi M \\ 0 \\ N\theta M \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.5.4)$$

$[FE]$  - matriz das funções que relaciona os esforços unitário com as constantes  $c_1$  a  $c_6$ .

Em Apêndice são explicitadas estas matrizes para os elementos estudados.

CAPÍTULO IVPROGRAMA4.1 - Introdução

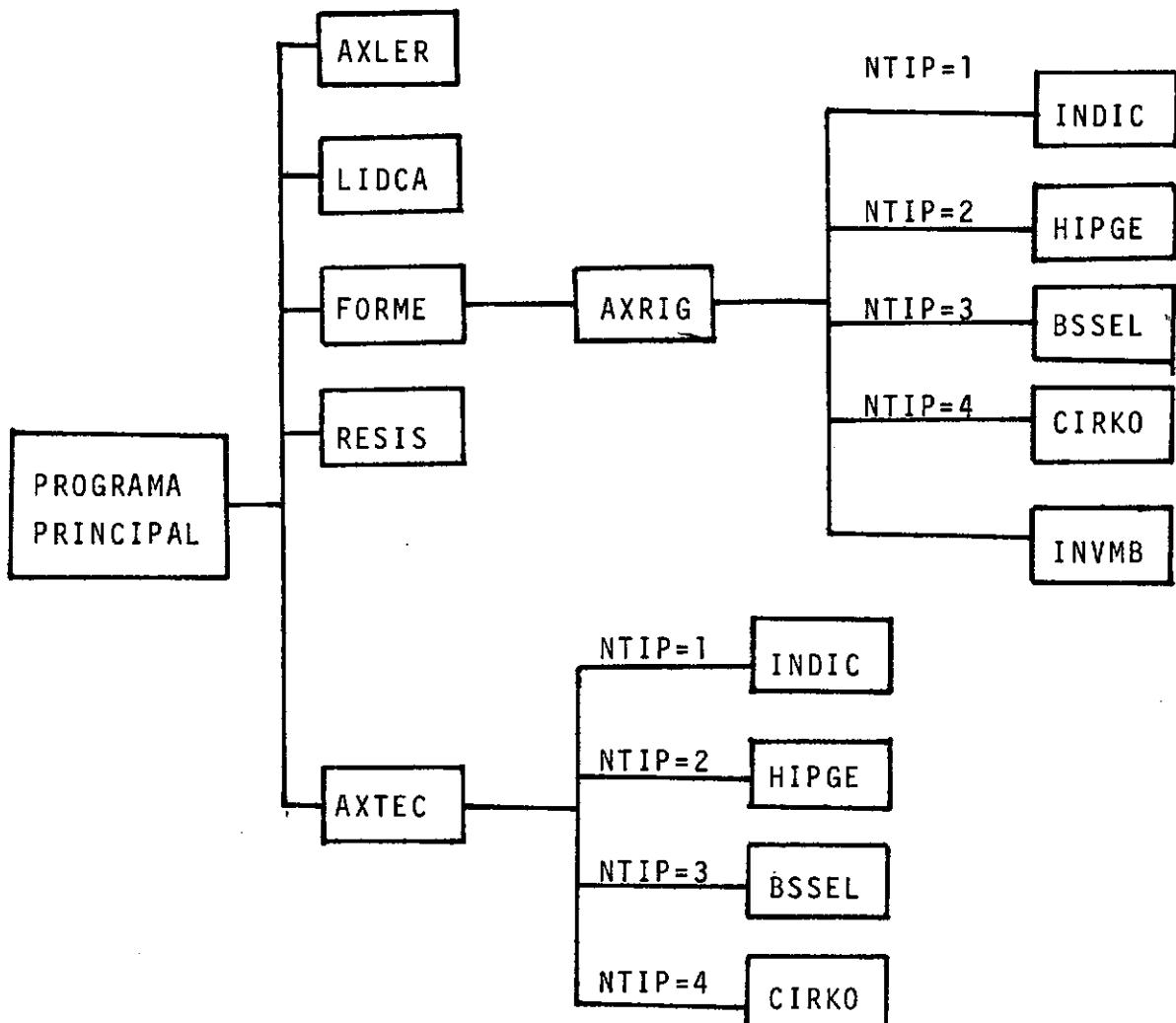
Foi elaborado um programa baseado no método dos deslocamentos, para um computador IBM 1130 de 32K de memória e em linguagem Fortran.

O programa visa automatizar o cálculo de estruturas compostas dos elementos desenvolvidos neste trabalho. Embora não tenha sido apresentado o desenvolvimento teórico é programada a solução em série assintótica para a casca esférica, devido a limitações no campo de aplicação da série hipergeométrica para este elemento. A decisão quanto ao uso de uma ou outro série é tomada internamente, não sendo necessário informar qual das duas será utilizada. (Este assunto é discutido no Apêndice A).

O programa tem capacidade de analisar estruturas com até 50 nós e admite dois tipos de forças de superfície: peso próprio e pressão linearmente variável, além de cargas nodais, sendo entretanto bastante simples a introdução de outros casos de carregamento, bastando introduzir as soluções de membrana correspondente.

#### 4.2 - Subrotinas que compõem o programa

O programa principal comanda 11 subrotinas, que aparecem no diagrama de blocos seguinte, na ordem em que são chamadas.



### 4.3 - Descrição das subrotinas

#### 4.3.1 - AXLER

Lê e imprime os dados relativos à geometria e propriedades elásticas da estrutura.

#### 4.3.2 - LIDCA

Lê e imprime os dados referentes aos casos de carregamento.

#### 4.3.3 - FORME

Forma a matriz de rigidez da estrutura armazenando-a em banda e no sistema global de referência. Calcula a contribuição de rigidez relativa aos anéis de reforço e modifica a matriz para introdução de deslocamentos prescritos, podendo ocorrer deslocamentos prescritos diferentes de zero.

#### 4.3.4 - AXRIG

Calcula a matriz de rigidez do elemento e as cargas nodais equivalentes com o auxílio de uma das seguintes subrotinas INDIC, HIPGE, BSSEL ou CIRKO, de acordo com o tipo do elemento, e da subrotina INVMB.

#### 4.3.5 - INDIC

Calcula as funções solução homogênea da casca cilíndrica e a solução em regime de membrana.

4.3.6 - HIPGE

Calcula a série hipergeométrica ou assintótica solução da casca esférica e a solução de membrana.

4.3.7 - BSSEL

Calcula as funções de Bessel, solução da casca cônica e a solução de membrana.

4.3.8 - CIRKO

Calcula a solução homogênea da placa circular e solução particular correspondente à carga uniformemente distribuída.

4.3.9 - INVMB

Esta subrotina é utilizada para inverter a matriz  $[B]_{(6 \times 6)}$  ou  $[B]_{(3 \times 3)}$ .

4.3.10 - RESIS

Resolve o sistema de equações armazenado em banda, pelo método de eliminação de Gauss.

4.3.11 - AXTEC

Calcula as tensões em um número desejado de pontos interiores ao elemento, utilizando uma das subrotinas INDIC, HIPGE, BSSEL ou CIRKO de acordo com o tipo do elemento.

4.4 - Manual de Entrada

Nº de ordem	Nº de cartões	Variável	Formato
1	1	NPROB	I10
2	1	TÍTULO	Colunas 20 - 70
3	1	NP, NE, NB, NLD, NMAT, NEL	6I10
4	NP	N, X(N), Y(N), NC00(N)	I10, 2F10.3, I10
5	NE	N, (NOP(N,M), M=1,2), IMAT(N), NTIP(N), NPT(N), ESPE(N)	6I10, F10.3
6	NMAT	N, (ORT(N,I), I=1,2)	I10, 2F10.2
7	NB	NBC(I), NFIX(I), DP(3*I-2), DP(3*I-1), DP(3*I)	2I10 3F10.4
8	NEL	NOEL(I), AND(I), ANB(I), EA(I)	I10, 3F10.0
9	1	NOCAR, MCARG	2I10
10	NOCAR	NQ, (R1(K), K=1,3)	I10, 3F10.2
11	MCARG	M, GP(M), HL1(M), HL2(M)	I10, 3F10.2

COMENTÁRIO E EXPLICAÇÕES

1- NPROB - Número de problemas a resolver

2- O título deve ser perfurado entre as colunas 21 a 70

3- Informações gerais sobre a estrutura a ser analisada

NP - número de nós

NE - número de elementos

NB - número de nós com deslocamentos prescritos

NLD - número de casos de carregamento

NMAT - número de materiais com propriedades elásticas diferentes

NEL - número de anéis de reforço

4- Coordenadas dos nós

N - número de nó

X(N), Y(N) - coordenadas dos nós, podendo ser cartesianas ou polares conforme o valor de NC00(N)

NC00(N) - se NC00(N)=0, X(N) e Y(N) são cartesianas, se NC00(N)=1, X(N) é o raio polar e Y(N) é o ângulo polar

5- Incidências e outras informações sobre o elemento

N - número do elemento

NOP(N,1), NOP(N,2) - nó inicial e final do elemento N

IMAT(N) - número que define o material do elemento

NTIP(N) - número que define o tipo do elemento de acordo com o quadro abaixo:

Valor de NTIP(N)	Tipo do elemento
1	cilindro
2	esfera
3	cone
4	placa circular

NPT(N) - número de pontos, igualmente espaçados, inteiros ao elemento N nos quais se deseja calcular os esforços unitários (deve ser maior ou igual a um).

ESPE(N) - espessura do elemento N

## 6- Propriedades elásticas

N - grupo de materiais com mesmas propriedades elásticas

ORT(N,1) - módulo de Young

ORT(N,2) - coeficiente de Poisson

## 7- Definição dos apoios e valores dos deslocamentos prescritos

NBC(I) - número do nó com deslocamento prescrito

NFIX(I) - código que define o tipo de apoio

NFIX(I) = 001 - fixo na direção 3

010 - fixo na direção 2

100 - fixo na direção 1

011 - fixo nas direções 2 e 3

101 - fixo nas direções 1 e 3

110 - fixo nas direções 1 e 2

111 - fixo nas 3 direções

DP(3\*I-2), DP(3\*I-1), DP(3\*I) - valor dos deslocamentos prescritos nas direções 1, 2 e 3 respectivamente

8- Dados relativos ao anel

NOEL(I) - número do nó onde ocorre anel

AND(I) - altura da seção transversal do anel

ANB(I) - largura da seção transversal do anel  
EA(I) - módulo de elasticidade do anel

9- NOCAR - número de nós com cargas diretamente aplicadas

MCARG - número de elementos sobre os quais atuam forças de superfície

10- Sobre as cargas aplicadas em nós

NQ - número do nó com forças aplicadas

R1(1) - força total aplicada na direção 1 do nó NQ

R1(2) - força total aplicada na direção 2 do nó NQ

R1(3) - momento total aplicado no nó NQ

11- Sobre as forças de superfície

M - elemento com forças de superfície

GP(M) - peso por unidade de superfície média

HL1(M), HL2(M) - valor da pressão hidrostática nos nós 1 e 2 do elemento M, positivo se dirigido para dentro.

\* - Nos elementos cônicos, esféricos ou placa circular fechados, o fecho deve ser dado como o nó final do elemento. Este último nó será eliminado. Não foi levada em consideração a possibilidade de ocorrer carga concentrada neste ponto.

CAPÍTULO VRESULTADOS E CONCLUSÕES

A fim de ilustrar a aplicação prática do programa, apresentam-se neste capítulo alguns exemplos analisados e conclusões.

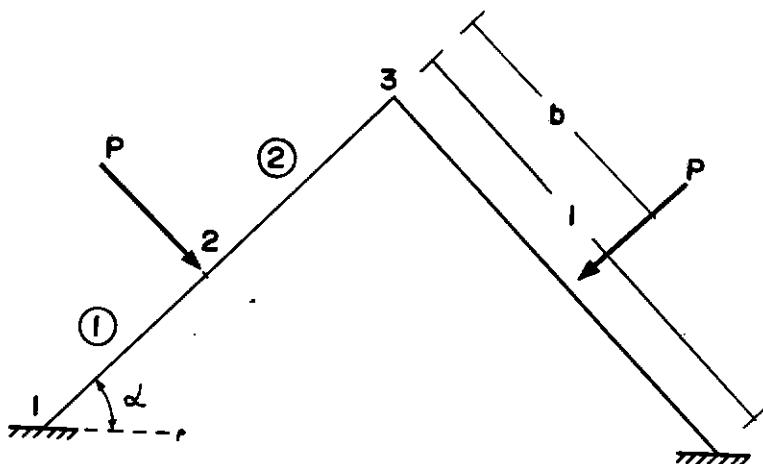
5.1 - Cone fechado carregado ao longo de um paralelo (Fig. 5.1)

Fig. 5.1

Dados:  $b = 5.1\text{m}$

$\ell = 9,8\text{m}$

$\alpha = 45^\circ$

$h = 0.1\text{m}$

$\nu = 0.3$

$P = 1\text{kg}$

$E = 210000\text{kg/cm}^2$

A análise foi feita com dois elementos para que a carga pudesse ser aplicada diretamente no nó 2. Este exemplo foi retirado de TAVARES (Ref. 2).

Os resultados apresentados não visam uma comparação mas servem como confirmação uma vez que a solução aqui adotada e a do referido trabalho são idênticas.

ESFORÇO NORMAL  
LONGITUDINAL

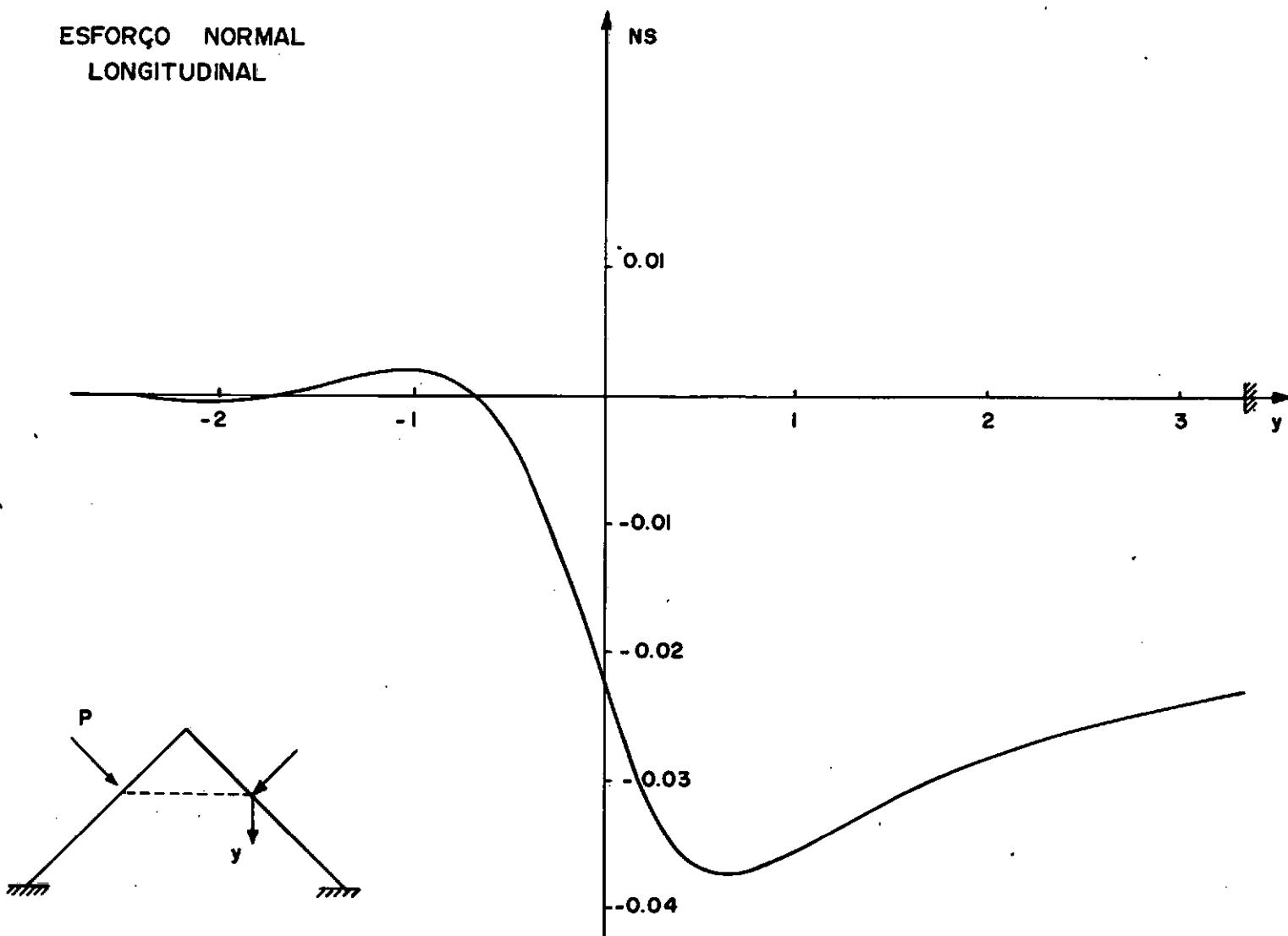


FIG. - 5 · 2

ESFORÇO CORTANTE

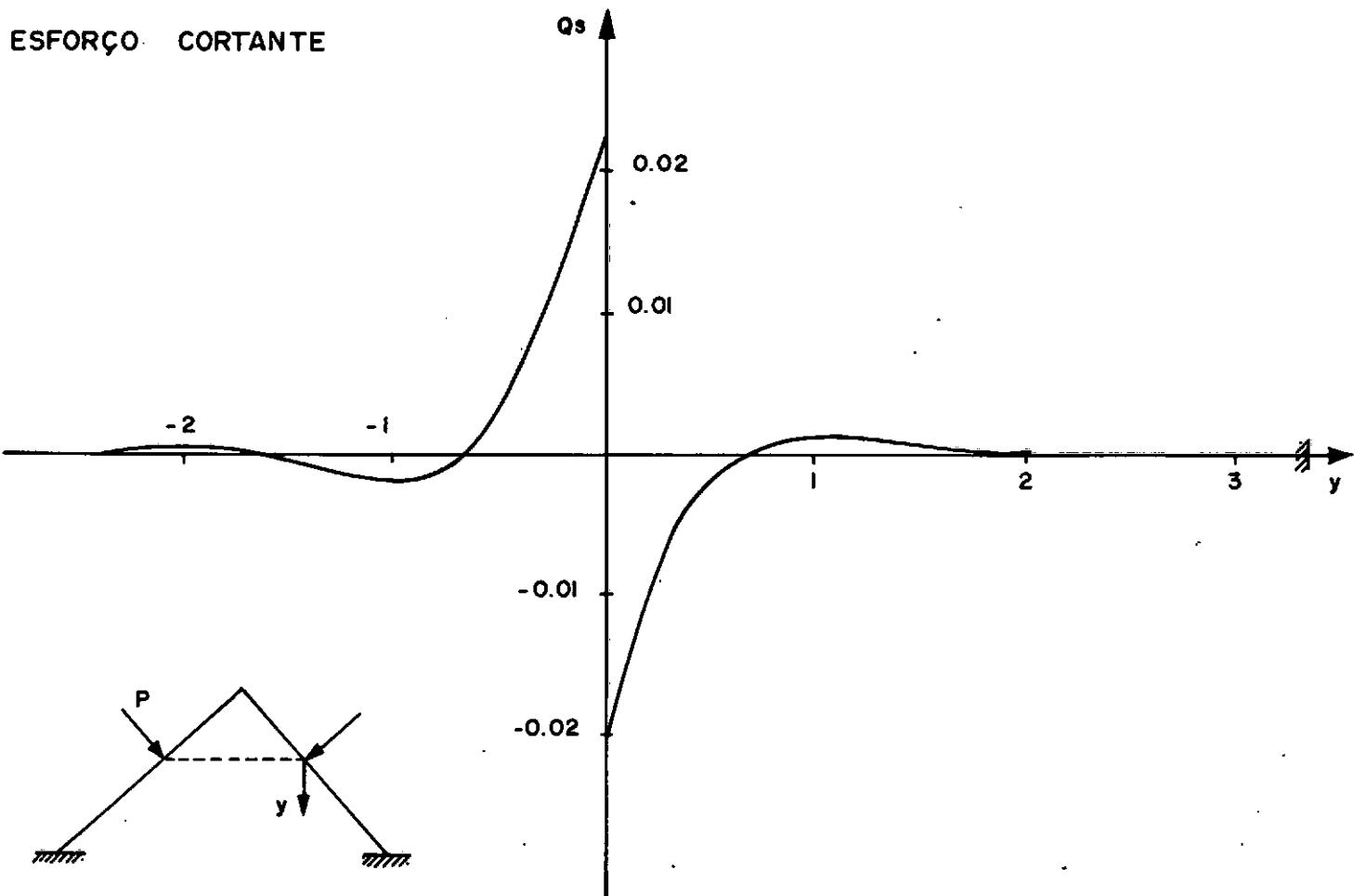


FIG. 5 · 3

1

MOMENTO LONGITUDINAL

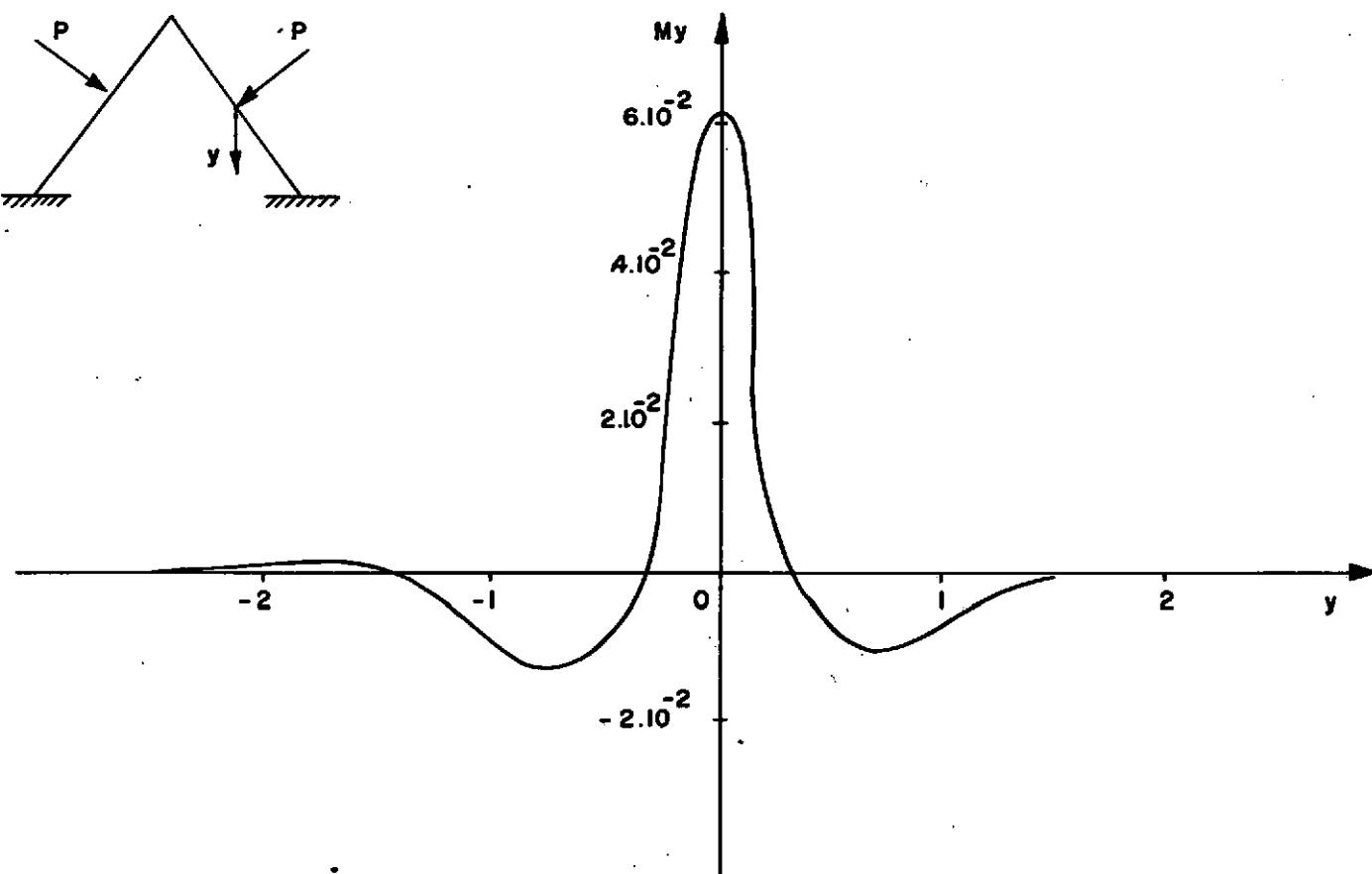
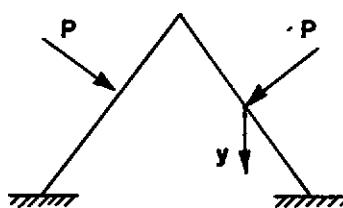


FIG. - 5 - 4

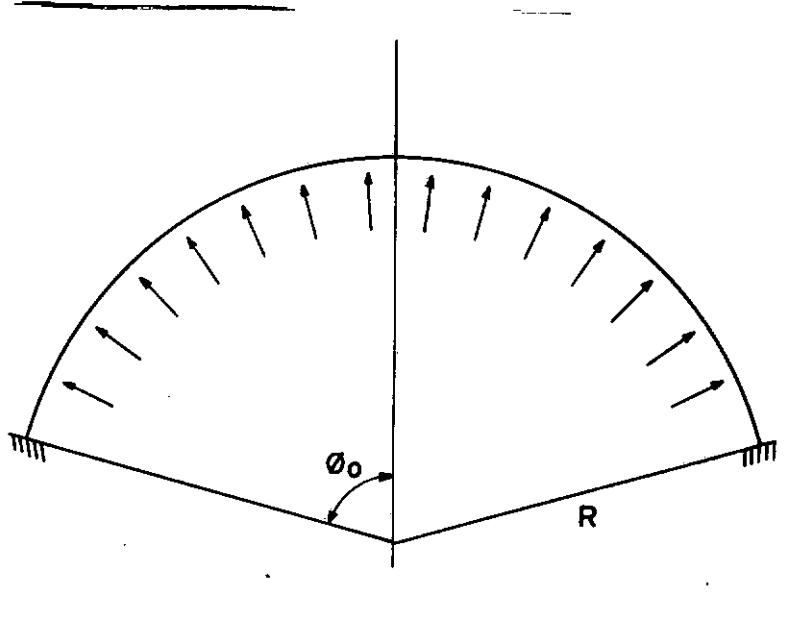
5.2 - Casca esférica com pressão uniforme (Fig. 5.5)

Fig. 5.5

Dados:  $R = 100\text{ in}$  $p = 100\text{ psi}$  $h = 0.5\text{ in}$  $\phi_0 = 75^\circ$  $E = 10^7\text{ psi}$  $\nu = 0.2$ 

Este exemplo foi retirado de POPOV (Ref. 3) que desenvolveu um elemento troco cônico idêntico ao aqui apresentado.

## 5.2.1 - Utilizando 1 elemento esférico:

A solução é obtida em série assintótica já que neste caso a convergência da série hipergeométrica é bastante lenta, por ser  $\phi_0$  próximo de  $90^\circ$ .

Os diagramas de  $M\phi$  e  $N\theta$  correspondem às curvas A das figuras 5.7 e 5.8.

Mesmos resultados são obtidos utilizando-se um elemento de  $75^\circ$  a  $15^\circ$  e outro de  $15^\circ$  a  $0^\circ$ , sendo que a solução para o primeiro elemento será em série assintótica e para o último em série hipergeométrica.

#### 5.2.2 - Utilizando-se 38 elementos cônicos:

Com o objetivo de estudar o efeito da discretização de uma forma curva com elementos retos, resolveu-se a casca esférica utilizando-se elementos cônicos.

Os diagramas de  $M\phi$  e  $N\theta$  correspondentes são as curvas B dos gráficos 5.6 e 5.7.

#### 5.2.3 - Utilizando-se elementos cônicos e esféricos:

Inicialmente resolveu-se com 38 elementos sendo 19 cônicos e 19 esféricos, postos alternadamente.

Os resultados estão representados nos diagramas 5.6 e 5.7 e correspondem às curvas C.

Finalmente resolve-se com 30 elementos cônicos de  $75^\circ$  a  $15^\circ$  e um elemento esférico de fechamento de  $15^\circ$ . Apresentam-se os resultados nos gráficos das figuras 5.6 e 5.7, curvas D.

600 ← 645 (B e D)  
638 (C)  
595 (A)

CASCA ESFERICA COM PRESSÃO UNIFORME

MOMENTOS MERIDIONAIS

SOLUÇÕES :

- A —— USANDO UM ELEMENTO ESFÉRICO
- B - - - - - USANDO 38 ELEMENTOS CÓNICOS
- C - - - ELEMENTOS ALTERNADOS
- D ..... 30 ELEMENTOS CONICOS E UM  
ESFERICO

A,B,C NO TRECHO SUPRIMIDO SÃO HORIZONTAIS

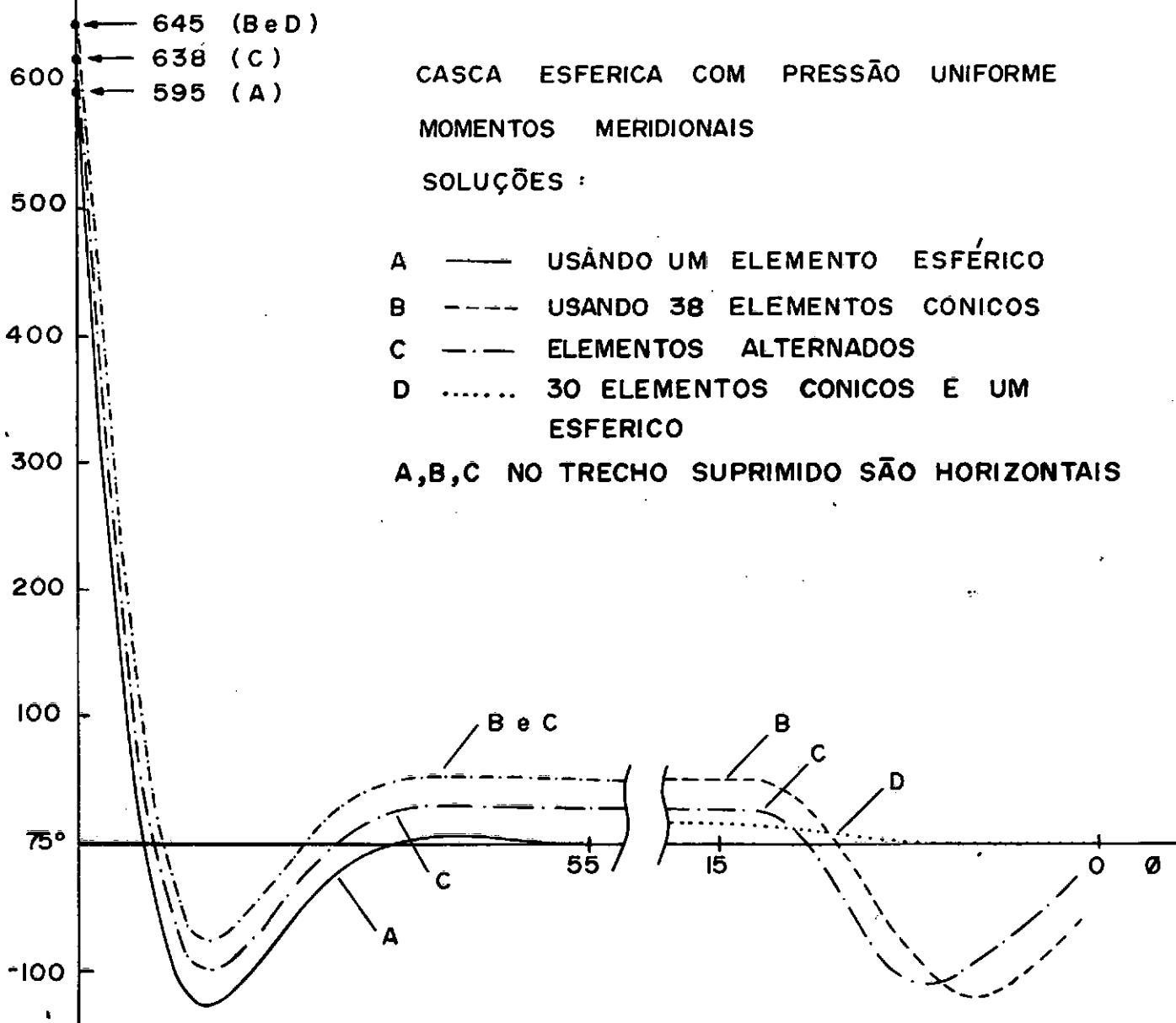
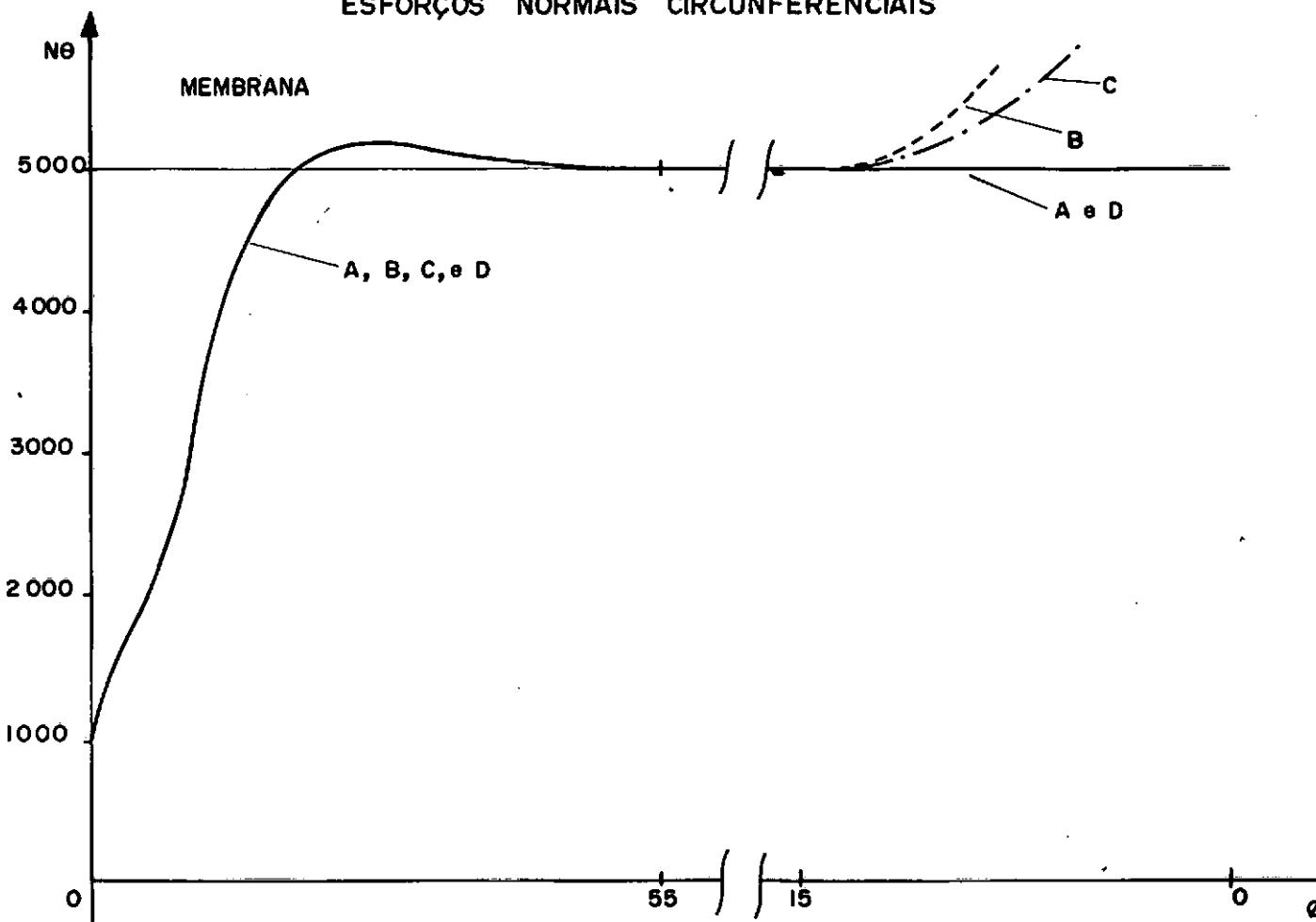


FIG. 5·6

### ESFORÇOS NORMAIS CIRCUNFERENCIAIS



## 5.2.4 - Comentários e conclusões:

Examinando os diagramas mostrados na Figura 5.7, observa-se que:

1. A solução encontrada com elementos cônicos diverge para  $\phi < 13^\circ$
2. Da discretização de uma forma esférica com elementos cônicos gerou-se aparecimento de perturbações locais devidas a não concordância dos meridianos e de elementos adjacentes, resultante daí uma translação do diagrama-real, no entrecho em que a solução converge.
3. O efeito desta perturbação local foi reduzido a praticamente metade com o uso de elementos alternados, devido a consequente redução do ângulo formado pelas tangentes aos meridianos de elementos adjacentes.

5.3 - Reservatório de concreto armado

Este exemplo, cuja solução é apresentada por MARKUS, (Ref. 4), consiste numa aplicação imediata dos elementos estudados neste trabalho.

Foi necessário proceder uma discretização do cone invertido já que a espessura do mesmo é variável, segundo a lei  $y h = y_1 h_1 = \text{const.}$  esta peculiaridade na variação da espessura conduz a facilidades na integração da equação do cone, sob a for-

ma simplificada, o que foi aproveitado na solução de Markus que se apresenta a seguir.

Para análise dos esforços atuantes neste reservatório, Fig. 5.8, foram utilizados dois elementos cilíndricos, um elemento de placa circular, um elemento de casca esférica e 10 elementos cônicos, além de um anel de reforço.

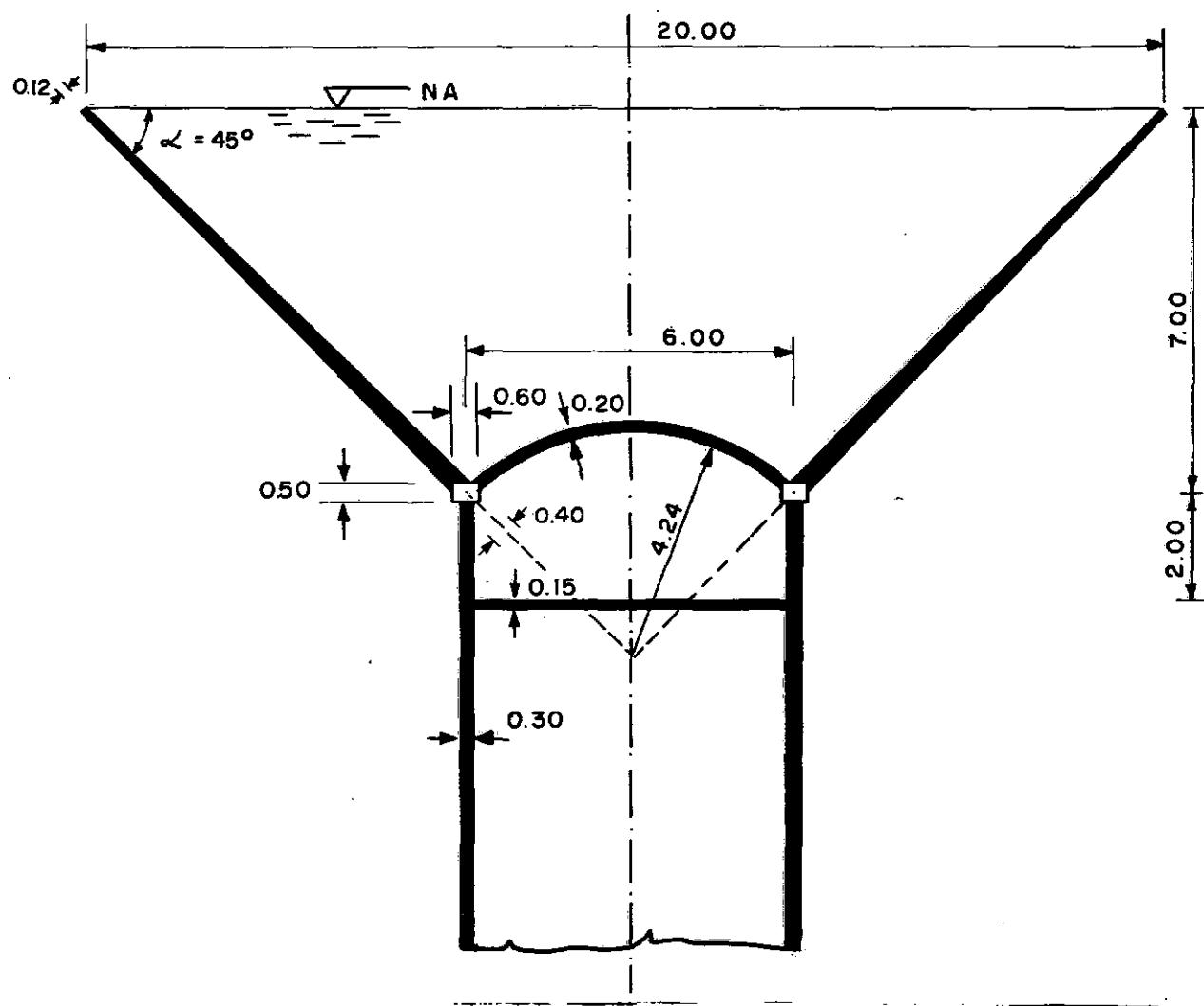


Fig. 5.9

No gráfico da figura 5.9 se mostram os diagramas dos momentos  $M_\phi$  e dos esforços normais  $M_\theta$ . As linhas cheias indicam a solução apresentada pela referência e as tracejadas a solução obtida pelo programa.

MOMENTOS MERIDIONAIS E  
ESFORÇOS NORMAIS CIRCUFERENCIAIS

— SOLUÇÃO DE MARKUS

--- SOLUÇÃO OBTIDA PELO PROGRAMA

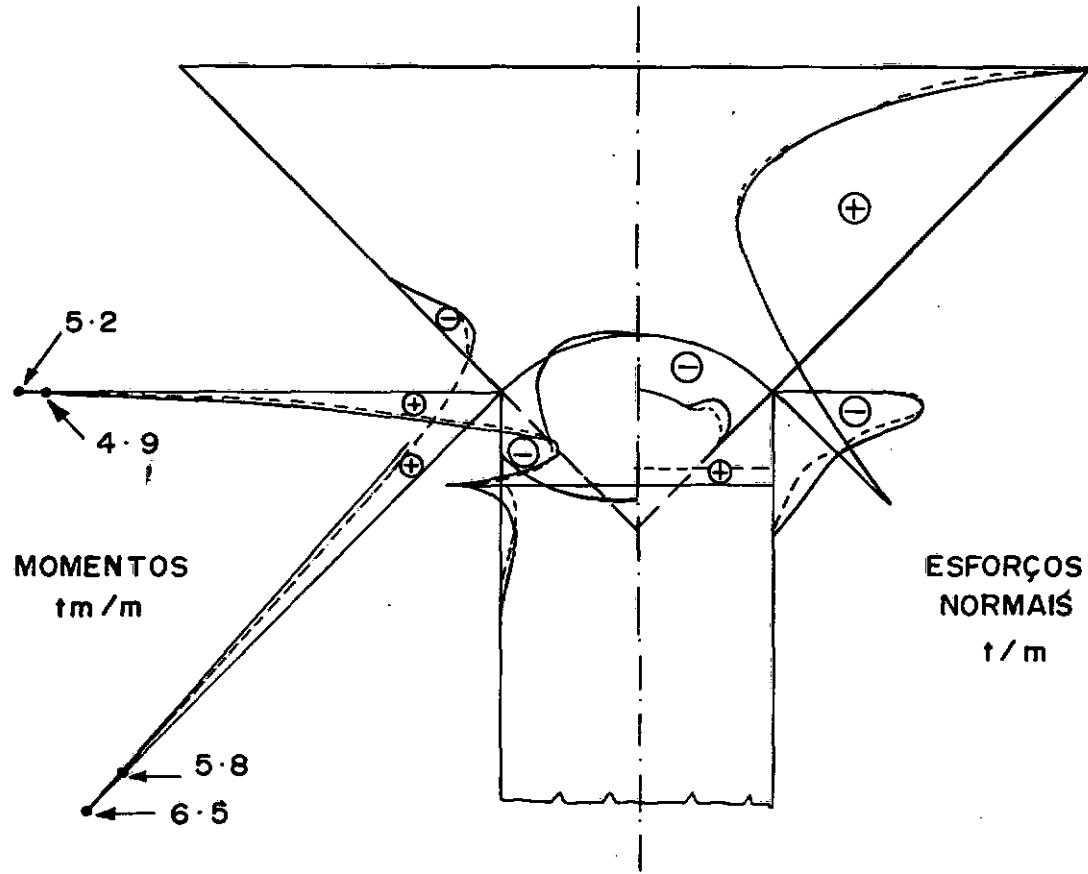


Fig. 5.9

Examinando o gráfico 5.90, observam-se duas regiões onde existem diferenças básicas entre os valores apresentados pelas duas soluções:

1º) no trecho da casca cilíndrica vizinho à placa circular.

Esta diferença deve-se ao efeito de cintamento, que não foi considerado pela referência.

2º) No encontro entre as cascas cilíndricas, cônicas e esféricas.

Neste caso tem-se a considerar:

a) aproximações introduzidas na discretização do cone com espessura variável por cones com espessuras constantes;

b) e, que solução apresentada por Markus consiste na superposição dos esforços de membrana com os esforços de flexão. No programa, embora se assuma como solução particular o regime de membrana, leva-se em conta a interação entre os esforços normais e os de flexão na montagem da matriz de rigidez.

CONCLUSÕES

Do método de cálculo de cascas axissimétricas, partindo de soluções analíticas e adaptando-as a um programa de análise matricial de estruturas, resultam vantagens não só na facilidade do cálculo destas soluções como também pela possibilidade de se obter uma razoável aproximação para problemas cuja solução analítica ainda é desconhecida.

Sobre a utilização prática deste programa em confronto com programas de elementos finitos algumas conclusões merecem ser comentadas:

- 1) Em muitos problemas práticos ocorrem estruturas axisimétricas, compostas basicamente de associações de cascas esféricas, cônicas, cilíndricas e placas circulares, nestes casos o programa é especialmente indicado, já que necessita de apenas um elemento para cada forma básica.
- 2) Pela facilidade de cálculo das soluções analíticas o programa pode ser usado para testar soluções aproximadas.
- 3) Para estruturas axissimétricas de espessura variável e raios de curvatura quaisquer, obtém-se solução aproximada por este procedimento, contudo o uso de elementos isoparamétricos possi -

velmente apresentará melhor desempenho dada a grande flexibilidade destes elementos na discretização da geometria da estrutura.

Como sugestão para desenvolvimentos posteriores indicam-se:

- 1) Introdução de novos casos de carregamento, bem como efeito de temperatura. Além do estudo de cargas não axissimétricas valendo-se de expansões em série de Fourier.
- 2) Outras formas axissimétricas de solução conhecida, por exemplo casca toroidal, podem ser tentadas.
- 3) Estudo de estruturas constituídas de materiais de propriedades elásticas ortotropas.

BIBLIOGRAFIA

1. GRAVINA, Pedro B. J. - "Teoria e Cálculo das Cascas de Revolução" - São Paulo, 1957.
2. TAVARES, Santiago A. - "Tensões e Deformações em Cascas Cônicas". Instituto Tecnológico da Aeronáutica, 1972, Tese de Mestrado.
3. POPOV, Egor P., JOSEPH Penzien and ZUNG An Lu - "Finite Element Solution for Axisymmetrical Shells", Proceedings of the American Society of Civil Engineers - Outubro de 1964.
4. MARKUS, Gyula - "Theorie und Berechnung Rotationssymmetrischer Bauwerke".
5. FLÜGGE, W. - "Stress in Shells"
6. McLACHLAN, N. W. - "Bessel Function for Engineers", Oxford 1955.
7. WATSON, G. N. - "A Treatise on Theory of Bessel Functions" - Cambridge, 1952.
8. TIMOSHENKO, S. - "Theory of Plates and Shells" - New York, 1940.
9. ZIENKIEWICZ, O. C. - "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, London.
10. WEAVER, W.,Jr. - "Computer Programs for Structural Analysis" - D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1965.

11. FISHER, Ladislov - "Theory and Practice of Shell Structures"  
Wilhelm Ernest & Sohn -
12. ABRAMOWITZ, Milton and IRENE A. Segun - "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, Inc., New York.

APÊNDICE AA1 - Uso da Série Assintótica

Conforme se referiu no Capítulo IV, a solução do elemento esférico pode ser obtida em série assintótica para os casos em que o uso da série hipergeométrica torna-se inconveniente. A seguir comenta-se sobre os parâmetros determinantes da rapidez de convergência da série hipergeométrica, anteriormente apresentada.

Na seção 2.1 mostrou-se que a solução da equação

$$\frac{d^2U}{d\phi^2} + \cot\phi \frac{dU}{d\phi} - \cot^2\phi U + i\mu^2 U = 0,$$

$$\text{com } \mu^4 = \frac{12(1-v^2)a^2}{h^2} - v^2,$$

pode ser obtida em séries de potências de  $x$ , onde  $x = \sin^2\phi$ .

Teoricamente estas séries convergem no intervalo  $|x| < 1$ , entretanto para valores de  $x$  próximos de 1, ou seja,  $\phi$  próximo de  $90^\circ$ , esta convergência torna-se muito lenta.

Examinando-se as expressões das leis de recorrência dos coeficientes, dadas por 2.1.13 e 2.1.14, nota-se que no numerador destas expressões ocorre o fator  $\mu^2$ , o que significa que para grandes valores de  $\mu$  os referidos coeficientes podem assumir valores muito grandes e retardar a convergência das séries.

Para valores elevados de  $\mu$ , por exemplo  $\mu > 20$ , e para ângulos  $\phi$  próximos de  $90^\circ$  a obtenção da solução em série hipergeométrica torna-se praticamente inviável, neste caso recorre-se à solução assintótica. Sobre a obtenção desta última solução, ver referência 5.

No programa a decisão quanto ao uso de uma ou outra solução é tomada da seguinte maneira:

$\psi \leq 30^\circ$  - série hipergeométrica

$\psi \geq 60^\circ$  - série assintótica

$30^\circ < \psi < 60^\circ$  - série hipergeométrica, se  $\mu^2 \operatorname{sen}\phi \leq 200$

- série assintótica, se  $\mu^2 \operatorname{sen}\phi > 200$

## A2 - Sobre o Cálculo da Solução da Casca Cônica

O cálculo das séries  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$ ,  $z_3(t)$ ,  $z_4(t)$  e suas derivadas na forma em que estão apresentadas na seção 2.3 está sujeito a erros de truncamento, que crescem com o argumento  $t$ . Para  $t > 10$ , mesmo com precisão extendida, não é possível calcular as séries  $z_3$  e  $z_4$  com uma precisão aceitável.

Este problema pode ser contornado com o uso de certas funções que aproximam estas séries. (Referências 6 e 7).

Para  $t > 10$  indicam-se como boa aproximação as seguintes funções:

$$z_1 \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-t}{\sqrt{2}}\right) \left[ \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{8t} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$z_2 \approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-t}{\sqrt{2}}\right) \left[ \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - \frac{1}{8t} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$z_1' \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-t}{\sqrt{2}}\right) \left[ \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - \frac{3}{8t} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$z_2' \approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-t}{\sqrt{2}}\right) \left[ \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - \frac{3}{8t} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$z_3 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \left[ \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - \frac{1}{8t} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$z_4 \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \left[ \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{8t} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$z_3' \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \left[ \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + \frac{3}{8t} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$z_4' \approx \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \left[ \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + \frac{3}{8t} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

A3 - Matrizes Auxiliares

Apresentam-se as matrizes auxiliares  $[B^*]$ ,  $[DB^*]$  e  $[DF]$ , utilizadas na formulação matricial do método dos deslocamentos (Capítulo III).

Estas matrizes são as seguintes:

$$[B^*] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & 1 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & 0 \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & B_{45} & 1 \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} & B_{55} & 0 \\ B_{61} & B_{62} & B_{63} & B_{64} & B_{65} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[DB^*] = \begin{bmatrix} DB_{11} & DB_{12} & DB_{13} & DB_{14} & DB_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & DB_{25} & 0 \\ DB_{31} & DB_{32} & DB_{33} & DB_{34} & DB_{35} & 0 \\ DB_{41} & DB_{42} & DB_{43} & DB_{44} & DB_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & DB_{55} & 0 \\ DB_{61} & DB_{62} & DB_{63} & DB_{64} & DB_{65} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[DF] = \begin{bmatrix} DF_{11} & DF_{12} & DF_{13} & DF_{14} & DF_{15} & 0 \\ DF_{21} & DF_{22} & DF_{23} & DF_{24} & DF_{25} & 0 \\ DF_{31} & DF_{32} & DF_{33} & DF_{34} & DF_{35} & 0 \\ DF_{41} & DF_{42} & DF_{43} & DF_{44} & DF_{45} & 0 \\ DF_{51} & DF_{52} & DF_{53} & DF_{54} & DF_{55} & 0 \end{bmatrix}$$

cujos termos são explicitados a seguir, para as cascas esféricas, cônicas e cilíndricas.

### 1. Casca Esférica:

$$B_{11} = \sin\phi(v\cos\phi S1 - DS1) \quad | \quad \phi = \phi_i$$

$$B_{12} = \sin\phi(v\cos\phi S2 - DS2) \quad | \quad \phi = \phi_i$$

$$B_{13} = \sin\phi(v\cos\phi S3 - DS3) \quad | \quad \phi = \phi_i$$

$$B_{14} = \sin\phi(v\cos\phi S4 - DS4) \quad | \quad \phi = \phi_i$$

$$B_{15} = (1+v)/\sin\phi \quad | \quad \phi = \phi_i$$

$$B_{21} = B_{11}\cot\phi - (1+v)S1 \quad | \quad \phi = \phi_i$$

$$B_{22} = B_{12}\cot\phi - (1+v) S2 \quad | \quad \phi = \phi_i$$

$$B_{23} = B_{13}\cot\phi - (1+v) S3 \quad | \quad \phi = \phi_i$$

$$B_{24} = B_{14}\cot\phi - (1+v) S4 \quad | \quad \phi = \phi_i$$

$$B_{25} = (1+v) \ln\left(\frac{\tan\phi/2}{\tan\phi_i/2}\right) \quad | \quad \phi = \phi_i$$

$$B_{31} = \frac{\operatorname{sen}\phi}{a} (vS1 + \mu^2 S2) \mid \phi = \phi_i$$

$$B_{32} = \frac{\operatorname{sen}\phi}{a} (vS2 - \mu^2 S1) \mid \phi = \phi_i$$

$$B_{33} = \frac{\operatorname{sen}\phi}{a} (vS3 + \mu^2 S4) \mid \phi = \phi_i$$

$$B_{34} = \frac{\operatorname{sen}\phi}{a} (vS4 - \mu^2 S3) \mid \phi = \phi_i$$

$$B_{35} = 0$$

$B_{4k}$ ,  $k = 1, 5$ , é idêntico a  $B_{1k}$  com  $\phi = \phi_j$ .

Idem para  $B_{5k}$  com  $B_{2k}$  e  $B_{6k}$  com  $B_{3k}$ .

$$DB_{11} = -\alpha \operatorname{sen}\phi S1 \mid \phi = \phi_i$$

$$DB_{12} = -\alpha \operatorname{sen}\phi S2 \mid \phi = \phi_i$$

$$DB_{13} = -\alpha \operatorname{sen}\phi S3 \mid \phi = \phi_i$$

$$DB_{14} = -\alpha \operatorname{sen}\phi S4 \mid \phi = \phi_i$$

$$DB_{15} = -\alpha \operatorname{cotg} \phi \mid \phi = \phi_i$$

$$DB_{25} = \alpha$$

$$DB_{31} = -\frac{\alpha h^2}{a} \operatorname{sen}\phi [vDS1 + \mu^2 DS2 + v\cos\phi(vS1 + \mu^2 S2)] \phi = \phi_i$$

$$DB_{32} = -\frac{\alpha h^2}{a} \operatorname{sen}\phi [vDS2 - \mu^2 DS1 + v\cos\phi(vS2 - \mu^2 S1)] \phi = \phi_i$$

$$DB_{33} = -\frac{\alpha h^2}{a} \operatorname{sen}\phi [vDS3 + \mu^2 DS4 + v\cos\phi(vS3 + \mu^2 S4)] \phi = \phi_i$$

$$DB_{34} = -\frac{\alpha h^2}{a} \operatorname{sen}\phi [vS4 - \mu^2 DS4 + v\cos\phi(vS4 - \mu^2 S3)] \phi = \phi_i$$

$$DB_{35} = 0$$

$DB_{4k}$ ,  $k = 1, 5$ , têm expressões idênticas a  $DB_{1k}$ , apenas troca-se o sinal e faz-se  $\phi = \phi_j$

Idem para  $DB_{55}$  e  $DB_{6k}$

$$\alpha = 2\pi Eh$$

$$DF_{11} = \frac{\sin\phi}{a} \alpha_1 S1$$

$$DF_{12} = \frac{\sin\phi}{a} \alpha_1 S2 \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$DF_{13} = \frac{\sin\phi}{a} \alpha_1 S3$$

$$DF_{14} = \frac{\sin\phi}{a} \alpha_1 S4 \quad , \quad DF_{15} = 0$$

$$DF_{21} = - \frac{\cos\phi}{a} \alpha_1 S1$$

$$DF_{22} = - \frac{\cos\phi}{a} \alpha_1 S2$$

$$DF_{23} = - \frac{\cos\phi}{a} \alpha_1 S3$$

$$DF_{24} = - \frac{\cos\phi}{a} \alpha_1 S4$$

$$DF_{25} = - \frac{\alpha_1}{a} \frac{1}{\sin^2\phi}$$

$$DF_{31} = \frac{\alpha_1 h^2}{a^2} [vD1 + \mu^2 DS2 + v\cos\phi(vS1 + \mu^2 S2)]$$

$$DF_{32} = \frac{\alpha_1 h^2}{a^2} [vDS2 - \mu^2 DS1 + v\cos\phi(vS2 - \mu^2 S1)]$$

$$DF_{33} = \frac{\alpha_1 h^2}{a^2} [vDS3 + \mu^2 DS4 + v\cos\phi(vS3 + \mu^2 S4)]$$

$$DF_{34} = \frac{\alpha_1 h^2}{a^2} [vDS4 - \mu^2 DS3 + v\cos\phi(vS4 - \mu^2 S3)]$$

$$DF_{35} = 0$$

$$DF_{41} = - \frac{1}{a} DS1$$

$$DF_{42} = - \frac{1}{a} DS2$$

$$DF_{43} = - \frac{\alpha_1}{a} DS3$$

$$DF_{44} = - \frac{\alpha_1}{a} DS4$$

$$DF_{45} = - \frac{\alpha_1}{a} \frac{1}{\sin^2\phi}$$

$$DF_{51} = \frac{\alpha_1 h^2}{a^2} [v(\cos\phi S1 + vDS1) + \mu^2(\cos\phi S2 + vDS2)]$$

$$DF_{52} = \frac{\alpha_1 h^2}{a^2} [v(\cos\phi S2 + vDS2) - \mu^2(\cos\phi S1 + vDS1)]$$

$$DF_{53} = \frac{\alpha_1 h^2}{a^2} [v(\cos\phi S3 + vDS3) + \mu^2(\cos\phi S4 + vDS4)]$$

$$DF_{54} = \frac{\alpha_1 h^2}{a^2} [v(\cos\phi S4 + vDS4) - \mu^2(\cos\phi S3 + vDS3)]$$

$$DF_{55} = 0$$

2. Casca Cônica:

$$B_{11} = - \cos\phi (0.5z_1^1 - (1+v)z_1 - \frac{2}{t}(1+v)z_2^1) \mid y = y_i$$

$$B_{12} = - \cos\phi (0.5z_2^1 - (1+v)z_2 + \frac{2}{t}(1+v)z_1^1) \mid y = y_i$$

$$B_{13} = - \cos\phi (0.5z_3^1 - (1+v)z_3 - \frac{2}{t}(1+v)z_4^1) \mid y = y_i$$

$$B_{14} = - \cos\phi (0.5z_4^1 - (1+v)z_4 - \frac{2}{t}(1+v)z_3^1) \mid y = y_i$$

$$B_{15} = \frac{v}{\sin\phi}$$

$$B_{21} = B_{11} \cot\phi - \frac{1}{\sin\phi} (vz_1 + \frac{2(1+v)}{t} z_2^1) \mid y = y_i$$

$$B_{22} = B_{12} \cot\phi - \frac{1}{\sin\phi} (vz_2 - \frac{2(1+v)}{t} z_1^1) \mid y = y_i$$

$$B_{23} = B_{13} \cot\phi - \frac{1}{\sin\phi} (vz_3 + \frac{2(1+v)}{t} z_4^1) \mid y = y_i$$

$$B_{24} = B_{14} \cot\phi - \frac{1}{\sin\phi} (vz_4 - \frac{2(1+v)}{t} z_3^1) \mid y = y_i$$

$$B_{25} = \frac{1}{\sin^2\phi \cos\phi} (\ln \frac{y}{y_i} + v \cos^2\phi) \mid y = y_i$$

$$B_{31} = - \frac{\mu_1^2}{\tan\phi} (-z_2 + \frac{2}{t} z_1^1) \mid y = y_i$$

$$B_{32} = - \frac{\mu_1^2}{\tan\phi} (z_1 + \frac{2}{t} z_2^1) \mid y = y_i$$

$$B_{33} = - \frac{\mu_1^2}{\operatorname{tg}\phi} (-z_4 + \frac{2}{t} z_3^i) \mid y = y_i$$

$$B_{34} = \frac{\mu_1^2}{\operatorname{tg}\phi} (z_3 + \frac{2}{t} z_4^i) \mid y = y_i$$

$$B_{35} = - \frac{1}{y \operatorname{sen}^2 \phi} \mid y = y_i$$

$B_{4k}$ ,  $k = 1, 5$ , têm idênticas expressões que  $B_{1k}$  em  $y = y_j$

Idem para  $B_{5k}$  com  $B_{2k}$  e  $B_{6k}$  com  $B_{3k}$

$$DB_{11} = - \alpha (z_1 + \frac{2}{t} z_2^i) \mid y = y_i$$

$$DB_{12} = - \alpha (z_2 - \frac{2}{t} z_1^i) \mid y = y_i$$

$$DB_{13} = - \alpha (z_3 + \frac{2}{t} z_4^i) \mid y = y_i$$

$$DB_{14} = - \alpha (z_4 - \frac{2}{t} z_3^i) \mid y = y_i$$

$$DB_{15} = - \alpha \operatorname{cot}\phi$$

$$DB_{25} = \alpha$$

$$\alpha_M = \frac{\alpha \operatorname{sen}\phi}{a \mu_1^2}$$

$$DB_{31} = \alpha_M \left[ t z_2^i - 2(1-\nu) z_2 + \frac{4(1-\nu)}{t} z_1^i \right] \mid y = y_i$$

$$DB_{32} = \alpha_M \left[ -t z_1^i + 2(1-\nu) z_1 + \frac{4(1-\nu)}{t} z_2^i \right] \mid y = y_i$$

$$DB_{33} = \alpha_M \left[ t z_4' - 2(1-v) z_4 + \frac{4(1-v)}{t} z_3' \right] \mid y = y_i$$

$$DB_{34} = \alpha_M \left[ t z_3' + 2(1-v) z_3 + \frac{4(1-v)}{t} z_4' \right] \mid y = y_i$$

$$DB_{35} = \alpha h^2 \cos \phi \cdot \frac{1}{12(1+v) \sin^2 \phi y} \mid y = y_i$$

$DB_{4k}$ ,  $k = 1, 5$ , é idêntico a  $DB_{1k}$  com o sinal trocado e em  $y = y_j$ .

Idem para  $DB_{55}$  com  $DB_{25}$  e  $DB_{3k}$  com  $DB_{6k}$ .

$$\alpha_F = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$DF_{11} = \alpha_F \operatorname{tg} \phi \cdot \frac{1}{y} (z_1 + \frac{2}{t} z_2')$$

$$DF_{12} = \alpha_F \operatorname{tg} \phi \cdot \frac{1}{y} (z_2 - \frac{2}{t} z_1')$$

$$DF_{13} = \alpha_F \operatorname{tg} \phi \cdot \frac{1}{y} (z_3 + \frac{2}{t} z_4')$$

$$DF_{14} = \alpha_F \operatorname{tg} \phi \cdot \frac{1}{y} (z_4 - \frac{2}{t} z_3')$$

$$DF_{15} = 0$$

$$DF_{21} = - \alpha_F \frac{1}{y} (z_1 + \frac{2}{t} z_2')$$

$$DF_{22} = - \alpha_F \frac{1}{y} (z_2 - \frac{2}{t} z_1')$$

$$DF_{23} = - \alpha_F \frac{1}{y} (z_3 + \frac{2}{t} z_4')$$

$$DF_{24} = - \alpha_F \frac{1}{y} (z_4 - \frac{2}{t} z_3')$$

$$DF_{25} = - \alpha_F \frac{1}{y \sin^2 \phi}$$

$$DF_{31} = - 2\alpha_F \operatorname{tg} \phi \frac{1}{t^2} \left[ t z_2' - 2(1-v) z_2 + \frac{4(1-v)}{t} z_1' \right]$$

$$DF_{32} = - 2\alpha_F \operatorname{tg} \phi \frac{1}{t^2} \left[ -t z_1' + 2(1-v) z_1 + \frac{4(1-v)}{t} z_2' \right]$$

$$DF_{33} = - 2\alpha_F \operatorname{tg} \phi \frac{1}{t^2} \left[ t z_4' - 2(1-v) z_4 + \frac{4(1-v)}{t} z_3' \right]$$

$$DF_{34} = - 2\alpha_F \operatorname{tg} \phi \frac{1}{t^2} \left[ -t z_3' + 2(1-v) z_3 + \frac{4(1-v)}{t} z_4' \right]$$

$$DF_{35} = - \alpha_F h^2 \frac{1}{12(1+v)} \left( \frac{1}{y \sin \phi} \right)^2$$

$$DF_{41} = - 2\alpha_F \left( \frac{\mu_1}{t} \right)^2 (t z_1' - 2z_1 - \frac{4}{t} z_2')$$

$$DF_{42} = - 2\alpha_F \left( \frac{\mu_1}{t} \right)^2 (t z_2' - 2z_2 + \frac{4}{t} z_1')$$

$$DF_{43} = - 2\alpha_F \left( \frac{\mu_1}{t} \right)^2 (t z_3' - 2z_3 - \frac{4}{t} z_4')$$

$$DF_{44} = - 2\alpha_F \left( \frac{\mu_1}{t} \right)^2 (t z_4' - 2z_4 + \frac{4}{t} z_3')$$

$$DF_{45} = 0$$

$$DF_{51} = - 2\alpha_F \operatorname{tg} \phi \cdot \frac{1}{t^2} \left[ vt z_2' + 2(1-v) z_2 - \frac{4(1-v)}{t} z_1' \right]$$

$$DF_{52} = -2\alpha_F \operatorname{tg}\phi \frac{1}{t^2} \left[ -vt z_1' - 2(1-v)z_1 - \frac{4(1-v)}{t} z_2' \right]$$

$$DF_{53} = -2\alpha_F \operatorname{tg}\phi \frac{1}{t^2} \left[ vt z_4' + 2(1-v)z_4 - \frac{4(1-v)}{t} z_3' \right]$$

$$DF_{54} = -2\alpha_F \operatorname{tg}\phi \frac{1}{t^2} \left[ -vt z_3' - 2(1-v)z_3 - \frac{4(1-v)}{t} z_4' \right]$$

$$DF_{55} = - DF_{35}$$

### 3. Cilíndrico

$$B_{11} = R \lambda \psi_1 \mid y = y_i$$

$$B_{12} = -R \lambda \psi_2 \mid y = y_i$$

$$B_{13} = -R \lambda \psi_3 \mid y = y_i$$

$$B_{14} = R \lambda \psi_4 \mid y = y_i$$

$$B_{15} = v \mid y = y_i$$

$$B_{21} = v \gamma_1 \mid y = y_i$$

$$B_{22} = v \gamma_2 \mid y = y_i$$

$$B_{23} = v \gamma_3 \mid y = y_i$$

$$B_{24} = v \gamma_4 \mid y = y_i$$

$$B_{25} = - \frac{y}{R} \mid y = y_i$$

$$B_{31} = -2\lambda^2 R \gamma_2 \mid y = y_i$$

$$B_{32} = 2\lambda^2 R \gamma_1 \mid y = y_i$$

$$B_{33} = -2\lambda^2 R \gamma_4 \mid y = y_i$$

$$B_{34} = 2\lambda^2 R \gamma_3 \mid y = y_i$$

$$B_{35} = 0$$

$B_{4k}$ ,  $k = 1, 5$ , tem idênticas expressões que  $B_{1k}$ , em  $y = y_j$ .

Idem para  $B_{5k}$  com  $B_{2k}$  e  $B_{6k}$  com  $B_{3k}$ .

$$DB_{11} = \alpha \gamma_1 \mid y = y_i$$

$$DB_{12} = \alpha \gamma_2 \mid y = y_i$$

$$DB_{13} = \alpha \gamma_3 \mid y = y_i$$

$$DB_{14} = \alpha \gamma_4 \mid y = y_i$$

$$DB_{15} = 0$$

$$DB_{25} = \alpha$$

$$DB_{31} = \frac{\alpha}{2\lambda} \psi_2 \mid y = y_i$$

$$DB_{32} = \frac{\alpha}{2\lambda} \psi_1 \mid y = y_i$$

$$DB_{33} = -\frac{\alpha}{2\lambda} \psi_4 \mid y = y_i$$

$$DB_{34} = -\frac{\alpha}{2\lambda} \psi_3 \mid y = y_i$$

$$DB_{35} = 0$$

$DB_{4k}$ ,  $k = 1,5$  é idêntico a  $DB_{1k}$ , com o sinal trocado e em  $y = y_j$ .

Idem para  $DB_{55}$  com  $DB_{25}$  e  $DB_{6k}$  com  $DB_{3k}$

$$DF_{1k} = DB_{1k}/2\pi R \quad k = 1,5$$

$$DF_{21} = DF_{22} = DF_{23} = DF_{24} = 0$$

$$DF_{25} = \frac{\alpha}{2\pi R}$$

$$DF_{3k} = -DB_{3k}/2\pi R, \quad k = 1,5$$

$$DF_{41} = \lambda \psi_1$$

$$DF_{42} = -\lambda \psi_2$$

$$DF_{43} = -\lambda \psi_3$$

$$DF_{44} = \lambda \psi_4$$

$$DF_{45} = 0$$

$$DF_{5k} = v DF_{3k}, \quad k = 1,5$$

Observação: os momentos calculados seguem uma convenção de sinal diferente da força nodal correspondente, conforme se pode notar pelas suas expressões. Para estes momentos o sinal positivo corresponde à tração nas fibras internas.

APÉNDICE B

```

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
*IOCS(2501READER,1403PRINTER,DISK)
  COMMON NP,NE,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,NB,MCARG,KK1,
*,NEL,NOEL(10),AND(10),ANB(10),EA(10)
  COMMON NOP(50,2),IMAT(50),NTIP(50),NBC(40),NFIIX(40),NPT(50)
  COMMON SK(150,12),X(50),Y(50),AC(150),DP(120),ORT(10,2)
*,S(6,6),GP(50),HL1(50),HL2(50),ESPE(50),R1(3),NCOO(50)
  COMMON XE(2),YE(2),ZC(4),SC(4),SE(4),DS(4),Z(4),DZ(4),
*F(5),D1(6),E,H,XNI,H1,H2,G,XK2,SFI,CFI,SII,CII,
*SIS,CIS,I1,I2,I3 ,AML(6)
  DEFINE FILE 10(100,126,U,KK1)

C
C      PROGRAMA PRINCIPAL
C
C      NCN=2
C
C      NUMERO DE PROBLEMAS
C
C      READ(8,1)NPROB
C      DO 400 NPR=1,NPROB
C      WRITE(5,10)
C      WRITE(5,17)NPR
C      READ(8,11)
C      WRITE(5,11)

C
C      DADOS SOBRE A ESTRUTURA
C
C      CALL AXLER
C      NSZF=NP*NDF
C      DO 200 LI=1,NLD
C      WRITE(5,19)LI

C
C      LEITURA DAS CARGAS
C
C      CALL LIDCA
C
C      MATRIZ DE RIGIDEZ
C
C      CALL FORME
C
C      SOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES
C
C      CALL RESIS
C
C      CALCULO DOS ESFORCOS UNITARIOS
C
C      CALL AXTEC

```

```

200 CONTINUE
400 CONTINUE
 1 FORMAT(I10)
11 FORMAT(20X'')
10 FORMAT(1H1,///,20X,65('*')/20X'*'63X'*',20X'*'16X'ANALISE'
  '* DE CASCAS DE REVOLUCAO'17X'*'/20X'*'63X'*'/20X'*',16X
  '**COM CARREGAMENTO AXISSIMETRICO'17X'*'/20X'*'63X'*'/20X'*',63X'*'
  */20X'*'63X'*'/20X'*'5X'COPPE - UFRJ -- 1973'12X'ABIMAEI'
  '** DOURADO LOULA'6X'*'/20X'*'63X'*'/20X'*'63X'*'/20X,65('*')//)
17 FORMAT(/30X'ESTRUTURA NUMERO'I3,///,20X,65('*')//)
19 FORMAT(//20X,40(''),//30X'CARREGAMENTO NUMERO'I3,//20X,40('')//)
  CALL EXIT
  END
// DUP
*DELETE          KASKA      1E36
*STORE          WS  UA  KASKA      1E36

```

```

*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
  SUBROUTINE AXLER
C
C      LE E IMPRIME AS PROPRIEDADES DA ESTRUTURA
C
COMMON NP,NE,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,NB,MCARG,KK1
*,NEL,NOEL(10),AND(10),ANB(10),EA(10)
COMMON NOP(50,2),IMAT(50),NTIP(50),NBC(40),NFIIX(40),NPT(50)
COMMON SK(150,12),X(50),Y(50),AC(150),DP(120),ORT(10,2)
*,S(6,6),GP(50),HL1(50),HL2(50),ESPE(50),R1(3),NCOO(50)
  PI=3.14159265
  NDF=3
  READ(8,1)NP,NE,NB,NLD,NMAT,NEL
  WRITE(5,101)
  WRITE(5,11)NP,NE,NB,NLD,NMAT,NEL
C
C      COORDENADAS DOS NOS
C
  READ(8,2)(N,X(N),Y(N),NCOO(N),L=1,NP)
  WRITE(5,102)
  EX=X(1)
  EY=0.

```

```

DO 500 N=1,NP
IF(NCOO(N) 501,502,501
502 WRITE(5,12)N,X(N),Y(N)
EY=Y(N)
EX=X(N)
GO TO 500.
501 RE=X(N)
FIG=Y(N)
FI=Y(N)*PI/180.
IF(EY)71,70,71
70 YC=RE*COS(FI)
GO TO 72
71 YC=RE*COS(FI)-SQRT(RE**2-EX**2)
72 X(N)=RE*SIN(FI)
Y(N)=EY+YC
WRITE(5,550)N,X(N),Y(N),RE,FIG
500 CONTINUE

```

C  
C      DEFINICAO DOS ELEMENTOS  
C

```

READ(8,3)(N,(NOP(N,M),M=1,2),IMAT(N),NTIP(N),NPT(N),ESPE(N),L=1,NE
*)
WRITE(5,103)
WRITE(5,13)(N,(NOP(N,M),M=1,2),IMAT(N),NTIP(N),NPT(N),ESPE(N),N=1
*,NE)

```

C  
C      PROPRIEDADES DO MATERIAL  
C

```

READ(8,8)(N,(ORT(N,I),I=1,2),L=1,NMAT)
WRITE(5,108)
WRITE(5,18)(N,(ORT(N,I),I=1,2),N=1,NMAT)

```

C  
C      CONDICOES DE CONTORNO  
C

```

READ(8,44)(NBC(I),NFIIX(I),DP(3*I-2),DP(3*I-1),DP(3*I),
*I=1,NB)
WRITE(5,104)
WRITE(5,14)(NBC(I),NFIIX(I),DP(3*I-2),DP(3*I-1),DP(3*I),
*I=1,NB)
IF(NEL)290,291,290

```

C  
C      SOBRE OS ANEIS DE REFORCO  
C

```

290 READ(8,210)(NOEL(I),AND(I),ANB(I),EA(I),I=1,NEL)
WRITE(5,222)
WRITE(5,225)(NOEL(I),AND(I),ANB(I),EA(I),I=1,NEL)

```

291 CONTINUE

104 FORMAT(//20X'RESTRICoes'12X'DESLOCAMENTOS PRESCRITOS'//20X'NO'3X'

\*      NFIIX'12X'DP1'12X'DP2'12X'DP3')

12 FORMAT(19X,I3,2F14.3)

```

550 FORMAT(19X,I3,2F14.3,6X,2F15.3)
13 FORMAT(16X,I5,5I10,F14.4)
210 FORMAT(I10,3F10.0)
222 FORMAT(//30X'PROPRIEDADES DOS ANEIS'//20X'NO'10X'ALTURA'
*10X'LARGURA'5X'MOD. ELASTICO')
225 FORMAT(20X,I2,6X,F10.2,7X,F10.2,5X,F13.1)
44 FORMAT(2I10,3F10.4)
14 FORMAT(19X,I3,6X,I6,3F15.5)
101 FORMAT(//20X'PROPRIEDADES DA ESTRUTURA'//)
11 FORMAT(20X'NUMERO DE NOS'I12,15X'NUMERO DE ELEMENTOS'I6/20X'NOS RE
*STRINGIDOS'I9,15X'CASOS DE CARREGAMENTOS'I3/20X'TIPOS DE MATERIAIS
*I7,15X'NUMERO DE ANEIS'I10//)
102 FORMAT(//20X'COORDENADAS'8X'CARTESIANAS'9X'COORDENADAS'8X
*POLARES'//20X'NO'13X'X'13X'Y'16X'RAIO'13X'FI')
103 FORMAT(//20X'INCIDENCIAS E PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS'//20X'M'6X'
*NO J'6X'NO K'6X'GRUPO'6X'NTIP'6X'NPT'4X'ESPESSURA')
108 FORMAT(//20X'PROPRIEDADES ELASTICAS'//20X'GRUPO'11X'MODULO E'14X'P
*OISSON')
18 FORMAT(20X,I3,8X,F13.2,11X,F10.2)
1 FORMAT(6I10)
8 FORMAT(I10,2F10.2)
2 FORMAT(I10,2F10.0,I10)
3 FORMAT(6I10,F10.4)
RETURN
END
// DUP
*DELETE          AXLER      1E36
*STORE          WS  UA  AXLER      1E36

```

```

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
SUBROUTINE LIDCA
C
C      LE E IMPRIME DADOS SOBRE O CARREGAMENTO
C
COMMON NP,NE,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,NB,MCARG,KK1
*,NEL,NOEL(10),AND(10),ANB(10),EA(10)
COMMON NOP(50,2),IMAT(50),NTIP(50),NBC(40),NFIIX(40),NPT(50)
COMMON SK(150,12),X(50),Y(50),AC(150),DP(120),ORT(10,2)
*,S(6,6),GP(50),HL1(50),HL2(50),ESPE(50),R1(3),NCOD(50)

```

```

DO 200 I=1,NE
HL1(I)=0.
GP(I)=0.
200 HL2(I)=0.

C
C      NOS E ELEMENTOS CARREGADOS
C
      READ(8,1001)NOCAR,MCARG
1001 FORMAT(2I10)
      WRITE(5,1002)NOCAR,MCARG
1002 FORMAT(20X,'NOS COM FORCAS DIRETAMENTE APLICADAS----'I3,
*//20X,'ELEMENTOS COM FORCAS DE SUPERFICIE----'I3)
      DO 160 J=1,150
160 AC(J)=0.
      IF(NOCAR)105,165,105

C
C      CARGAS APLICADAS NOS NOS
C
      105 WRITE(5,190)
      190 FORMAT(//20X'CARGAS DIRETAMENTE APLICADAS NOS NOS'//)
      DO 165 I=1,NOCAR
      READ(8,9)NQ,(R1(K),K=1,NDF)
      WRITE(5,19)NQ,(R1(K),K=1,NDF)
      DO 170 K=1,NDF
      IC=(NQ-1)*NDF+K
      170 AC(IC)=AC(IC)+R1(K)
      165 CONTINUE
      9 FORMAT(I10,3F10.2)
      19 FORMAT(20X'NO' I2,5X'R1='F10.2,5X'R2='F10.2,5X'R3='F10.2)
      36 FORMAT(//,20X'CARGAS APLICADAS EM ELEMENTOS'//20X'ELEMENTO'11X
      *'P.PROPRIO'12X'HL1'12X'HL2')
      IF(MCARG)10,800,10

C
C      FORCAS DE SUPERFICIE
C
      10 WRITE(5,36)
      DO 800 I=1,MCARG
      READ(8,11) M,GP(M),HL1(M),HL2(M)
      11 FORMAT(I10,3F10.2)
      WRITE(5,136) M,GP(M),HL1(M),HL2(M)
      136 FORMAT(23X,I5,5X,3F15.3)
      800 CONTINUE
      RETURN
      END

// DUP
*DELETE          LIDCA          1E36
*STORE          WS  UA  LIDCA          1E36

```

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
      SUBROUTINE FORME

C
C      ESTA SUBROTINA MONTA A MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRURURA
C
C      COMMON NP,NE,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,N8,MCARG,KK1
*     ,NEL,NOEL(10),AND(10),ANB(10),EA(10)
      COMMON NOP(50,2),IMAT(50),NTIP(50),NBC(40),NFIIX(40),NPT(50)
      COMMON SK(150,12),X(50),Y(50),AC(150),DP(120),ORT(10,2)
*     ,S(6,6),GP(50),HL1(50),HL2(50),ESPE(50),R1(3),NC00(50)
      NBAND=12
      PI=3.14159265

C
C      MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
C
      DO 300 N=1,NSZF
      DO 300 M=1,NBAND
300  SK(N,M)=0.
      KK1=1
      DO 400 N=1,NE
      CALL AXRIG(N)
      DO 350 JJ=1,NCN
      NROWB=(NOP(N,JJ)-1)*NDF
      IF(NROWB)350,305,305
305  DO 350 J=1,NDF
      NROWB=NROWB+1
      I=(JJ-1)*NDF+J
      DO 330 KK=1,NCN
      NCOLB=(NOP(N,KK)-1)*NDF
      DO 320 K=1,NDF
      L=(KK-1)*NDF+K
      NCOL=NCOLB+K+1-NROWB
      IF(NCOL)320,320,310
310  SK(NROWB,NCOL)=SK(NROWB,NCOL)+S(I,L)
320  CONTINUE
330  CONTINUE
350  CONTINUE
400  CONTINUE

C
C      CONTRIBUICAO DOS ANEIS DE REFORCO

```

```

C
      IF(NEL)200,200,201
201  DO 900 NA=1,NEL
      NJ=NOEL(NA)
      I1=3*(NJ-1)+1
      I3=3*(NJ-1)+3
      S11=EA(NA)*AND(NA)*ANB(NA)/X(NJ)*2*PI
      S33=EA(NA)*AND(NA)**3*ANB(NA)*2*PI/(12.*X(NJ))
      SK(I1,1)=SK(I1,1)+S11
      SK(I3,1)=SK(I3,1)+S33
900  CONTINUE
200  CONTINUE

```

```

C
C      INTRODUCAO DOS DESLOCAMENTOS PRESCRITOS
C

```

```

IP=0.
DO 500 N=1,NB
NX=10***(NDF-1)
I=NBC(N)
NROW=(I-1)*NDF
DO 490 M=1,NDF
IP=IP+1
NROW=NROW+1
ICON=NFIX(N)/NX
IF(ICON)450,450,420
420 SK(NROW,1)=1.
AC(NROW)=DP(IP)
DO 430 J=2,NBAND
NR2=NROW-1+J
IF(NR2-NSZF)600,600,601
600 AC(NR2)=AC(NR2)-SK(NROW,J)*DP(IP)
SK(NROW,J)=0.
601 NR=NROW+1-J
IF(NR)430,430,425
425 AC(NR)=AC(NR)-SK(NR,J)*DP(IP)
SK(NR,J)=0.
430 CONTINUE
NFIX(N)=NFIX(N)-NX*ICON
450 NX=NX/10
490 CONTINUE
500 CONTINUE
RETURN
END

```

```

// DUP
*DELETE           FORME          1E36
*STORE      WS  UA  FORME          -1E36
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM

```

**SUBROUTINE AXRIG(N)**

ESTA SUBROTINA CALCULA AS MATRIZES DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS  
ESFERICO, CONICO, CILINDRICO E DE PLACA CIRCULAR

```

DIMENSION DB(6,6),B(6,6)
COMMON NP,NE,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,NB,MCARG,KK1
*,NEL,NOEL(10),AND(10),ANB(10),EA(10)
COMMON NOP(50,2),IMAT(50),NTIP(50),NBC(40),NFI(40),NPT(50)
COMMON SK(150,12),X(50),Y(50),AC(150),DP(120),ORT(10,2)
*,S(6,6),GP(50),HL1(50),HL2(50),ESPE(50),R1(3),NC00(50)
COMMON XE(2),YE(2),ZC(4),SC(4),SE(4),DS(4),Z(4),DZ(4),
*F(5),DO(6),E,H,XNI,H1,H2,G,XK2,SFI,CFI,SII,CII,
*SIS,CIS,I1,I2,I3 ,AML(6)
PI=3.14159265
J=NOP(N,1)
K=NOP(N,2)
XE(1)=X(J)
XE(2)=X(K)
YE(1)=0.
YE(2)=Y(K)-Y(J)
H=ESPE(N)
M=IMAT(N)
E=ORT(M,1)
XNI=ORT(M,2)
G=GP(N)
H1=HL1(N)
H2=HL2(N)
DO 55 L1=1,6
DO 55 L2=1,6
S(L1,L2)=0.
B(L1,L2)=0.
55 DB(L1,L2)=0.
DO 50 I=1,6
AML(I)=0.
50 DO(I)=0.
IF(XE(2))800,801,800
801 NSZF=NSZF-3
NNO=1
NCON=2
NP=NP-1
MM=3
GO TO 804
800 NNO=2
NCON=4
MM=6
804 IF(NTIP(N)-4)850,851,850
851 XR=XE(1)
NPO=2

```

C ELEMENTO DE PLACA CIRCULAR

C  
 CALL CIRKO(B,DB,XR,NPO)  
 GO TO 1000  
 850 IF(NTIP(N)-2)701,711,701  
 701 XL=SQRT(YE(2)\*\*2+(XE(1)-XE(2))\*\*2)  
 DO 21 IC=1,NNO  
 I1=3\*IC-2  
 I2=3\*IC-1  
 I3=3\*IC  
 K4=3-2\*IC  
 XA=XE(IC)  
 IF(NTIP(N)-3)740,741,740  
 740 CONTINUE

C ELEMENTO CILINDRICO

C  
 YY=(IC-1)\*XL  
 XK=SQRT(SQRT(3.\*(1-XNI\*\*2))/(XE(IC)\*H))  
 CALL INDIC(YY,XL,XK)  
 DO 31 JC=1,NCON  
 XD=E\*H\*\*3/(12\*(1-XNI\*\*2))  
 K1=1-2\*(JC/3)  
 IS=JC-(-1)\*\*JC  
 K2=K1\*(JC-IS)  
 B(I1,JC)=XK\*XA\*SC(JC)\*(-K2)  
 B(I2,JC)=XNI\*ZC(JC)  
 B(I3,JC)=2.\*XA\*XK\*\*2\*ZC(IS)\*(JC-IS)  
 DB(I1,JC)=2.\*PI\*E\*H\*ZC(JC)\*K4  
 DB(I3,JC)= PI\*E\*H\*SC(IS)/XK\*K1\*K4  
 31 CONTINUE  
 B(I1,5)=XNI  
 B(I2,5)=-YY/XE(IC)  
 B(I2,6)=1.  
 DB(I2,5)=2.\*PI\*E\*H\*K4  
 GO TO 21

C ELEMENTO CONICO

C  
 741 X2=XE(1)-XE(2)  
 TFI=ABS(YE(2)/X2)  
 CFI=ABS(X2/XL)  
 SFI=ABS(YE(2)/XL)  
 CK=ABS(X2)/X2  
 CK1=ABS(YE(2))/YE(2)  
 CK2=CK1\*(2\*IC-3)  
 CK3=CK\*(2\*IC-3)  
 C1=CK\*CK1  
 XK2=SQRT(12.\*(1.-XNI\*\*2)\*(TFI/H)\*\*2)  
 XI=XE(1)

```

IF(XI-XE(2))900,900,901
900 XI=XE(2)
901 CONTINUE
  XK=SQRT(XK2)
  Y1=XE(1C)/ABS(CFI)
  T=2.*XK*SQRT(Y1)
  TK=2.*XK*SQRT(XE(2)/ABS(CFI))
  CALL BSSEL(T,TK,XA)
  DO 24 I=1,NCON
  IP=I-(-1)**I
  B(I1,I)=CFI*(-0.5*T*DZ(I)+(1+XNI)*(Z(I)+(IP-I)*2./T*DZ(IP)))
  B(I2,I)=(B(I1,I)/TFI-(XNI*Z(I)+(IP-I)*2.*(1+XNI)/T*DZ(IP))/SFI)*C1
  B(I3,I)=-SQRT(12.*(1.-XNI**2))/H*((I-IP)*Z(IP)+2./T*DZ(I))*C1
  DB(I1,I)=(2.*PI*(Z(I)+(IP-I)*2./T*DZ(IP)))*E*H*CK3
  A1=(I-IP)*T*DZ(IP)
  A2=(IP-I)*2*(1-XNI)*Z(IP)
  A3=-4*(1-XNI)*DZ(I)/T
  DB(I3,I)=4.*PI*SFI/CFI*XA/T**2*(A1+A2+A3)*E*H*CK2
24 CONTINUE
  B(I1,5)=XNI/SFI
  B(I2,5)=(ALOG(XA/XI)+XNI*CFI**2)/(SFI**2*CFI)*C1
  B(I2,MM)=C1
  B(I3,5)=-CFI*C1/(XA*SFI**2)
  DB(I1,5)=2.*PI*E*H/TFI*CK3
  DB(I2,5)=-2.*PI*E*H*CK2
  DB(I3,5)=2.*PI*E*H**3*CFI/(12.*(1.+XNI)*Y1*SFI**2)*(-CK2)
  AML(I1)=AML(I1)*CK3
  AML(I2)=AML(I2)*CK2
21 CONTINUE
  GO TO 1000
C
C      ELEMENTO ESFERICO SOLUCAO EM SERIE HIPERGEOMETRICA
C      OU EM SERIE ASSINTOTICA
C
711 Y0=(XE(2)**2-XE(1)**2+YE(2)**2)/(2*YE(2))
  R=SQRT(XE(1)**2+Y0**2)
  SII=XE(1)/R
  SIS=XE(2)/R
  CIS=(YE(2)-Y0)/R
  CII=-Y0/R
  TANI=(1.-CII)/SII
  XK2=SQRT(12.*(1-XNI**2)*(R/H)**2-XNI**2)
  XK=SQRT(XK2)
  XK4=XK2**2
  DO 550 II=1,NN0
  I1=3*II-2
  I2=3*II-1
  I3=3*II
  SFI=XE(II)/R
  CFI=(YE(II)-Y0)/R

```

```

CALL HIPGE(R)
TAN=(1.-CFI)/SFI
BETA=-(1+XNI*SFI**2)
KL=-1
DO 444 LI=1,NCON
KL=-KL
IC=LI+KL
B(I1,LI)=SFI*(XNI*CFI*SE(LI)-DS(LI))
B(I2,LI)=BETA*SE(LI)-CFI*DS(LI)
B(I3,LI)=SFI*(XNI*SE(LI)+KL*XK2*SE(IC))/R
K1=2*II-3
P1=2.*PI*K1*E*H
DB(I1,LI)=P1*SFI*SE(LI)
DX=-(K1*E*H**3*2.*PI*SFI)/(12.*R*(1.-XNI**2))
DB(I3,LI)=DX*(XNI*DS(LI)+KL*DS(IC)*XK2+XNI*CFI*(XNI*SE(LI)+KL*SE(I
*C)*XK2))
444 CONTINUE
B(I1,5)=(1+XNI)/SFI
B(I2,5)=(1+XNI)*(ALOG(TAN/TANI)+CII/SII**2)
B(I2,MM)=1.
DB(I1,5)=P1*CFI/SFI
DB(I2,5)=-P1
550 CONTINUE
1000 CONTINUE
C
C      CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO
C      E DAS CARGAS NODAIS EQUIVALENTES
C
CALL INVMB (B,MM)
DO 30 JJ=1,MM
DO 30 KK=1,MM
DO 30 I=1,MM
30 S(JJ,KK)=S(JJ,KK)+DB(JJ,I)*B(I,KK)
      WRITE(10'KK1)B,DO
C
C      CARGAS NODAIS EQUIVALENTES
C
IF(H1+H2)300,301,300
301 IF(G)300,360,300
300 CONTINUE
      DO 20 I=1,MM
      DO 20 JC=1,MM
      AML(I)=AML(I)+S(I,JC)*DO(JC)
20 CONTINUE
      DO 40 L=1,NOF
      IC=(J-1)*NDF+L
      KC=(K-1)*NDF+L
      AC(IC)=AC(IC)+AML(L)
      AC(KC)=AC(KC)+AML(L+3)
40 CONTINUE

```

```

360 CONTINUE
  NCN=NNO
  RETURN
  END
// DUP
*DELETE          AXRIG      1E36
*STORE    WS  UA  AXRIG      1E36

```

```

*DELETE          INDIC      1E36
*STORE    WS  UA  INDIC      1E36

```

```
// FOR
```

```
*LIST SOURCE PROGRAM
```

```
*ONE WORD INTEGERS
```

```
*EXTENDED PRECISION
```

```
      SUBROUTINE INVMB(AM,M)
```

```
C
```

```
C      SUBROTINA DE INVERCAO
```

```
C
```

```
      DIMENSION IPI(6),IND(6,2),PIV(6),DIS(6,1),AM(6,6)
```

```
      NCOLN=0
```

```
      DET=1.0
```

```
      DO 20 J=1,M
```

```
20  IPI(J)=0
```

```
      DO 550 I=1,M
```

```
      AMAX=0.0
```

```
      DO 105 J=1,M
```

```
      IF(IPI(J)-1)60,105,60
```

```
60  DO 100 K=1,M
```

```
      IF(IPI(K)-1) 80,100,740
```

```
80  IF(ABS(AMAX)-ABS(AM(J,K)))85,100,100
```

```
85  IROW=J
```

```
      ICO=K
```

```
      AMAX=AM(J,K)
```

```
100 CONTINUE
```

```
105 CONTINUE
```

```
      IPI(ICO)=IPI(ICO)+1
```

```
      IF(IROW-ICO)140,260,140
```

```
140 DET=--DET
```

```
      DO 200 L=1,M
```

```
      SWAP=AM(IROW,L)
```

```
      AM(IROW,L)=AM(ICO,L)
```

```
200 AM(ICO,L)=SWAP
```

```
      IF(NCOLN) 260,260,210
```

```
210 DO 250 L=1,NCOLN
```

```
      SWAP=DIS(IROW,L)
```

```
      DIS(IROW,L)=DIS(ICO,L)
```

```

250 DIS(ICO,L)=SWAP
260 IND(I,1)=IROW
    PIV(I)=AM(ICO,ICO)
    IND(I,2)=ICO
    DET=DET*PIV(I)
    AM(ICO,ICO)=1.0
    DO 350 L=1,M
350 AM(ICO,L)=AM(ICO,L)/PIV(I)
    IF(NCOLN) 380,380,360
360 DO 370 L=1,NCOLN
370 DIS(ICO,L)=DIS(ICO,L)/PIV(I)
380 DO 550 LZ=1,M
    IF(LZ-ICO)400,550,400
400 T=AM(LX,ICO)
    AM(LZ,ICO)=0.0
    DO 450 L=1,M
450 AM(LZ,L)=AM(LZ,L)-AM(ICO,L)*T
    IF(NCOLN)550,550,460
460 DO 500 L=1,NCOLN
500 DIS(LZ,L)=DIS(LZ,L)-DIS(ICO,L)*T
550 CONTINUE
    DO 710 I=1,M
    L=M+1-I
    IF(IND(L,1)-IND(L,2))630,710,630
630 JROW=IND(L,1)
    JCO=IND(L,2)
    DO 705 K=1,M
    SWAP=AM(K,JROW)
    AM(K,JROW)=AM(K,JCO)
    AM(K,JCO)=SWAP
705 CONTINUE
710 CONTINUE
740 CONTINUE
    RETURN
    END
// DUP
*DELETE           INVMB           1E36
*STORE      WS  UA  INVMB           1E36

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
C
C      CALCULA A SOLUCAO DO CILINDRO
C
SUBROUTINE INDIC(YY,XL,XK)
COMMON NP,NE,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,NB,MCARG,KK1

```

```

*,NEL,NOEL(10),AND(10),ANB(10),EA(10)
COMMON NOP(50,2),IMAT(50),NTIP(50),NBC(40),NFIIX(40),NPT(50)
COMMON SK(150,12),X(50),Y(50),AC(150),DP(120),ORT(10,2)
*,S(6,6),GP(50),HL1(50),HL2(50),ESPE(50),R1(3),NCOO(50)
COMMON XE(2),YE(2),ZC(4),SC(4),SE(4),DS(4),Z(4),DZ(4),
*F(5),D1(6),E,H,XNI,H1,H2,G,XK2,SFI,CFI,SII,CII,
*SIS,CIS,I1,I2,I3 ,AML(6)
PI=3.14159265

```

C  
C    CALCULO DAS FUNCOES EXPONENCIAIS  
C    SOLUCAO DA CASCA CILINDRICA  
C

```

ESP=EXP(-XK*YY)
EP=EXP(-XK*(XL-YY))
ZC(1)=ESP*COS(XK*YY)
ZC(2)=ESP*SIN(XK*YY)
ZC(3)=EP*COS(XK*(XL-YY))
ZC(4)=EP*SIN(XK*(XL-YY))
SC(1)=ZC(1)+ZC(2)
SC(2)=ZC(1)-ZC(2)
SC(3)=ZC(3)+ZC(4)
SC(4)=ZC(3)-ZC(4)

```

C  
C    CALCULO DOS DESLOCAMENTOS E ESFORCOS  
C    EM REGIME DE MEMBRANA  
C

```

XA=XE(1)
D1(I1)=G*XA*(XL-YY)*XNI/(E*H) +
*XA**2*(H1-(H1-H2)/XL*YY)/(E*H)
D1(I2)=-G*YY*(2.*XL-YY)*XNI/(E*H)-
*XA*XNI*YY*(2*H1-(H1-H2)/XL*YY)/(2*E*H)
D1(I3)=(-G*XA*XNI-XA**2*(H1-H2)/XL)/(E*H)
F(2)=-G*(XL-YY)
F(4)=XA*(H1-(H1-H2)/XL*YY)
AML(2)=-G*XL*2.*PI*XA
RETURN
END
// DUP

```

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS

```

## \*EXTENDED PRECISION

```

C
C      ESTA SUBROTINA CALCULA AS FUNCOES DE BESEL, SOLUCOES
C      DA CASCA CONICA E OS ESFORCOS E DESLOCAMENTOS
C      EM REGIME DE MEMBRANA
C

SUBROUTINE BSSEL(T,TK,XA)
COMMON NP,NE,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,NB,MCARG,KK1
*,NEL,NOEL(10),AND(10),ANB(10),EA(10)
COMMON NOP(50,2),IMAT(50),NTIP(50),NBC(40),NFIIX(40),NPT(50)
COMMON SK(150,12),X(50),Y(50),AC(150),DP(120),ORT(10,2)
*,S(6,6),GP(50),HL1(50),HL2(50),ESPE(50),R1(3),NCOO(50)
COMMON XE(2),YE(2),ZC(4),SC(4),SE(4),DS(4),Z(4),DZ(4),
*F(5),D1(6),E,H,XNI,H1,H2,G,XK2,SFI,CFI,SII,CII,
*SIS,CIS,I1,I2,I3 ,AML(6)
C=0.577215665
PI=3.14159265
Y1=XA/ABS(CFI)
TFI=SFI/CFI
TJ=2.*SQRT(XK2*XE(1)/ABS(CFI))
TT=TJ
IF(TJ-TK)70,71,71
71 TT=TK
TK=TJ
70 IF(TK-10.)502,501,501
C
C      PARA T MENOR QUE 10
C
502 ALG=-(C+ALOG(T/2))
Z(1)=1.
Z(2)=0.
Z(3)=0.5
Z(4)=-2./PI*ALG
DZ(1)=0.
DZ(2)=0.
DZ(3)=0.
DZ(4)=2./(PI*T)
T2=(T/2.)**2
K1=1
T3=1.
S1=0.
DO 150 N=1,20
K1=-K1
N2=2*N
T3=T3*T2*((2.*N-1)*(2.*N))**2
S1=S1+1./(2.*N)+1./(2.*N-1)
N3=N2**2
S2=S1-1./N2
PX=K1*T3
Z(1)=Z(1)+PX

```

```

Z(2)=Z(2)+PX*N3/T2
Z(3)=Z(3)-2./PI*(-ALG*N3-S2*N3)*(PX/T2)+PX/2.
Z(4)=Z(4)+PX/2.*(N3/T2)-2./PI*(ALG*PX+S1*PX)
DZ(1)=DZ(1)+PX*4*N/T
DZ(2)=DZ(2)+PX*N3*(4*N-2)/(T2*T)
DZ(3)=DZ(3)-2./PI*(N3/(T2*T)*PX-ALG*N3*(4*N-2)/(T2*T)*PX-S2*N3*(4*N-2)/(T2*T)*PX)+2*PX*N/T
DZ(4)=DZ(4)+PX/2.*N3*(4.*N-2)/(T2*T)-2.*PX/(PI*T)*(-1.+4.*N*(ALG+S1))
*1)
150 CONTINUE
GO TO 1001
C
C      PARA T MAIOR QUE 10
C
501 T2=(T-TT)/SQRT(2.)
CO=1./SQRT(2.*PI*T)
T3=T/SQRT(2.)-PI/8.
T4=T/SQRT(2.)+PI/8.
EP1=EXP(T2)
EP2=1./EP1
Z(1)=CO*EP1*(COS(T3)+SIN(T4)/(8.*T))
Z(2)=-CO*EP1*(SIN(T3)-COS(T4)/(8.*T))
DZ(1)=CO*EP1*(COS(T4)-3.*COS(T3)/(8.*T))
DZ(2)=-CO*EP1*(SIN(T4)-3.*SIN(T3)/(8.*T))
Z(3)=2.*CO*EP2*(SIN(T4)-COS(T3)/(8.*T))
Z(4)=-2.*CO*EP2*(COS(T4)+SIN(T3)/(8.*T))
DZ(3)=-2.*CO*EP2*(SIN(T3)+3.*SIN(T4)/(8.*T))
DZ(4)=2.*CO*EP2*(COS(T3)+3.*COS(T4)/(8.*T))
1001 CONTINUE
C
C      DESLOCAMENTOS E ESFORCOS
C      EM REGIME DE MEMBRANA
C
CK=ABS(XE(1)-XE(2))/((XE(1)-XE(2)))
CK1=ABS(YE(2))/YE(2)
C1=CK*CK1
XI=XE(1)
XS=XE(2)
HI=H1
HS=H2
IF(XE(1)-XE(2))900,901,901
900 XI=XE(2)
XS=XE(1)
HI=H2
HS=H1
901 CONTINUE
ALH=ALOG(XI/XA)
YS=XS/CFI
YI=XI/CFI
EH=E*H

```

IF(H1+H2)700,701,700

C  
C PRESSAO HIDROSTATICA  
C

700 CONTINUE

GAMA=(H1-HS)/(Y1-YS)

P1=-GAMA/(3.\*TFI)

P2=(GAMA\*YS-HS)/(2.\*TFI)

P3=-(P2+P1\*YS)\*YS\*\*2.

F(2)=P1\*Y1\*\*2+P2\*Y1+1./Y1\*P3

F(4)=3.\*P1\*Y1\*\*2+2.\*P2\*Y1

P4=P1\*Y1\*\*3/3.+P2\*Y1\*\*2/2.-XNI\*(P1\*Y1\*\*3+P2\*Y1\*\*2)

P5=P1\*Y1\*\*3/3.+P2\*Y1\*\*2/2.-XNI\*(P1\*Y1\*\*3+P2\*Y1\*\*2)

D1(I1)=XA\*(F(4)-XNI\*F(2))/(E\*H)

D1(I2)=((P5-P4+ALH\*P3)/(EH\*SFI)+D1(I1)/TFI)\*C1

D1(I3)=(-8.\*P1\*Y1\*\*2-3.\*Y1\*P2+1./Y1\*P3)/(EH\*TFI)\*C1

AML(I1)= 2.\*PI\*XA\*F(2)\*CFI

AML(I2)=-2.\*PI\*XA\*F(2)\*SFI

701 IF(G)750,751,750

C  
C PESO PROPRIO  
C

750 PA=-G/(2.\*SFI)

PB=-PA\*YS\*\*2

PC=-G\*CFI\*\*2/SFI

PF2=PA\*Y1+1./Y1\*PB

PF4=PC\*Y1

DG1=Y1\*CFI\*(PF4-XNI\*PF2)/EH

F(2)=F(2)+PF2

F(4)=F(4)+PF4

D1(I1)=D1(I1)+DG1

D1(I2)=D1(I2)+(DG1\*CFI/SFI+((YI\*\*2-Y1\*\*2)/2.\*(PA-XNI\*PC)

\*+PB\*ALH)/(EH\*SFI))\*C1

D1(I3)=D1(I3)+((1.+2.\*XNI)\*PA\*Y1-PC\*Y1\*(2.+XNI)+1./Y1\*PB)

\*/(EH\*TFI)\*C1

AML(I1)=AML(I1)+2.\*PI\*XA\*PF2\*CFI

AML(I2)=AML(I2)-2.\*PI\*XA\*PF2\*SFI

751 CONTINUE

RETURN

END

// DUP

\*DELETE

BSSEL

1E36

\*STORE

WS UA BSSEL

1E36

```

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
C
C      CALCULA A SOLUCAO DA PLACA CIRCULAR
C
SUBROUTINE CIRKO(B,DB,XR,NPO)
DIMENSION B(6,6),DB(6,6)
COMMON NP,NE,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,NB,MCARG,KK1
*,NEL,NOEL(10),AND(10),ANB(10),EA(10)
COMMON NOP(50,2),IMAT(50),NTIP(50),NBC(40),NFIIX(40),NPT(50)
COMMON SK(150,12),X(50),Y(50),AC(150),DP(120),ORT(10,2)
*,S(6,6),GP(50),HL1(50),HL2(50),ESPE(50),R1(3),NC00(50)
COMMON XE(2),YE(2),ZC(4),SC(4),SE(4),DS(4),Z(4),DZ(4),
*F(5),D1(6),E,H,XNI,H1,H2,P,XK2,SFI,CFI,SII,CII,
*SIS,CIS,I1,I2,I3 ,AML(6)
PI=3.14159265
XD=E*H**3/(12.*{(1.-XNI)**2})
RP=XE(1)
RO=XR/RP
DN=1.-XNI
SN=1.+XNI
BETA=XE(2)/XE(1)
ALB=ALOG(BETA)
BT=BETA**2/(1.-BETA**2)
C1=3.+XNI+4.*SN*BT*ALB
C2=3.+XNI-4.*SN*BT*ALB
BC=3.+XNI-BETA**2*C2
PK=P*RP**3/(16.*XD)
IF(XE(2))21,20,21
C
C      PLACA COM FURO
C
21 DO 30 J=1,NPO
I1=3*j-2
I2=3*j-1
I3=3*j
ALR=ALOG(RO)
B(I1,5)=-SN/RO
B(I1,6)=DN*RO
B(I2,1)=ALR
B(I2,2)=RO**2
B(I2,3)=RO**2*ALR
B(I2,4)=1.
B(I3,1)=-1./(RO*RP)
B(I3,2)=-2.*RO/RO
B(I3,3)=-(1.+2.*ALR)/RP*RO

```

KP=3-2\*J  
 NCN=2  
 IF(NPO-1)40,41,40

C  
 C FORCAS NODAIS  
 C

40 DB(11,5)= 2.\*PI\*E\*H/RO\*KP  
 DB(11,6)= 2.\*PI\*E\*H\*RO\*KP  
 DB(12,3)=-8.\*PI\*XD/(RP\*\*2)\*KP  
 DB(13,1)=2.\*PI\*XD\*DN/(RP\*RO)\*KP  
 DB(13,2)=-4.\*PI\*XD\*SN\*RO/RP\*KP  
 DB(13,3)=-2.\*PI\*XD/RP\*RO\*(3.+XNI+2.\*(1.+XNI)\*ALR)\*KP  
 GO TO 50

C  
 C ESFORCOS UNITARIOS  
 C

41 DB(11,3)=4.\*XD/(RO\*RP\*\*3)  
 DB(2,5)=E\*H/(RO\*\*2\*RP)  
 DB(2,6)=E\*H/RP  
 DB(3,1)=-DN\*XD/(RP\*RO)\*\*2  
 DB(3,2)=2.\*SN\*XD/RP\*\*2  
 DB(3,3)=XD\*(3.+XNI+2.\*(1.+XNI)\*ALR)/RP\*\*2  
 DB(4,5)=-DB(2,5)  
 DB(4,6)=DB(2,6)  
 DB(5,1)=-DB(3,1)  
 DB(5,2)=DB(3,2)  
 DB(5,3)=XD\*(1.+3.\*XNI+2.\*(1.+XNI)\*ALR)/RP\*\*2

50 CONTINUE

C  
 C SOLUCAO PARTICULAR  
 C

CR=C1/DN+2.\*RO\*\*2  
 D1(12)=-PK\*RP/4.\*((2./SN\*BC\*(1.-RO\*\*2)-1.+RO\*\*4  
 \*-4.\*BETA\*\*2\*ALR\*CR)  
 D1(13)=-PK\*((1./SN\*BC-RO\*\*2+BETA\*\*2\*(CR/RO\*\*2+4.\*ALR))\*RO  
 F(1)=-P\*RP/2.\*((RO-BETA\*\*2/RO)  
 F(3)=P\*RP\*\*2/16.\*((3.+XNI)\*(1.-RO\*\*2)-BETA\*\*2  
 \*\*C1\*(1./RO\*\*2-1.))+4.\*((1.+XNI)\*BETA\*\*2\*ALR)  
 F(5)=P\*RP\*\*2/16\*((1.+3.\*XNI)\*(1.-RO\*\*2)+BETA\*\*2\*C1\*(1./RO\*  
 \*\*2-1.))  
 \*\*4.\*((1.+XNI)\*BETA\*\*2\*ALR+2.\*((1.-XNI)-2.\*BETA\*\*2\*(2.\*((1.-XN  
 \*I))-C1)))  
 AML(12)=2.\*PI\*RP\*RO\*F(1)

RO=XE(2)/RP

30 CONTINUE

GO TO 200.

C  
 C PLACA SEM FURO  
 C

20 B(1,2)=DN\*RO

```

B(2,1)=R0**2
B(2,3)=1.
B(3,1)=-2.*R0/RP
IF(NPO-1)60,61,60
C
C   FORCAS NODAIS
C
60 DB(1,2)=2.*PI*R0*E*H
DB(3,1)=-4.*PI*XD*R0*SN/RP
GO TO 100
C
C   ESFORCOS UNITARIOS
C
61 DB(2,2)=E*H/RP
DB(3,1)=2.*XD*SN/RP**2
DB(4,2)=DB(2,2)
DB(5,1)=DB(3,1)
C
C   SOLUCAO PARTICULAR
C
100 CONTINUE
D1(2)=-PK*RP/4.*((1.-R0**2)*((5.+XNI)/SN-R0**2))
D1(3)=-PK*R0*((3.+XNI)/SN-R0**2)
F(1)=-P*RP*R0/2.
F(3)=P*RP**2/16.*((3.+XNI)*(1.-R0**2))
F(5)=P*RP**2/16.*((3.+XNI)-(1.+3.*XNI)*R0**2)
AML(2)=2.*RP*PI*F(1)
NCN=1
200 CONTINUE
RETURN
END
// DUP
*DELETE          CIRKO      1E36
*STORE          WS  UA  CIRKO      1E36

```

```

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
C
C   CALCULA A SOLUCAO DA CASCA ESFERICA
C
SUBROUTINE HIPGE(R)

```

```

COMMON NP,NE,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,NB,MCARG,KK1
*,NEL,NOEL(10),AND(10),ANB(10),EA(10)
COMMON NOP(50,2),IMAT(50),NTIP(50),NBC(40),NFIIX(40),NPT(50)
COMMON SK(150,12),X(50),Y(50),AC(150),DP(120),ORT(10,2)
*,SS(6,6),GP(50),HL1(50),HL2(50),ESPE(50),R1(3),NCOO(50)
COMMON XE(2),YE(2),ZC(4),SC(4), T(4),DS(4),Z(4),DZ(4),
*F(5),D7(6),E,H,XNI,H1,H2,G,XKX,SFI,CFI,SII,CII,
*SIS,CIS,I1,I2,I3 ,AML(6)
PI=3.14159265
TANI=(1-CII)/SII
TAN=(1-CFI)/SFI
IF(SII-0.5)90,90,97
97 IF(SII-0.86)98,91,91
98 IF(XKX*SII-200)90,90,91
C
C      SOLUCAO EM SERIE HIPERGEOMETRICA
C
90 XK2=XKX
XK=SQRT(XK2)
XK4=XK2**2
A1=1.
B1=0.
SF2=SFI**2
ALX=ALOG(SF2)
T(1)=1.
T(2)=0.
T(3)=-4./(1.+XK4)/SF2+1.
T(4)=4*XK2/(1.+XK4)/SF2
PS3=4./(1.+XK4)/SF2+1.
PS4=-4.*XK2/(1.+XK4)/SF2
PS1=T(1)
PS2=T(2)
SOM1=0.
SOM2=0.
S=2.
DO 20 N=3,200
S=S+1.
CA=4.*S**2-18.*S+19
DA=4.*S**2-12.*S+8
A2=A1
A1=(A1*CA+B1*XK2)/DA*SF2
B1=(-A2*XK2+B1*CA)/DA*SF2
V=N-3
BC=4.*V**2+6.*V+1.
DC=BC**2+XK4
SOM1=SOM1+(6.+8.*V)*BC/DC-2./(2.+V)
SOM2=SOM2+(6.+8.*V)*XK2/DC
CO=1./(N-1)
C1=A1*(CO+SOM1)-B1*SOM2
D1=B1*(CO+SOM1)+A1*SOM2

```

```

T(1)=T(1)+A1
T(2)=T(2)+B1
T(3)=T(3)+C1
T(4)=T(4)+D1
PS1=PS1+(2*N-3)*A1
PS2=PS2+(2*N-3)*B1
PS3=PS3+(2*N-3)*C1
PS4=PS4+(2*N-3)*D1
IF(ABS(A1)-0.0000001)21,20,20
20 CONTINUE
21 CONTINUE
T(3)=ALX*T(1)+T(3)
T(4)=ALX*T(2)+T(4)
DS(1)=PS1*CFI
DS(2)=PS2*CFI
DS(3)=CFI*(ALX*PS1+2.*T(1)+PS3)
DS(4)=CFI*(ALX*PS2+2.*T(2)+PS4)
GO TO 94

```

C  
C SOLUCAO EM SERIE ASSINTOTICA  
C

```

91 XK2=XXX/2.
XK=SQRT(XK2)
XK3=XK*XK2
XK4=XK2**2
FI=ATAN(SFI/CFI)
PSI=PI/2.-FI
FII=ATAN(SII/CII)
FIS=ATAN(SIS/CIS)
W1=FII-FI
W2=FI-FIS
TG=CFI/SFI
TG2=TG**2
TG3=TG**3
TG4=TG2**2
TG5=TG2*TG3
PSQ=PSI**2
PS3=PSI**3
PS4=PSI**4
T0=1.
T1=(5*PSI-3*TG)/8.
T2=5.*(5*PSQ-6*PSI*TG-3*TG2)/128.
T3=5*(120.*PSI+25.*PS3-216.*TG-45.*PSQ*TG-45.*PSI*TG2
*63.*TG3)/3072.
T4=5*(12400.*PSQ+125.*PS4-5760.*PSI*TG-300.*PS3*TG-6624.*TG2
*450.*PSQ*TG2-1260.*PSI*TG3-2835.*TG4)/98304.
D1=-(2.-3.*TG2)/8.
D2=-5.*(2.*PSI-6.*TG-3.*TG2-3.*TG3)/64.
D3=5.*(32-10.*PSQ+60.*PSI*TG+150.*TG2+15.*PSQ*TG2+
*30.*PSI*TG3+63.*TG4)/1024.

```

```

D4=5.* (240.*PSI-50.*PS3+4752.*TG+450.*PSQ*TG+2610.*PSI*TG2+
*75.*PS3*TG2+6462.*TG3+225.*PSQ*TG3+945.*PSI*TG4+2835.*TG5)/24576.
Y1=1.+T1/(2.*XK)-T3/(4.*XK3)-T4/(4.*XK4)
Y2=T1/(2.*XK)+T2/(2.*XK2)+T3/(4.*XK3)
Y3=1.-T1/(2.*XK)+T3/(4.*XK3)-T4/(4.*XK4)
Y4=-T1/(2.*XK)+T2/(2.*XK2)-T3/(4.*XK3)
DY1=D1/(2.*XK)-D3/(4.*XK3)-D4/(4.*XK4)
DY2=D1/(2.*XK)+D2/(2.*XK2)+D3/(4.*XK3)
DY3=-D1/(2.*XK)+D3/(4.*XK3)-D4/(4.*XK4)
DY4=-D1/(2.*XK)+D2/(2.*XK2)-D3/(4.*XK3)
SQI=SQRT(SFI)
SQ=SQI*SFI
EP1=EXP(-XK*W1)
EP2=EXP(-XK*W2)
CO1=COS(XK*W1)
CO2=COS(XK*W2)
SI1=SIN(XK*W1)
SI2=SIN(XK*W2)
T(1)=EP1*(Y1*CO1-Y2*SI1)/SQ
T(2)=EP1*(Y2*CO1+Y1*SI1)/SQ
T(3)=EP2*(Y3*CO2-Y4*SI2)/SQ
T(4)=EP2*(Y4*CO2+Y3*SI2)/SQ
V1=Y1*TG/2.-(DY1+XK*(Y1+Y2))
V2=Y2*TG/2.-(DY2+XK*(Y2-Y1))
V3=Y3*TG/2.-(DY3-XK*(Y3+Y4))
V4=Y4*TG/2.-(DY4-XK*(Y4-Y3))
DS(1)=-EP1*(V1*CO1-V2*SI1)/SQI
DS(2)=-EP1*(V2*CO1+V1*SI1)/SQI
DS(3)=-EP2*(V3*CO2-V4*SI2)/SQI
DS(4)=-EP2*(V4*CO2+V3*SI2)/SQI

```

94 CONTINUE

C  
C  
C  
C

CALCULO DOS DESLOCAMENTOS E ESFORCOS  
EM REGIME DE MEMBRANA

```

G1=-R*G*CIS
G2=R*G
GAMA=(H1-H2)/(R*(CIS-CII))
H3=GAMA*R*CIS+H2
A1=-H3*R/2.
A2=H3*R/2.*SIS**2+GAMA*R**2/3.*CIS**3
A3=-GAMA*R**2/3.
IF(XE(2))971,972,971
972 GI=ALOG(1.+CII)
GF=ALOG(1.+CFI)
CI=1./(1.+CII)
CF=1./(1.+CFI)
F(2)=-G2*CF+A1-A3*(CFI+CF)
CO=R*(1.+XNI)*(GI*(G2+A3)+CI*(G2+A3*CII))/(E*H)
OC=-R*(1.+XNI)*(GF*(G2+A3)+CF*(G2+A3*CFI))/(E*H)

```

GO TO 279

```

971 F(2)=(G1+G2*CFI+A2+A3*CFI**3)/SFI**2+A1
    GI=ALOG(TANI)
    GF=ALOG(TAN)
    AI=ALOG(SII)
    AF=ALOG(SFI)
    CO=R*(1.+XNI)*((G1+A2)*(GI-CII/SII**2)+G2*(AI-1./SII**2)
    *+A3*(AI-(CII/SII)**2))/(E*H)
    OC=-R*(1.+XNI)*((G1+A2)*(GF-CFI/SFI**2)+G2*(AF-1./SFI**2)
    *+A3*(AF-(CFI/SFI)**2))/(E*H)

```

279 CONTINUE

```

    F(4)=-F(2)+2.*A1-3.*A3*CFI-G2*CFI
    D7(I1)=R*SFI*(F(4)-XNI*F(2))/(E*H)
    D7(I2)=CO+OC+R*(F(4)-XNI*F(2))*CFI/(E*H)
    D7(I3)=(-G2*(2.+XNI)+GAMA*R**2)*SFI/(E*H)
    AML(I1)=-2.*PI*R*F(2)*CFI*SFI/3.*(4-I1)
    AML(I2)=2.*PI*R*F(2)*SFI*SFI/3.*(4-I1)

```

RETURN

END

// DUP

\*DELETE

HIPGE

1E36

\*STORE

WS UA HIPGE

1E36

// FOR

// FOR

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

\*EXTENDED PRECISION

SUBROUTINE RESIS

C

RESOLVE O SISTEMA POR GAUSS

C

```

COMMON NP,NE,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,NB,MCARG,KK1
*,NEL,NOEL(10),AND(10),ANB(10),EA(10)
COMMON NOP(50,2),IMAT(50),NTIP(50),NBC(40),NFIIX(40),NPT(50)
COMMON SK(150,12),X(50),Y(50),AC(150),DP(120),ORT(10,2)
*,S(6,6),GP(50),HL1(50),HL2(50),ESPE(50),R1(3),NCOO(50)
NBAND=12

```

C

ELIMINACAO

C

```

DO 300 N=1,NSZF
I=N
DO 290 L=2,NBAND
I=I+1
IF(SK(N,L))240,290,240
240 C=SK(N,L)/SK(N,1)
J=0
DO 270 K=L,NBAND
J=J+1
IF(SK(N,K))260,270,260
260 SK(I,J)=SK(I,J)-C*SK(N,K)
270 CONTINUE
SK(N,L)=C
AC(I)=AC(I)-C*AC(N)
290 CONTINUE
300 AC(N)=AC(N)/SK(N,1)

```

C

RETROSUBSTITUICAO

C

```

N=NSZF
350 N=N-1
IF(N)500,500,360
360 L=N
DO 400 K=2,NBAND
L=L+1
IF(SK(N,K))370,400,370
370 AC(N)=AC(N)-SK(N,K)*AC(L)
400 CONTINUE
GO TO 350
500 CONTINUE
RETURN
END

```

// DUP

*DELETE	RESIS	1E36
*STORE	WS UA	RESIS
		1E36

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*EXTENDED PRECISION

\*LIST SOURCE PROGRAM

## SUBROUTINE AXTEC

## CALCULA OS ESFORÇOS UNITARIOS

```

DIMENSION DB(6,6),BB(6),DD(6,6),DN(6),B(6,6),DM(6)
DIMENSION FOR(200,5),YP(200),SW(1800),XP(200)
COMMON NP,NE,NDF,NCN,NLD,NMAT,NSZF,NB,MCARG,KK1
*,NEL,NOEL(10),AND(10),ANB(10),EA(10)
COMMON NOP(50,2),IMAT(50),NTIP(50),NBC(40),NFIIX(40),NPT(50)
COMMON SK(150,12),X(50),Y(50), D(150),DP(120),ORT(10,2)
*,S(6,6),GP(50),HL1(50),HL2(50),ESPE(50),R1(3),NCO0(50)
COMMON XE(2),YE(2),ZC(4),SC(4),SE(4),DS(4),Z(4),DZ(4),
*F(5),D1(6),E,H,XNI,H1,H2,G,XK2,SFI,CFI,SII,CII,
*SIS,CIS,I1,I2,I3 ,AML(6)
EQUIVALENCE(SW(1),SK(1))
EQUIVALENCE(YP(1),SW(1)),(FOR(1),SW(201)),(XP(1),SW(1201))
PI=3.14159265

```

## IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS

```

      WRITE(5,10)
10  FORMAT(1H1,//40X*DESLOCAMENTOS NODAIS*//,
     *19X*NO*18X*D1*18X*D2*18X*D3*)
      DO 66 I=1,NP
      I1=3*(I-1)+1
      I2=3*(I-1)+2
      I3=3*(I-1)+3
      WRITE(5,70)I,D(I1),D(I2),D(I3)
70  FORMAT(16X,I5,3E20.7)
66  CONTINUE
      KK1=1
      I1=1
      I2=2
      I3=3
      JP=0

```

## CALCULO DOS ESFORCOS NOS ELEMENTOS

```

DO 40 I=1,NE
G=GP(I)
H1=HL1(I)
H2=HL2(I)
JJ=NOP(I,1)
KK=NOP(I,2)
LL=NPT(I)
YE(1)=0.
YE(2)=Y(KK)-Y(JJ)
XE(1)=X(JJ)
XE(2)=X(KK)
H=FSPE(I)

```

```

M=IMAT(I)
E=ORT(M,1)
XNI=ORT(M,2)
IF(XE(2))20,21,20
21 NCON=2
NGL=3
GO TO 23
20 NCON=4
NGL=6
23 CONTINUE
C
C      LEITURA DA MATRIZ B E DOS DESLOCAMENTOS DE MEMBRANA  DM
C
C      READ(10*KK1)B,DM
C
C      DESLOCAMENTOS NODAIS DO ELEMENTO  DN
C
DO 33 J=1,3
J1=3*(JJ-1)+J
K1=3*(KK-1)+J
DN(J1)=D(J1)
33 DN(J+3)=D(K1)
DO 50 IJ=1,LL
JP=JP+1
DO 101 J=1,6
DO 101 L=1,5
F(L)=0.
101 DB(L,J)=0.
DO 67 J=1,3
DO 67 L=1,6
67 DD(J,L)=0.
IF(NTIP(I)-2) 700,701,700
700 CONTINUE
XL=SQRT(YE(2)**2+(XE(1)-XE(2))**2)
DY=XL/(LL-1)
XA=XE(1)+(XE(2)-XE(1))*(IJ-1)/(LL-1)
IF(NTIP(I)-4)850,851,850
C
C      PLACA CIRCULAR
C
851 NPO=1
CALL CIRKO(DD,DB,XA,NPO)
YY=Y(JJ)
GO TO 22
850 XD=E**3/(12*(1-XNI**2))
IF(NTIP(I)-3) 750,751,750
750 CONTINUE
C
C      CASCA CILINDRICA
C

```

```

XK=SQRT(SQRT(3.*(1-XNI**2))/(XA*H))
YY=(IJ-1)*DY
CALL INDIC(YY,XL,XK)
CO=12.*(1-XNI**2)/(H**2*XA)
DO 777 IT=1,NCON
KS=1-2*(IT/3)
IS=IT-(-1)**IT
KT=KS*(IT-IS)
DB(1,IT)=E*H/XA*ZC(IT)
DB(3,IT)=-E*H*SC(IS)/(2.*XA*XK)*KS
DB(4,IT)=E*H*XK*SC(IT)*(-KT)
DB(5,IT)=XNI*DB(3,IT)
777 CONTINUE
DB(2,5)=-E*H/XA
YY=Y(JJ)+YY
GO TO 22
C
C      CASCA CONICA
C
751 CONTINUE
X2=XE(1)-XE(2)
SFI=ABS(YE(2)/XL)
CFI=ABS(X2/XL)
TFI=SFI/CFI
Y1=XA/CFI
CK=ABS(X2)/X2
CK1=ABS(YE(2))/YE(2)
XK2=SQRT(12.*(1.-XNI**2)*(TFI/H)**2)
XK=SQRT(XK2)
T=2*XK*SQRT(Y1)
TK=2.*XK*SQRT(XE(2)/ABS(CFI))
CALL BSSEL(T,TK,XA)
DO 24 J=1,NCON
IC=J-(-1)**J
DB(1,J)=E*H*SFI/CFI/Y1*(Z(J)+(IC-J)*2./T*DZ(IC))
DB(2,J)=-DB(1,J)*CFI/SFI
A1=(J-IC)*T*DZ(IC)
A2=(IC-J)*2*(1-XNI)*Z(IC)
A3=-4*(1-XNI)*DZ(J)/T
DB(3,J)=+2*TFI*E*H/T**2*(A1+A2+A3)
DB(4,J)=-2*XK2*E*H/T**2*(T*DZ(J)-2*Z(J)+(J-IC)*4./T*DZ(IC))
DB(5,J)=+2*TFI*E*H/T**2*(XNI*A1-A2-A3)
24 CONTINUE
DB(2,5)=-E*H/(XA*SFI)
DB(3,5)=-E*H**3*CFI/(12.*(1.+XNI)*XA*Y1*SFI**2)
DB(5,5)=-DB(3,5)
YY=Y(JJ)+(XE(1)-XA)*YE(2)/X2
GO TO 22
C
C      CASCA ESFERICA

```

C

```

701 CONTINUE
  Y0=(XE(2)**2-XE(1)**2+YE(2)**2)/(2*YE(2))
  R=SQRT(XE(1)**2+Y0**2)
  SII=XE(1)/R
  CII=-Y0/R
  SIS=XE(2)/R
  CIS=(YE(2)-Y0)/R
  TANI=(1.-CII)/SII
  FII =ATAN(SII/CII)+(1.-ABS(CII)/CII)*PI/2.
  FIS=ATAN(SIS/CIS)+(1.-ABS(CIS)/CIS)*PI/2.
  DFI=(FII-FIS)/(LL-1)
  FI=FII-(IJ-1)*DFI
  XK2=SQRT(12.*(1-XNI**2)*(R/H)**2-XNI**2)
  XK=SQRT(XK2)
  XK4=XK2**2
  SFI=SIN(FI)
  CFI=COS(FI)
  YY=R*CFI+Y0 +Y(JJ)
  XA=R*SFI
  CALL HIPGE(R)
  TAN=(1-CFI)/SFI
  BETA=-(1+XNI*SFI**2)
  KL=-1
  DO 444 LI=1,NCON
  KL=-KL
  IC=LI+KL
  DB(1,LI)=E*H/R*SFI*SE(LI)
  DB(2,LI)=-E*H/R*CFI*SE(LI)
  DX=E*H**3/R**2/(12.*(1-XNI**2))
  DB(3,LI)=-DX*(XNI*DS(LI)+XK2*DS(IC)*KL+XNI*CFI*(XNI*SE(LI)+KL*
  *XK2*SE(IC)))
  DB(4,LI)=-E*H/R*DS(LI)
  DB(5,LI)=-DX*(XNI*(CFI*SE(LI)+XNI*DS(LI))+KL*XK2*
  *(CFI*SE(IC)+XNI*DS(IC)))
444 CONTINUE
  DB(2,5)=-E*H/(R*SFI**2)
  DB(4,5)=-DB(2,5)
22 DO 88 K=1,NGL
  BB(K)=0.
  DO 88 N=1,NGL
  BB(K)=BB(K)+B(K,N)*(DN(N)-DM(N))
88 CONTINUE
C
C      CALCULO DOS ESFORCOS UNITARIOS EM CADA ELEMENTO
C
  DO 202 J=1,5
  FOR(JP,J)=F(J)
  DO 202 K=1,NGL
  FOR(JP,J)=FOR(JP,J)+DB(J,K)*BB(K)

```

```

202 CONTINUE
  XP(JP)=XA
  YP(JP)=YY
50 CONTINUE
40 CONTINUE
  WRITE(5,648)
648 FORMAT(//40X'ESFORCOS UNITARIOS FINAIS'/
*,8X'ELEM.'10X'X'10X'Y'12X'QFI'12X'NFI'12X'MFI'10X'NTETA'/
*10X'MTETA')
  JP=0
  DO 681 I=1,NE
    LL=NPT(I)
    DO 681 N=1,LL
      JP=JP+1
681 WRITE(5,618)I,XP(JP),YP(JP),(FOR(JP,J),J=1,5)
618 FORMAT(10X,I3,2F11.2,5E15.6)
  IF(NEL)500,500,501
501 WRITE(5,550)
550 FORMAT(//,20X,'ESFORCOS ATUANTES NOS ANEIS DE REFORCO'//
*20X'NO'5X'ESFORCO NORMAL'5X'MOMENTO UNITARIO')
  DO 510 NA=1,NEL
    NJ=NOEL(NA)
    I1=3*(NJ-1)+1
    I3=3*(NJ-1)+3
    FN=EA(NA)*ANB(NA)*AND(NA)*D(I1)/X(NJ)
    FM=EA(NA)*ANB(NA)*AND(NA)**3*D(I3)/(12.*X(NJ)**2)
    WRITE(5,520)NOEL(NA),FN,FM
520 FORMAT(20X,I2,5X,E14.7,7X,E14.7)
510 CONTINUE
500 CONTINUE
  RETURN
END
// DUP
*DELETE

```