



# FILTRO RIEMANNIANO ADAPTATIVO BASEADO EM CENTROS DE MASSAS: UMA APLICAÇÃO À DIFUSÃO TENSORIAL DE IMAGENS POR RESSONÂNCIA MAGNÉTICA

Charlan Dellon da Silva Alves

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Luidi Gelabert Simonetti

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2020

FILTRO RIEMANNIANO ADAPTATIVO BASEADO EM CENTROS DE  
MASSAS: UMA APLICAÇÃO À DIFUSÃO TENSORIAL DE IMAGENS POR  
RESSONÂNCIA MAGNÉTICA

Charlan Dellon da Silva Alves

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO  
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Orientador: Luidi Gelabert Simonetti

Aprovada por: Prof. Luidi Gelabert Simonetti

Prof. Nelson Maculan Filho

Prof. Adilson Elias Xavier

Prof. Ronaldo Malheiros Gregório

Prof. Orizon Pereira Ferreira

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
DEZEMBRO DE 2020

Alves, Charlan Dellon da Silva

Filtro riemanniano adaptativo baseado em centros de massas: uma aplicação à difusão tensorial de imagens por Ressonância Magnética/Charlan Dellon da Silva Alves. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2020.

XII, 67 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Luidi Gelabert Simonetti

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2020.

Referências Bibliográficas: p. 62 – 67.

1. Filtro Riemanniano Adaptativo. 2. Mediana Riemanniana Ponderada. 3. DTI-RM. 4. Média Riemanniana Ponderada. 5. Centro de Massa Riemanniano. 6. Processamento de imagens. I. Simonetti, Luidi Gelabert. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Dedico esta Tese aos meus pais,  
meus maiores e melhores  
orientadores na vida. À minha  
esposa, às minhas filhas Luna e  
Laís e a toda a minha família  
que, com muito carinho e apoio,  
não mediram esforços para que  
eu chegasse até esta etapa de  
minha vida.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder forças para prosseguir nesta jornada. À minha família por estar sempre ao meu lado, principalmente nos momentos difíceis. Agradeço aos professores Paulo e Ronaldo pela oportunidade de poder trabalhar nesta área de pesquisa, visto que este trabalho foi um desdobramento do projeto “Algoritmo de ponto proximal com decomposições de Schur em domínios de positividade” APQ1-FAPERJ (2012-2013), coordenado pelos Professores Ronaldo e Paulo. Gostaria de agradecer à FAPERJ por nos conceder a licença Matlab e a Workstation para a realização dos testes computacionais. Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro e todos aqueles que contribuíram de forma significativa para o desenvolvimento deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

FILTRO RIEMANNIANO ADAPTATIVO BASEADO EM CENTROS DE  
MASSAS: UMA APLICAÇÃO À DIFUSÃO TENSORIAL DE IMAGENS POR  
RESSONÂNCIA MAGNÉTICA

Charlan Dellon da Silva Alves

Dezembro/2020

Orientador: Luidi Gelabert Simonetti

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Esta tese apresenta um método de preservação de bordas e filtragem de tensores para uma imagem de difusão tensorial por ressonância magnética (DTI-RM). A ideia principal consiste em usar os centros de massa riemannianos, denominado por  $L^\alpha$ , juntamente com às informações das bordas estimadas no domínio do tensor de difusão, permitindo que as bordas da imagem não sejam suavizadas no processo de filtragem. Para  $\alpha \in [1, 2]$ , o método abrange tanto o caso padrão do filtro de média riemanniana ponderada ( $\alpha = 2$ ) quanto o filtro de mediana riemanniana ponderada ( $\alpha = 1$ ) em apenas um filtro. Com o objetivo de estabelecer os fundamentos para a boa postura do filtro proposto, denominado Filtro Riemanniano Adaptativo (FRA), nos suportamos em um resultado teórico previamente declarado na literatura sobre a continuidade dos centros de massa Riemannianos  $L^\alpha$ , em relação ao parâmetro  $\alpha$  e aos pontos nas vizinhanças do tensor filtrado.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ADAPTIVE RIEMANNIAN FILTER BASED ON CENTERS OF MASS: AN  
APPLICATION TO DIFFUSION TENSOR BY MAGNETIC RESONANCE  
IMAGE

Charlan Dellon da Silva Alves

December/2020

Advisor: Luidi Gelabert Simonetti

Department: Systems Engineering and Computer Science

This thesis presents an edge preserving and tensor filtering method for diffusion tensor image. The main idea consists in using the  $L^\alpha$  Riemannian centers of mass attached to the edge information estimated in the domain of the diffusion tensor so that the image edges not been smoothed in the filtering process. For  $\alpha \in [1, 2]$ , the method encompasses both the standard case of the Riemannian weighted mean filter ( $\alpha = 2$ ) and the Riemannian weighted median filter ( $\alpha = 1$ ) in only one filter. Aiming to establish the fundamentals for the well-posedness of the proposed filter, called adaptive Riemannian filter (ARF), we claimed a theoretical result previously stated in the literature on the continuity of the  $L^\alpha$  Riemannian centers of mass, with respect to the parameter  $\alpha$  and the points in the neighborhood of the filtered tensor.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Características e objetivos gerais . . . . .	1
1.2 Trabalhos Relacionados . . . . .	4
<b>2 Variedades riemannianas: um resumo dos conceitos básicos</b>	<b>7</b>
2.1 Variedades diferenciáveis . . . . .	7
2.1.1 Métrica riemanniana . . . . .	7
2.1.2 Conexão riemanniana . . . . .	8
2.1.3 Geodésica e Aplicação exponencial . . . . .	9
2.1.4 Curvatura e Campo de Jacobi . . . . .	10
2.1.5 Variedades de Hadamard . . . . .	11
<b>3 Otimização em variedades Riemannianas</b>	<b>13</b>
3.1 Convexidade . . . . .	13
3.1.1 Propriedades das funções convexas . . . . .	15
3.1.2 Derivadas direcionais e sub gradientes . . . . .	16
3.2 Algoritmos de descida em variedade riemanniana . . . . .	18
<b>4 Centro de massa riemanniano <math>L^\alpha</math></b>	<b>22</b>
4.1 Definição e principais propriedades dos centros de massas riemannianos $L^\alpha$ . . . . .	22
4.2 A continuidade dos centros de massa riemanniano $L^\alpha$ em $\alpha$ , $x_i$ 's e $\omega_i$ 's	24
<b>5 Representação Riemanniana de tensores de difusão</b>	<b>27</b>
5.1 Conceitos de Análise matricial . . . . .	27
5.1.1 Tipos de médias . . . . .	28
5.1.2 Médias no cone das matrizes simétricas positivas definidas . .	29



5.2	Métodos numéricos para cômputo de centros de massa riemannianos em $\mathcal{P}(n)$ . . . . .	30
5.2.1	Calculando o fluxo do gradiente em $\Lambda_{j+1}$ . . . . .	32
5.2.2	Calculando o fluxo do gradiente em $Q_{j+1}$ . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Aplicações em DTI-RM</b>	<b>36</b>
6.1	Modelo matemático de Imagem . . . . .	36
6.1.1	Representação espacial da imagem . . . . .	37
6.2	Detecção de bordas em imagens . . . . .	37
6.2.1	Detecção de borda baseado em derivadas de primeira ordem . . . . .	38
6.2.2	Operador de detecção de bordas . . . . .	39
6.3	Princípio da formação de imagem por DTI-RM . . . . .	40
6.3.1	Cálculo do tensor de difusão . . . . .	42
6.3.2	Índices invariantes . . . . .	44
<b>7</b>	<b>O Filtro Riemanniano Adaptativo</b>	<b>46</b>
7.1	O Filtro Riemanniano Adaptativo (FRA) . . . . .	46
<b>8</b>	<b>Experimentos computacionais</b>	<b>51</b>
8.1	Experimentos com dados sintéticos . . . . .	51
8.1.1	Quantificação do processo de filtragem . . . . .	52
8.2	Experimentos em dados reais . . . . .	56
<b>9</b>	<b>Conclusões e Trabalhos futuros</b>	<b>60</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>62</b>

# Lista de Figuras

6.1	Volume de imagens de ressonância magnética. . . . .	41
6.2	Representação elipsoidal do tensor de difusão. . . . .	42
7.1	À esquerda: imagens DTI-RM. À direita: imagem gerada pelos valores de $\tau$ em cada posição espacial da imagem. Valores de $\tau = 1$ (regiões na cor amarela) representam as regiões de bordas, enquanto que valores de $\phi = 0$ (regiões na cor azul) representam as regiões fora das bordas. . . . .	48
7.2	Esquema de filtragem de uma imagem. . . . .	49
8.1	Imagem DTI-RM sintética: (a): Imagem verdadeira; (b): Imagem verdadeira com ruído riciano com $\sigma = 0.5$ ; (c): Imagem verdadeira com ruído riciano com $\sigma = 0.1$ ; (d): Imagem verdadeira com ruído riciano com $\sigma = 1.5$ e (e): Imagem verdadeira com ruído impulsivo (sal e pimenta) correspondendo à 30% do sinal. . . . .	53
8.2	Resultado do processo de filtragem. As imagens (a-d) são os resultados correspondentes à filtragem de imagens ruidosas com $\sigma = 0.5$ para os filtros FRA, Média, Mediana e Bilateral, respectivamente; as imagens (e-h) são os resultados correspondentes à filtragem de imagens ruidosas com $\sigma = 1.0$ ; as imagens (i-l) são os resultados correspondentes à filtragem de imagens ruidosas com $\sigma = 1.5$ . . . . .	55
8.3	Resultado do processo de filtragem: (a) Imagem obtida pela aplicação do filtro FRA; (b) Imagem obtida aplicando o filtro Média; (c) Imagem obtida pela aplicação do filtro Mediana; (d) Imagem obtida aplicando o filtro Bilateral. . . . .	56
8.4	(a-d): Regiões de interesse a serem filtradas extraída das fatias 22, 26, 28 e 30 do conjunto de dados reais, respectivamente; (e-h): as mesmas regiões de interesse com ruído riciano de $\sigma = 1.5$ e ruído impulsivo (25%). . . . .	57

8.5	Resultados da filtragem: (a-d): filtragem aplicada à fatia 22 considerando os filtros FRA, Média, Mediana e Bilateral, respectivamente; (e-h) igual ao anterior, porém aplicado à fatia 26; (i-l) igual ao anterior, porém aplicado à fatia 28; (m-p) igual ao anterior, no entanto aplicado à fatia 30. . . . .	59
-----	--	----

# Lista de Tabelas

8.1	Resultados do processo de filtragem considerando as métricas (8.1.1) aplicadas ao caso de ruído riciano. . . . .	54
8.2	Resultados do processo de filtragem considerando as métricas (8.1.1) aplicadas ao caso de ruído impulsivo referente à imagem (8.1e). . . .	55
8.3	Resultados do processo de filtragem considerando as métricas (8.1.1) aplicadas as quatro diferentes fatias de imagens do conjunto de dados reais. . . . .	58

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Características e objetivos gerais

Com os avanços tecnológicos na medicina, novas técnicas não invasivas e eficazes para detectar tumores ou anomalias em seres vivos foram desenvolvidas. Uma dessas técnicas é a difusão tensorial de imagens por ressonância magnética (DTI-RM).

Trabalhos recentes têm demonstrado o interesse da comunidade científica no processamento de dados dessa natureza. A DTI-RM tem se apresentado como uma técnica promissora no estudo clínico de patologias do cérebro (por exemplo, Esclerose múltipla, Alzheimer, AVC e Evolução tumoral), auxiliando no planejamento neurocirúrgico conforme discutido em [1], [2] e [3].

As imagens DTI-RM estão particularmente sujeitas a ruídos por duas razões. Primeiro, como múltiplas imagens são necessárias para gerar o tensor de difusão, cada imagem individual deve ser adquirida de forma rápida, causando a redução da razão sinal ruído (RSR). Segundo, a propriedade física (difusão da água) das medidas DTI-RM requer um cuidadoso tratamento do ruído. Portanto, isso explicaria a grande demanda por técnicas de processamento de imagens para a remoção do ruído.

Em DTI-RM, cada *voxel* (*voxel* representa um valor em um malha regular em um espaço tridimensional. O nome *voxel* é um neologismo com origem na mistura das palavras "Volume" e "Pixel") é apresentado por uma matriz simétrica positiva definida chamada de tensor de difusão. Inicialmente, a abordagem mais simples em DTI-RM é calcular as grandezas escalares relativas ao tensor de difusão, como por exemplo, o coeficiente de difusão aparente (CDA), a anisotropia relativa (AR) e a anisotropia fracionada (AF) e posteriormente, realizar a visualização e interpretação destes dados.

Apesar de simples, estas abordagens não são recomendadas, pois informações importantes sobre os tensores são perdidas devido à redução de dimensionalidade. Contudo, uma alternativa é tratar as imagens DTI-RM como um conjunto de objetos

tridimensionais melhorando o processo de visualização. Estes objetos tridimensionais são chamados de elipsoides onde seus semieixos são dados pelos autovetores associados à representação matricial para os tensores e seus comprimentos correspondem aos módulos dos autovalores.

Neste trabalho, estamos particularmente interessados em sintetizar uma metodologia para filtragem em DTI-RM considerando o cone das matrizes simétricas positivas definidas (SPD) como espaço de busca, uma vez que tensores de difusão assumem as características deste espaço.

Normalmente, os trabalhos baseados em aspectos geométricos relacionados à variedade das matrizes simétricas positivas definidas, quando aplicados ao processo de filtragem, restringem-se à utilização da média ou mediana geométrica. No entanto, o número de trabalhos que usam outros centros de massa como filtro quando comparados aos trabalhos baseados em  $L^1$  (mediana riemanniana ponderada) e  $L^2$  (média riemanniana ponderada) são negligenciados. Por exemplo, apenas [4] na listada referência faz um estudo no uso dos centros de massas riemannianos  $L^\alpha$ , para  $\alpha = \infty$  (circuncentro riemanniano ponderado), como ferramenta para composição de filtros de imagens e destaca suas performances.

A existência, unicidade e convexidade dos centros de massas ponderados riemannianos  $L^\alpha$ , para  $\alpha \in [1, \infty)$  é discutido em Afsari [5], bem como enunciado e provado em Afsari [6]. Para o caso  $\alpha = 2$ , existem vários autores o qual dedicaram seus estudos. Por exemplo, ver [7] e [8].

Levando em conta os resultados sobre a existência e unicidade sintetizadas por [6] sobre os centros de massas riemannianos, o presente trabalho está direcionado à mostrar a possibilidade de usá-los como uma ferramenta para compôr filtros para imagens DTI-RM. Em particular, introduzimos um filtro usando os centros de massas riemannianos ponderados  $L^\alpha$ , fazendo com que  $\alpha$  varie no intervalo  $[1, 2]$ . Essa ideia abrange os casos padrões da média ponderada riemanniana e da mediana em um único filtro. Além disso,  $\alpha$  é definido usando informações obtidas das regiões de bordas presentes no domínio da imagem.

Existem várias maneiras de identificar bordas em uma imagem, por exemplo, os algoritmos de detecção de bordas é uma delas. Outra maneira consiste em usar algoritmos de segmentação de imagens, mas isso está fora do objetivo de nossa pesquisa até o momento. Nossa abordagem segue o primeiro caso e será discutido com detalhes na Seção (6).

Através da utilização dos centros de massas riemannianos ponderados  $L^\alpha$  e das informações de bordas obtidas a partir das imagens DTI-RM, propomos o chamado Filtro Riemanniano Adaptativo (FRA) cuja função além de suavizar imagens DTI-RM é garantir que as bordas da imagem sejam preservadas ao longo do procedimento de filtragem. Para isso, extraímos informações sobre a localização das bordas presen-

tes na imagem usando um algoritmo de detecção de bordas. Com essas informações, é possível definir o valor de  $\alpha$  que caracteriza o expoente da função potencial associada ao centro de massa riemanniano ponderado  $L^\alpha$  da localização correspondente. Assim, podemos suavizar as imagens, preservando as discontinuidades referentes às bordas da mesma.

Para a performance do filtro FRA no procedimento de filtragem, aplicamos a metodologia de pontos proximais apresentada em [9] para calcular os centros de massa riemannianos  $L^\alpha$ . Essa metodologia consiste em uma técnica de otimização não suave, desenvolvida para calcular o mínimo de funções convexas riemannianas definidas em domínios de positividade. O uso dessa metodologia é justificado pelo fato de que a função potencial no caso  $\alpha = 1$  (e provavelmente para valores próximos a ele pelo menos numericamente) não é diferenciável para os registros das amostras dos tensores. Portanto, técnicas suaves apresentam um comportamento inadequado para este  $\alpha$  ou valores próximos a ele.

A referida metodologia de filtragem descrita nesta Tese, foi aceita e publicada pela revista *Applied Mathematics and Computation - Elsevier* no artigo intitulado  *$L^\alpha$  Riemannian weighted centers of mass applied to compose an image filter to diffusion tensor imaging*. Para maiores detalhes ver [10].

No capítulo 2, revisamos alguns conceitos necessários de geometria riemanniana. No capítulo 3, revisamos alguns conceitos de convexidade e otimização em variedades Riemannianas.

No capítulo 4, sintetizamos os resultados referentes à definição, existência, unicidade e continuidade dos centros de massas  $L^\alpha$  apresentado em [6]. Além disso, esclarecemos detalhes das demonstrações sobre o resultado de continuidade dos centros de massas  $L^\alpha$  com relação ao parâmetro  $\alpha$  e os pontos do domínio.

No capítulo 5, apresentamos resultados sobre o modelo matemático de imagem, metodologias de detecção de bordas e o princípio da formação de imagens por DTI-RM.

No capítulo 6, abordamos a representação riemanniana de tensores de difusão bem como o conceito de média aplicado ao espaço das matrizes simétricas positivas definidas nos casos euclidiano e riemanniano.

No capítulo 7, definimos o filtro (FRA) proposto no presente trabalho para suavizar imagens de DTI-RM. No capítulo 8, apresentamos os resultados numéricos decorrentes dos testes computacionais realizados. Por fim, finalizamos nosso trabalho com as conclusões e as sugestões de trabalhos futuros.

## 1.2 Trabalhos Relacionados

Existem numerosas técnicas para processamento de imagens que operam diretamente nas imagens de ressonância magnética, porém, poucas delas operam nas imagens de difusão tensorial. As principais técnicas cuja as extensões foram realizadas para o caso tensorial são os filtros baseados em informações estatísticas como medianas, médias ponderadas, além de interpolações e suavização anisotrópica, cujo objetivo é a suavização e preservação das regiões de contornos presentes nas imagens.

Para pesquisas que abordam diretamente no domínio da imagem, destacamos [11]. Os autores propõem uma nova abordagem para suavização das imagens que consiste em combinar o ajuste dos tensores com um termo regularizador para preservação de bordas. Eles introduziram uma função potencial que consiste em um termo de ajuste dos dados adaptado ao ruído riciano nas DWIs e a variação total nos tensores com respeito à variedade riemanniana de matrizes SPD como termo regularizador. Como estratégia de minimização, eles desenvolveram um esquema generalizado de avanço/retrocesso que emprega etapas implícitas baseadas na média geodésica e etapas explícitas de gradiente para o termo de ajuste dos dados.

Em [12], os autores também propõem um modelo variacional para variação total generalizada de segunda ordem para dados de múltiplas origens, fornecendo algoritmos para os modelos propostos. Eles destacaram o poder dos algoritmos aplicando-os a dados sintéticos e reais de vários tipos, incluindo imagens de DTI-RM.

Outras técnicas para processamento e visualização de imagens DTI-RM são apresentadas em [13]. Nesse trabalho, os autores introduziram uma nova solução analítica para o sistema de equação de difusão de Stejskal-Tanner, em que uma base de duplos tensores derivados da configuração de difusão para o gradiente de detecção, elimina a necessidade de resolver essa equação para cada local da imagem.

Em DTI-RM existem técnicas que trabalham no domínio tensorial sob as duas perspectivas para o conjunto de matrizes SPD, a Euclidiana e a Riemanniana. Isso só é possível, uma vez que os conceitos geométricos, como distâncias, ângulos, áreas, volumes, entre outros, são magnitudes conhecidas nessa variedade. Assim, os algoritmos para processamento de imagem em DTI-RM utilizam essas magnitudes como ferramentas para executar procedimentos como filtragem, interpolação e segmentação.

Uma estrutura poderosa para generalizar estatísticas para variedades riemannianas é proposta por [14]. Os autores mostraram que é possível generalizar para campos tensores muitos algoritmos de processamento de dados geométricos importantes, como interpolação, filtragem, difusão e restauração de dados ausentes. Muitos trabalhos que abordam técnicas de filtragem de DTI-RM foram desenvolvidos usando conceitos como média e mediana ponderada. Isso mostra que, como no caso



tradicional do processamento de imagens, os pesquisadores usaram esses conceitos para definir filtros.

Os autores em [15] desenvolveram um novo filtro geométrico e um algoritmo de detecção de bordas para processar dados de imagens não euclidianos, ou seja, dados de imagens residindo em uma variedade riemanniana. Assim, eles evidenciaram como a média ponderada é eficientemente calculada aplicando o método de Newton, que converge mais rápido que o método de descida por gradiente, uma vez que sua convergência é quadrática. Além disso, eles propuseram um núcleo gaussiano anisotrópico para filtragem de imagens e também mostraram como o filtro mediano e o filtro gaussiano anisotrópico podem ser combinados para desenvolver um novo filtro de preservação de bordas que é eficaz para remoção de ruído gaussiano e de impulso.

Em [16] também foram desenvolvidos métodos para produzir estatísticas, a saber, médias e modos de variação neste espaço. Além disso, eles mostraram que essas estatísticas preservam as propriedades geométricas naturais dos tensores, incluindo a restrição aos seus autovalores, que devem ser positivos.

Em [17], foi proposto um operador Laplace-Beltrami e um grafo Laplaciano com o objetivo de modelar arestas em um grafo como geodésicas em uma variedade riemanniana. Usando as propriedades dos campos de Jacobi, eles mostraram como calcular uma matriz de pesos das bordas na qual os elementos refletem as curvaturas seccionais associadas aos caminhos geodésicos na variedade entre os nós.

Uma extensão como o filtro bilateral para suavizar imagens em DTI-RM foi apresentada em [18]. O filtro bilateral usa a noção de dissimilaridade entre os tensores e a distância espacial entre eles para definir seus respectivos pesos. Além disso, esses pesos são inversamente proporcionais à dissimilaridade e à distância espacial nas proximidades do tensor alvo. Ainda em [18], algumas métricas são usadas para calcular os pesos. Entre eles, destaca-se a métrica log-euclidiana.

Usando metodologias de segmentação, podemos separar as regiões de bordas das regiões fora das bordas. Em [19], foi proposta uma nova abordagem de segmentação de textura usando o modelo de mistura gaussiana e covariância no caso riemanniano baseado em medidas de Kullback-Leibler para o caso tensorial. Para estimar e atualizar os parâmetros estatísticos com mais precisão, foi proposta a maximização das médias em termos de componentes, em vez do algoritmo K-means usado originalmente.

Agora, para algoritmos de segmentação, os autores em [20] forneceram uma nova formulação variacional para a segmentação juntamente com a regularização via variação total (TV) em uma configuração riemanniana. Além disso, eles forneceram uma divisão do modelo que é acessível computacionalmente usando um esquema forward-backward generalizado.

Embora nossa abordagem se concentre no uso de centros de massa riemannianos  $L^\alpha$  no espaço tensorial para formular filtros para imagens DTI-RM, existem trabalhos que utilizam esse espaço para desenvolver novas metodologias com relação à área de reconhecimento de padrões.

Como a covariância mostra a forma como as matrizes SPD atuam em uma abordagem riemanniana, autores em [21] desenvolveram um algoritmo de redução de dimensionalidade para construir um conjunto de baixa dimensão a partir de uma variedade riemanniana de alta dimensão. Para esse fim, eles modelaram o mapeamento isométrico bi-linear para identificar uma incorporação de baixa dimensão que maximiza e preserva a distância geodésica. Assim, um método de classificação supervisionado, que incorpora análise discriminante, é proposto com base neste novo conjunto de baixas dimensões e é aplicado à imagem por eletroencefalograma para obter um desempenho de classificação adequado.

Ligados aos recursos de uma Rede Neural Convolutiva (CNN), os autores em [22] propõem reformular os recursos convolucionais como um problema de geração e transformação de matriz SPD em uma variedade riemanniana. Eles introduziram várias novas camadas, incluindo um núcleo não linear de geração de camadas, uma camada de transformação de matrizes e uma camada de transformação de vetores, considerando a matriz SPD como uma representação de nível intermediário entre recursos convolucionais e recursos semânticos de alto nível.

Em [23], é proposta uma metodologia que usa as matrizes SPD para a tarefa de classificação a partir de um conjunto limitado de dados de treinamento em variedades de matrizes SPD. A estrutura, denominada Manifold Convex Class Model, caracteriza cada classe no espaço SPD através de um modelo convexo, onde a classificação é realizada calculando as distâncias entre estes modelos. A eficácia da estrutura proposta é demonstrada em dados sintéticos e em várias tarefas de visão computacional, incluindo reconhecimento de objetos, classificação de textura, re-identificação de pessoas e classificação de cenas de tráfego.

# Capítulo 2

## Variedades riemannianas: um resumo dos conceitos básicos

Neste capítulo, introduziremos algumas notações e propriedades em variedades riemannianas. Esses fatos básicos serão apresentados sem demonstrações e podem ser encontrados em qualquer texto básico de Geometria riemanniana, por exemplo, [24] e [25].

### 2.1 Variedades diferenciáveis

Seja  $M$  uma variedade diferenciável e conexa  $n$ -dimensional. O *espaço tangente* a  $M$  em  $p$ ,  $n$ -dimensional, será denotado por  $T_p M$  e o  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$  representa o *fibrado tangente* de  $M$ . Um *campo de vetores*  $X$  em  $M$  de classe  $C^s$ , para algum inteiro  $s \geq 0$ , é uma aplicação  $X : M \rightarrow TM$  que associa a cada  $p \in M$  um  $X_p \in T_p M$ , de classe  $C^s$ . Denotaremos o espaço dos campos de vetores em  $M$ , de Classe  $C^s$ , por  $\Psi^s(M)$ .

#### 2.1.1 Métrica riemanniana

Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Para cada ponto  $p \in M$  denotaremos por  $g$  uma *métrica riemanniana* definida sobre  $M$ . Assim, definimos por métrica riemanniana a correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  um *produto interno*  $\langle u, v \rangle_p := g(u, v)$ , com  $u, v \in T_p M$ , que varia diferenciavelmente com  $p$ . Uma variedade com uma métrica riemanniana será chamada de *variedade riemanniana*. Definimos a *norma* de um vetor  $u \in T_p M$  como  $\|u\|_p := (\langle u, u \rangle_p)^{\frac{1}{2}}$ .

Seja  $M$  uma variedade riemanniana e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Definimos o *gradiente* de  $f$  como o único campo  $\text{grad } f \in \Psi^0(M)$  dado por

$$\langle \text{grad } f(p), v \rangle_p = df_p \cdot v,$$

para cada  $p \in M$  e  $v \in T_p M$ , onde  $df_p \cdot v$  é a derivada direcional de  $f$ , na direção  $v$ .

Conhecida a métrica riemanniana, podemos determinar o comprimento de uma curva suave  $c$  ligando dois pontos quaisquer  $p_1, p_2 \in M$ . Seja  $c : [a, b] \rightarrow M$  uma curva  $C^\infty$  por partes, satisfazendo  $c(a) = p_1$  e  $c(b) = p_2$ . O *comprimento da curva*  $c$ , é dado por

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_{c(t)} dt,$$

e o *comprimento de arco* de  $c$ , denotado por  $s(t)$ , é dado por

$$s(t) = \int_a^t \|c'(t)\|_{c(t)} dt,$$

onde  $\|c'(t)\|_p := (\langle c'(t), c'(t) \rangle_p)^{\frac{1}{2}}$ .

Assim, se  $M$  é uma variedade riemanniana e  $p_1, p_2 \in M$ , a *distância riemanniana* de  $p_1$  a  $p_2$ , denotada por

$$d(p_1 p_2) = \inf \{L(c) : c \in C_{p_1 p_2}\},$$

onde  $C_{p_1 p_2}$  é o conjunto de todas as curvas suaves  $C^\infty$  por partes conectando os pontos  $p_1$  e  $p_2$ .

A função distância  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  acima é contínua e induz a topologia original em  $M$ . O conjunto  $\mathbf{B}(p_1, r) = \{p_2 \in M : d(p_1, p_2) < r\}$  é chamado de *bola métrica* de centro  $p_1$  e raio  $r > 0$  e seu fecho é dado por  $\overline{\mathbf{B}}(p_1, r) = \{p_2 \in M : d(p_1, p_2) \leq r\}$ .

Dados  $M$  e  $N$  variedades riemannianas, um difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow N$  de classe  $C^\infty$  é chamado de *isometria* se

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d\phi_p(u), d\phi_p(v) \rangle_{\phi(p)},$$

onde  $p \in M$  e  $u, v \in T_p M$ .

## 2.1.2 Conexão riemanniana

Seja  $M$  uma variedade riemanniana. Denotaremos por  $\nabla$  a *conexão de Levi-Civita* de  $M$  e por  $\nabla_Y X$  a *derivada covariante* de  $X$  por  $Y$ , com  $X \in \Psi^1(M)$  e  $Y \in \Psi^0(M)$ . Observe que  $(\nabla_Y X)_p$  depende somente de  $Y_p$  e do valor de  $X$  ao longo de uma curva em  $M$  tangente a  $X_p$ .

Seja  $c : [a, b] \rightarrow M$  uma curva de classe  $C^\infty$  e  $X : [a, b] \rightarrow TM$  um campo de vetores de classe  $C^s (s \geq 1)$  ao longo de  $c$ , ou seja,  $X(t) = X(c(t)) \in T_{c(t)} M$ . A *derivada covariante* de  $X$  ao longo de  $c$  será dada por  $\frac{DX}{dt} = \nabla_{c'(t)} X$ . Um campo de vetor  $X$  ao longo de  $c$  é dito *paralelo*, se  $\frac{DX}{dt} = \nabla_{c'(t)} X = 0$ .

Seja  $M$  uma variedade riemanniana e  $X \in \Psi^1(M)$ . O *diferencial* do campo  $X$

é o operador linear  $\mathcal{L}_X : \Psi^0(M) \rightarrow \Psi^0(M)$  dado por  $\mathcal{L}_X(Y) = \nabla_Y X$ , assim, para cada ponto  $p \in M$ , temos definida uma aplicação linear  $\mathcal{L}_X(p) : T_p M \rightarrow T_p M$

$$v \mapsto \mathcal{L}_X(p) \cdot v = \nabla_v X.$$

Quando  $X = \text{grad } f$ , onde  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$ , então  $\mathcal{L}_X(p) = \text{Hess } f_p$  é a hessiana de  $f$  em  $p$ .

### 2.1.3 Geodésica e Aplicação exponencial

Seja  $M$  uma variedade riemanniana. Uma curva suave  $\gamma : I \rightarrow M$  é denominada de *geodésica* quando

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0,$$

para todo  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , onde  $\frac{D\gamma'(t)}{dt}$  é a derivada covariante do campo  $\gamma'(t)$  (a saber,  $\frac{D\gamma'(t)}{dt}$  representa a projeção ortogonal de  $\gamma'(t)$  sobre  $T_{\gamma(t)}M$ , para cada  $t \in I$ ). Decorre imediatamente que se  $\gamma$  é uma geodésica, então  $\|\gamma'(t)\|$  é constante, ou seja,  $\gamma$  tem velocidade constante. logo, o comprimento do arco de  $\gamma$  a partir de um ponto inicial  $t_0$  é dado por  $s(t) = \|\gamma'(t)\|(t - t_0)$ . Se  $\|\gamma'(t)\| = 1$  dizemos que  $\gamma$  é *parametrizada pelo comprimento do arco ou normalizada*. A equação que define uma geodésica é uma equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem, assim, uma geodésica  $\gamma$  é determinada por sua posição  $p_1$  e sua velocidade  $v$  em  $p_1$ . A restrição de uma geodésica a um intervalo fechado e limitado é chamado de *segmento geodésico* e denotaremos o conjunto de todos os segmentos geodésicos ligando dois pontos  $p_1$  e  $p_2$  por  $\Gamma_{p_1 p_2}$ . Um segmento geodésico ligando  $p_1$  a  $p_2$  em  $M$  é dito *minimal* se seu comprimento é igual a  $d(p_1, p_2)$ . Neste caso, a geodésica é chamada de *geodésica minimizante*.

Quando em uma variedade riemanniana as geodésicas estiverem definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ , a variedade é chamada de *variedade riemanniana Completa*.

Em uma variedade riemanniana completa  $M$ , para cada  $p \in M$ , a *aplicação exponencial* em  $p$ , representada por  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  é definida por

$$\begin{aligned} \exp_p : T_p M &\rightarrow M \\ v &\mapsto \exp_p v = \gamma_v(1) \\ \exp_p tv &= \gamma_v(t) \end{aligned}$$

onde  $\gamma_v$  é a geodésica em  $M$ , tal que  $\gamma_v(0) = p$ ,  $\gamma'_v(0) = v$ . Além disso, para todo  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a > 0$  a igualdade  $\gamma_{av}(t) = \gamma(at)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

A aplicação exponencial de classe  $C^\infty$  é um difeomorfismo numa vizinhança  $\Omega$  da origem em  $T_p M$ . O conjunto  $\exp_p \Omega = \hat{\Omega}$  é chamado uma *vizinhança normal* de

$p$ . Se  $\hat{\Omega}$  é uma vizinhança normal em todos os seus pontos, então dizemos que  $\hat{\Omega}$  é uma *vizinhança totalmente normal*. Se  $\mathbf{B}_\epsilon(0) = \{v \in T_p M : \|v\| < \epsilon\}$  é tal que  $\overline{\mathbf{B}_\epsilon(0)} \subset \Omega$ , chamamos  $\exp_p \mathbf{B}_\epsilon(0) = \mathbf{B}(p, \epsilon)$  a bola normal de centro  $p$  e raio  $\epsilon > 0$  que, neste caso, coincide com a bola métrica.

Seja  $p \in M$ ,  $\zeta \in T_p \mathbf{B}(p, r)$ , onde  $r \leq \|\zeta\|$ . Denominamos por  $\mathbf{c}(\zeta)$  a distância ao conjunto dos pontos mínimos de  $p$  (“*cut locus*” de  $p$ ) ao longo da geodésica  $\gamma$ , isto é,

$$\mathbf{c}(\zeta) = \sup \{t > 0 : t\zeta \in T_p M, d(p, \gamma(t)) = t\}.$$

Para qualquer  $p \in M$ , definimos o raio de injetividade de  $p$ , denotado  $\text{inj}P$  a partir da seguinte relação

$$\text{inj}P = \inf \{\mathbf{c}(\zeta) : \zeta \in T_p \mathbf{B}(p, r)\}$$

e o raio de injetividade de  $M$ , denotado por  $\text{inj}M$  é dado como

$$\text{inj}M = \inf \{\text{inj}P : p \in M\}.$$

Para maiores detalhes ver [24].

**Teorema 2.1.1** (Teorema Holf-Rinow). *Seja  $M$  uma variedade riemanniana. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) *Para cada ponto  $p \in M$ ,  $\exp_p$  está definida em todo  $T_p M$ , isto é,  $M$  é uma variedade riemanniana completa.*
- ii)  *$(M, d)$  é completo como espaço métrico, onde  $d$  é a distância riemanniana.*
- iii) *Os subconjuntos limitados e fechados de  $M$  são compactos.*
- iv) *Além disso, cada uma das afirmações acima implica que para quaisquer dois pontos  $p_1, p_2 \in M$  existe um segmento geodésico  $\gamma$  ligando  $p_1$  à  $p_2$  com  $L(\gamma) = d(p_1, p_2)$ . A geodésica  $\gamma$  com esta propriedade é chamada minimizante.*

## 2.1.4 Curvatura e Campo de Jacobi

O tensor curvatura  $\mathcal{R}$  de uma variedade riemanniana  $M$  é dado por  $\mathcal{R}(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$ , onde  $X, Y, Z \in \Psi^s(M)$ ,  $s \geq 2$  e o colchete  $[X, Y] = YX - XY$ . A partir do tensor curvatura, podemos definir a *curvatura seccional*  $K(X, Y)$  gerado por  $X$  e  $Y$  como

$$K(X, Y) = \frac{\langle \mathcal{R}(X, Y)Y, X \rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2},$$

onde  $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle$ . Se para cada par  $(X, Y)$  temos que  $K(X, Y) \leq 0$  (respectivamente,  $K(X, Y) \geq 0$ ) então dizemos que  $M$  é uma variedade riemanniana de curvatura não positiva (respectivamente, não negativa).

Para uma variedade riemanniana  $M$  e uma geodésica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ . Definimos uma *variação* de  $\gamma$  como uma função  $\alpha : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  de classe  $C^\infty$  de modo que  $\alpha(t, 0) = \gamma(t)$ . Se para todo  $s$ , a curva  $\alpha(\cdot, s)$  é uma geodésica, então o campo  $J(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(t, s)$  é um campo de Jacobi ao longo de  $\alpha(\cdot, s)$ .

### 2.1.5 Variedades de Hadamard

Uma variedade riemanniana completa, com curvatura  $K \leq 0$  é chamada de *Variedade de Hadamard*. Uma das características principais desta variedade é que ela possui a mesma topologia e estrutura diferencial dos espaços Euclidianos  $\mathbb{R}^n$ , nos permitindo obter algumas propriedades geométricas similares.

**Teorema 2.1.2** (Hadamard). *Se  $M$  é uma variedade de Hadamard. Então  $M$  é difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = \dim M$ , isto é, a aplicação  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  é um difeomorfismo para todo  $p \in M$ .*

*Demonstração.* Ver Lema 3.2 de [26], p. 149, ou Teorema 4.1 de [25], p. 221.  $\square$

Seja  $M$  uma variedade de Hadamard e  $p_2 \in M$ . Pelo teorema (2.1.2) podemos obter a inversa da aplicação exponencial  $\exp_{p_1}^{-1} : M \rightarrow T_{p_1} M$  e a relação entre a distância riemanniana e a aplicação exponencial

$$d(p_1, p_2) = \|\exp_{p_2}^{-1} p_1\|, \quad (2.1)$$

onde  $\exp_{p_2}^{-1}$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$ . Além disso, segue de (2.1) que a função  $d^2(\cdot, p_2)$  também é de classe  $C^\infty$ .

Outra propriedade similar à dos espaços Euclidianos obtida em variedades de Hadamard, é a *Lei dos cossenos*, uma propriedade geométrica que pode ser utilizada em situações envolvendo qualquer triângulo geodésico, isto é, não necessariamente restritas a triângulos retângulos.

Seja  $M$  uma variedade de Hadamard e seja  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$  um *Triângulo geodésico*. Os segmentos geodésicos denotados por  $\gamma_{i+1} : [0, l_{i+1}] \rightarrow M$  que ligam os pontos  $p_{i+1}$  a  $p_{i+2}$ , com  $l_{i+1} := L(\gamma_{i+1})$ , definem os lados do triângulo, enquanto  $\theta_{i+1} = \angle (\gamma'_{i+1}(0), -\gamma'_i(l_i))$ , com  $i = 1, 2, 3(mod\ 3)$  é o ângulo formado pelos segmentos geodésicos. Então, valem as relações

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \leq \pi \quad (2.2)$$

$$l_{i+1}^2 + l_{i+2}^2 - 2l_{i+1}l_{i+2}\cos \theta_{i+2} \leq l_i^2 \quad (2.3)$$

$$l_{i+1}\cos \theta_{i+2} + l_i\cos \theta_i \geq l_{i+2}. \quad (2.4)$$



# Capítulo 3

## Otimização em variedades Riemannianas

### 3.1 Convexidade

Introduziremos alguns conceitos e resultados sobre convexidade em variedades riemannianas dando ênfase às funções convexas. Para maiores detalhes ver [27].

Seja  $(M, g)$  uma variedade riemanniana completa e conexa. Seja  $p_1, p_2 \in M$  e  $\gamma_{p_1 p_2} : [0, 1] \rightarrow M$  uma geodésica unindo os pontos  $p_1$  e  $p_2$ , isto é,

$$\gamma_{p_1 p_2}(0) = p_1, \quad \gamma_{p_1 p_2}(1) = p_2. \quad (3.1)$$

Um subconjunto  $A$  de  $M$  é dito ser convexo se  $A$  contém todas as geodésicas  $\gamma_{p_1 p_2}$  de  $M$  cujo os pontos  $p_1$  e  $p_2$  estão em  $A$ . Além disso, toda interseção de conjuntos convexos são convexas.

Seja  $A$  e  $B$  dois subconjuntos convexos em  $M$  e  $A \cap B$  sua interseção. Se  $p_1, p_2 \in A \cap B$ , então,  $p_1, p_2 \in A$  e  $p_1, p_2 \in B$ . Já que  $A$  é convexa, as geodésicas  $\gamma_{p_1 p_2}$  ligando  $p_1$  à  $p_2$  estão incluídas em  $A$ . Analogamente,  $\gamma_{p_1 p_2}$  estão incluídas em  $B$  e assim, elas se encontram em  $A \cap B$ . Isso, significa que  $A \cap B$  é convexo.

Para cada ponto  $p_0 \in M$  existe uma vizinhança normal esférica e convexa  $\mathbf{B}(p_0, r)$ , com a fronteira  $\mathbf{S}(p_0, r) = \partial \mathbf{B}(p_0, r)$ . Portanto, quaisquer dois pontos  $p_1, p_2 \in \mathbf{B}(p_0, r)$  podem ser ligados por uma única geodésica  $\gamma_{p_1 p_2}(t)$ , onde  $t \in [0, 1]$  e  $\gamma_{p_1 p_2}(0) = p_1$ ,  $\gamma_{p_1 p_2}(1) = p_2$ . Sendo assim, supondo que  $\gamma_{p_1 p_2}$  seja parametrizada pelas equações  $\nu^i = \nu^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $t \in [0, 1]$  e considerando a função

$$F(t) = \sum_{i=1}^n (\nu^i(t))^2, \quad t \in [0, 1].$$

Podemos observar que  $F(0) < r^2$ ,  $F(1) < r^2$ . Seja  $t_0 \in (0, 1)$  a menor solução da

equação  $F(t) = r^2$ . Desta forma,

$$0 = \frac{dF}{dt}(t_0) = 2 \sum_{i=1}^n \nu^i(t_0) \frac{d\nu^i}{dt}(t_0)$$

e assim  $\gamma_{p_1 p_2}$  é tangente a  $\mathbf{S}(p_0, r)$  em um ponto  $p_3 = (\nu^1(t_0), \dots, \nu^n(t_0))$ .

Em uma variedade Riemanniana  $M$ . Definimos por  $\Gamma$  o conjunto de todos os arcos geodésicos ligando  $p_1$  à  $p_2$ , para  $p_1, p_2 \in A \subset M$ .

Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real:

- Se  $f(\gamma_{p_1 p_2}(t)) \leq (1-t)f(p_1) + tf(p_2)$ ,  $\forall p_1, p_2 \in A$ ,  $\forall \gamma_{p_1 p_2} \in \Gamma$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , então  $f$  é chamada convexa.
- Se  $f(\gamma_{p_1 p_2}(t)) < (1-t)f(p_1) + tf(p_2)$ ,  $\forall p_1, p_2 \in A$ ,  $p_1 \neq p_2$ ,  $\forall \gamma_{p_1 p_2} \in \Gamma$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , então a função  $f$  é chamada estritamente convexa.
- Se  $-f$  é convexa (estritamente convexa), então,  $f$  é chamada côncava (estritamente côncava).

Equivalentemente, a função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se e somente se, para toda geodésica  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ , a função  $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa no caso usual, isto é,

$$(f \circ \gamma)(t-s)t_1 + st_2 \leq (t-s)(f \circ \gamma)t_1 + s(f \circ \gamma)t_2, \forall t_1, t_2 \in [a, b], s \in [0, 1].$$

Dizemos que  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é *fortemente convexa* se existir uma constante estritamente positiva  $m$  tal que

$$f(\gamma_{p_1 p_2}(t)) \leq (1-t)f(p_1) + tf(p_2) - \frac{m}{2} \|\gamma'_{p_1 p_2}(t)\|^2 (1-t)t, \forall p_1, p_2 \in M, t \in [0, 1].$$

Seja  $A \subset M$  um conjunto convexo. Existe uma relação muito forte entre a convexidade da função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e a convexidade do seu epígrafo. A função  $f$  é convexa se e somente se seu epígrafo

$$E(f) = \{(p, u) | f(p) \leq u\} \subset A \times \mathbb{R}$$

é um conjunto convexo.

Se  $(p_1, u), (p_2, v) \in E(f)$ , temos que  $u \geq f(p_1)$ ,  $v \geq f(p_2)$  e assim,

$$(1-t)u + tv \geq (1-t)f(p_1) + tf(p_2) \geq f(\gamma_{p_1 p_2}(t)).$$

então

$$(\gamma_{p_1 p_2}(t), (1-t)u + tv) \in E(f)$$

e assim  $E(f)$  é um conjunto totalmente convexo.

### 3.1.1 Propriedades das funções convexas

Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa definida em um conjunto convexo  $A$ . Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um conjunto convexo que contém  $f(A)$ . Considere  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa e crescente. A composição  $\phi(f)$  é uma função convexa em  $A$ . Pela definição de convexidade temos que

$$f(\gamma_{p_1 p_2}(t)) \leq (1-t)f(p_1) + tf(p_2)$$

e

$$\begin{aligned} \phi(f(\gamma_{p_1 p_2}(t))) &\leq \phi((1-t)f(p_1) + tf(p_2)) \\ &\leq (1-t)\phi(f(p_1)) + t\phi(f(p_2)). \end{aligned}$$

Além do resultado acima, [27] mostra que funções convexas são fechadas com respeito a combinações lineares positivas. Se  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são funções convexas em  $A \subset M$  e  $c_i \geq 0$ , então  $\sum_{i=1}^n c_i f_i$  é convexa em  $A$ . Por hipótese temos que

$$f_i(\gamma_{p_1 p_2}(t)) \leq (1-t)f_i(p_1) + tf_i(p_2).$$

Sendo assim, segue que

$$(c_i f_i(\gamma_{p_1 p_2}(t))) \leq (1-t)c_i f_i(p_1) + t c_i f_i(p_2)$$

e

$$\left( \sum_{i=1}^n c_i f_i \right) (\gamma_{p_1 p_2}(t)) \leq (1-t) \left( \sum_{i=1}^n c_i f_i \right) (p_1) + t \left( \sum_{i=1}^n c_i f_i \right) (p_2).$$

A continuidade de uma função está diretamente ligada a propriedade de convexidade. O resultado seguinte nos remete a esta afirmação.

**Teorema 3.1.1.** *Seja  $A$  um conjunto convexo com interior não-vazio e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa.*

- $f$  é contínua em  $\text{int}A$ .
- Se  $p_0 \in A$  é um ponto na fronteira, então

$$\liminf_{p \rightarrow p_0} f(p) \leq f(p_0). \quad (3.2)$$

Uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de *Lipschitz contínua* se existe um número real  $\lambda$  tal que

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq \lambda d(p_1, p_2), \forall p_1, p_2 \in M, \quad (3.3)$$

onde  $d(p_1, p_2)$  é a distância entre os pontos  $p_1$  e  $p_2$ . O número positivo  $\lambda$  é chamado de constante Lipschitz de  $f$ .

O Lema (3.9) em [27] mostra que a propriedade de continuidade Lipschitz em uma variedade riemanniana é apenas uma propriedade local. Sendo assim, uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  será contínua com constante Lipschitz  $\lambda$  se e somente se  $f$  é Lipschitz contínua com a constante  $\lambda$  em uma vizinhança de cada ponto de  $M$ . Neste caso, para cada ponto  $x \in M$ , existe uma vizinhança  $U_x$  de  $x$  tal que

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq \lambda d(p_1, p_2),$$

para todo  $p_1, p_2 \in U_x$ . Para maiores detalhes e demonstrações ver [27].

### 3.1.2 Derivadas direcionais e sub gradientes

Seja  $A \subset M$  um conjunto convexo. O conjunto  $T_p A$  de vetores tangentes à  $A$  em  $p$  é um cone convexo em  $T_p M$ . De fato, suponha que  $X_p, Y_p \in T_p A$ . Obviamente  $tX_p, tY_p \in T_p A, \forall t \geq 0$ . Suponha que  $\alpha, \beta : [0, \epsilon] \rightarrow A$  satisfaz  $\alpha(0) = \beta(0) = p, \alpha'(0) = X_p, \beta'(0) = Y_p$ . Para valores de  $t > 0$  suficientemente pequenos temos uma única geodésica minimizante  $\gamma_t$  que liga  $\alpha(t) = \gamma_t(0)$  à  $\beta(t) = \gamma_t(1)$ . Uma vez que  $A$  é convexo e  $\gamma_t \subset A, \tau(t) = \gamma_t(s) 0 \leq s \leq 1$ , define uma curva em  $A$  tal que  $\tau'(0) = (1 - s)X_p + sY_p$ .

**Definição 3.1.1.** *Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real. o limite*

$$Df(p, X_p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(p)}{t} \quad (3.4)$$

*é chamada a derivada direcional de  $f$  com respeito à  $X_p$ .*

Além da noção de derivada direcional, temos a noção de sub-gradiente e subdiferencial. Seja  $T_p^* A$  um conjunto de vetores cotangentes à  $A$  em um ponto  $p$ , onde  $T_p^* A$  é um cone convexo em  $T_p^* M$ . Considere um ponto genérico  $q \in A$  e  $\gamma_{pq}(t), t \in [0, 1]$  uma geodésica tal que

$$\gamma_{pq}(0) = p, \gamma_{pq}(1) = q, \gamma'_{pq}(0) = X_p \in T_p A.$$

Para uma função convexa  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . A primeira forma  $\nu_p \in T_p^* A$  é chamado o *sub-gradiente* de  $f$  em  $p$  se

$$f(q) \geq f(p) + \nu_p(\gamma'_{pq}(0)), \forall q \in A, \forall \gamma_{pq} \in \Gamma.$$

onde  $\Gamma$  é o conjunto de todas as geodésicas que conectam  $p$  à  $q$ .

O conjunto de todos os sub-gradientes de  $f$  em  $p$  é chamado *subdiferencial* de  $f$  em  $p$  e é representado por  $\partial f(p)$ . O operador  $\partial f : p \rightarrow \partial f(p)$  é chamado *subdiferencial* de  $f$ .

Segundo [27], se  $f$  é uma função convexa então seu *subdiferencial*  $\partial f(p) \subset T_p^*A$  contém pelo menos um elemento. Além disso,  $\partial f(p)$  é um conjunto convexo e compacto. Para maiores detalhes ver os teoremas (4.5 e 4.6) em [27].

O teorema seguinte define uma relação direta entre a *derivada direcional* de uma função convexa e seu *subdiferencial*.

**Teorema 3.1.2.** *Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa. Então,  $\omega_p \in \partial f(p)$  se e somente se*

$$Df(p, X_p) \geq \omega_p(X_p), \quad \forall X_p \in T_p A. \quad (3.5)$$

*Demonstração.* Ver teorema 4.8 em [27]. □

Existe uma relação direta entre a diferenciabilidade de uma função e sua propriedade de convexidade. Essa relação definem condições necessárias e suficientes para que funções de classe  $C^1$  sejam convexas. Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $p \in A$ , então sua derivada direcional

$$Df(p, X_p) = \langle \text{grad} f(p), X_p \rangle = df(X_p), \quad \forall X_p \in T_p A.$$

Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  for diferenciável de classe  $C^1$  em um subconjunto convexo  $A \in M$ . As seguintes afirmações são válidas:

- A função  $f$  é convexa se e somente se

$$f(p_1) + \gamma'_{p_1 p_2}(t)(p_1) \leq f(p_2), \quad \forall p_1, p_2 \in A, \forall \gamma_{p_1 p_2} \in \Gamma, \quad (3.6)$$

onde  $\Gamma$  é o conjunto de todas as geodésicas ligando  $p_1$  à  $p_2$ . Além disso, esta expressão é conhecida como desigualdade do gradiente, a mesma válida para o caso euclidiano.

- A função  $f$  é estritamente convexa em  $A$  se e somente se

$$f(p_1) + \gamma'_{p_1 p_2}(t)(p_1) < f(p_2), \quad \forall p_1 \neq p_2. \quad (3.7)$$

Quando tratamos de uma função de classe  $C^2$ . As condições necessárias e suficientes para que ela seja convexa pode ser descrita da seguinte maneira: Seja  $A \subset M$  um conjunto aberto e convexo. Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . A função  $f$  é convexa se e somente se

$$\varphi_{p_1 p_2}(t) = f(\gamma_{p_1 p_2}(t)), \quad t \in [0, 1] \quad (3.8)$$

satisfaz

$$\frac{d^2 \varphi_{p_1 p_2}}{dt^2} \geq 0, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall p_1, p_2 \in A, \quad \forall \gamma_{p_1 p_2} \in \Gamma. \quad (3.9)$$

Para  $\frac{d^2 \varphi_{p_1 p_2}}{dt^2} \geq 0$ ,  $\varphi$  é somente uma função convexa. Por outro lado, se  $\frac{d^2 \varphi_{p_1 p_2}}{dt^2} > 0$ , então  $\varphi$  é uma função estritamente convexa.

Para uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Lembramos que a hessiana de  $f$  é definida por

$$Hess f(X, Y) = \nabla_X(df)(Y), \quad \forall X, Y \in \Psi(M).$$

Neste caso, para um conjunto aberto e convexo  $A \subset M$ . A função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se e somente se sua hessiana for positiva semidefinida em  $A$ . Assim, para  $\varphi_{p_1 p_2}(t) = f(\gamma_{p_1 p_2}(t))$  temos que

$$\frac{d^2 \varphi_{p_1 p_2}}{dt^2} = \gamma'_{p_1 p_2}(\gamma'_{p_1 p_2}(f))(\gamma_{p_1 p_2}(t)) = \nabla_{\gamma'_{p_1 p_2}}(df)(\gamma'_{p_1 p_2}) = Hess f(\gamma'_{p_1 p_2}, \gamma'_{p_1 p_2}).$$

O Teorema (6.1) em [27] mostra que  $f$  é convexa se e somente se  $Hess f \geq 0$ .

Lembramos que  $\|\gamma'_{p_1 p_2}(t)\|$  é constante com respeito à  $t$ . Se a função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a seguinte desigualdade, para alguma constante  $m$ :

$$f(\gamma_{p_1 p_2}(t)) \leq (1-t)f(p_1) + tf(p_2) - \frac{m}{2} \|\gamma'_{p_1 p_2}(t)\|^2 (1-t)t, \quad \forall p_1, p_2 \in M, \quad t \in [0, 1], \quad (3.10)$$

então, a função  $f$  é chamada fortemente convexa. O teorema apresenta uma caracterização para funções fortemente convexas de classe  $C^2$ .

## 3.2 Algoritmos de descida em variedade riemanniana

Muitas das propriedades de programação convexa em espaços euclidianos são transferidas para o caso riemanniano devido ao fato das mesmas independerem das métricas riemannianas adotadas. Na verdade, elas representam extensões do caso euclidiano para o riemanniano.

Seja  $(M, g)$  uma variedade riemanniana completa de dimensão finita. Lembramos que a geodésica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  a qual verifica as condições iniciais  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = \nu \in T_p M$  é única e descrita pela fórmula  $\gamma(t) = exp_x(t\nu)$ .

Os métodos numéricos propostos para encontrar o mínimo de uma função de classe  $C^2$   $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  são construídos de procedimentos iterativos do tipo

$$p_{i+1} = exp_{p_i}(t_i \nu_i),$$

onde  $\nu_i \in T_{p_i} M$  indica a direção e o sentido inicial de movimento do ponto  $p_i$ , e

$t_i \geq 0$  determina o *comprimento do passo* na geodésica iniciando em  $p_i$  tangente a  $\nu_i$ .

A utilização de um método iterativo consiste em fixar os vetores  $\nu_i$  e os números  $t_i$  em cada iteração. Desta forma, as sequências  $\{p_i\}$  e  $\{f(p_i)\}$  dependem da forma escolhida para se gerar tanto  $\nu_i$ , quanto  $t_i$ .

Seja  $p_*$  um ponto de mínimo de  $f$ . Para obter, a partir de  $p_i$  uma vizinhança de  $p_*$ , devemos nos mover ao longo da geodésica partindo de  $p_i$  em uma direção orientada no sentido na qual a função decresce. Se  $p_i$  não for um ponto crítico, então existe uma infinidade de vetores  $\nu \in T_{p_i}M$ , determinando a *direção* e o *sentido* de descida. A saber, todos os vetores com a propriedade  $\langle \text{grad } f(p_i), \nu \rangle < 0$ , ou equivalentemente  $df(p_i)(\nu) < 0$ .

Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  uma geodésica a qual verifica as seguintes condições iniciais

$$\gamma(0) = p_i, \quad \gamma'(0) = \nu_i \in T_{p_i} \in M.$$

Nesta geodésica fixe o ponto  $p = \gamma(t)$ ,  $0 < t \leq 1$ . O arco geodésico que liga  $p_i$  à  $p$  é a restrição  $\gamma(u)$ ,  $u \in [0, t]$ . Usando  $u = st$ ,  $s \in [0, 1]$ , encontramos a reparametrização  $\alpha(s) = \gamma(st)$ ,  $s \in [0, 1]$  e  $\alpha(0) = \gamma(0) = p_i$ ,  $\alpha(1) = \gamma(t) = p$ ,  $\frac{d\alpha}{ds}(s) = t \frac{d\gamma}{du}(st)$ . Definindo  $\phi(\alpha) = f(\alpha)$ , pela formula de Taylor

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2}\phi''(s_0), \quad s_0 \in [0, 1]$$

segue que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p_i) + df(\alpha'(0)) + \frac{1}{2}Hess f(\alpha'(s_0), \alpha'(s_0)) \\ &= f(p_i) + tdf(\nu_i) + \frac{t^2}{2}Hess f\left(\frac{d\gamma}{du}(s_0t), \frac{d\gamma}{du}(s_0t)\right), \quad s_0 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Alternativamente, para  $\phi(t) = f(\gamma(t))$  temos que

$$\phi(t) = \phi(0) + t\phi'(0) + \frac{t^2}{2}\phi''(t_0), \quad t_0 \in [0, t]$$

Assim,

$$f(p) = f(p_i) + tdf(\nu_i) + \frac{t^2}{2}Hess f(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0)).$$

Para  $|t|$  suficientemente pequeno, a aproximação linear de  $f(p)$  com respeito à  $t$  é  $f(p_i) + tdf(\nu_i)$ . Desta forma, pelo menos localmente, a relação  $df(\nu_i) < 0$  implica  $f(p) < f(p_i)$ .

Se  $p_1$  é um estimado sem relação ao ponto de mínimo  $p_*$  de  $f$ , então o algoritmo geral de descida segue a seguinte formulação:

- 1) inicie  $i=1$ ,
- 2) compute o vetor  $\nu_i$  tal que  $df(\nu_i) < 0$ ,
- 3) compute o número  $t_i$  tal que  $f(\exp_{p_i}(t_i\nu_i)) < f(p_i)$ ,
- 4) compute  $p_{i+1}$  de  $p_{i+1} = \exp_{p_i}(t_i\nu_i)$ ,
- 5) Se  $p_{i+1}$  satisfaz o dado critério de convergência, então pare.
- 6) defina  $i = i + 1$  e volte para o passo 2).

Se  $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$  for uma sequência convergente para  $p_*$ , e  $p_*$  for um ponto de mínimo local, então a sequência  $f(p_1) > f(p_2) > \dots > f(p_i) > \dots$  converge para o mínimo local  $f(p_*)$ .

Do ponto de vista numérico, é suficiente aproximar  $f(p_*)$  por  $f(p_i)$ , onde  $p_i$  é fixado por um dos seguintes critérios de parada

$$\|gradf(p_i)\| \leq \epsilon \text{ ou } |f(p_i) - f(p_{i-1})| \leq \eta.$$

O teorema seguinte nos dá as condições para as quais o critério de parada  $\|grad f(p_k)\| \leq \epsilon$ , para algum  $\epsilon > 0$  pré-fixado seja válido.

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  em um conjunto aberto e convexo  $A \subset M$ :*

- 1)  $p_1 \in A$  é dado;
- 2)  $S = \{p \in M | f(p) \leq f(p_1)\}$  é um subconjunto de  $A$ ;
- 3)  $\exists L \in (-\infty, \infty)$  tal que  $f(p) \geq L, \forall p \in S$ ;
- 4)  $\exists b > 0$  tal que os valores próprios  $\lambda_j(p), j = 1, \dots, n$  da  $Hessf(p)$  satisfaz  $\lambda_j(p) \leq b, \forall p \in S$ ;
- 5)  $\nu_i$  é escolhido tal que

$$g(\nu_i, gradf(p_i)) \leq -\epsilon_1 \|\nu_i\| \|gradf(p_i)\|,$$

$\forall i \in \mathbb{N}^*$ , onde  $\epsilon_1 > 0$  é dado;

- 6) existe  $\epsilon_2 \in [0, 1)$  tal que

$$|g(\gamma'_{p_i p_{i+1}}(t_i), gradf(p_{i+1}))| \leq \epsilon_2 |g(\nu_i, gradf(p_i))|, \forall i \in \mathbb{N}^*;$$



7) Existe  $\epsilon_3 > 0$  tal que

$$f(p_i) - f(p_{i+1}) \geq -\epsilon_3 t_i df(\nu_i), \quad \forall i \in \mathbb{N}^*,$$

então para cada  $\epsilon_4 > 0$  existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tal que  $\|grad f(p_k)\| < \epsilon_4$ .

*Demonstração.* Pode ser encontrada em ([27], pg 257). □

O teorema acima garante apenas que  $\lim_{i \rightarrow \infty} grad f(p_i) = 0$ . Se queremos obter condições suficientes para a convergência da sequência  $p_i$  para um ponto crítico de  $f$ , devemos introduzir hipóteses adicionais. Por exemplo, supor que o conjunto  $S$  de  $f$  definido na hipótese 2 do teorema é compacto.

Se as hipóteses do teorema (3.2.1) são válidas e se o conjunto  $S$  for compacto, então todo ponto limite da sequência  $p_i$  é um ponto crítico de  $f$  em  $S$ . Neste caso, a sequência  $p_i \in S$  contém uma subsequência  $p_{i_n}$  que converge para  $p_* \in S$ . Supondo que  $p_*$  não seja um ponto crítico de  $f$ , isto é,  $df(p_*) \neq 0$ . então  $\lim_{n \rightarrow \infty} df(p_{i_n}) = df(p_*) \neq 0$ , contradizendo a igualdade  $\lim_{i \rightarrow \infty} grad f(p_i) = 0$  estabelecida pelo teorema (3.2.1). Assim temos que  $p_*$  é um ponto crítico de  $f$ .

Se a hipótese 4 do teorema (3.2.1) é substituída pela existência de  $a > 0$  tal que  $0 < a \leq \lambda_i(p) < b$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\forall p \in S$ , então  $f$  é uma função fortemente convexa em  $S$ . Consequentemente o ponto crítico  $p_*$  de  $f$  em  $S$  é o seu único mínimo global.

# Capítulo 4

## Centro de massa riemanniano $L^\alpha$

Embora o centro de massa  $L^2$  seja mais comumente usado em muitas aplicações, os centros de massa generalizados  $L^\alpha$ , para  $1 \leq \alpha \leq +\infty$  ( $\alpha \neq 2$ ), também podem ser úteis. Segundo Afsari [5], a medida que  $\alpha$  cresce, o efeito dos *outliers* (os *outliers* são dados que se diferenciam drasticamente de todos os outros) na determinação da média torna-se mais evidente. Dessa forma, usar outros valores de  $\alpha$  dão mais flexibilidade ao usuário para diferentes aplicações.

Lembre-se que  $\alpha = 1$  corresponde à mediana ponderada em espaços euclidianos. Para  $\alpha = 1$  os *outliers* têm um efeito mínimo e neste caso, os centros de massa são mais robustos. Por outro lado, para  $\alpha = \infty$ , somente os *outliers* contribuem para o cálculo da média.

### 4.1 Definição e principais propriedades dos centros de massas riemannianos $L^\alpha$

O processo de filtragem consiste em computar centros de massa riemannianos (centroides riemannianos) de um conjunto de amostras em  $M$  e usá-los como solução do processo de filtragem. Formalmente, seja  $\{x_i\}_{i=1}^N \subset M$  um conjunto finito. Aqui, discutimos aspectos gerais relacionados à existência e a unicidade de centros de massa ponderados riemannianos  $L^\alpha$ , por  $\alpha \in [1, \infty)$ .

Primeiro, para sintetizar uma definição apropriada de centro de massa, devemos assumir que os pontos  $x_i \in M$  pertencem a um conjunto convexo  $U \subset M$ , o qual é um conjunto tal que quaisquer dois pontos nele contidos possam ser conectados por uma simples e única, para variedades Hadamard (variedades riemannianas de curvatura seccional não positiva em qualquer ponto), geodésica inteiramente contida em  $U$ . Nesse caso, a média ponderada e a mediana existem e são únicas, conforme discutido em [8].

O mesmo resultado é garantido assumindo que a variedade riemanniana  $M$  tenha

uma curvatura seccional limitada superiormente por algum  $\delta > 0$ , em qualquer ponto. Nesse caso, o limite superior do diâmetro deve ser igual a  $\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ , conforme discutido em [8] e [16]. Para o caso geral, a existência e a unicidade dos centros de massa riemannianos  $L^\alpha$  para  $\alpha \in [1, \infty]$  são garantidas em [5] e [14].

A definição para o caso discreto dos centros de massa ponderados riemannianos  $L^\alpha$ , para  $1 \leq \alpha \leq \infty$ , é enunciado como segue.

**Definição 4.1.1.** *Seja  $(M, d)$  uma variedade riemanniana. Também, seja  $\beta$  uma distribuição de probabilidade, com suporte finito em  $\mathcal{X} = \{x_i\}_{i=1}^N \subset M$ , onde  $\beta(x_i) = \omega_i > 0$ . O centro de massa riemanniano  $L^\alpha$  é definido como um mínimo da função potencial  $f_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^N \omega_i d(x, x_i)^\alpha, & \alpha \in [1, \infty), \\ \max_i d(x, x_i), & \alpha = \infty. \end{cases} \quad (4.1)$$

**Lema 4.1.1.** *Seja  $(M, d)$  uma variedade riemanniana completa com curvatura seccional limitada superiormente por  $\Delta$  e cujo o raio de injetividade é  $\text{inj}M$ . Se  $f_\alpha : \overline{\mathbb{B}(o, \rho)} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathcal{X} = \{x_i\}_{i=1}^N \subset \overline{\mathbb{B}(o, \rho)} \subset M$ , com  $\rho < \rho_{\Delta, \alpha}$ , onde  $\overline{\mathbb{B}(o, \rho)}$  é o fecho da bola aberta de raio  $\rho$  e centro  $o$ , onde  $\rho_{\Delta, \alpha}$  é definido pela seguinte relação*

$$\rho_{\Delta, \alpha} = \begin{cases} \frac{1}{2} \min \left\{ \text{inj}M, \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}} \right\} & , \quad 1 \leq \alpha < 2, \\ \frac{1}{2} \min \left\{ \text{inj}M, \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \right\} & , \quad 2 \leq \alpha \leq \infty. \end{cases} \quad (4.2)$$

Então,  $f_\alpha$  tem um único centro de massa riemanniano  $L^\alpha$ , o qual encontra-se em  $\mathbb{B}(o, \rho)$ . Além disso, a hessiana de  $f_\alpha$  é positiva definida em  $x \neq x_i$ .

*Demonstração.* Segue diretamente do teorema 2.1 em [5]. □

**Lema 4.1.2.** *Seja  $f_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in [1, \infty)$ , uma função potencial definida em (4.1). Então,  $f_\alpha$  é estritamente convexa e suave exceto para o caso  $\alpha = 1$ , onde  $f_1$  é apenas convexa e suave para  $x \neq x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Seu gradiente, denotado por  $\text{grad } f_\alpha$ , para qualquer  $\alpha \in [1, \infty)$ , em  $x \in M$ , é dado por*

$$\text{grad } f_\alpha(x) = - \sum_{i=1}^N \omega_i d(x, x_i)^{\alpha-2} \log_x(x_i), \quad (4.3)$$

e sua Hessiana é a simétrica e bi-linear forma dada por  $\text{Hess } f_\alpha(x) : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\text{Hess } f_\alpha(x)(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = \frac{d^2}{dt^2} f_\alpha(\gamma(t))|_{t=0}$ , onde  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  é qualquer curva suave ou geodésica passando por  $x$  e  $t$ .

*Demonstração.* Segue diretamente do teorema 2.1 em [5]. □

Levando em conta os Lemas (4.1.2) e (4.1.1), o centro de massa riemanniano  $L^\alpha$ , para qualquer  $\alpha \in [1, \infty)$  (exceto para o caso  $\alpha = 1$  e  $x = x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ), é caracterizado pela seguinte equação

$$\sum_{i=1}^N \omega_i d(x, x_i)^{\alpha-2} \log_x(x_i) = 0. \quad (4.4)$$

## 4.2 A continuidade dos centros de massa riemanniano $L^\alpha$ em $\alpha$ , $x_i$ 's e $\omega_i$ 's

A continuidade dos centros de massas riemannianos  $L^\alpha$  com relação ao parâmetro  $\alpha$  e as amostras no domínio da imagem DTI-RM, bem como em seus pesos, é uma característica essencial para garantir uma boa correlação espacial no processo de filtragem, já que um filtro deve manter-se estável sem grandes variações para pequenas perturbações nos valores de  $\alpha$ , bem como nos pontos  $x_i$ 's de uma amostra e seus pesos. Aqui, sintetizamos resultados sobre a continuidade dos  $L^\alpha$  em relação aos elementos  $\alpha$ ,  $x_i$  e  $\omega_i$  apresentados em [6] e esclarecemos detalhes sobre as provas deles.

**Lema 4.2.1.** *Seja  $f_\alpha : \overline{\mathbb{B}(o, \rho)} \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $\rho < \rho_{\Delta, \alpha}$ , com  $\rho_{\Delta, \alpha}$  dado como em (4.2). Para  $\alpha = 1$  e  $\alpha = \infty$ ,  $f_\alpha$  é Lipschitz, com constante Lipschitz igual a 1.*

*Demonstração.* Observe que mantendo os pesos  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  fixos, a função  $f_1$  é Lipschitz contínua, com constante Lipschitz igual a 1. De fato,  $d(x, x_i) \leq d(y, x_i) + d(x, y)$ , para qualquer  $x, y \in \overline{\mathbb{B}(o, \rho)}$ . Isso implica que  $\omega_i d(x, x_i) - \omega_i d(y, x_i) \leq \omega_i d(x, y)$ , para todo  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Assim,  $f_1(x) - f_1(y) = \sum_{i=1}^N (\omega_i d(x, x_i) - \omega_i d(y, x_i)) \leq \sum_{i=1}^N \omega_i d(x, y) = d(x, y) \sum_{i=1}^N \omega_i = d(x, y)$ . Agora, considerando  $f_\infty$ , defina

$$\bar{f}_\alpha = \left( \sum_i^N \omega_i d(x, x_i)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \{x_i\}_{i=1}^N \subset \overline{\mathbb{B}(o, \rho)}, \quad (4.5)$$

também mantendo os pesos  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  fixos. Podemos observar que  $\bar{f}_\alpha \rightarrow f_\infty$  quando  $\alpha \rightarrow \infty$ . Além disso, nas condições do Lema (4.1.1), ambas  $f_\alpha$  e  $\bar{f}_\alpha$  tem o mesmo e único mínimo, isto é,  $\bar{x}_\alpha$ . Note que pelo Lema (4.1.2) e a conhecida regra da cadeia, que o gradiente de  $\bar{f}_\alpha$ , em  $x \in \overline{\mathbb{B}(o, \rho)}$ , é dado por

$$\nabla \bar{f}_\alpha = -\frac{1}{\alpha} \left( \sum_{i=1}^N \omega_i d(x, x_i)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \sum_{i=1}^N \omega_i d(x, x_i)^{\alpha-2} \log_x(x_i).$$

Afirmamos que  $\|\nabla \bar{f}_\alpha\| \leq 1$  para todo  $x \in \overline{\mathbb{B}(o, \rho)}$ . Assim,  $\bar{f}_\alpha$  é Lipschitz contínua, com constante Lipschitz igual a 1, para  $1 \leq \alpha \leq \infty$ . De fato,  $\alpha = 1$

e levando em conta que  $\mathcal{X} = \{x_i\}_{i=1}^N \subset \overline{\mathbb{B}(o, \rho)}$ , a saber  $d(x, x_i) \leq 2\rho$ , para qualquer  $x \in \overline{\mathbb{B}(o, \rho)}$ ,  $\|log_x(x_i)\| = d(x, x_i) = d_x(x_i)$  e  $\sum_i^N \omega_i = 1$ , nós temos que

$$\begin{aligned} \|\nabla \bar{f}_\alpha(x)\|_x &\leq \frac{1}{\alpha} \left( \sum_{i=1}^N \omega_i d_x(x_i)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot \sum_{i=1}^N \omega_i d_x(x_i)^{\alpha-2} \|log_x(x_i)\| \\ &= \frac{1}{\alpha} \left( \sum_{i=1}^N \omega_i d_x(x_i)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \sum_{i=1}^N \omega_i d_x(x_i)^{\alpha-1} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \left( \sum_{i=1}^N \omega_i (2\rho)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \sum_{i=1}^N \omega_i (2\rho)^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha} \leq 1, \end{aligned}$$

para todo  $\alpha \in [1, \infty)$ . Desta forma, para  $\alpha \rightarrow \infty$  nós temos que  $\|\nabla \bar{f}_\alpha\| \rightarrow 0$ . Assim, concluímos o resultado. Já que  $\bar{f}_\alpha$  é Lipschitz contínua, com Lipschitz constante igual a 1, para todo  $1 \leq \alpha \leq \infty$ , então a sequência  $\{\bar{f}_\alpha\}_\alpha$  é uniforme, limitada e equicontínua. Pelo Teorema **Arzela-Ascoli**, existe uma subsequência  $\{\bar{f}_{\alpha_j}\}$  a qual converge uniformemente para  $f_\infty$  em  $\mathbb{B}(o, \rho)$ . Como a convergência é uniforme, a função limite  $f_\infty$  é Lipschitz, com constante Lipschitz iguala 1.  $\square$

**Teorema 4.2.1.** *Seja  $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^N$  uma medida de probabilidade com suporte em  $\mathcal{X} = \{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{B}(o, \rho)$  e  $\rho < \rho_{\Delta, \alpha}$ , onde  $\rho_{\Delta, \alpha}$  é definida como em (4.2). Denote o centro de massa riemanniano  $L^\alpha$ , para  $1 \leq \alpha \leq \infty$ , correspondendo à  $\Omega$ , apenas por  $L^\alpha$ . Então,  $L^\alpha$  depende continuamente em  $\alpha$ ,  $\mathcal{X}$  e  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Primeiro assumimos  $2 \leq \alpha \leq \infty$ . Por hipóteses,  $L^\alpha$  é a solução da equação  $F_\alpha(x; \mathcal{X}, \Omega) = -\nabla f_\alpha = 0$ . Note que a derivada de  $F_\alpha$ , com respeito a  $x$ , é a hessiana de  $f_\alpha$ . Também, observe que  $F_\alpha$  não é  $C^\infty$  em  $x = x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , e o grau de suavidade em  $x = x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , depende de  $\alpha$ . Para  $x \notin \mathcal{X}$ ,  $F_\alpha$  é de classe  $C^\infty$ . Usando o fato que  $F_\alpha(L^\alpha; \mathcal{X}, \Omega) = -\nabla f_\alpha = 0$  e que o gradiente de  $\nabla F_\alpha$  é não singular (em outra perspectiva, ela é simétrica positiva definida uma vez que  $f_p$  é estritamente convexa como afirma o Teorema 2.1 em [5]) como  $L^\alpha$  é único, pelo teorema da **Função implícita**, existe  $\epsilon > 0$  para o qual  $\nabla F_\alpha$  é não singular, para todo  $x$  em uma  $\epsilon$ -vizinhança  $V_\epsilon(L^\alpha) \subset B(o, \rho)$  de  $L^\alpha$ . Assim,  $L^\alpha$  depende continuamente em  $\mathcal{X}$  e  $\Omega$ . Para  $1 \leq \alpha < 2$ ,  $F_\alpha$  não é diferenciável em  $x_i$ 's. Assim, a presente argumentação não pode ser usada. No entanto, como  $\overline{B(o, \rho)}$  é compacto e  $\{\bar{f}_\alpha\}_\alpha$  é equicontínuo e uniformemente limitado (ver Lema 4.2.1), novamente pelo Teorema **Arzela-Ascoli** podemos extrair uma subsequência convergente  $\langle \bar{f}_\alpha^{k_j} \rangle_{k_j}$  que converge uniformemente em  $\bar{f}_\alpha$ . Assim, para qualquer  $\epsilon > 0$  e  $k_j$  suficientemente grande,  $|\bar{f}_\alpha(x, \mathcal{X}_{k_j}) - \bar{f}_\alpha(x, \mathcal{X})| < \epsilon$ . Então,  $\min \bar{f}_\alpha(x, \mathcal{X}_{k_j}) \rightarrow \min \bar{f}_\alpha(x, \mathcal{X})$  quando  $\mathcal{X}_k \rightarrow \mathcal{X}$ . Como  $\bar{f}_\alpha(\cdot, \cdot)$  é equicontínua, temos

$$|\bar{f}_\alpha(\bar{x}_\alpha^{k_j}, \mathcal{X}) - \bar{f}_\alpha(L^\alpha, \mathcal{X})| \leq |\bar{f}_\alpha(\bar{x}_\alpha^{k_j}, \mathcal{X}) - \bar{f}_\alpha(\bar{x}_\alpha^{k_j}, \mathcal{X}_{k_j})| + |\bar{f}_\alpha(\bar{x}_\alpha^{k_j}, \mathcal{X}_{k_j}) - \bar{f}_\alpha(L^\alpha, \mathcal{X})|.$$

Desa forma, o  $\lim \bar{f}_\alpha(\bar{x}_\alpha^{k_j}, \mathcal{X}) = \bar{f}_\alpha(L^\alpha, \mathcal{X})$  quando  $\bar{x}_\alpha^{k_j} \rightarrow L^\alpha$ . Como  $L^\alpha$  é o único minimizador de  $\bar{f}_\alpha$  e  $f_\alpha$ , temos que o  $\lim \bar{x}_\alpha^{k_j} = L^\alpha$ . Agora, usando o fato que  $\lim \bar{x}_\alpha^k = L^\alpha$  e que  $\lim \bar{f}_\alpha(L^\alpha) = f_\alpha(L^\alpha)$ , Nós temos  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \bar{f}_\alpha(L^\alpha) = f_\alpha(L^\alpha)$ .  $\square$

## Capítulo 5

# Representação Riemanniana de tensores de difusão

Nesta seção apresentamos alguns resultados acerca das matrizes simétricas positivas definidas. Para maiores esclarecimentos, sugerimos a consulta de [28].

### 5.1 Conceitos de Análise matricial

Seja  $x^T y$  o produto interno em  $\mathbb{R}^n$ , onde  $x$  e  $y$  são vetores dados. Podemos estendê-lo ao espaço das matrizes retangulares levando em consideração a aplicação  $vec : M_{m \times n} \rightarrow R^{n.m}$ , definida por  $vec(A) = (a_{11}, \dots, a_{m1}, a_{12}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn})^T$ , que transforma matrizes em vetores. Dadas matrizes  $A, B \in M_{m \times n}$ , o produto interno entre  $A$  e  $B$ , denotado por  $A \cdot B$ , pode ser escrito como

$$A \cdot B = vec(B)^T vec(A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} = tr(B^T A), \quad (5.1)$$

com norma dada por

$$\sqrt{(A \cdot A)} = \sqrt{tr(A^T A)} = \|A\|_F, \quad (5.2)$$

onde  $\|A\|_F$  é a norma de Frobenius de  $A$ . Uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  é simétrica positiva semi-definida se  $x^T A x \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e simétrica positiva definida se  $x^T A x > 0$ , para todo  $x \neq 0$ .

**Teorema 5.1.1** (Teorema espectral para matrizes simétricas). *Uma matriz  $A$  é simétrica se, e somente se, existe uma matriz  $Q$ ,  $n \times n$ , tal que  $Q^T Q = Q Q^T = I$  e  $Q^T A Q = \Lambda$ , onde  $\Lambda$  é real e diagonal.  $\Lambda = Q^T A Q$  é a decomposição de Schur em autovalores da matriz  $A$ .*

Em DTI-RM, torna-se necessário conhecer alguns conceitos e propriedades inerentes à geometria natural da variedade de matrizes simétricas positivas definidas de ordem  $n$ , denotado aqui por  $\mathcal{P}(n)$ . Dentre as referências que tratam do assunto destacam-se [29] e [7].

Seja  $\mathcal{P}(n)$  uma variedade diferenciável munida de estrutura Riemanniana cujo produto interno em cada ponto  $P \in \mathcal{P}(n)$ , é definido por

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(P^{-1}AP^{-1}B), \quad (5.3)$$

onde  $A, B \in T_P\mathcal{P}(n)$ , sendo  $T_P\mathcal{P}(n)$  o espaço tangente à  $\mathcal{P}(n)$  em  $P$ . Sendo assim, para uma curva suave  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{P}(n)$ , o comprimento de  $\gamma(t)$  é definido como

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt = \int_a^b \sqrt{\text{tr}([\gamma(t)]^{-1}\gamma'(t)[\gamma(t)]^{-1}\gamma'(t))} dt. \quad (5.4)$$

Por outro lado, a única geodésica que conecta dois pontos  $P, Q \in \mathcal{P}(n)$  é expressa por

$$\gamma(t) = P^{\frac{1}{2}}(P^{-\frac{1}{2}}QP^{-\frac{1}{2}})^t P^{\frac{1}{2}}. \quad (5.5)$$

Além disso, a distância geodésica entre  $P$  e  $Q$  é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{\text{tr}(\log^2(P^{-1}Q))}. \quad (5.6)$$

Por fim, para um ponto  $P \in \mathcal{P}(n)$  as aplicações exponencial  $\exp_P : T_P\mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{P}(n)$  e logarítmica  $\log_P : \mathcal{P}(n) \rightarrow T_P\mathcal{P}(n)$ , têm suas expressões dadas por

$$\exp_P V = P^{\frac{1}{2}} \exp VP^{\frac{1}{2}}, \quad (5.7)$$

$$\log_P Q = \log \left( P^{\frac{1}{2}} Q P^{\frac{1}{2}} \right), \quad (5.8)$$

onde  $V \in T_P\mathcal{P}(n)$ ,  $Q \in \mathcal{P}(n)$ ,  $\exp$  representa a aplicação exponencial usual para matrizes simétricas e  $\log$ , a aplicação logarítmica usual para matrizes simétricas positivas definidas.

Seja  $A \in \mathcal{P}(n)$  uma matriz simétrica definida positiva. Denomina-se raiz quadrada de  $A$ , a matriz  $B \in \mathcal{P}(n)$  que satisfaz  $BB = A$ . Nesse caso  $B$  é representado por  $A^{\frac{1}{2}}$ . Se  $Q\Lambda^2 Q^T$  é a diagonalização de  $A$ , então,  $A^{\frac{1}{2}} = Q\Lambda Q^T$  é a raiz quadrada de  $A$  e é obtida de maneira única.

### 5.1.1 Tipos de médias

Os dados de imagens DTI-RM não podem ser tratados pela perspectiva de estruturas matemáticas clássicas, tais como os espaços vetoriais e suas propriedades,



visto que as manipulações desses dados são realizadas em  $\mathcal{P}(n)$  que topologicamente representa um exemplo de cone convexo, aberto e sem vértice. Portanto, cuidados devem ser tomados quando se realizam cálculos e estatísticas no espaço de tensores conforme pode ser verificado em [16] e [14].

**Exemplo 5.1.1.** Considere um conjunto de  $m$  números positivos,  $x_1, \dots, x_m$ , a média aritmética ponderada deste conjunto é o número  $\bar{x} = \sum_{i=1}^m \omega_i x_i$ , onde  $\omega_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, m$  são os pesos com  $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$ . Quando os pesos são igualmente distribuídos, isto é,  $\omega_i = \frac{1}{m}$ , temos simplesmente a média aritmética. Essa média possui a seguinte propriedade variacional

$$\bar{x} = \min_{x > 0} \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i d_e(x_i, x)^2 \right\} \quad (5.9)$$

onde  $d_e(x, y) = |x - y|$  é a distância euclidiana usual em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 5.1.2.** A média geométrica de  $x_1, \dots, x_m$ , dada por  $\bar{x} = \sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \dots x_m}$ , também possui uma formulação variacional. Ela pode ser definida como

$$\bar{x} = \min_{x > 0} \left\{ \sum_{i=1}^m d_h(x_i, x)^2 \right\}, \quad (5.10)$$

onde  $d_h(x, y) = |\log x - \log y|$  é a distância hiperbólica entre  $x$  e  $y$ .

**Exemplo 5.1.3.** A média harmônica de um conjunto de  $m$  números positivos, é obtida somando-se o inverso de cada valor  $x_i$ , isto é,

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i)^{-1}. \quad (5.11)$$

## 5.1.2 Médias no cone das matrizes simétricas positivas definidas

A média ponderada no caso euclidiano de  $m$  matrizes simétricas positivas definidas  $X_1, \dots, X_m$  é definida como

$$\mu_e = \operatorname{argmin}_{X \in \mathcal{P}(n)} \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i \|X_i - X\|_F^2 \right\}. \quad (5.12)$$

onde  $\omega_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , com  $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$ .

Contudo, esta abordagem pode ser estendida de forma direta para o caso riemanniano. Deste modo, a média ponderada no caso Riemanniano, isto é, associada à métrica descrita na equação (5.6) de  $N$  matrizes simétricas positivas definidas  $X_1, \dots, X_N$  pode ser definida como

$$\mu = \underset{X \in \mathcal{P}(n)}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^N \omega_i d(X, X_i)^2 \right\}. \quad (5.13)$$

onde  $\omega_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, N$ , com  $\sum_{i=1}^N \omega_i = 1$ .

O centro de massa riemanniano  $L^\alpha$ , com  $\alpha \in [1, \infty)$  em  $M = \mathcal{P}(n)$ , pode ser obtido solucionando o problema de minimização (5.14). Este problema pode ser definido através das relações (5.13 e 4.1). Desta forma, temos o seguinte problema de minimização em  $\mathcal{P}(n)$ :

$$L^\alpha = \underset{X \in \mathcal{P}(n)}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^N \omega_i d(X, X_i)^\alpha, X_i \in \mathcal{P}(n) \right\}, \quad (5.14)$$

onde  $d(X, Y)$  é a distância riemanniana entre  $X$  e  $Y$  em  $\mathcal{P}(n)$ .

## 5.2 Métodos numéricos para cômputo de centros de massa riemannianos em $\mathcal{P}(n)$

Seja  $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_m\} \subset \mathcal{P}(n)$  uma medida de probabilidade discreta com suporte  $\mathcal{X}$  e  $0 \leq \omega(X_i) = \omega_i \leq 1$ ,  $1 \leq i \leq m$ , tal que  $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$ . O centro de massa  $L^\alpha$  com  $(1 \leq \alpha < \infty)$  para  $\mathcal{X}$  é definido por  $\mu_{\alpha, \mathcal{X}}$ . Defina  $f : \overline{\mathcal{P}(n)} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  por

$$f_\alpha(X) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \omega_i d^\alpha(X, X_i) & , X \in \mathcal{P}(n) \\ +\infty & , X \in \partial \mathcal{P}(n). \end{cases}$$

Então,  $f_p$  é suave em  $\mathcal{P}(n) \setminus \mathcal{X}$  e estritamente convexa em  $\mathcal{P}(n)$  (exceto quando a medida de probabilidade  $\omega$  do segmento geodésico é 1, onde  $f_1$  é apenas convexa), e seu gradiente é dado por

$$\operatorname{grad} f_\alpha(X) = -X^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{i=1}^m \omega_i d^{\alpha-2}(X, X_i) \log \left( X^{-\frac{1}{2}} X_i X^{-\frac{1}{2}} \right) \right] X^{\frac{1}{2}}.$$

Para calcular o mínimo de  $f_\alpha$ , uma forma muito utilizada e fácil de implementar, é o método do gradiente descendente, conforme visto em [14] e [16]. O esquema seguinte nos permite calcular o centro de massa ou média riemanniana  $L^\alpha$  de  $f_\alpha$  da seguinte forma:

$$X^{t+1} = \exp_{X^t} \left( \sum_{k=1}^N \omega_k d(X^t, X_k)^{\alpha-2} \log_{X^t}(X_k) \right).$$

No entanto, esta formulação não pode ser aplicada, uma vez que  $f_\alpha$  é não diferenciável em  $X = X_k$  para  $\alpha = 1$ . Para contornar este problema, nós propomos

a utilização de um algoritmo em variedade de Hadamard proposto por [9]. Esta técnica pertence a classe de métodos de pontos proximais que foi introduzida por [30], estendida para operadores monótonos por [31] e para a classe de métodos em variedades de Hadamard por [32].

Dado uma sequência de números positivos  $\{\lambda_t\}$  e um ponto  $q_0 \in D$ , onde  $D$  é uma variedade de Hadamard, o método de ponto proximal consiste em gerar uma sequência  $\{q_t\} \subset D$ , definida por

$$q_{t+1} = \underset{q \in D}{\operatorname{argmin}} \left\{ f_\alpha(q) + \frac{\lambda_t}{2} d^2(q, q_t) \right\} \quad (t = 0, 1, \dots). \quad (5.15)$$

onde  $\{q_t\}$  está bem definido e é caracterizado por

$$\lambda_t \log_{q_{t+1}}(q_t) \in \partial f_\alpha(q_{t+1}). \quad (5.16)$$

onde  $\partial f_\alpha$  é o sub-diferencial de  $f_\alpha$ .

Notemos que para todo  $t(t = 0, 1, \dots)$

$$\operatorname{grad} f_\alpha(q_{t+1}) = -\lambda_t \log_{q_{t+1}}(q_t), \quad (5.17)$$

se  $f_\alpha$  é diferenciável.

A metodologia proposta por [9] é uma extensão de [33] a qual consiste em substituir a iteração (5.15) por duas novas iterações. O algoritmo apresentado em [33] é um caso particular do método proposto por [32], onde  $M \equiv \mathcal{P}(n)$ . Baseado na fatoração de Schur de matrizes simétricas positivas definidas, ele computa pontos nas trajetórias proximais gerados pelo método em [32] dando passos na direção de descida no espectro da matriz iterada da função a ser minimizada, sem perda na positividade, e posteriormente aplica a fatoração de Schur para atualizar a matriz com relação ao passo ortogonal.

Sendo assim, para considerarmos o algoritmo proposto por [9], analisaremos alguns aspectos relacionados ao cálculo do centro de massa  $L^\alpha$ . Sejam  $D_1 \equiv \mathbf{DP}(n)$ ,  $D_2 \equiv \mathcal{O}(n)$  e  $\mathcal{U}(n)$  os conjuntos de matrizes diagonais positivas definidas, o grupo de matrizes ortogonais e o grupo de matrizes unitárias  $n \times n$ , respectivamente.

Dado  $(b_0, c_0) \in D_1 \times D_2$ , o algoritmo gera duas sequências  $\{b_j\} \subset D_1$  e  $\{c_j\} \subset D_2$  definidas pelas seguintes iterações

$$b_{j+1} = \arg \min \left\{ \phi_k(b, c_j) + \frac{\beta_k}{2} \rho_k(b, c_j) : b \in D_1 \right\}, \quad (5.18)$$

$$c_{j+1} \in \arg \min \left\{ \phi_k(b_{j+1}, c) + \frac{\beta_k}{2} \rho_k(b_{j+1}, c) : c \in D_2 \right\}. \quad (5.19)$$

Sendo assim, considerando  $\varphi(\Lambda, Q) = Q\Lambda Q^T$ , temos que  $\mathcal{P}(n)$  é um irreduzível

domínio de positividade não linear. Isso implica que  $\phi_k, \rho_k : \mathbf{DP}(n) \times \mathcal{O}(n) \rightarrow \mathbb{R}$  são dados por

$$\begin{aligned}\phi_k(\Lambda, Q) &= f_\alpha \left( X^{k\frac{1}{2}} Q \Lambda Q^T X^{k\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \omega_i d^\alpha \left( X^{k\frac{1}{2}} Q \Lambda Q^T X^{k\frac{1}{2}}, X_i \right) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \omega_i d^\alpha \left( X_i, X^{k\frac{1}{2}} Q \Lambda Q^T X^{k\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \omega_i d^\alpha \left( I, X_i^{-\frac{1}{2}} X^{k\frac{1}{2}} Q \Lambda Q^T X^{k\frac{1}{2}} X_i^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \omega_i \left[ \sum_{\iota=1}^n \ln^2 \lambda_\iota \left( X_i^{-\frac{1}{2}} X^{k\frac{1}{2}} Q \Lambda Q^T X^{k\frac{1}{2}} X_i^{-\frac{1}{2}} \right) \right]^{\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

e

$$\rho_k(\Lambda, Q) = d^2(Q \Lambda Q^T, I) = d^2(I, Q \Lambda Q^T) = d^2(I, \Lambda) = \sum_{\iota=1}^n \ln^2 \lambda_\iota.$$

Uma vez que  $d$  é invariante sob automorfismos,  $T_i, T_Q : \mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{P}(n)$ , dados por  $T_i(Y) = X_i^{-\frac{1}{2}} Y X_i^{-\frac{1}{2}}$  e  $T_Q(Y) = Q^T Y Q$ , são automorfismos ( $i = 1, \dots, m$ ).

A partir destes resultados podemos obter as soluções dos problemas de minimização (5.18, 5.19), para produzir as soluções para o  $b_{j+1} = \Lambda_{j+1} \in \mathbf{DP}(n)$  e  $c_{j+1} = Q_{j+1} \in \mathbf{OP}(n)$ , respectivamente.

### 5.2.1 Calculando o fluxo do gradiente em $\Lambda_{j+1}$

Os resultados aqui contidos podem ser encontrados na íntegra em [9]. Para solucionarmos o problema (5.18), precisamos quantificar do gradiente em  $\Lambda_{j+1}$ . Para isso, consideremos os resultados a seguir:

**Corolário 5.2.1.** *Seja  $f : \mathcal{P}(n) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $Q \in \mathcal{O}(n)$  qualquer matriz ortogonal fixa. Defina  $\phi_{k,Q} : \mathbf{DP}(n) \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\phi_{k,Q}(\Lambda) = \phi_k(\Lambda, Q) = f \left( X^{k\frac{1}{2}} Q \Lambda Q^T X^{k\frac{1}{2}} \right)$ . Também, defina*

$$\mathcal{D} = \{ \tilde{\Lambda} \in \mathbf{DP}(n) : X^{k\frac{1}{2}} Q \tilde{\Lambda} Q^T X^{k\frac{1}{2}} \in \mathcal{X} \}.$$

Então,  $\phi_{k,Q}$  é suave em  $\mathbf{DP}(n) \setminus \{\mathcal{D}\}$  e estritamente convexa em  $\mathbf{DP}(n)$ .

*Demonstração.* Como  $f_\alpha$  é suave em  $\mathcal{P}(n) \setminus \mathcal{X}$  e estritamente convexa em  $\mathcal{P}(n)$  e  $T_k^{-1} \circ \varphi$  é uma composição de funções de classe  $C^\infty$ , onde  $T_k^{-1} \circ \varphi(\Lambda, Q) = T_k^{-1}(\varphi(\Lambda, Q)) = X^{k\frac{1}{2}} Q \Lambda Q^T X^{k\frac{1}{2}}$ ,  $\phi_{k,Q}$  é suave. Sua estrita convexidade segue do Lema 1 em [9].  $\square$

Agora, seja  $Q_1(\Lambda), \dots, Q_m(\Lambda) \in \mathcal{O}(n)$  e  $\Lambda_1(\Lambda), \dots, \Lambda_m(\Lambda) \in \mathbf{DP}(n)$  matrizes tais que

$$Q_i^T X_i^{-\frac{1}{2}} X^{k\frac{1}{2}} Q \Lambda Q^T X^{k\frac{1}{2}} X_i^{-\frac{1}{2}} Q_i = \Lambda_i(\Lambda), \quad i = 1, \dots, m.$$

Então,

$$\phi_{k,Q}(\Lambda) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \omega_i d^\alpha(I, \Lambda_i(\Lambda)). \quad (5.20)$$

Note que o gradiente de  $\phi_{k,Q}$  não é obtido diretamente da aplicação da regra da cadeia da composição  $d_I^\alpha \circ \Lambda_i$ , onde  $d_I^\alpha : \mathcal{P}(n) \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por  $d_I^\alpha(Y) = d^\alpha(I, Y)$  e  $\Lambda_i : \mathbf{DP}(n) \rightarrow \mathbf{DP}(n)$ ,  $i = 1, \dots, m$  é a aplicação que mapeia  $\Lambda$  como uma matriz diagonal definida positiva cujo os elementos da diagonal são os autovalores de  $X_i^{-\frac{1}{2}} X^{k\frac{1}{2}} Q \Lambda Q^T X^{k\frac{1}{2}} X_i^{-\frac{1}{2}}$ , apesar de  $\phi_{k,Q}$  ser suave em  $\mathbf{DP}(n) \setminus \{\mathcal{D}\}$ , uma vez que apenas os elementos diagonais de  $\Lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , com multiplicidade 1 são suaves em relação a  $\Lambda$ . Recomendamos [34] para obter mais detalhes sobre autovalores e autovetores como funções suaves de matrizes simétricas. Portanto, métodos analíticos suaves não são adequados para calcular  $\Lambda_{j+1}$ , definida como a solução exclusiva do problema de otimização convexa

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \phi_{k,Q_j}(\Lambda) + \frac{\beta_k}{2} \rho_{k,Q_j}(\Lambda), \\ & \text{sujeito a} \quad \Lambda \in \mathbf{DP}(n), \end{aligned}$$

a menos que a fórmula para  $\text{grad } \phi_{k,Q}(\Lambda)$  possa ser explicitamente obtida.

No entanto, existem formas alternativas para computar numericamente  $\text{grad } \phi_{k,Q_j}(\Lambda)$ . Por exemplo, seja  $S \in T_\Lambda \mathbf{DP}(n)$  e  $\xi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{DP}(n)$  ser as geodésicas tais que  $\xi(0) = \Lambda$  e  $\xi'(0) = S$ . De acordo com [7], a fórmula para  $\xi$  é dada por

$$\xi(t) = \Lambda \text{Exp}(t \cdot \Lambda^{-1} S),$$

uma vez que  $\Lambda$  e  $S$  são matrizes diagonais. A saber,  $\text{Exp}(\Lambda^{-1} S)$  é a matriz diagonal definida positiva tal que os elementos da diagonal são da forma  $\text{Exp}(t \cdot \frac{S_{\iota\iota}}{\Lambda_{\iota\iota}})$ ,  $\iota = 1, \dots, n$ , onde  $\text{Exp}$  denota a função exponencial neste caso. Então, a derivada direcional de  $\phi_{k,Q_j}$ , em  $\Lambda$ , com respeito à  $S$ ,

$$D\phi_{k,Q_j}(\Lambda)[S] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi_{k,Q_j}(\xi(t)) - \phi_{k,Q_j}(\Lambda)}{t}, \quad (5.21)$$

dá o valor de

$$\langle \text{grad } \phi_{k,Q_j}(\Lambda), S \rangle_\Lambda.$$

Seja  $\mathcal{B} = \{E_1, \dots, E_n\}$  a base canônica do conjunto de matrizes diagonais, onde  $E_\iota$ ,  $\iota = 1, \dots, n$ , é a matriz diagonal do qual  $[E_\iota]_{\kappa\kappa} = 1$  if  $\kappa = \iota$  e  $[E_\iota]_{\kappa\kappa} = 0$  outro caso ( $\kappa = 1, \dots, n$ ). Substituindo  $S$  por  $E_\iota$ ,  $\iota = 1, \dots, n$ , em (5.21) e tomando um quociente pequeno o suficiente para  $t$ , obtém-se uma aproximação numérica adequada para  $[\nabla \phi_{k,Q_j}(\Lambda)]_\iota$  já que  $\text{grad } \phi_{k,Q_j}(\Lambda)$  é metricamente equivalente à  $\nabla \phi_{k,Q_j}(\Lambda)$ , ou seja,

$$\langle \text{grad } \phi_{k,Q_j}(\Lambda), S \rangle_\Lambda = \langle \nabla \phi_{k,Q_j}(\Lambda), S \rangle,$$

onde  $\nabla \phi_{k,Q_j}(\Lambda)$  denote o gradiente euclidiano de  $\phi_{k,Q_j}$  em  $\Lambda$ , e

$$\langle \nabla \phi_{k,Q_j}(\Lambda), E_\iota \rangle = [\nabla \phi_{k,Q_j}(\Lambda)]_\iota \quad \iota = 1, \dots, n.$$

Desta forma,

$$\text{grad } \phi_{k,Q_j}(\Lambda) = [F''(\Lambda)]^{-1} \nabla \phi_{k,Q_j}(\Lambda) = \Lambda \nabla \phi_{k,Q_j}(\Lambda) \Lambda. \quad (5.22)$$

A fórmula para  $\text{grad } \phi_{k,Q_j}(\Lambda)$  em (5.22) é uma forma alternativa para computá-lo. Note que a proposta em [9] consiste em calcular  $\nabla \phi_{k,Q_j}(\Lambda)$  numericamente, usando a aproximação para a derivada direcional de  $\phi_{k,Q_j}$  em  $\Lambda$ , para qualquer  $t$  suficientemente pequeno, aproximando-se de cada uma das suas componentes, uma vez que as derivadas direcionais conduzirá ao sub-gradiente cuja existência é satisfeita pela convexidade de  $\phi_{k,Q_j}$ . Outras abordagens numéricas para esse problema, que podem fornecer melhor precisão, também podem ser investigadas.

**Corolário 5.2.2.** *Seja  $\rho_{k,Q} : \mathbf{DP}(n) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $\rho_{k,Q}(\Lambda) = \rho_k(\Lambda, Q)$ . Então,  $\rho_{k,Q}$  é uma função suave e estritamente convexa em  $\mathbf{DP}(n)$ , e seu gradiente é dado por*

$$\text{grad } \rho_{k,Q}(\Lambda) = -2 \cdot \Lambda \text{Ln}(\Lambda^{-1}).$$

*Demonstração.* O resultado segue como consequência da Proposição 2 em [9].  $\square$

### 5.2.2 Calculando o fluxo do gradiente em $Q_{j+1}$

Nesta seção, estamos interessados no gradiente natural de  $\phi_k$ , com respeito à estrutura natural para  $\mathcal{O}(n)$ , o qual é discutido em [35], por exemplo. De fato, seja  $Q \in \mathcal{O}(n)$ . O espaço tangente à  $\mathcal{O}(n)$  em  $Q$  é dado por

$$T_Q \mathcal{O}(n) = \{V \in \mathbb{R}^{n \times n} : V^T Q + Q^T V = \mathbf{0}\}$$

e a métrica riemanniana coincide com o produto interno usual para matrizes, isto é,

$$\langle V_1, V_2 \rangle_Q = \text{Tr}\{V_1^T V_2\},$$

for qualquer  $V_1, V_2 \in T_Q \mathcal{O}(n)$ , onde  $\text{Tr} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  denote o traço das matrizes quadradas. No entanto, a geodésica  $\eta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{O}(n)$  tal que  $\eta(0) = Q$  e  $\eta'(0) = V$ , para qualquer  $V \in T_Q \mathcal{O}(n)$ , is dado por

$$\eta(t) = \text{Exp}(t \cdot V Q^T) Q, \quad (5.23)$$

onde  $Exp(A)$  denote a exponencial da matriz quadrada  $A$ , aqui definida como a série

$$Exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Agora, seja  $g : \mathcal{O}(n) \rightarrow \mathbb{R}$  qualquer função diferenciável. Mais uma vez, de acordo com [35], o gradiente de  $g$  com respeito à estrutura natural de  $\mathcal{O}(n)$  em  $Q$  é dado por

$$grad\ g(Q) = \frac{1}{2} (\nabla g(Q) - Q \nabla g(Q)^T Q), \quad (5.24)$$

onde  $\nabla g(Q)$  denote o gradiente euclidiano de  $g$  em  $Q$ .

Seja  $\Lambda \in \mathbf{DP}(n)$  e  $Q : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{O}(n)$  ser um caminho diferenciável (Ver Proposição (8) em [9]). Defina  $R_{ki} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{SP}(n)$  e  $g_{ki} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$R_{ki}(t) = X_i^{-\frac{1}{2}} X^{k\frac{1}{2}} Q(t) \Lambda Q(t)^T X^{k\frac{1}{2}} X_i^{-\frac{1}{2}}$$

e

$$g_{ki}(t) = Tr \{ Ln^2 (R_{ki}(t)) \}.$$

Então,

$$\frac{d}{dt} g_{ki}(t) = 4 \cdot Tr \left\{ \left( \frac{d}{dt} Q(t) \right)^T X^{k\frac{1}{2}} X_i^{-\frac{1}{2}} Ln (R_{ki}(t)) (R_{ki}(t))^{-1} X_i^{-\frac{1}{2}} X^{k\frac{1}{2}} Q(t) \Lambda \right\}.$$

O gradiente de  $grad\ \phi_{k,\Lambda}(Q)$  é definido como segue:

**Corolário 5.2.3.** *Seja  $\Lambda \in \mathbf{DP}(n)$ . Defina  $\phi_{k,\Lambda} : \mathcal{O}(n) \rightarrow \mathbb{R}$  by*

$$\phi_{k,\Lambda}(Q) = \phi_k(\Lambda, Q).$$

Então,

$$grad\ \phi_{k,\Lambda}(Q) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^m [P_{ki} - P_{ki}^T] \right\} Q,$$

onde  $P_{ki} = 2 \cdot \omega_i [Tr \{ Ln^2 (R_{ki}) \}]^{\frac{\alpha-2}{2}} X^{k\frac{1}{2}} X_i^{-\frac{1}{2}} Ln (R_{ki}) X_i^{\frac{1}{2}} X^{k-\frac{1}{2}}.$

*Demonstração.* Ver demonstração do Corolário (5) em [9]. □

Assim, tendo em mãos os elementos para computar os centros de massas, podemos utilizar a versão inexata do algoritmo de ponto proximal proposto por [9].

# Capítulo 6

## Aplicações em DTI-RM

### 6.1 Modelo matemático de Imagem

Quando observamos uma fotografia, ou uma cena real, recebemos de cada ponto do espaço um pulso luminoso que associa uma informação de cor a esse ponto. Dessa forma, um modelo matemático natural para descrever uma imagem é o de uma função definida em uma superfície bidimensional e tomando valores em um espaço de cor.

Uma *imagem contínua* é uma aplicação  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow C$ , onde  $C$  é o espaço de cor. Enfatizamos que o adjetivo *contínuo* nesta definição é usado para informar a forma original da imagem antes de algum processo de discretização, e não com o seu significado usual em topologia de que uma aplicação  $f$  é contínua. Em geral temos  $C = \mathbb{R}^n$ , a função  $f$  é chamada de *função imagem*. O conjunto  $U$  é chamado de *suporte* da imagem, e o conjunto dos valores de  $f$ ,  $f(U)$ , que é um subconjunto de  $C$ , é chamado de conjunto de *cores da imagem*.

Os dois casos mais comuns são  $n = 1$  e  $n = 3$ . Para  $n = 3$  temos um espaço de representação de cor tricromático, em geral um espaço com base nas cores **R**, **G**, **B** (vermelho, verde e azul), e portanto uma imagem colorida. Quando  $n = 1$  dizemos que a imagem é *monocromática*.

Uma imagem monocromática pode ser visualizada geometricamente como o gráfico de  $G(f)$  da função imagem  $f$ ,

$$G(f) = \{(x, y, z); (x, y) \in U \text{ e } z = f(x, y)\}, \quad (6.1)$$

considerando os valores de intensidade como a altura  $z = f(x, y)$  em cada ponto  $(x, y)$  do domínio.

Essa interpretação geométrica permite uma visão mais intuitiva de certos aspectos da imagem, como por exemplo identificar as regiões de descontinuidade da função, que correspondem a variações bruscas na intensidade dos pontos da imagem.



### 6.1.1 Representação espacial da imagem

De acordo com [36], o método mais utilizado de discretização espacial de uma imagem é a amostragem matricial uniforme. Neste método consideramos o conjunto suporte da imagem como sendo um retângulo

$$U = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}, \quad (6.2)$$

e discretizamos esse retângulo usando pontos da malha bidimensional. Mais precisamente, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $a = c = 0$ , e a malha de discretização  $P_\Delta$  é o conjunto

$$P_\Delta = \{(x_j, y_k) \in \mathbb{R}^2\}, \quad (6.3)$$

onde

$$x_j = j \cdot \Delta x, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad \Delta x = b/m, \quad (6.4)$$

$$y_k = k \cdot \Delta y, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \Delta y = d/n. \quad (6.5)$$

A malha  $P_\Delta$  é formado por um conjunto de células

$$c_{jk} = [j\Delta x, (j+1)\Delta x] \times [k\Delta y, (k+1)\Delta y]. \quad (6.6)$$

Representar a função  $f$  reduz-se a obter um valor de cor para a função imagem  $f$  em cada uma dessas células. Para maiores detalhes ver [36].

## 6.2 Detecção de bordas em imagens

O objetivo de detectar mudanças bruscas no brilho é capturar eventos importantes e mudanças nas propriedades da imagem. Uma imagem digital convencional consiste de *pixels* regularmente arranjados em linhas e colunas. Seus níveis de cores em cada *pixel* (aglutinação de *picture's element*, ou seja, elemento de imagem, sendo *pix*, a abreviatura em inglês para *picture*, o menor elemento em um dispositivo de exibição, por exemplo, um monitor, ao qual é possível atribuir uma cor.) tomam valores entre  $[0, L-1]$ , onde  $L$  é um número que define os níveis de cores.

Para imagens digitais, os níveis de cores em dois pixels vizinhos podem ser diferentes devido à digitalização da imagem, especialmente quando o número de possíveis níveis de cor  $L$  é elevado. As **bordas** definem o contorno dos objetos encontrados nas imagens.

Considere a imagem como a superfície da função imagem  $f$ . As bordas na imagem correspondem então às variações na função  $f$ . Ao redor de uma borda,

a intensidade da imagem muda de um nível de cor mais elevado para outro de menor intensidade e vice-versa.

A detecção de bordas é um processo que utiliza essa variação brusca nas imagens para definir os contornos das regiões, contando com uma grande variedade de algoritmos. Uma vez detectadas as bordas dos objetos, eles podem ser localizados e suas propriedades básicas, como áreas, perímetros e formas podem ser medidas e segmentadas. Portanto, o processo de detecção de bordas se qualifica como uma ferramenta essencial para a análise de imagens.

Os operadores de detecção de bordas podem ser classificados em três grupos em geral: (a) aqueles com base em derivadas parciais, aproximadas por *diferenças* para o caso discreto das imagens digitais, cuja função é identificar lugares onde existem grandes mudanças de intensidade; (b) aqueles que modelam a borda com um filtro de pequenas dimensões mostrando propriedades abstratas de uma borda ideal; e (c) operadores que usam modelos matemáticos para as bordas, com base em equações diferenciais parciais, ou modelos de difusão, que procuram, dependendo do método, por máximos e mínimos de funções. Nossa abordagem, recai no primeiro tipo devido à simplicidade em quantificar o gradiente, onde utilizamos a variação local deste gradiente da imagem para definir a existência de bordas.

### 6.2.1 Detecção de borda baseado em derivadas de primeira ordem

Considere a função imagem  $\mathcal{I} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n = 2, 3$  onde para um ponto  $x \in U$  na imagem,  $\mathcal{I}(x) \in \mathbb{R}$  é sua intensidade (por exemplo, os níveis de brilho). Intuitivamente, se um *pixel* localizado na posição  $x$  se encontra em uma borda, então as derivadas parciais de primeira ordem de  $\mathcal{I}$  deve possuir magnitudes elevadas. Dessa forma, isso é identificado a partir da estimativa da norma do vetor gradiente  $\nabla \mathcal{I}(x)$  da imagem  $\mathcal{I}(x)$ , isto é,

$$M(x) = \|\nabla \mathcal{I}(x)\|, \quad (6.7)$$

Para usar a equação (6.7) para detecção de bordas, a primeira derivada com relação às coordenadas espaciais de  $\mathcal{I}$  deve ser estimada. Por isso, muitos estimadores de derivadas de primeira ordem têm sido sugeridos na literatura de processamento de imagem, como por exemplo [37].

#### Definição das derivadas da imagem

Considere uma imagem  $\mathcal{I}$  e suponha que os níveis de cores observados na imagem são  $\{c_{ij}, i = 1, \dots, n_1; j = 1, \dots, n_2\}$ . Então, no *pixel*  $(i, j)$ , as duas derivadas

parciais  $\mathcal{I}_x$  e  $\mathcal{I}_y$  podem ser estimadas pelas diferenças entre os pixels vizinhos

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_x &= c_{i+1,j} - c_{i,j} \\ \mathcal{I}_y &= c_{i,j+1} - c_{i,j},\end{aligned}\tag{6.8}$$

respectivamente. Consequentemente, a norma do vetor gradiente de  $\mathcal{I}$  pode ser estimada como

$$\overline{M}_2(i, j) = \sqrt{(c_{i+1,j} - c_{i,j})^2 + (c_{i,j+1} - c_{i,j})^2},\tag{6.9}$$

ou

$$\overline{M}_1(i, j) = |(c_{i+1,j} - c_{i,j})| + |(c_{i,j+1} - c_{i,j})|.\tag{6.10}$$

Certamente, as duas diferenças em (6.8) mencionadas acima podem ser substituídas por  $c_{i,j} - c_{i-1,j}$  e  $c_{i,j} - c_{i,j-1}$ , respectivamente. Para maiores detalhes ver [38].

## 6.2.2 Operador de detecção de bordas

O operador de detecção de bordas de **Canny** [39] é um filtro de convolução que usa a derivada de primeira ordem. Ele suaviza e localiza as bordas combinando um operador diferencial com um filtro gaussiano. Esta operação pode ser realizada através do uso de uma função gaussiana em duas dimensões, ou uma função na direção de  $x$  e posteriormente na direção  $y$ . As formas da função gaussiana dependem da escolha do desvio padrão  $\sigma$ , cuja função é controlar o grau de suavização da imagem no processo de filtragem.

A função Gaussiana em uma dimensão é expressa por:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\tag{6.11}$$

de modo que sua derivada de primeira ordem é:

$$G'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.\tag{6.12}$$

O princípio do **filtro de Canny** para detecção de bordas é usar  $G'(x)$  através da operação de convolução com a imagem para obter uma imagem  $I$  que mostrará as bordas. Considere, como uma borda, toda região da imagem cujo valor da norma de  $G'(x)$  esteja situado acima de um determinado limite superior e rejeitando todo valor situado abaixo de um limite inferior, ou seja, pontos situados entre os dois limites serão aceitos como bordas.

Perona and Malik [40] também propuseram um operador de identificação de bordas utilizando a equação de difusão anisotrópica. Eles usaram a equação padrão

do gradiente (6.7), para definir o coeficiente de condução  $c_{\mathcal{I}}(x)$  para quantificar a presença de bordas de acordo com a seguinte equação:

$$c_{\mathcal{I}}(x) = \exp\left(-\frac{\|\nabla\mathcal{I}\|}{2\sigma^2}\right), \quad (6.13)$$

onde  $\nabla\mathcal{I}$  é o gradiente de  $\mathcal{I}$  e  $\sigma$  é o desvio padrão do ruído presente na imagem. O coeficiente de condução é escolhido localmente para ser uma função monotonicamente decrescente não negativa. Desta forma, o processo de difusão ocorrerá principalmente no interior das regiões, e não afetará os limites da região onde a magnitude de  $\nabla\mathcal{I}$  é alta. A partir de um destes operadores de identificação de bordas, podemos quantificar a probabilidade de um certo tensor de difusão pertencer a uma região de bordas da imagem. Maiores detalhes podem ser encontrados em [39], [37], [41] e [38].

No caso do tensor de difusão de imagem (DTI-RM), Lenglet et al. [42] propõe uma metodologia de segmentação através do uso de medidas de dissimilaridades entre os tensores. Eles utilizaram um consistente gradiente da imagem DTI-RM para detectar as fronteiras de várias estruturas no material branco cerebral, propondo uma formulação variacional do problema de segmentação. O gradiente espacial da imagem DTI-RM  $\mathcal{T}(x)$  para todo  $x \in \Omega$  pode ser estimado a partir do gradiente das distâncias geodésicas:

$$\nabla_{k=1,2,3}^{\pm} \mathcal{T}(x) \simeq \frac{1}{|e_k|} \mathcal{T}(x) \log(\mathcal{T}(x \pm e_k)^{-1} \mathcal{T}(x)) \quad (6.14)$$

onde o  $e_k$  são os elementos da base canônica do  $\mathbb{R}^3$  e são usados para acessar a vizinhança de  $\mathcal{T}(x)$  no malha discreta espacial. O  $+$  e  $-$  identificam os operadores de diferenças finitas para frente e para trás, respectivamente. Usando diferenças finitas central, o gradiente na direção  $e_k$  é dado por:  $\nabla_k \mathcal{T}(x) \simeq \frac{1}{2}(\nabla_k^+ \mathcal{T}(x) - \nabla_k^- \mathcal{T}(x))$ . Assim, obtemos a norma do gradiente como:

$$\|\nabla\mathcal{T}(x)\|^2 = \sum_{k=1}^3 \|\nabla_k \mathcal{T}(x)\|_{\mathcal{T}(x)}^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \text{tr}((\mathcal{T}^{-1} \nabla_k \mathcal{T}(x))^2). \quad (6.15)$$

## 6.3 Princípio da formação de imagem por DTI-RM

A DTI-RM é uma modalidade recente de formação e tratamento de imagens geradas por ressonância magnética. Em DTI-RM, um tensor descreve a difusão local da molécula de água onde este é calculado, permitindo a qualificação da microestrutura do tecido vivo.

A construção do tensor de difusão requer a aquisição de um conjunto de imagens de difusões ponderadas associadas a  $n$  gradientes de direções não-colineares ( $n \geq 6$ ). Desta forma, torna-se possível estimar um tensor de difusão em cada localização espacial da imagem.

Existem duas formas de difusão: isotrópica e anisotrópica. A primeira acontece quando as moléculas têm igual probabilidade de se movimentar em todas as direções. Para isso, precisa-se apenas de um coeficiente de difusão para sua descrição. Já na segunda, existente nos tecidos biológicos, a mobilidade da molécula de água é alterada pela formação celular. Para maiores esclarecimentos é recomenda-se [43].

A figura 6.1 apresenta um exemplo de imagens de ressonância magnética extraídas de [44].

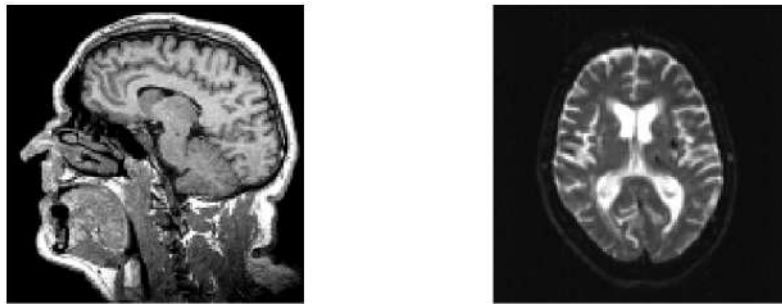


Figura 6.1: Volume de imagens de ressonância magnética.

Para descrever o movimento de água nas estruturas celulares, torna-se necessário a utilização de um tensor de difusão de ordem 3. Considere a representação matricial do tensor:

$$D = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

A matriz do tensor é constituída por nove elementos e por ser simétrica existem três elementos iguais ( $D_{xy} = D_{yx}$ ,  $D_{xz} = D_{zx}$  e  $D_{yz} = D_{zy}$ ).

A partir deste tensor de difusão é possível obter os autovetores ( $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ ) e autovalores ( $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ ) para cada um dos eixos dos elipsoides.

Além da representação matricial do tensor, pode-se representá-lo na forma de elipsoide como pode ser visto na figura 6.2 obtida de [45]:

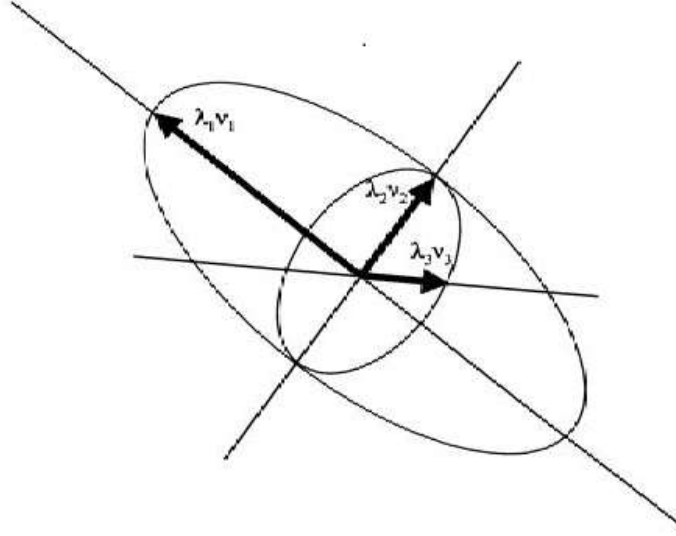


Figura 6.2: Representação elipsoidal do tensor de difusão.

### 6.3.1 Cálculo do tensor de difusão

A partir de um conjunto  $S_n : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de múltiplas imagens de ressonância magnética (MRI) podemos gerar  $\mathcal{T} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S_3^+$  o volume de imagens DTI-RM correspondente. através da equação de Stejskal-Tanner

$$S_i = S_0 \exp(-bg_i D g_i^T), \quad i \geq 6, \quad (6.17)$$

onde  $D \in \mathcal{T}$ ,  $g_i$  é o gradiente de direção associado a imagem  $S_i$ ,  $S_0$  é a intensidade do sinal sem a aplicação de gradiente e  $b$  é uma constante calculada a partir dos parâmetros de aquisição das imagens e o sinal  $S_0$  é obtido com  $b = 0$ . Para maiores detalhes ver [43].

O método mais comum de determinar uma imagem DTI-RM para um dado volume  $S_n$  é via a equação (6.17) utilizando a técnica de mínimos quadrados. Isso, significa que o tensor  $D_{ijk}$  na localização  $(i, j, k)$  é obtido pela minimização da seguinte função objetivo:

$$\mathcal{D} = \underset{D \in \mathcal{T}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{ijk} \sum_l \left| b g_l^T D_{ijk} g_l - \log \left( \frac{S_{ijk}^l}{S_{ijk}^0} \right) \right|^2 \right\}. \quad (6.18)$$

No entanto, este modelo assume que o volume de imagens IDP são corrompidas por ruído gaussiano. Um modelo de ruído mais razoável para esta classe de dados é o Riciano, como visto em [46]. Isto significa que calcular o tensor  $D_{ijk}$  na

localização  $(i, j, k)$  pode ser feito minimizando a seguinte função objetivo:

$$\mathcal{D} = \sum_{ijkl} -\log \left( \frac{S_{ijk}^l}{\sigma^2} \exp \left( -\frac{P_{ijk}^l}{2\sigma^2} \right) I_0 \left( \frac{Q_{ijk}^l}{\sigma^2} \right) \right),$$

onde  $P_{ijk}^l = R_{ijk}^l(D_{ijk})^2 + (S_{ijk}^l)^2$ ,  $R_{ijk}^l(D_{ijk}) = S_{ijk}^0 \exp(-bg_l^T D_{ijk} g_l)$ ,  $Q_{ijk}^l = R_{ijk}^l(D_{ijk})S_{ijk}^l$  and  $I_0$  é a função de Bessel modificada de ordem zero e primeiro tipo.

**Exemplo 6.3.1.** *Através de equação (6.17), podemos definir o tensor  $D$  como solução de um sistema de equações lineares. Admitindo o número mínimo de imagens  $S_i$ ,  $i = 0, \dots, 6$ , resolver o problema (6.18) equivale a resolver um sistema de equações lineares em cada localização da imagem da forma*

$$AX = B, \quad (6.19)$$

onde  $A$  é a matriz dos coeficientes do sistema, o vetor  $X$  contém as variáveis e o vetor  $B$  as constantes dadas em [47] e [13]. Sendo assim, o vetor  $B$  pode ser definido como

$$B = \begin{bmatrix} \log(s_1/S_0) \\ \log(s_2/S_0) \\ \log(s_3/S_0) \\ \log(s_4/S_0) \\ \log(s_5/S_0) \\ \log(s_6/S_0) \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

que corresponde ao lado direito do sistema (6.19).

Para obter a matriz  $A$ , do lado esquerdo do sistema (6.19), levamos em consideração que  $D$  pode ser escrito segundo a equação (6.17). Contudo, calculamos para cada gradiente  $g_i$ , o lado esquerdo da equação (6.19) que corresponde a uma das seis imagens adquiridas na difusão. Com isso, obtém-se

$$-bg_i^T g_i \cdot D = -b \begin{bmatrix} g_{ix}g_{ix} & g_{ix}g_{iy} & g_{ix}g_{iz} \\ g_{ix}g_{iy} & g_{iy}g_{iy} & g_{iy}g_{iz} \\ g_{ix}g_{iz} & g_{iy}g_{iz} & g_{iz}g_{iz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Resolvendo a operação de matrizes do lado direito, temos a seguinte expansão

$$-bg_i^T g_i \cdot D = -b(g_{ix}^2 D_{xx} + g_{iy}^2 D_{yy} + g_{iz}^2 D_{zz} + 2g_{ix}g_{iy} D_{xy} + 2g_{ix}g_{iz} D_{xz} + 2g_{iy}g_{iz} D_{yz}). \quad (6.22)$$

Extraindo da expansão acima os coeficientes das variáveis  $D_{xx}$ ,  $D_{yy}$ ,  $D_{zz}$ ,  $D_{xy}$ ,  $D_{xz}$

e  $D_{yz}$ , podemos montar a matriz  $A$  da seguinte forma

$$A = -b \begin{bmatrix} g_{1x}^2 & g_{1y}^2 & g_{1z}^2 & 2g_{1x}g_{1y} & 2g_{1x}g_{1z} & 2g_{1y}g_{1z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{6x}^2 & g_{6y}^2 & g_{6z}^2 & 2g_{6x}g_{6y} & 2g_{6x}g_{6z} & 2g_{6y}g_{6z} \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

O sistema finalmente pode ser resolvido, através de métodos tais como: eliminação de Gauss, decomposição LU ou métodos iterativos.

### 6.3.2 Índices invariantes

O tensor de difusão  $D$  contém várias informações e muitas aplicações requerem uma noção de intensidade anisotrópica. No entanto, para medições quantitativas no material branco cerebral, um único escalar é particularmente útil para comparar diferentes grupos ou para monitorar mudanças no mesmo. Este escalar é chamado de índice de difusão anisotrópica (IDA).

Os IDA's mais utilizados variam de 0 (isotrópico) a 1 (anisotrópico) e eles podem ser calculados a partir dos autovalores associados aos tensores de difusão.

A partir dos tensores de difusão podemos calcular uma série desses índices que ajudam a caracterizá-los, especialmente no que se refere a sua forma e tamanho. Esses escalares são invariantes, ou seja, têm o mesmo valor independente da orientação do tensor. A utilidade dos índices está em fornecer informações relevantes sobre cada ponto da imagem, como a organização e forma dos tensores. Nesta seção, denotamos os autovalores do tensor de difusão  $D$  por  $\lambda_i$ , com  $i = 1, \dots, 3$ .

A seguir, descreveremos alguns desses índices:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (6.24)$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3, \text{ e} \quad (6.25)$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \quad (6.26)$$

A invariância desses índices decorrem diretamente do fato que eles não se baseiam nos coeficientes do tensor, mas nos autovalores, que são invariantes. O índice  $I_1$  é o escalar conhecido como traço. Através dele, podemos definir outro índice muito importante, a difusidade média que é a média entre os autovalores associados ao tensor de difusão. Esta será definida como

$$I_4 = \frac{I_1}{3}$$



Podemos definir também a magnitude do tensor, que corresponde a sua norma, com respeito ao seu espectro. Neste caso, tem-se

$$I_5 = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$$

Com base nos índices apresentados, introduz-se o índice invariante de anisotropia fracionada ( $FA$ )

$$FA = \sqrt{\frac{3[(\lambda_1 - I_5) + (\lambda_2 - I_5) + (\lambda_3 - I_5)]}{2I_5}} \quad (6.27)$$

O índice  $FA$  assume valores no intervalo  $[0, 1]$ . Um meio totalmente isotrópico tem como resultado  $FA = 0$ , e um meio em que uma das direções de difusão é muito maior que as demais, isto é,  $\lambda_1 > \lambda_2 \approx \lambda_3$ , onde  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  possuem magnitudes aproximadas entre si, resulta em um valor de  $FA$  próximo de 1. Baseando-se na relação entre os autovalores do tensor de difusão, [13] divide a difusão em três casos:

- Caso linear, em que  $\lambda_1 > \lambda_2 \approx \lambda_3$ : a difusão acontece principalmente na direção do autovetor associado a  $\lambda_1$ ;
- Caso planar, em que  $\lambda_1 \approx \lambda_2 > \lambda_3$ : a difusão restringe-se ao plano definido pelos autovetores associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ;
- Caso esférico, em que  $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda_3$ : a difusão é isotrópica.

# Capítulo 7

## O Filtro Riemanniano Adaptativo

### 7.1 O Filtro Riemanniano Adaptativo (FRA)

Os filtros clássicos de média e mediana em escala de cinza são filtros não-lineares cujo as respostas se baseiam na disposição dos *pixels* contidos na região de imagem a ser filtrada conforme verificado em [48] e [49].

Nossa contribuição consiste em utilizar o centro de massa ponderado riemanniano  $L^\alpha$  com  $\alpha \in [1, 2]$  como uma ferramenta de filtragem. A ideia central consiste na escolha do parâmetro  $\alpha$  que é feita com base em informações obtidas a partir da imagem antes do processo de filtragem. Estas informações identificam de antemão as regiões de bordas presentes na imagem. Isso é feito, através da utilização de algoritmos de detecção de bordas que utilizam a quantificação da variação da norma do vetor gradiente na imagem. A utilização da mediana ( $\alpha = 1$ ) em regiões de bordas é o valor ideal e a medida que distanciamos das regiões de bordas o valor de  $\alpha$  vai se aproximando de 2, ou seja, da média riemanniana ponderada. Com essa abordagem, podemos filtrar e preservar as regiões de bordas sem a necessidade de realizar mais de um processo de filtragem reduzindo o tempo de processamento e custo computacional associado ao consumo de memória RAM.

Seja  $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $n = 2, 3$  onde  $k$  representa o número de fatias no volume de imagens e  $\mathcal{T}_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(3)$  a imagem DTI-RM correspondente ao volume de imagem  $I_k$ .

A definição do parâmetro  $\alpha$  consiste inicialmente em aplicar o procedimento de detecção de borda na imagem  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_k$ , conforme descrito na seção (6). Portanto, com base na ideia de [40], usamos o coeficiente de condução para quantificar e mapear as bordas da imagem. Ao contrário de [40], o procedimento de detecção de borda é aplicado à imagem DTI-RM usando a equação (6.15) para quantificar a norma do gradiente de  $\mathcal{T}$ . Definimos uma equação que usa o gradiente espacial de  $\mathcal{T}$  para quantificar a presença de bordas e depois definimos o valor de  $\alpha$  que permite

a aplicação do filtro desejado. Sendo assim, quantificamos a probabilidade do *pixel* ou *voxel* estar na borda da imagem, mesmo sob a presença de ruído:

$$p_I = \exp(-c(\|\nabla\mathcal{T}(x)\|)). \quad (7.1)$$

com  $c(u) = 1/(\epsilon + u^2)$  e  $\epsilon$  é configurado para ser um valor pequeno e constante, conforme visto em [42].

Conhecendo o valor de  $p_I$  nas regiões da imagem, podemos quantificar quão próximo de uma borda o tensor de difusão se encontra. Através da combinação linear entre a máxima e a mínima norma do gradiente espacial da imagem, podemos definir o quão próximo destes valores as demais magnitudes do gradiente da imagem  $\mathcal{T}$  se encontram..

Depois de quantificar  $\|\nabla\mathcal{T}(x)\|$  da imagem, obtemos  $M_{max} = \max(\|\nabla\mathcal{T}(x)\|)$  e  $M_{min} = \min(\|\nabla\mathcal{T}(x)\|)$  como o maior e o menor valor em norma do gradiente da imagem, respectivamente. Assim, podemos definir  $p_I$  como uma combinação linear de probabilidade entre  $p_{max}$  e  $p_{min}$  relacionadas à  $M_{max}$  e  $M_{min}$ , respectivamente.

Conhecendo o valor  $p_I$  das regiões de bordas da imagem, podemos quantificar o quão perto de uma borda o *pixel* em análise se encontra. Através da combinação linear entre a máxima e mínima norma do vetor gradiente da imagem, podemos definir quão próximos destes valores estão as demais magnitudes dos vetores gradientes da imagem  $I$  em cada *pixel*.

Após quantificarmos a norma do vetor gradiente em todos os pixels da imagem, podemos obter  $M_{max}$  e  $M_{min}$  como o maior e menor valor em norma desta imagem, respectivamente. Desta forma, podemos definir o valor da variável  $\tau \in [0, 1]$ . Sendo assim, podemos definir  $p_I$  como uma combinação linear das probabilidades  $p_{max}$  e  $p_{min}$  relativas às magnitudes  $M_{max}$  e  $M_{min}$ , respectivamente. Sendo assim, temos

$$p_I = (1 - \tau)p_{min} + \tau p_{max}. \quad (7.2)$$

Como calculamos  $p_I$  previamente, obtido através da equação (7.1) em todos os *pixels* da imagem, podemos definir o valor  $\tau \in [0, 1]$  correspondente em cada *pixel* e posteriormente definir o valor de  $\alpha$  referente a este *pixel* em questão. Sendo assim, temos

$$\tau = \frac{p_I - p_{min}}{p_{max} - p_{min}} \quad (7.3)$$

e

$$\alpha = 2 - \tau. \quad (7.4)$$

A figura abaixo ilustra o processo de detecção de bordas em uma imagem. Podemos perceber que existe um maior contraste nas regiões de bordas da imagem quando  $\tau \rightarrow 1$ :

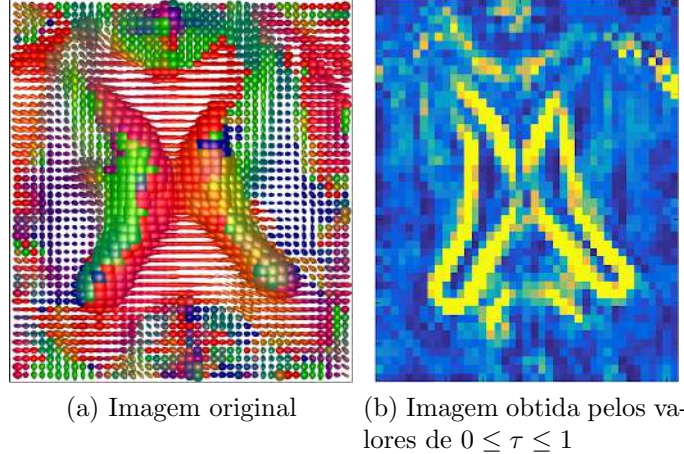


Figura 7.1: À esquerda: imagens DTI-RM. À direita: imagem gerada pelos valores de  $\tau$  em cada posição espacial da imagem. Valores de  $\tau = 1$  (regiões na cor amarela) representam as regiões de bordas, enquanto que valores de  $\phi = 0$  (regiões na cor azul) representam as regiões fora das bordas.

O objetivo da equação (7.4) é quantificar o expoente das parcelas da função objetivo que define o problema (5.14). Assim, limitamos o parâmetro  $\alpha$  ao intervalo  $[1, 2]$ , cumprindo os critérios de preservação das bordas da imagem, conforme descrito em [40].

Observe que conseguimos definir  $\alpha$  de forma a satisfazer as condições desejadas, ou seja, quanto maior for a magnitude do gradiente da imagem, maior é a probabilidade da existência de bordas. Isso implica que é necessário a aplicação do filtro de mediana ponderada com objetivo de preservar estas características. Observe que  $\alpha$  se aproxima de 1 quando  $p_I$  se aproxima de  $p_{max}$ , conseqüentemente  $\tau \rightarrow 1$ , satisfazendo as condições desejadas, caso contrário, temos  $\alpha$  aproximando-se de 2 quando  $\tau \rightarrow 0$ , pois,  $p_I$  se aproxima de  $p_{min}$ .

O filtro FRA consiste em resolver o seguinte problema de otimização:

$$W_{FRA} = \arg \min_{X \in \mathcal{P}(3)} \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^N \omega_i d(X, W_i)^\alpha, \quad W_i \in \mathcal{P}(3), \quad (7.5)$$

com  $\alpha$  dado pela equação (7.4) e os  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  são os pesos dados.

O filtro FRA pode ser utilizado em qualquer classe de imagens definida em uma variedade Riemanniana. No entanto, nos limitamos a classe de imagens DTI-RM que pode ser representada como uma variedade de Hadamard de matrizes simétricas positivas definidas. Dado  $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_N\} \in \mathcal{T}$  um conjunto de tensores, o filtro FRA consiste em encontrar o centro de massa  $L^\alpha$  de  $\mathcal{W}$  através da resolução de um problema de otimização (7.5) em cada localização espacial da imagem. Este processo é aplicado em todo domínio espacial para cada nova vizinhança definida em torno

do tensor alvo.

Para a resolução do problema (7.5), foi usado a metodologia proposta por [9] e apresentada na seção (5.2). No entanto, outras metodologias em variedades Riemannianas como [50], [51], [52], [33] e [53] podem ser utilizadas.

A seguir apresentamos a formulação do processo de filtragem para o caso particular de  $\alpha = 2$ . Defina  $\mathcal{W}$  como o conjunto de tensores vizinhos ao tensor alvo  $W_0$ . A média Riemanniana  $\mu$  referente ao tensor  $W_0$  é dada por

$$\mu = \arg \min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 \left( \sum_{n=1}^3 \log^2 \lambda_n \left( W_k^{-\frac{1}{2}} \mu W_k^{-\frac{1}{2}} \right) \right), \quad \mu \in \mathcal{P}(3)$$

onde  $\lambda_n$  são os autovalores da matriz  $W_k^{-\frac{1}{2}} \mu W_k^{-\frac{1}{2}}$ , onde  $k = 1, \dots, 8$  é o número de tensores na vizinhança de  $W_0$ , conforme pode ser visto na figura (7.2).

A filtragem leva em consideração a posição do tensor na imagem. Se observada a figura abaixo, podemos ver que o tensor central  $W_0$  será o elemento de referência para o cálculo da média através da utilização dos seus vizinhos. Uma vez obtido a média  $\mu$ , este novo tensor será posicionado nas mesmas coordenadas de  $W_0$  em uma nova imagem. Este processo é realizado até obter a nova imagem completa.

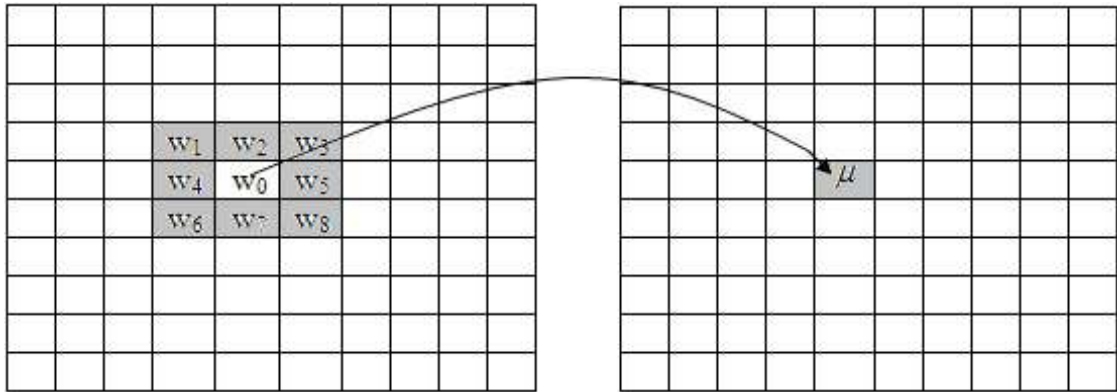


Figura 7.2: Esquema de filtragem de uma imagem.

No caso do filtro FRA, a matriz  $\mu$  é definida como o centro de massa Riemanniano  $L^\alpha$  dos vizinhos de  $W_0$  para um valor de  $\alpha \in [1, 2]$  calculado através da equação (7.4). Para tensor, define-se uma vizinhança conforme a figura (7.2) e posteriormente aplica-se o filtro FRA. O processo computacional é oneroso, pois, para cada tensor resolve-se um problema de otimização, além disso, o acesso as informações são feitas de forma sequencial, onde percorre-se toda a imagem, elemento por elemento até o final do processo de filtragem.

No entanto, este processo de filtragem pode ser realizado em paralelo, onde partes da imagem podem ser distribuídas em vários núcleos do processador reduzindo consideravelmente o tempo de processamento. Abaixo, temos a descrição do algoritmo para o processo de filtragem.

---

**Algoritmo 1:** FILTRO RIEMANNIANO ADAPTATIVO

---

**Entrada:**

$W$  : Imagem DTI-RM.

$Nx \times Ny$  : Dimensão da imagem.

**Saída:**  $W_{FRA}$  : Imagem filtrada.

```
1 início
2   para  $i = 1, 2, \dots, Nx$  faça
3     para  $j = 1, 2, \dots, Ny$  faça
4       Defina a vizinhança  $\mathcal{W}$ , centrada em  $W(i, j)$  :
5        $\mathcal{W} = \{W(i-1, j-1), W(i-1, j), W(i-1, j+1), W(i, j-1),$ 
6        $W(i, j+1), W(i+1, j-1), W(i+1, j), W(i+1, j+1)\}$ .
7       Defina os pesos  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, 8$  associados aos tensores vizinhos
          contidos em  $\mathcal{W}$ .
8       Calcule  $\alpha$  segundo a equação (7.4) como descrito na seção (7.1).
9       Calcule  $W_{FRA}(i, j)$  resolvendo o problema (7.5).
10    fim
11  fim
12 fim
13 retorna  $W_{FRA}$ 
```

---

# Capítulo 8

## Experimentos computacionais

Para realização dos testes, foi utilizado uma máquina Intel Xeon processor E3-1270V2, 8MB cache, 3.50 GHz, sistema operacional LINUX Ubuntu e uma licença MATLAB 2012a instalada, do projeto: “Algoritmo de ponto proximal com decomposições de Schur em domínios de positividade”/APQ1-FAPERJ/2012-2013, [54].

### 8.1 Experimentos com dados sintéticos

Geramos um conjunto de dados sintéticos similar ao utilizado por [11] e [46]; onde usamos os seguintes tensores de difusão:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.751 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.842 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1.556 & 0.338 & 0.0 \\ 0.338 & 1.165 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.842 \end{pmatrix}$$

para gerar uma imagem DTI-RM de tamanho  $10 \times 10$ .

Esta imagem DTI-RM possui duas regiões diferentes, isto é, uma metade da imagem consiste da cópia do tensor  $D_1$  e a outra metade consiste da cópia do tensor  $D_2$ . O próximo passo foi usar a equação (6.17) e recriar o volume de imagens de difusões ponderadas (IDP) de dimensão  $10 \times 10 \times 10$  correspondente à imagem DTI-RM, isto é,  $S_G^k$ ,  $k = 1, \dots, 10$ , onde  $G$  faz menção a imagem original. Para estes testes computacionais, consideramos os valores dos pixels da imagem  $S_G^0 = 10$  e os valores de  $b = 1$  para todo o volume. Os gradientes de direções associados às imagens  $S_G^k$ ,  $k = 1, \dots, 10$  foram obtidos de [11].

Para avaliar o desempenho do processo de filtragem, criamos dois cenários onde avaliamos dois diferentes tipos de ruído:

- 1 (Cenário 1) Assumindo que o volume de imagens (IDP) estão corrompidos por ruído Riciano, que surge do ruído gaussiano de valor complexo nas medidas

originais no domínio da frequência. Isso significa que substituímos o valor real do sinal  $S_{G,ij}^k$  da localização  $(i, j)$  por

$$S_{R,ij}^k = S_{G,ij}^k + r_\sigma, \quad i, j = 1, \dots, 10, \quad (8.1)$$

onde  $S_R^k$  é a imagem depois da adição do ruído e  $r_\sigma \sim N(0, \sigma^2)$  é uma distribuição gaussiana de média 0 e desvio padrão  $\sigma$  ao redor do sinal original para criar uma desejada razão sinal ruído (RSR).

- 2 (Cenário 2) Adicionamos ruído impulsivo (Sal e Pimenta) às imagens. Ruídos desse tipo são geralmente causados por interferências eletromagnéticas, arranhões nos discos de gravação, explosões e má sincronização na gravação e comunicação digital.

### 8.1.1 Quantificação do processo de filtragem

Uma forma natural de quantificar o processo de filtragem no caso euclidiano é definir o erro médio quadrático euclidiano entre a imagem real sem ruído e a imagem filtrada [55]. Jesus [4] utiliza o erro médio riemanniano para quantificar o processo de filtragem, enquanto nos trabalhos de [15], [56] eles utilizam o erro médio quadrático riemanniano entre a imagem suavizada e a imagem sem ruído. No entanto, seguindo os trabalhos de [11] e [46] utilizamos as seguintes medidas para quantificar o processo de filtragem:

1. EMQ nas imagens DTI-RM: Sejam  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{D}$  as imagens DTI-RM filtrada e livre de ruído, respectivamente. A partir destas imagens, computamos o erro médio quadrático (EMQ) conforme equação abaixo:

$$EMQ = \sqrt{\frac{\sum_{ij} d(\mathcal{F}_{i,j}, \mathcal{D}_{i,j})^2}{m}} \quad (8.2)$$

onde  $d(\cdot, \cdot)$  é a distância riemanniana entre os dois tensores e  $m$  é o número de tensores das imagens  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{D}$ .

2.  $\Delta RSR$  nas imagens (IDP): Computamos a razão sinal ruído após o processo de filtragem:

$$\Delta RSR = 10 \log_{10} \left( \frac{\sum_{ijk} |S_{G,ij}^k - S_{R,ij}^k|^2}{\sum_{ijk} |S_{G,ij}^k - S_{F,ij}^k|^2} \right), \quad (8.3)$$

onde  $S_{F,ij}^k$  define a  $k$ -ésima (IDP) reconstruída a partir do tensor filtrado localizado na posição  $(i, j)$ .



3. Média dos traços: Computamos a porcentagem média dos traços dos tensores reconstruídos  $\mathcal{F}_{i,j}$  com relação ao verdadeiro tensor  $\mathcal{D}_{ij}$ , conforme equação abaixo:

$$TM = 100 \times \frac{\sum_{ij} \left( \frac{Tr(\mathcal{F}_{i,j})}{Tr(\mathcal{D}_{i,j})} \right)}{m}, \quad (8.4)$$

onde  $Tr(\cdot)$  é o traço da matriz e  $m$  é o número de tensores presentes nas imagens  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{D}$ .

O próximo passo foi reconstruir o volume de imagens ruidosas DTI-RM  $S_R^k$ , considerando três diferentes níveis de ruído riciano com desvio padrão  $\sigma = 0.5$ ,  $\sigma = 1.0$  and  $\sigma = 1.5$  e outra reconstrução considerando o tipo de ruído impulsivo, onde substituímos 30% de sinal real, por um ruído em cada imagem (IDP), conforme visto na figura (8.1).

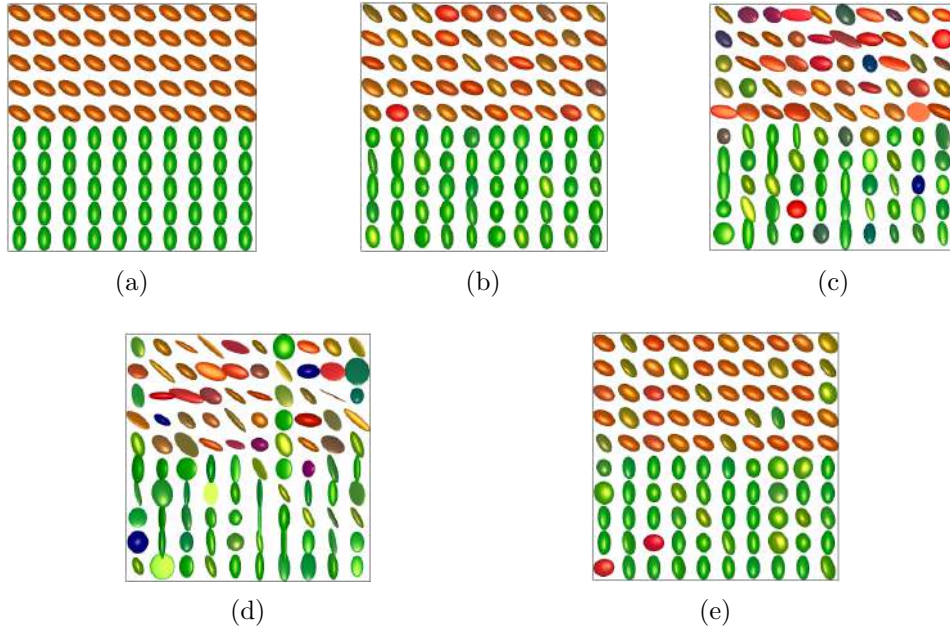


Figura 8.1: Imagem DTI-RM sintética: (a): Imagem verdadeira; (b): Imagem verdadeira com ruído riciano com  $\sigma = 0.5$ ; (c): Imagem verdadeira com ruído riciano com  $\sigma = 0.1$ ; (d): Imagem verdadeira com ruído riciano com  $\sigma = 1.5$  e (e): Imagem verdadeira com ruído impulsivo (sal e pimenta) correspondendo à 30% do sinal.

Após a geração destas imagens, aplicou-se 4 diferentes tipos de filtros com o objetivo de suavizar as imagens ruidosas de DTI-RM. Aplicamos os filtros de média ponderada, mediana ponderada, FRA e o filtro Bilateral, todos definidos em variedade Riemanniana das matrizes simétricas positivas definidas, exceto o último que utiliza a métrica log-euclidiana.

Para a visualização utilizamos uma versão modificada da função de visualização disponível na toolbox FanDTasia escrita na plataforma Matlab por [57]. Os resul-

tados do processo de filtragem para estes testes foram quantificados a partir das métricas (8.1.1) e estão descritos na tabela ( 8.1).

Tabela 8.1: Resultados do processo de filtragem considerando as métricas (8.1.1) aplicadas ao caso de ruído riciano.

Métrica	$\sigma$	<b>FRA</b>	<b>Média</b>	<b>Mediana</b>	<b>Bilateral</b>
MSE	0.5	0.0036	0.0078	0.0039	0.0068
	1.0	0.0035	0.0037	0.0037	0.0038
	1.5	0.0039	0.0042	0.0041	0.0041
AT	0.5	100.35	96.97	100.37	97.60
	1.0	99.80	98.50	99.59	98.58
	1.5	98.61	97.44	97.62	97.50
$\Delta SNR$	0.5	8.30	8.25	8.28	7.75
	1.0	3.15	3.06	3.12	3.01
	1.5	5.56	5.11	5.31	3.40

Podemos observar que o FRA obtém melhores resultados com relação ao  $EMQ$ . No entanto, o ganho não é muito significativo comparado as demais técnicas. Podemos ver que a metodologia proposta pode ser aplicável para resolver este tipo de problema.

Em relação ao traço médio ( $TM$ ) da imagem filtrada, podemos verificar que o filtro FRA preservou melhor os traços dos tensores. Ao contrário do ( $EMQ$ ), o ganho foi significativo comparado as demais metodologias abordadas. Onde o filtro FRA foi capaz de recuperar o traço médio dos tensores de uma maneira mais eficiente.

Podemos observar que o filtro FRA também obteve melhores resultados em relação ao ( $\Delta RSR$ ), mesmo considerando casos com crescentes níveis de ruído na imagem. A partir dos resultados obtidos no processo de filtragem na tabela (8.1), o filtro FRA provou ser uma técnica promissora na solução desse tipo de problema. Este pequeno ganho pode estar relacionado ao parâmetro  $\alpha$ , porque para  $\alpha \rightarrow 1$  significa que temos uma possível região de borda, então a mediana Riemanniana garante a manutenção dessas regiões. No entanto, para  $\alpha \rightarrow 2$  (média Riemanniana) significa que o tensor está longe de uma borda e, neste caso, uma imagem mais suave pode ser alcançada, garantindo maior supressão de ruído nessas regiões.

Mesmo para o *cenário 2*, podemos observar que o filtro FRA obteve melhores resultados em relação às métricas usadas em comparação com os outros filtros. Para o caso em que consideramos o ruído impulsivo, obtivemos os seguintes resultados:

Tabela 8.2: Resultados do processo de filtragem considerando as métricas (8.1.1) aplicadas ao caso de ruído impulsivo referente à imagem (8.1e).

Métrica	<b>FRA</b>	<b>Média</b>	<b>Mediana</b>	<b>Bilateral</b>
MSE	0.0023	0.0025	0.0023	0.0051
AT	98.99	98.32	98.45	98.15
$\Delta SNR$	3.67	0.95	2.81	0.58

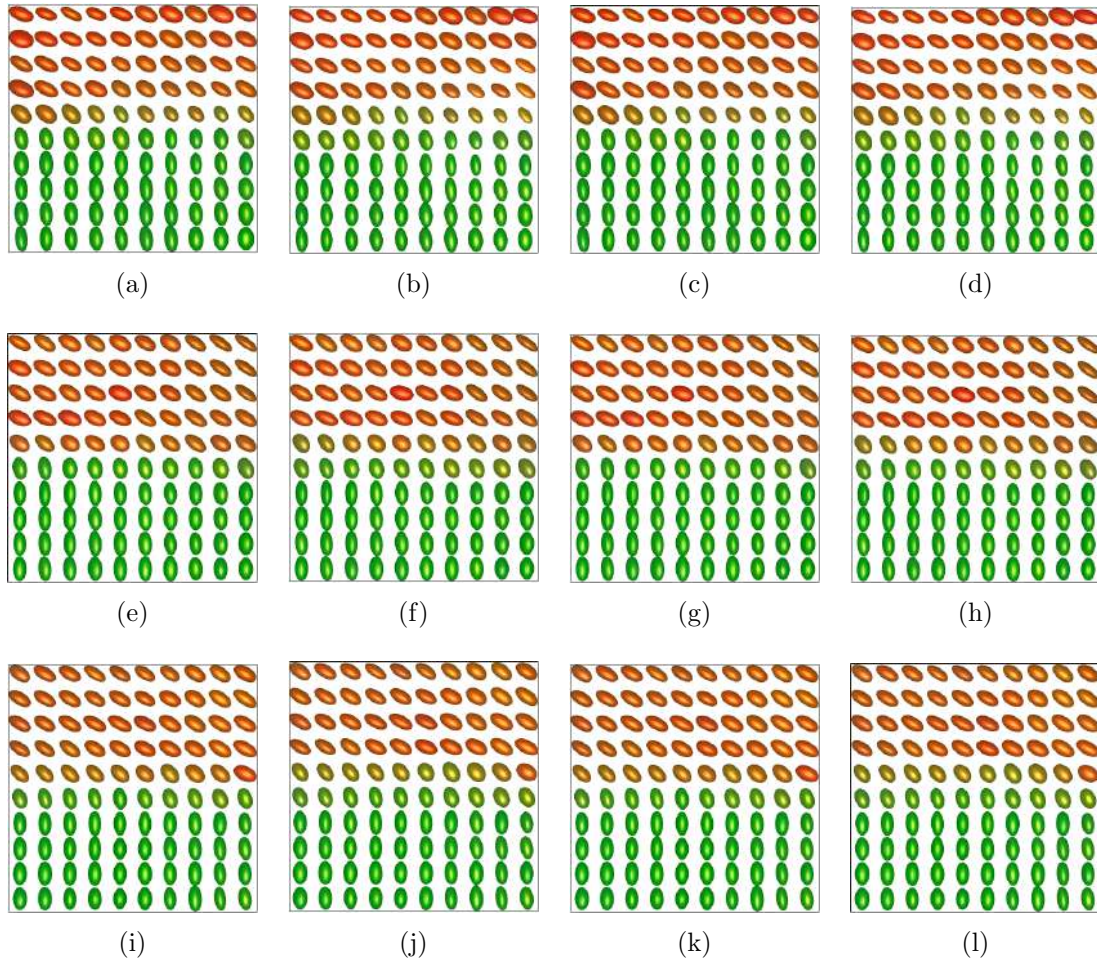


Figura 8.2: Resultado do processo de filtragem. As imagens (a-d) são os resultados correspondentes à filtragem de imagens ruidosas com  $\sigma = 0.5$  para os filtros FRA, Média, Mediana e Bilateral, respectivamente; as imagens (e-h) são os resultados correspondentes à filtragem de imagens ruidosas com  $\sigma = 1.0$ ; as imagens (i-l) são os resultados correspondentes à filtragem de imagens ruidosas com  $\sigma = 1.5$ .

As figuras (8.2 e 8.3) nos fornecem um resultado qualitativo do processo de filtragem em um conjunto de dados sintético, cujos resultados são apresentados na tabela (8.1 e 8.2) com situação diferente de ruído riciano e ruído impulsivo (sal e pimenta). Diante dos resultados obtidos, podemos observar que os filtros de FRA

e mediana riemanniana foram capazes de manter a região de descontinuidade com mais eficiência.

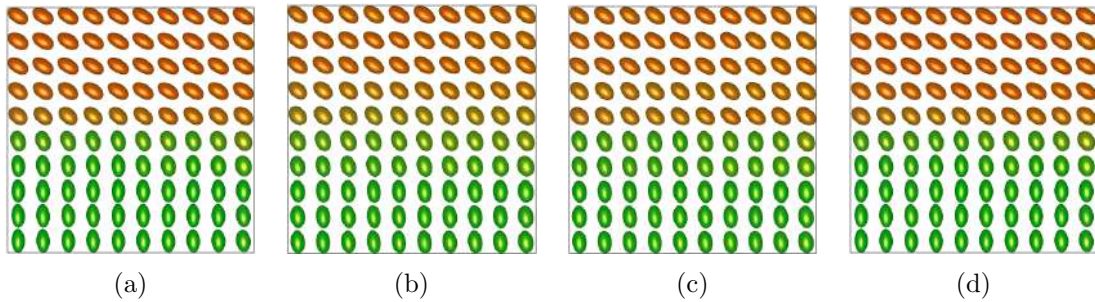


Figura 8.3: Resultado do processo de filtragem: (a) Imagem obtida pela aplicação do filtro FRA; (b) Imagem obtida aplicando o filtro Média; (c) Imagem obtida pela aplicação do filtro Mediana; (d) Imagem obtida aplicando o filtro Bilateral.

Além de suavizar a imagem, outra característica dos filtros descritos acima é a eliminação de todas as matrizes (tensores) simétricas definidas negativas, ou seja, eles eliminam todos os tensores que contêm autovalores negativos, que contrariam o sentido do tensor de difusão no tecido observado. Essa característica de positividade é muito importante quando se pretende quantificar grandezas como anisotropia fracionada ( $AF$ ), uma vez que sua quantificação depende da existência apenas de tensores positivos definidos na região observada.

No entanto, o filtro FRA fornece uma técnica promissora para resolver esse tipo de abordagem. Esse pequeno ganho pode estar relacionado ao parâmetro  $\alpha$ , porque para  $\alpha \rightarrow 1$  significa que temos uma região de borda possível, portanto a mediana riemanniana garante a manutenção dessas regiões. No entanto, de  $\alpha \rightarrow 2$  (média riemanniana) significa que o tensor está longe de uma borda e, nesse caso, uma imagem mais suave pode ser obtida, garantindo maior supressão de ruído nessas regiões.

## 8.2 Experimentos em dados reais

Para demonstrar o potencial dos métodos em dados reais, utilizamos um conjunto de dados reais de DTI-RM de um cérebro humano disponibilizado pelo Projeto Camino [58]. Como este conjunto é livre para uso em pesquisas, ele é particularmente adequado como um conjunto de testes que permitem que pesquisadores compare seus algoritmos no mesmo conjunto de dados.

Aplicamos os filtros em uma pequena região de interesse extraída das imagens de tensores geradas a partir desse conjunto de dados. Consideramos a aplicação dos filtros em quatro fatias diferentes de imagens, onde essas imagens foram inicialmente corrompidas com ruído riciano com  $\sigma = 1.5$  e ruído impulsivo referente à 25% do



sinal verdadeiro e posteriormente filtradas. A figura (8.4) contém as imagens antes e depois da adição de ruído.

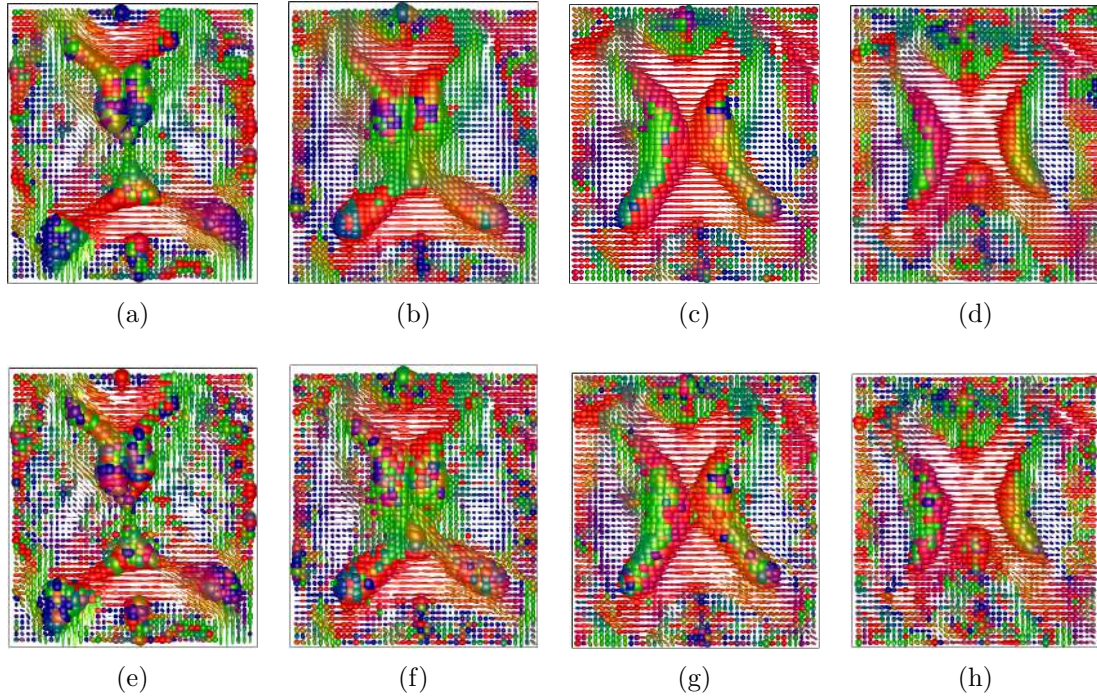


Figura 8.4: (a-d): Regiões de interesse a serem filtradas extraída das fatias 22, 26, 28 e 30 do conjunto de dados reais, respectivamente; (e-h): as mesmas regiões de interesse com ruído riciano de  $\sigma = 1.5$  e ruído impulsivo (25%).

Os resultados do processo de filtragem para o conjunto de dados real considerando a métrica (8.1.1) estão descritos na tabela (8.3). Em vista dos resultados obtidos, podemos ver que o filtro FRA obteve melhores resultados em relação às medidas analisadas. Embora esse ganho não seja muito significativo em relação às demais metodologias de filtragem, percebe-se o potencial da metodologia proposta no processo de filtragem para o caso real em imagens dessa natureza.

Tabela 8.3: Resultados do processo de filtragem considerando as métricas (8.1.1) aplicadas as quatro diferentes fatias de imagens do conjunto de dados reais.

Métrica	Fatia	FRA	Média	Mediana	Bilateral
MSE	22	0.0011	0.0015	0.0011	0.0013
	26	0.0009	0.0014	0.0009	0.0013
	28	0.0002	0.0018	0.0002	0.0013
	30	0.0004	0.0016	0.0004	0.0007
AT	22	99.90	98.38	99.81	98.55
	26	99.50	98.49	99.32	98.66
	28	99.30	98.30	99.21	98.46
	30	99.33	98.36	99.24	98.38
$\Delta SNR$	22	3.90	3.70	3.80	3.74
	26	4.94	4.70	4.80	4.70
	28	3.60	3.20	3.35	3.17
	30	4.84	4.13	4.23	3.60

Assim como no caso sintético, todos os filtros obtiveram resultados semelhantes com relação aos testes aplicados ao volume real de imagens. Com isso, podemos observar o potencial do filtro FRA diante dos demais filtros apresentados na literatura aplicado ao processo de filtragem em DTI-RM. Além disso, com esses resultados, abrimos a possibilidade de considerar centros de massa mais gerais como soluções para esta classe de dados volumétricos.



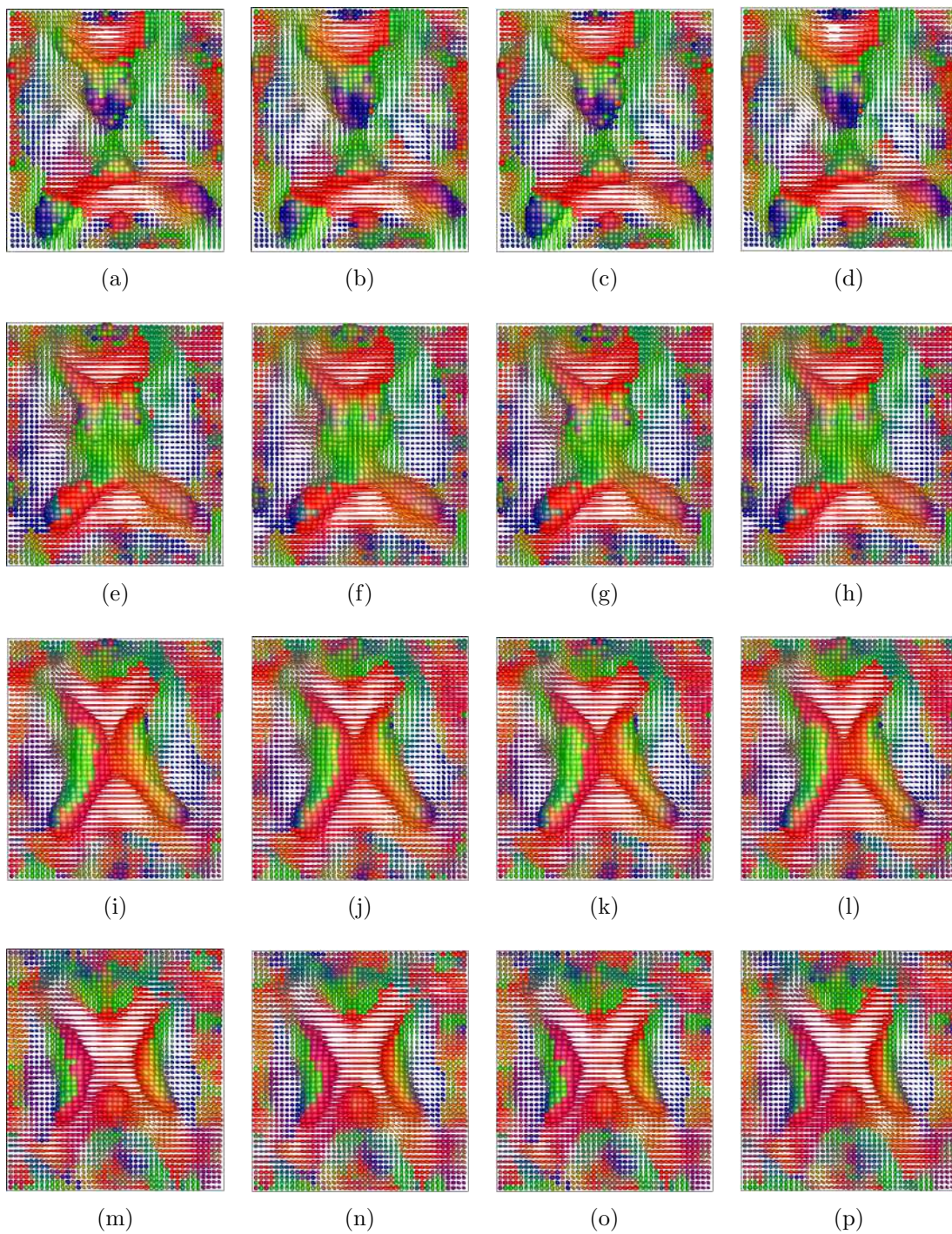


Figura 8.5: Resultados da filtragem: (a-d): filtragem aplicada à fatia 22 considerando os filtros FRA, Média, Mediana e Bilateral, respectivamente; (e-h) igual ao anterior, porém aplicado à fatia 26; (i-l) igual ao anterior, porém aplicado à fatia 28; (m-p) igual ao anterior, no entanto aplicado à fatia 30.

# Capítulo 9

## Conclusões e Trabalhos futuros

Inicialmente, o objetivo deste trabalho foi demonstrar a possibilidade de usar centros de massa mais gerais como elementos para compor filtros em variedades diferenciáveis. Mais precisamente, propomos a filtragem de imagens cujo domínio pode ser visto como uma variedade riemanniana de curvatura não-positiva.

Por meio do parâmetro  $\alpha$ , propomos uma metodologia que consiste em filtrar as imagens DTI-RM e preservar suas bordas. Definimos a aplicação do filtro ARF com base nos centros de massa riemannianos, além disso, demonstramos a eficiência do uso desse elemento no processo de filtragem, onde comparamos seu desempenho com o dos filtros já existentes na literatura e verificamos através de vários testes computacionais em imagens corrompidas com diferentes níveis de ruídos. Com isso, mostramos a viabilidade de utilização do uso do chamado centro de massa riemanniano como ferramenta para compor filtros.

A primeira vantagem dessa metodologia é a possibilidade de usar um filtro que une as características dos filtros com base em médias e medianas, equilibrando assim, os níveis de suavização e mantendo as regiões de bordas das imagens, melhorando a qualidade do processo de filtragem. Segundo, existe a possibilidade de usar outros centros de massas no processo de filtragem, uma vez que é possível definir novos valores de  $\alpha$  com base nas propriedades da imagem ou de outra forma independente.

Como a obtenção de centros de massa para  $\alpha = 1$  consiste em resolver um problema não diferenciável quando a solução pode ser um dos pontos do conjunto, outra vantagem dessa metodologia está no uso de um algoritmo de ponto proximal em domínios de positividade, proposto para resolver problemas diferenciáveis e não diferenciáveis em  $S_n^+$ . Outra contribuição deste trabalho é a apresentação de um resultado que garante que as soluções obtidas pelo filtro variam continuamente em seu domínio e em relação ao parâmetro  $\alpha$ .

A principal desvantagem dessa classe de filtros é o alto custo computacional, uma vez que é necessário resolver um problema de minimização em cada localização espacial da imagem. Além disso, diferentemente das outras metodologias de filtra-



gem apresentadas neste documento, o filtro ARF tem um custo adicional ao calcular o parâmetro  $\alpha$  em todos os pontos da imagem.

Para pesquisas futuras, propomos uma possível implementação do filtro em paralelo usando computação de alto desempenho. Com isso, teremos um ganho considerável com relação ao tempo de execução do processo de filtragem, além de abordar outros tipos de ruído no processo de filtragem.

Também pretendemos avaliar novas maneiras de quantificar o parâmetro  $\alpha$ , a fim de favorecer outras características desejáveis nas imagens de DTI-RM, como textura, ligadas a técnicas de reconhecimento padrão por meio do uso de aprendizado de máquina com o objetivo de identificar regiões tumorais. Assim, podemos usar centros de massas riemannianos em algoritmos de agrupamento, como k-means e extrair recursos de imagens DTI-RM.

Outro ponto a ser abordado será quantificar as incertezas nas imagens de DTI-RM, construindo um conjunto de imagens que seguem alguma distribuição de probabilidade. A partir desse conjunto de imagens, podemos gerar mapas de incertezas como desvio padrão para extrair informações sobre a variabilidade das imagens que compõem a distribuição. Este conjunto de imagens pode ser obtido usando cadeia de Markov geradas pelo método Monte Carlo (MCMC).

# Referências Bibliográficas

- [1] ASSAF, B. A., MOHAMED, F. B., ABOU-KHALED, K. J., et al. “Diffusion tensor imaging of the hippocampal formation in temporal lobe epilepsy”, *American journal of neuroradiology*, v. 24, n. 9, pp. 1857–1862, 2003.
- [2] ERIKSSON, S., RUGG-GUNN, F., SYMMS, M., et al. “Diffusion tensor imaging in patients with epilepsy and malformations of cortical development”, *Brain*, v. 124, n. 3, pp. 617–626, 2001.
- [3] SYMMS, M., JÄGER, H. R., SCHMIERER, K., et al. “A review of structural magnetic resonance neuroimaging”, *Journal of Neurology, Neurosurgery & Psychiatry*, v. 75, n. 9, pp. 1235–1244, 2004.
- [4] ANGULO, J. “Structure Tensor Image Filtering Using Riemannian  $L^1$  and  $L^\infty$  Center-of-Mass”, *Image Analysis & Stereology*, v. 33, n. 2, pp. 95–105, 2014.
- [5] AFSARI, B. “Riemannian  $L^p$  center of mass: existence, uniqueness, and convexity”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 139, n. 2, pp. 655–673, 2011.
- [6] AFSARI, B. *Means and averaging on Riemannian manifolds*, Ph.D. thesis. university of Maryland, College Park., university of Maryland, 2009.
- [7] MOAKHER, M. “A differential geometry approach to the geometric mean of symmetric positive-definite matrices”, *SIAM J. Matrix Anal.*, v. Appl. 26, pp. 735–747, 2005.
- [8] KARCHER, H. “Riemannian center of mass and mollifier smoothing”, *Communications on pure and applied mathematics*, v. 30, n. 5, pp. 509–541, 1977.
- [9] GREGÓRIO, R. M., OLIVEIRA, P. R., ALVES, C. D. D. S. “A two-phase-like proximal point algorithm in domains of positivity”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 343, pp. 67–89, 2019.

- [10] DA SILVA ALVES, C. D., OLIVEIRA, P. R., GREGÓRIO, R. M. “ $L_\alpha$  Riemannian weighted centers of mass applied to compose an image filter to diffusion tensor imaging”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 390, pp. 125603.
- [11] BAUST, M., WEINMANN, A., WIECZOREK, M., et al. “Combined tensor fitting and TV regularization in diffusion tensor imaging based on a Riemannian manifold approach”, *IEEE transactions on medical imaging*, v. 35, n. 8, pp. 1972–1989, 2016.
- [12] BREDIES, K., HOLLER, M., STORATH, M., et al. “Total generalized variation for manifold-valued data”, *SIAM Journal on Imaging Sciences*, v. 11, n. 3, pp. 1785–1848, 2018.
- [13] WESTIN, C.-F., MAIER, S. E., MAMATA, H., et al. “Processing and visualization for diffusion tensor MRI”, *Medical image analysis*, v. 6, n. 2, pp. 93–108, 2002.
- [14] PENNEC, X., FILLARD, P., AYACHE, N. “A Riemannian Framework for Tensor Computing”, *EPIDAURE / ASCLEPIOS Project-team, INRIA Sophia-Antipolis 2004 Route des Lucioles BP 93, F-06902 Sophia Antipolis Cedex, FRANCE*, v. v. 149, 2005.
- [15] ZHANG, F., HANCOCK, E. R. “New Riemannian techniques for directional and tensorial image data”, *Pattern recognition*, v. 43, n. 4, pp. 1590–1606, 2010.
- [16] FLETCHER, P. T., JOSHI, S. “Riemannian geometry for the statistical analysis of diffusion tensor data”, *Signal Processing*, v. 87, n. 2, pp. 250–262, 2007.
- [17] ROBLES-KELLY, A., HANCOCK, E. R. “A Riemannian approach to graph embedding”, *Pattern Recognition*, v. 40, n. 3, pp. 1042–1056, 2007.
- [18] HAMARNEH, G., HRADSKY, J. “Bilateral filtering of diffusion tensor magnetic resonance images”, *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 16, n. 10, pp. 2463–2475, 2007.
- [19] HAN, S., TAO, W., WU, X. “Texture segmentation using independent-scale component-wise Riemannian-covariance Gaussian mixture model in KL measure based multi-scale nonlinear structure tensor space”, *Pattern Recognition*, v. 44, n. 3, pp. 503–518, 2011.

- [20] STEFANOIU, A., WEINMANN, A., STORATH, M., et al. “Joint segmentation and shape regularization with a generalized forward–backward algorithm”, *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 25, n. 7, pp. 3384–3394, 2016.
- [21] XIE, X., YU, Z. L., GU, Z., et al. “Classification of symmetric positive definite matrices based on bilinear isometric Riemannian embedding”, *Pattern Recognition*, v. 87, pp. 94–105, 2019.
- [22] GAO, Z., WU, Y., BU, X., et al. “Learning a robust representation via a deep network on symmetric positive definite manifolds”, *Pattern Recognition*, v. 92, pp. 1–12, 2019.
- [23] ZHAO, K., WILIEM, A., CHEN, S., et al. “Convex class model on symmetric positive definite manifolds”, *Image and Vision Computing*, v. 87, pp. 57–67, 2019.
- [24] CARMO, M. P. D. *Riemannian geometry; 2nd ed.* Mathematics : theory and applications. Boston, MA, Birkhäuser, 1992.
- [25] SAKAI, T. *Riemannian geometry*, v. 149. Rhode Island, American Mathematical Soc., 1996.
- [26] DO CARMO, M. P. *Geometria riemanniana*. Rio de janeiro, Impa, 2 ed, 1988.
- [27] UDRISTE, C. *Convex functions and optimization methods on Riemannian manifolds*, v. 297. The Netherlands, Amsterdam, Springer Science & Business Media, 1994.
- [28] HORN, R., JOHNSON, C. “Matrix Analysis”, *Sci. Tech. Perspect. 23*, v. 1 ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1985.
- [29] BHATIA, R. “Positive definite matrices.” *Princeton University Press*, New Jersey, US, 2007.
- [30] MARTINET, B. “Brève communication. Régularisation d’inéquations variationnelles par approximations successives”, *R.I.R.O.*, v. 4, n. 3, pp. 154–158, 1970. doi: 10.1051/m2an/197004R301541. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/m2an/197004R301541>>.
- [31] ROCKAFELLAR, R. T. “Monotone operators and the proximal point algorithm”, *SIAM journal on control and optimization*, v. 14, n. 5, pp. 877–898, 1976.

- [32] FERREIRA, O. P., OLIVEIRA, P. R. “Proximal point algorithm on Riemannian manifolds”, *Optimizacion.*, v. v. 51, n. 2, pp. 257-270, 2002.
- [33] GREGORIO, R. M., OLIVEIRA, P. R. “Proximal point algorithm with Schur decomposition on the cone of symmetric semidefinite positive matrices”, *J. Math. Anal. Appl.*, v. v. 355, n. 2, 469-479, 2009.
- [34] MAGNUS, J. R. “On differentiating eigenvalues and eigenvectors”, *Econometric Theory*, v. 1, n. 2, pp. 179–191, 1985.
- [35] FIORI, S. “Quasi-geodesic neural learning algorithms over the orthogonal group: A tutorial”, *Journal of Machine Learning Research*, v. 6, n. May, pp. 743–781, 2005.
- [36] DE MIRANDA GOMES, J., VELHO, L. *Fundamentos da computação gráfica*. Impa, Rio de Janeiro, Impa, 2008.
- [37] KANOPOULOS, N., VASANTHAVADA, N., BAKER, R. L. “Design of an image edge detection filter using the Sobel operator”, *IEEE Journal of solid-state circuits*, v. 23, n. 2, pp. 358–367, 1988.
- [38] QIU, P. *Image processing and jump regression analysis*, v. 599. Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons, 2005.
- [39] JOHN, C. “A computational approach to edge detection”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1986.
- [40] PERONA, P., MALIK, J. “Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion”, *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, v. 12, n. 7, pp. 629–639, 1990.
- [41] DAVIS, L. S. “A survey of edge detection techniques”, *Computer graphics and image processing*, v. 4, n. 3, pp. 248–270, 1975.
- [42] LENGLET, C., ROUSSON, M., DERICHE, R., et al. “Statistics on the manifold of multivariate normal distributions: Theory and application to diffusion tensor MRI processing”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, v. 25, n. 3, pp. 423–444, 2006.
- [43] MORI, S. *Introduction to diffusion tensor imaging*. Baltimore, MD, Elsevier, 2007.
- [44] MITTIMANN, A. “Tractografia em Tempo Real Através de Unidades de Processamento Gráfico”, *Florianópolis, SC*, 2009.

- [45] PEREIRA, A. S. B. M. *Imagem de tensor de difusão em alzheimer*. Tese de Doutorado, FCT-UNL, 2008.
- [46] FILLARD, P., PENNEC, X., ARSIGNY, V., et al. “Clinical DT-MRI estimation, smoothing, and fiber tracking with log-Euclidean metrics”, *IEEE transactions on medical imaging*, v. 26, n. 11, pp. 1472–1482, 2007.
- [47] STEJSKAL, E. O., TANNER, J. E. “Pin diffusion measurements: spin References echoes in the presence of a time-dependent field gradient”, *NMR Biomed.*, v. S J. Chem. Phys. 42, 288–292, 1965.
- [48] ASTOLA, J., HAAVISTO, P., NEUVO, Y. “Vector median filters”, *Proceedings of the IEEE*, v. 78, n. 4, pp. 678–689, 1990.
- [49] FILHO, O. M., NETO, H. V. “Processamento digital de Imagens”, *Rio de Janeiro: Brasport. Série Acadêmica.*, 1999.
- [50] DA CRUZ NETO, J. X., DE LIMA, L. L., OLIVEIRA, P. R. “Geodesic algorithms in Riemannian geometry.” *J. Geom. Appl. v.3, n.2*, pp. 89–100, 1998.
- [51] FERREIRA, O. P., OLIVEIRA, P. R. “Proximal point algorithms in on Riemannian manifolds.” *J. Geom. Appl. v.51, n.2.*, pp. 257–270, 2002.
- [52] FERREIRA, O. P., OLIVEIRA, P. R. “Subgradient algorithms in on Riemannian manifolds.” *J. Geom. Appl. v.97, n.1.*, pp. 93–104, 1998.
- [53] SMITH, S. T. “Optimization Techniques on Riemannian Manifolds”, *Fields Institute Communications*, v. 3, 1994.
- [54] GREGÓRIO, R., OLIVEIRA, P. R. “Método Proximal com Fatorações de Schur para Determinação da Média Riemanniana de Matrizes Simétricas Definidas Positivas”, *CLAIO/SBPO, Rio de Janeiro, RJ. Pré-anaís XVI CLAI O - XLIV SBPO - Workshoping LIA SGT*, 2012.
- [55] LIN, T.-C. “A new adaptive center weighted median filter for suppressing impulsive noise in images”, *Information Sciences*, v. 177, n. 4, pp. 1073–1087, 2007.
- [56] ZHANG, F., HANCOCK, E. R. “A Riemannian weighted filter for edge-sensitive image smoothing”, *in:Proceedings of International Conference on Pattern Recognition*, pp. 594 – 598, 2006.
- [57] BARMPOUTIS, A. “Tutorial on diffusion tensor MRI using Matlab”, *Electronic Edition, University of Florida*, 2010.

- [58] COOK, P. “Camino: Open-source diffusion-MRI reconstruction and processing”,  
*14 th Sci. Meet. Int. Soc. Magn. Reson. Med*, p. 2759, 2006.