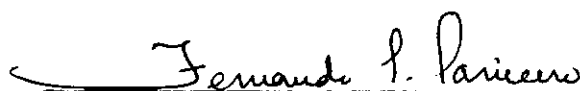


"ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS COM PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS  
MATERIAIS REPRESENTADAS MATEMATICAMENTE POR SÉRIES - APLI  
CAÇÃO À ANÁLISE DE PONTES "

Ronaldo Carvalho Batista

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por :

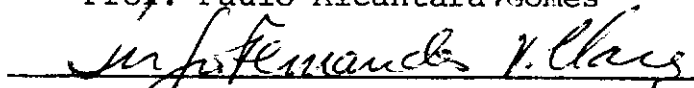


Prof. Fernando Lobo Carneiro

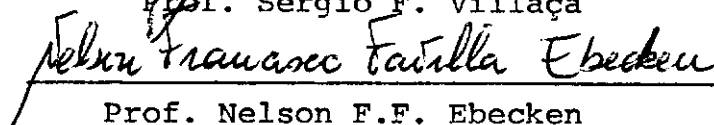
(Presidente)



Prof. Paulo Alcântara Gomes



Prof. Sérgio F. Villaça



Prof. Nelson F.F. Ebecken

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
DEZEMBRO DE 1974

À minha esposa  
À minha mãe

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Fernando Luis Lobo B. Carneiro pela oportunidade concedida e pelos ensinamentos e estímulos recebidos.

Ao Professor Paulo Alcantara Gomes pela amizade e incentivo.

Ao amigo Nelson F. Favilla Ebecken pela colaboração valiosa.

À Yeda Carvalho Dias pela confecção gráfica deste trabalho.

SINOPSE

O processo semi-analítico em elementos finitos é aqui utilizado na análise estática linear de estruturas tridimensionais particulares. É dada ênfase à análise de estruturas de pontes, de seções transversais arbitrárias e de eixos reto, circular ou oblíquo, tendo ou não transversinas intermediárias e com extremos apoiados.

As variações, tanto das características dos materiais quanto da geometria do sólido, segundo o eixo da estrutura, são seguidas representando por séries as variações das propriedades mecânicas dos materiais.

Além das propriedades dos materiais, também são representadas por expansões em séries de FOURIER da coordenada segundo o eixo da estrutura, todas as demais variáveis dependentes.

Devido ao desenvolvimento em série das variações das propriedades mecânicas, o sistema de equações resultante torna-se completamente acoplado e necessita ser resolvido simultaneamente.

Grupando todos os coeficientes de FOURIER em cada ponto nodal, consegue-se tornar com características de faixa, a matriz de rigidez acoplada da estrutura.

A solução do sistema é obtida pelo Método de Gauss, em blocos.

Apresenta-se um programa automático e sua aplicação a alguns exemplos.

ABSTRACT

In this dissertation it is presented a numerical analysis of tridimensional structures, using the semi-analytical finite element process. The analysis is focused on simple supported, curved, skew or rectangular bridges with arbitrary cross section. The analysis allows the consideration of diaphragms.

The mechanical properties are expanded into FOURIER series, allowing for variations in the material and geometric characteristics of the structure.

Besides the mechanical properties, all the other dependent variables are also expanded into FOURIER series.

As a consequence of the series expansion of the mechanical properties, the system of equations becomes fully coupled and must be solved simultaneously.

By grouping all FOURIER coefficients together at each nodal point the structural stiffness matrix, that results from the coupling between the harmonics, can be banded.

The solution of the system of linear equations is obtained by the Gaussian elimination method, employing a block solver.

A computer program is presented and applied to some examples.

# INDICE

CAP.I - INTRODUÇÃO .. .. .	1
CAP.II - FORMULAÇÃO DO PROCESSO UTILIZADO .. .	3
Estruturas de eixo reto .. .	8
Estruturas de eixo circular .. .	10
Estruturas de eixo oblíquo .. .	21
Estruturas contínuas .. .	28
CAP.III - MINIMIZAÇÃO DA LARGURA DE FAIXA DA MATRIZ DE RIGIDEZ ACOPLADA DA ESTRUTURA .. .	30
CAP.IV - ELEMENTO FINITO UTILIZADO .. .	37
CAP. V - PROGRAMAÇÃO AUTOMÁTICA .. .	43
CAP.VI - APLICAÇÃO A ALGUNS EXEMPLOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS	
CAP.VII - CONCLUSÕES .. .	55
BIBLIOGRAFIA .. .	72
SIMBOLOGIA .. .	76
APÊNDICE .. .	78

## CAPÍTULO I

### I N T R O D U Ç Ã O

Vários métodos para a análise de estruturas tridimensionais, e especificamente estruturas laminares, têm sido utilizados no cálculo de estruturas típicas de pontes. Alguns desses métodos são: método dos elementos finitos ([12], [22], [29], [33]) "folded plate method" ([2], [23], [24], [25]), método das faixas finitas ([6], [7]) e método dos segmentos finitos ([24], [27]). Os três primeiros baseados na teoria da elasticidade e o último na teoria ordinária (Resistência dos Materiais).

A introdução de diafragmas e/ou apoios intermediários nesses métodos, exceto o primeiro, tem sido feita anulando os deslocamentos absolutos (apoios) ou os relativos (diafragmas) no plano da seção considerada, através da utilização simultânea dos métodos dos deslocamentos (rigidez) e das forças (flexibilidade).

Esse procedimento conduz à simulação de elementos transversais infinitamente rígidos em seus próprios planos e sem rigidez à torção, isto é, sem restrição a deslocamentos na direção normal a esses planos.

O método dos elementos finitos, com utilização de elementos tridimensionais, embora sendo o mais versátil, pois permite quaisquer condições de contorno e a livre variação da geometria, torna-se por vezes indesejável, pois uma boa discretização do sólido

envolve muitos graus de liberdade e o fornecimento dos dados e posterior análise dos resultados é bastante trabalhosa.

O processo apresentado requer apenas uma discretização bi-dimensional e possibilita a inclusão natural de elementos transversais, constituídos de material igual ou não ao utilizado no restante da estrutura.

Os elementos finitos que constituem essas transversinas ou apoios intermediários, são discretizados como os demais, assumindo as propriedades de seus materiais, somente nos trechos segundo a direção  $z$  onde existam, na estrutura dada, transversinas e/ou apoios. Isto é conseguido representando por séries de FOURIER as propriedades mecânicas dos materiais.

Do mesmo modo é possível se representar vazios, regiões fissuradas e regiões bastante rígidas no interior de um sólido tridimensional.

O procedimento exposto acima ficará melhor esclarecido com a apresentação de alguns exemplos.

A seguir apresenta-se o processo utilizado, adotando-se a formulação do método dos deslocamentos e as hipóteses básicas da elasticidade linear.

## CAPÍTULO II

### FORMULAÇÃO DO PROCESSO UTILIZADO

É conveniente, sempre que possível, construir modelos num espaço  $k$ -dimensional, gerando-se uma região  $(k-1)$  dimensional ao longo de uma geratriz em  $\mathbb{R}^k$ . Por exemplo, elementos finitos para um sólido de revolução tridimensional, podem ser gerados girando um elemento bidimensional,  $2\pi$  radianos em torno do eixo de revolução. Ou ainda, para um sólido tridimensional no qual, segundo uma direção particular, certas propriedades (geometria, propriedades mecânicas do material) não variam; deslocando um elemento bidimensional nesta direção, em um certo intervalo que define uma dimensão do sólido.

Pontos nodais no espaço  $(k-1)$ , então são linhas nodais no espaço  $k$ -dimensional. E as funções de interpolação assumem a forma:

$$\phi_1(X, s) = \phi_1(X) + f(s) \quad , \quad (2.1)$$

onde  $X$  é um ponto no espaço  $(k-1)$  e  $s$  é o parâmetro gerador.

Seja  $(x, y, z)$  o sistema de coordenadas que descreve o espaço euclidiano  $(\mathbb{R}^3)$ . Seja  $z$  o parâmetro gerador, isto é, a variável que se quer separar do problema tridimensional, sendo  $0 \leq z \leq a$ , o intervalo que define uma dimensão do sólido.

Segundo (2.1), as funções de interpolação que definem o estado de deslocamento no interior de um elemento podem ser

escritas sob a forma:

$$f = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{d=1}^D \{ [\bar{\phi}(x,y)] \sin \frac{d\pi z}{a} + [\bar{\bar{\phi}}(x,y)] \cos \frac{d\pi z}{a} \} \{ \delta^d \}^e \quad (2.2)$$

Supondo-se que as funções de interpolação  $\bar{\phi}$  e  $\bar{\bar{\phi}}$  satisfaçam as condições de completude e conformidade no domínio  $x,y$ , a convergência fica garantida, já que a série de FOURIER pode representar qualquer função contínua na região dada. A representação de toda e qualquer solicitação é feita de modo similar:

$$\{p\} = \sum_{\ell=1}^L \{ (\bar{p}(x,y)) \sin \frac{\ell\pi z}{a} + (\bar{\bar{p}}(x,y)) \cos \frac{\ell\pi z}{a} \} \quad (2.3)$$

Supondo um campo de deslocamentos no interior de cada elemento, dado por funções de interpolação de forma quadrática, aplicando as relações entre deformações e deslocamentos e as hipóteses básicas da elasticidade linear, a energia de deformação pode ser formulada. Somando as contribuições de todos os elementos e minimizando a energia potencial total, resulta um sistema de equações algébricas lineares simultâneas,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_e} \left[ \iiint_V [B_n]^T [D_n] [B_n] dV \right] \{ \delta \} &= \sum_{n=1}^{N_e} \left[ \iiint_V [B_n]^T \{ \tau_n \} dV \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^{N_e} \left[ \iiint_V [\phi]^T \{ p_n \} dV \right] + \sum_{n=1}^{N_e} \left[ \iint_A [\psi]^T \{ p_n \} dA \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Todas as variáveis dependentes, inclusive  $D_n$ , são expressas na forma de séries de FOURIER, para levar em conta as

variações segundo o eixo  $z$ . A integração à esquerda do sinal de igualdade na equação (2.4) envolve um produto triplo de funções trigonométricas e as integrações à direita envolvem um produto simples de duas funções trigonométricas. Temos então, um completo acoplamento dos harmônicos deslocamento com harmônicos carga.

É necessário neste ponto fazer-se a distinção entre harmônicos "deslocamento", "carga" e "material", com os super-índices  $d, \ell$  e  $m$  respectivamente. A seguir, o sub-índice  $n$ , relativo a um elemento, será omitido por conveniência.

As propriedades mecânicas do material, em cada elemento, são representadas por uma série de FOURIER da forma :

$$[D] = \sum_{m=1}^M [D^m] \sin \frac{m\pi z}{a} \quad , \quad (2.5)$$

e a matriz  $B$  que relaciona deformações e deslocamentos para cada elemento pode ser escrita :

$$[B] = \sum_{d=1}^D [\theta^d] [\bar{B}^d] \quad , \quad (2.6)$$

onde  $\theta$  é uma matriz diagonal de termos trigonométricos.

Agora, a matriz de rigidez do elemento pode ser escrita como:

$$[k] = \sum_{\ell=1}^L \sum_{d=1}^D \left[ \iiint_V \sum_{m=1}^M [\bar{B}^{\ell}]^T [\theta^{\ell}]^T \times \sin \frac{m\pi z}{a} [D^m] [\theta^d] [\bar{B}^d] dv \right] \quad \dots \dots \quad (2.7)$$

Para cada par de valores  $(\ell, d)$  a integração segundo a direção  $z$ , implica no cálculo de uma integral de um produto triplo de funções seno e/ou cosseno. Como essas integrais nem sempre se anulam, para  $\ell \neq d$ , o sistema de equações torna-se completamente acoplado (o que será melhor explicado no Capítulo III):

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & \dots & [K^{1H}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ [K^{H1}] & \dots & \dots & [K^{HH}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^1\} \\ \{U^2\} \\ \vdots \\ \{U^H\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ \vdots \\ \{F^H\} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

onde:

$[K^{ij}]$  = matriz de rigidez global para o par de harmônicos  
( $i=\ell$ ,  $j=d$ )

$\{U^h\}$  = vetor incógnito dos deslocamentos nodais

$\{F^h\}$  = vetor de cargas nodais

$H$  = número de harmônicos considerados. No caso,  $H=L=D$ .

O vetor de  $N$  posições  $\{U^h\}$  contém os coeficientes do  $h$ -ésimo harmônico deslocamento (um coeficiente para cada um dos  $N$  graus de liberdade). Cada vetor  $\{F^h\}$  é definido similarmente. As submatrizes  $[K^{ij}]$  contêm termos de rigidez que podem ser definidos de modo usual (força devido a um deslocamento unitário), porém, no caso, o deslocamento unitário imposto é o  $j$ -ésimo coeficiente do harmônico deslocamento apropriado e a força resultan

te é o  $i$ -ésimo coeficiente do harmônico carga apropriado. Embora cada uma das submatrizes globais  $[K^{ij}]$  tenham características de faixa, a matriz formada por estas, que chamaremos de matriz de rigidez acoplada da estrutura, é densa, tornando-se necessária a aplicação de uma técnica especial (Capítulo III) para transformá-la também numa matriz faixa.

Para a obtenção da solução do sistema apresentado, deve-se truncar a série de FOURIER para deslocamentos em  $D$  termos. As séries de FOURIER para cargas e propriedades mecânicas do material são independentes. Entretanto, o número de harmônicos "carga"  $L$  deve ser  $\leq D$  a fim de se obter uma solução do sistema de equações. Em geral, como consequência da variação das propriedades mecânicas do material, segundo a direção  $z$ , há um acoplamento entre todos os harmônicos "deslocamento" e harmônicos "carga". É implicitamente suposto que o acoplamento fora do campo de  $D$  é insignificante devido à rápida convergência da série de FOURIER para deslocamentos. Mesmo para problemas com descontinuidades abruptas na direção  $z$ , esta suposição parecerá ser justificada, e os problemas resolvidos com o programa automático tendem a verificar esta conclusão.

Pode-se facilmente ver que a dimensão da matriz de rigidez global cresce com o quadrado do número de harmônicos "deslocamento" empregado. Como o número de harmônicos é limitado pela capacidade do computador, utilizou-se uma técnica especial para a resolução do sistema de equações em blocos. Mesmo assim, devido ao grande esforço computacional exigido, limitou-se o número de harmônicos em cinco.

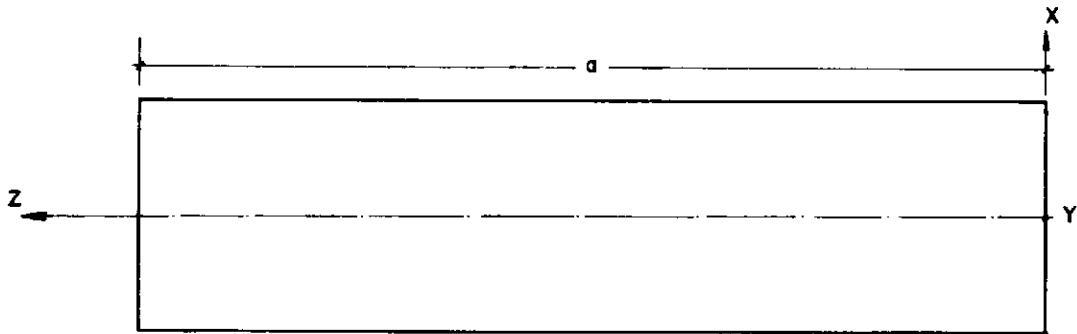
Atentando para este fato, parece claro que quando um problema requer mais que cinco harmônicos para solução adequada, a análise por elementos tridimensionais será mais eficiente, devido ao número total de graus de liberdade envolvidos.

Lembrando ainda que pontos nodais no domínio  $x,y$  são linhas nodais em  $\mathbb{R}^3$ , a restrição de um deslocamento implicará na restrição ao longo de toda a dimensão  $a$  em  $z$ , exceto por um artifício empregado na análise de estruturas contínuas, que será apresentado mais adiante.

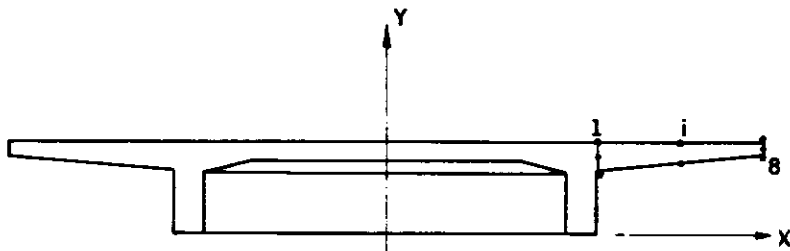
Na análise de todos os tipos de estruturas apresentados a seguir, adota-se uma expansão que resulte nos apoios extremos, deslocamentos nulos no plano  $(x,y)$ , sem restringir contudo os deslocamentos na direção  $z$ .

### Estruturas de Eixo Reto :

A Figura 2.1 representa um dos tipos de estrutura que se quer analisar.



a) VISTA EM PLANTA



b) SEÇÃO TRANSVERSAL

FIG.2.1 — Estrutura de Eixo Reto. Sistema de Eixos Coordenados

Os deslocamentos no interior de cada elemento são da seguinte forma:

$$u = \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i \sin \frac{d\pi z}{a} u_i$$

$$v = \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i \sin \frac{d\pi z}{a} v_i \quad (2.9)$$

$$w = \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i \cos \frac{d\pi z}{a} w_i$$

As deformações em um sólido tridimensional são dadas por:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \\ \partial w / \partial x + \partial u / \partial z \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Substituindo as expressões de (2.9) em (2.10) e diferenciando,

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [B] \{\delta\}^e = [B_1, \dots, B_1, \dots, B_8] \{\delta\}^e = \\ &= \sum_{d=1}^D [\phi^d] [\bar{B}^d] \{\delta\}^e \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ou ainda,

$$[B_1] = \sum_{d=1}^D [\Theta^d] \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_1 \frac{d\pi}{a} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 \\ 0 & \phi_1 \frac{d\pi}{a} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \phi_1 \frac{d\pi}{a} & 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde,

$$[\theta^d] = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \frac{d\pi z}{a} & & & & & \\ & \operatorname{sen} \frac{d\pi z}{a} & & & & \\ & & \operatorname{sen} \frac{d\pi z}{a} & & & \\ & & & \operatorname{sen} \frac{d\pi z}{a} & & \\ & & & & \cos \frac{d\pi z}{a} & \\ & 0 & & & & \cos \frac{d\pi z}{a} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

ficando a matriz de rigidez do elemento,

$$[k] = \sum_{\ell=1}^L \sum_{d=1}^D \left[ \iiint_V \sum_{m=1}^M [\bar{B}^\ell]^T [\theta^\ell]^T \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{a} [D^m] [\theta^d] [\bar{B}^d] dx dy dz \right] \quad (2.15)$$

Supondo-se um comportamento elástico, a relação entre tensões e deformações será linear e da forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

excluídas aqui as tensões e deformações iniciais, e onde  $[D]$  é a matriz de elasticidade.

Para materiais ortotrópicos, a matriz de elasticidade para um determinado harmônico "material" fica,

$$[D^m] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{E_x}\right)^m & \left(-\frac{\nu_{yx}}{E_y}\right)^m & \left(-\frac{\nu_{zx}}{E_z}\right)^m & 0 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{\nu_{yx}}{E_y}\right)^m & \left(\frac{1}{E_y}\right)^m & \left(-\frac{\nu_{zy}}{E_z}\right)^m & 0 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{\nu_{zx}}{E_z}\right)^m & \left(-\frac{\nu_{zy}}{E_z}\right)^m & \left(\frac{1}{E_z}\right)^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{G_{xy}}\right)^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{G_{yz}}\right)^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{G_{zx}}\right)^m \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

e para o caso particular ao qual pertencem os materiais "estratificados" ou transversalmente isotrópicos, tem-se:

1 - plano de estratificação paralelo a  $xy$ ,

$$E_x = E_y = E_1 \quad \text{e} \quad E_z = E_2$$

$$\nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu_1 \quad \text{e} \quad \nu_{zx} = \nu_{xz} = \nu_{zy} = \nu_{yz} = \nu_2$$

$$[D^m] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{E_1}\right)^m & \left(-\frac{\nu_1}{E_1}\right)^m & \left(-\frac{\nu_2}{E_2}\right)^m & & & \\ \left(-\frac{\nu_1}{E_1}\right)^m & \left(\frac{1}{E_1}\right)^m & \left(-\frac{\nu_2}{E_2}\right)^m & & & \\ \left(-\frac{\nu_2}{E_2}\right)^m & \left(-\frac{\nu_2}{E_2}\right)^m & \left(\frac{1}{E_2}\right)^m & & & \\ & & & \left(\frac{1}{G_1}\right)^m & & \\ & & & & \left(\frac{1}{G_2}\right)^m & \\ & & & & & \left(\frac{1}{G_2}\right)^m \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.18)$$

2 - Plano de estratificação paralelo a  $zx$  ,

$$E_x = E_z = E_1 \quad e \quad E_y = E_2$$

$$\nu_{xy} = \nu_{zx} = \nu_1 \quad e \quad \nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu_{zy} = \nu_{yz} = \nu_2$$

$$[D^m] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{E_1}\right)^m & \left(-\frac{\nu_2}{E_2}\right)^m & \left(-\frac{\nu_1}{E_1}\right)^m & & & \\ \left(-\frac{\nu_2}{E_2}\right)^m & \left(\frac{1}{E_2}\right)^m & \left(-\frac{\nu_2}{E_2}\right)^m & & & \\ \left(-\frac{\nu_1}{E_1}\right)^m & \left(-\frac{\nu_2}{E_2}\right)^m & \left(\frac{1}{E_1}\right)^m & & & \\ & & & \left(\frac{1}{G_2}\right)^m & & \\ & & & & \left(\frac{1}{G_2}\right)^m & \\ & & & & & \left(\frac{1}{G_1}\right)^m \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.19)$$

Como o material em cada elemento terá apenas um plano de estratificação, por conveniência,  $[D^m]$  pode ser escrita :

$$[D^m] = \begin{bmatrix} d_{11}^m & d_{12}^m & d_{13}^m & & & \\ d_{21}^m & d_{22}^m & d_{23}^m & & 0 & \\ d_{31}^m & d_{32}^m & d_{33}^m & & & \\ & & & d_{44}^m & & \\ & 0 & & & d_{55}^m & \\ & & & & & d_{66}^m \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

e, visando a programação automática, combinaremos as integrais segundo a direção  $z$  que aparecem em (2.15), com os coeficientes da matriz  $[D^m]$  dada por (2.20)

$$C_{ij} = \sum_{m=1}^M d_{ij}^m \int_0^a \sin \frac{\ell \pi z}{a} \cdot \sin \frac{m \pi z}{a} \cdot \sin \frac{d \pi z}{a} dz$$

para  $i < 5$  e  $j < 5$

e ,

$$C_{ij} = \sum_{m=1}^M d_{ij}^m \int_0^a \cos \frac{\ell \pi z}{a} \cdot \sin \frac{m \pi z}{a} \cdot \cos \frac{d \pi z}{a} dz \quad (2.21)$$

para  $i > 4$  e  $j > 4$

A matriz de rigidez do elemento fica então:

$$[k] = \sum_{\ell=1}^L \sum_{d=1}^D \left[ \iint_A [\bar{B}^{\ell}]^T [C] [\bar{B}^d] dx dy \right] \quad (2.22)$$

Similarmente, o carregamento é desenvolvido em série de FOURIER, e um termo que corresponde às componentes nas direções  $x$  e  $y$  é dado por:

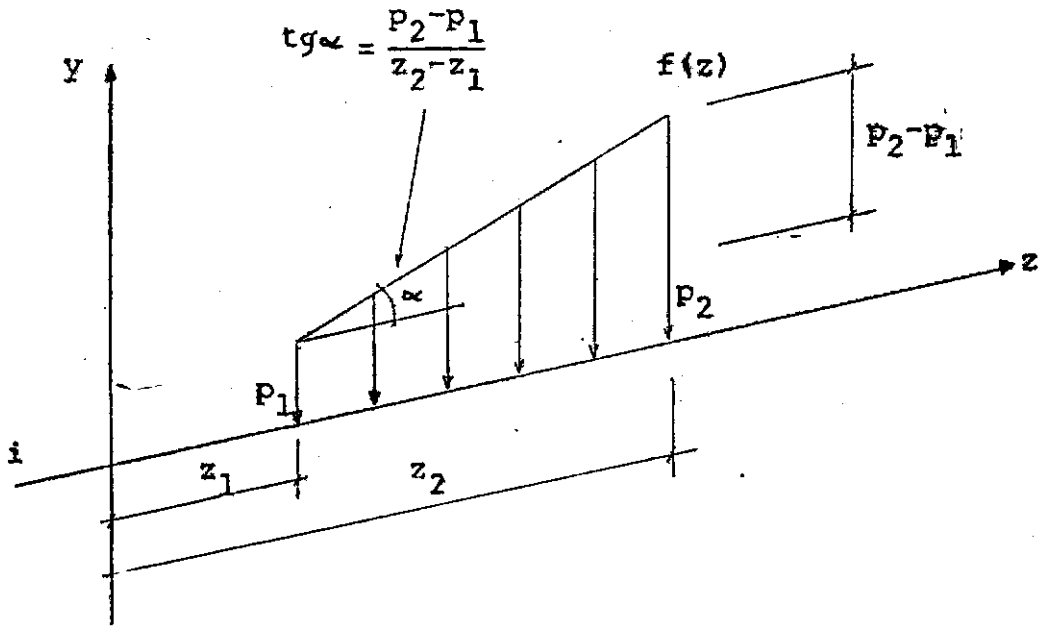
$$\{p\}^{\ell} = \{\bar{p}\} \sin \frac{\ell \pi z}{a} \quad (2.23)$$

As contribuições devidas às cargas distribuídas, concentradas e deformações iniciais, são avaliadas como os termos de carga. Por exemplo, cargas sobre uma linha nodal são expressas diretamente como forças nodais reduzidas ao plano do elemento:

$$\{F_i^{\ell}\} = \int_0^a \sin \frac{\ell \pi z}{a} \begin{Bmatrix} \bar{F}_{x1}^{\ell} \\ \bar{F}_{y1}^{\ell} \\ \bar{F}_{z1}^{\ell} \end{Bmatrix} \sin \frac{\ell \pi z}{a} dz = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{x1}^{\ell} \\ \bar{F}_{y1}^{\ell} \\ \bar{F}_{z1}^{\ell} \end{Bmatrix} \cdot \frac{a}{2} \quad \dots (2.24)$$

onde  $\bar{F}_{x1}^{\ell}$ ,  $\bar{F}_{y1}^{\ell}$  e  $\bar{F}_{z1}^{\ell}$  são os coeficientes da série (intensidade de carga por unidade de comprimento). Supondo um carregamento atuando sobre uma linha nodal e na direção  $y$ ,  $\bar{F}_{y1}^{\ell}$  será dado por:

1 - carregamento linearmente distribuído ,



$$\bar{F}_{y1}^{\ell} = \frac{2}{a} \int_{z_1}^{z_2} f(z) \sin \frac{\ell \pi z}{a} dz = \frac{2}{a} \int_{z_1}^{z_2} \left[ P_1 + \frac{P_2 - P_1}{z_2 - z_1} (z - z_1) \right] \times$$

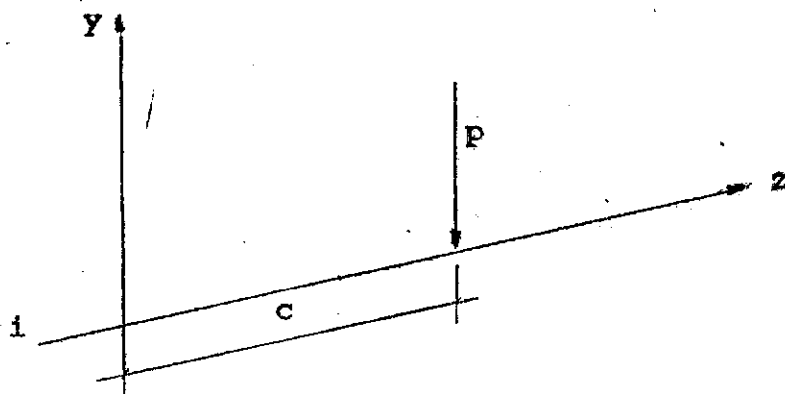
$$\times \sin \frac{\ell \pi z}{a} dz$$

$$\bar{F}_{y1}^{\ell} = \frac{2}{\ell \pi} \left\{ \left( \frac{P_2 - P_1}{z_2 - z_1} \right) \left[ (z_1 \cos \frac{\ell \pi z_1}{a} - z_2 \cos \frac{\ell \pi z_2}{a}) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{a}{\ell \pi} \left( \sin \frac{\ell \pi z_2}{a} - \sin \frac{\ell \pi z_1}{a} \right) \right] + \left( P_1 - \frac{P_2 - P_1}{z_2 - z_1} \right) \left( \cos \frac{\ell \pi z_1}{a} - \right.$$

$$\left. - \cos \frac{\ell \pi z_2}{a} \right) \} \quad (2.2)$$

2 - carga concentrada ,



$$\bar{F}_{yi}^{\ell} = \frac{2}{a} p \sin \frac{\ell \pi c}{a} \quad (2.26)$$

Deformações iniciais devidas a uma expansão térmica i sotrópica, para um harmônico  $\ell$  , são representadas por :

$$\{\epsilon_o^{\ell}\} = \begin{Bmatrix} \gamma \Delta^{\ell} \\ \gamma \Delta^{\ell} \\ \gamma \Delta^{\ell} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \{\bar{\epsilon}_o\} \sin \frac{\ell \pi z}{a} + \{\bar{\epsilon}\} \cos \frac{\ell \pi z}{a} \quad (2.27)$$

onde  $\gamma$  é o coeficiente de dilatação térmica e  $\Delta^{\ell}$  a variação de temperatura em cada nó. E as forças nodais equivalentes por :

$$\{F_i^{\ell}\} = \iiint_V [B_i^{\ell}]^T \sum_{m=1}^{TM} [D^m] \sin \frac{m \pi z}{a} \{\epsilon_o^{\ell}\} dx dy dz \quad (2.28)$$

A solução do problema é assim reduzida a uma série de

soluções bidimensionais. Procedê-se então como se os elementos fossem planos. Os deslocamentos são calculados e conseqüentemente são determinadas as tensões em cada seção analisada ,

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^M [D^m]_s \sin \frac{m\pi z}{a} (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (2.29)$$

onde o sub-índice  $s$  refere-se à seção analisada.

#### Estruturas de Eixo Circular :

O presente caso é o da análise de um segmento sólido de revolução. A Figura 2.2 ilustra a idealização de uma estrutura típica e define o sistema de coordenadas cilíndricas.

O tratamento a ser dado é idêntico ao anterior (estruturas de eixo reto), sendo agora o parâmetro gerador,  $\theta$ . Sendo  $0 \leq \theta \leq \alpha$ , a expansão é feita, então, em termos de  $\frac{h\pi\theta}{\alpha}$ , onde  $h$  se refere aos harmônicos "carga", "material" ou "deslocamento".

(Veja Figura na próxima página)

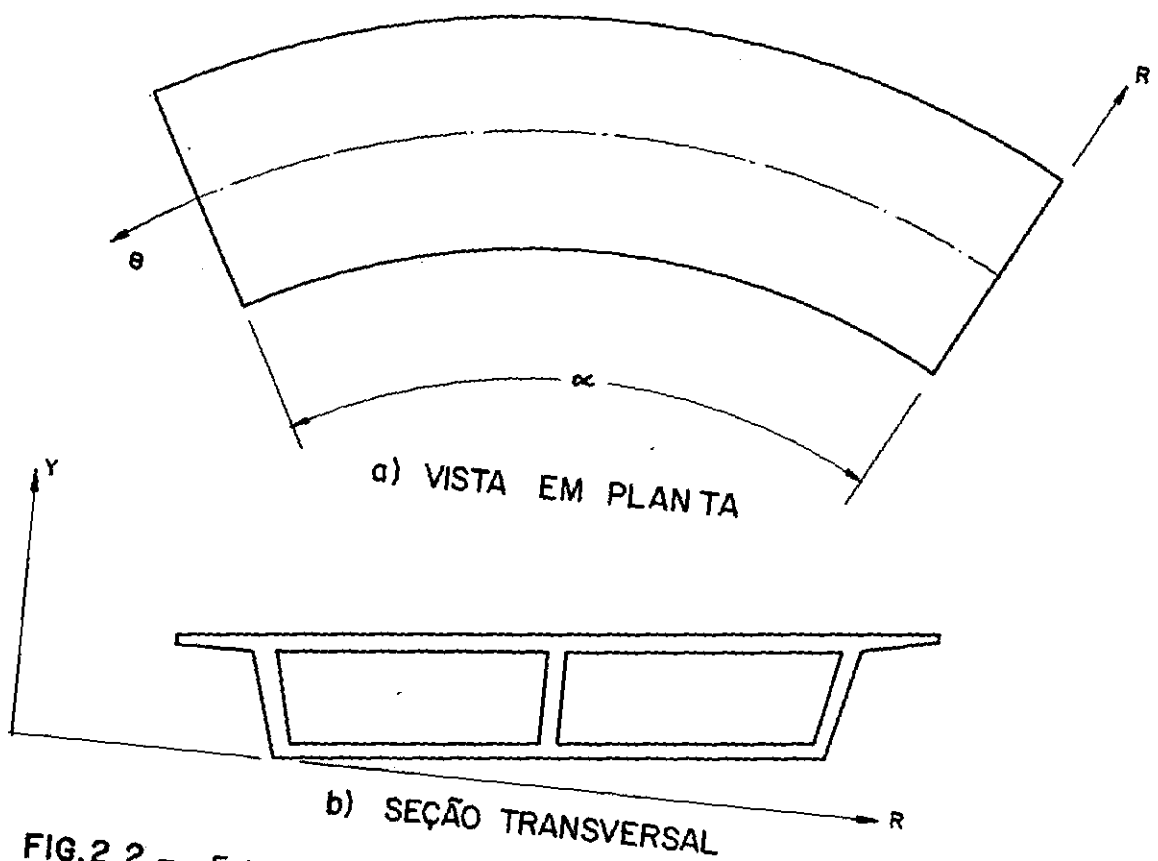
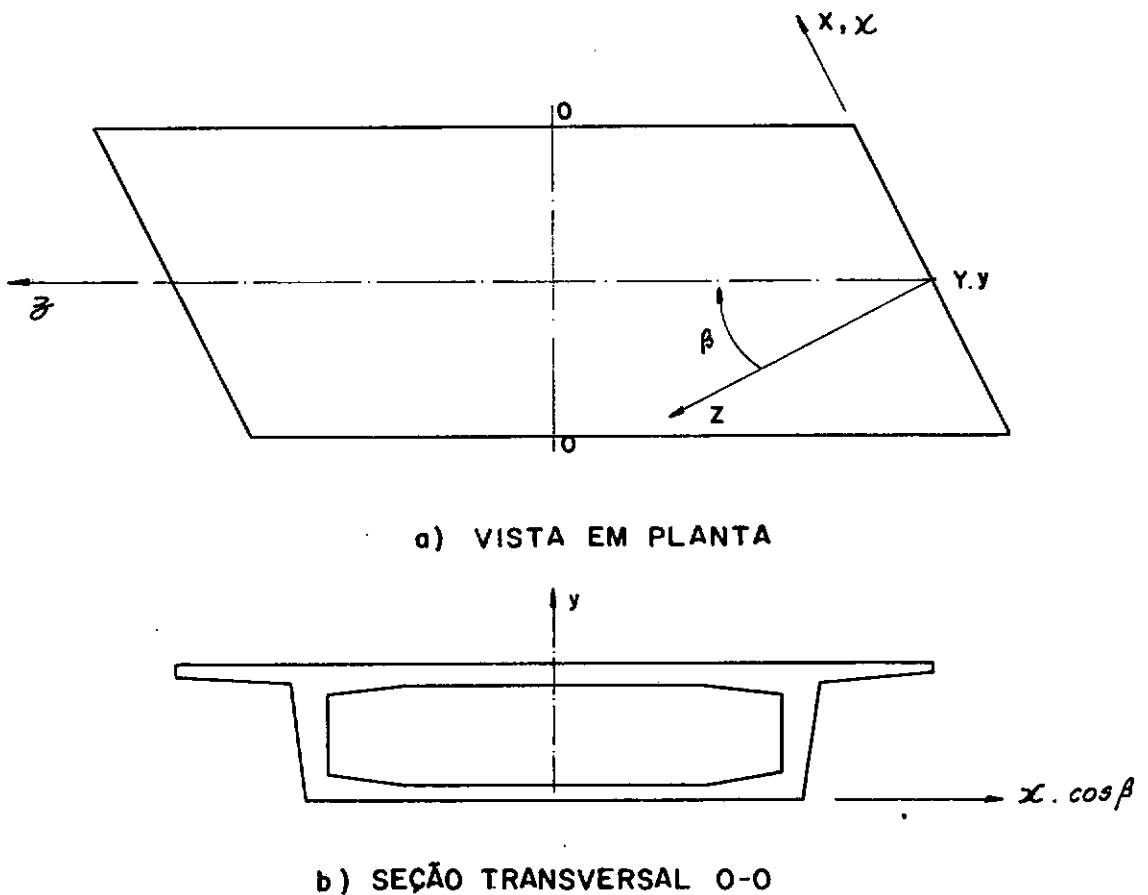


FIG.2.2 — Estrutura de Eixo Circular. Sistema de Eixos Coordenados

### Estruturas de Eixo Obliquo :

Trataremos agora da análise de estruturas do tipo apresentado na Figura 2.3 . São definidos também, nesta figura, dois sistemas de eixos: um cartesiano  $(X,Y,Z)$  , o outro  $(x,y,z)$  com o eixo  $z$  obliquo em relação a  $x$  .



**FIG.2.3** Estrutura de Eixo Obliquo - Sistema de eixos coordenados.

Torna-se então necessário, para a solução do problema, seguindo-se a apresentação dos casos anteriores, uma mudança de base, ou melhor, do sistema coordenado.

Sejam  $(X,Y,Z)$  os eixos coordenados definidos pelos vetores de base  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ , e  $(x,y,z)$  por  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ . Seja a aplicação linear tal que :

$$\begin{Bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

e sendo as coordenadas de um vetor unicamente determinadas pelo sistema coordenado (formado pelos vetores de base), as novas coordenadas podem ser escritas em função das cartesianas sob a forma:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

onde

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \text{cos } \beta \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.32)$$

e então ,

$$\begin{aligned} x &= X + Z \text{tg } \beta \\ y &= Y \\ z &= Z \text{sec } \beta \end{aligned} \quad (2.33)$$

Os deslocamentos no interior de cada elemento eram dados por (2.9) e as deformações em um sólido tridimensional são dadas por (2.10).

Como ,

$$\begin{aligned}x &= x(X, Z) \\ y &= y(Y) \\ z &= z(X, Z)\end{aligned}\tag{2.34}$$

tem-se ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial X} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial Z} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial Z} = \frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{tg} \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \sec \beta\end{aligned}\tag{2.35}$$

e expressões análogas para  $v$  e  $w$ .

Substituindo-se as diferenciais dadas por (2.35) em (2.10) e por conveniência separando-se em parcelas ,

$$\{\epsilon\} = \sum_{d=1}^D \left( [\bar{\theta}^d] [\bar{B}^d] + [\bar{\theta}^d] [\bar{B}^d] \right) \{\delta\}^e \tag{2.36}$$

onde ,

$$[\bar{\theta}^d] = \begin{bmatrix} \text{sen } \frac{d\pi z}{a} & & & & \\ & \text{sen } \frac{d\pi z}{a} & & & \\ & & \text{sen } \frac{d\pi z}{a} & & \\ & & & \text{sen } \frac{d\pi z}{a} & \\ & & & & \cos \frac{d\pi z}{a} \\ & & & & & \cos \frac{d\pi z}{a} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$[\bar{\theta}^d] = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \cos \frac{d\pi z}{a} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \text{sen } \frac{d\pi z}{a} \\ & & & & & \text{sen } \frac{d\pi z}{a} \end{bmatrix} \quad (\dots)$$

(... 2.38)

$$[\bar{B}_i^d] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & -\sec \beta \frac{\phi_i d\pi}{a} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \sec \beta \frac{\phi_i d\pi}{a} & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ \sec \beta \frac{\phi_i d\pi}{a} & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$[\bar{B}_i^{\bar{d}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{tg} \beta \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{tg} \beta \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 \\ \operatorname{tg} \beta \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

podendo-se então escrever a matriz de rigidez do elemento, na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 [k] = & \sum_{\ell=1}^L \sum_{d=1}^D \sum_{m=1}^M \iiint_V \{ ([\bar{B}^\ell]^T [\bar{\theta}^\ell]^T [D^m] \sin \frac{m\pi z}{a} \times [\bar{\theta}^d] [\bar{B}^d] ) + \\
 & + ([\bar{B}^\ell]^T [\bar{\theta}^\ell]^T [D^m] \sin \frac{m\pi z}{a} \times [\bar{\theta}^d] [\bar{\bar{B}}^d] ) + \\
 & + ([\bar{\bar{B}}^\ell]^T [\bar{\theta}^\ell]^T [D^m] \sin \frac{m\pi z}{a} \times [\bar{\theta}^d] [\bar{B}^d] ) + \\
 & + ([\bar{\bar{B}}^\ell]^T [\bar{\theta}^\ell]^T [D^m] \sin \frac{m\pi z}{a} \times [\bar{\theta}^d] [\bar{\bar{B}}^d] ) \} dx dy dz \\
 & \dots\dots (2.41)
 \end{aligned}$$

ou, seguindo procedimento idêntico ao caso de estruturas de eixo reto, expressões (2.21),

$$\begin{aligned}
 [k] = & \sum_{\ell=1}^L \sum_{d=1}^D \iint_A \{ ([\bar{B}^\ell]^T [\bar{\theta}^\ell]^T [C_1] [\bar{\theta}^d] [\bar{B}^d] ) + \\
 & + ([\bar{B}^\ell]^T [\bar{\theta}^\ell]^T [C_2] [\bar{\theta}^d] [\bar{\bar{B}}^d] ) + \\
 & + ([\bar{\bar{B}}^\ell]^T [\bar{\theta}^\ell]^T [C_3] [\bar{\theta}^d] [\bar{B}^d] ) + \\
 & + ([\bar{\bar{B}}^\ell]^T [\bar{\theta}^\ell]^T [C_4] [\bar{\theta}^d] [\bar{\bar{B}}^d] ) \} dx dy \\
 & \dots\dots (2.42)
 \end{aligned}$$

onde,

$$C_{1ij} = \sum_{m=1}^M d_{ij}^m \int_0^a \operatorname{sen} \frac{\ell \pi z}{a} \cdot \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{a} \cdot \operatorname{sen} \frac{d \pi z}{a} \cdot dz$$

$$C_{2ij} = \sum_{m=1}^M d_{ij}^m \int_0^a \operatorname{sen} \frac{\ell \pi z}{a} \cdot \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{a} \cdot \cos \frac{d \pi z}{a} \cdot dz$$

$$C_{3ij} = \sum_{m=1}^M d_{ij}^m \int_0^a \cos \frac{\ell \pi z}{a} \cdot \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{a} \cdot \operatorname{sen} \frac{d \pi z}{a} \cdot dz$$

$$C_{4ij} = \sum_{m=1}^M d_{ij}^m \int_0^a \cos \frac{\ell \pi z}{a} \cdot \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{a} \cdot \cos \frac{d \pi z}{a} \cdot dz$$

para  $i < 5$  e  $j < 5$

e ,

$$C_{1ij} = C_{4ij} \quad , \quad \begin{array}{l} \text{para } i < 5 \\ j < 5 \end{array}$$

$$C_{2ij} = C_{3ij} \quad , \quad \begin{array}{l} \text{para } i < 5 \\ j < 5 \end{array}$$

$$C_{3ij} = C_{2ij} \quad , \quad \begin{array}{l} \text{para } i < 5 \\ j < 5 \end{array}$$

$$C_{4ij} = C_{1ij} \quad , \quad \begin{array}{l} \text{para } i < 5 \\ j < 5 \end{array}$$

(2.43)

para  $i > 4$   
para  $j > 4$

O desenvolvimento restante, até o cálculo das tensões, é idêntico ao apresentado para estruturas de eixos reto e circular, porém adaptado ao novo sistema coordenado.

### Estruturas Contínuas :

Procurou-se estender o processo apresentado neste capítulo à análise de estruturas com apoios intermediários e extremidades simplesmente apoiadas, numa tentativa de se resolver problemas deste tipo, utilizando as mesmas funções para deslocamentos adotadas nos casos anteriores.

Aqui, os apoios intermediários são discretos, isto é, também representados por elementos finitos e localizados em um região qualquer entre os apoios extremos (simulados por diafragmas deslocáveis em seus próprios planos). Esses apoios, tais como as transversinas intermediárias, são discretizados no plano  $xy$ , tendo agora, os elementos que os constituem, alguns graus de liberdade restritos. Porém, neste caso, essas restrições que simulam as condições de apoio não se prolongam por toda a linha nodal, limitando-se apenas aos intervalos segundo a direção  $z$  (eixo da estrutura) onde existam esses apoios. Assim, somente nesses intervalos, os elementos que constituem os apoios assumem as propriedades mecânicas de seus materiais, representadas por expansões em séries de FOURIER, da coordenada segundo o eixo da estrutura.

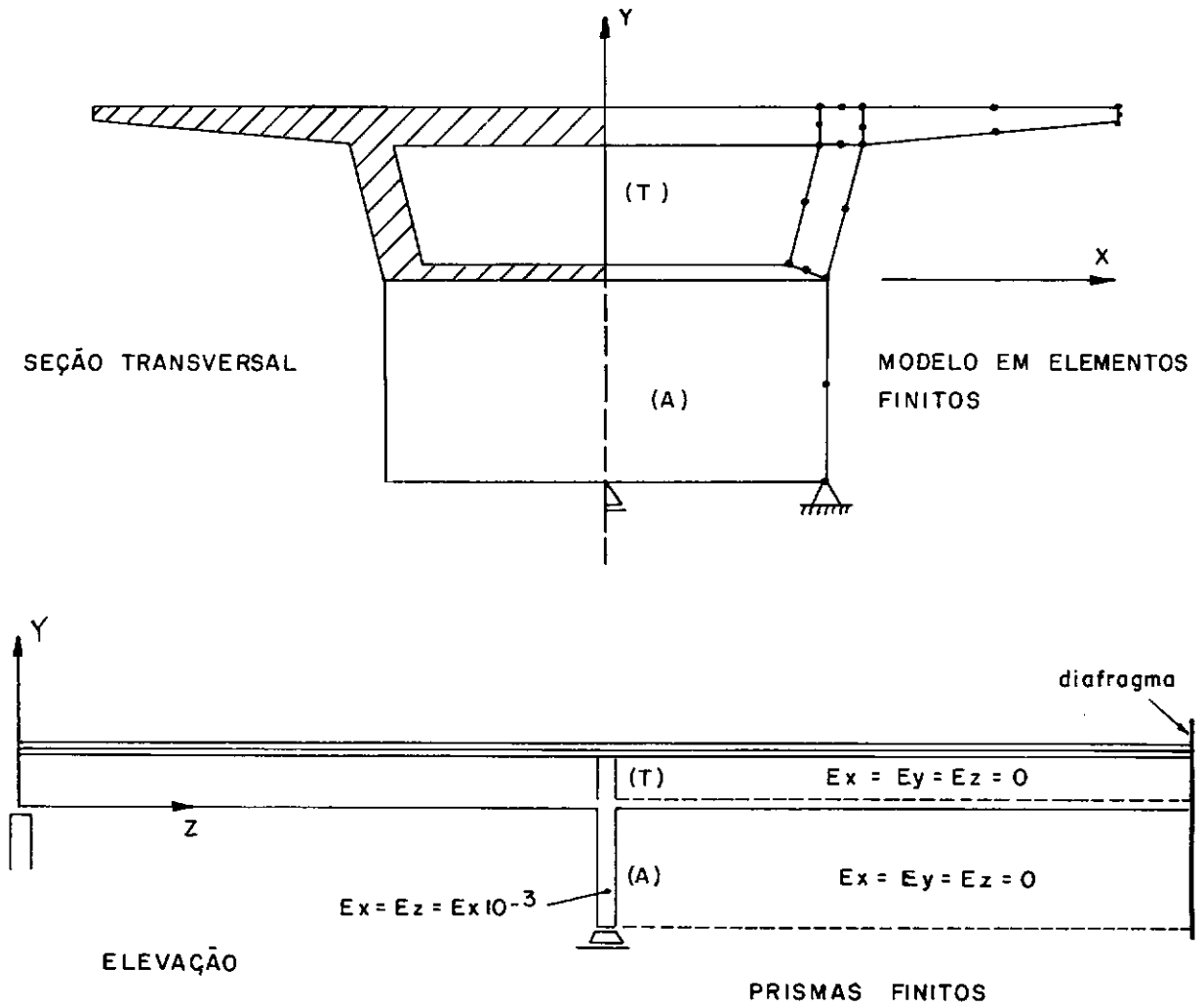


FIG. 2.4 - Estrutura contínua. Idealização em elementos finitos

A Figura 2.4 ilustra o presente caso, para uma viga caixão contínua, com dois vãos e uma transversina sobre o apoio central. Nesta figura o elemento que constitui a transversina é assinalado com (T) e o que constitui o apoio intermediário com (A) .

Esse tipo de solução é análoga à solução de vigas com extremidades apoiadas e sobre base elástica, ou melhor, sobre apoios elásticos. Se a rigidez desses apoios cresce, tendem a se comportar como apoios indeslocáveis. Entretanto para a convergência se efetuar (principalmente das tensões em regiões sobre um apoio intermediário) são necessários mais de cinco harmônicos "deslocamento" ou "carga", mesmo para carregamentos distribuídos.

Creemos que o procedimento necessário a esta solução a proximada, aliada à necessidade de se tomar muitos termos das séries e a técnica empregada na montagem e solução do sistema de equações (Cap. III), torna o processo utilizado inviável para a análise de es truturas contínuas. O sistema de equações torna-se enorme e comple tamente instável.

### CAPÍTULO III

#### MINIMIZAÇÃO DA LARGURA DE FAIXA DA MATRIZ DE RIGIDEZ

##### ACOPLADA DA ESTRUTURA

Ultimamente, uma interessante subclasse de análise por elementos finitos de problemas tridimensionais tem sido feita usando expansões em série de FOURIER das variáveis do problema, como foi sugerido inicialmente ([30]). Esta técnica é especialmente indicada à sólidos tridimensionais que, em uma determinada direção, certas propriedades (geometria, propriedades mecânicas dos materiais) não variam ([2], [6], [13], [25], [30]). Devido à condição de ortogonalidade, o conjunto de equações pode ser desacoplado e resolvido para cada harmônico separadamente. Assim ficam a serem resolvidos  $H$  problemas bidimensionais, onde  $H$  é o número de termos tomados da série de FOURIER. Tal procedimento pode ser facilmente implementado, e é bastante eficiente em termos de computação (memória utilizada, tempo de processamento), do que a análise por elementos tridimensionais.

Uma subclasse consideravelmente mais geral de problemas incluiria a variação das propriedades dos materiais ao longo de uma determinada direção, tal como acontece na análise de tensões térmicas, recentemente estudada por meio deste processo ([8]). Infelizmente, a condição de ortogonalidade não é aplicada ao conjunto de equações e o sistema de equações torna-se completamente acoplado ([8]). Isto implica na resolução simultânea de um conjunto de  $N \times H$  equações,

onde  $N$  é o número de graus de liberdade envolvidos.

O objetivo deste capítulo é examinar a forma da matriz de rigidez da estrutura que resulta do acoplamento entre os harmônicos. Será mostrado que esta matriz pode assumir características de faixa ([9]). As relações entre os procedimentos para análises acoplada e desacoplada não são enfatizadas. Porém, os dois métodos de análise devem ser tratados diferentemente, a fim de se obter a formulação mais eficiente.

Em geral o método dos deslocamentos pode ser formulado como:

$$[K] \{U\} = \{F\} \quad (3.1)$$

Representando as variáveis dependentes, por expansões em séries de FOURIER, da coordenada  $z$ , a equação (3.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & \dots\dots\dots & [K^{1H}] \\ [K^{12}]^T & [K^{22}] & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ [K^{1H}]^T & \dots\dots\dots & [K^{HH}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^1\} \\ \{U^2\} \\ \vdots \\ \{U^h\} \\ \vdots \\ \{U^H\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ \vdots \\ \{F^h\} \\ \vdots \\ \{F^H\} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

onde, a simbologia adotada é a esclarecida para a equação (2.8). Como foi previamente mencionado, se a geometria do sólido e as propriedades do material não variam ao longo da direção  $z$ , então, devido

ã ortogonalidade ,

$$[K^{\ell d}] = [0] , \quad \text{para } \ell \neq d , \quad (3.3)$$

isto é, o sistema desacopla ,

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & & 0 \\ & [K^{22}] & \\ 0 & & [K^{HH}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^1\} \\ \{U^2\} \\ \vdots \\ \{U^H\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ \vdots \\ \{F^H\} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

e o problema é reduzido à solução de  $H$  conjuntos de equações da forma :

$$[K^{hh}] \{U^h\} = \{F^h\} \quad (3.5)$$

Nota-se que as incógnitas foram ordenadas de maneira que facilitasse a visualização do desacoplamento, isto é, para o sistema desacoplado esta é a ordenação mais lógica.

As submatrizes  $[K^{\ell d}]$  , geralmente são da forma mostrada a seguir.

SUBMATRIZ  
DE  
RIGIDEZ

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^{ld} & K_{12}^{ld} & \dots & K_{1(W+1)}^{ld} & & \\
 K_{21}^{ld} & K_{22}^{ld} & \dots\dots\dots & K_{2(W+2)}^{ld} & & 0 \\
 & K_{(W+1)1}^{ld} & & & & \\
 & & K_{(W+2)2}^{ld} & & & \\
 & & & K_{n(n-W)}^{ld} & \dots\dots\dots & K_{nn}^{ld} & \dots\dots\dots & K_{n(n+W)}^{ld} \\
 0 & & & & & & & \\
 & & & & & K_{N(N-W)}^{ld} & & K_{NN}^{ld}
 \end{bmatrix}$$

Vê-se que ,

$$K_{ij}^{ld} = 0 \quad , \quad \text{para } |i-j| > W \quad (3.6)$$

onde  $W$  é a largura de faixa .

O tempo de solução tende a ser proporcional a  $RW^2$  , para matrizes em forma de faixa, sendo  $R$  a ordem da matriz. Para uma matriz densa proporcional a  $R^3$  . Se  $W \ll R$  , o esforço computacional decresce bastante, com a utilização dos vários métodos para a solução de sistemas que envolvem matrizes em faixa ([4], [26], [31]). Este procedimento é de aplicação imediata ao sistema de equações desacoplado, equação (3.5).

No capítulo anterior, mostrou-se que, quando as propriedades do material variam segundo a direção  $z$  , há um completo

acoplamento entre os harmônicos. Neste caso, a ordenação das incógnitas apresentada na equação (3.2) torna-se indesejável. O número de equações do sistema é elevado, e a matriz  $[K]$  é densa. Embora cada submatriz  $[K^{ld}]$  tenha características de faixa, o sistema acoplado deve ser resolvido como se a matriz fosse densa.

Os deslocamentos na equação (3.2) eram ordenados da seguinte forma:

$$\{U\} = \begin{bmatrix} [u_1^1, u_2^1, \dots, u_N^1] & [u_1^2, u_2^2, \dots, u_n^2 \dots] \\ & [u_1^h, \dots, u_n^h \dots] \dots [\dots u_N^H] \end{bmatrix}^T \quad (3.7)$$

onde  $N$  é o número de graus de liberdade e  $H$  é o número de harmônicos considerados. Agora, reordenando-se o vetor deslocamento na forma,

$$\{U\} = \begin{bmatrix} u_1^1, u_1^2, u_1^3, \dots, u_1^H, u_2^1, \dots, u_2^H, \dots, u_n^h, \dots, u_N^H \end{bmatrix}^T \quad \dots \quad (3.8)$$

resulta um rearranjo de linhas e colunas da matriz  $[K]$ , de tal forma que esta adquiere característica de faixa, com largura igual a  $WH$ . A matriz resultante é mostrada a seguir.

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^{11} & K_{11}^{12} & \dots & K_{1(W+1)}^{1H} & & \\
 K_{11}^{21} & K_{11}^{22} & \dots & K_{1(W+1)}^{2H} & & 0 \\
 \vdots & & & & & \\
 K_{(W+1)1}^{H1} & & & & & \\
 & K_{(W+1)1}^{H2} & & & & \\
 & & K_{n(n-W)}^{H1} & K_{nn}^{hh} & K_{n(n+W)}^{hH} & \\
 0 & & & & \vdots & \\
 & & & K_{N(N-W)}^{H1} & \dots & K_{NN}^{HH}
 \end{bmatrix}$$

#### MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA COM CARACTERÍSTICA DE FAIXA

Se  $WH \ll R$ , pode-se ainda desfrutar de algumas vantagens na resolução do sistema de equações. Outros procedimentos poderiam ter sido utilizados, como a técnica empregada para matrizes esparsas. Esta técnica é recomendável no caso de sistemas desacoplados ([13]), mas no caso presente complicaria bastante a montagem da matriz de rigidez da estrutura. Já que forçosamente o sistema deveria ser resolvido em blocos (Ver Capítulo V), não compensaria um esforço nesse sentido.

## CAPÍTULO IV

### ELEMENTO FINITO UTILIZADO

Como a discretização por elementos finitos é feita em um domínio  $x,y$ , e todas as integrações na direção  $z$  necessárias à avaliação das propriedades do elemento foram realizadas, torna-se evidente a utilização de um elemento bidimensional.

Um grande número de problemas que podem ser atacados pelo processo exposto possuem contornos bastante irregulares e elementos simples como triângulos e/ou retângulos conseguem uma razoável aproximação do contorno dado. Uma melhor aproximação de contornos irregulares é obtida com a utilização de elementos isoparamétricos curvos. Adotaremos então um elemento isoparamétrico quadrilátero quadrático ( [13], [22], [33] ) .

A construção de elementos isoparamétricos é baseado na idéia de se ajustar contornos polinomiais sobre pontos especificados no contorno (pontos nodais), utilizando as mesmas funções de interpolação que definem os deslocamentos no interior do elemento, através dos deslocamentos nodais.

A Figura 4.1 mostra um elemento isoparamétrico quadrilátero quadrático e define dois sistemas de coordenadas: um cartesiano  $x,y$  e outro curvilíneo  $\xi,\eta$ .

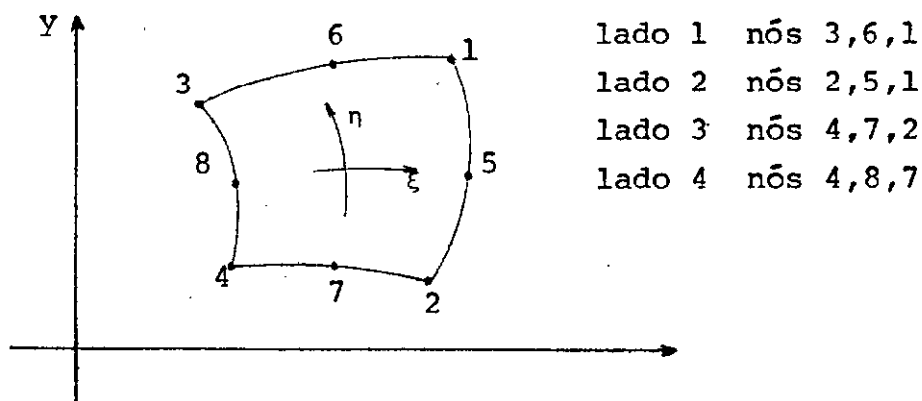


Figura 4.1

A transformação de  $\xi$  e  $\eta$  no sistema de coordenadas  $x, y$  tem a seguinte relação:

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Uma aproximação da transformação de coordenadas dada por (4.1) pode ser escrita ,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $x_i$  e  $y_i$  são coordenadas locais  $x, y$  do nó  $i$  , e  $\phi_i$  são funções de interpolação da família "Serendipity", para o elemento quadrático ,

$$\phi_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) \quad , \quad \text{para } i=1, 2, 3 \text{ e } 4$$

$$\begin{aligned}
 \phi_i &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta_0) \quad , \quad \text{para } i=6 \text{ e } 7 \\
 \phi_i &= \frac{1}{2} (1 + \xi_0) (1 - \eta^2) \quad , \quad \text{para } i=5 \text{ e } 8
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

onde,

$$\xi_0 = \xi \xi_i \quad \text{e} \quad \eta_0 = \eta \eta_i$$

e para as quais  $\sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\xi, \eta) = 1$  satisfazendo então o critério de "deformação constante".

Pela definição de elementos isoparamétricos, os deslocamentos e a geometria são definidos pelas mesmas funções de interpolação. Assim, as funções deslocamento serão dadas por :

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\xi, \eta) u_i \\
 v &= \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\xi, \eta) v_i
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

onde  $u_i$  e  $v_i$  são deslocamentos nodais nas direções  $x$  e  $y$ .

As funções de interpolação empregadas satisfazem os critérios de convergência e a compatibilidade de deslocamentos é assegurada, pois a geometria do elementos depende apenas das coordenadas dos pontos nodais.

Necessita-se agora das derivadas de  $\phi_i$  em relação às coordenadas  $x$  e  $y$ , para a obtenção das propriedades do elemento, por exemplo, da matriz de rigidez ,

$$\iiint_V [B]^T [D] [B] \, dv \quad (4.5)$$

Como  $\phi_i$  é definida em termos de  $\xi, \eta$ , suas derivadas em relação a  $x, y$  serão dadas por :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

onde,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{é a matriz Jacobiana .} \quad (4.7)$$

Tendo sido feitas as integrações na direção  $z$ , restam as integrações sobre a área do elemento, e para isto, uma área elementar

$$dxdy = \det [J] \, d\xi d\eta \quad (4.8)$$

Estas integrações serão feitas numericamente. Sabemos que o número de pontos de integração, pelo Método de GAUSS necessários para a integração exata, no caso do elemento utilizado é igual a dois ( $n=2$ ). Logo, o número de pontos nos quais deve-se dar o valor da função, para a integração em  $x, y$  é  $n^2$ . Este mínimo de pontos de integração necessários para a convergência não foram

porém suficientes, no processo desenvolvido, para a obtenção de bons resultados. Optou-se então, por conveniência, por  $n=5$ .

Passaremos agora à formulação das cargas consistentes.

As forças de massa  $\{P\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$  são reduzidas a forças nodais

$$\{F\}_p^e = - \iint_A [\phi]^T \{P\} dx dy \quad (4.9)$$

Para as cargas de superfície, as forças nodais consistentes são definidas por :

$$\{F\}_s^e = \oint \begin{bmatrix} [\phi]^T [\phi] & 0 \\ 0 & [\phi]^T [\phi] \end{bmatrix} \{p\} / ds \quad (4.10)$$

onde,  $\{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}$  e  $p_x, p_y$  são intensidades por unidade de comprimento em cada nó.

Nota-se que a distribuição do carregamento no contorno do elemento (em  $x, y$ ) varia de maneira idêntica aos deslocamentos no elemento, pois  $[\phi]$  em (4.10) contém as mesmas funções de interpolação dadas por (4.3).

Na integral de linha em (4.10),

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

e em função de (3.1)

$$\text{na direção } \xi, \quad ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} d\xi$$

$$\text{na direção } \eta, \quad ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} d\eta \quad (4.11)$$

A variação da temperatura é definida em função das temperaturas nodais

$$\Delta = [\phi'] \{T\}^e \quad (4.12)$$

onde  $[\phi']$ , para ser consistente com as deformações, contém funções um grau abaixo das dadas por (4.3).

$$\phi'_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) \quad (4.13)$$

Logo, as temperaturas devem ser especificadas nos nós 1, 2, 3 e 4, formando assim o vetor  $\{T\}^e$ .

## CAPÍTULO V

### PROGRAMAÇÃO AUTOMÁTICA

Com respeito ao programa, cuja listagem se encontra em anexo, quase nada foi acrescentado em relação aos apresentados anteriormente, na COPPE, para análise de estruturas pelo método dos elementos finitos ( [13] , [26] ) . Ressaltam-se apenas, a montagem da matriz de rigidez acoplada da estrutura e a solução do sistema de equações.

Ficou bastante evidente no Capítulo III, a necessidade de se rearranjar os elementos da matriz de rigidez da estrutura, de tal modo que esta adquirisse características de matriz faixa. Para melhor eficiência do programa, a matriz de rigidez da estrutura ( já com a largura de faixa minimizada e ordenada em forma de vetor), teria que ser montada a partir das matrizes de rigidez dos elementos , correspondentes a cada par de harmônicos. Isto é, a montagem intermediária de cada submatriz global de rigidez teria que ser afastada, fazendo-se a montagem simultânea dessas submatrizes (com as contribuições de cada elemento sendo somadas), com seus coeficientes já em posição definitiva na matriz de rigidez da estrutura, estando essa última, na forma final requerida. Vê-se pela equação (3.2) que ,

$$[K^{ji}] = [K^{ij}]^T$$

e logo, foi feita a montagem simultânea, gerando-se apenas as submatrizes  $[K^{ij}]$  ,  $j \geq i$  .

Este procedimento, aliado à necessidade da montagem em blocos (por razões que veremos mais adiante), constituíram o maior esforço computacional do programa apresentado.

Como vimos, a largura de faixa da matriz de rigidez da estrutura, resultante do acoplamento entre os harmônicos, é proporcional ao número de harmônicos utilizados na análise, isto é, igual a  $WH$ , onde  $H$  é o número de harmônicos e  $W$  a largura de faixa de cada submatriz de rigidez.  $WH$  implica geralmente em uma largura de faixa excessiva, havendo assim necessidade do sistema de equações ser resolvido em blocos. Optou-se pelo método de GAUSS, para a resolução do sistema, por ter fornecido melhores resultados. Contudo, em função das limitações do computador usado (IBM/360 mod. 40, com 170 K de memória) e da largura de faixa exagerada, os blocos tomam geralmente uma forma na qual,  $WH \gg$  número de linhas do bloco, o que não constitui uma forma conveniente e usual ([26]). Este problema foi contornado, adaptando-se ao presente caso, subrotinas existentes na COPPE e elaboradas para este fim ([14]).

O programa foi desenvolvido em FORTRAN IV, G, e um esquema das interligações entre o programa principal e subrotinas é apresentado na Figura 5.1. Uma descrição sucinta das subrotinas é dada a seguir.

- ENDAS - leitura e impressão de dados.
- INTEG - cálculo das integrais dos produtos triplos de funções trigonométricas.
- VECAR - formação do vetor de carga para todos os harmônicos e ar-

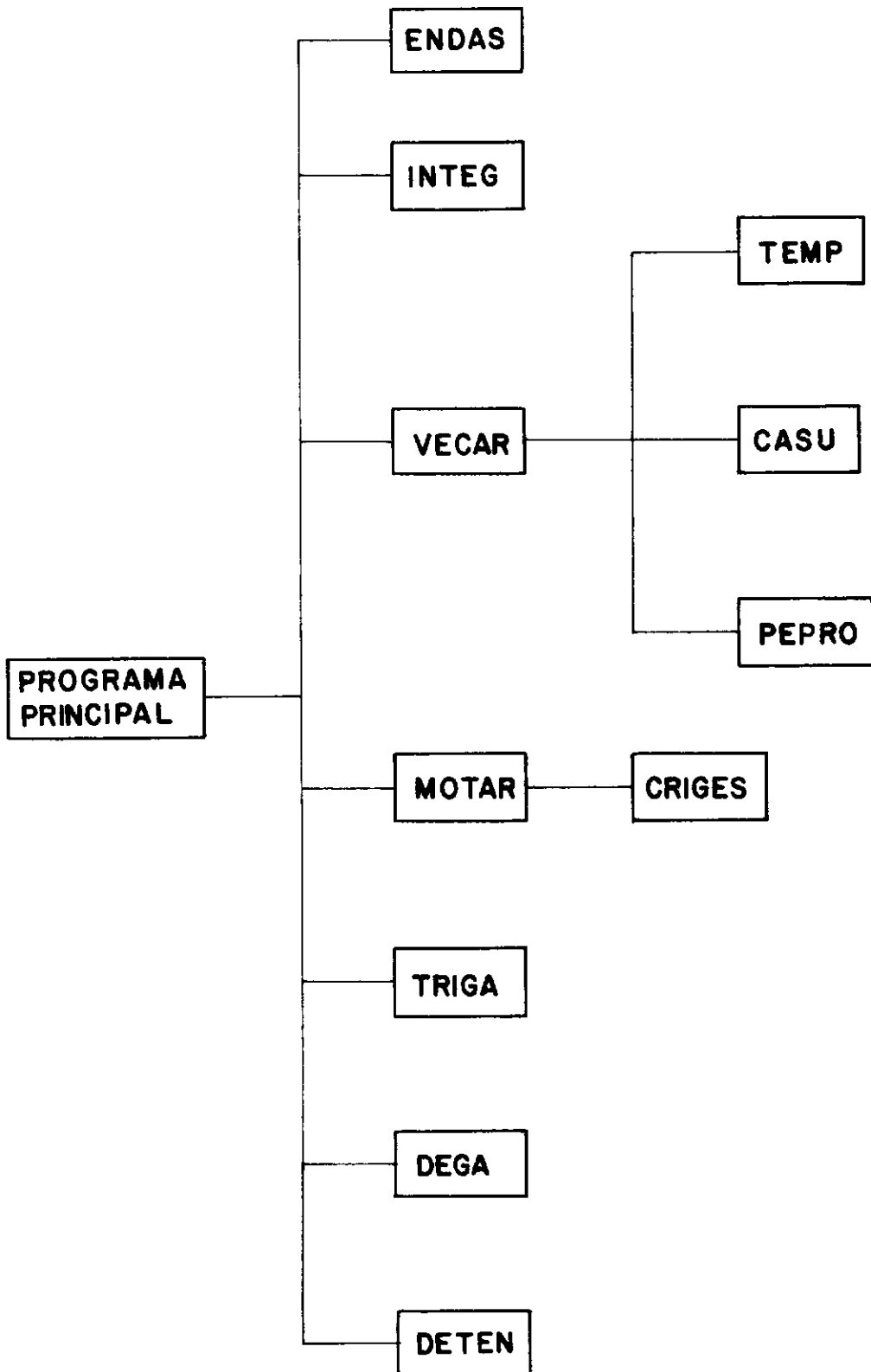


FIG.5.1

mazenamento compatível com o procedimento de minimização da largura de faixa da matriz de rigidez da estrutura.

- CASU - cálculo do vetor de carga consistente devido a forças de superfície.
- TEMP - cálculo do vetor de carga consistente devido à variação de temperatura.
- PEPRO - cálculo do vetor de carga consistente devido a forças de massa.
- MOTAR - montagem da matriz de rigidez da estrutura, segundo o que foi exposto no início deste capítulo. Modificação das condições de contorno, utilizando-se a técnica da introdução de um e zeros ou a do número grande.
- CRIGES - formação das matrizes de rigidez dos elementos para cada par de harmônicos "carga", "deslocamento", utilizando-se integração numérica de GAUSS.
- TRIGA - triangularização de cada bloco, montado pela subrotina MOTAR sob a forma de vetor, modificando os coeficientes de todos os blocos posteriores influenciados pelo bloco considerado, utilizando para isto, memória auxiliar.
- DEGA - resolução do sistema de equações a partir da matriz triangularizada por TRIGA .
- DETEN - volta à ordenação natural dos deslocamentos generalizados. Desenvolvimento, em cada seção analisada, dos deslocamentos parciais e acumulados. Cálculo das tensões médias acumuladas em cada nó, isolando-se aquelas provenientes de um elemento que constitua, por exemplo, uma transversina, e finalmente impressão dos resultados.

A pena paga pelo uso intenso de equipamento periférico na solução do sistema de equações é atenuada pelo fato da largura de faixa se tornar praticamente ilimitada, para os problemas usuais. Contudo, é sempre conveniente se fazer uma otimização da numeração dos pontos nodais de uma dada malha.

A seguir apresenta-se um manual de entrada das variáveis do programa.

MANUAL DE ENTRADA

Nº de ordem	Nº de cartões	Variáveis	Formato
1	1	NPROB	I5
2	1	NP, NE, NHD, NHC, NHM, NSEC, NTIP, NMAT, NDP, ISM, ISC	11I5
3	1	COMP, (ZZ(I), I=1, NSEC)	8F10.2
4	1	BETA	F10.2
5	1	TITULO	80H
6	NMAT	E1(N), E2(N), XNI(N), PESO(1,N), PESO(2,N), ALFA(N)	6F10.2
7	$\frac{NP+3}{4}$	X(I), Y(I)	8F10.2
8	NE	(NEL(I,J), J=1, 13)	13I5
9	NDP	NNR(K), NTC(K), REC(K,1), REC(K,2), REC(K,3)	2I10, 3F10.3
10	$\frac{NEL(I,J)+3}{4}$ p/ elem. I J = 9 ou 10	(POS(I,J), J=1, NPART)	8F10.0
11	$\frac{NEL(I,9)+3}{4}$ p/ elem. I	(RIGT1(I,J), RIGT2(I,J), J=1, NDS)	8F10.0
12	NEL(LT,12) p/ elem. LT carregado	LOAD, LADO, ZA, (P(I), I=1, 6)	2I5, 7F10.2
13	NEL(LT,12) p/ elem. LT carregado	ZB, (P(I), I=Z, 12)	7F10.2

Nº de ordem	Nº de cartões	Variáveis	Formato
14	1	NTEM	I5
15	NTEM	((I,P(J)),J=1,4)	4(I10,F10.3)

### SIGNIFICADO DAS VARIÁVEIS E COMENTÁRIOS

1 - NPROB - número de problemas a resolver

Informações gerais sobre a estrutura a ser analisada

2 - NP - número de pontos nodais

NE - número de elementos

NHD - número de harmônicos "deslocamento"

NHC - número de harmônicos "carga"

NHM - número de harmônicos "material"

NSEC - número de seções a analisar

NTIP - número do tipo da estrutura

1 - eixo reto

2 - eixo circular

3 - eixo oblíquo

NMAT - número de materiais com propriedades mecânicas distintas

NDP - número de nós com deslocamentos prescritos

ISM - índice relativo à simetria de propriedades do material

0 - simetria em relação a  $z=a/2$

1 - assimetria

Observação: A função que traduz a variação das propriedades mecânicas do material no interior de um elemento e na direção  $z$ , pode ou não ser simétrica em relação a um eixo paralelo a  $y$  e passando por  $z=a/2$ . No caso de simetria são tomados na análise apenas os harmônicos "material" ímpares; em caso contrário, pares e ímpares.

ISC - Índice relativo à simetria do carregamento

0 - simetria em relação a  $z=a/2$

1 - assimetria

Observação - O mesmo comentário feito para ISM, sendo agora, para as funções que representam as variações do carregamento sobre os elementos ou nós.

3 - COMP - dimensão do sólido

eixos reto e oblíquo - dimensão  $a$  na direção  $z$  (Figs, 2.1 e 2.3)

eixo circular - ângulo  $\alpha$  na direção  $\theta$  (Fig. 2.2)

ZZ(I) - coordenadas  $z$  (eixos reto e oblíquo) ou  $\theta$  (eixo circular) das seções a analisar.

4 - BETA - ângulo de esconsidade nas estruturas de eixo oblíquo (Fig. 2.3)

Observação - Este dado é fornecido somente quando  $NTIP = 3$

5 - título a ser dado (colunas 1 a 80)

6 - Propriedades do material

N - índice do tipo de material

E1(N) - módulo de elasticidade

E1 = Ex = Ey , plano estratificado paralelo a xy

E1 = Ex = Ez , plano estratificado paralelo a zx

E2(N) - módulo de elasticidade

E2 = Ez , plano estratificado paralelo a xy

E2 = Ey , plano estratificado paralelo a zx

XNI(N) - coeficiente de Poisson

PESO(1,N), PESO(2,N) - peso específico do material nas direções  
x e y

ALFA(N) - coeficiente de dilatação térmica

## 7 - Coordenadas dos nós

X(I), Y(I) - coordenadas cartesianas dos nós no plano da seção  
transversal (perpendicular a z ou  $\theta$ )

## 8 - Incidências e particularidades dos elementos

I - número do elemento

NEL(I,J), J=1,8 - incidências dos elementos segundo Fig. 4.1

NEL(I,9) - número de trechos em um elemento e segundo a direção  
z , com propriedades mecânicas do material distintas  
das fornecidas inicialmente.

NEL(I,10) - número de transversinas ou apoios intermediários ,  
dos quais este elemento é parte integrante

NEL(I,11) - número do tipo de material que constitui o elemento

NEL(I,12) - número de cargas distintas no elemento

NEL(I,13) - índice relativo ao plano de estratificação do mate-  
rial

= 0 , plano estratificado paralelo a xy

= 1 , plano estratificado paralelo a zx

## 9 - Deslocamentos prescritos

K - Índice que relaciona os nós que possuem algum deslocamento  
prescrito

NNR(K) - número do nó com deslocamento prescrito

NTC(K) - tipo de prescrição      = 0 , livre  
   = 1 , prescrito

111 - direções x,y,z prescritas  
exs: 101 - direções x,z prescritas  
      10 - direção y prescrita

REC(K,J), J=1,3 - recalques de apoio nas direções x,y,z respectivamente

## 10- discretização na direção z dos elementos com particularidades

I - índice relativo ao elemento

NPART - igual a NEL(I,9)\*2 ou NEL(I,10)\*2

POS(I,J), J=1,NPART - coordenadas z (ou  $\theta$ ) dos planos médios  $x_1y_1$   
(das transversinas ou apoios intermediários  
ou trechos com propriedades do material disti  
ntas das fornecidas para o elemento) e  
dimensão segundo z (ou  $\theta$ ), fornecidas aos  
pares e em sequência.

## 11- alterações segundo a direção z (ou $\theta$ ) das propriedades mecânicas do material

I - índice relativo ao elemento

NDS - igual a NEL(I,9)

$RIGT1(i,J), RIGT2(I,J), J=1, NDS$  - constantes que multiplicam  $E1(N)$  e  $E2(N)$  respectivamente, modificando as propriedades nos trechos correspondentes.

ex: trecho rígido

$$EE1 = E1(N) * RIGT1(I,J)$$

$$EE2 = E2(N) * RIGT2(I,J)$$

onde,

$$\begin{matrix} RIGT1(I,J) \\ RIGT2(I,J) \end{matrix} \gg 0$$

Dados relativos ao carregamento.

## 12- LOAD - tipo de carga

- 1 - carga uniformemente distribuída sobre um nó em toda a extensão do elemento
- 2 - carga linearmente distribuída sobre um nó em um certo intervalo segundo  $z$  (ou  $\theta$ )
- 3 - carga uniformemente distribuída sobre um lado do elemento e em toda a extensão deste
- 4 - carga linearmente distribuída sobre um lado do elemento e em um certo intervalo segundo  $z$  (ou  $\theta$ )
- 5 - carga concentrada
- 6 - peso próprio
- 7 - tensões devido à variação de temperatura

LADO - lado carregado do elemento (Fig. 4.1)

ZA - coordenada z (ou  $\theta$ ) do início do carregamento distribuído ou da posição da carga concentrada

P(I), I=1,6 - ordenadas do carregamento nas direções x,y sobre o lado do elemento, para a coordenada ZA

13- ZB - coordenada z (ou  $\theta$ ) do final do carregamento, fornecida so mente se LOAD = 2,4

P(I), I=7,12 - ordenadas do carregamento nas direções x,y sobre o lado do elemento, para a coordenada ZB .

Dados relativos à variação de temperatura

14- NTEM - número de elementos para os quais os nós 1,2,3 e 4 (Fig. 4.1) sofrem uma variação de temperatura

15- I - nó para o qual é fornecida a variação de temperatura (numeração externa)

P(J) - variação de temperatura

Observação - I e P(J) são fornecidos segundo a Fig. 4.1 para as incidências 1,2,3 e 4 .

## CAPÍTULO VI

### APLICAÇÃO A ALGUNS EXEMPLOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

A aplicação do processo utilizado neste trabalho aos exemplos apresentados neste capítulo foi feita por meio de um programa automático elaborado com base na formulação exposta nos capítulos anteriores.

Procurou-se apresentar apenas exemplos de estruturas típicas de pontes, o que embora não reflita todas as possibilidades do processo e elemento finito utilizados, justificam o objetivo principal deste trabalho.

Os resultados são comparados com os obtidos por meio de outros métodos e sempre que possível com os fornecidos por ensaios de modelos reduzidos, ou mesmo, no caso do primeiro exemplo, por ensaio de um protótipo.

A necessidade do confronto com dados experimentais é evidente, dada a inexistência de soluções analíticas exatas.

#### 1 - ESTRUTURA MONOCELULAR DE EIXO RETO COM CINCO TRANSVERSINAS INTERMEDIÁRIAS - COMPARAÇÃO COM ENSAIOS DE UM PROTÓTIPO

A Figura 6.3.a apresenta o modelo em elementos finitos e a seção transversal de um trecho em concreto protendido, com

26.82 m de vão simplesmente apoiado sobre balanços dos vãos vizinhos, do Elevado sobre o Canal do Rio Comprido (GB).

Este foi um dos três vãos submetidos a provas de carga, nas quais o Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ realizou a instrumentação para ensaio, colheu e apresentou os dados relativos às deformações e deslocamentos.

Os resultados apresentados são correspondentes ao carregamento máximo de ensaio (tabuleiro todo carregado), Figura 6.2 , e ao carregamento que forneceu a máxima solicitação de flexo-torção (meio tabuleiro carregado), já em fase de descarregamento do protótipo. As fissuras formadas durante o ensaio até o carregamento máximo definiram uma região, Figura 6.1 , que foi levada em conta nesta análise de uma forma que veremos adiante.

A Figura 6.3.b mostra as distribuições transversais de tensões longitudinais, para os dois carregamentos, no bordo superior de uma seção situada a 1,5m do meio do vão. Para o ensaio do protótipo foram colocados junto aos bordos superiores de duas seções equidistantes 1,5m do meio do vão (Figura 6.2), extensômetros "tipo CARLSON", com os quais obtiveram-se as deformações longitudinais, e através destas, as tensões para um módulo de elasticidade  $E = 370.000 \text{ Kgf/cm}^2$ . Este módulo de elasticidade foi calculado a partir da tensão de ruptura característica à compressão, do concreto utilizado na construção do protótipo.

No modelo em elementos finitos, Figura 6.3.a , todos os elementos são constituídos de materiais isotrópicos, com  $E_x = E_y = E_z = E$  e  $\nu = 0.2$  , onde os elementos assinalados com (X) simulam

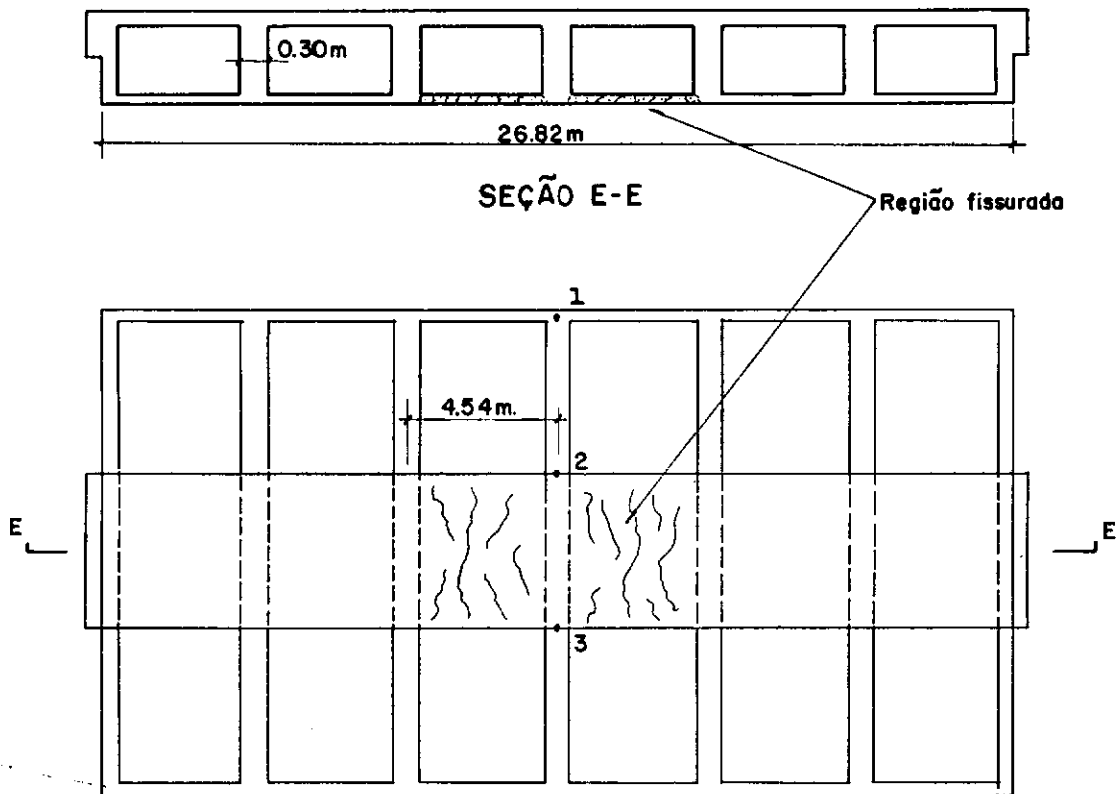
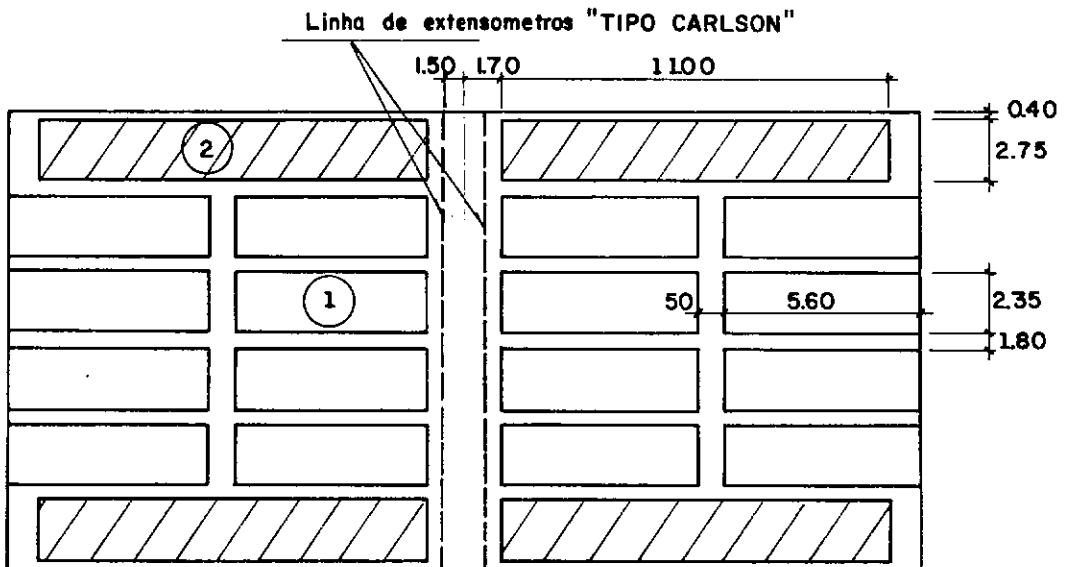


FIG. 6.1 - SEÇÃO LONGITUDINAL E VISTA INFERIOR



- (1) Caminhões de 11 ton.
- (2) Sobrecarga de 1.35 ton/m<sup>2</sup>

FIG. 6.2 - CARREGAMENTO MÁXIMO DO ENSAIO

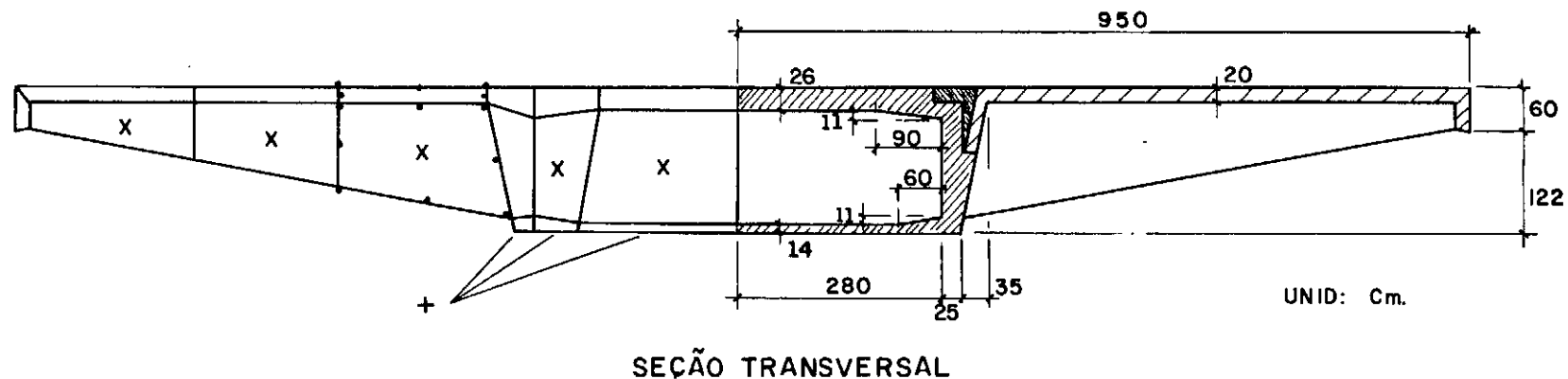


FIG. 6. 3.a—Modelo em Elementos Finitos

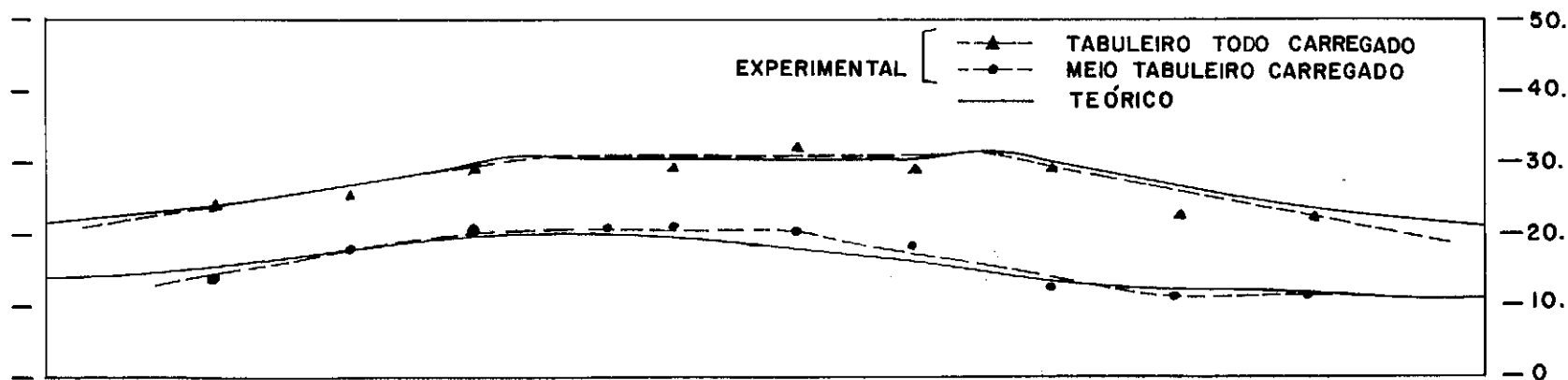


FIG. 6. 3.b — Distribuição Transversal de Tensões Normais  $\sigma_z$  (kgf/cm<sup>2</sup>) no bordo superior da Seção distante 1.50m. do meio do vão

as transversinas intermediárias, assumindo as propriedades mecânicas dos materiais somente nos intervalos segundo a direção  $z$  (eixo da estrutura), onde estas existam (Figura 6.1), e onde os elementos assinalados com (+) possuem no intervalo correspondente à região fissurada,  $E_x = E_y = E_z = 1/3 E$ .

Na Tabela 6.1 são dados os deslocamentos verticais, dos pontos mostrados na Figura 6.1, medidos durante o ensaio do protótipo e os obtidos pelo processo apresentado neste trabalho. Para meio tabuleiro, nota-se um maior erro, devido talvez, a um comportamento não elástico da estrutura, já fissurada e em fase de descarregamento.

TABELA 6.1

PONTOS	DESLOCAMENTOS VERTICAIS (mm)			
	TABULEIRO TODO CARREG.		MEIO TABULEIRO CARREG.	
	EXPER.	TEÓRICO	EXPER.	TEÓRICO
1	16.80	15.39	16.70	13.71
2	13.93	12.81	9.93	7.30
3	14.26	12.81	7.84	5.60

Porém, pela aproximação razoável entre os valores teóricos e experimentais podemos considerar satisfatório o módulo de elasticidade adotado na análise.

A consideração das transversinas extremas é implícita

mente feita na análise, devido à hipótese de existência de diafragmas nas extremidades da estrutura.

É visível a influência das transversinas no comportamento da estrutura, principalmente para a solicitação de flexo-torção, pois a não consideração destas, ocasionariam uma queda acentuada de tensões longitudinais nas aduelas laterais, agravada ainda pelo estado de fissuração existente. A boa distribuição transversal de tensões longitudinais, em presença da geometria pouco favorável da seção transversal, é devida principalmente à grande rigidez a flexão das transversinas, quase impedindo a deformação transversal da estrutura, isto é, a distorção da seção transversal.

## 2 - ESTRUTURA MULTICELULAR DE EIXO RETO. ANÁLISE COMPARATIVA DA DISTRIBUIÇÃO TRANSVERSAL DE TENSÕES NORMAIS, COM E SEM TRANSVERSINA INTERMEDIÁRIA .

A estrutura prismática laminar analisada neste exemplo retrata um caso especial, em função das características da seção transversal (Figura 6.4) e da relação entre vão (60 ft) e largura (56 ft) .

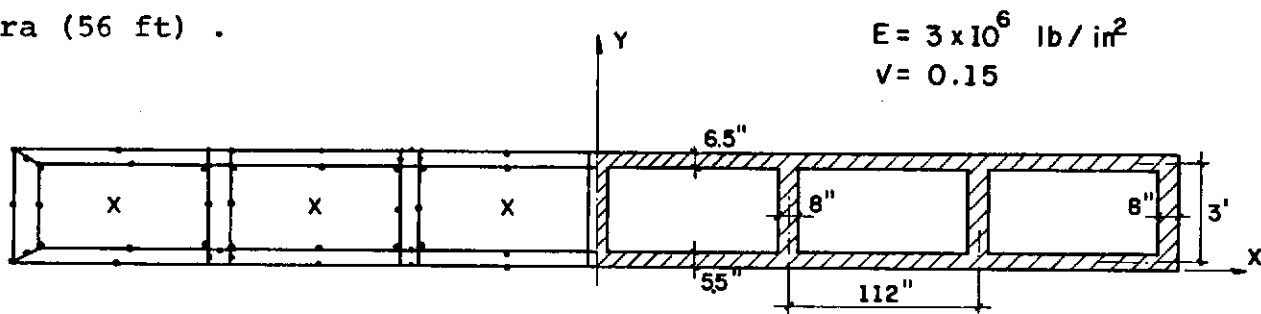


FIG. 6.4.

Essa estrutura é analisada na referência ( [23] ) pelo conhecido "folded plate method", para uma carga concentrada, de  $10^3$  lb na viga extrema e no meio do vão. A análise é feita para a estrutura com e sem diafragma rígido no meio do vão.

O objetivo aqui é examinar as distribuições transversais de tensões normais nas mesas superior e inferior, dadas pelo processo utilizado, para a estrutura com e sem transversina intermediária e compará-las com as obtidas na referência ([23]) .

A Figura 6.5 mostra os resultados para a estrutura sem diafragma ou transversina, onde nota-se uma boa concordância com os apresentados na referência ([23]), exceto nas vizinhanças da carga concentrada. Em face da rápida convergência do processo apresentado com a utilização de elementos isoparamétricos quadriláteros quadráticos, dos resultados concordantes com a solução exata de vigas de seção cheia sujeitas a cargas concentradas, e mesmo dos resultados razoáveis para estruturas laminares frente a resultados experimentais (Exemplo 3), sujeitas ao mesmo carregamento (carga concentrada) e utilizando o mesmo número de harmônicos, podemos considerar os resultados aqui apresentados como satisfatórios.

Quanto à introdução de uma transversina intermediária, a Figura 6.6 mostra a divergência entre a consideração de um diafragma infinitamente rígido ( [23] ) e uma transversina constituída do mesmo material utilizado na estrutura. Os próprios autores da referência ([23]) concluem que a consideração de diafragmas flexíveis, portanto mais reais, não ocasionariam tão boa distribuição de tensões normais. Apresenta-se ainda na Figura 6.6 a simulação de

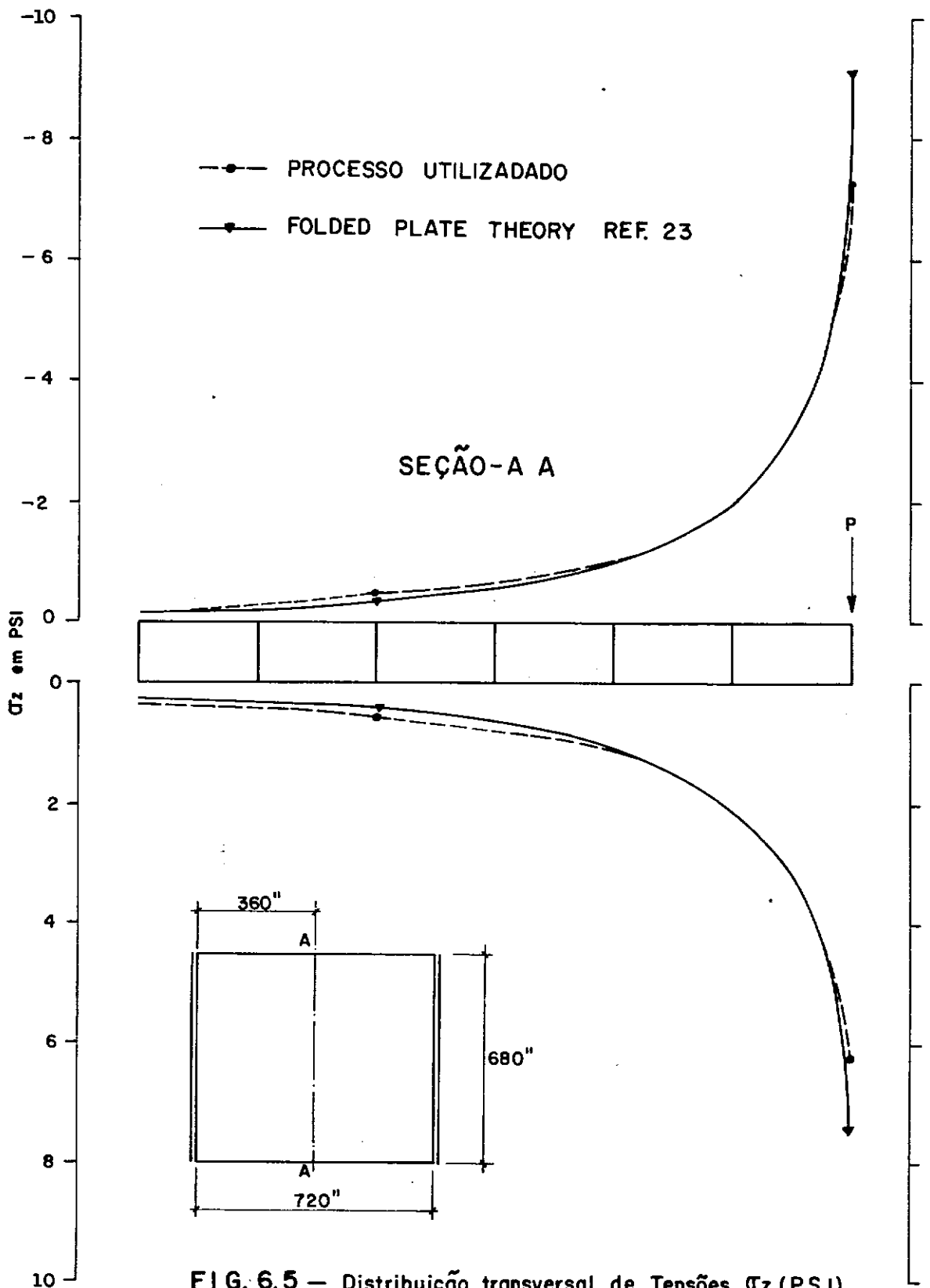


FIG. 6.5 — Distribuição transversal de Tensões  $\sigma_z$  (PSI) nas superfícies médias das mesas superior e inferior na SEÇÃO A-A-sem transversina.

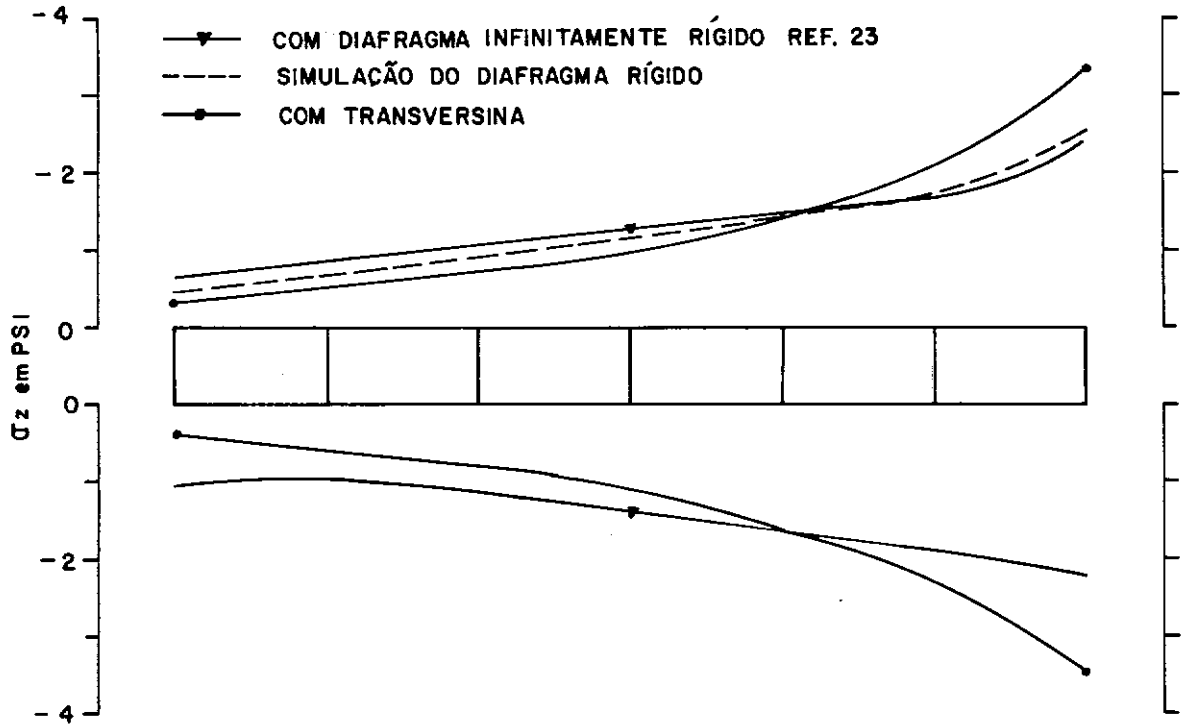


FIG. 6.6 — Distribuição transversal de tensões  $\sigma_z$ (PSI) nas superfícies médias das mesas superior e inferior na Seção A-A (FIG 6.5) — com diafragma ou transversina no meio do vão

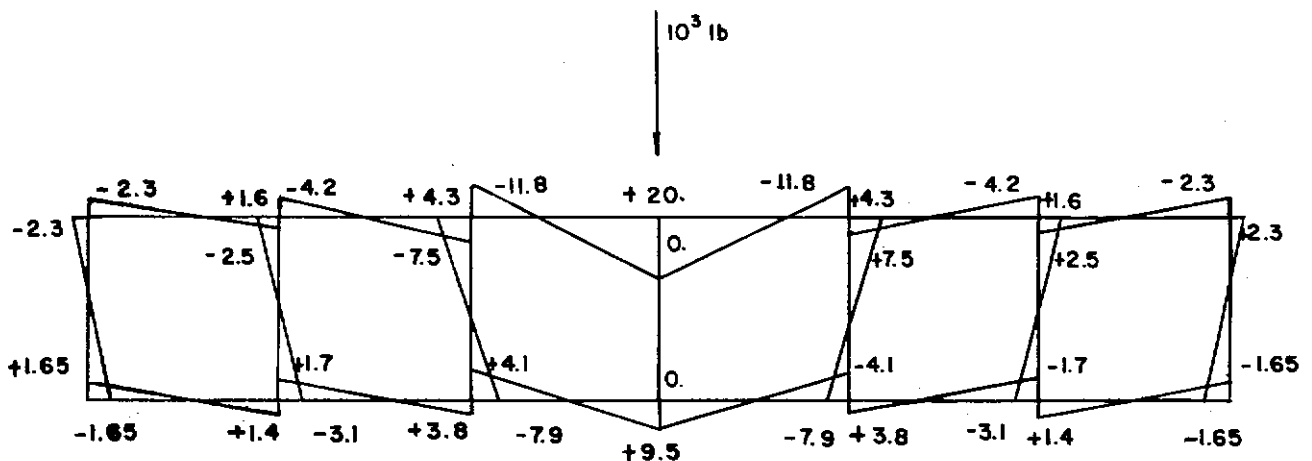


FIG. 6.7 — Distribuição transversal de momentos transversais (ft.lb/ft.) na Seção-A-A (FIG. 6.5) sem transversina.

um diafragma rígido, isto é, um elemento transversal com  $E_x = E_y = E \times 10^5$ ,  $\nu=0$  e  $E_z = E \times 10^{-2}$  (material transversalmente isotrópico), onde  $E$  é o módulo de elasticidade para o material isotrópico ( $E_x = E_y = E_z = E$ ,  $\nu = 0.15$ ) que constitui o restante da estrutura. Neste caso há uma aproximação dos resultados, sendo também evidente que, para  $E_x = E_y \gg E \times 10^5$ , a solução tenderia para a da referência ([23]).

A distribuição transversal de momentos transversais na seção situada no meio do vão, para a estrutura sem transversina, é mostrada na Figura 6.7 para a carga concentrada na viga central e no meio do vão.

Deve-se notar que a estrutura foi analisada com uma malha mínima, isto é, com o mínimo de elementos necessários para a discretização da seção transversal, e ainda, que na análise da estrutura com transversina, foram inseridos apenas os elementos assinalados com (X), na Figura 6.4.

### 3 - ESTRUTURA MULTICELULAR DE EIXO OBLÍQUO

Com o intuito de testar a validade do processo apresentado, para o caso de estruturas de eixo oblíquo, foram utilizados os resultados, obtidos na referência ([16]), de um dos ensaios efetuados com modelos reduzidos e de seu respectivo confronto teórico, através de um programa elaborado com elementos finitos (triangulares e retangulares) para análise de estruturas laminares, de nome

CELL, desenvolvido por SCORDELIS .

O material escolhido para a construção do modelo , apesar de sua rigidez, foi o alumínio. Isto, por ser um material de comportamento elástico para as solicitações de ensaio e sem os problemas de deformação lenta (comum nos plásticos) e aquecimento das pequenas resistências dos extensômetros elétricos (devido a sua alta condutividade térmica). As conexões entre as placas foram feitas por parafusos, possibilitando assim, a montagem e desmontagem durante os ensaios (o que constituiu um outro motivo para o uso do alumínio). Esse tipo de conexão causou, segundo os autores, uma redução de apenas 3% na rigidez global a flexão de vigas em duplo "T" .

A seção transversal do modelo (bi-apoiado com 29.66 in de vão e esconsidade 309) e sua discretização por elementos isoparamétricos, são mostradas na Figura 6.8 , sendo esta última formada com o mínimo de elementos necessários.

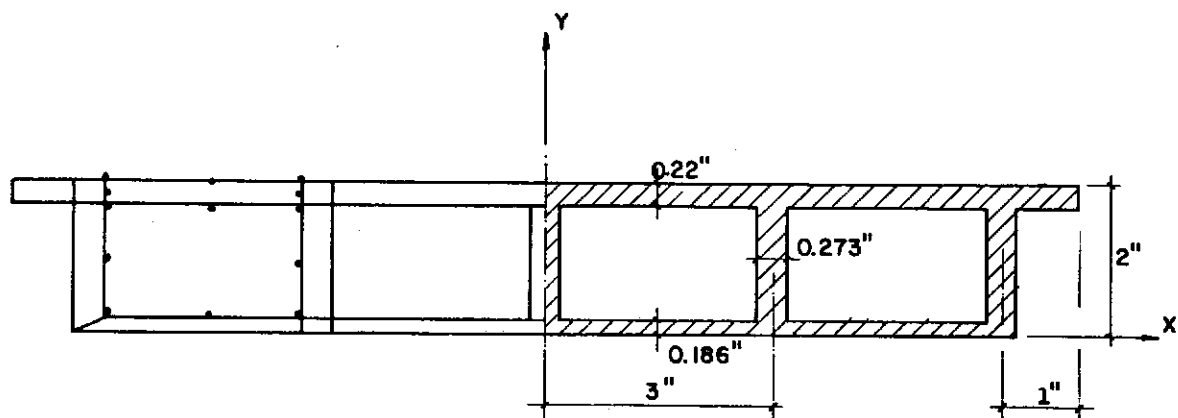


FIG. 6. 8.

A estrutura foi analisada para uma carga concentrada, sobre a viga extrema, em  $L/2$ , sendo fornecidos os resultados para uma seção distante 1" do meio do vão, correspondente à seção instrumentada no modelo reduzido.

A Figura 6.9 mostra a distribuição transversal de forças axiais por unidade de largura, obtida com a malha mínima, em confronto com as obtidas na referência ([16]). Pode-se notar uma boa concordância entre os resultados, para a distribuição na mesa superior, sem ocorrer contudo, a queda de tensão no bordo livre da placa superior, dada pelo programa CELL. Já na mesa inferior, há uma certa discrepância entre os resultados, embora as forças axiais médias estejam ainda em boa concordância. Isso possibilita a aceitação dos resultados aqui apresentados, pois estas forças axiais médias são proporcionais ao momento longitudinal total na seção considerada.

Observando-se ainda, os resultados mostrados na Figura 6.9, pode-se concluir que os modelos teóricos são torsionalmente mais rígidos que o modelo físico.

Segundo a referência ([16]), os deslocamentos verticais, medidos durante o ensaio deste modelo, são superiores em 25% aos obtidos com o programa CELL. Estes dois últimos fatos são talvez, em parte, devidos ao tipo de conexão entre placas, empregado na construção do modelo.

Como foi visto nos capítulos anteriores, o número de equações e a largura de banda são proporcionais ao número de harmônicos considerados, o que torna explicável a utilização de uma ma-

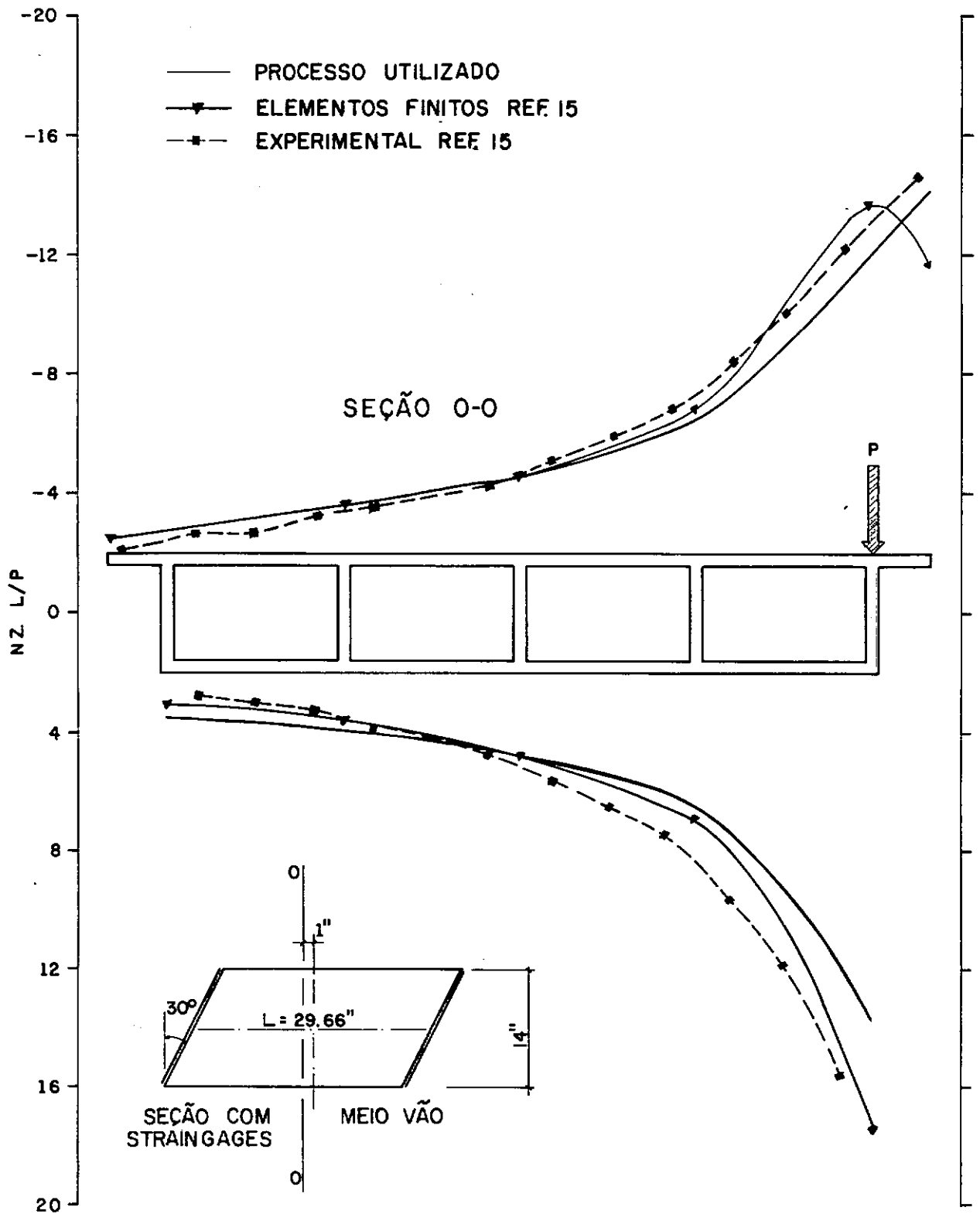


FIG. 6.9 — Distribuição transversal de forças axiais por unidade de largura ( $N.z$ ) nas mesas superior e inferior na SEÇÃO 0-0

lha mínima, para confronto de resultados. Nota-se entretanto, uma razoável convergência com o uso desta malha, fornecendo resultados pelo menos aceitáveis para fins práticos.

## CAPÍTULO VII

### C O N C L U S Õ E S

Do processo utilizado neste trabalho, visando principalmente a análise de estruturas de pontes com extremos apoiados e transversinas intermediárias, resultam vantagens não só na facilidade do tratamento deste tipo de problema como também pela possibilidade de se obter uma considerável aproximação para problemas cuja solução analítica é inexistente.

Da aplicação do processo a problemas práticos, através de um programa automático, algumas conclusões são apresentadas:

- 1 - A aplicação à análise de pontes fica restrita a estruturas de altura constante, pois há somente a possibilidade de variações bruscas da geometria, na direção do eixo da estrutura.
- 2 - Contudo, este tipo de variação da geometria, possibilita a inclusão natural de um número qualquer de transversinas, constituídas de material igual ou não ao utilizado no restante da estrutura.
- 3 - Em virtude do desenvolvimento em série da função que traduz a variação das propriedades mecânicas dos materiais e pela possibilidade dos materiais serem transversalmente isotrópicos, pode-se simular em uma análise: diafragmas intermediários, trechos rígidos ou regiões fissuradas.

- 4 - Dadas a grande flexibilidade do elemento utilizado na discretização da geometria da seção transversal da estrutura, a sua acentuada convergência e a adoção de um número satisfatório de pontos de integração numérica, obteve-se, mesmo com uma malha mínima, resultados consideráveis frente a soluções refinadas por elementos finitos para análise de estruturas laminares, a outros métodos e a resultados experimentais.
- 5 - O processo apresentado com a inclusão de até cinco harmônicos é ainda mais eficiente (no caso do tipo de problema enfatizado) que o uso de um elemento tridimensional, dada a facilidade de utilização e o número de graus de liberdade envolvidos.
- 6 - No caso de estruturas contínuas, fica afastada a alternativa da montagem da matriz de rigidez da estrutura da forma apresentada na equação 3.2, isto é, sem a minimização da largura de faixa. A necessidade de inclusão de mais que cinco harmônicos na análise, deixa claro que o uso de elementos finitos tridimensionais será mais eficiente.

E a título de sugestões, indicam-se:

- a) A tentativa de novas condições de contorno com o uso de outras funções para deslocamentos.
- b) A adoção desse processo com a utilização de elementos isoparamétricos curvos, para a análise de tensões em sólidos axisimétricos, nos quais as propriedades dos materiais são assimétricas e dependentes da temperatura.

- c) A inclusão de novos casos de carregamento.
- d) A otimização do programa automático, cuja forma de apresentação é apenas didática.

# BIBLIOGRAFIA

- [1] ABDEL-SAMAD, S.R., WRIGHT, R.N., ROBINSON, A.R. - "Analysis of box girders with diaphragms", Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 94, N° ST10, 1968.
- [2] BEVILACQUA, L. - "Estruturas prismáticas laminares", Rio de Janeiro, E.N.E., 1965.
- [3] BURAGOHAIN, D.N., AGRAWAL, B.L. - "Analysis of curved box girder bridges", Journal of Structural Division, ASCE, N° ST5, May 1973.
- [4] CANTIN, G. - "An equation solver of very larger capacity", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.3, pp. 379-388, 1971.
- [5] CARNAHAN, B., LUTHER, H.A., WILKES, J.O. - "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, 1969.
- [6] CHEUNG, Y.K. - "Folded plates structure by the finite strip method", ASCE, 95ST, 1969.
- [7] CHEUNG, Y.K. - "Analysis of box girder bridges by the finite strip method", Second Int. Symposium-Concrete Bridge Design, ACI, SP26, 1971.
- [8] CROSE, J.G. - "Stress analysis of axisymmetric solids with asymmetric properties", AIAA Journal, Vol.10, N°7, 1972.

- [9] CROSE, J.G. - "Bandwidth minimization of stiffness matrices" ,  
Journal of engineering mechanics division, ASCE, Vol. 97,  
Nº EMI, 1971.
- [10] CULVER, C.G., CHRISTIANO, P.P. - "Static model tests of curved  
girder bridge", Journal of Structural Division, ASCE, Vol.95,  
Nº ST8, 1969.
- [11] DANTAS, J.I. - "Método dos elementos finitos aplicado a proble-  
mas axissimétricos", Tese M.Sc., Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ,  
1971.
- [12] DESAI, C.S., ABEL, J.F. - "Introduction on the finite element  
method", Van Nostrand Reinhold, 1972.
- [13] EBECKEN, N.F.F. - "Processo semi-analítico para análise de es-  
truturas pelo método dos elementos finitos", Tese M.Sc. ,  
COPPE/UFRJ, 1973.
- [14] FEIJÓO, R.A., MONTERO, L.F.R. - "Formulação eficiente do método  
de GAUSS para resolução de grandes sistemas de equações",  
Conferência Regional Sul Americana sobre Edifícios Altos,  
1973.
- [15] GHALI, A., NEVILLE, A.M. - "Structural analysis", Int. Textbook  
Co., 1972.
- [16] GODEN, W.G, ASLAM, M. - "Model studies of skew multicell girder  
bridges", Journal of engineering mechanics division, ASCE,  
Vol.99, Nº EMI, 1973.

- [17] KOLLBRUNNER, C.F., BASLER, K. - "Torsion in structures", Berlin, Springer-Verlag, 1969.
- [18] MEYER, C., SCORDELIS, A.C. - "Analysis of curved folded plate structures", ASCE, ST10, 1971.
- [19] MONFORTON, G.R., SCHMIT JR., L.A. - "Finite element analysis of skew plates in bending", AIAA Journal, Vol.6, Nº 6, 1968.
- [20] ODEN, J.T. - "A general theory of finite elements. I - Topological considerations", Int. Journal of numerical methods in engineering, Vol.1, pp. 205-221, 1969.
- [21] POWELL, G.H. - "Comparision of simplified theories for folded plates", Journal of structural division, ASCE, Vol.91 , Nº ST6, 1965.
- [22] ROBINSON, J. - "Itegrated theory of finite element methods", Bristol, John Wiley & Sons, 1973.
- [23] SCORDELIS, A.C., DAVIS, R.E., LO, K.S. - "Load distribution in concrete box girder bridges", First Int. Symposium - Concrete Bridge Design, ACI, SP23-8, 1969.
- [24] SCORDELIS, A.C., DAVIS, R.E. - "Stresses in continuous concrete box girder bridges", Second Int. Symposium - Concrete Bridge Design, ACI, SP26, 1971.
- [25] SILVA, T.F.C. - "Estruturas prismáticas laminares", Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, Tese M.Sc., 1969.

- [26] SORIANO, H.L. - "Formulação dos métodos de GAUSS e de CHOLESKY para análise matricial de estruturas", Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1972.
- [27] SOUZA, I.R. - "Análise das estruturas prismáticas laminares pelo método dos segmentos finitos", Rio de Janeiro, PUCRJ, Tese M.Sc., 1973.
- [28] TIMOSHENKO, S., GOODIER, J.H. - "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, 1951.
- [29] VENANCIO FILHO, F. - "Método dos elementos finitos na análise estrutural", CTA-ITA, 1972.
- [30] WILSON, E.L. - "Structural analysis of axisymmetric solids", AIAA Journal, Vol.3, Nº 12, 1965.
- [31] WILSON, E.L. - "Direct solution of larger systems of linear equations", Computer Analysis of Structures, Vol.A. pp. 363-372, 1974.
- [32] WRIGHT, R.N., ABDEL-SAMAD, S.R., ROBINSON, A.R. - "BEF analogy for analysis of box girders", Journal of structural division, ASCE, Vol.94, Nº ST7, 1968.
- [33] ZIENKIEWICZ, O.C. - "The finite element method in engineering science", McGraw-Hill, 1971.

SIMBOLOGIA

- $a$  - dimensão do sólido na direção  $z$   
 $e$  - relativo a um elemento  
 $i$  - relativo a um nó  
 $m, \ell, d$  - super-índices relativos aos harmônicos "material", "carga" e "deslocamento"  
 $M, L, D$  - número de harmônicos "material", "carga" e "deslocamento"  
 $\phi$  - função de interpolação  
 $N_e$  - número de elementos  
 $N_n$  - número de nós do elemento  
 $N$  - número de graus de liberdade  
 $G$  - módulo de elasticidade transversal  
 $W$  - largura de faixa  
 $E_x, E_y, E_z$  - módulos de elasticidade nas direções  $x, y, z$   
 $\nu$  - coeficiente de Poisson  
 $u, v, w$  - componentes dos deslocamentos  
 $\beta$  - ângulo de esconsidade para estruturas de eixo oblíquo  
 $\{\delta\}^e$  - deslocamentos nodais do elemento  
 $\{\epsilon_0\}$  - deformações iniciais  
 $\{\sigma_0\}$  - deformações iniciais  
 $\{\tau\}$  - vetor de tensões térmicas  
 $\{P\}$  - vetor das forças de massa  
 $\{p\}$  - vetor das forças de superfície  
 $\{F_i^\ell\}$  - vetor de forças nodais para o harmônico  $\ell$   
 $\{F\}_s^e$  - cargas nodais equivalentes às forças de superfície

- $\{F\}_p^e$  - cargas nodais equivalentes às forças de massa  
 $[D]$  - matriz de elasticidade  
 $[B]$  - matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos nodais do elemento  
 $[e]$  - matriz diagonal de termos trigonométricos  
 $[k]$  - matriz de rigidez do elemento  
 $[K^{\ell d}]$  - matriz global para o par de harmônicos  $\ell, d$   
 $[K]$  - matriz de rigidez da estrutura  
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  - componentes das deformações  
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  - componentes das tensões

A P P E N D I C E

```

    IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z), INTEGER *2(I-N)
    DIMENSION ZZ(10),X(140),Y(140),NEL(35,13),POS(35,16)
    *,E1(5),E2(5),XNI(5),NNR(20),NTC(20),REC(20,3),PESO(2,5)
    DIMENSION NU(30),LB(30),ALFA(5)
    COMMON/UM/BETA,K1,K2,K3,K4,K5,NTIP,ISM,ISC,NREG,NTEM
    COMMON/DOIS/PC(420,7),RE(36000)
    COMMON/TRES/SS(7,7,10),CC(7,7,10),SC(7,7,10),CS(7,7,10)
    COMMON/QUA/RIGT1(35,8),RIGT2(35,8)

```

C

```

C  P R O G R A M A   P R I N C I P A L
    DEFINE FILE 11(7,840,U,K1),22(400,3000,U,K2),13(9800,288,U,K3)
    *,14(9800,288,U,K4),15(1000,12,U,K5)
    READ(5,1)NPROB
1  FORMAT(I5)
    DO 5 J=1,NPROB
    WRITE(6,3)
3  FORMAT(/,28X,64('*'),2(/,28X,'*',63X,'*'),/,28X,'*  ESTRUTURAS T
    *RIDIMENSIONAIS COM PROPRIEDADES MECANICAS DOS  *',/,28X,'*  MATER
    *IAIS REPRESENTADAS MATEMATICAMENTE POR SERIES.  *', 2(/,28
    *X,'*',63X,'*'),/,28X,'*  RONALDO CARVALHO BATISTA',25X,'TESE MSC.
    * *',2(/,28X,'*',63X,'*'),/,28X,64('*'))
    WRITE(6,2)J
2  FORMAT(/,5X,'ANALISE DA ESTRUTURA NO.',I4)
    NGL=3
    NNO=8
    BETA=0.
C  === LEITURA DOS DADOS BASICOS PARA A ANALISE DA ESTRUTURA
    CALL ENDAS(NP,NE,NHD,NHC,NHM,NSEC,COMP,ZZ,E1,E2,XNI,X,Y,NEL,POS
    *,NDP,NNR,REC,NTC,PESO,ALFA)
C  === CALCULO DAS INTEGRAIS DOS PRODUTOS TRIPLOS DE
C  === FUNCOES TRIGONOMETRICAS
    CALL INTEG (COMP,NHC,NHD,NHM)
    NEQ=NP*NGL
C  === LEITURA DO CARREGAMENTO
    CALL VECAR (NEQ,NHC,NE,NGL,NNO,NEL,X,Y,COMP,PESO,
    *ALFA,E1,E2,XNI,POS,NHM,NSEC,ZZ)
C  === FORMACAO DO SISTEMA DE EQUACOES EM BLOCOS
    CALL MOTAR(NEQ,NE,NEL,X,Y,E1,E2,XNI,POS,COMP,NHD,NHC,NHM,NGL,NNO,
    *IC,LLT,LFT,NSEC,ZZ,NDP,NNR,REC,NTC,NU,LB,IIA)

```

```

      NHR=NHD/(2-ISC)+(1-ISC)
      NEQT=NEQ*NHR
C === RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES
      CALL TRIGA (NP,NE,NGL,NNO,NU,LB,IC,NHR,IIA)
      CALL DEGA (NEQT,NGL,NU,LB,IC,NHR,IIA,NP)
C === IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS E CALCULO DAS TENSOES
      CALL DETEN(ZZ,COMP,NEQ,NSEC,NHD,NP,NE,NNO,NGL,NEL)
      5 CONTINUE
      CALL EXIT
      END

```

```

SUBROUTINE ENDAS (NP,NE,NHD,NHC,NHM,NSEC,COMP,ZZ,E1,E2,XNI,X,Y,NEL
*,POS,NDP,NNR,REC,NTC,PESO,ALFA)
IMPLICIT REAL *8 (A-H,O-Z), INTEGER *2 (I-N)
DIMENSION ZZ(10),X(140),Y(140),NEL(35,13),POS(35,16),ALFA(5)
*,E1(5),E2(5),XNI(5),NNR(20),NTC(20),REC(20,3),PESO(2,5)
COMMON/UM/BETA,K1,K2,K3,K4,K5,NTIP,ISM,ISC,NREG,NTEM
COMMON/QUA/RIGT1(35,8),RIGT2(35,8)

```

C  
C  
C

```

=== SUBROTINA PARA LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS DA ESTRUTURA

```

```

BETA=0.
PI=3.141592653589793
READ(5,111) NP,NE,NHD,NHC,NHM,NSEC,NTIP,NMAT,NDP,ISM,ISC
111 FORMAT(11I5)
WRITE(6,901)
901 FORMAT(/,8X,'NP',8X,'NE',7X,'NHD',8X,'NHC',7X,'NHM',8X,'NSEC'
*,4X,'NTIP',7X,'NMAT',6X,'NDP',7X,'ISM',7X,'ISC')
WRITE(6,1) NP,NE,NHD,NHC,NHM,NSEC,NTIP,NMAT,NDP,ISM,ISC
1 FORMAT(11I10)
READ(5,2) COMP,(ZZ(I),I=1,NSEC)
2 FORMAT(8F10.2)
GO TO (21,22,23) ,NTIP
21 WRITE(6,11)
GO TO 24
22 WRITE(6,13)
COMP=COMP*PI
DO 27 M=1,NSEC
27 ZZ(M)=ZZ(M)*PI
GO TO 24
23 WRITE(6,14)
READ(5,6) BETA
6 FORMAT(F10.2)
11 FORMAT(/,15X,'E S T R U T U R A   E I X O   R E T O ',///)
13 FORMAT(/,15X,'E S T R U T U R A   E I X O   C I R C U L A R ',///)
14 FORMAT(/,15X,'E S T R U T U R A   E I X O   O B L I Q U O ',///)
24 READ(5,51)
51 FORMAT(80H
*
WRITE(6,51)

```

```

      READ(5,3) (E1(N),E2(N),XNI(N),PESO(1,N),PESO(2,N),ALFA(N)
      *,N=1,NMAT)
3  FORMAT(5F10.2)
      WRITE(6,4) COMP
4  FORMAT(///,9X,'COMP =' ,F15.3,///,9X,'PROPRIEDADES MECANICAS DOS MAT
      *ERIAIS',///,9X,'TIPO',9X,'E1',15X,'E2',12X,'XNI')
      WRITE(6,5) (N,E1(N),E2(N),XNI(N),N=1,NMAT)
5  FORMAT(/,10X,I2,3F15.3)
      READ(5,7)(X(I),Y(I),I=1,NP)
7  FORMAT(8F10.3)
      WRITE(6,9)
9  FORMAT(////,30X,'C O R D E N A D A S   D O S   N O S   ',///,30X,
      *'NO',16X,'X',19X,'Y')
      WRITE(6,10)(I,X(I),Y(I),I=1,NP)
10 FORMAT(27X,I5,10X,F10.3,10X,F10.3)

```

C  
C

```

      IF(NTIP.NE.3) GO TO 2220
      SECAN=1./DCOS(BETA)
      DO 1110 I=1,NP
1110  X(I)=X(I)*SECAN
2220  CONTINUE

```

C  
C

```

      WRITE(6,12)
12  FORMAT(////,15X,'I N C I D E N C I A S   E   P A R T I C U L A R I D
      * A D E S   D O S   E L E M E N T O S',/)
      WRITE(6,15)
15  FORMAT(///,2X,'ELEMENTO',5X,'NO1',5X,'NO2',5X,'NO3',5X,'NO4',5X,'N
      *05',5X,'NO6',5X,'NO7',5X,'NO8',3X,'N.T.RIG',3X,'N.TRANS',
      *3X,'IMAT',3X,'NCE',3X,'NTEL',/)
      READ(5,16) ((NEL(I,J),J=1,13),I=1,NE)
16  FORMAT(13I5)
      WRITE(6,17)(I,(NEL(I,J),J=1,13),I=1,NE)
17  FORMAT(1H,14I8)
      IF(NDP.EQ.0) GO TO 150
      WRITE(6,32)
32  FORMAT(///,15X,'DESLOCAMENTOS PRESCRITOS',//,8X,'NO',5X,'DIRECAO',
      *6X,'RECX',5X,'RECY',5X,'RECZ')

```

```

      READ(5,155) (NNR(K),NTC(K),REC(K,1),REC(K,2),REC(K,3),K=1,NDP)
155  FORMAT(2I10,3F10.3)
      WRITE(6,155) (NNR(K),NTC(K),REC(K,1),REC(K,2),REC(K,3),K=1,NDP)
C
150  ID=0
      DO 25 I=1,NE
        IF(NEL(I,9).EQ.0.AND.NEL(I,10).EQ.0) GO TO 25
        NPART= (NEL(I,9)+NEL(I,10))*2
        READ(5,20) (POS(I,J),J=1,NPART)
20    FORMAT(8F10.0)
        ID=1
25    CONTINUE
        IF(ID.EQ.1) GO TO 65
        WRITE(6,30)
30    FORMAT(///,20X,'N A O H A P A R T I C U L A R I D A D E S N O S
      * E L E M E N T O S')
        GO TO 100
65    CONTINUE
        GO TO (28,29,28) ,NTIP
29    DO 110 I=1,NE
        NPART=(NEL(I,9)+NEL(I,10))*2
        DO 110 J=1,NPART
110   POS(I,J)=POS(I,J)*PI
28    CONTINUE
        DO 40 I=1,NE
        IF(NEL(I,9).EQ.0) GO TO 50
        NDS=NEL(I,9)
        READ(5,20) (RIGT1(I,J),RIGT2(I,J),J=1,NDS)
        WRITE(6,31) I,NDS
31    FORMAT(//,5X,'ELEMENTO',I4,5X,'Nº DE TRECHOS COM PROPRIEDADES ALTE
      *RADAS',I4,/)
        NDSS=2*NDS-1
        LO=0
        DO 35 J=1,NDSS,2
        LO=LO+1
        WRITE(6,33) POS(I,J),POS(I,J+1),RIGT1(I,LO),RIGT2(I,LO)
33    FORMAT(/,5X,'POSICAO',F9.2,5X,'COMPRIMENTO',F9.2,4X,'RIGT1',F9.3,
      *4X,'RIGT2',F9.3)
35    CONTINUE

```

C

```
50 IF(NEL(I,10).EQ.0) GO TO 40
   NFS=NEL(I,10)
   WRITE(6,41) I,NFS
41  FORMAT(/,5X,'ELEMENTO',I4,5X,'N. DE TRANSVERSINAS',I4)
   NFSS=2*NFS
   IK=NEL(I,9)*2
   DO 45 J=1,NFSS,2
   IKK=IK+J
45  WRITE(6,43) POS(I,IKK),POS(I,IKK+1)
43  FORMAT(/,5X,'POSICAO',F9.2,5X,'ESPESSURA',F9.2)
40  CONTINUE
100 CONTINUE
   RETURN
   END
```

OPERATED BY OPERATOR

```

SUBROUTINE INTEG (COMP,NHC,NHD,NHM)
IMPLICIT REAL *8 (A-H,O-Z), INTEGER *2 (I-N)
COMMON/UM/BETA,K1,K2,K3,K4,K5,NTIP,ISM,ISC,NREG,NTEM
COMMON/TRES/SS(7,7,10),CC(7,7,10),SC(7,7,10),CS(7,7,10)

```

```

C
C === SUBROTINA PARA O CALCULO DAS INTEGRAIS DOS PRODUTOS TRIPLOS DE
C === FUNCOES TRIGONOMETRICAS
C

```

```

    PI=3.141592653589793
    PIC=PI/COMP
    NDM=2-ISM
    NDC=2-ISC
    DO 111 L=1,7
    DO 111 M=1,7
    DO 111 N=1,10
    SC(L,M,N)=0.
111 CS(L,M,N)=0.
    DO 20 ML=1,NHC,NDC
    MG=ML/(2-ISC)+(1-ISC)
    HL=ML*PIC
    DO 20 MD=ML,NHD,NDC
    MT=MD/(2-ISC)+(1-ISC)
    HD=MD*PIC
    DO 10 MM=1,NHM,NDM
    JM=MM/(2-ISM)+(1-ISM)
    HM=MM*PIC

```

```

C
    N=1
    CSC=0.
    SSS=0.
    U=COMP
    DO 18 J=1,2
    IF((MM-MD).EQ.0) GO TO 17
    IF((MM-MD-ML).EQ.0) GO TO 40
    IF((ML-MM-MD).EQ.0) GO TO 50
    IF((MD-MM-ML).EQ.0) GO TO 55

```

```

C
    CSC=CSC+N*(DCOS(HL*U)*(-DCOS((HM+HD)*U)/(2.*(HM+HD))-DCOS((HM-HD)*
    *U)/(2.*(HM-HD)))+HL/(2.*(HM+HD))*(DCOS((HL+HM+HD)*U)/(2.*(HL+HM+HD

```

```

*)+DCOS((HL-HM-HD)*U)/(2.*(HL-HM-HD))+HL/(2.*(HM-HD))*(DCOS((HL+H
*M-HD)*U)/(2.*(HL+HM-HD))+DCOS((HL-HM+HD)*U)/(2.*(HL-HM+HD)))
SSS=SSS+N*(DSIN(HL*U)*(-DSIN((HM+HD)*U)/(2.*(HM+HD))+DSIN((HM-HD)*
*U)/(2.*(HM-HD))+HL/(2.*(HM+HD))*(-DCOS((HL+HM+HD)*U)/(2.*(HM+HD+H
*L))-DCOS((HM+HD-HL)*U)/(2.*(HM+HD-HL))-HL/(2.*(HM-HD))*(-DCOS((HM
*-HD+HL)*U)/(2.*(HM-HD+HL))-DCOS((HM-HD-HL)*U)/(2.*(HM-HD-HL)))
GO TO 27

```

C

```

40 IF((2*ML-2*MD).EQ.0) GO TO 45
CSC=CSC+N*(0.125*(-DCOS(2*HL*U)/HL-DCOS(2*HD*U)/HD-DCOS((2*HL+2*HD
*)*U)/(2*HL+2*HD)-DCOS((2*HL-2*HD)*U)/(2*HL-2*HD)-DCOS((2*HD+2*HL)*
*U)/(2*HD+2*HL)-DCOS((2*HD-2*HL)*U)/(2*HD-2*HL)))
SSS=SSS+N*(0.125*(-DCOS(2*HL*U)/HL-DCOS(2*HD*U)/HD+DCOS((2*HL+2*HD
*)*U)/(2*HL+2*HD)+DCOS((2*HL-2*HD)*U)/(2*HL-2*HD)+DCOS((2*HD+2*HL)*
*U)/(2*HD+2*HL)+DCOS((2*HD-2*HL)*U)/(2*HD-2*HL)))
GO TO 27

```

C

```

45 CSC=CSC+N*(-DCOS(2*HL*U)/(4*HL)+(DSIN(2*HL*U)**2)/(8*HL))
SSS=SSS+N*(-DCOS(2*HL*U)/(4*HL)-(DSIN(2*HL*U)**2)/(8*HL))
GO TO 27

```

C

```

17 IF((2*MM-ML).EQ.0) GO TO 25

```

C

```

CSC=CSC+N*(-DCOS((2*HM+HL)*U)/(4.*(2*HM+HL))-DCOS((2*HM-HL)*U)/(4.
** (2*HM-HL)))
SSS=SSS+N*(-DCOS(HL*U)/(2*HL)+DCOS((HL+2*HM)*U)/(4.*(HL+2*HM))+DCO
*S((HL-2*HM)*U)/(4.*(HL-2*HM)))
GO TO 27

```

C

```

25 CSC=CSC+N*((DSIN(HL*U)**2)/(4*HL))
SSS=SSS+N*(-DCOS(HL*U)/(2*HL)-(DSIN(HL*U)**2)/(4*HL))
GO TO 27

```

C

```

50 H1=HL
H2=HD
GO TO 60
55 H1=HD
H2=HL

```

C

60 IF((2\*MM-2\*MD).EQ.0.OR.(2\*MM-2\*ML).EQ.0) GO TO 65

C  
CSC=CSC+N\*(0.125\*(-DCOS(2\*HM\*U)/HM+DCOS(2\*H2\*U)/H2-DCOS((2\*HM+2\*H2  
\*)\*U)/(2\*HM+2\*H2)-DCOS((2\*HM-2\*H2)\*U)/(2\*HM-2\*H2)-DCOS((2\*H2+2\*HM)\*  
\*U)/(2\*H2+2\*HM)-DCOS((2\*H2-2\*HM)\*U)/(2\*H2-2\*HM)))  
SSS=SSS+N\*(0.125\*(-DCOS(2\*HM\*U)/HM-DCOS(2\*H2\*U)/H2+DCOS((2\*HM+2\*H2  
\*)\*U)/(2\*HM+2\*H2)+DCOS((2\*HM-2\*H2)\*U)/(2\*HM-2\*H2)+DCOS((2\*H2+2\*HM)\*  
\*U)/(2\*H2+2\*HM)+DCOS((2\*H2-2\*HM)\*U)/(2\*H2-2\*HM)))  
GO TO 27

C  
65 CSC=CSC+0.  
SSS=SSS+N\*(-DCOS(2\*HM\*U)/(4\*HM)-(DSIN(2\*HM\*U)\*\*2)/(8\*HM))

C  
27 U=0,  
N=-1  
18 CONTINUE

C  
SS(MG,MT,JM)=SSS  
CC(MG,MT,JM)=CSC

C  
IF(NTIP.NE.3) GO TO 10

C  
N=1  
SSC=0.  
U=COMP  
DO 218 J=1,2  
IF((MM-MD).EQ.0) GO TO 217  
IF((MM-MD-ML).EQ.0) GO TO 240  
IF((ML-MM-MD).EQ.0) GO TO 250  
IF((MD-MM-ML).EQ.0) GO TO 255

C  
SSC=SSC+N\*(DSIN(HL\*U)\*(-DCOS((HM-HD)\*U)/(2\*(HM-HD))-DCOS((HM+HD)\*U  
\*)/(2\*(HM+HD)))+HL/(2\*(HM-HD))\*(DSIN((HL-HM+HD)\*U)/(2\*(HL-HM+HD))+  
\*DSIN((HL+HM-HD)\*U)/(2\*(HL+HM-HD)))+HL/(2\*(HM+HD))\*(DSIN((HL-HM-HD  
\*)\*U)/(2\*(HL-HM-HD))+DSIN((HL+HM+HD)\*U)/(2\*(HL+HM+HD)))  
GO TO 227

217 IF((2\*MM-ML).EQ.0) GO TO 225  
SSC=SSC+N\*(DSIN(HL\*U)\*(1/(2\*HM)\*(DSIN(HM\*U))\*\*2))-HL/(4\*HM)\*

```

      *((1/HL*DSIN(HL*U)-DSIN((HL-2*HM)*U)/(2*(HL-2*HM))-DSIN((HL+2*HM)*U
      *)/(2*(HL+2*HM)))
      GO TO 227
225 SSC=SSC+N*(DSIN(HL*U)*((1/(2*HM)*(DSIN(HM*U)**2))-HL/(4*HM)*
      *(1/HL*DSIN(HL*U)-U/2-DSIN(4*HM*U)/(8*HM)))
      GO TO 227
240 HUM=1.
      H20=HD
      H30=HL
      GO TO 260
250 HUM=1.
      H20=HD
      H30=HM
      GO TO 260
255 HUM=-1.
      H20=HM
      H30=HL

```

```

C
260 SSC=SSC+N*(HUM*0.25*U+0.25*(DSIN(2*H20*U)/(2*H20)+HUM*DSIN(2*H30*
      *U)/(2*H30)-DSIN((2*H30+2*H20)*U)/(2*H30+2*H20)))
227 U=0.
      N=-1
218 CONTINUE
      SC(MG,MT,JM)=SSC

```

```

C
      N=1
      CSS=0.
      U=COMP
      DO 318 J=1,2
      IF((MM-ML).EQ.0) GO TO 317
      IF((MM-ML-MD).EQ.0) GO TO 340
      IF((MD-MM-ML).EQ.0) GO TO 350
      IF((ML-MM-MD).EQ.0) GO TO 355
      CSS=CSS+N*(DSIN(HD*U)*(-DCOS((HM-HL)*U)/(2*(HM-HL))-DCOS((HM+HL)*U
      *)/(2*(HM+HL)))+HD/(2*(HM-HL))*(DSIN((HD-HM+HL)*U)/(2*(HD-HM+HL))+
      *DSIN((HD+HM-HL)*U)/(2*(HD+HM-HL)))+HD/(2*(HM+HL))*(DSIN((HD-HM-HL
      *)*U)/(2*(HD-HM-HL))+DSIN((HD+HM+HL)*U)/(2*(HD+HM+HL)))
      GO TO 327
317 IF((2*MM-MD).EQ.0) GO TO 325

```

```

      CSS=CSS+N*(DSIN(HD*U)*(1/(2*HM)*(DSIN(HM*U)**2))-HD/(4*HM)*
      *(1/HD*DSIN(HD*U)-DSIN((HD-2*HM)*U)/(2*(HD-2*HM))-DSIN((HD+2*HM)*U
      *)/(2*(HD+2*HM)))
      GO TO 327
325  CSS=CSS+N*(DSIN(HD*U)*(1/(2*HM)*(DSIN(HM*U)**2))-HD/(4*HM)*
      *(1/HD*DSIN(HD*U)-U/2-DSIN(4*HM*U)/(8*HM)))
      GO TO 327
340  HUM=1.
      H40=HL
      H50=HD
      GO TO 360
350  HUM=1.
      H40=HL
      H50=HM
      GO TO 360
355  HUM=-1.
      H40=HM
      H50=HD
360  CSS=CSS+N*(HUM*0.25*U+0.25*(DSIN(2*H40*U)/(2*H40)+HUM*DSIN(2*H50*
      *U)/(2*H50)-DSIN((2*H50+2*H40)*U)/(2*H50+2*H40)))
327  U=0.
      N=-1
318  CONTINUE
C
      CS(MG,MT,JM)=CSS
C
10  CONTINUE
20  CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE VECAR (NEQ,NHC,NE,NGL,NNO,NEL,X,Y,COMP,PESO,
*ALFA,E1,E2,XNI,POS,NHM,NSEC,ZZ)
IMPLICIT REAL *8 (A-H,O-Z), INTEGER *2 (I-N)
DIMENSION NEL(35,13),X(140),Y(140),XE(8,2),PO(16),TO(24),
*U(24,5),P(12),QO(16),PP(6),PESO(2,5)
DIMENSION LM(4,3),ALFA(5),E1(5),E2(5),XNI(5),POS(35,16),ZZ(10)
COMMON/UM/BETA,K1,K2,K3,K4,K5,NTIP,ISM,ISC,NREG,NTEM
COMMON/DOIS/PC(420,7)
COMMON/QUA/RIGT1(35,8),RIGT2(35,8)
DATA LM/3,2,2*4,6,5,7,8,2*1,2,3/

```

```

C
C
C
C
C
C
CALCULO DO VETOR CARREGAMENTO PARA CADA HARMONICO CARGA

```

```

NHR=NHC/(2-ISC)+(1-ISC)

```

```

MPL=2*NNO

```

```

MPO=NNO-4

```

```

NN1=NNO*NGL

```

```

K1=1

```

```

K5=1

```

```

IW=0

```

```

WRITE(6,90)

```

```

90 FORMAT(///,30X,'C A R R E G A M E N T O',//)

```

```

C === ZERAMENTO DO VETOR DE CARGAS

```

```

DO 38 J1=1,NEQ

```

```

DO 38 J2=1,NHR

```

```

38 PC(J1,J2)=0.

```

```

PI=3.141592653589793

```

```

WRITE(6,91)

```

```

91 FORMAT(/,5X,'ELEM.',5X,'CARGA',5X,'TIPO',5X,'LADO',4X,'INICIO',9X
*,'X1',10X,'Y1',10X,'X2',10X,'Y2',10X,'X3',10X,'Y3',/)

```

```

DO 9 LT=1,NE

```

```

NMAS=0

```

```

NCAL=0

```

```

DO 75 J=1,MPL

```

```

75 PO(J)=0.

```

```

DO 23 M1=1,NNO

```

```

KB=NEL(LT,M1)

```

```

      XE(M1,1)=X(KB)
23  XE(M1,2)=Y(KB)
      DO 49 J3=1,NN1
      TO(J3)=0.
C  === ZERAMENTO DO CARREGAMENTO LIDO PARA O ELEMENTO
      DO 49 J4=1,NHR
49  U(J3,J4)=0.
      NCE=NEL(LT,12)
      IF(NCE)18,9,18
18  DO 14 NMC=1,NCE
      READ(5,21) LOAD,LADO,ZA,(P(I),I=1,6)
21  FORMAT(2I5,7F10.2)
      WRITE(6,8) LT,NCE,LOAD,LADO,ZA,(P(I),I=1,6)
8   FORMAT(4(4X,I5),7(2X,F10.2))
      IF(LOAD.EQ.0) GO TO 9
      IF(LOAD.EQ.6) NMAS=1
      IF(LOAD.EQ.7) NCAL=1
      GO TO (50,51,50,51,50,43,43),LOAD
50  DO 60 I=1,6
      J=I+6
60  P(J)=P(I)
      ZB=COMP
      GO TO 31
C
51  READ(5,22) ZB,(P(I),I=7,12)
22  FORMAT(7F10.2)
      WRITE(6,42)ZB,(P(I),I=7,12)
42  FORMAT(//,44X,'FIM',//,36X,7(2X,F10.2),//)
C
31  IF(NTIP-2) 3,2,3
2   ZA=ZA*PI
      IF(ZB.EQ.COMP) GO TO 3
      ZB=ZB*PI
3   CONTINUE
C
43  IF(NMAS) 30,32,30
30  CALL PEPRO(PESO,NEL(LT,11),XE,PO,NMAS)
C
32  DO 26 NHARM=1,NHR

```

```

NH=(2-ISC)*(NHARM-1)+1
IF(NCAL.EQ.0) GO TO 33
CALL TEMP (TO,NEL,LT,XE,IW,NHARM,ALFA,E1,E2,XNI,
*POS,NHM,COMP,NSEC,ZZ,NE)
NEL(LT,12)=-NEL(LT,12)
33 DO 1 J=1,MPL
1 QO(J)=0.
LK=0
KL=0
RAB=COMP/2.
CD=1.
IF(LOAD.EQ.6) CD=4./(NH*PI)
IF(LOAD.EQ.7) CD=4./(NH*PI)
IF(LOAD.NE.5) GO TO 100
DO 101 J=1,6
ANG=NH*PI*ZA/COMP
101 PP(J)=P(J)*2./COMP*DSIN(ANG)
GO TO 81
100 CONTINUE
IF(LOAD.GE.6) GO TO 24

C
DO 20 IM=1,6
IN=IM+6

C
PP(IM)=2./NH/PI*((P(IN)-P(IM))/(ZB-ZA)*(ZA*DCOS(NH*PI*ZA/COMP)
*-ZB*DCOS(NH*PI*ZB/COMP)+COMP/NH/PI*(DSIN(NH*PI*ZB/COMP)
*-DSIN(NH*PI*ZA/COMP)))+(P(IM)-(P(IN)-P(IM))/(ZB-ZA)*ZA)*
*(DCOS(NH*PI*ZA/COMP)-DCOS(NH*PI*ZB/COMP)))
20 CONTINUE

C
C
IF(LOAD=3) 81,52,52
81 DO 145 KL=1,3
JJ=LM(LADO,KL)
QO(2*JJ-1)=PP(2*KL-1)
145 QO(2*JJ)=PP(2*KL)
GO TO 24

C
52 CALL CASU (NNO,QO,LADO,XE,PP)

```

```

C
24 MS=NN1-NGL+1
   DO 26 M1=1,MS,NGL
     KL=1+LK
     LK=1+KL
     U(M1,NHARM)=U(M1,NHARM)+RAB*(QO(KL)+PO(KL)*CO)+TO(M1)*CO
     M3=M1+2
     U(M3,NHARM)=U(M3,NHARM)+CO*TO(M3)
     M2=M1+1
26  U(M2,NHARM)=U(M2,NHARM)+RAB*(QO(LK)*CO+PO(LK)*CO)+TO(M2)*CO
14  CONTINUE

```

```

C
C
C
   DO 37 NHARM=1,NHR
     DO 37 NM=1,NND
       LL=NEL(LT,NM)
       DO 37 MN=1,NGL
         KK=MN+(NM-1)*NGL
         MM=NGL*LL-NGL+MN
37  PC(MM,NHARM)=PC(MM,NHARM)+U(KK,NHARM)

```

```

C
   9 CONTINUE
C
   WRITE(11,K1) ((PC(I,NHARM),NHARM=1,NHR),I=1,NEQ)
   K1=1
   RETURN
   END

```

PR . . . REATED BY OPERATOR

```

SUBROUTINE CRIGES(E1,E2,XNI,XE,POS,NHM,MD,ML,SE,COMP,INDEL,NEL,
*NSEC,ZZ,IQ,NE)
IMPLICIT REAL *8 (A-H,O-Z), INTEGER *2 (I-N)
DIMENSION XE(8,2),DB(6,24),SE(24,24),D(2,8),T(2,2),T1(2,2),SN(8),B
*1(6,24),Y(6,6),D1(2,8),A(2,33),F(2,8),W(25),B2(6,24),POS(35,16)
DIMENSION NEL(35,13),YA(6,6,10),E1(5),E2(5),XNI(5)
*,C2(6,6),B4(6,24),DB2(6,24),DB3(6,24,10)
DIMENSION DB1(6,24,10),C(6,6),ZZ(10)
*,C3(6,6),C4(6,6),DB5(6,24),DB6(6,24)
DIMENSION C1(5)
COMMON/UM/BETA,K1,K2,K3,K4,K5,NTIP,ISM,ISC,NREG,NTEM
COMMON/TRES/SS(7,7,10),CC(7,7,10),SC(7,7,10),CS(7,7,10)
COMMON/QUA/RIGT1(35,8),RIGT2(35,8)
DATA A/50*0.,3*1.,2*-1.,1.,2*-1.,1.,2*0.,1.,0.,2*-1.,0./
DATA F/3*1.,2*-1.,1.,2*-1.,1.,2*0.,1.,0.,2*-1.,0./

```

C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

```

C === SUBROTINA PARA CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM ELEMENTO ISOPARA
C === METRICO QUADRILATERO QUADRATICO COM A VARIACAO DAS PROPRIEDADES ME
C === CANICAS DO MATERIAL REPRESENTADA POR SERIE DE FOURIER.
C === UTILIZACAO NA ANALISE DE ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS PELO PROCESSO
C === SEMI-ANALITICO.....COPPE/74

```

```

111 PI=3.141592653589793
DO 111 I=1,5
Q1=-0.906179845938664
Q2=-0.538469310105683
A(1,I)=Q1
A(1,I+5)=Q2
A(1,I+10)=0.
A(1,I+15)=-Q2
111 A(1,I+20)=-Q1
DO 222 I=1,5
I1=5*(I-1)+1
A(2,I1)=Q1
I2=5*(I-1)+2
A(2,I2)=Q2
I3=5*(I-1)+3

```

```

A(2,I3)=0.
I4=5*(I-1)+4
A(2,I4)=-A(2,I2)
I5=5*(I-1)+5
222 A(2,I5)=-A(2,I1)
C1(1)=0.236926885056189
C1(2)=0.478628677049937
C1(3)=0.5688888888888889
C1(4)=C1(2)
C1(5)=C1(1)
DO 333 I=1,5
W(I)=C1(1)*C1(I)
W(I+5)=C1(2)*C1(I)
W(I+10)=C1(3)*C1(I)
W(I+15)=C1(4)*C1(I)
333 W(I+20)=C1(5)*C1(I)
C
DO 2 I=1,24
DO 2 J=1,24
2 SE(I,J)=0.
C
DO 3 K=1,33
C
DO 4 J=1,8
J1=J
GO TO (5,5,5,5,6,7,7,6),J1
5 SN(J)=(1.+A(1,K)*F(1,J))*(1.+A(2,K)*F(2,J))*(A(1,K)*F(1,J)+A(2,K)*
  *F(2,J)-1)*0.25
DO 8 I=1,2
N=3-I
8 D(I,J)=((1.+A(N,K)*F(N,J))*F(I,J)*(2.*A(I,K)*F(I,J)+A(N,K)*F(N,J))
  *)/4.
GO TO 4
6 SN(J)=(1.+A(1,K)*F(1,J))*(1.-A(2,K)**2)*0.5
D(1,J)=(1.-A(2,K)**2)*F(1,J)/2.
D(2,J)=-((1.+A(1,K)*F(1,J))*A(2,K))
GO TO 4
7 SN(J)=(1.-A(1,K)**2)*(1.+A(2,K)*F(2,J))*0.5
D(1,J)=-((1.+A(2,K)*F(2,J))*A(1,K))

```

```

D(2,J)=(1.-A(1,K)**2)*F(2,J)/2.
4 CONTINUE

```

C

```

DO 9 I=1,2
DO 9 J=1,2
T(I,J)=0.
DO 9 KK=1,8
9 T(I,J)=T(I,J)+D(I,KK)*XE(KK,J)

```

C

C

C

```

DET=T(1,1)*T(2,2)-T(1,2)*T(2,1)
T1(1,1)=T(2,2)/DET
T1(1,2)=-T(1,2)/DET
T1(2,1)=-T(2,1)/DET
T1(2,2)=T(1,1)/DET
DO 10 J=1,8

```

C

```

DO 10 I=1,2
D1(I,J)=0.
DO 10 M=1,2
10 D1(I,J)=D1(I,J)+T1(I,M)*D(M,J)
DO 30 I=1,6
DO 30 J=1,24
B1(I,J)=0.
B4(I,J)=0.
30 B2(I,J)=0.
DO 11 J=1,8

```

C

```

M=3*(J-1)
B1(1,M+1)=D1(1,J)
B1(4,M+1)=D1(2,J)
B1(2,M+2)=D1(2,J)
B1(4,M+2)=D1(1,J)
B1(3,M+3)=-PI*SN(J)*ML/COMP/DCOS(BETA)
B1(6,M+1)=PI*SN(J)*ML/COMP/DCOS(BETA)
B1(5,M+2)=B1(6,M+1)
B1(5,M+3)=D1(2,J)
B1(6,M+3)=D1(1,J)

```

```

B2(1,M+1)=D1(1,J)
B2(4,M+1)=D1(2,J)
B2(2,M+2)=D1(2,J)
B2(4,M+2)=D1(1,J)
B2(3,M+3)=-PI*SN(J)*MD/COMP/DCOS(BETA)
B2(6,M+1)=PI*SN(J)*MD/COMP/DCOS(BETA)
B2(5,M+2)=B2(6,M+1)
B2(5,M+3)=D1(2,J)
B2(6,M+3)=D1(1,J)
B4(3,M+3)=D1(1,J)*(DSIN(BETA)/DCOS(BETA))
B4(6,M+1)=B4(3,M+3)
B4(5,M+2)=B4(3,M+3)

```

11 CONTINUE

IF(K.NE.1) GO TO 140

IMAT=NEL(INDEL,11)

EE1=E1(IMAT)

EE2=E2(IMAT)

XNU=XNI(IMAT)

PIC=PI/COMP

MG=ML/(2-ISC)+(1-ISC)

MT=MD/(2-ISC)+(1-ISC)

DO 13 I=1,6

DO 13 J=1,6

C(I,J)=0.

C2(I,J)=0.

C3(I,J)=0.

C4(I,J)=0.

13 Y(I,J)=0.

DO 31 KK=1,NSEC

DO 31 I=1,6

DO 31 J=1,6

31 YA(I,J,KK)=0.

KA= (NEL(INDEL,9)+NEL(INDEL,10))\*2+1

IF(NEL(INDEL,10).GT.0) KA=(NEL(INDEL,10)-1)\*2+1

NDM=2-ISM

DO 12 MM=1,NHM,NDM

JM=MM/(2-ISM)+(1-ISM)  
HM=MM\*PIC  
LO=0

C

DO 35 L=1,KA,2  
IF(NEL(INDEL,10).GT.0) GO TO 16

C

IF(L.NE.1) GO TO 14  
U=COMP  
SI=COMP/2.  
Y1=EE1  
Y2=EE2  
SNI=XNU  
GO TO 15

14 LL=L-2  
LO=LO+1  
U=POS(INDEL,LL+1)  
SI=POS(INDEL,LL)  
IF(L.GT.(NEL(INDEL,9)\*2+1)) GO TO 16  
Y1=EE1\*RIGT1(INDEL,LO)  
Y2=EE2\*RIGT2(INDEL,LO)  
SNI=XNU  
GO TO 15

16 Y1=EE1  
Y2=EE2  
U=POS(INDEL,L+1)  
SI=POS(INDEL,L)  
15 COEF=4./(MM\*PI)\*DSIN(MM\*PI\*SI/COMP)\*DSIN(MM\*PI\*U/(2.\*COMP))  
A2=1./Y1  
B3=1./Y2  
F2=-SNI/Y1  
G2=-SNI/Y2  
D2=(2.\*(1.+SNI))/Y1  
E3=(2.\*(1.+SNI))/Y2  
DELTA=(A2-F2)\*(B3\*(A2+F2)-2.\*G2\*\*2)

C

C

C

IF(NEL(INDEL,13).NE.1) GO TO 44  
PLANO ESTRATIFICADO PARALELO A XZ

```

Y(1,1)=((A2*B3-G2**2)/DELTA)*COEF
Y(1,2)=((F2*G2-G2*A2)/DELTA)*COEF
Y(1,3)=((G2**2-F2*B3)/DELTA)*COEF
Y(2,1)=Y(1,2)
Y(2,2)=((A2**2-F2**2)/DELTA)*COEF
Y(2,3)=Y(1,2)
Y(3,1)=Y(1,3)
Y(3,2)=Y(1,2)
Y(3,3)=Y(1,1)
Y(4,4)=(1./E3)*COEF
Y(5,5)=Y(4,4)
Y(6,6)=(1./D2)*COEF
GO TO 45

```

44 CONTINUE

```

C PLANO ESTRATIFICADO PARALELO A XY
Y(1,1)=((A2*B3-G2**2)/DELTA)*COEF
Y(1,2)=((G2**2-F2*B3)/DELTA)*COEF
Y(1,3)=((F2*G2-G2*A2)/DELTA)*COEF
Y(2,1)=((G2**2-F2*B3)/DELTA)*COEF
Y(2,2)=Y(1,1)
Y(2,3)=Y(1,3)
Y(3,1)=Y(1,3)
Y(3,2)=Y(1,3)
Y(3,3)=((A2**2-F2**2)/DELTA)*COEF
Y(4,4)=(1./D2)*COEF
Y(5,5)=(1./E3)*COEF
Y(6,6)=Y(5,5)

```

45 CONTINUE

```

C IF(IQ) 120,125,120
120 DO 80 NN=1,NSEC
  YY=DSIN(MM*PI*ZZ(NN)/COMP)
  DO 80 I=1,6
  DO 80 KK=1,6
  80 YA(I,KK,NN)=YA(I,KK,NN)+Y(I,KK)*YY
125 CONTINUE

```

```

C DO 19 I=1,4
  DO 19 J=1,4

```

```

      C2(I,J)=C2(I,J)+Y(I,J)*CC(MG,MT,JM)
      C3(I,J)=C3(I,J)+Y(I,J)*SC(MG,MT,JM)
      C4(I,J)=C4(I,J)+Y(I,J)*CS(MG,MT,JM)
19   C(I,J)=C(I,J)+Y(I,J)*SS(MG,MT,JM)
      DO 20 I=5,6
      DO 20 J=5,6
      C2(I,J)=C2(I,J)+Y(I,J)*SS(MG,MT,JM)
      C3(I,J)=C3(I,J)+Y(I,J)*CS(MG,MT,JM)
      C4(I,J)=C4(I,J)+Y(I,J)*SC(MG,MT,JM)
20   C(I,J)=C(I,J)+Y(I,J)*CC(MG,MT,JM)

```

```

C
35 CONTINUE
12 CONTINUE

```

```

C
C
140 CONTINUE
    IF(IQ)130,135,130
130 DO 90 N=1,NSEC
      DO 90 I=1,6
      DO 90 J=1,24
      DB1(I,J,N)=0.
      DB3(I,J,N)=0.
      DO 90 KK=1,6
      DB3(I,J,N)=DB3(I,J,N)+YA(I,KK,N)*B4(KK,J)
    90 DB1(I,J,N)=DB1(I,J,N)+YA(I,KK,N)*B2(KK,J)
135 CONTINUE

```

```

C
    IF(K-25) 150,150,155
150 DO 21 I=1,6
      DO 21 J=1,24
      DB(I,J)=0.
      DB2(I,J)=0.
      DB5(I,J)=0.
      DB6(I,J)=0.
      DO 21 KK=1,6
      DB2(I,J)=DB2(I,J)+C2(I,KK)*B4(KK,J)
      DB5(I,J)=DB5(I,J)+C3(I,KK)*B4(KK,J)
      DB6(I,J)=DB6(I,J)+C4(I,KK)*B2(KK,J)
21 DB(I,J)=DB(I,J)+C(I,KK)*B2(KK,J)

```

```

DO 22 I=1,24
DO 22 M=1,24
DO 22 N=1,6
22 SE(I,M)=SE(I,M)+(B1(N,I)*(DB(N,M)+DB5(N,M))+B4(N,I)*(DB2(N,M)+
*DB6(N,M)))*DET*W(K)
GO TO 3

```

```

155 IF((ML-MD).NE.0) GO TO 3
    IF(IQ) 110,3,110
110 DO 100 N=1,NSEC
    K3=(K-26)*NSEC+N+(INDEL-1)*NSEC*8+(MT-1)*NE*NSEC*8
    K4=K3
    WRITE(14,K4) ((DB3(I,J,N),J=1,24),I=1,6)
100 WRITE(13,K3) ((DB1(I,J,N),J=1,24),I=1,6)

```

3 CONTINUE

RETURN  
END

6-17-68 BY CDE: \*TOR

```

SUBROUTINE CASU (NNPE,QQ,LADO,XE,PP)
IMPLICIT REAL *8 (A-H,O-Z), INTEGER *2 (I-N)
DIMENSION LM(4,3),FF(2,8),MP(16),A(2,8),QQ(6),SNN(2,6),XE(8,2),
*X(8,2),F(2,8),SN(3),D(2,8),DD(2,2),Q(8),PN(2),PP(6),QO(16)
DATA FF/3*1.,2*-1.,1.,2*-1.,1.,2*0.,1.,0.,2*-1.,0./
DATA MP/1,2,5,6,3,4,7,8,-1,1,-1,1,1,1,-1,-1/
DATA LM/3,2,2*4,6,5,7,8,2*1,2,3/

```

```

ELEMENTO ISOPARAMETRICO QUADRILATERO QUADRATICO
CARGAS CONSISTENTES FORCAS DE SUPERFICIE

```

```

AB=0.577350269189626
DO 30 J=1,4
L=MP(J)
K=MP(J+4)
A(1,L)=AB*MP(J+8)
30 A(1,K)=MP(J+12)
DO 31 J=1,NNPE
I=NNPE-J+1
31 A(2,I)=-A(1,J)

```

```

DO 15 I=1,6
15 QQ(I)=0.
LLL=2*LADO-1
KKK=2*LADO

```

```

DO 72 K=LLL,KKK
DO 16 I=1,6
DO 16 J=1,2
16 SNN(J,I)=0.
DO 2 J=1,3
JJ=LM(LADO,J)
X(J,1)=XE(JJ,1)
X(J,2)=XE(JJ,2)
F(1,J)=FF(1,JJ)
F(2,J)=FF(2,JJ)

```

C

```

      GO TO (7,7,7,7,8,9,9,8),JJ
7  SN(J)=(1.+A(1,K)*F(1,J))*(1.+A(2,K)*F(2,J))*(A(1,K)*F(1,J)+A(2,K)*
    *F(2,J)-1)*0.25
      DO 13 I=1,2
      N=3-I
13  D(I,J)=((1.+A(N,K)*F(N,J))*F(I,J)*(2.*A(I,K)*
    *F(I,J)+A(N,K)*F(N,J)))/4.
      GO TO 2
8  SN(J)=(1.+A(1,K)*F(1,J))*(1.-A(2,K)**2)*0.5
    D(1,J)=(1.-A(2,K)**2)*F(1,J)/2.
    D(2,J)=-((1.+A(1,K)*F(1,J))*A(2,K))
      GO TO 2
9  SN(J)=(1.-A(1,K)**2)*(1.+A(2,K)*F(2,J))*0.5
    D(1,J)=-((1.+A(2,K)*F(2,J))*A(1,K))
    D(2,J)=(1.-A(1,K)**2)*F(2,J)/2.
2  CONTINUE

```

C

```

      DO 3 J=1,3
      SNN(1,2*J-1)=SN(J)
3  SNN(2,2*J)=SN(J)
      DO 17 M=1,2
      DO 17 N=1,2
      DD(M,N)=0.
      DO 17 L=1,3
17  DD(M,N)=DD(M,N)+D(M,L)*X(L,N)

```

C

```

      G22=(DD(1,1)**2+DD(1,2)**2)**0.5
      G11=(DD(2,1)**2+DD(2,2)**2)**0.5
      Q(1)=G22
      Q(2)=G22
      Q(3)=G11
      Q(4)=G11
      Q(5)=G22
      Q(6)=G22
      Q(7)=G11
      Q(8)=G11
      DO 20 I=1,2
      PN(I)=0.

```

```

      DO 20 L=1,6
20  PN(I)=PN(I)+SNN(I,L)*PP(L)
C
      DO 21 II=1,6
      DO 21 KK=1,2
21  QQ(II)=QQ(II)+SNN(KK,II)*PN(KK)*Q(K)
C
72  CONTINUE
C
C
      RA=1.
      DO 145 KL=1,3
      JJ=LM(LADO,KL)
      QQ(2*JJ-1)=QQ(2*KL-1)*RA
145  QQ(2*JJ)=QQ(2*KL)*RA
C
      RETURN
      END

```

PRINT REPEATED BY OPERATOR

```

SUBROUTINE PEPRO (PESO,JKH,XE,PO,NMAS)
IMPLICIT REAL *8 (A-H,O-Z), INTEGER *2 (I-N)
DIMENSION PESO(2,5),XE(8,2),PO(16)
DIMENSION D(2,8),T(2,2),SN(8),A(2,25),F(2,8),W(25),C1(5),SNN(2,16)
DATA F/3*1.,2*-1.,1.,2*0.,1.,0.,2*-1.,0./

```

```

ELEMENTO ISOPARAMETRICO QUADRILATERO QUADRATICO
CARGAS CONSISTENTES - - PESO PROPRIO

```

```

C
C
C
C
PI=3.141592653589793
DO 111 I=1,5
Q1=-0.906179845938664
Q2=-0.538469310105683
A(1,I)=Q1
A(1,I+5)=Q2
A(1,I+10)=0.
A(1,I+15)=-Q2
111 A(1,I+20)=-Q1
DO 222 I=1,5
I1=5*(I-1)+1
A(2,I1)=Q1
I2=5*(I-1)+2
A(2,I2)=Q2
I3=5*(I-1)+3
A(2,I3)=0.
I4=5*(I-1)+4
A(2,I4)=-A(2,I2)
I5=5*(I-1)+5
222 A(2,I5)=-A(2,I1)
C1(1)=0.236926885056189
C1(2)=0.478628677049937
C1(3)=0.5688888888888889
C1(4)=C1(2)
C1(5)=C1(1)
DO 333 I=1,5
W(I)=C1(1)*C1(I)
W(I+5)=C1(2)*C1(I)
W(I+10)=C1(3)*C1(I)
W(I+15)=C1(4)*C1(I)

```

333 W(I+20)=C1(5)\*C1(I)

C

DO 3 K=1,25

C

DO 4 J=1,8

J1=J

GO TO (5,5,5,5,6,7,7,6),J1

5 SN(J)=(1.+A(1,K)\*F(1,J))\*(1.+A(2,K)\*F(2,J))\*(A(1,K)\*F(1,J)+A(2,K)\*  
\*F(2,J)-1)\*0.25

DO 8 I=1,2

N=3-I

8 D(I,J)=((1.+A(N,K)\*F(N,J))\*F(I,J)\*(2.\*A(I,K)\*F(I,J)+A(N,K)\*F(N,J))  
\*)/4.

GO TO 4

6 SN(J)=(1.+A(1,K)\*F(1,J))\*(1.-A(2,K)\*\*2)\*0.5

D(1,J)=(1.-A(2,K)\*\*2)\*F(1,J)/2.

D(2,J)=-((1.+A(1,K)\*F(1,J))\*A(2,K))

GO TO 4

7 SN(J)=(1.-A(1,K)\*\*2)\*(1.+A(2,K)\*F(2,J))\*0.5

D(1,J)=-((1.+A(2,K)\*F(2,J))\*A(1,K))

D(2,J)=(1.-A(1,K)\*\*2)\*F(2,J)/2.

4 CONTINUE

C

DO 9 I=1,2

DO 9 J=1,2

T(I,J)=0.

DO 9 KK=1,8

9 T(I,J)=T(I,J)+D(I,KK)\*XE(KK,J)

C

C

DET=T(1,1)\*T(2,2)-T(1,2)\*T(2,1)

C

DO 18 I=1,2

DO 18 J=1,16

18 SNN(I,J)=0.

IF(NMAS) 10,11,10

10 DO 13 L1=1,8

SNN(1,2\*L1-1)=SN(L1)

13 SNN(2,2\*L1)=SN(L1)

```
DO 17 I=1,16
DO 17 J=1,2
17 PO(I)=PO(I)+SNN(J,I)*PESO(J,JKH)*DET*W(K)
11 CONTINUE
3 CONTINUE
RETURN
END
```

REPEATED BY OPERATOR

```

SUBROUTINE TEMP (TO,NEL,INDEL,XE,IW,MG,ALFA,E1,E2,XNI,POS,
*NHM,COMP,NSEC,ZZ,NE)
IMPLICIT REAL *8 (A-H,O-Z), INTEGER *2 (I-N)
DIMENSION P(4),NEL(35,13),XE(8,2),D(2,8),T(2,2),T1(2,2),SN(8),
*B1(6,24),B2(6,24),Y(6,6),D1(2,8),A(2,33),F(2,8),W(25),POS(35,16),
*YA(6,6,10),E1(5),E2(5),XNI(5),ALFA(5),C1(5),C(6,6),C2(6,6),ZZ(10),
*ED1(6),DEP(6,10),DE1(6),DE2(6),TO(24)
COMMON/UM/BETA,K1,K2,K3,K4,K5,NTIP,ISM,ISC,NREG,NTEM
COMMON/TRES/SS(7,7,10),CC(7,7,10),SC(7,7,10),CS(7,7,10)
COMMON/QUA/RIGT1(35,8),RIGT2(35,8)
DATA A/50*0.,3*1.,2*-1.,1.,2*-1.,1.,2*0.,1.,0.,2*-1.,0./
DATA F/3*1.,2*-1.,1.,2*-1.,1.,2*0.,1.,0.,2*-1.,0./

```

```

ELEMENTO ISOPARAMETRICO QUADRILATERO QUADRATICO
CARGAS CONSISTENTES - - TEMPERATURA

```

```

C
C
C
C
NH=(2-ISC)*(MG-1)+1
PI=3.141592653589793
SECAN=1./DCOS(BETA)
TANG=DSIN(BETA)/DCOS(BETA)
DO 21 I=1,4
21 P(I)=0.
IW=IW+1
IF(IW.NE.1) GO TO 3
WRITE(6,1)
1 FORMAT(///,30X,'T E M P E R A T U R A S   N O D A I S',///,
*30X,'NO',16X,'TEMP.',/)
READ(5,18) NTEM
18 FORMAT(I5)
3 CONTINUE
READ(5,2) ((I,P(J)),J=1,4)
2 FORMAT(4(I10,F10.3))
DO 101 J=1,4
K=NEL(INDEL,J)
101 WRITE(6,17) K,P(J)
17 FORMAT(27X,I5,10X,F10.3)
C
INTEGRACAO NUMERICA
DO 111 I=1,5
Q1=0.906179845938664

```

```

Q2=-0.538469310105683
A(1,I)=Q1
A(1,I+5)=Q2
A(1,I+15)=-Q2
111 A(1,I+20)=-Q1
DO 222 I=1,5
I1=5*(I-1)+1
A(2,I1)=Q1
I2=5*(I-1)+2
A(2,I2)=Q2
I3=5*(I-1)+3
A(2,I3)=0.
I4=5*(I-1)+4
A(2,I4)=-A(2,I2)
I5=5*(I-1)+5
222 A(2,I5)=-A(2,I1)
C1(1)=0.236926885056189
C1(2)=0.478628677049937
C1(3)=0.5688888888888889
C1(4)=C1(2)
C1(5)=C1(1)
DO 333 I=1,5
W(I)=C1(1)*C1(I)
W(I+5)=C1(2)*C1(I)
W(I+10)=C1(3)*C1(I)
W(I+15)=C1(4)*C1(I)
333 W(I+20)=C1(5)*C1(I)
C
DO 100 K=1,33
C
DO 4 J=1,8
J1=J
GO TO (5,5,5,5,6,7,7,6),J1
5 SN(J)=(1.+A(1,K)*F(1,J))*(1.+A(2,K)*F(2,J))*(A(1,K)*F(1,J)+A(2,K)*
*F(2,J)-1)*0.25
EQ1(J)=(1.+A(1,K)*F(1,J))*(1.+A(2,K)*F(2,J))*0.25
DO 8 I=1,2
N=3-I
8 D(I,J)=((1.+A(N,K)*F(N,J))*F(I,J)*(2.*A(1,K)*F(1,J)+A(N,K)*F(N,J))

```

\*)/4.

GO TO 4

6 SN(J)=(1.+A(1,K)\*F(1,J))\*(1.-A(2,K)\*\*2)\*0.5

D(1,J)=(1.-A(2,K)\*\*2)\*F(1,J)/2.

D(2,J)=-((1.+A(1,K)\*F(1,J))\*A(2,K))

GO TO 4

7 SN(J)=(1.-A(1,K)\*\*2)\*(1.+A(2,K)\*F(2,J))\*0.5

D(1,J)=-((1.+A(2,K)\*F(2,J))\*A(1,K))

D(2,J)=(1.-A(1,K)\*\*2)\*F(2,J)/2.

4 CONTINUE

DO 9 I=1,2

DO 9 J=1,2

T(I,J)=0.

DO 9 KK=1,8

9 T(I,J)=T(I,J)+D(I,KK)\*XE(KK,J)

DET=T(1,1)\*T(2,2)-T(1,2)\*T(2,1)

T1(1,1)=T(2,2)/DET

T1(1,2)=-T(1,2)/DET

T1(2,1)=-T(2,1)/DET

T1(2,2)=T(1,1)/DET

DO 10 J=1,8

DO 10 I=1,2

D1(I,J)=0.

DO 10 M=1,2

10 D1(I,J)=D1(I,J)+T1(I,M)\*D(M,J)

DO 30 I=1,6

DO 30 J=1,24

B1(I,J)=0.

30 B2(I,J)=0.

DO 11 J=1,8

M=3\*(J-1)

B1(1,M+1)=D1(1,J)

B1(4,M+1)=D1(2,J)

B1(2,M+2)=D1(2,J)

B1(4,M+2)=D1(1,J)

B1(3,M+3)=-SECAN\*PI\*SN(J)\*NH/COMP

```

      B1(6,M+1)=SECAN*PI*SN(J)*NH/COMP
      B1(5,M+2)=B1(6,M+1)
      B1(5,M+3)=D1(2,J)
      B1(6,M+3)=D1(1,J)
      B2(3,M+3)=TANG*D1(1,J)
      B2(6,M+1)=B2(3,M+3)
      B2(5,M+2)=B2(3,M+3)
11  CONTINUE
C
      IF(K.NE.1) GO TO 140
C
      IMAT=NEL(INDEL,11)
      EE1=E1(IMAT)
      EE2=E2(IMAT)
      XNU=XNI(IMAT)
      PIC=PI/COMP
      DO 13 I=1,6
      DO 13 J=1,6
      C(I,J)=0.
      C2(I,J)=0.
13  Y(I,J)=0.
      DO 31 KK=1,NSEC
      DO 31 I=1,6
      DO 31 J=1,6
31  YA(I,J,KK)=0.
      KA= (NEL(INDEL,9)+NEL(INDEL,10))*2+1
      IF(NEL(INDEL,10).GT.0) KA=(NEL(INDEL,10)-1)*2+1
      NDM=2-ISM
      DO 12 MM=1,NHM,NDM
      JM=MM/(2-ISM)+(1-ISM)
      HM=MM*PIC
      LO=0
      DO 35 L=1,KA,2
      IF(NEL(INDEL,10).GT.0) GO TO 16
      IF(L.NE.1) GO TO 14
      U=COMP
      SI=COMP/2.
      Y1=EE1
      Y2=EE2

```

```

      SNI=XNU
      GO TO 15
14  LL=L-2
      LO=LO+1
      U=POS(INDEL,LL+1)
      SI=POS(INDEL,LL)
      IF(L.GT.(NEL(INDEL,9)*2+1)) GO TO 16
      Y1=EE1*RIGT1(INDEL,LO)
      Y2=EE2*RIGT2(INDEL,LO)
      SNI=XNU
      GO TO 15
16  Y1=EE1
      Y2=EE2
      U=POS(INDEL,L+1)
      SI=POS(INDEL,L)
15  COEF=4./(MM*PI)*DSIN(MM*PI*SI/COMP)*DSIN(MM*PI*U/(2.*COMP))
      A2=1./Y1
      B3=1./Y2
      F2=-SNI/Y1
      G2=-SNI/Y2
      D2=(2.*(1.+SNI))/Y1
      E3=(2.*(1.+SNI))/Y2
      DELTA=(A2-F2)*(B3*(A2+F2)-2.*G2**2)

C
      IF(NEL(INDEL,13).NE.1) GO TO 44
C
      PLANO ESTRATIFICADO PARALELO A XZ
      Y(1,1)=((A2*B3-G2**2)/DELTA)*COEF
      Y(1,2)=((F2*G2-G2*A2)/DELTA)*COEF
      Y(1,3)=((G2**2-F2*B3)/DELTA)*COEF
      Y(2,1)=Y(1,2)
      Y(2,2)=((A2**2-F2**2)/DELTA)*COEF
      Y(2,3)=Y(1,2)
      Y(3,1)=Y(1,3)
      Y(3,2)=Y(1,2)
      Y(3,3)=Y(1,1)
      Y(4,4)=(1./E3)*COEF
      Y(5,5)=Y(4,4)
      Y(6,6)=(1./D2)*COEF
      GO TO 45

```

```

44 CONTINUE
C   PLANO ESTRATIFICADO PARALELO A XY
Y(1,1)=((A2*B3-G2**2)/DELTA)*COEF
Y(1,2)=((G2**2-F2*B3)/DELTA)*COEF
Y(1,3)=((F2*G2-G2*A2)/DELTA)*COEF
Y(2,1)=((G2**2-F2*B3)/DELTA)*COEF
Y(2,2)=Y(1,1)
Y(2,3)=Y(1,3)
Y(3,1)=Y(1,3)
Y(3,2)=Y(1,3)
Y(3,3)=((A2**2-F2**2)/DELTA)*COEF
Y(4,4)=(1./D2)*COEF
Y(5,5)=(1./E3)*COEF
Y(6,6)=Y(5,5)
45 CONTINUE
DO 80 NN=1,NSEC
YY=DSIN(MM*PI*ZZ(NN)/COMP)
DO 80 I=1,6
DO 80 KK=1,6
80 YA(I,KK,NN)=YA(I,KK,NN)+Y(I,KK)*YY
DO 19 I=1,4
DO 19 J=1,4
C(I,J)=C(I,J)+Y(I,J)*SS(MG,MG,JM)
19 C2(I,J)=C2(I,J)+Y(I,J)*CS(MG,MG,JM)
DO 20 I=5,6
DO 20 J=5,6
C(I,J)=C(I,J)+Y(I,J)*CS(MG,MG,JM)
20 C2(I,J)=C2(I,J)+Y(I,J)*SS(MG,MG,JM)
35 CONTINUE
12 CONTINUE
140 CONTINUE
CA=0.
DO 88 J=1,4
88 CA=CA+EO1(J)*P(J)
DO 91 I=1,6
91 EO1(I)=0.
UT=ALFA(IMAT)*CA
EO1(1)=UT
EO1(2)=UT

```

```

      EO1(3)=UT
      DO 90 N=1,NSEC
      DO 90 I=1,6
      DEP(I,N)=0.
      DO 90 J=1,6
90    DEP(I,N)=DEP(I,N)+YA(I,J,N)*EO1(J)
      IF(K-25) 97,97,96
97    DO 94 I=1,6
      DE1(I)=0.
      DE2(I)=0.
      DO 94 J=1,6
      DE1(I)=DE1(I)+C(I,J)*EO1(J)
94    DE2(I)=DE2(I)+C2(I,J)*EO1(J)
      DO 95 J=1,24
      DO 95 I=1,6
95    TO(J)=TO(J)+(B1(I,J)*DE1(I)+B2(I,J)*DE2(I))*DET*W(K)
      GO TO 100
96    DO 150 N=1,NSEC
      K5=(K-26)*NSEC+N+(IW-1)*NSEC*8+(MG-1)*NTEM*NSEC*8
150  WRITE(15*K5) (DEP(J,N),J=1,6)
C
100  CONTINUE
      RETURN
      END

```

ABORTED BY OPERATOR

```

SUBROUTINE MOTAR(NEQ,NE,LIST,X,Y,E1,E2,XNI,POS,COMP,NHD,NHC,NHM,
*NGL,NNO,IC,LLT,LFT,NSEC,ZZ,NDP,NNR,REC,NTC,NU,LB,IIA)
IMPLICIT REAL *8 (A-H,O-Z), INTEGER *2 (I-N)
INTEGER IA,JJ,JJJ
DIMENSION LIST(35,13),X(140),Y(140),CRIG(24,24),XE(8,2)
DIMENSION POS(35,16),ZZ(10),IARQ(35),E1(5),E2(5),XNI(5)
*,NNR(20),NTC(20),REC(20,3),NU(30),LB(30)
COMMON/UM/BETA,K1,K2,K3,K4,K5,NTIP,ISM,ISC,NREG,NTEM
COMMON/DOIS/B(2940),RE(36000)
COMMON/TRES/SS(7,7,10),CC(7,7,10),SC(7,7,10),CS(7,7,10)
COMMON/QUA/RIGT1(35,8),RIGT2(35,8)

```

```

C
C === SUBROTINA FORMADORA DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA EM BLOCOS
C === PARA TODOS OS HARMONICOS , ARMAZENANDO-OS EM VETOR.
C

```

```

ND=0
IC=1
K2=IC
NHAR=NHC/(2-ISC)+(1-ISC)
NEQT=NEQ*NHAR
K1=1
READ(11,K1) (B(I),I=1,NEQT)

```

```

C === CALCULO DA LARGURA DE FAIXA

```

```

LF=0
DO 192 N=1,NE
DO 192 J2=2,NNO
DO 192 J1=2,NNO
DIF=LIST(N,J1)-LIST(N,J2-1)
LFF=(DABS(DIF)+1)*NGL
IF(LFF-LF)192,192,193

```

```

193 LF=LFF

```

```

192 CONTINUE

```

```

LFT=LF*NHAR

```

```

DO 300 I=1,30

```

```

300 LB(I)=LFT

```

```

LLT=18000/LFT/(NGL*NHAR)*(NGL*NHAR)

```

```

NLB=LLT/NHAR

```

```

LLT=NLB*NHAR

```

```

C VVV ZERAMENTO DO PRIMEIRO BLOCO

```

```

      IF(NEQT-LLT)200,201,201
201  IIA=LLT*LFT
      GO TO 202
200  IIA=NEQT*LFT
202  DO 203 LL=1,IIA
203  RE(LL)=0.
      NREG=IIA/1500+1
C   === INICIO DA MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ PARA TODOS OS HARMONICOS
C   === POR BLOCOS.
C   === VERIFICACAO DOS ELEMENTOS QUE CONTRIBUEM EM CADA BLOCO
C
C
      NDC=2-ISC
      NUL=0
      NIB=0
C
      LMIB=NLB+LF-1
      IF(NLB,GE,LF) LMIB=NLB
C
      NEG=0
240  NGE=NEG+1
      DO 910 ML=1,NHC,NDC
      MG=ML/(2-ISC)+(1-ISC)
      DO 110 I=NGE,NE
110  IARQ(I)=0
      DO 910 MD=ML,NHD,NDC
      MT=MD/(2-ISC)+(1-ISC)
      DO 810 N=1,NE
      DO 207 J1=1,NNO
      NL=(LIST(N,J1)-1)*NGL-(IC-1)*NLB
      IF(NL) 207,208,208
208  IF(NL-LMIB) 209,207,207
207  CONTINUE
      GO TO 810
C   === MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO QUE CONTRIBUE PARA
C   === O BLOCO
C   === CHAMADA DA SUBROTINA FORMADORA DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO DO ELEM. N.
209  IQ=N-IARQ(N)
      IARQ(N)=N

```

```

NEG=0
DO 5 J=1,NNO
L=LIST(N,J)
XE(J,1)=X(L)
5 XE(J,2)=Y(L)
CALL CRIGES(E1,E2,XNI,XE,POS,NHM,MD,ML,CRIG,COMP,N,LIST,NSEC,ZZ,
*IQ,NE)
K1=1
DO 710 J1=1,NNO
NL=(LIST(N,J1)-1)*NGL-(IC-1)*NLB
IF(NL) 710,211,211
211 IF(NL-NLB) 212,216,216
212 IF((LIST(N,J1)-1).GE.NUL) NUL=LIST(N,J1)-1
DO 610 J=1,NGL
NL=NL+1
I=(J1-1)*NGL+J
NLL=(NL-1)*NHAR+MG
IF(NLL-LLT) 213,213,610
213 DO 510 KI=1,NNO
NC=(LIST(N,KI)-1)*NGL-(IC-1)*NLB
IF(NC.LT.0) GO TO 510
DO 210 K=1,NGL
NCO=NC+K+1-NL
L=(KI-1)*NGL+K
IF(NCO) 215,215,220
220 NCC=(NCO-1)*NHAR+(MT-MG+1)
IA=(NLL-1)*LFT+NCC
RE(IA)=RE(IA)+CRIG(I,L)
GO TO 210
215 IF((ML-MD).EQ.0) GO TO 210
NLT=NC+K
NCT=NL
NLS=(NLT-1)*NHAR+MT
NC2=NCT-NLT+1
NCS=(NC2-1)*NHAR+(MG-MT+1)
IA=(NLS-1)*LFT+NCS
RE(IA)=RE(IA)+CRIG(I,L)
GO TO 210
216 IF((ML-MD).EQ.0.OR.NLB.GE.LF) GO TO 710

```

```

DO 310 JA=1,NGL
NL=NL+1
I=(J1-1)*NGL+JA
DO 310 KIA=1,NNO
NC=(LIST(N,KIA)-1)*NGL-(IC-1)*NLB
IF(NC.LT.0) GO TO 310
DO 310 KA=1,NGL
L=(KIA-1)*NGL+KA
IF(NC+KA+LF-NL) 310,310,217
217 IF((NC+KA).GT.NLB.OR.NL.GT.(LF+NLB-1)) GO TO 310
NLS=(NC+KA-1)*NHAR+MT
NCS=(NL-NC-KA)*NHAR+(MG-MT+1)
IA=(NLS-1)*LFT+NCS
RE(IA)=RE(IA)+CRIG(I,L)
310 CONTINUE
210 CONTINUE
510 CONTINUE
610 CONTINUE
710 CONTINUE
810 CONTINUE
910 CONTINUE
WRITE(6,2000) IC
2000 FORMAT(/10X,'MONTOU O BLOCO',I5)
IF(NDP.EQ.0) GO TO 450
C=== MODIFICACAO DA MATRIZ DEVIDO AS CONDICOOES DE CONTORNO
DO 410 ML=1,NHC,NDC
MG=ML/(2-ISC)+(1-ISC)
DO 410 MD=ML,NHD,NDC
MT=MD/(2-ISC)+(1-ISC)
DO 260 N=1,NDP
NX=10** (NGL-1)
I=NNR(N)
NL=(I-1)*NGL-(IC-1)*NLB
IF(NL) 260,262,262
262 IF(NL-(NLB+LF-1)) 263,260,260
263 NTCA=NTC(N)
DO 360 M=1,NGL
NL=NL+1
NLL=(NL-1)*NHAR+MG

```

```

      NCC=MT-MG+1
      IDA=NTCA/NX
      IF(IDA) 251,251,265
265  JJ=NLL+(IC-1)*LLT+MT-MG
C=== VERIFICACAO DA TECNICA A SER ADOTADA
      IF(DABS(REC(N,M))-0.000001) 261,261,332
332  IF(IC-1) 261,261,334
334  IF(NL-LF) 286,261,261
C=== TECNICA DO NUMERO GRANDE
286  B(JJ)=10.E 20*REC(N,M)
      IA=(NLL-1)*LFT+NCC
      RE(IA)=10.E 20
      GO TO 269
C=== TECNICA DA INTRODUCAO DE UM E ZERO
261  IF(NL-NLB) 266,266,267
267  NDIF=NL-NLB+1
      GO TO 268
266  NDIF=2
      IF((ML-MD).NE.0) GO TO 500
      IA=(NLL-1)*LFT+NCC
      RE(IA)=1.
      B(JJ)=REC(N,M)
      GO TO 268
500  IA=(NLL-1)*LFT+NCC
      RE(IA)=0.
      B(JJ)=REC(N,M)
268  DO 229 J=NDIF,LF
      IF(NL-NLB) 230,230,231
230  JJ=NL+(IC-1)*NLB+J-1
      JJJ=(JJ-1)*NHAR+MT
      IF(JJ-NEQ) 301,301,231
301  NLL=(NL-1)*NHAR+MG
      NCC=(J-1)*NHAR+(MT-MG+1)
      IA=(NLL-1)*LFT+NCC
      B(JJJ)=B(JJJ)-RE(IA)*REC(N,M)
      RE(IA)=0.
      IF((ML-MD).EQ.0) GO TO 231
      NLL=(NL-1)*NHAR+MT
      NCC=(J-1)*NHAR+(MG-MT+1)

```

```

      IA=(NLL-1)*LFT+NCC
      RE(IA)=0.
231  NR=NL+1-J
      IF(NR) 229,229,232
232  JJ=NR+(IC-1)*NLB
      JJJ=(JJ-1)*NHAR+MT
      NLL=(NR-1)*NHAR+MG
      NCC=(J-1)*NHAR+(MT-MG+1)
      IA=(NLL-1)*LFT+NCC
      B(JJJ)=B(JJJ)-RE(IA)*REC(N,M)
      RE(IA)=0.
      IF((ML-MD).EQ.0) GO TO 229
      NLL=(NR-1)*NHAR+MT
      NCC=(J-1)*NHAR+(MG-MT+1)
      IA=(NLL-1)*LFT+NCC
      RE(IA)=0.
229  CONTINUE
269  NTCA=NTCA-NX*IDA
251  NX=NX/10
360  CONTINUE
260  CONTINUE
410  CONTINUE
450  K1=1
      NU(IC)=NUL+1
      M=NREG
      NSB=0
      IK2=(IC-1)*M+1
      JK2=IK2+M-1
      JL=(NU(IC)-NIB)*NGL*NHAR*LB(IC)
      NLSB=JL/M
      IAX=JL-M*NLSB
      DO 350 K2=IK2,JK2
      K2=K22
      NSB=NSB+1
      LIS=(NSB-1)*NLSB+1
      LFS=NSB*NLSB
      IF(K2.EQ.JK2) LFS=LFS+IAX
      WRITE(22,K2) (RE(IL),IL=LIS,LFS)
350  CONTINUE

```

```

      LLI=NEQT-IC*LLT
      IF(LLI)234,234,235
234  LLI=NEQT-(IC-1)*LLT
      NO=1
      GO TO 236
235  LLI=LLT
236  CONTINUE
      IF(NO)237,237,238
237  IC=IC+1
      NIB=NU(IC-1)
      DO 250 IJ=1,IIA
250  RE(IJ)=0.
      K2=JK2+1
      GO TO 240
238  K1=1
      WRITE(11,K1) (B(I),I=1,NEQT)
      RETURN
      END

```

PRINT REPEAT BY OPERATOR

```

SUBROUTINE TRIGA (NN,NE,NGLN,NNPE,NUAN,LBAND,NBLOQ,NH,IIA)
IMPLICIT REAL *8 (A-H,O-Z), INTEGER *2 (I-N)
INTEGER NESPA,LIS,LFS,I,NPOSE,IN,NI
DIMENSION NUAN(30),LBAND(30)
COMMON/UM/BETA,K1,K2,K3,K4,K5,NTIP,ISM,ISC,NREG,NTEM
COMMON/DOIS/B(2940),BLOCO(36000)
NGNH=NGLN*NH
LBLOQ=IIA
N=NN*NGLN*NH
NULAN=0
DO 300 KIK=1,NBLOQ
LBBNU=LBAND(KIK)
NUAAN=NUAN(KIK)
NCOE2=LBBNU/NGNH-1
NUMAX=NUAAN+NCOE2
DO 2 K=KIK,NBLOQ
IF(NUMAX-NUAN(K))4,4,2
2 NBAUX=K
GO TO 5
4 NBAUX=K
5 NULAU=NULAN
DO 1000 LKL=KIK,NBAUX
NCOE1=KIK/LKL
NCOE=1-NCOE1
LUI=NCOE*LBLOQ+1
NESPA=(NUAN(LKL)-NULAU)*NGNH*LBAND(LKL)+LUI-1
NSB=0
M=NREG
IK2=(LKL-1)*M+1
JK2=IK2+M-1
NLSB=(NESPA-LUI+1)/M
IAX=NESPA-LUI+1-M*NLSB
DO 350 K22=IK2,JK2
K2=K22
NSB=NSB+1
LIS=(NSB-1)*NLSB+LUI
LFS=NSB*NLSB+LUI-1
IF(K2.EQ.JK2) LFS=LFS+IAX
READ(22,K2) (BLOCO(I),I=LIS,LFS)

```

```

350 CONTINUE
    K1=NULAU+1-NCOE2*NCOE
    IF(K1-NULAN-1)400,400,413
400    K1=NULAN+1
413    L2=(NULAU+1-K1)*NGNH
        LL2=0
        DO 7 LL=K1,NUAAN
            LL2=LL2+1
            NL2=L2-(LL2-1)*NGNH+1
            DO 7 LLL=1,NGNH
               >NNL2=(NL2-(LLL-1))*NCOE+2*NCOE1
                I=(LL-1)*NGNH+LLL
                IF(I-N)6,7,7
6            M=LBBNU
            NPOSE=(I-NULAN*NGNH-1)*LBBNU
            DO 20 J>NNL2,M
                NI=NPOSE+1
                II=I+J-1
                IF(II-N)8,8,7
8            IN=NPOSE+J
            IF(II-NUAN(LKL)*NGNH)11,11,7
11        IF(BLOCO(IN))101,20,101
101        C=-BLOCO(IN)/BLOCO(NI)
            MJ1=M-J+1
            DO 10 K=1,MJ1
                NI=NPOSE+K+J-1
                IN=(II-NULAU*NGNH-1)*LBAND(LKL)+K+LBLOQ*NCOE
10        BLOCO(IN)=BLOCO(IN)+C*BLOCO(NI)
20        CONTINUE
7        CONTINUE
        NSB=0
        M=NREG
        IK2=(LKL-1)*M+1
        JK2=IK2+M-1
        NLSB=(NESPA-LUI+1)/M
        IAX=NESPA-LUI+1-M*NLSB
        DO 450 K22=IK2,JK2
            K2=K22
            NSB=NSB+1

```

```

      LIS=(NSB-1)*NLSB+LUI
      LFS=NSB*NLSB+LUI-1
      IF(K2.EQ.JK2) LFS=LFS+IAX
450  WRITE(22,K2) (BLDCO(I),I=LIS,LFS)
      NULAU=NUAN(LKL)
1000  CONTINUE
300   NULAN=NUAAN
      K1=1
      RETURN
      END

```

BY OPERATOR

```

SUBROUTINE DEGA (N,NGL,NU,LB,NBL,NH,IIA,NN)
IMPLICIT REAL *8 (A-H,O-Z), INTEGER *2 (I-N)
DIMENSION NU(30),LB(30)
COMMON/UM/BETA,K1,K2,K3,K4,K5,NTIP,ISM,ISC,NREG,NTEM
COMMON/DOIS/B(2940),RB(36000)

```

```

C.
K1=1
NGH=NGL*NH
READ(11*K1) (B(I),I=1,N)
NUL=0
DO 300 K=1,NBL
  LBU=LB(K)
  NUB=NU(K)
  IB=(NUB-NUL)*NGH*LBU
  NSB=0
  MR=NREG
  IK2=(K-1)*MR+1
  JK2=IK2+MR-1
  NLSB=IB/MR
  IAX=IB-MR*NLSB
  DO 350 K22=IK2,JK2
    K2=K22
    NSB=NSB+1
    LIS=(NSB-1)*NLSB+1
    LFS=NSB*NLSB
    IF(K2.EQ.JK2) LFS=LFS+IAX
350 READ(22*K2) (RB(L),L=LIS,LFS)
    KN=NUL+1
    DO 7 I=KN,NUB
      DO 7 J=1,NGH
        NL=(I-1)*NGH+J
        C=B(NL)
        IF(C) 9,7,9
9 IF(NL-N) 6,7,7
6 M=LBU
    NP=(NL-NUL*NGH-1)*LBU
    NI=NP+1
    DO 12 L=2,M
      II=NL+L-1

```

```

      IF(II-N) 8,8,7
8  IN=NP+L
   C=-RB(IN)/RB(NI)
   B(II)=B(II)+C*B(NL)
12 CONTINUE
   7 CONTINUE
      IF(K-NBL) 20,300,300
20  NUL=NUB
300 CONTINUE

C
C   CALCULO DOS DESLOCAMENTOS
C
      IB=(N-NUL*NGH-1)*LBU+1
      B(N)=B(N)/RB(IB)
      N1=2
      DO 400 K=1,NBL
      I=NBL-K
      IF(I) 13,13,14
14  K2=(I-1)*MR+1
      FIND(22*K2)
13  DO 35 IB=N1,N
      IF((NN-NUL)*NGH-IB) 80,36,36
36  NL=N-IB+1
      C=B(NL)
      NI=(NL-NUL*NGH-1)*LBU+1
      DO 34 KI=2,LBU
      IK=NL+KI-1
      IF(IK=N) 37,37,35
37  IN=NI+KI-1
34  C=C-RB(IN)*B(IK)
35  B(NL)=C/RB(NI)
      GO TO 400
80  N1=IB
      IF(I-1) 81,81,82
81  NUL=0
      GO TO 83
82  NUL=NU(I-1)
83  NUB=NU(I)
      LBU=LB(I)

```

```

KI=(NUB-NUL)*NGH*LBU
NSB=0
IK2=(I-1)*MR+1
JK2=IK2+MR-1
NLSB=KI/MR
IAX=KI-MR*NLSB
DO 450 K22=IK2,JK2
K2=K22
NSB=NSB+1
LIS=(NSB-1)*NLSB+1
LFS=NSB*NLSB
IF(K2.EQ.JK2) LFS=LFS+IAX
450 READ(22,K2) (RB(JJ),JJ=LIS,LFS)
400 CONTINUE
K1=1
WRITE(11,K1) (B(I),I=1,N)
RETURN
END

```

BY LABOR

```

SUBROUTINE DETEN (ZZ,COMP,NEQ,NSEC,NHD,NP,NE,NNO,NGL,NEL)
IMPLICIT REAL *8 (A-H,O-Z), INTEGER *2 (I-N)
DIMENSION ZZ(10),PC(420,6),NEL(35,13)
*,DB3(6,24,10),DEP(6,10)
DIMENSION VE(840),SIG(6),DB1(6,24,10)
COMMON/UM/BETA,K1,K2,K3,K4,K5,NTIP,ISM,ISC,NREG,NTEM
COMMON/DOIS/DH(420,7)

```

```

C
C
C   DESENVOLVIMENTO DOS DESLOCAMENTOS PARCIAIS E ACUMULADOS
C   CALCULO DAS TENSOES MEDIAS ACUMULADAS
C
C

```

```

NHR=NHD/(2-ISC)+(1-ISC)
PI=3.141592653589793
IW=0

```

```

C
K1=1
READ(11,K1) ((DH(I,M),M=1,NHR),I=1,NEQ)

```

```

C
DO 1 N=1,NSEC

```

```

C
DO 6 I=1,6
DO 6 J=1,NEQ
6 PC(J,I)=0.
Z=ZZ(N)
Z=Z*PI/COMP
IF(NTIP.EQ.2) Z=Z/PI
DO 1 NHARM=1,NHR
NH=(2-ISC)*(NHARM-1)+1
XX=DCOS(NH*Z)
YY=DSIN(NH*Z)

```

```

C
WRITE(6,46) ZZ(N),NH
46 FORMAT(//,30X,' SECAO   Z =',F10.2,15X,' HARMONICO  NUMERO =',I3)
WRITE(6,2)
2 FORMAT(//,21X,' DESLOCAMENTOS          PARCIAIS',29X,' DESLOCAMENTOS
*ACUMULADOS'///,4X,' NO',5X,' DESLOCAMENTO-X',5X,' DESLOCAMENTO-Y',5X,'

```

```
*DESLOCAMENTO-Z',5X,'DESLOCAMENTO-X',5X,'DESLOCAMENTO-Y',5X,'DESLOC
*AMENTO-Z',//)
```

C

```
DO 3 I=1,NP
W1=DH(3*I-2,NHARM)*YY
W2=DH(3*I-1,NHARM)*YY
W3=DH(3*I,NHARM)*XX
JA=3*I
PC(JA-2,1)=PC(JA-2,1)+W1
PC(JA-1,1)=PC(JA-1,1)+W2
PC(JA,1)=PC(JA,1)+W3
3 WRITE(6,9)I,W1,W2,W3,PC(JA-2,1),PC(JA-1,1),PC(JA,1)
9 FORMAT(2X,I4,6(4X,E15.7))
```

C

C

```
WRITE(6,14)
14 FORMAT(//,120('*'))
WRITE(6,15)
15 FORMAT(//,38X,'T E N S O E S M E D I A S A C U M U L A D A S ',
*//)
WRITE(6,12)
12 FORMAT(//,4X,'NO',8X,'TENSAO-X',11X,'TENSAO-Y',11X,'TENSAO-Z',11X,
*'TENSAO-XY',10X,'TENSAO-YZ',10X,'TENSAO-ZX',//)
```

C

```
DO 13 M=1,NE
DO 16 IK=1,NNO
DO 16 I=1,NGL
LP=NEL(M,IK)
JB=3*IK-NGL+I
JC=3*LP-NGL+I
16 VE(JB)=DH(JC,NHARM)
```

C

```
DO 13 K=1,NNO
K3=(K-1)*NSEC+N+(M-1)*NSEC*8+(NHARM-1)*NE*NSEC*8
K4=K3
L=NEL(M,K)
IF(NHARM-1) 50,51,50
51 IF(NEL(M,10).GT.0) GO TO 50
PC(L,2)=PC(L,2)+1.
```

```

50 READ(13,K3) ((DB1(I,J,N),J=1,24),I=1,6)
   READ(14,K4) ((DB3(I,J,N),J=1,24),I=1,6)
   DO 17 II=1,6
17  SIG(II)=0.
   DO 20 KL=1,4
   DO 20 LK=1,24
20  SIG(KL)=SIG(KL)+(DB1(KL,LK,N)*YY+DB3(KL,LK,N)*XX)*VE(LK)
   DO 25 KL=5,6
   DO 25 LK=1,24
25  SIG(KL)=SIG(KL)+(DB1(KL,LK,N)*XX+DB3(KL,LK,N)*YY)*VE(LK)
   IF(NEL(M,12).GE.0) GO TO 55
   IW=IW+1
   K5=(K-1)*NSEC+N+(IW-1)*NSEC*8+(NHARM-1)*NTEM*NSEC*8
   READ(15,K5) (DEP(J,N),J=1,6)
   DO 24 JO=1,6
24  SIG(JO)=SIG(JO)-DEP(JO,N)*YY
55  CONTINUE

```

```

C
   DO 19 J1=1,NGL
   MA=3*L-NGL+J1
   PC(MA,3)=PC(MA,3)+SIG(J1)
19  PC(MA,4)=PC(MA,4)+SIG(J1+3)
13  CONTINUE

```

```

C
C
   DO 45 I=1,NEQ
   L=(I-1)/NGL+1
   IF(PC(L,2).EQ.0) PC(L,2)=1.
   PC(I,5)=PC(I,3)/PC(L,2)
45  PC(I,6)=PC(I,4)/PC(L,2)

```

```

C
C
   DO 21 I=1,NP
   N1=3*I
21  WRITE(6,9) I,PC(N1-2,5),PC(N1-1,5),PC(N1,5),PC(N1-2,6),PC(N1-1,6),
     *PC(N1,6)
   1  WRITE(6,14)
   RETURN
   END

```