

TÉCNICAS DE PONTO INTERIOR E DIREÇÕES VIÁVEIS PARA  
PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO DE NASH GENERALIZADO COM  
RESTRICÇÕES COMPARTILHADAS

Carolina Effio Saldivar

Tese de Doutorado apresentada ao Programa  
de Pós-graduação em Engenharia Mecânica,  
COPPE, da Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, como parte dos requisitos necessários  
à obtenção do título de Doutor em Engenharia  
Mecânica.

Orientadores: José Herskovits Norman  
Marcelo José Colaço

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2021

TÉCNICAS DE PONTO INTERIOR E DIREÇÕES VIÁVEIS PARA  
PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO DE NASH GENERALIZADO COM  
RESTRIÇÕES COMPARTILHADAS

Carolina Effio Saldivar

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO  
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Orientadores: José Herskovits Norman  
Marcelo José Colaço

Aprovada por: Prof. Marcelo José Colaço  
Prof. José Herskovits Norman  
Prof. Fernando Pereira Duda  
Prof. Anatoli Leontiev  
Prof. Wladimir Das Neves  
Prof. Jean Rodolphe Roche  
Prof. Hécio Rangel Barreto Orlande

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
DEZEMBRO DE 2021

Saldivar, Carolina Effio

Técnicas de Ponto Interior e Direções Viáveis para Problemas de Equilíbrio de Nash Generalizado com Restrições Compartilhadas/Carolina Effio Saldivar. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2021.

X, 78 p. 29, 7cm.

Orientadores: José Herskovits Norman

Marcelo José Colaço

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Mecânica, 2021.

Referências Bibliográficas: p. 71 – 73.

1. Equilíbrio generalizado de Nash. 2. Otimização não linear. 3. Pontos interiores. I. Norman, Jose Herskovits *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

*Aos meus.*

# Agradecimentos

Gostaria agradecer ao professor Herskovits, pela orientação, a amizade e pelo grande apoio na minha vida acadêmica e sobretudo para este trabalho.

Ao professor Marcelo Colaço por aceitar ser meu coorientador.

Ao professor Jean Roche por seus comentários e por sua gentileza em colaborar externamente na realização deste trabalho.

A CAPES/PEM pelo apoio financeiro.

Aos professores membros da banca por aceitaram o convite.

Ao corpo docente e pessoal administrativo, do Programa de Engenharia Mecânica, sobretudo a Vera pela sua grande ajuda.

Ao Abraham pela sua companhia nesta caminhada principalmente nos últimos anos que foram desafiantes.

Aos grandes amigos que fiz neste tempo no Brasil, Rafael Kaustchr, Anna Rafaela e sua família, Arminda, Zélia, Helena, Dilcinha, Jose, Marjori e Eveline. Aos amigos de sempre Melina, Elizabeth, Claudio, Miguel, Meylin, Gerson, Thiago agradeço a cada um deles, pois seu apoio foi fundamental neste processo.

Aos meus queridos pais, Julia e Luis, minhas irmãs, Sandra, Claudia e Fiorella, meus sobrinhos Mathias, Caleb, Daniela, Andrea, Santiago, Antonella, Rafaella e Mateo pelo apoio e carinho constantes.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

TÉCNICAS DE PONTO INTERIOR E DIREÇÕES VIÁVEIS PARA  
PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO DE NASH GENERALIZADO COM  
RESTRICÇÕES COMPARTILHADAS

Carolina Effio Saldivar

Dezembro/2021

Orientadores: José Herskovits Norman

Marcelo José Colaço

Programa: Engenharia Mecânica

Neste trabalho apresentamos dois métodos viáveis de ponto e direção interiores para o cálculo computacional do equilíbrio normalizado do problema do equilíbrio generalizado de Nash, GNEP. O GNEP generaliza o problema clássico do equilíbrio de Nash, NEP, no sentido em que os conjuntos de estratégias de cada jogador dependem das estratégias dos jogadores rivais. Tal como no NEP, o GNEP envolve dois ou mais jogadores competindo sob o pressuposto de que não há colaboração entre eles e cada jogador, tem um problema de otimização associado. Através de uma reformulação que concatena as condições de otimização do problema de otimização de cada jogador, podemos obter a solução normalizada do GNEP. Os algoritmos apresentados neste trabalho são do tipo Newton e resolvem a concatenação das condições de otimização, utilizando também funções potenciais que decrescem em cada iteração. Assim, os algoritmos geram uma sequência de pontos viáveis que convergem para a solução normalizada do GNEP. A convergência global de ambos algoritmos é provada sob certas hipóteses e a sua aplicabilidade e eficiência são verificadas através de testes numéricos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

INTERIOR POINT AND FEASIBLE DIRECTIONS TECHNIQUES FOR  
GENERALIZED NASH EQUILIBRIUM PROBLEMS WITH SHARED  
CONSTRAINTS

Carolina Effio Saldivar

December/2021

Advisors: José Herskovits Norman  
Marcelo José Colaço

Department: Mechanical Engineering

In this work we present two feasible direction and interior point methods for the computation of the normalized equilibrium of the generalized Nash equilibrium problem, GNEP. The GNEP generalizes the classical Nash equilibrium problem, NEP, in the sense that the strategy sets of each player depend on the strategies of the rival players. As in the NEP, the GNEP involves two or more players competing under the assumption that there is no collaboration between them and each player, has an associated optimization problem. Through a reformulation that concatenates the optimality conditions of each player's optimization problem, we can obtain the normalized solution to the GNEP. The algorithms presented in this work are Newton type and solve the concatenation of the optimality conditions, using also potential functions that decrease in each iteration. Thus the algorithms generate a sequence of feasible points that converge to the normalized solution of the GNEP. The global convergence of both algorithms is tested under certain assumptions and their applicability and efficiency are shown by numerical tests.

# Sumário

|                                                                            |           |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Lista de Tabelas</b>                                                    | <b>x</b>  |
| <b>1 Introdução</b>                                                        | <b>1</b>  |
| 1.1 Motivação e Revisão Bibliográfica . . . . .                            | 1         |
| 1.2 Organização do trabalho . . . . .                                      | 3         |
| <b>2 Definições e Notações para Problemas de Otimização com Restrições</b> | <b>5</b>  |
| 2.1 Conceitos Básicos de Convexidade . . . . .                             | 5         |
| 2.2 Conceitos Básicos de Otimização com restrições . . . . .               | 6         |
| 2.3 Buscas lineares em Métodos de Direções Viáveis . . . . .               | 7         |
| 2.3.1 Regra de Armijo . . . . .                                            | 8         |
| 2.3.2 Busca de Wolfe . . . . .                                             | 8         |
| 2.4 Condições Necessárias de Primeira Ordem . . . . .                      | 8         |
| 2.4.1 Condições necessárias de primeira ordem . . . . .                    | 8         |
| 2.4.2 Condições de segunda ordem . . . . .                                 | 9         |
| 2.5 Algoritmos tipo Newton para Sistemas não lineares . . . . .            | 10        |
| 2.5.1 Método de Quase-Newton . . . . .                                     | 10        |
| <b>3 Introdução ao Problema de Equilíbrio Generalizado de Nash</b>         | <b>11</b> |
| 3.1 Problema de Equilíbrio de Nash Generalizado . . . . .                  | 12        |
| 3.1.1 GNEP convexo com restrições conjuntas . . . . .                      | 13        |
| 3.2 Reformulações do GNEP . . . . .                                        | 16        |
| 3.2.1 Reformulação Quase-variacional . . . . .                             | 16        |
| 3.2.2 Reformulação mediante a função Nikaido Isoda . . . . .               | 17        |
| 3.2.3 Reformulação mediante a concatenação das condições de KKT            | 19        |
| <b>4 Um Algoritmo de Ponto Interior com Busca Linear Multipotencial</b>    | <b>22</b> |
| 4.1 Algoritmo de ponto interior para o GNEP . . . . .                      | 26        |
| 4.2 Convergência Global . . . . .                                          | 28        |

|          |                                                                                                |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5</b> | <b>Um Método de Pontos Interiores com Função Potencial Global</b>                              | <b>35</b> |
| 5.1      | Idéias principais para o desenvolvimento do presente Algoritmo . . .                           | 35        |
| 5.2      | Algoritmo de pontos interiores e direções viáveis proposto para a<br>solução do GNEP . . . . . | 39        |
| 5.2.1    | Descrição do Algoritmo . . . . .                                                               | 40        |
| 5.3      | Convergência do Algoritmo . . . . .                                                            | 41        |
| <b>6</b> | <b>Resultados numéricos</b>                                                                    | <b>49</b> |
| 6.1      | Resultados numéricos . . . . .                                                                 | 49        |
| <b>7</b> | <b>Conclusões e Sugestões para trabalhos futuros</b>                                           | <b>69</b> |
| 7.1      | Conclusões . . . . .                                                                           | 69        |
| 7.2      | Sugestões para trabalhos futuros . . . . .                                                     | 70        |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                                                              | <b>71</b> |
|          | <b>Appendices</b>                                                                              | <b>73</b> |
| <b>A</b> | <b>Método de Pontos Interiores</b>                                                             | <b>74</b> |
| A.1      | Algoritmo FDIPA . . . . .                                                                      | 76        |
| A.1.1    | Algoritmo . . . . .                                                                            | 77        |

# Lista de Tabelas

|      |                                                                                               |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.1  | Descrição da notação da tabela 6.13 . . . . .                                                 | 51 |
| 6.2  | Parâmetros para o river pollution problem . . . . .                                           | 51 |
| 6.3  | Parâmetros para o modelo de oligopólio de Cournot . . . . .                                   | 53 |
| 6.4  | Soluções para o modelo de oligopólio de Cournot [6] . . . . .                                 | 53 |
| 6.5  | Custos de geração $c_{\nu,i}$ e capacidades $CAP_{\nu,i}$ . . . . .                           | 55 |
| 6.6  | Dados da função preço $(P_i, Q_i)$ . . . . .                                                  | 55 |
| 6.7  | Vendas das empresas 1 e 2 no equilíbrio . . . . .                                             | 56 |
| 6.8  | Parâmetros e resultados do algoritmo para o modelo em 6 estágios . .                          | 58 |
| 6.9  | Geração e vendas para o exemplo de 3-BUS . . . . .                                            | 60 |
| 6.10 | Geração e vendas para o exemplo de 3-BUS com restrição de transmissão                         | 62 |
| 6.11 | Geração e vendas para o exemplo de 3-BUS com restrições de poluição                           | 63 |
| 6.12 | Geração e vendas para o exemplo de 3-BUS com restrição de<br>transmissão e poluição . . . . . | 63 |
| 6.13 | Características de cada GNEP com restrições compartilhadas. . . . .                           | 64 |
| 6.14 | Resultados dos GNEP's com restrições compartilhadas - Algoritmo 1.                            | 65 |
| 6.15 | Resultados dos GNEP's com restrições compartilhadas - Algoritmo 1.                            | 66 |
| 6.16 | Resultados dos GNEP's com restrições compartilhadas - Algoritmo 2.                            | 67 |
| 6.17 | Resultados dos GNEP's com restrições compartilhadas - Algoritmo 2.                            | 68 |

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação e Revisão Bibliográfica

A teoria dos jogos estuda abstratamente como um agente (jogador, empresa, etc.), dentro de um ambiente competitivo, toma decisões e o quanto estas afectam aos outros agentes ou jogadores. Estes agentes competem individualmente para determinar os valores ótimos que lhes permitem obter os melhores resultados para a tomada de decisões.

O problema de equilíbrio de Nash, ou jogo não cooperativo, foi desenvolvido em 1951, com base na teoria dos jogos, acrescentando um estudo das coalizões possíveis que poderiam ser formadas pelos agentes ou jogadores. John Nash desenvolveu a teoria dos jogos na sua tese de doutorado intitulada “Jogos não cooperativos” [28] sobre a ideia da inexistência de coalizões, ou seja, assume-se que cada jogador escolhe a sua melhor estratégia sem ter comunicação ou colaboração com os outros jogadores.

Cada jogador escolhe a sua estratégia e assume que cada um dos outros também escolhem a sua melhor estratégia. Além disso, não há nenhum incentivo individual para que eles mudem as suas estratégias, uma vez que os jogadores escolherem as suas estratégias de maximização dos seus resultados. O trabalho de Nash também introduz a noção de ponto de equilíbrio e prova a existência de pelo menos um. Um aspecto importante a considerar é que um ponto de equilíbrio de Nash não é necessariamente único e que diferentes equilíbrios de Nash podem variar o valor das funções objetivo de cada jogador.

A ideia de equilíbrio de Nash foi generalizada no sentido em que os conjuntos de estratégias podem depender das estratégias dos jogadores rivais através de restrições compartilhadas, esta generalização foi inicialmente definida como uma economia abstrata por Arrow e Debreu em [1], 1954. Subsequentemente, a economia

abstrata foi definida como Problema de Equilíbrio de Nash Generalizado . Arrow e Debreu estabeleceram sob condições de convexidade e continuidade a existência do equilíbrio generalizado de Nash.

Diversos problemas em economia, engenharia e matemática podem ser modelados como um GNEP. Problemas de regulação do mercado das telecomunicações, problemas de oligopólio, problemas de controle e regulação da poluição, entre outros.

Este trabalho centra-se no estudo de uma caracterização da solução GNEP com restrições compartilhadas concatenando as condições de otimização dos problemas de otimização correspondentes a cada jogador, com o objetivo de obter uma solução chamada solução normalizada do GNEP. Esta solução tem como particularidade a igualdade dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições compartilhadas. A solução normalizada do GNEP foi descrita por Rosen [34] em 1965, e nesse mesmo trabalho ele provou a sua existência. Rosen também estabeleceu a definição de pseudo-gradiente que será utilizada neste trabalho. Anos mais tarde, Harker [13] em 1991 analisou as propriedades qualitativas e quantitativas de cada conjunto de estratégias de cada jogador utilizando a teoria das desigualdades quasi-variacionais (QVI). Ele também analisou a relação entre as formas variacionais e quase variacionais do GNEP. Uma parte interessante do trabalho de Harker é a simples descrição do que se entende por um de conjunto estratégias não conjuntas do GNEP, Harker também afirma que há muitas situações em que o conceito de GNEP pode ser encontrado. Ele exemplificou uma situação em que um jogador é considerado o ‘ditador’ (líder) das regras do jogo, neste caso os agentes ou seguidores respondem às restrições impostas pelo líder. Um bom exemplo desta situação é uma autoridade governamental que impõe regras a todos os jogadores, tais como o nível máximo de poluição de um rio.

Em 1995, Nikaido e Isoda [29] apresentaram uma função, inicialmente introduzida para provar a existência e unicidade do NEP , que toma o nome dos autores. Posteriormente, foi utilizada para encontrar a solução para os problemas de equilíbrio de Nash e, regularizada, essa função ajuda a obter o equilíbrio normalizado do problema generalizado de Nash.

Em 1991, Harker [13] mencionou a complexidade do problema de equilíbrio Stackelberg-Cournot-Nash (SCNEP) e sugeriu que os resultados da sua análise variacional para o GNEP podem ser analisados para resolver o SCNEP em certas situações. Em 1997, Herskovits e Leontiev apresentaram novas condições de otimização para o SCNEP e um algoritmo baseado na técnica de pontos interiores de Herskovits [14].

Em 2007, Faccinei e Kanzow em [9] discutem as principais propriedades e algoritmos

de solução para GNEP em geral, apontando para os tópicos mais úteis para a investigação. Dois anos mais tarde, publicaram um artigo [10] onde discutiram em detalhe a convergência global do método de penalização, que têm, na sua experiência, propriedades teóricas favoráveis, e apresentaram uma coleção de problemas teste que serão utilizados neste trabalho.

Facchinei, Fischer e Piccialli [6] em 2009 fizeram uma descrição geral dos diferentes métodos de Newton para obter a solução normalizada do GNEP, tais como os métodos Newton para funções não diferenciáveis, analisando as suas características e comparando os seus níveis de aplicabilidade e utilizando como exemplo, o modelo para switching na Internet. No mesmo ano, Fukushima, Tseng e Nabetani [26] propuseram duas parametrizações usando a teoria quase-variacional (QVI), uma para preços específicos e a outra para recursos específicos. Na tese de doutorado de Anna von Heusinger [35] em 2009, foram apresentados quatro métodos numéricos para a solução normalizada GNEP, todos baseados na otimização e reformulações de pontos fixos.

Em 2011, Facchinei, Devres, Kanzow e Sagratella [5] apresentaram uma reformulação do GNEP concatenando as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker para cada problema, utilizando também uma função de mérito, conseguindo mostrar que o algoritmo estabelecido por eles tem convergência global.

O principal objetivo do presente trabalho é desenvolver algoritmos de pontos interiores e direcções viáveis que calculem a solução normalizada do GNEP com restrições compartilhadas. Para este fim, foi escolhida uma reformulação do GNEP que concatena as condições de otimalidade dos problemas de otimização de cada jogador. Outro objetivo muito importante é encontrar uma função que possa ser utilizada na busca linear e que forneça um passo razoável para obter a sequência de pontos interiores gerada pelo algoritmo. O próximo objetivo é introduzir-nos na análise da convergência global dos algoritmos propostos sob as hipóteses que lhe são impostas. Finalmente, é necessário analisar a aplicabilidade dos algoritmos e realizar de vários testes numéricos a fim de validar os estudos teóricos de convergência.

## 1.2 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado em 6 capítulos e são distribuídos da seguinte forma: O **capítulo 1** mostra a introdução, a motivação e os objetivos do trabalho. O **capítulo 2** apresenta as definições correspondentes a um problema clássico de otimização com restrições, as condições necessárias e suficientes de otimalidade e as definições necessárias para estudar o método desenvolvido. No **capítulo 3** são apresentadas as

definições necessárias para estudar o problema de equilíbrio generalizado de Nash, GNEP. Em particular, estudaremos o GNEP com restrições compartilhadas.

$$\begin{cases} \underset{x^\nu}{\text{minimizar}} & f^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \\ \text{sujeito a:} & x^\nu \in X^\nu(x^{-\nu}), \end{cases}$$

resolvido de forma simultânea para todo jogador  $\nu = 1, \dots, N$ . Onde, cada  $f^\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é continuamente diferenciável sobre o conjunto de estratégias  $X^\nu(x^{-\nu}) := \{x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu} : (x^\nu, x^{-\nu}) \in X, \text{ para alguns adequados } x^{-\nu}\}$  de cada jogador  $\nu$ , e  $X$  representa o conjunto total de estratégias do GNEP. Escreve-se  $x := (x^\nu, x^{-\nu})$  se quisermos enfatizar o vetor de decisão do jogador  $\nu$  dentro de  $x$  e o vetor  $x^{-\nu} = (x^1, \dots, x^{\nu-1}, x^{\nu+1}, \dots, x^N)$  é uma notação curta para o vetor que consiste em todos os vetores de decisão exceto as variáveis de decisão do jogador  $\nu$ . Assim o problema explicitamente é dado por:

$$\begin{cases} \underset{x^\nu}{\text{minimizar}} & f^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \\ \text{sujeito a:} & g_i(x^\nu, x^{-\nu}) \leq 0, \ i = 1, \dots, m, \\ & h_j^\nu(x^\nu) \leq 0, \ j = 1, \dots, l^\nu, \end{cases}$$

onde,  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $h^\nu : \mathbb{R}^{l^\nu} \rightarrow \mathbb{R}$  são continuamente diferenciáveis. São também apresentadas reformulações do GNEP e, em particular, a reformulação que utilizamos neste trabalho. Nos capítulos 4 e 5 são apresentados dois algoritmos baseados no método de pontos interiores e direcções viáveis para o cálculo da solução normalizada do GNEP, são também apresentadas as correspondentes demonstrações da convergência global sob certas hipóteses. No primeiro algoritmo definimos uma função potencial associada a cada jogador, onde em cada iteração cada uma das funções decresce garantindo convergência global, enquanto que no segundo algoritmo é definida uma função potencial global associada a todos os jogadores simultaneamente que também garante convergência global. No **capítulo 6** são apresentado diversos testes numéricos do GNEP com restrições compartilhadas e resolvidos com os algoritmos. Finalmente, no **capítulo 7**, são apresentadas conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Definições e Notações para Problemas de Otimização com Restrições

Neste capítulo são introduzidas algumas definições e notações básicas para o estudo um problema de otimização com restrições.

### 2.1 Conceitos Básicos de Convexidade

**Definição 2.1** (Conjunto convexo). *Um conjunto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  é chamado conjunto convexo se  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \Omega$ , para quaisquer  $x, y \in \Omega$  e  $\alpha \in [0, 1]$ .*

Um conjunto convexo  $\Omega$  contém inteiramente todos os segmentos cujos extremos são pontos que pertencem a  $\Omega$ .

**Definição 2.2** (Combinação Convexa). *O ponto  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in X$  é chamado combinação convexa de pontos  $x, y \in \Omega$ , com  $\alpha \in [0, 1]$ .*

**Definição 2.3** (Função Convexa). *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo, a função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é convexa em  $\Omega$  se para quaisquer  $x, y \in \Omega$ , se satisfaz*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

com  $\alpha \in [0, 1]$ .

Uma função  $f(x)$  é estritamente convexa quando a desigualdade na definição de função convexa é estrita para todo  $x \neq y$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . É fortemente convexa quando

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - \gamma \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2,$$

onde o módulo  $\gamma > 0$ .

**Definição 2.4** (Epígrafo). *O epígrafo de uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é definido como o conjunto*

$$E_f = \{(x, c) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq c\}.$$

**Teorema 2.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo. Uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa em  $\Omega$  se, e somente se, o epígrafo de  $f(x)$  é um conjunto convexo em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .*

## 2.2 Conceitos Básicos de Otimização com restrições

Sejam o conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . O problema que consideramos é o seguinte:

$$\begin{cases} \underset{x \in \Omega}{\text{minimizar}} & f(x) \\ \text{sujeito a:} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  funções  $m$  e  $p$ -dimensionais, respectivamente e as variáveis de decisão  $x$  estão dentro do conjunto de decisão

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0, h(x) = 0\}. \quad (2.2)$$

Onde  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $h(x)$  são de classe  $C^1$ . Assumimos que a solução do problema (2.1) está no interior de  $\Omega$  ( $\text{int}(\Omega)$ ).

**Definição 2.5** (Ponto viável). *Um ponto  $x \in \Omega$  que satisfaz todas as restrições funcionais é chamado viável.*

**Definição 2.6** (Mínimo Local). *Um ponto  $x^* \in \Omega$  é dito de mínimo local do problema (2.1) se  $f(x^*) \leq f(x)$ , para todo  $x \in V := \{x \in \Omega \mid \|x - x^*\| \leq \delta\}$ , com  $x \neq x^*$ .*

**Definição 2.7** (Mínimo Global). *Um ponto  $x^* \in \Omega$  é dito de mínimo global do problema 2.1 se  $f(x^*) \leq f(x)$ , para todo  $x \in \Omega \setminus \{x^*\}$ .*

Um conceito básico mas necessário no desenvolvimento teórico dos algoritmos é o seguinte.

**Definição 2.8** (Restrições ativas). *Uma restrição é ativa em  $x^*$  se a função avaliada nesse ponto é nula, i.e,  $g_i(x^*) = 0$ . Consequentemente, uma restrição é inativa em  $x$  se  $g_i(x^*) < 0$ . E define-se o conjunto  $I = \{i = 1, \dots, m \mid g_i(x^*) = 0\}$ , que é o conjunto de todas as restrições ativas no ponto  $x^*$ .*

Obviamente as restrições de igualdade  $h_i(x^*) = 0$  são ativas em todo ponto viável.

**Definição 2.9** (Direção viável). *Dado um ponto  $x^k$  uma direção viável em  $x^k$  é um vetor  $d^k \neq 0$  tal que existe  $\tau > 0$  e  $x^k + td^k$  é viável para todo  $t \in (0, \tau)$ .*

**Definição 2.10** (Direção uniformemente viável). *Um campo de direções uniformemente viáveis do problema 2.1, é definido como um campo vetorial  $d(x)$  definido em  $\Omega$  onde existe um tamanho de passo  $\tau > 0$  tal que  $x + td(x) \in \Omega$ , para todo  $t \in [0, \tau]$  e para todo  $x \in \Omega$ .*

Os métodos de direções viáveis inicializam o processo iterativo com um ponto viável  $x_0$  e geram uma sequência de pontos viáveis  $\{x^k\}$  da seguinte forma:

$$x^{k+1} = x^k + t^k d^k$$

**Definição 2.11** (Direção de descida). *Um vetor  $d^k \in \mathbb{R}^n$  é uma direção de descenso para  $f(x)$ , se existe  $\alpha > 0$  tal que  $f(x^k + t^k d^k) < f(x^k)$  para qualquer  $t \in (0, \alpha)$ .*

**Definição 2.12.** *Um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  é um ponto regular do problema (3.1) se, para todo jogador  $\nu$ , os vetores  $\nabla g_i(x), i = 1, \dots, m$  tal que  $g_i(x) = 0$ , são linearmente independentes.*

Um indicador da eficiência de um método iterativo é definido como a taxa de convergência no sentido de que fornece a velocidade da redução de  $\|x^{k+1} - x^*\|$  em relação a  $\|x^k - x^*\|$ , sob a hipótese de que o método converge localmente à solução  $x^*$ .

**Definição 2.13.** *Dado um algoritmo iterativo convergente, a ordem de convergência da sequência  $\{x^k\} \rightarrow x^*$  gerada pelo algoritmo é o maior número  $p$  dos números não negativos  $p$ . Se existe  $q \in (0, 1)$  tal que*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|^p} = q < \infty,$$

*Quando  $p = 1$  e  $q = 0$  a ordem de convergência é superlinear, se  $q = 1$  ela é linear. E se  $p = 2$  a convergência é quadrática.*

## 2.3 Buscas lineares em Métodos de Direções Viáveis

Existem diversas regras para escolher o tamanho de passo  $t$  que são aplicáveis nos métodos de direções viáveis usados no caso do problema (2.1). As buscas lineares consistem em encontrar um  $t$  que garanta um decréscimo suficiente na função objetivo a partir de um critério chamado critério de busca de passo.

### 2.3.1 Regra de Armijo

Na regra de Armijo  $t$  é definido como o primeiro número da sequência  $\{1, v, v^2, v^3, \dots\}$  satisfazendo

$$f(x + td) \leq f(x) + t\eta \nabla f(x)^\top d, \quad (2.3)$$

onde  $\eta \in (0, 1)$  e  $v \in (0, 1)$ . Considerando que no caso do problema (2.1), as restrições devem ser satisfeitas também.

### 2.3.2 Busca de Wolfe

Na busca de Wolfe é adicionada uma condição sobre a regra de Armijo, onde além de satisfazer a condição (2.3) com  $\eta \in (0, 1/2)$  a outra condição a ser satisfeita é que

$$\nabla f(x + td)^\top d \geq \eta_2 \nabla f(x)^\top d, \quad (2.4)$$

onde  $\eta_1 \in (1, 1/2)$ .

## 2.4 Condições Necessárias de Primeira Ordem

### 2.4.1 Condições necessárias de primeira ordem

Estas condições determinam mínimos locais do problema (2.1).

**Definição 2.14** (Ponto Regular). *Seja um ponto  $x^*$  que satisfaz as restrições do problema (2.1) e define-se  $J$  como o conjunto de índices  $j$  para os quais  $g_j(x^*) = 0$ . Então  $x^*$  é dito um ponto regular das restrições do problema 2.1 se  $\nabla h_i(x^*)$ ,  $\nabla g_j(x^*)$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $j \in J$  são linearmente independentes.*

**Definição 2.15** (Espaço Tangente das restrições ativas). *Para um conjunto de pontos regulares do problema (2.1) o espaço tangente é definido como:*

$$T(x) = \{d \mid \nabla g_i(x)^\top d = 0, \forall i \in I(x), \nabla h_i(x)^\top d = 0, \forall i \in \{1, \dots, p\}\}. \quad (2.5)$$

**Teorema 2.2** (Condições de Karush Kuhn Tucker). *Seja  $x^*$  um ponto mínimo local do problema 2.1 e suponhamos que  $x^*$  é um ponto regular para as restrições. Então existe um vetor  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  e um vector  $\mu \in \mathbb{R}^p$  com  $\mu \geq 0$  tal que*

$$\nabla f(x^*) + \lambda^\top \nabla h(x^*) + \mu^\top \nabla g(x^*) = 0, \quad (2.6)$$

$$\mu^\top g(x^*) = 0. \quad (2.7)$$

*Demonstração.* Ver [24] pag. 315.

## 2.4.2 Condições de segunda ordem

As condições de segunda ordem são necessárias e suficientes para o problema (2.1).

**Teorema 2.3** (Condições necessárias de segundo ordem). *Suponha que as funções  $f, g, h \in C^2$  e que  $x^*$  é um ponto regular das restrições do problema 2.1. Se  $x^*$  é um ponto mínimo relativo do problema (2.1), então existe  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mu \geq 0$  tal que (2.6) e (2.7) são satisfeitas e*

$$H(x^*) = \nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu^* \nabla^2 h_i(x^*) \quad (2.8)$$

*é semidefinida positiva sobre o subespaço tangente das restrições ativas.*

*Demonstração.* Ver [24] pag. 316.

**Teorema 2.4** (Condições suficientes de segunda ordem). *Sejam  $f, g, h \in C^2$ . As condições suficientes para que um ponto  $x^*$  que satisfaz as restrições seja um ponto mínimo estrito relativo do problema 2.1 é que exista  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^p$  tal que*

$$\nabla f(x^*) + \lambda^\top \nabla h(x^*) + \mu^\top \nabla g(x^*) = 0, \quad (2.9)$$

$$\mu^\top g(x^*) = 0, \quad (2.10)$$

$$\mu \geq 0 \quad (2.11)$$

*e a matriz Hessiana*

$$H(x^*) = \nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu^* \nabla^2 h_i(x^*) \quad (2.12)$$

*é definida positiva sobre o subespaço*

$$M' = \{y : \nabla h(x^*)y = 0, \nabla g_j(x^*)y = 0 \text{ para todo } j \in J\},$$

*onde*

$$J = \{j : g_j(x^*) = 0, \mu_j > 0\}.$$

*Demonstração.* Ver [24] pag. 316.

## 2.5 Algoritmos tipo Newton para Sistemas não lineares

Seja uma função  $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuamente diferenciável, com a equação

$$\phi(x) = 0. \quad (2.13)$$

Extendendo o método de Newton, o método iterativo seria definido como:

$$x^{k+1} = x^k - [\nabla\phi(x)]^{-1}\phi(x). \quad (2.14)$$

**Teorema 2.5.** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função continuamente diferenciável em conjunto convexo e aberto  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Assume-se que dado  $x^0$  suficientemente próximo de  $x^* \in \mathbb{R}^n$ ,  $\nabla\phi(x^*)$  é de Lipschitz e que  $\nabla\phi(x^*)^{-1}$  existe. Então a sequência gerada por (2.14) está bem definida e converge a  $x^*$  com uma taxa de convergência quadrática.*

*Demonstração.* Ver [4] pag. 90. □

### 2.5.1 Método de Quase-Newton

Os métodos de Quase Newton geram uma sequência de matrizes que se aproximam à  $\nabla\phi(x)$  ou  $\nabla\phi(x)^{-1}$  com o objetivo de reduzir o esforço computacional. Estes métodos usam informação das anteriores iterações.

**Teorema 2.6.** *Seja  $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função Lipschitz contínua numa vizinhança do ponto  $x^* \in \mathbb{R}^n$  e  $\nabla\phi(x^*)$  não singular. Seja  $A_k$  uma sequência não singular de matrizes em  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , e suponha-se que para algum  $x_0 \in \mathbb{R}$  a sequência de pontos gerada por*

$$x^{k+1} = x^k - [A_k]^{-1}\phi(x). \quad (2.15)$$

*pertence a  $D$ , e satisfaz  $x^k \neq x^*$  para qualquer  $k$ , e  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$ . Então  $\{x^k\}$  converge  $q$ -superlinearmente a  $x^*$  e  $\phi(x^*) = 0$ , se e somente se*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|(A_k - \nabla\phi(x^*)d^k)\|}{\|d^k\|} = 0,$$

*onde  $d^k = x^{k+1} - x^k$ .*

*Demonstração.* Ver [4] pag. 181. □

## Capítulo 3

# Introdução ao Problema de Equilíbrio Generalizado de Nash

Neste capítulo são introduzidas definições e notações básicas necessárias para o estudo do problema de equilíbrio de Nash generalizado.

**Definição 3.1** (Problema de Equilíbrio de Nash). *O problema de equilíbrio de Nash é um jogo não cooperativo, no qual a função de decisão (custo/lucro) de cada jogador depende das decisões dos outros jogadores. Entretanto, os conjuntos de estratégias são independentes.*

Basicamente, um jogo ou jogo de estratégias é descrito através de uma quantidade de jogadores denotados por  $\nu$ , associados a um conjunto de estratégias  $X^\nu$  e funções de custo ou lucro  $f^\nu(x^\nu, x^{-\nu})$ .

Denota-se  $N$  como o número de jogadores e cada jogador  $\nu = 1, \dots, N$  controla um vetor de decisão  $x^\nu$ , onde  $x^\nu$  é escolhido dentro das alternativas do conjunto de estratégias ou conjunto viável  $X^\nu \subseteq \mathbb{R}^{n_\nu}$ . Seja  $n := \sum_{\nu=1}^N n_\nu$  e  $x := (x^1, \dots, x^\nu, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^n$  denota o vetor que compreende as decisões de todos os jogadores. Escreve-se  $(x^\nu, x^{-\nu}) := x$  se quiserem enfatizar o vetor de decisão do jogador  $\nu$  dentro do vetor  $x$ . O vetor  $x^{-\nu} = (x^1, \dots, x^{\nu-1}, x^{\nu+1}, \dots, x^N)$  é uma notação curta para o vetor que consiste em todos os vetores de decisão exceto as variáveis de decisão do jogador  $\nu$ .

**Definição 3.2** (Equilíbrio de Nash). *Uma tupla de  $N$  estratégias dos jogadores  $x^* = (x^{*,1}, x^{*,2}, \dots, x^{*,N}) \in X^1 \times X^2 \times \dots \times X^N$  é chamada um equilíbrio de Nash (NE) se, para cada  $\nu = 1, \dots, N$ ,  $x^{*,\nu}$  é uma solução ótima do problema*

$$\begin{aligned} \min_{x^\nu} \quad & f^\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}) \\ \text{s.t.} \quad & x^\nu \in X^\nu, \end{aligned} \tag{3.1}$$

para todo  $\nu$ . O objetivo do jogo é encontrar uma estratégia conjunta  $x^*$ , formada pelas estratégias de cada jogador, que proporcione benefícios a todos os jogadores. Num ponto de equilíbrio de Nash  $x^*$ , nenhum jogador está motivado a mudar o seu próprio vector de decisão. Assim, a procura de um equilíbrio tem um caminho mais coletivo do que individual.

### 3.1 Problema de Equilíbrio de Nash Generalizado

No jogo clássico de Nash, NEP, o conjunto de estratégias de cada jogador é independente das estratégias dos outros jogadores. Mas pode-se considerar uma situação em que existe uma dependência das estratégias dos outros jogadores através de algumas restrições conjuntas. Com esta ideia assume-se que cada jogador deve conhecer o conjunto de estratégias do outro jogador, a fim de conhecer o seu próprio conjunto de estratégias. Em [1] o conceito de equilíbrio de Nash foi generalizado, no sentido de que agora não só as funções objetivo de cada jogador  $\nu$  dependem das variáveis de decisão dos jogadores rivais,  $x^{-\nu}$ , mas também o conjunto de estratégias. O conjunto de estratégias do jogador  $\nu$  será representado por  $X^\nu(x^{-\nu})$ . Define-se para  $x \in \mathbb{R}^n$  um conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , tal que

$$X(x) = \prod_{\nu=1}^N X^\nu(x^{-\nu}) = \{y \in \mathbb{R}^n : y^\nu \in X^\nu(x^{-\nu}) \text{ para } \nu = 1, \dots, N\} \quad (3.2)$$

é não vazio, fechado e convexo.

**Definição 3.3** (Problema de Equilíbrio de Nash Generalizado). *Um problema de Equilíbrio de Nash generalizado é um jogo não cooperativo  $N$ -pessoas, onde se resolve o seguinte problema de otimização:*

$$\begin{aligned} P_\nu(x^{-\nu}) : \quad & \min_{x^\nu} f^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \\ & s.t. \quad x^\nu \in X^\nu(x^{-\nu}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

para todo  $\nu = 1, \dots, N$ . Onde  $X^\nu(x^{-\nu}) \in \mathbb{R}^{n_\nu}$  é o conjunto que depende das estratégias dos jogadores rivais.

Isto quer dizer que, se fixamos as estratégias dos jogadores  $x^{-\nu}$ , o objetivo do jogador  $x^\nu$  é escolher a melhor estratégia dentro de seu conjunto de estratégias que depende das decisões dos outros jogadores.

**Definição 3.4** (Equilíbrio Generalizado de Nash). *A tupla de  $N$  estratégias dos jogadores  $x^* = (x^{*,1}, x^{*,2}, \dots, x^{*,N})$  é chamado um equilíbrio generalizado de Nash*

(GNE) ou solução se, para cada  $\nu = 1, \dots, N$ ,  $x^{*,\nu}$  é uma solução ótima do problema

$$\begin{aligned} P_\nu : \quad & \min_{x^\nu} f^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \\ \text{s.t.} \quad & x^\nu \in X^\nu(x^{-\nu}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

com  $x^{-\nu} = x^{*, -\nu}$ .

### 3.1.1 GNEP convexo com restrições conjuntas

Define-se um GNEP convexo com restrições conjuntas ou compartilhadas. As restrições compartilhadas são aquelas restrições impostas para todos os jogadores.

**Definição 3.5** (GNEP com restrições compartilhadas). *Se diz que um GNEP é um GNEP com restrições compartilhadas ou conjuntas se:*

$$X^\nu(x^{-\nu}) = \{x^\nu : g_i(x^\nu, x^{-\nu}) \leq 0 \text{ com } i = 1, \dots, m\},$$

para todo  $\nu = 1, \dots, N$  e cada  $x^{-\nu}$ .

O objetivo é obter a solução dos seguintes GNEP's:

$$\begin{cases} \text{minimizar}_{x^\nu} & f^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \\ \text{sujeito a:} & g_i(x^\nu, x^{-\nu}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \\ & h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) \leq 0, \quad j^\nu = 1, \dots, l^\nu, \end{cases} \quad (3.5)$$

simultaneamente para todo  $\nu = 1, \dots, N$ . Onde, a função de cada jogador  $\nu$ ,  $f^\nu$ , é contínua como uma função de  $x$ ,  $g_i(x^\nu, x^{-\nu})$  e  $h_{j^\nu}^\nu(x^\nu)$  representam as restrições compartilhadas e próprias de cada jogador, respectivamente. Assim o conjunto de estratégias de cada jogador é dado por

$$X^\nu(x^{-\nu}) = \{x^\nu \mid g_i(x^\nu, x^{-\nu}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) \leq 0, \quad j^\nu = 1, \dots, l^\nu\}. \quad (3.6)$$

**Definição 3.6.** *Seja  $f^\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a função de custo do jogador  $\nu$ , dizemos que  $f^\nu$  é um jogador convexo se, para qualquer  $x^{-\nu}$ , a função  $f^\nu(\cdot, x^{-\nu})$  é convexa em  $x^\nu$ .*

**Definição 3.7.** *Se  $f^\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa com respeito a  $x$ ,  $f^\nu$  é chamada de função conjuntamente convexa, onde  $\nu = 1, \dots, N$ .*

Apresentamos as definições que caracterizam a solução do GNEP.

**Definição 3.8** (Ponto Viável). *Um ponto  $x = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^n$  é viável para o GNEP se as restrições  $g_i(x^\nu, x^{-\nu}) \leq 0$  e  $h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) \leq 0$  são satisfeitas para todos os jogadores  $\nu = 1, \dots, N$ , tal que,  $x^\nu \in X^\nu(x^{-\nu})$ .*

**Definição 3.9** (Ponto GNE). *Um ponto viável  $x^* = (x^{*,1}, \dots, x^{*,N}) \in \mathbb{R}^n$  é um ponto generalizado de Nash ou solução se para todos os jogadores  $\nu = 1, \dots, N$ , tem-se que*

$$\begin{aligned} f^\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}) &\leq f^\nu(x^\nu, x^{*,-\nu}), \quad \forall x^\nu : g_i(x^\nu, x^{*,-\nu}) \leq 0, \\ h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A definição anterior quer dizer que para todos os jogadores  $\nu$ ,  $x^{*,\nu}$  é uma solução do problema do jogador  $\nu$ , quando os outros jogadores definem suas variáveis ou estratégias em  $x^{*,-\nu}$ . Com os seguintes exemplos [9], ilustram-se as definições dadas anteriormente.

**Exemplo 3.1.** *Assume-se que os problemas dos jogadores são*

$$\begin{aligned} \min_{x^1} \quad & (x^1 - 1)^2 \\ \text{s.t.} \quad & x^1 + x^2 \leq 1, \end{aligned} \quad \min_{x^2} \quad \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{s.t.} \quad x^1 + x^2 \leq 1, \quad (3.8)$$

*O conjunto de soluções ótimas é dado por*

$$X^1(x^2) = \begin{cases} 1, & \text{se } x^2 \leq 0, \\ 1 - x^2, & \text{se } x^2 \geq 0, \end{cases} \quad e \quad X^2(x^1) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } x^1 \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x^1, & \text{se } x^1 \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

*Então pode-se ver que as soluções deste problema estão dadas por  $(\alpha, 1 - \alpha)$  para cada  $\alpha \in [1/2, 1]$ . Note-se que o problema tem infinitas soluções.*

Nos seguintes exemplos estuda-se problemas com restrições compartilhadas, o primeiro têm restrições compartilhadas que não são conjuntamente convexas. Em outras palavras, o conjunto  $X$  não é convexo, mesmo que os conjuntos  $X_\nu(x^{-\nu}) = \{x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu} : (x^\nu, x^{-\nu}) \in X\}$  são convexas.

**Exemplo 3.2.** *Considera-se o jogo com dois jogadores:*

$$\begin{cases} \min_x & -x \\ \text{s.t.} & xy \leq 1, \\ & g(x) \leq 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \min_y & (2y - 1)^2 \\ \text{s.t.} & xy \leq 1, \\ & 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

*com*

$$g(x) = \begin{cases} (x - 1)^2, & \text{se } x < 1 \\ 0, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ (x - 2)^2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

*Os conjuntos viáveis são convexas, além,  $X = \{(x, y) : xy \leq 1, g(x) \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}$*

é compacto mas não convexo. O conjunto solução dos jogadores é dado por

$$X^x(y) = \begin{cases} 2 & , \text{ se } y < 1/2, \\ 1/y & , \text{ se } 1/2 \leq y \leq 1, \\ \emptyset & , \text{ se } y > 1 \end{cases} \quad e \quad X^y(x) = \begin{cases} 1/2 & , \text{ se } x < 2, \\ 1/x & , \text{ se } x \geq 2, \end{cases}$$

Com isto pode-se ver que o GNEP tem uma única solução no ponto  $(2, 1/2)$ . Igualando os gradientes dos Lagrangeanos a zero pode-se encontrar que os multiplicadores das restrições compartilhadas são  $\lambda = 2$  para o primeiro jogador e  $\mu = 0$  para o segundo jogador. Assim, se uma restrição compartilhada é não convexa com respeito às variáveis de todos os jogadores, multiplicadores iguais podem não existir até se o conjunto viável  $X$  é compacto.

No próximo exemplo o conjunto  $X$  é convexo, mas o terceiro jogador não comparte uma restrição compartilhada entre o primeiro e segundo jogador.

**Exemplo 3.3.** Consideramos o jogo com três jogadores:

$$\begin{cases} \min_x & -x \\ \text{s.t.} & z \leq x + y \leq 1, \\ & x \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \min_y & (2y - 1)^2 \\ \text{s.t.} & z \leq x + y \leq 1, \\ & y \geq 0, \end{cases}, \quad \begin{cases} \min_z & (2z - 3x)^2 \\ \text{s.t.} & 0 \leq z \leq 2, \end{cases} \quad (3.10)$$

O conjunto solução dos jogadores é dado por

$$X^x(y, z) = \begin{cases} 1 - y & , \text{ se } y \leq 1/2, z \leq 1, \\ \emptyset & , \text{ outros casos} \end{cases}$$

$$X^y(x, z) = \begin{cases} 1/2 & , \text{ se } z - x \leq 1/2, x \leq 1/2, \\ 1 - x & , \text{ se } 1/2 \leq x \leq 1, z \leq 1, \\ \emptyset & , \text{ outros casos} \end{cases}$$

$$X^z(x, y) = \begin{cases} 3x/2 & , \text{ se } 0 \leq x \leq 4/3, \\ 2 & , \text{ se } x > 4/3, \\ 0 & , \text{ se } x < 0, \end{cases}$$

Este GNEP tem infinitas soluções dadas por  $(\alpha, 1 - \alpha, (3/2)\alpha)$ , para  $\alpha \in [1/2, 2/3]$ . Os multiplicadores das restrições  $x + y \leq 1$  e  $z \leq x + y$  são denotados por  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  para o primeiro jogador e  $\mu_1$  e  $\mu_2$  para o segundo jogador. De fato, igualando o gradiente do Lagrangeano do primeiro jogador a zero, obtemos  $\lambda_1 = 1 + \lambda_2$  (com  $\lambda_2 = 0$  se  $\alpha < 2/3$ ), enquanto consegue-se  $\mu_1 = 2\alpha - 1 + \mu_2$  (com  $\mu_2 = 0$  se  $\alpha = 2/3$ )

para o segundo jogador. Destas relações para nenhum valor de  $\alpha \in [1/2, 2/3]$  pode-se ter  $\lambda_1 = \mu_1$  e  $\lambda_2 = \mu_2$ .

## 3.2 Reformulações do GNEP

Nesta seção é feita uma descrição das reformulações equivalentes usadas na literatura para o problema de Equilíbrio de Nash generalizado.

### 3.2.1 Reformulação Quase-variacional

Em 1964, Rosen [34] introduz uma importante subclasse de Equilíbrio generalizado de Nash, esta subclasse foi chamada de Equilíbrio normalizado de Nash. Para isto, deve-se assumir que as funções de cada jogador  $f^\nu$  são continuamente diferenciáveis. Esta reformulação considera  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua, definida como:

$$F(x) = \begin{bmatrix} \nabla_{x^1} f^1(x^1, x^{-1}) \\ \nabla_{x^2} f^2(x^2, x^{-2}) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} f^N(x^N, x^{-N}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.11)$$

Onde  $\nabla_{x^\nu} f^\nu(x^\nu, x^{-\nu})$  representa a derivada da função objetivo do jogador  $\nu$  com respeito das variáveis correspondentes a este mesmo jogador. O equilíbrio normalizado de Nash (ou equilíbrio variacional) é  $x^*$ , se e somente se

$$F(x^*)^\top (y - x^*) \geq 0, \quad \forall y \in X(x). \quad (3.12)$$

Ou seja,  $x^*$  é uma solução da desigualdade quase variacional  $QVI(X, F)$ . No caso de  $X(x) = X$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos uma desigualdade variacional  $VI(X, F)$ . Assim, uma GNEP pode ser reformulada como uma desigualdade quase variacional mediante o uso da função  $F$ . A  $QVI(X, F)$  estará bem definida sempre e quando, a função  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $x \rightarrow X(x)$  seja convexa e fechada.

Os seguintes teoremas são válidos neste tipo de reformulação.

**Teorema 3.1.** *Se as funções  $f^1, \dots, f^N$  são de classe  $C^1$  e convexas, então qualquer solução  $x^*$  da GNEP é solução da  $QVI(X, F)$  e vice-versa.*

*Demonstração.* Ver Rosen [34]

**Teorema 3.2.** *Se as funções  $f^1, \dots, f^N$  são de classe  $C^1$  e conjuntamente convexas, então a solução do  $VI(X, F)$  pertence ao conjunto das soluções do GNEP.*

*Demonstração.* Ver Harker [13]

### 3.2.2 Reformulação mediante a função Nikaido Isoda

Esta reformulação foi desenvolvida por Heusinger e Kanzow em [35], mediante o uso da função chamada função de Nikaido Isoda ou Kay-fan, a qual foi apresentada inicialmente em 1955 para provar a existência e unicidade das soluções do equilíbrio de Nash, mediante o uso do teorema de ponto fixo. Posteriormente foi visto que podia ser usada para a reformulação do GNEP.

Para esta a reformulação usando a função de Nikaido Isoda as seguintes hipóteses são usadas:

**Hipótese 3.1.** *As funções  $f^\nu$ , com  $\nu = 1, \dots, N$  são contínuas como funções de  $x$  e convexas como funções de  $x^\nu$ .*

**Hipótese 3.2.** *O conjunto de estratégias  $X$  é não vazio, convexo e fechado.*

Sejam  $f^\nu$  com  $\nu = 1, \dots, N$  as funções correspondentes a cada jogador  $\nu$ , a função de Nikaido Isoda é definida como

$$\Psi(x, y) := \sum_{\nu=1}^N [f^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) - f^\nu(y^\nu, x^{-\nu})]. \quad (3.13)$$

Esta função representa a soma da mudança nos ganhos ou perdas de todos os jogadores. Cada termo da série na função Nikaido-Isoda representa a mudança dos ganhos de um jogador indo da estratégia  $x^\nu$  para  $y^\nu$ , enquanto as estratégias dos outros são mantidas fixas. Assim, mediante a função de Nikaido Isoda, pode-se definir:

$$V(x) := \max_{y \in X(x)} \Psi(x, y), \quad x \in X. \quad (3.14)$$

Da definição também pode-se provar que  $V(x) \geq 0$  para todo  $x \in X(x)$  e que  $x^*$  é um equilíbrio de Nash se e somente se  $x^* \in X(x^*)$  e  $V(x^*) = 0$ , assim  $x^*$  é um equilíbrio de Nash se e somente se  $x^*$  é solução do problema

$$\min_{x \in X(x)} V(x). \quad (3.15)$$

Note-se que este problema de otimização tem um conjunto viável  $X(x)$  que explicitamente depende de  $x$ . Então tem-se o seguinte lema, que mostra a relação entre o conjunto  $X$ , que é o conjunto de todas as estratégias e o conjunto de estratégias de cada jogador.

**Lema 3.1.** *Tem-se que  $x \in X(x)$  se e somente se  $x \in X$ .*

*Demonstração.* Usando as definições de  $X(x)$  e  $X^\nu(x^{-\nu})$ , obtemos que:

$$\begin{aligned} x \in X(x) &\iff x^\nu \in X^\nu(x^{-\nu}) \quad \forall \nu = 1, \dots, N \\ &\iff (x^\nu, x^{-\nu}) \in X \quad \forall \nu = 1, \dots, N \\ &\iff x = (x^\nu, x^{-\nu}) \in X. \end{aligned}$$

Então em vista do lema 3.1 o problema (3.5) pode ser reescrito como

$$\min_{x \in X} V(x). \quad (3.16)$$

Mas ainda existe a dificuldade de que  $V$  pode não estar bem definida ou não ser diferenciável. Para superar esse fato, os autores propõem uma regularização da função de Nikaido Isoda, fixando um parâmetro  $\alpha > 0$ , da seguinte forma:

$$\Psi_\alpha(x, y) := \sum_{\nu=1}^N \left[ f^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) - f^\nu(y^\nu, x^{-\nu}) - \frac{\alpha}{2} \|x^\nu - y^\nu\|^2 \right]. \quad (3.17)$$

Além disso, para  $x \in X$ , seja

$$\begin{aligned} V_\alpha(x) &:= \max_{x \in X(x)} \Psi_\alpha(x, y) \\ &= \max_{x \in X(x)} \sum_{\nu=1}^N \left[ f^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) - f^\nu(y^\nu, x^{-\nu}) - \frac{\alpha}{2} \|x^\nu - y^\nu\|^2 \right] \\ &= \sum_{\nu=1}^N \left\{ f^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) - \min_{y \in X^\nu(x^{-\nu})} \left[ f^\nu(y^\nu, x^{-\nu}) + \frac{\alpha}{2} \|x^\nu - y^\nu\|^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

O seguinte teorema mostra as propriedades de  $V_\alpha$ .

**Teorema 3.3.** *A função regularizada  $V_\alpha$  têm as seguintes propriedades:*

- a)  $V_\alpha \geq 0$  para todo  $x \in X(x)$ .
- b)  $x^*$  é um equilíbrio de Nash generalizado se e somente se  $x^* \in X(x^*)$  e  $V_\alpha(x^*) = 0$ .
- c) Para cada  $x \in X$ , existe um único vetor  $y_\alpha(x) = (y_\alpha^1(x), \dots, y_\alpha^N(x))$  tal que para cada  $\nu = 1, \dots, N$ ,

$$y_\alpha^\nu(x) = \operatorname{argmin}_{y^\nu \in X^\nu(x^{-\nu})} \left[ f^\nu(y^\nu, x^{-\nu}) + \frac{\alpha}{2} \|x^\nu - y^\nu\|^2 \right].$$

*Demonstração.* Ver [35].

A seguinte definição é a caracterização do equilíbrio normalizado de Nash .

**Definição 3.10.** Um equilíbrio de Nash  $x^* \in X$  é chamado de equilíbrio normalizado de Nash de uma GNEP, se  $\sup_{y \in X} \Psi(x^*, y) = 0$  onde  $\Psi$  denota a função de Nikaido–Isoda.

**Lema 3.2.** Para todo  $x \in X$ , a função de Nikaido–Isoda  $\Psi(x, y)$  é concava em  $y \in X$ .

*Demonstração.* Ver [35].

No caso inicial tomamos  $y \in X(x)$ , mas com a nova definição é possível trabalhar em  $X$ . Esta mudança sobre o conjunto viável, se faz para ganhar diferenciabilidade, mas a desvantagem é que se trabalha só sobre os equilíbrios normalizados o qual é um conjunto mais reduzido de soluções do GNEP. O seguinte teorema caracteriza os equilíbrios normalizados do GNEP.

**Teorema 3.4.** A função regularizada  $\hat{V}_\alpha$  tem as seguintes propriedades:

- a)  $\hat{V}_\alpha \geq 0$  para todo  $x \in X(x)$ .
- b)  $x^*$  é um equilíbrio de Nash generalizado se e somente se  $x^* \in X$  e  $\hat{V}_\alpha(x^*) = 0$
- c) Para cada  $x \in X$ , existe um único vetor  $y_\alpha(x) = (y_\alpha^1(x), \dots, y_\alpha^N(x))$  tal que para cada  $\nu = 1, \dots, N$ ,

$$y_\alpha^\nu(x) = \operatorname{argmin} \left[ f^\nu(y^\nu, x^{-\nu}) + \frac{\alpha}{2} \|x^\nu - y^\nu\|^2 \right]$$

e  $y_\alpha(x)$  é contínua.

*Demonstração.* Ver [35].

Seguidamente, a função Nikaido–Isoda regularizada pode ser usada para resolver os GNEP com restrições compartilhadas. O problema de otimização obtido mediante o uso da reformulação é

$$\min_{x \in X} \hat{V}_\alpha(x). \tag{3.19}$$

Assim, segundo a informação anterior pode ser aplicado um algoritmo de otimização para obter o equilíbrio normalizado do problema (3.19).

### 3.2.3 Reformulação mediante a concatenação das condições de KKT

Outra reformulação para o GNEP é baseada na concatenação das condições de KKT para cada um dos problemas de cada jogador. Segundo o GNEP (3.5), temos um

jogo onde são  $N$  problemas a ser resolvidos simultaneamente. A solução do GNEP pode ser representada como uma forma compacta da solução das condições de KKT.

**Definição 3.11.** *Define-se a função Lagrangeana de cada problema de otimização (3.5) de cada jogador  $\nu$ ,  $L^\nu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{l^\nu} \rightarrow \mathbb{R}$  como:*

$$L^\nu((x^\nu, x^{-\nu}), \lambda^\nu, \mu^\nu) = f^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) + \lambda^{\nu^\top} g(x^\nu, x^{-\nu}) + \mu^{\nu^\top} h^\nu(x^\nu), \quad (3.20)$$

onde  $g = (g_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$ ,  $\lambda^\nu \in \mathbb{R}^m$  e  $\mu^\nu \in \mathbb{R}^{l^\nu}$ . Os vetores  $\lambda^\nu$  e  $\mu^\nu$  contém os valores dos multiplicadores de Lagrange associados as restrições compartilhadas e as restrições próprias de cada jogador, respectivamente.

**Definição 3.12.** *Se  $x^*$  é a solução do GNEP (3.5), então as seguintes condições de KKT devem ser satisfeitas para cada jogador  $\nu = 1, \dots, N$ :*

$$\begin{aligned} \nabla_{x^*, \nu} f^\nu(x^{*, \nu}, x^{*, -\nu}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla_{x^\nu} g_i(x^{*, \nu}, x^{*, -\nu}) + \sum_{j^\nu=1}^{l^\nu} \mu_{j^\nu}^{*, \nu} \nabla_{x^\nu} h_{j^\nu}^{*, \nu}(x^{*, \nu}) &= 0, \\ g_i(x^{*, \nu}, x^{*, -\nu}) &\leq 0, \\ h_{j^\nu}^{*, \nu}(x^{*, \nu}) &\leq 0, \\ \lambda_i^* &\geq 0, \\ \mu_{j^\nu}^{*, \nu} &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $j^\nu = 1, \dots, l^\nu$ . Onde  $\lambda^*$  e  $\mu_{j^\nu}^{*, \nu}$  são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições  $g_i(x^{*, \nu}, x^{*, -\nu})$  e  $h^\nu(x^{*, \nu})$ , respectivamente.

**Definição 3.13.** *Um ponto regular  $x$  é um ponto estacionário do problema (3.5) se existe  $\lambda^\nu \in \mathbb{R}^m$  e  $\mu^\nu \in \mathbb{R}^{l^\nu}$  tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

$$\begin{aligned} \nabla_{x^\nu} L^\nu((x^\nu, x^{-\nu}), \lambda^\nu, \mu^\nu) &= 0, \\ \lambda_i^\nu g_i(x^\nu, x^{-\nu}) &= 0, \\ \mu_{j^\nu}^\nu h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) &= 0, \\ g_i(x^\nu, x^{-\nu}) &\leq 0, \\ h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) &\leq 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

para todo  $\nu = 1, \dots, N$ , com  $i = 1, \dots, m$  e  $j^\nu = 1, \dots, l^\nu$ .

**Teorema 3.5.** *Seja o GNEP definido pelo problema (3.5) e assume-se que todas as funções envolvidas são continuamente diferenciáveis.*

a) Seja  $x^*$  um equilíbrio do GNEP no qual todos os subproblemas dos jogadores satisfazem as condições de optimalidade. Então, existe  $\lambda^*$  tal que junto com  $x^*$  resolve o sistema (3.22).

b) Assume-se que  $(x^*, \lambda^*)$  resolve o sistema (3.22) e que o GNEP satisfaz a hipótese de convexidade. Então,  $x^*$  é um ponto de equilíbrio do GNEP.

*Demonstração.* Ver [9].

A seguinte definição de equilíbrio normalizado foi apresentada por Rosen [34], onde  $X$  é um conjunto de restrições compartilhadas ou conjuntas.

**Definição 3.14** (Equilíbrio Normalizado). *Um ponto viável  $x^* = (x^{*,1}, \dots, x^{*,N}) \in \mathbb{R}^n$  é uma solução para o GNEP (3.5), chamado de equilíbrio normalizado, se satisfaz (3.7) e os multiplicadores de Lagrange, que verificam as condições de KKT, são  $\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^N = \lambda \in \mathbb{R}^m$ .*

A existência da relação entre as condições de KKT concatenadas e a solução do GNEP é dada pelo seguinte resultado, onde através da definição de equilíbrio normalizado é garantido que a solução do GNEP é um equilíbrio variacional se e somente se as restrições compartilhadas possuem os mesmos multiplicadores para todos os jogadores.

**Teorema 3.6.** *Seja um GNEP com restrições compartilhadas e assume-se que  $f^\nu, g \in C^1$ . Então:*

a) *Seja  $x^*$  a solução do  $VI(X, F)$  tal que as condições de KKT concatenadas sejam satisfeitas para algum multiplicador  $x^*$ . Então  $x^*$  é a solução do GNEP se as condições de KKT são satisfeitas e os multiplicadores correspondentes às restrições compartilhadas são  $\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^*$ .*

b) *Reciprocamente, se  $x^*$  é a solução do GNEP tal que as condições de KKT são satisfeitas com  $\lambda^{1,*} = \lambda^{2,*} = \dots = \lambda^{N,*}$ . Então  $(x^*, \lambda^*)$  com  $\lambda^* := \lambda^{1,*}$  é um ponto de KKT do  $VI(X, F)$ , e  $x^*$  é uma solução do  $VI(X, F)$ .*

*Demonstração.* Ver [9].

Num jogo os multiplicadores de Lagrange são interpretados como os preços que são cobrados pela utilização de uma estratégia, este preço é cobrado por uma entidade que controla o jogo. Podemos tomar como exemplo um problema de poluição fluvial em que uma entidade, neste caso o governo, tenta controlar os níveis de poluição de um rio por um certo número de empresas que extraem algum mineral. Assim, os multiplicadores de Lagrange correspondentes às restrições compartilhadas significam economicamente o equilíbrio apropriado em que o mesmo preço é cobrado a todos os jogadores.

## Capítulo 4

# Um Algoritmo de Ponto Interior com Busca Linear Multipotencial

Neste capítulo empregam-se iterações tipo Newton para obter a solução simultânea das condições de Karush Kuhn Tucker concatenadas nas variáveis primais e duais do GNEP. No algoritmo apresentado define-se um ponto inicial  $x^0$ , no interior da região viável, e gera-se uma sequência de pontos interiores que convergem à solução do problema. Uma função potencial associada a cada problema de otimização de cada jogador é definida, assim em cada iteração é calculada uma direção viável para cada um dos problemas e um tamanho de passo de forma de obter um novo ponto viável e um decréscimo nas funções potenciais. O interior dos conjuntos definidos pelas funções potenciais é compacto e como todas as iterações estão no interior pode-se deduzir que a sequência gerada pelo algoritmo tem pontos de acumulação garantindo desta maneira a convergência global.

Consideramos o seguinte GNEP

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x^\nu} & f^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \\ \text{s.t.} & g_i(x^\nu, x^{-\nu}) \leq 0 \quad , i = 1, \dots, m \\ & h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) \leq 0 \quad , j^\nu = 1, \dots, l^\nu, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

para todo  $\nu = 1, \dots, N$ . Onde as funções objetivo são  $f^\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , as restrições compartilhadas são definidas por  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , e as restrições próprias de cada jogador  $\nu$ ,  $h_{j^\nu}^\nu : \mathbb{R}^{n_\nu} \rightarrow \mathbb{R}$ . As funções  $f^\nu$ ,  $g_i$  e  $h_{j^\nu}^\nu$  são convexas e continuamente diferenciáveis. O conjunto de estratégias de cada jogador  $\nu$  definido no problema (4.1) é

$$X^\nu(x^{-\nu}) = \{x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu} | g_i(x^\nu, x^{-\nu}) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) \leq 0, j^\nu = 1, \dots, l^\nu\}$$

O método apresentado trabalha com ponto viáveis que, satisfazem as restrições compartilhadas e as restrições próprias do problema (4.1), sendo o objetivo encontrar o equilíbrio normalizado  $x^*$  do GNEP.

Impõe-se que os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i^\nu$  das restrições compartilhadas são os mesmos para todos os jogadores. Então o sistema de condições de KKT concatenadas (3.22), que caracterizam a solução normalizada do problema (4.1), pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}\nabla_{x^\nu} L^\nu((x^\nu, x^{-\nu}), \lambda, \mu^\nu) &= 0, \\ \lambda_i g_i(x^\nu, x^{-\nu}) &= 0, \\ \mu_{j^\nu}^\nu h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) &= 0, \\ g_i(x^\nu, x^{-\nu}) &\leq 0, \\ h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) &\leq 0,\end{aligned}\tag{4.2}$$

para todo  $\nu = 1, \dots, N$ , com  $i = 1, \dots, m$  e  $j^\nu = 1, \dots, l^\nu$ .

Define-se a função  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $l = \sum_{\nu=1}^N l^\nu$ , como segue:

$$\mathcal{L}(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda, \mu^\nu) = \sum_{\nu=1}^N L^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda, \mu^\nu).\tag{4.3}$$

Em [34] o pseudo-gradiente é definido como  $\tilde{\nabla} \mathcal{L}(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda, \mu) = (\nabla_{x^\nu} L^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda, \mu^\nu))_{\nu=1}^N \in \mathbb{R}^n$ . Denote-se  $J_x \tilde{\nabla} \mathcal{L}(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda, \mu^\nu) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz Jacobiana do pseudo-gradiente de  $\mathcal{L}$ , que em geral é não simétrica.

A idéia principal é usar iterações tipo Newton para gerar uma sequência de pontos viáveis no interior do conjunto viável, convergindo à solução normalizada do GNEP. O seguinte sistema linear descreve uma iteração tipo Newton que resolve as condições concatenadas de KKT do problema (4.1).

$$\begin{bmatrix} B & \nabla g & \nabla H \\ \Lambda \nabla g^\top & G & 0 \\ M \nabla H^\top & 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 - x \\ \lambda_0 - \lambda \\ \mu_0 - \mu \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{\nabla} \mathcal{L} \\ G \lambda \\ H \mu \end{bmatrix}.\tag{4.4}$$

Onde

- $g = (g_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$ ,  $h = (h^\nu)_{\nu=1}^N \in \mathbb{R}^l$ ,
- $G = \text{diag}(g) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $H = \text{diag}(h) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ,

- $\nabla g \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $\nabla H$  é uma matriz por blocos definida da seguinte forma

$$\nabla H = \begin{bmatrix} \nabla_{x^1} h^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \nabla_{x^2} h^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \nabla_{x^N} h^N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times l}.$$

- As matrizes de multiplicadores de Lagrange das restrições compartilhadas e próprias são  $\Lambda = \text{diag}(\lambda) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , e  $M = \text{diag}(\mu) \in \mathbb{R}^{l \times l}$  for  $\mu = (\mu^\nu)_{\nu=1}^N \in \mathbb{R}^l$ , respectivamente.
- $B$  é definida como uma matriz diagonal por blocos simétrica e definida positiva.

Seja  $d_0 = x_0 - x$ . Segue do sistema linear (4.4) que

$$Bd_0 + \lambda_0^\top \nabla g + \mu_0^\top \nabla H = -\tilde{\nabla} \mathcal{F}, \quad (4.5)$$

$$\Lambda \nabla g^\top d_0 + G \lambda_0 = 0, \quad (4.6)$$

$$M \nabla H^\top d_0 + H \mu_0 = 0. \quad (4.7)$$

onde  $\tilde{\nabla} \mathcal{F} = (\nabla_{x^\nu} f^\nu(x^\nu, x^{-\nu}))_{\nu=1}^N \in \mathbb{R}^n$ .

Note-se que, em geral não sempre pode-se esperar um decrescimento de todas as funções  $f^\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu})$  em cada iteração, desde que, quando  $f^\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu})$  é menor que  $f^\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu})$ , um incremento de  $f^\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu})$  poderia ser requerido. Para evitar este inconveniente, é necessária, uma função potencial apropriada que sera reduzida em cada iteração do algoritmo.

Propõe-se uma função potencial para cada jogador  $\nu$ , da seguinte forma:

$$\Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) = \|\nabla_{x^\nu} L^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu)\|^2 \quad (4.8)$$

para cada  $\nu = 1, \dots, N$ .

Sera provado que quando  $(x^\nu, x^{-\nu})$  é estritamente viável, cada componente de  $d_0 = (d_0^1, \dots, d_0^N)$ , obtida pelo sistema (4.5)–(4.7) é uma direção de descida com respeito a cada  $\Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu)$ , para  $\nu = 1, \dots, N$ , respectivamente. Porém,  $d_0$  não é sempre uma direção viável. De fato, quando  $x$  está na fronteira de  $X$ , segue de (4.6)–(4.7) que  $d_0$  é tangente a  $X$ . Assim, dependendo da curvatura da fronteira de  $X$ ,  $d_0$  pode apontar fora da região viável. Para evitar esta dificuldade e obter uma direção viável para o GNEP será usada a mesma idéia de [16], onde deve-se calcular uma perturbação da direção mediante a resolução de um sistema linear (4.5)–(4.7)

com um termo apropriado no lado direito:

$$Bd + \lambda^\top \nabla g + \mu^\top \nabla H = -\tilde{\nabla} \mathcal{F}, \quad (4.9)$$

$$\Lambda \nabla g^\top d + G\lambda = -\rho\lambda, \quad (4.10)$$

$$M \nabla H^\top d + H\mu = -\rho\mu, \quad (4.11)$$

onde  $\rho \in \mathbb{R}_+$ .

A solução do sistema linear (4.9)-(4.11) pode também ser obtida mediante a solução de (4.5)-(4.7) e um sistema linear adicional

$$Bd_1 + \lambda_1^\top \nabla g + \mu_1^\top \nabla H = 0, \quad (4.12)$$

$$\Lambda \nabla g^\top d_1 + G\lambda_1 = -\lambda, \quad (4.13)$$

$$M \nabla H^\top d_1 + H\mu_1 = -\mu, \quad (4.14)$$

onde,  $d_1$  devolve a viabilidade. Então, segue que

$$d = d_0 + \rho d_1, \quad (4.15)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \rho \lambda_1, \quad (4.16)$$

$$\mu = \mu_0 + \rho \mu_1. \quad (4.17)$$

Uma busca linear de Armijo para cada jogador é executada baseada em cada função potencial. Consequentemente, sob algumas hipóteses, na seguinte seção, será provado que cada componente  $d_0^\nu$  da direção  $d_0$  é uma direção de descida de cada função potencial (4.8), isto é  $d_0^{\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) < 0$ .

Seguidamente, procura-se pelo valor de  $\rho$ , tal que a condição

$$\nabla_{x^\nu} \Theta_\nu^\top(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) d^\nu \leq \xi \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu^\top(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) d_0^\nu \quad (4.18)$$

seja satisfeita para  $\xi \in (0, 1)$ . Finalmente, calcula-se

$$\rho_\nu \leq (\xi - 1) \frac{d_0^{\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu)}{d_1^{\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu)}. \quad (4.19)$$

para qualquer  $\nu = 1, \dots, N$ , quando  $d_1^{\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) > 0$ . Por outro lado, (4.18) é verificado para qualquer número positivo  $\rho_\nu$ . Então, escolhe-se

$$\rho = \min\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\}. \quad (4.20)$$

Portanto, cada  $d^\nu$  é uma direção de descida para  $\Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu)$ .

## 4.1 Algoritmo de ponto interior para o GNEP

Nesta seção, será descrito o algoritmo e a convergência global sob diversas hipóteses requeridas.

Seja  $a > 0$  tal que  $X_a^\nu(x^{-\nu}) = \{x^\nu \in X^\nu(x^{-\nu}) | \Theta_\nu(\cdot, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) \leq a\}$  é não vazio para cada jogador  $\nu$  e para  $\lambda_0, \mu_0$  limitados. Então,  $X_a := \prod_{\nu=1}^N X_a^\nu(x^{-\nu})$  é o conjunto comum de estratégias com  $\Theta_\nu \leq a$ .

O presente algoritmo é estabelecido da seguinte forma:

**Parâmetros.**  $\xi \in (0, 1)$ ,  $\eta \in (0, 1)$ ,  $\beta > 0$ , e  $v \in (0, 1)$ .

**Dados Iniciais.**  $x \in \text{int}(X_a)$ , e uma matriz definida positiva  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Passo 1.** Calcule-se a direção de descida  $d_0$  e a direção de busca  $d$ .

1. Calcule-se  $(d_0, \lambda_0, \mu_0)$  mediante a solução de (4.5)-(4.7) e  $(d_1, \lambda_1, \mu_1)$  mediante a solução de (4.12)-(4.14).

Se  $d_0 = 0$ , Parar.

2. Calcule-se o pseudo-gradiente de (4.8) e os escalares positivos  $\rho_\nu$ ,  $\nu = 1, \dots, N$ , tal que:

$$\rho_\nu = \min \left\{ \beta \|d_0^\nu\|^2, (\xi - 1) \frac{d_0^{\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu)}{d_1^{\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu)} \right\}, \quad (4.21)$$

se  $d_1^{\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) > 0$ . Por outro lado:

$$\rho_\nu = \beta \|d_0^\nu\|^2. \quad (4.22)$$

Escolhe-se  $\rho$  como (4.20).

3. Calcule-se a direção de busca  $d$ .

$$d = d_0 + \rho d_1 \quad (4.23)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \rho \lambda_1 \quad (4.24)$$

$$\mu = \mu_0 + \rho \mu_1 \quad (4.25)$$

**Passo 2.** Busca linear. Encontrar  $t$ , o primeiro elemento de  $\{1, v, v^2, v^3, \dots\}$  tal que as seguintes condições sejam satisfeitas para todo  $\nu$ ,

$$\Theta_\nu(x^\nu + td^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) \leq \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) + \eta td^{\nu^\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) \quad (4.26)$$

$$g_i(x^\nu + td^\nu, x^{-\nu}) < 0, \text{ se } \lambda_i \geq 0 \quad (4.27)$$

$$g_i(x^\nu + td^\nu, x^{-\nu}) \leq g_i(x^\nu, x^{-\nu}), \text{ se } \lambda_i < 0 \quad (4.28)$$

$$h_{j^\nu}^\nu(x^\nu + td^\nu) < 0, \text{ se } \mu_{j^\nu}^\nu \geq 0 \quad (4.29)$$

$$h_{j^\nu}^\nu(x^\nu + td^\nu) \leq h_{j^\nu}^\nu(x^\nu), \text{ se } \mu_{j^\nu}^\nu < 0. \quad (4.30)$$

**Passo 3.** Atualizações.

1. Calcule-se  $(x^\nu, x^{-\nu}) := (x^\nu, x^{-\nu}) + td$ .
2. Defina-se novos valores para  $B$ ,  $\Lambda$ , e  $M$  que verifiquem as hipóteses (4.7)-(4.9)
3. Ir ao passo 1. □

Define-se agora uma condição de regularidade para o GNEP e introduz-se algumas hipóteses que são requeridas para provar a convergência global do algoritmo.

Denote-se  $I(x^\nu, x^{-\nu}) = \{i / g_i(x^\nu, x^{-\nu}) = 0\}$  e  $J^\nu(x^\nu) = \{j^\nu / h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) = 0\}$ , aos conjuntos de índices das restrições compartilhadas e próprias, respectivamente.

**Definição 4.1.** Um ponto  $(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}) \in \mathbb{R}^n$  é um ponto regular do problema (4.1) se a união dos conjuntos  $\nabla g_i(x^\nu, x^{-\nu})$  para  $i \in I(x^\nu, x^{-\nu})$  e  $\nabla h_{j^\nu}^\nu(x^\nu)$  para  $j^\nu \in J^\nu(x^\nu)$ , e  $\nu = 1, \dots, N$  constitui um conjunto linearmente independente. □

No estudo da convergência global do presente algoritmo, prova-se que  $d^{k,\nu}$  é uma direção de descida da função  $\Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu)$  com  $\lambda_0$  e  $\mu_0^\nu$  fixos. Porém, não pode ser garantido que  $\Theta_\nu(x^{k+1,\nu}, x^{k+1,-\nu}, \lambda_0^{k+1}, \mu_0^{k+1,\nu}) < \Theta_\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu})$ . Assim,  $(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^k)$  não são necessariamente conjuntos compactos. Agora, assume-se que todas as iterações estão em  $X_a$ .

**Hipótese 4.1.** Existe um número real  $a$  tal que  $X_a^\nu(x^{-\nu})$  são conjuntos compactos e  $\text{int}(X_a^\nu(x^{-\nu})) \neq \emptyset$ . Além disso, todas as iterações pertencem a  $X_a$ . □

Como consequência da hipótese prévia pode-se deduzir que a sequência  $\{(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu})\}$  tem pontos de acumulação e, desde os sistemas lineares (4.5)-(4.7) e (4.12)-(4.14), que  $\{\lambda_0^k\}$  e  $\{\mu_0^k\}$  são limitados.

**Hipótese 4.2.** Se  $x^\nu \in \text{int}(X_a^\nu(x^{-\nu}))$  então  $g_i(x^\nu, x^{-\nu}) < 0$  and  $h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) < 0$ . □

**Hipótese 4.3.**  $f^\nu, g_i, h_{j^\nu}^\nu$  pertencem a  $\mathcal{C}^3(X_a^\nu(x^{-\nu}))$ . □

**Hipótese 4.4.** As funções  $f^\nu$  são convexas sobre a variável  $x^\nu$  para todo  $x^{-\nu}$ . □

**Hipótese 4.5.** [Condição de Regularidade] Para todo  $(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}) \in X_a$  e para todo  $i \in I(x^\nu, x^{-\nu})$  e  $j^\nu \in J^\nu(x^\nu)$  os vetores  $\nabla g_i(x^\nu, x^{-\nu})$  e  $\nabla h_{j^\nu}^\nu(x^\nu)$  são linearmente independentes. □

**Hipótese 4.6.** O equilíbrio normalizado  $x^*$  é um ponto regular de (4.1). □

A busca linear é uma extensão da regra de Armijo para o problema de equilíbrio generalizado, [14]. Agora, introduz-se algumas hipóteses sobre o algoritmo.

**Hipótese 4.7.** Existe  $\lambda^I, \lambda^S, \mu^{\nu I}, \mu^{\nu S} \in \mathbb{R}_+$  tal que  $\lambda^I \leq \lambda_i \leq \lambda^S$  e  $\mu^{\nu I} \leq \mu_{j^\nu}^\nu \leq \mu^{\nu S}$ , para todo  $\nu = 1, \dots, N$ . □

Propoe-se agora uma particular estrutura para  $B$ . Define-se  $B$  como uma matriz diagonal por blocos, onde cada bloco é  $B^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu \times n_\nu}$  e uma nova hipótese é acrescentada.

**Hipótese 4.8.** Existe  $\sigma_1^\nu, \sigma_2^\nu \in \mathbb{R}_+$  tal que

$$\sigma_1^\nu \|d^\nu\|^2 \leq d^{\nu\top} B^\nu d^\nu \leq \sigma_2^\nu \|d^\nu\|^2, \quad \forall \nu = 1, \dots, N.$$

□

## 4.2 Convergência Global

Nesta seção, prova-se sob diversas hipóteses (4.1)–(4.8) que, para qualquer ponto inicial  $(x^{0,\nu}, x^{0,-\nu}) \in \text{int}(X_a)$ , a sequência  $\{(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu})\}$  gerada pelo algoritmo converge ao equilíbrio normalizado do problema (4.1).

Primeiro, é necessário provar que o sistema (4.5)–(4.7) seja bem definido, isto é, que o sistema linear tem a solução única. Para esta demonstração, é suficiente provar que o sistema homogêneo derivado de (4.4) possui só a solução trivial. Pode-se adaptar a prova da referência [32] para o sistema linear (4.4) com restrições próprias e compartilhadas. No lema 4.2 prova-se que cada componente  $d^\nu$  de  $d$  é uma direção viável e de descida para a função potencial  $\Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu)$ , para cada  $\nu$ . No lema 4.3 prova-se que em um número finito de iterações, é sempre possível encontrar um passo de longitude  $t > 0$  tal que as condições (4.26)–(4.30) são satisfeitas. O lema 4.4 mostra que qualquer ponto de acumulação da sequência gerada pelo algoritmo é um ponto estacionário do problema (4.1), isto é, um ponto regular tal que existe  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  e  $\mu^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}$  que satisfaz (4.2). No teorema 4.1 mostra-se que qualquer ponto de acumulação da sequência gerada pelo algoritmo é um ponto de KKT do problema (4.1).

**Lema 4.1.** *Seja um ponto  $x^\nu \in X_a^\nu(x^{-\nu})$ , qualquer conjunto de matrizes definidas positivas  $B^\nu$ , com  $B = \text{diag}((B^\nu)_{\nu=1}^N)$ , e qualquer  $\lambda_i > 0$  e  $\mu_{j^\nu}^\nu > 0$ , onde  $\nu = 1, \dots, N$ . A matriz (4.5)-(4.7) é não singular.*

*Demonstração.* O seguinte sistema linear é considerado a partir de (4.5)-(4.7).

$$B\bar{d} + \nabla g(x^\nu, x^{-\nu})\bar{\lambda} + \nabla H(x^\nu, x^{-\nu})\bar{\mu} = 0, \quad (4.31)$$

$$\Lambda \nabla g^\top(x^\nu, x^{-\nu})\bar{d} + G(x^\nu, x^{-\nu})\bar{\lambda} = 0, \quad (4.32)$$

$$M \nabla H^\top(x^\nu, x^{-\nu})\bar{d} + H(x^\nu, x^{-\nu})\bar{\mu} = 0, \quad (4.33)$$

e de (4.32)-(4.33), obtém-se

$$\nabla g_i^\top(x^\nu, x^{-\nu})\bar{d} = -\frac{\bar{\lambda}_i}{\lambda_i} g_i(x^\nu, x^{-\nu}), \quad (4.34)$$

$$\nabla_{x^\nu} h_{j^\nu}^\nu(x^\nu)\bar{d} = -\frac{\bar{\mu}_{j^\nu}^\nu}{\mu_{j^\nu}^\nu} h_{j^\nu}^\nu(x^\nu). \quad (4.35)$$

Multiplicando (4.31) por  $\bar{d}^\top$ ,

$$\bar{d}^\top B\bar{d} + \bar{d}^\top \nabla g(x^\nu, x^{-\nu})\bar{\lambda} + \bar{d}^\top \nabla H(x^\nu, x^{-\nu})\bar{\mu} = 0.$$

Substituindo (4.34) e (4.35)

$$\bar{d}^\top B\bar{d} - \sum_{i=1}^m \frac{(\bar{\lambda}_i)^2}{\lambda_i} g_i(x^\nu, x^{-\nu}) - \sum_{\nu=1}^N \sum_{j^\nu=1}^{l^\nu} \frac{(\bar{\mu}_{j^\nu}^\nu)^2}{\mu_{j^\nu}^\nu} h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) = 0. \quad (4.36)$$

Pela hipótese 4.7,  $\lambda_i > 0$  e  $\mu_{j^\nu}^\nu > 0$ , então pela equação anterior,

$$\bar{d}^\top B\bar{d} \leq 0.$$

Note-se que  $B$  é uma matriz definida positiva pela hipótese 4.8, então  $\bar{d} = \bar{0}$ .

Por outro lado, de (4.36) tem-se

$$\sum_{i=1}^m \frac{(\bar{\lambda}_i)^2}{\lambda_i} g_i(x^\nu, x^{-\nu}) + \sum_{\nu=1}^N \sum_{j^\nu=1}^{l^\nu} \frac{(\bar{\mu}_{j^\nu}^\nu)^2}{\mu_{j^\nu}^\nu} h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) = 0.$$

Segue das condições da busca linear e pela hipótese 4.7 que  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}^\nu) = \bar{0}$ , quando  $i \notin I(x^\nu, x^{-\nu})$  e  $j^\nu \notin J^\nu(x^\nu)$ .

Agora, analisa-se o caso quando  $i \in I(x^\nu, x^{-\nu})$  e  $j^\nu \in J^\nu(x^\nu)$ , e de (4.31) tem-se que

$$\sum_{i \in I(x^\nu, x^{-\nu})} \nabla g_i(x^\nu, x^{-\nu})^\top \bar{\lambda}_i + \sum_{\nu=1}^N \sum_{j^\nu \in J^\nu(x^\nu)} \nabla h_{j^\nu}^\nu(x^\nu)^\top \bar{\mu}_{j^\nu}^\nu = 0, \quad (4.37)$$

Finalmente, pela hipótese (4.5) de regularidade  $(\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_{j\nu}^\nu) = \bar{0}$ .  $\square$

Consideramos agora o caso particular quando  $d_0 = 0$ , neste caso o algoritmo pára. De (4.5)-(4.7) tem-se que

$$\lambda_0^\top \nabla g + \mu_0^\top \nabla H = -\tilde{\nabla} \mathcal{F}, \quad (4.38)$$

$$G\lambda_0 = 0, \quad (4.39)$$

$$H\mu_0 = 0. \quad (4.40)$$

Pela hipótese 4.2 e a busca linear todas as iterações são estritamente viáveis. De (4.39) e (4.40), tem-se que  $\lambda_0 = 0$  e  $\mu_0 = 0$ . Por tanto, por (4.38),  $\tilde{\nabla} \mathcal{F} = 0$ . Então  $x$  é um ponto de KKT.

De agora em diante, será estudado o caso em que o algoritmo nunca mais pára. No seguinte lema, prova-se que o vetor  $d^\nu$  é uma direção de descida e viável para a função potencial  $\Theta_\nu$ , para cada  $\nu = 1, \dots, N$ .

Adicionalmente, precisamos de uma hipótese sobre as matrizes  $B^\nu$ .

**Hipótese 4.9.** *O produto  $(B^\nu)^{-1} \nabla_{x^\nu x^\nu}^2 L^\nu$  é uma matriz definida positiva em cada iteração. Isto é satisfeito, por exemplo, se  $B^\nu$  é a matriz  $\nabla_{x^\nu x^\nu}^2 L^\nu$  ou simplesmente a matriz identidade, para  $\nu = 1, \dots, N$ .*  $\square$

Note-se,  $\nabla_{x^\nu x^\nu}^2 L^\nu$  é definido positivo pela hipótese de convexidade sobre as funções  $f^\nu$ ,  $g_i$  e  $h_{j\nu}^\nu$ .

**Lema 4.2.** *As direções  $d_0^k$  e  $d^k$  satisfazem as seguintes desigualdades*

$$d^{\nu k \top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^k) \leq d_0^{\nu k \top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^k) \leq 0, \quad (4.41)$$

para todo  $\nu = 1, \dots, N$ .

*Demonstração.* De (4.5), tem-se

$$B^{k,\nu} d_0^{k,\nu} + \nabla_{x^\nu} g_i(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu})^\top \lambda_0^k + \nabla_{x^\nu} h^\nu(x^{k,\nu})^\top \mu_0^{k,\nu} = -\nabla_{x^\nu} f^\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}) \quad (4.42)$$

para todo  $\nu = 1, \dots, N$ , e multiplicando (4.42) por  $d_0^{k,\nu \top}$ , obtém-se

$$d_0^{k,\nu \top} B^{k,\nu} d_0^{k,\nu} + d_0^{k,\nu \top} \nabla_{x^\nu} g(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu})^\top \lambda_0^k + d_0^{k,\nu \top} \nabla_{x^{k,\nu}} h^{\nu \top}(x^{k,\nu}) \mu_0^k = -d_0^{k,\nu \top} \nabla_{x^\nu} f^\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}) \quad (4.43)$$

para todo  $\nu = 1, \dots, N$ . Novamente, por (4.42)

$$d_0^{k,\nu} = -(B^{k,\nu})^{-1} \nabla_{x^\nu} L^\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}), \quad (4.44)$$

para todo  $\nu = 1, \dots, N$ . Por outro lado, pela definição de  $\Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu)$ , tem-se

$$\nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) = 2\nabla_{x^\nu x^\nu}^2 L^\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) \nabla_{x^\nu} L^\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}). \quad (4.45)$$

Segue de (4.44)–(4.45) que

$$\begin{aligned} d_0^{k,\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) = \\ -2\nabla_{x^\nu} L^{\nu\top}(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) (B^{k,\nu})^{-1} \nabla_x^2 L^\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) \nabla_{x^\nu} L^\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Pela hipótese 4.9 a desigualdade  $d_0^{k,\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) \leq 0$  é satisfeita para todo  $\nu = 1, \dots, N$ . Por tanto,  $\sum_{\nu=1}^N d_0^{k,\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu})$  implica que

$$d_0^\top \tilde{\nabla} \Theta(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0) \leq 0. \quad (4.47)$$

Assim também, precisa-se provar que  $d^{k,\nu}$  é uma direção de descida de  $\Theta_\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu})$ , para todo  $\nu = 1, \dots, N$ . Para isto, emprega-se (4.23) de  $d$ , então tem-se

$$\begin{aligned} d^{k,\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) = \\ d_0^{k,\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) + \rho_k^k d_1^{k,\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Agora, analisa-se dois casos. O primeiro quando  $d_1^{k,\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) \leq 0$ , e pode-se escolher qualquer valor positivo para  $\rho_{k,\nu}$ . Por outro lado,  $\rho_{k,\nu}$  é definido em (4.19). Finalmente, escolhe-se  $\rho$  como em (4.20).  $\square$

**Lema 4.3.** *Existe  $\tau > 0$  tal que para qualquer  $x^\nu \in X_a^\nu(x^{-\nu})$  e  $d^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}$  calculado pelo algoritmo, as condições (4.26)–(4.30) são satisfeitas para qualquer  $t^\nu \in [0, \tau]$ .*

*Demonstração.* Segue das hipóteses (4.1)–(4.3) que  $\Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu)$  pertencem a  $\mathcal{C}^2(X_a^\nu(x^{-\nu}))$ , para todo  $\nu = 1, \dots, N$ , e pode-se aplicar a aproximação de Taylor com resíduo integral. Então, obtém-se

$$\begin{aligned} \Theta_\nu(x^\nu + t^\nu d^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) = & \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) + t^\nu d^{\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) \\ & + \int_0^{t^\nu} \frac{1}{2} d^{\nu\top} \nabla_{x^\nu x^\nu}^2 \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) d^\nu (t^\nu - s) ds. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Segue da hipótese 4.3 que existe um  $k_\nu \geq \|\nabla_{x^\nu x^\nu}^2 \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu)\|$ , para

$x^\nu \in \text{int}(X_a^\nu(x^{-\nu}))$ . Então

$$\Theta_\nu(x^\nu + t^\nu d^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) \leq \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) + t^\nu d^{\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu) + k_\nu t^{\nu^2} \|d^\nu\|^2, \quad (4.50)$$

para qualquer  $[x^\nu, x^\nu + t^\nu d^\nu] \in X_a^\nu(x^{-\nu})$ . Assim, a condição (4.26) é satisfeita para qualquer  $t^\nu$  tal que

$$t^\nu \leq \frac{(\eta - 1) d^{\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, \lambda_0, \mu_0^\nu)}{k_\nu \|d^\nu\|^2}. \quad (4.51)$$

Pela definição de  $d$  e a hipótese (4.8), pode-se escrever

$$t^\nu \leq \frac{(1 - \eta) \xi \sigma_1^\nu}{k_\nu (\delta^\nu)^2}, \quad (4.52)$$

com  $\delta^\nu > 1$ . Portanto, para todo  $\nu$  existe um  $\tau_\nu > 0$ , então pode-se tomar  $\tau = \min\{\tau_\nu\}$ ,  $\tau > 0$ . As condições (4.27)–(4.30) que envolvem as restrições podem ser provadas usando o mesmo caminho que em [14].  $\square$

Agora, pode-se dizer que qualquer sequência gerada pelo algoritmo é contida no conjunto compacto  $X_a^\nu$ . Por tanto, a sequência tem pontos de acumulação em  $\text{int}(X_a^\nu)$ .

**Lema 4.4.** *Qualquer ponto de acumulação  $x^* = (x^{*,1}, \dots, x^{*,\nu}, \dots, x^{*,N})$  da sequência  $\{x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}\}$  gerada pelo algoritmo é um ponto estacionário do problema (4.1). Além disso,  $(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}, \lambda_0(x^*), \mu_0(x^*))$  constitui um vetor estacionário do problema (4.1). Chame-se  $\lambda_0^* = \lambda_0(x^*)$  e  $\mu_0^* = \mu_0(x^*)$ .*

*Demonstração.* Desde que  $(B^\nu)_{\nu=1}^N$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$ , e  $\mu^\nu$ , para todo  $\nu = 1, \dots, N$ , são limitadas, existe uma sequência  $\{x^k\}_{k \in K}$ , onde  $K \subset \mathbb{N}$  que convergem a  $x^*$ . Então existe uma subsequência  $\{x^k, \lambda^k, \mu^{k,\nu}, B^k, \rho^k\}_{k \in K}$  que converge a  $\{x^*, \lambda^*, \mu^*, B^*, \rho^*\}$ .

Desde que  $d$  depende continuamente de  $x, \lambda, \mu, B$ , e  $\rho$ , então  $\{d^k\}_{k \in K} \rightarrow d^*$ , onde  $d^* = d(x^*, \lambda^*, \mu^*, B^*, \rho^*)$ .

Agora, considere-se uma sequência convergente em  $K_1 \subset K$ , tal que  $\{t^k\}_{k \in K_1} \rightarrow t^*$ , e como  $t^k$  é limitado inferiormente por um número positivo pelo Lema 4.3, e  $t^* > 0$ . Pela condição (4.26), pode-se escrever

$$\Theta_\nu(x^{k+1,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) \leq \Theta_\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) + t^k \eta d^{k,\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{k,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) \quad (4.53)$$

para todo  $\nu = 1, \dots, N$ .

Agora, toma-se o limite quando  $k \rightarrow \infty$ . E tem-se

$$\Theta_\nu(x^{*,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) \leq \Theta_\nu(x^{*,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) + t^* \eta d^{*,\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{*,\nu}, x^{k,-\nu}, \lambda_0^k, \mu_0^{k,\nu}) \quad (4.54)$$

com  $\eta \in (0, 1)$ .

$$\Theta_\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}, \lambda_0^*, \mu_0^{*,\nu}) \leq \Theta_\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}, \lambda_0^*, \mu_0^{*,\nu}) + t^* \eta d^{k,\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}, \lambda_0^*, \mu_0^{*,\nu}) \quad (4.55)$$

com  $\eta \in (0, 1)$ . Assim, a seguinte desigualdade é satisfeita

$$d^{*,\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}, \lambda_0^*, \mu_0^{*,\nu}) \geq 0. \quad (4.56)$$

Por outro lado, pelo Lema 4.2

$$d^{*,\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}, \lambda_0^*, \mu_0^{*,\nu}) \leq \xi d_0^{*,\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}, \lambda_0^*, \mu_0^{*,\nu}) \leq 0. \quad (4.57)$$

Então, de (4.56)-(4.57)

$$d^{*,\nu\top} \nabla_{x^\nu} \Theta_\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}, \lambda_0^*, \mu_0^{*,\nu}) = 0. \quad (4.58)$$

Por tanto, pela equação (4.46)

$$\nabla_{x^\nu} L^\nu(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}, \lambda_0^*, \mu_0^{*,\nu}) = 0,$$

para todo  $\nu = 1, \dots, N$ . □

Pelo lema 4.5 em [14], pode-se garantir que qualquer ponto de acumulação da sequência gerada pelo algoritmo é um ponto estacionário do problema (4.1), e precisa-se assumir que este ponto estacionário é um ponto isolado ou um conjunto compacto isolado com as mesmas restrições ativas.

**Teorema 4.1.** *Qualquer ponto de acumulação  $(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu})$  de uma sequência gerada pelo algoritmo é um ponto de KKT.*

*Demonstração.* Seja  $(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu})$  um ponto de acumulação da sequência gerada pelo algoritmo. Pelo lema 4.4  $x^*$  é um ponto estacionário. Além disso, um vetor  $(x^{*,\nu}, x^{*,-\nu}, \lambda_0^*, \mu_0^*)$  constitui um ponto estacionário. Assim, é só necessário provar que os multiplicadores de Lagrange são não negativos.

Novamente, pelo lema 4.4, tem-se que no limite  $d_0 = 0$ . De (4.6)–(4.7), tem-se

$$G(x^{*,\nu}, x^{*, -\nu})\lambda_0^* = 0, \quad (4.59)$$

$$H(x^{*,\nu}, x^{*, -\nu})\mu_0^* = 0, \quad (4.60)$$

Aqui, tem-se dois casos. O primeiro quando  $g_i(x^{*,\nu}, x^{*, -\nu}) < 0$ ,  $h_{j\nu}^\nu(x^{*,\nu}) < 0$ , então  $\lambda_{0i}^* = 0$  e  $\mu_{0j\nu}^{*,\nu} = 0$ .

No segundo caso, é necessário analisar as restrições ativas. Considere-se  $g_h(x^{*,\nu}, x^{*, -\nu})$  e  $h_{p\nu}^\nu(x^{*,\nu})$ , tal que  $h \in I(x^{*,\nu}, x^{*, -\nu})$  e  $p^\nu \in J^\nu(x^{*,\nu})$ . A prova sera por contradição, então assume-se que  $\lambda_{0h}(x^{*,\nu}, x^{*, -\nu}) = \lambda_{0h}^* < 0$ ,  $\mu_{0p\nu}^\nu(x^{*,\nu}) = \mu_{0p\nu}^{*,\nu} < 0$ .

Agora, pelas equações (4.24)–(4.25),  $\lambda_h^* = \lambda_{0h}^* < 0$  e  $\mu_{0p\nu}^{*,\nu} < 0$ , pois  $\rho$  depende dos valores de  $d_0$ . Como o método usado é estritamente viável, tem-se que  $g_h(x^{k,\nu}, x^{k, -\nu}) < 0$  e  $h_{p\nu}^\nu(x^{k,\nu}) < 0$  em cada iteração, para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Por tanto, escolhe-se uma subsequência crescente  $\{(x^{k,\nu}, x^{k, -\nu})\}_{k \in K_1}$ ,  $K_1 \subset K$  que converge a  $(x^{*,\nu}, x^{*, -\nu})$ , isto é

$$g_h(x^{k,\nu}, x^{k, -\nu}) > g_h(x^{k-1,\nu}, x^{k-1, -\nu}) \quad (4.61)$$

$$h_{p\nu}^\nu(x^{k,\nu}) > h_{p\nu}^\nu(x^{k-1,\nu}) \quad (4.62)$$

para todo  $k \in K_1$ . Como  $\lambda^* < 0$  e  $\mu_{p\nu}^{*,\nu} < 0$  para  $k \in K_1$  grande o suficiente verifica-se que  $\lambda^k < 0$  e  $\mu_{p\nu}^{k,\nu} < 0$ .

Pela condição de Armijo (4.28) e (4.30), tem-se que

$$g_h(x^{k,\nu}, x^{k, -\nu}) \leq g_h(x^{k-1,\nu}, x^{k-1, -\nu}) \quad (4.63)$$

$$h_{p\nu}^\nu(x^{k,\nu}) \leq h_{p\nu}^\nu(x^{k-1,\nu}) \quad (4.64)$$

Mas isto contradiz as desigualdades (4.61) e (4.62). Por tanto,  $\lambda_{0h}^* \geq 0$  and  $\mu_{p\nu}^{*,\nu} \geq 0$  e o vetor  $(x^{*,\nu}, x^{*, -\nu}, \lambda_0^*, \mu_0^*)$  é um vetor de KKT do problema (4.1).  $\square$

## Capítulo 5

# Um Método de Pontos Interiores com Função Potencial Global

Neste capítulo apresentamos um algoritmo de pontos interiores e direções viáveis que converge para o equilíbrio de Nash normalizado do GNEP. Ao contrário do capítulo anterior, vamos trabalhar com uma única função potencial, que será utilizada na busca linear. Além disso, sob certas hipóteses conseguimos provar a convergência global do algoritmo que será aplicado no seguinte GNEP.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x^\nu} & f^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \\ \text{s.a.} & g_i(x^\nu, x^{-\nu}) \leq 0, \ i = 1, \dots, m, \\ & h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) \leq 0, \ j^\nu = 1, \dots, l^\nu, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

para todo  $\nu = 1, \dots, N$ .

- As funções  $f^\nu(x^\nu, x^{-\nu}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h_{j^\nu}^\nu : \mathbb{R}^{n_\nu} \rightarrow \mathbb{R}$  são convexas e continuamente diferenciáveis duas vezes.
- $X^\nu(x^{-\nu}) = \{x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu} | g_i(x^\nu, x^{-\nu}) \leq 0, \ i = 1, \dots, m, \ h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) \leq 0, \ j^\nu = 1, \dots, l^\nu\}$  é o conjunto de estratégias de cada jogador  $\nu$  para o problema (5.1).
- $g_i$  representam as restrições compartilhadas e  $h_{j^\nu}^\nu$  as restrições próprias de cada jogador  $\nu$ .

### 5.1 Idéias principais para o desenvolvimento do presente Algoritmo

Nesta seção procura-se o equilíbrio normalizado do GNEP (5.1) mediante a solução das condições de KKT concatenadas.

As funções de Lagrange do problema (5.1), onde  $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $\mu^\nu \in \mathbb{R}_+^{l^\nu}$  são definidas por (3.20) e as condições de KKT são definidas por (4.2) adicionando que

$$\lambda_i \geq 0 \text{ e } \mu_{j^\nu}^\nu \geq 0, \quad (5.2)$$

para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $j^\nu = 1, \dots, l^\nu$ .

Para simplificar usaremos  $x$  em lugar de  $(x^\nu, x^{-\nu})$ . O algoritmo gera uma sequência de pontos estritamente viáveis no interior do conjunto viável definido da seguinte forma

$$\Omega := \{z = (x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \mid g(x) \leq 0, h(x) \leq 0, \lambda \geq 0, \mu \geq 0\}, \quad (5.3)$$

onde  $l = \sum_{\nu=1}^N l^\nu$ ,  $g(x) = (g_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$ , e  $h(x) = (h^\nu)_{\nu=1}^N \in \mathbb{R}^l$ . Esta sequência converge à solução normalizada do GNE.

Define-se o seguinte vetor

$$S(z) := S(x, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} F(x, \lambda, \mu) \\ G(x)\lambda \\ H(x)\mu \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

onde

- $F(x, \lambda, \mu) = (\nabla_{x^\nu} L^\nu(x, \lambda, \mu^\nu))_{\nu=1}^N \in \mathbb{R}^n$ .
- $G(x) = \text{diag}(g) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .
- $H(x) = \text{diag}(h) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ .

A solução do sistema de KKT concatenado é encontrada quando  $S(z) = 0$ .

O seguinte sistema linear descreve uma iteração de Newton que resolve  $S(x, \lambda, \mu) = 0$ .

$$\begin{bmatrix} \nabla_x F(x, \lambda, \mu) & \nabla g(x) & \nabla H(x) \\ \Lambda \nabla_x g^\top(x) & G & 0 \\ M \nabla_x H^\top(x) & 0 & H(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 - x \\ \lambda_0 - \lambda \\ \mu_0 - \mu \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F(x, \lambda, \mu) \\ G(x)\lambda \\ H(x)\mu \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Sendo que,

- As restrições estão representadas pelos seguintes termos:  
 $g(x) = (g_i(x))_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$ ,  $h(x) = (h^\nu_{j^\nu}(x^\nu))_{\nu=1}^N \in \mathbb{R}^l$ .
- A matriz diagonal  $G(x) = \text{diag}(g) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , e a matriz diagonal  $H(x) = \text{diag}(h) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ .

•

$$\nabla g = \begin{bmatrix} \nabla_{x^1} g_1 & \nabla_{x^1} g_2 & \dots & \nabla_{x^1} g_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla_{x^N} g_1 & \nabla_{x^N} g_2 & \dots & \nabla_{x^N} g_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}. \quad (5.6)$$

•

$$\nabla H = \begin{bmatrix} \nabla_{x^1} h_{j^1}^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \nabla_{x^2} h_{j^2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \nabla_{x^N} h_{j^N}^N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times l}. \quad (5.7)$$

- $\Lambda = \text{diag}(\lambda) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , e  $M = \text{diag}(\mu) \in \mathbb{R}^{l \times l}$  para  $\mu = (\mu^\nu)_{\nu=1}^N \in \mathbb{R}^l$  e  $\nabla_{x^\nu} h_{j^\nu}^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu \times l^\nu}$ , respectivamente.

Agora, pode-se escrever o sistema (5.5) da seguinte forma:

$$\nabla S(z) D_0 = -S(z). \quad (5.8)$$

Onde,

- $\nabla S(z) = \begin{bmatrix} \nabla_x F(x, \lambda, \mu) & \nabla g(x) & \nabla H(x) \\ \Lambda \nabla_x g^\top(x) & G & 0 \\ M \nabla_x H^\top(x) & 0 & H(x) \end{bmatrix}$  uma matriz quadrada de dimensão  $n + m + l$ .
- $D_0 = \begin{bmatrix} x_0 - x \\ \lambda_0 - \lambda \\ \mu_0 - \mu \end{bmatrix}$  e  $S(z) = \begin{bmatrix} F(x, \lambda, \mu) \\ G(x) \lambda \\ H(x) \mu \end{bmatrix}$  vetores de dimensão  $n + m + l$ .

Note-se que, em geral não pode-se esperar um decréscimo de todas as funções  $f^\nu(x)$  em cada iteração, desde que, quando  $f^\nu(x^k)$  é menor que  $f^\nu(x^*)$ , um incremento de  $f^\nu(x)$  poderia ser requerido. Para evitar este inconveniente, precisa-se uma função potencial apropriada tal que será reduzida em cada iteração no algoritmo. A função potencial pode ser usada também em problemas variacionais como em [12].

A função potencial proposta para verificar os critérios de convergência é definida como

$$\Theta(p, q, r) := \|p\|^2 + \varphi(q, r), \quad (p, q, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l, \quad (5.9)$$

onde  $\varphi(q, r) = - \left( \sum_{i=1}^m q_i + \sum_{j=1}^l r_j \right)$ .

Agora, aplica-se a função potencial sobre o vetor  $S(z)$  e tem-se que

$$\Theta(S(z)) = \Theta(S(x, \lambda, \mu)) = \|F(x, \lambda, \mu)\|^2 + \varphi((G(x)\lambda, H(x)\mu)), \quad (5.10)$$

onde  $\varphi((G(x)\lambda, H(x)\mu)) = - \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{\nu=1, j^\nu=1}^{N, l^\nu} \mu_{j^\nu}^\nu h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) \right)$ .

Prova-se que quando  $x$  é estritamente viável, a direção  $D_0$ , obtida pelo sistema (5.5) é uma direção de descida com respeito a  $\Theta(S(z))$ . Sem embargo,  $D_0$  não sempre é uma direção viável. De fato, quando  $z$  está na fronteira de  $\Omega$ , segue de (5.5) que  $D_0$  é tangente a  $\Omega$ . Assim, dependendo da curvatura da fronteira de  $\Omega$ ,  $D_0$  pode apontar fora do domínio viável. Para evitar esta dificuldade e obter uma direção viável para o GNEP, aplica-se a mesma idéia de [16] e introduz-se no sistema linear (5.5) um termo apropriado no lado direito:

$$\nabla S(z)D = -S(z) - \rho E, \quad (5.11)$$

onde  $\rho \in \mathbb{R}_+$  e  $E = [0_n \ \lambda \ \mu]^\top \in \mathbb{R}^{n+m+l}$ .

A solução do sistema linear (5.11) pode também ser obtido resolvendo o sistema linear (5.5) e o sistema auxiliar

$$\nabla S(z^k)D_1 = -E, \quad (5.12)$$

onde,  $D_1$  devolve a viabilidade. Então, segue que

$$D = D_0 + \rho D_1. \quad (5.13)$$

Pode-se reescrever (5.13) como

$$D = \begin{bmatrix} d \\ \bar{\lambda} \\ \bar{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ \lambda_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} d_1 \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Uma busca linear de Armijo será executada usando a função potencial (5.10).

Consequentemente, sob algumas hipóteses, na seguinte seção, prova-se que a direção  $D_0$  é uma direção de descida para a função potencial (5.10), isto é  $D_0^\top \nabla \Theta(S(z)) \leq 0$ . Seguidamente, procura-se por  $\rho$ , tal que a condição

$$\nabla \Theta(S(z))D \leq \xi \nabla \Theta(S(z))D_0 \quad (5.15)$$

é satisfeita para  $\xi \in (0, 1)$ . Finalmente, calcula-se

$$\rho \leq (\xi - 1) \frac{D_0^\top \nabla \Theta(S(z))}{D_1^\top \nabla \Theta(S(z))}, \quad (5.16)$$

no caso em que  $D_1^\top \nabla \Theta(S(z)) > 0$ . No caso contrario, (5.15) é verificada para qualquer  $\rho$  positivo. Em consequência,  $D$  é uma direção de descida para  $\Theta(S(z))$ .

## 5.2 Algoritmo de pontos interiores e direções viáveis proposto para a solução do GNEP

Nesta seção apresentamos o algoritmo proposto, as hipóteses necessárias para garantir a convergência e sua análise.

Para obter a convergência do algoritmo precisamos fazer as seguintes hipóteses sobre o problema (5.1). Considere-se  $a > 0$  tal que

$$\Omega_a := \{z = (x, \lambda, \mu) \in \Omega \mid \Theta(S(z)) \leq a\} \quad (5.17)$$

é não vazio para  $\lambda, \mu$  limitados.

**Hipótese 5.1.** *Existe um número real  $a$  tal que  $\Omega_a$  é um conjunto compacto e  $\text{int}(\Omega_a) \neq \emptyset$ .*  $\square$

Como uma consequência da hipótese anterior, pode-se deduzir que a sequência  $\{x^k\}$  tem pontos de acumulação e, desde que os sistemas lineares (5.8) e (5.12), que  $\{\lambda_0^k\}$  e  $\{\mu_0^k\}$  são limitados.

**Hipótese 5.2.** *Se  $z \in \text{int}(\Omega_a)$  então  $g_i(x) < 0$  e  $h_{j^\nu}^\nu(x^\nu) < 0$ , para todo  $i = 1, \dots, m$  e para todo  $j^\nu = 1, \dots, l^\nu$ .*  $\square$

**Hipótese 5.3.**  *$f^\nu, g_i, h_{j^\nu}^\nu$  pertencem a  $\mathcal{C}^2(\text{int}(\Omega_a))$ , para todo  $\nu = 1, \dots, N$ .  $\nabla F, \nabla g$ , e  $\nabla h$  satisfazem a condição de Lipschitz.*  $\square$

**Hipótese 5.4.** *As funções  $f^\nu, g$ , e  $h_{j^\nu}^\nu$  são convexas sobre a variável  $x^\nu$  para todo  $x^{-\nu}$  para cada  $\nu = 1, \dots, N$ .*  $\square$

### 5.2.1 Descrição do Algoritmo

O algoritmo é estabelecido como segue:

**Parâmetros.**  $\xi \in (0, 1)$ ,  $\eta \in (0, 1)$ ,  $\beta > 0$ , and  $v \in (0, 1)$ .

**Dados Iniciais.**  $z \in \text{int}(\Omega_a)$ .

**Passo 1.** Calcule-se a direção  $D_0$  e a direção de busca  $D$ .

1. Calcule-se  $D_0$  resolvendo

$$\nabla S(z)D_0 = -S(z). \quad (5.18)$$

e  $D_1$  resolvendo

$$\nabla S(z)D_1 = -E, \quad (5.19)$$

onde  $E = [0_n \ \lambda \ \mu]^\top \in \mathbb{R}^{n+m+l}$ .

Se  $\Theta(S(z)) = 0$ , parar.

2. Calcule-se o escalar positivo  $\rho$ , tal que:

$$\rho = \min \left\{ \beta \Theta^2(S(z)), (\xi - 1) \frac{D_0^\top \nabla \Theta(S(z))}{D_1^\top \nabla \Theta(S(z))} \right\}, \quad (5.20)$$

se  $D_1^\top \nabla \Theta(S(z)) > 0$ . Caso contrário:

$$\rho = \beta \Theta^2(S(z)). \quad (5.21)$$

3. Calcule-se a direção de busca  $D$  como

$$D = D_0 + \rho D_1. \quad (5.22)$$

**Passo 2.** Busca Linear. Encontrar  $t^k$ , o primeiro elemento de  $\{1, v, v^2, v^3, \dots\}$  tal que as seguintes condições sejam satisfeitas para todo  $\nu$ ,

$$\Theta(S(z^k + t^k D^k)) \leq \Theta(S(z^k)) + \eta t^k D^\top \nabla \Theta(S(z^k)), \quad (5.23)$$

$$g_i(x^k + t^k d^k) \leq 0, \text{ para qualquer } \bar{\lambda}_i^k \in \mathbb{R}, \quad (5.24)$$

$$h_i(x^k + t^k d^k) \leq 0, \text{ para qualquer } \bar{\mu}_i^k \in \mathbb{R}. \quad (5.25)$$

**Passo 3.** Atualização.

- i)  $z := z + tD$ .

ii) Definir novos valores para  $\Lambda$ , e  $M$ .

iii) Ir ao passo 1. □

A regra de busca linear é uma extensão da regra de Armijo para o GNEP, [14]. Agora, se introduzem algumas hipóteses sobre o algoritmo.

**Hipótese 5.5.** *Existem  $\lambda^I, \lambda^S, \mu^{\nu I}, \mu^{\nu S} \in \mathbb{R}_+$  tal que  $\lambda^I \leq \lambda_i \leq \lambda^S$  e  $\mu^{\nu I} \leq \mu_{j\nu}^{\nu} \leq \mu^{\nu S}$ , para todo  $\nu = 1, \dots, N$ .* □

**Hipótese 5.6.** *O gradiente  $S(z)$ ,  $\nabla S(z)$ , é não singular em  $\Omega_a$ .* □

### 5.3 Convergência do Algoritmo

Nesta seção, será provado sob as hipóteses (5.1)–(5.6), que para qualquer ponto inicial  $z^0 \in \text{int}(\Omega_a)$ , a sequência gerada pelo algoritmo converge para o ponto de equilíbrio normalizado do problema (5.1). Na sequência das demonstrações é necessário provar que o sistema (5.5) é bem definido, ou seja, que o sistema só aceita uma única solução. Para isto é suficiente para provar que o sistema tem uma solução trivial e isto é satisfeito pela hipótese 5.6. No lema 5.1 prova-se que  $D_0$  é uma direção de descenso da função potencial  $\Theta(S(z))$ .

**Lema 5.1.** *A direção  $D_0$  satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$D_0^{k\top} \nabla \Theta(S(z^k)) \leq 0. \quad (5.26)$$

*Demonstração.* Seja o gradiente da função potencial  $\Theta(S(z^k))$ ,  $\nabla \Theta(S(z^k)) \in \mathbb{R}^{n \times m \times l}$ ,

$$\nabla \Theta(S(z^k)) = [2F^\top(z^k) - \mathbb{1}_m - \mathbb{1}_l] \nabla S(z^k), \quad (5.27)$$

onde  $\mathbb{1}_m = (1 \dots 1)$  e  $\mathbb{1}_l = (1 \dots 1)$  vetores de dimensão  $m$  e  $l$ , respectivamente. Da equação (5.27) e do sistema linear (5.8), tem-se que

$$\nabla \Theta(S(z^k)) D_0^k = [2F^\top(z^k) - \mathbb{1}_m - \mathbb{1}_l] \nabla S(z^k) D_0^k = [2F^\top(z^k) - \mathbb{1}_m - \mathbb{1}_l] (-S(z^k)).$$

Usando a definição do vetor  $S(z^k)$  (5.4)

$$\begin{aligned} \nabla \Theta(S(z^k)) D_0^k &= [2F^\top(z^k) - \mathbb{1}_m - \mathbb{1}_l] [-F(z^k) - G(x^k)\lambda - H(x^k)\mu]^\top \\ &= -2\|F(z^k)\|^2 + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^k) + \sum_{\nu=1, j^\nu=1}^{N, l^\nu} \mu_{j^\nu}^\nu h_{j^\nu}^\nu(x^{\nu k}) \end{aligned}$$

Da definição da função potencial (5.10), segue que:

$$\begin{aligned}\nabla\Theta(S(z^k))D_0^k &= -2\|F(z^k)\|^2 + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^k) + \sum_{\nu=1, j^\nu=1}^{N, l^\nu} \mu_{j^\nu}^\nu h_{j^\nu}^\nu(x^{\nu k}) \\ &= -[\|F(z^k)\|^2 + \Theta(S(z^k))] \leq 0.\end{aligned}\tag{5.28}$$

Portanto,

$$\nabla\Theta(S(z^k))D_0^k \leq 0.\tag{5.29}$$

□

No lema 5.2, prova-se que  $D$  é uma direção viável e de descida para a função potencial  $\Theta(S(z))$ .

**Lema 5.2.** *As direções  $D_0^k$  e  $D^k$  satisfazem a seguinte desigualdade:*

$$D^{k\top} \nabla\Theta(S(z^k)) \leq \xi D_0^{k\top} \nabla\Theta(S(z^k)),\tag{5.30}$$

para  $\xi \in (0, 1)$ .

*Demonstração.* A partir de (5.22) tem-se que

$$D^{k\top} \nabla\Theta(S(z^k)) = D_0^{k\top} \nabla\Theta(S(z^k)) + \rho^k D_1^{k\top} \nabla\Theta(S(z^k)).$$

Pela definição de  $\rho$ , (5.20)-(5.21), a desigualdade (5.30) é satisfeita. □

Observe-se que, do sistema (5.11) e desde que  $z \rightarrow S(z)$ ,  $z \rightarrow \nabla S(z)$  e  $z \rightarrow \nabla S^{-1}(z)$  são contínuas pela hipótese 5.3, tem-se que  $D$  é limitado, o lema 5.3 mostra este fato.

**Lema 5.3.** *Existe  $\delta > 0$  tal que a direção de busca  $D^k$  calculada desde o algoritmo satisfaz*

$$\|D^k\|^2 \leq \delta \Theta(S(z^k)),\tag{5.31}$$

para qualquer  $z^k \in \Omega_a$ .

*Demonstração.* A partir do sistema linear (5.11), tem-se que

$$\|D^k\| = \|\nabla S(z^k)^{-1}(-S(z^k) - \rho E)\| \leq \|\nabla S(z^k)^{-1}\| \| -S(z^k) - \rho E \|.$$

Usando o fato de que  $\{\nabla S(z^k)^{-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$  é limitado, isto é,  $\|\nabla S(z^k)^{-1}\| \leq T$ , obtém-se

que

$$\|D^k\|^2 \leq T^2 \|- S(z^k) - \rho E\|^2 = T^2 (\|S(z^k)\|^2 + 2S(z^k)\rho E + \rho^2\|E\|^2). \quad (5.32)$$

Assim,

$$\|D^k\|^2 \leq T^2 (\|S(z^k)\|^2 + 2S(z^k)\rho E + \rho^2\|E\|^2). \quad (5.33)$$

Por definição  $S(z^k) = [F(x) \ G(x)\lambda \ H(x)\mu]^\top$ , assim substituímos na desigualdade anterior e tem-se que o lado direito de (5.33) é

$$= T^2 (\|F(z^k)\|^2 + \|G(x)\lambda\|^2 + \|H(x)\mu\|^2 + 2S(z^k)\rho E + \rho^2\|E\|^2). \quad (5.34)$$

Agora, como  $\|G(x)\lambda\|^2 + \|H(x)\mu\|^2 \leq \varphi^2(G(x)\lambda, H(x)\mu)$ , segue que (5.34) é

$$\leq T^2 (\|F(z^k)\|^2 + \varphi^2(G(x)\lambda, H(x)\mu) + 2\rho S^\top(z^k)E + \rho^2\|E\|^2) \quad (5.35)$$

A partir da definição da função potencial  $\Theta(S(z^k))$  (5.9) segue que  $\|F(z^k)\|^2 \leq \Theta(S(z^k))$ ,  $\varphi^2(G(x)\lambda, H(x)\mu) \leq \Theta^2(S(z^k))$ . Além disso pelas hipóteses 5.2 e 5.5 segue que  $S^\top(z^k)E = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{\nu=1, j^\nu=1}^{N, l^\nu} \mu_{j^\nu}^\nu h_{j^\nu}^\nu(x^\nu)\right) \leq 0$ . Pela hipótese 5.5  $\lambda_i$  e  $\mu_{j^\nu}^\nu$  são limitados então pode-se considerar que existe um  $\gamma > 0$  tal que  $\|E\| \leq \gamma$ . Pelo anterior e pela definição de  $\rho$  (5.20), segue a desigualdade com respeito a (5.35)

$$\begin{aligned} &\leq T^2 (\Theta(S(z^k)) + \Theta(S(z^k))^2 + 2\beta\Theta(S(z^k))^4\gamma^2) \\ &\leq T^2 (1 + 2\Theta(S(z^k)) + 2\beta^2\Theta(S(z^k))^3\gamma^2) \Theta(S(z^k)). \end{aligned} \quad (5.36)$$

De (5.17), segue que (5.36)

$$\leq T^2 (1 + 2a + 2\beta^2 a^3 \gamma^2) \Theta(S(z^k)).$$

Agora, considere-se  $\delta = T^2 (1 + 2a + 2\beta^2 a^3 \gamma^2) > 0$ , então

$$\|D^k\|^2 \leq \delta \Theta(S(z^k)).$$

□

Agora, analisemos a função potencial  $\Theta(S(z^k))$ , esta função está definida como a somatória do modulo de  $F$  e a complementariedade. A função modulo é de Lipschitz, então analisemos se a função de complementariedade também é de Lipschitz, o seguinte lema mostra este fato.

**Lema 5.4.** *Seja  $\phi_i$  uma função definida num conjunto aberto  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .*

$$\begin{aligned} \phi_i &: U \rightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, x) &\rightarrow \lambda g_i(x), \end{aligned}$$

*Suponha que  $\Gamma \subseteq U$  é compacto e convexo, onde  $g_i$  é definida sob as hipóteses 5.2-5.4. O gradiente de  $\phi_i(\lambda, x)$ ,  $\nabla \phi_i(\lambda, x)$ , satisfaz a condição de Lipschitz.*

*Demonstração.* Pela definição de  $\phi_i$ , tem-se que

$$\nabla \phi_i(\lambda, x) = (g_i(x), \lambda \nabla g_i(x)).$$

Agora, sejam  $(\lambda, x)$  e  $(\hat{\lambda}, y)$  pontos no domínio de  $\phi_i$ , então

$$\begin{aligned} \|\nabla \phi_i(\lambda, x) - \nabla \phi_i(\hat{\lambda}, y)\| &= \|(g_i(x), \lambda \nabla g_i(x)) - (g_i(y), \hat{\lambda} \nabla g_i(y))\| \\ &= \|(g_i(x) - g_i(y), \lambda \nabla g_i(x) - \hat{\lambda} \nabla g_i(y))\| \\ &\leq |g_i(x) - g_i(y)| + \|\lambda \nabla g_i(x) - \hat{\lambda} \nabla g_i(y)\|. \end{aligned}$$

Pela hipótese 5.3,  $\nabla g_i$  satisfaz a condição de Lipschitz, então existe  $\kappa_{g_i} > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \|\nabla \phi_i(\lambda, x) - \nabla \phi_i(\hat{\lambda}, y)\| &\leq |g_i(x) - g_i(y)| + \|\lambda \nabla g_i(x) - \hat{\lambda} \nabla g_i(y)\| \\ &\leq |g_i(x) - g_i(y)| + \|\lambda \nabla g_i(x) - \hat{\lambda} \nabla g_i(x) + \hat{\lambda} \nabla g_i(x) - \hat{\lambda} \nabla g_i(y)\| \\ &\leq |g_i(x) - g_i(y)| + \|(\lambda - \hat{\lambda}) \nabla g_i(x)\| + |\hat{\lambda}| \|\nabla g_i(x) - \nabla g_i(y)\| \\ &\leq |g_i(x) - g_i(y)| + \|(\lambda - \hat{\lambda}) \nabla g_i(x)\| + |\hat{\lambda}| \kappa_{g_i} \|x - y\| \end{aligned} \quad (5.37)$$

Assim,

$$\|\nabla \phi_i(\lambda, x) - \nabla \phi_i(\hat{\lambda}, y)\| \leq |g_i(x) - g_i(y)| + \|(\lambda - \hat{\lambda}) \nabla g_i(x)\| + |\hat{\lambda}| \kappa_{g_i} \|x - y\| \quad (5.38)$$

Por outro lado, como  $\nabla g_i(x)$  é contínuo em  $\Gamma$  segue que existe  $c_{\nabla g_i}$  tal que  $\|\nabla g_i(x)\| \leq c_{\nabla g_i}$ . Além disso, pelo teorema de valor médio, dados  $x, y \in \Gamma$ , o segmento  $x + \sigma(y - x) \in \Gamma$  para todo  $\sigma \in [0, 1]$ , então

$$|g_i(y) - g_i(x)| = |\nabla g_i(x + \sigma(y - x))(y - x)| \leq c_{\nabla g_i} \|y - x\| \quad (5.39)$$

Por tanto,  $g_i(x)$  satisfaz a condição de Lipschitz. E pela hipótese 5.5,  $\hat{\lambda}$  são limitados, então existem valores positivos  $\lambda^S$  tal que

$$\|\nabla \phi_i(\lambda, x) - \nabla \phi_i(\hat{\lambda}, y)\| \leq c_{\nabla g_i} \|y - x\| + c_{\nabla g_i} \|\lambda - \hat{\lambda}\| + \lambda^S \kappa_{g_i} \|x - y\|$$

Pode-se considerar  $\bar{c} = \max \{c_{\nabla g_i}, \lambda^S \kappa_{g_i}\}$ , então

$$\|\nabla \phi_i(\lambda, x) - \nabla \phi_i(\hat{\lambda}, y)\| \leq \bar{c}\|x - y\| + c_{\nabla g_i}\|\lambda - \hat{\lambda}\|.$$

Finalmente, existe um valor  $C \geq 0$  tal que

$$\|\nabla \phi_i(\lambda, x) - \nabla \phi_i(\hat{\lambda}, y)\| \leq C\|(\lambda, x) - (\hat{\lambda}, y)\|.$$

□

Pelo lema anterior,  $\nabla \Theta(S(z))$  satisfaz a condição de Lipzchitz. Assim, pode-se usar a proposição (4.1) de [14] para obter a seguinte desigualdade para uma constante positiva  $\kappa$  e  $[u, p] \subset \Omega_a$ .

$$\Theta(S(u)) \leq \Theta(S(p)) + (u - p)\nabla \Theta(S(p)) + \kappa\|u - p\|^2,$$

**Lema 5.5.** *Existe  $\tau > 0$  tal que para qualquer  $z \in \Omega_a(z)$  e  $D \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$  calculado pelo algoritmo, a condição (5.23) é satisfeita para qualquer  $t \in [0, \tau]$ .*

*Demonstração.* A partir de que  $\nabla \Theta(S(z^k))$  satisfaz a condição de Lipchitz, tem-se que

$$\Theta(S(z^k + t^k D^k)) \leq \Theta(S(z^k)) + t^k D^{k\top} \nabla \Theta(S(z^k)) + (t^k)^2 \kappa_\Theta \|D^k\|^2, \quad (5.40)$$

com  $\kappa_\Theta > 0$ .

Para que a condição de Armijo seja satisfeita a seguinte desigualdade deve ser mantida em todas as iterações.

$$\Theta(S(z^k)) + t^k D^{k\top} \nabla \Theta(S(z^k)) + (t^k)^2 \kappa_\Theta \|D^k\|^2 \leq \Theta(S(z^k)) + t^k \eta D^{k\top} \nabla \Theta(z^k). \quad (5.41)$$

Vamos analisar o lado direito da desigualdade (5.41), especificamente o termo  $D^{k\top} \nabla \Theta(z^k)$ , a partir das definições de  $D$  (5.22), o sistema linear (5.11), e a função potencial (5.10).

$$\begin{aligned} \nabla \Theta(S(z^k)) D^k &= [2F(z^k) - \mathbf{1}_m - \mathbf{1}_l] \nabla S(z^k) D^k \\ &= [2F(z^k)^\top - \mathbf{1}_m - \mathbf{1}_l] \nabla S(z^k) (D_0^k + \rho D_1^k) \\ &= [2F(z^k)^\top - \mathbf{1}_m - \mathbf{1}_l] (\nabla S(z^k)) D_0^k + \rho [2F(z^k) - \mathbf{1}_m - \mathbf{1}_l] (\nabla S(z^k)) D_1^k \\ &= [2F(z^k)^\top - \mathbf{1}_m - \mathbf{1}_l] (-S(z^k)) + \rho [2F(z^k) - \mathbf{1}_m - \mathbf{1}_l] (-E) \\ &= -[\|F(z^k)\|^2 + \Theta(S(z^k))] + \rho \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^k) + \sum_{\nu=1, j^\nu=1}^{N, l^\nu} \mu_{j^\nu}^\nu h_{j^\nu}^\nu(x^{\nu k}) \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\nabla\Theta(S(z^k))D^k = -[\|F(z^k)\|^2 + \Theta(S(z^k))] + \rho \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^k) + \sum_{\nu=1, j^\nu=1}^{N, l^\nu} \mu_{j^\nu}^\nu h_{j^\nu}^\nu(x^{\nu k}) \right).$$

Pela igualdade anterior tem-se que o lado direito da desigualdade (5.41) é igual a

$$\begin{aligned} & \Theta(S(z^k)) + t^k \eta \left( \rho \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^k) + \sum_{\nu=1, j^\nu=1}^{N, l^\nu} \mu_{j^\nu}^\nu h_{j^\nu}^\nu(x^{\nu k}) \right) - [\|F(z^k)\|^2 + \Theta(S(z^k))] \right) \\ &= (1 - t^k \eta) \Theta(S(z^k)) + t^k \eta \left( \rho \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^k) + \sum_{\nu=1, j^\nu=1}^{N, l^\nu} \mu_{j^\nu}^\nu h_{j^\nu}^\nu(x^{\nu k}) \right) - \|F(z^k)\|^2 \right). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Assim, por (5.42) a desigualdade (5.41) pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \Theta(S(z^k)) + t^k D^{k\top} \nabla\Theta(S(z^k)) + (t^k)^2 \kappa_\Theta \|D^k\|^2 \\ & \leq (1 - t^k \eta) \Theta(S(z^k)) + t^k \eta \left( \rho \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^k) + \sum_{\nu=1, j^\nu=1}^{N, l^\nu} \mu_{j^\nu}^\nu h_{j^\nu}^\nu(x^{\nu k}) \right) - \|F(z^k)\|^2 \right) \end{aligned} \quad (5.43)$$

Agora, ao simplificar o termo  $\Theta(S(z^k))$  e seguidamente o  $t^k$  na desigualdade (5.43), obtém-se que

$$\begin{aligned} & D^{k\top} \nabla\Theta(S(z^k)) + t^k \kappa_\Theta \|D^k\|^2 \\ & \leq -\eta \Theta(S(z^k)) + \eta \left( \rho \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^k) + \sum_{\nu=1, j^\nu=1}^{N, l^\nu} \mu_{j^\nu}^\nu h_{j^\nu}^\nu(x^{\nu k}) \right) - \|F(z^k)\|^2 \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & t^k \kappa_\Theta \|D^k\|^2 \\ & \leq -\eta \Theta(S(z^k)) + \eta \left( \rho \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^k) + \sum_{\nu=1, j^\nu=1}^{N, l^\nu} \mu_{j^\nu}^\nu h_{j^\nu}^\nu(x^{\nu k}) \right) - \|F(z^k)\|^2 \right) - D^{k\top} \nabla\Theta(S(z^k)). \\ & = \eta \left( -\Theta(S(z^k)) + \rho \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^k) + \sum_{\nu=1, j^\nu=1}^{N, l^\nu} \mu_{j^\nu}^\nu h_{j^\nu}^\nu(x^{\nu k}) \right) - \|F(z^k)\|^2 \right) - D^{k\top} \nabla\Theta(S(z^k)) \\ & = \eta (D^{k\top} \nabla\Theta(S(z^k))) - D^{k\top} \nabla\Theta(S(z^k)) \\ & = (\eta - 1) D^{k\top} \nabla\Theta(S(z^k)). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Portanto,

$$t^k \leq \frac{(\eta - 1) D^{k\top} \nabla\Theta(S(z^k))}{\kappa_\Theta \|D^k\|^2}. \quad (5.45)$$

para qualquer  $\eta \in (0, 1)$ .

Agora, aplica-se o lema 5.3 e o lema 5.2 em (5.45).

$$t^k \leq \frac{(1 - \eta)\xi D_0^{k\top} \nabla \Theta(S(z^k))}{\kappa_\Theta \delta \Theta(S(z^k))}. \quad (5.46)$$

De (5.28),  $D_0^{k\top} \nabla \Theta(S(z^k)) \leq \Theta(S(z^k))$ , então segue que

$$t^k \leq \frac{(1 - \eta)\xi}{\kappa_\Theta \delta}, \quad (5.47)$$

para qualquer  $\eta \in (0, 1)$ . Assim,  $\tau = \frac{(1 - \eta)\xi}{\kappa_\Theta \delta}$ .  $\square$

**Lema 5.6.** *Seja  $D = [d \ \bar{\lambda} \ \bar{\mu}] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$  calculada pelo algoritmo, existe  $\sigma > 0$  tal que para qualquer  $z \in \Omega_a$ , as condições (5.24)-(5.25) são satisfeitas para qualquer  $t \in [0, \sigma]$ .*

*Demonstração.* Pela hipótese 5.3, existe  $\kappa_{g_i} > 0$  tal que

$$\begin{aligned} g_i(x^k + t^k d^k) &\leq g_i(x^k) + t^k d^\top \nabla g_i(x^k) + \kappa_{g_i} \|t^k d^k\|^2 \\ &= g_i(x^k) + t^k d^\top \nabla g_i(x^k) + (t^k)^2 \kappa_{g_i} \|d^k\|^2, \end{aligned} \quad (5.48)$$

para qualquer  $x^k$  e  $x^k + t^k d^k$  em  $\Omega_a$  tal que  $[x^k, x^k + t^k d^k] \subset \Omega_a$ , e pelo sistema linear (5.11), tem-se que

$$g_i(x^k) + t^k d^\top \nabla g_i(x^k) + (t^k)^2 \kappa_{g_i} \|d^k\|^2 \leq g_i(x^k) + t^k \left[ -g_i(x^k) \left( \frac{\bar{\lambda}_i}{\lambda_i} + 1 \right) - \rho \right] + (t^k)^2 \kappa_{g_i} \|d^k\|^2 \quad (5.49)$$

Então,

$$\begin{aligned} g_i(x^k + t^k d^k) &\leq g_i(x^k) + t^k \left[ -g_i(x^k) \left( \frac{\bar{\lambda}_i}{\lambda_i} + 1 \right) - \rho \right] + (t^k)^2 \kappa_{g_i} \|d^k\|^2 \\ &\leq g_i(x^k) \left[ 1 - t^k \left( \frac{\bar{\lambda}_i}{\lambda_i} + 1 \right) \right] - t^k \rho + (t^k)^2 \kappa_{g_i} \|d^k\|^2. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Agora, a condição (5.24) será satisfeita se

$$g_i(x^k) \left[ 1 - t^k \left( \frac{\bar{\lambda}_i}{\lambda_i} + 1 \right) \right] - t^k \rho + (t^k)^2 \kappa_{g_i} \|d^k\|^2 \leq 0. \quad (5.51)$$

E pela hipótese 5.2, tem-se que

$$t^k \leq \min \left\{ \frac{1}{\left| \frac{\bar{\lambda}_i}{\lambda_i} + 1 \right|}, \frac{\rho}{\kappa_{g_i} \|d^k\|^2} \right\} \quad (5.52)$$

Assim, existem  $\zeta_i > 0$  pela hipótese 5.5, e pela desigualdade (5.37) e a definição de  $\rho$  (5.20) a condição (5.24) é satisfeita para qualquer  $t \in [0, \zeta_i]$ .

A prova da condição (5.25) tem um tratamento análogo ao anterior. Portanto, existem  $\zeta_i > 0$ , para  $i = 1, \dots, m + l$ , tal que  $t \in [0, \zeta_i]$ . Finalmente as condições (5.24) e (5.25) são satisfeitas para qualquer  $t^k \in (0, \sigma]$ , com  $\sigma = \min\{\zeta_i, \tau\}$ , onde  $\tau$  é obtido do lema 5.5.  $\square$

Note que pode-se considerar a longitude do passo  $t$  num intervalo definido como  $[\epsilon\sigma, \sigma]$ , onde  $\epsilon \in (0, 1)$ .

Desde os lemas 5.5 e 5.6, pode-se observar que o passo  $t$  calculado pela regra de Armijo esta bem definido.

**Teorema 5.1.** *Seja  $D \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$  sob as hipóteses 5.1-5.6, dado um ponto inicial  $z^0 \in \text{int}(\Omega_a)$ , existe uma subsequência de  $\{z^k\}$  gerada pelo algoritmo convergindo a  $z^*$ , que é a solução do problema (5.1).*

*Demonstração.* Desde o lema 5.3, 5.5, 5.6 e pela hipótese 5.1, pode-se considerar a sequência  $\{z^k\} \rightarrow z^*$  tal que  $z^*$  pertence ao conjunto compacto  $\Omega_a$ . A direção de busca  $D^k$  é limitada desde que  $\nabla F(z^k)$ ,  $\lambda^k$ ,  $\mu^k$  e  $\rho^k$  são limitados. Então, pode-se deduzir que existe uma subsequência  $K \subseteq \mathbb{N}$  tal que  $\{D^k\}_{k \in K} \rightarrow D^*$ . Pelos lemas 5.5 e 5.6,  $t \in (0, \sigma)$  então  $t^* > 0$ .

Agora, da condição de Armijo (5.23) e do lema (5.2) tomando o limite para  $k \rightarrow \infty$ , tem-se que

$$\nabla \Theta(S(z^*))D^* = 0. \quad (5.53)$$

Pelo lema 5.2,

$$\nabla \Theta(S(z^*))D_0^* = 0. \quad (5.54)$$

Pela equação (5.28) e a definição da função potencial (5.10),

$$\Theta(S(z^*)) = 0.$$

Assim, usando novamente (5.10), tem-se que  $S(z^*) = 0$ .  $\square$

# Capítulo 6

## Resultados numéricos

### 6.1 Resultados numéricos

No presente capítulo apresentam-se os resultados numéricos de diversos problemas teste correspondentes a problemas generalizados de Nash com restrições compartilhadas e próprias sobre diversas variáveis. O objetivo dos testes numéricos é usar os algoritmos propostos para encontrar o equilíbrio normalizado dos GNEP, sendo que consideramos que os multiplicadores de Lagrange associados às restrições compartilhadas são iguais.

Os GNEP com restrições compartilhadas foram resolvidos aplicando os algoritmos propostos que se inicializam num ponto interior da região de estratégias viáveis, e o critério de parada que guia a convergência dos problemas foi o decréscimo da norma da direção  $d_0$ . Um ponto inicial no conjunto de estratégias do jogo é empregado e o algoritmo gera uma sequência dentro do mesmo conjunto.

O cálculo do gradiente das funções de custo de cada jogador dentro dos jogos e das restrições em relação às variáveis foi realizado analiticamente em todos os problemas apresentados.

Os testes numéricos foram implementados em Matlab e os parâmetros empregados em cada problema foram os mesmos para todos os exemplos numéricos:

- Em todos os problemas foi definido o mesmo conjunto de parâmetros para o cálculo da direção  $d$  e para a busca linear de Armijo:  $\xi = 1$ ,  $\eta = 0.2$ ,  $\beta = 0.7$ ,  $v = 1$ .
- O critério de parada considerado é a redução da norma da direção de busca  $\|\Theta(S(z))\| < 10^{-3}$ .

O método de Quase-Newton usado para a implementação segue a regra de Broyden [4], onde são consideradas aproximações  $A^k$  de  $\nabla\phi(x^k)$ , e uma nova aproximação

$A^{k+1}$  é obtida da seguinte forma:

$$A^{k+1} = A^k + (\gamma - A^k \delta) \delta^\top / \delta, \quad (6.1)$$

onde  $\delta = x^{k+1} - x^k$  e  $\gamma = \phi(x^{k+1} - x^k)$ .

Note-se que, o fato de que todos os testes sejam resolvidos com os mesmos parâmetros mostra que o algoritmo é robusto.

Os GNEP's resolvidos foram: A.11, A.13, A.14, A.16, A.17 apresentados em [10], problema de Harker em [13], problema de Rosen em [34]. Os problemas chamados Lin(a)–Lin(f), descritos em [23], são um jogo oligopólico com diferentes parâmetros. NTF1 e NTF2 são problemas acadêmicos propostos em [26], com restrições lineares e não lineares, respectivamente, o modelo de mercado de eletricidade em [26] considerado como o problema A.18 em [10]. O problema chamado MSY é também um problema acadêmico e foi introduzido em [25].

O caso de estudo 2 vindo do sistema IEEE 30-bus assume não-arbitragem e foi introduzido [2]. Apresentam-se os resultados para 4 cenários,

- O primeiro cenário é o caso base, onde cada empresa procura maximizar seu lucro sob diversas condições.
- O segundo caso é o caso base com a adição de uma restrição linear, que representa a capacidade das linhas de transmissão.
- O terceiro cenário inclui uma restrição ambiental não linear, imposta sob a necessidade de controlar certos poluentes emitidos pela geração de energias das diversas unidades.
- No último cenário, são incluídas as duas restrições descritas anteriormente, a linear e a não linear que foram introduzidas em [3], que correspondem à restrição de transmissão e à restrição de poluição.

Um problema adicional é apresentado quando se adiciona uma restrição não linear ao problema A.18 descrito em [10], a restrição não linear ambiental descrita num jogo do mercado de electricidade bilateral descrito em [3] é adicionada ao problema A.18. Chama-se este problema A.18n, e os resultados são modificados em comparação ao problema original.

Na tabela 6.13, apresenta-se as características de cada problema segundo a seguinte notação: Na tabela 6.13,  $f^\nu$  e  $g$  representam os tipos de funções associadas a cada jogador e às restrições.

Nas tabelas 6.16 e 6.17, mostra-se uma comparação entre os GNEP's obtidos com  $J_x \tilde{\nabla} F(x, \lambda, \mu^\nu)$  e com a aproximação desta usando o método de Broyden.

| Notação | Descrição                                                                               |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $N$     | Número de jogadores.                                                                    |
| $n$     | Número de estratégias.                                                                  |
| $m$     | Número de restrições compartilhadas.                                                    |
| Iter    | Número de iterações feitas pelo algoritmo para atingir o equilíbrio normalizado $x^*$ . |

Tabela 6.1: Descrição da notação da tabela 6.13

**Exemplo 6.1.** Este problema mostrado nas tabelas (6.13)-(6.16) como problema A.11 é extraído de [10]. Neste jogo, são considerados dois jogadores e cada jogador tem uma variável de decisão em  $\mathbb{R}$ . Assim mesmo, são definidas funções custo não lineares para cada jogador  $\nu = 1, 2$  e uma restrição linear em comum.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x^1} & (x^1 - 1)^2 \\ \text{s.t.} & x^1 + x^2 \leq 1, \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min_{x^2} & \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \text{s.t.} & x^1 + x^2 \leq 1. \end{array} \right. \quad (6.2)$$

O equilíbrio normalizado para este problema é o vetor  $x^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ .

**Exemplo 6.2.** Este problema é conhecido como “the river basin pollution problem” e foi apresentado inicialmente por Krawczyk e Uryasev em [22] e mostrado nas tabelas (6.13)-(6.16) como problema A.13, [10]. Este jogo apresenta três jogadores e duas restrições compartilhadas.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x^\nu} & (d_2 \sum_{\mu=1}^3 x^\mu + c_{1\nu} + c_{2\nu}x^\nu - d_1)x^\nu \\ \text{s.t.} & q_l(x) = \sum_{\mu=1}^3 u_{\nu l} e_\nu x^\nu \leq K_l, \\ & 0 \leq x^\nu. \end{array} \right. \quad (6.3)$$

A tabela (6.8) contém os parâmetros do problema. Neste jogo, os jogadores  $\nu$

| Player $\nu$ | $c_{1\nu}$ | $c_{2\nu}$ | $e_\nu$ | $u_{\nu 1}$ | $u_{\nu 2}$ | $d_1$ | $d_2$ | $K_1$ | $K_2$ |
|--------------|------------|------------|---------|-------------|-------------|-------|-------|-------|-------|
| 1            | 0.10       | 0.01       | 0.50    | 6.5         | 4.583       | 3.0   | 0.01  | 100   | 100   |
| 2            | 0.12       | 0.05       | 0.25    | 5.0         | 6.250       |       |       |       |       |
| 3            | 0.15       | 0.01       | 0.75    | 5.5         | 3.750       |       |       |       |       |

Tabela 6.2: Parâmetros para o river pollution problem

representam às empresas que desejam maximizar seus lucros sujeitos às diversas restrições impostas. Estas empresas estão envolvidas na atividade de extrair algum

mineral ao longo de um rio e expulsam poluentes, mas devem respeitar certo limite de poluição ambiental imposto por uma autoridade local, isto é, satisfazendo restrições compartilhadas. Neste problema existem duas estações de controle da poluição, limitadas por  $K_1$  e  $K_2$ , formando duas restrições.

O equilíbrio normalizado é  $(21.146, 16.027, 2.724)$ .

**Exemplo 6.3.** Este problema foi apresentado por Kesselman et al. [21] e mostrado nas tabelas (6.13)-(6.16) como problema A.14, [10]. Este jogo é conhecido como Internet switching model e dentro dele participam 10 jogadores com uma restrição compartilhada.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x^\nu} \quad \frac{x^\nu}{K} - \frac{x^\nu}{\sum_{\nu=1}^N x^\nu} \\ \text{s.t.} \quad \sum_{\mu=1}^N x^\mu \leq K, \\ \quad \quad 0.01 \leq x^\nu, \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Neste problema de troca de Internet, o tráfego é gerado por usuários que tentam maximizar sua própria utilidade, desconsiderando os objetivos do sistema. E a restrição descreve a capacidade do buffer e considera-se como Facchinei et al. [6]  $K = 1$ .

O equilíbrio normalizado deste problema é  $(0.09, \dots, 0.09)$ .

**Exemplo 6.4.** Este GNEP foi proposto por Outrata et. al [31] e é uma variante do NEP apresentado por Murphy et al. [30], e mostrado nas tabelas (6.13)-(6.16) como problema A.16 (a)-(d), [10]. O jogo tem 5 jogadores e uma restrição compartilhada.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x^\nu} \quad p(x^\nu, x^{-\nu}) \cdot x^\nu - \theta_\nu(x^\nu) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{\mu=1}^N x^\mu \leq P, \end{array} \right. \quad (6.5)$$

onde  $p$  é o preço do mercado e é definido pela inversa da função de demanda

$$p(x^\nu, x^{-\nu}) = 5000^\gamma \cdot \left( \sum_{\nu=1}^N x^\nu \right)^{-\gamma},$$

a função de custo de cada jogador é

$$\theta^\nu(x^\nu) = c_\nu \cdot x^\nu + \frac{\beta_\nu}{\beta_\nu + 1} K_\nu^{-\frac{1}{\beta_\nu}} \cdot (x^\nu)^{\frac{\beta_\nu + 1}{\beta_\nu}},$$

e  $\gamma$  é  $\frac{1}{1.1}$ .

Este problema também é conhecido como modelo de oligopólio de Cournot que

descreve um jogo onde competem diversas empresas que produzem um produto homogêneo. Estas empresas tentam maximizar seus lucros e escolhem quanto produzir, mas restritas à produção conjunta delas e às empresas rivais. A continuação segue uma tabela com os parâmetros usados. Para o parâmetro  $P$ ,

| Jogador $\nu$ | $c_\nu$ | $K_\nu$ | $\beta_\nu$ |
|---------------|---------|---------|-------------|
| 1             | 10      | 5       | 1.2         |
| 2             | 8       | 5       | 1.1         |
| 3             | 6       | 5       | 1.0         |
| 4             | 4       | 5       | 0.9         |
| 5             | 2       | 5       | 0.8         |

Tabela 6.3: Parâmetros para o modelo de oligopólio de Cournot

que denota a quantidade máxima de produção conjunta considera-se como Facchinei et al. [6] diferentes valores,  $P = \{75, 100, 150, 200\}$ . Os equilíbrios para diferentes valores de  $P$  são:

| P   | $x^1$     | $x^2$     | $x^3$     | $x^4$     | $x^5$     |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 75  | 10.403965 | 13.035817 | 15.407354 | 17.381556 | 18.771308 |
| 100 | 14.050088 | 17.798379 | 20.907187 | 23.111429 | 24.132916 |
| 150 | 23.588779 | 28.684248 | 32.021533 | 33.287258 | 32.418182 |
| 200 | 35.785329 | 40.748959 | 42.802485 | 41.966381 | 38.696846 |

Tabela 6.4: Soluções para o modelo de oligopólio de Cournot [6]

**Exemplo 6.5.** Este problema foi apresentado por Nabetani et.al. [27] e mostrado nas tabelas (6.13)-(6.16) como problema A.17, [10]. O jogo está constituído por dois jogadores com duas restrições compartilhadas. O primeiro jogador controla dos variáveis  $x^1 = (x_1, x_2)$ , e o segundo jogador controla a variável  $x^2 = (x_3)$ . O GNEP é definido como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x_1, x_2} \quad x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)x_3 - 25x_1 - 38x_2 \\ s.t. \quad x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 14, \\ \quad \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30, \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x_3} \quad (x_3)^2 + (x_1 + x_2)x_3 - 25x_3 \\ s.t. \quad x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 14, \\ \quad \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30, \\ \quad \quad x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Este problema tem diversas soluções dadas por  $(\alpha, 11 - \alpha, 8 - \alpha)$ , tal que  $\alpha \in [0, 2]$ . Quando  $\alpha = 0$ , temos o equilíbrio normalizado para este problema  $x^* = (0, 11, 8)$ .

**Exemplo 6.6.** Este problema foi apresentado por Nabetani et.al. [27] e mostrado nas tabelas (6.13)-(6.16) como problema A.18, [10]. Este modelo representa um mercado de electricidade com arbitragem endógena. O modelo consiste em  $N \geq 2$  empresas de electricidade que competem numa rede de mercados com um árbitro que tenta obter lucro explorando diferenciais de preço entre regiões. Estas regiões são representadas por nós numa rede e cada empresa determina como deve produzir em cada gerador e a quanto deve vender em cada nó para maximizar seu lucro. O modelo tem a seguinte notação.

- $\mathcal{N}$ : o conjunto de nós.
- $\mathcal{A} \subseteq N \times N$ : conjunto de arcos com restrição de preço diferencial.
- $c_{\nu,i}$ : custo por unidade de geração no nó  $i$  pela empresa  $\nu$ .
- $P_i$ : interceptação de preço da função de vendas no nó  $i$ .
- $Q_i$ : interceptação da quantidade da função de vendas no nó  $i$ .
- $e_{ij}$ : custo de envio por unidade do nó  $i$  até o nó  $j$ .
- $CAP_{\nu,i}$ : capacidade de produção do nó  $i$  para a empresa  $\nu$ .
- $x_{\nu,ij}$ : quantidade produzida no nó  $i$  e vendida no nó  $j$  pela empresa  $\nu$ .
- $S_j$ : quantidade de vendas totais no nó  $j$ .

$$S_j := \sum_{\nu=1}^{\mathcal{N}} \sum_{i \in \mathcal{N}} x_{\nu,ij}, \quad \forall j \in \mathcal{N}$$

- $p_j$ : preço do mercado no nó  $j$

$$p_j(S_j) := P_j - \frac{P_j}{Q_j} S_j, \quad \forall j \in \mathcal{N}$$

Cada empresa  $\nu$  tem como objetivo encontrar  $\{x_{\nu,ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{A}}$  que resolva

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x^\nu} \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_{\nu,i} - p_j(S_j)) x_{\nu,ij} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} e_{ij} x_{\nu,ij} \\ s.t. \quad q_i(x) = \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{\nu,ij} \leq CAP_{\nu,i}, \quad \forall i \in \mathcal{N} \\ p_j(S_j) - p_i(S_i) \leq e_{ij}, \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \\ x_{\nu,ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \end{array} \right. \quad (6.6)$$

para um  $\{x_{\nu',ij}\}_{\nu' \neq \nu, (i,j) \in \mathcal{A}}$ .

Em particular, o problema usado considera dois jogadores com  $|\mathcal{A}|$  restrições compartilhadas, pois as restrições de preços diferenciados  $p_j(S_j) - p_i(S_i) \leq e_{ij}$

dependem das vendas totais em cada nó  $S_j = \sum_{\nu=1}^N \sum_{i \in \mathcal{N}} x_{\nu,ij}$ .

A data usada neste exemplo, é a seguinte:

- $N = 2$ , com um conjunto de nós  $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ .
- O conjunto de arcos  $\mathcal{A} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$ , e  $e_{ij} = 1$  para todo  $(i, j) \in \mathcal{A}$ .
- A empresa 1 tem suas próprias usinas de eletricidade nos nós 1 e 2, e para a empresa 2 as usinas de electricidade estão no nó 2 e 3. Por tanto,  $CAP_{1,3} = CAP_{2,1} = 0$ , e também  $x_{1,31} = x_{1,32} = x_{1,33} = x_{2,11} = x_{2,12} = x_{2,13} = 0$ .

A tabela 6.5 mostra os custos por unidade de geração  $c_{\nu,i}$  no nó  $i$  pela empresa  $\nu$  e as capacidades de produção  $CAP_{\nu,i}$  do nó  $i$  para a empresa  $\nu$ . Finalmente, a tabela

| $(\nu, i)$    | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (2,1) | (2,2) | (2,3) |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $c_{\nu,i}$   | 15    | 15    | 15    | 15    | 15    | 15    |
| $CAP_{\nu,i}$ | 100   | 50    | 0     | 0     | 100   | 50    |

Tabela 6.5: Custos de geração  $c_{\nu,i}$  e capacidades  $CAP_{\nu,i}$

6.6 mostra os valores dos preços das funções de vendas  $P_i$  no nós  $i = 1, 2, 3$  e a quantidade de vendas  $Q_i$  nos nós  $i = 1, 2, 3$ .

| Nó <sub><math>i</math></sub> | 1   | 2   | 3   |
|------------------------------|-----|-----|-----|
| $P_i$                        | 40  | 35  | 32  |
| $Q_i$                        | 500 | 400 | 600 |

Tabela 6.6: Dados da função preço  $(P_i, Q_i)$

O equilíbrio normalizado é apresentado na seguinte tabela.

| $(\nu, i, j)$ | (1,1,1) | (1,1,3) | (1,2,2) | (1,2,3) | (2,2,1) | (2,2,2) | (2,3,1) | (2,3,3) |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $P_i$         | 77.01   | 22.99   | 41.84   | 8.16    | 59.83   | 40.17   | 2.85    | 47.15   |

Tabela 6.7: Vendas das empresas 1 e 2 no equilíbrio

**Exemplo 6.7.** Este problema foi apresentado por Harker [13], onde o conjunto de estratégias viáveis é compacto e convexo. Harker encontrou a solução normalizada em (5, 9). Assim, este jogo apresenta dois jogadores com uma restrição compartilhada da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x^1} & (x^1)^2 + \frac{8}{3}x^1x^2 - 34x^1 \\ \text{s.t.} & x^1 + x^2 \leq 15, \\ & 0 \leq x^1 \leq 10, \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min_{x^2} & (x^2)^2 + \frac{5}{4}x^1x^2 - 24.25x^2 \\ \text{s.t.} & x^1 + x^2 \leq 15, \\ & 0 \leq x^2 \leq 10, \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Nosso algoritmo converge ao ponto (5.0033, 8.9976) em 52 iterações.

**Exemplo 6.8.** Este jogo foi apresentado por Rosen [34] e consiste em dois jogadores com uma restrição compartilhada.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x^1} & \frac{1}{2}(x^1)^2 - x^1x^2 \\ \text{s.t.} & x^1 + x^2 \leq 1, \\ & 0 \leq x^1, \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min_{x^2} & (x^2)^2 + x^1x^2 \\ \text{s.t.} & x^1 + x^2 \leq 1, \\ & 0 \leq x^2, \end{array} \right. \quad (6.8)$$

O equilíbrio de Nash normalizado para este problema é (1, 0).

**Exemplo 6.9.** Este problema foi apresentado por Li et. al em [23]. Considera um oligopólio que consiste em  $N$  fabricantes que produzem produtos homogêneos ou similares não cooperativamente antes que a demanda do mercado seja percebida. A demanda do mercado é caracterizada pela inversa das funções de demanda  $p_\nu(x)$ ,  $\nu = 1, \dots, N$ , onde  $p_\nu(x)$  denota o preço do mercado do produto fabricado pelo fabricante  $\nu$  e  $x = (x^\nu, x^{-\nu})$  é a quantidade fornecida pelo fabricante  $\nu$ .

Antes que a demanda do mercado seja percebida, o fabricante  $\nu$  escolhe sua quantidade de produção  $x_\nu$  e seu lucro pode ser formulado como

$$R_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) = x^\nu p_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) - c_\nu(x^\nu).$$

Onde  $x^{-\nu}$  denota as ofertas totais dos outros fabricantes,  $x^\nu p_\nu(x^\nu, x^{-\nu})$  significa o total de lucro para o fabricante  $\nu$ , e  $c_\nu(x_\nu)$  denota a função de custo do fabricante  $\nu$ .

O principal problema de decisão do fabricante é escolher a quantidade de suprimento  $x^\nu$  que maximiza seu lucro, isto é,

$$\max_{x^\nu \in X^\nu} R_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) = x^\nu p_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) - c_\nu(x^\nu)$$

e  $X^\nu = \{x^\nu \in [0, +\infty) \mid g(x^\nu, x^{-\nu}) \leq 0, h^\nu(x^\nu) \leq 0\}$ .

A continuação são usados os dados fornecidos na experiência numérica em [23] e define-se o problema para dois fabricantes:

- A inversa da função demanda é dada por

$$p_1(x^1, x^2) := \alpha_1 - \beta_1(x^1 + x^2), \quad p_2(x^1, x^2) := \alpha_2 - \beta_2(x^1 + x^2)$$

- As funções de custo são dadas por

$$c_1(x^1) := \gamma_1 x^1, \quad c_2(x^2) := \gamma_2 x^2$$

- As restrições são dadas por

$$g(x^1, x^2) := x^1 + x^2 - u, \quad h^1(x^1) := x^1 - u_1, \quad h^2(x^2) := x^2 - u_2$$

Assim o GNEP é escrito como

$$\begin{cases} \min_{x^1} & \beta_1(x^1)^2 - (\alpha_1 - \gamma_1)x^1 + \beta_1 x^1 x^2 \\ \text{s.t.} & x_1 + u_1 \leq 0, \\ & x^1 + x^2 - u \leq 0, \end{cases} \quad (6.9)$$

e

$$\begin{cases} \min_{x^2} & \beta_2(x^2)^2 - (\alpha_2 - \gamma_2)x^2 + \beta_2 x^1 x^2 \\ \text{s.t.} & x^2 + u_2 \leq 0, \\ & x^1 + x^2 - u \leq 0, \end{cases} \quad (6.10)$$

para o jogador 1 e 2, respectivamente.

Na seguinte tabela mostra-se os valores dos parâmetros e os resultados obtidos com nosso algoritmo. Observa-se que se tem seis grupos de parâmetros com suas soluções correspondentes.

| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u$ | $(x_1, x_2)$   |
|------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|-------|-------|-----|----------------|
| 48         | 52         | 23         | 25         | 5         | 6         | 2     | 1.5   | 3.5 | (1.828, 1.338) |
| 64         | 67         | 28         | 32         | 4         | 5         | 4     | 2     | 5.5 | (3.661, 1.665) |
| 68         | 78         | 26         | 23         | 2         | 3         | 3.5   | 2     | 5.5 | (3.494, 1.995) |
| 76         | 82         | 32         | 36         | 5         | 6         | 3.5   | 2.5   | 5.5 | (3.280, 2.162) |
| 84         | 88         | 36         | 42         | 4         | 5         | 5     | 3     | 7.5 | (4.913, 2.142) |
| 98         | 128        | 48         | 54         | 2         | 3         | 5     | 4     | 8   | (4.005, 3.993) |

Tabela 6.8: Parâmetros e resultados do algoritmo para o modelo em 6 estágios

Os dois exemplos acadêmicos a seguir foram apresentados em [26].

**Exemplo 6.10.** Neste primeiro exemplo em [26] chamado NTF1 nas tabelas 6.13 - 6.16 os autores consideraram um jogo de 2-pessoas, onde os problemas do primeiro e segundo jogador são

$$\begin{cases} \min_{x^1} & (x^1)^2 + x^1 x^2 - x^1 \\ \text{s.t.} & x^1 \geq 0, \\ & x^1 + x^2 \leq 1, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \min_{x^2} & (x^2)^2 - \frac{1}{2}x^1 x^2 - 2x^2 \\ \text{s.t.} & x^2 \geq 0, \\ & x^1 + x^2 \leq 1, \end{cases}$$

respectivamente. E o equilíbrio normalizado deste jogo é  $x = \left(\frac{4}{11}, \frac{7}{11}\right)$ .

**Exemplo 6.11.** No outro exemplo NTF2 apresentado em [26], os autores fazem uma modificação à restrição compartilhada do problema. Neste exemplo a restrição linear é substituída por uma restrição não linear.

$$\begin{cases} \min_{x^1} & (x^1)^2 + x^1 x^2 - x^1 \\ \text{s.t.} & x^1 \geq 0, \\ & (x^1)^2 + (x^2)^2 \leq 1, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \min_{x^2} & (x^2)^2 - \frac{1}{2}x^1x^2 - 2x^2 \\ \text{s.t.} & x^2 \geq 0, \\ & (x^2)^2 + (x^2)^2 \leq 1, \end{cases}$$

E o equilíbrio normalizado deste jogo é  $x = (0, 1)$ .

**Exemplo 6.12.** Este problema MYS foi apresentado por [25], são considerados dois jogadores e uma restrição linear compartilhada.

$$\begin{cases} \min_{x^1} & (x^1)^3(x^2)^2 \\ \text{s.t.} & x^1 \geq 1, \\ & x^1 + x^2 \leq 1, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \min_{x^2} & (x^2)^2(x^2)^3 \\ \text{s.t.} & x^2 \geq 1, \\ & x^1 + x^2 \leq 1, \end{cases}$$

E o equilíbrio normalizado deste jogo é  $x = (1, 1)$ .

**Exemplo 6.13.** Este exemplo apresentado em [2] não assume arbitragem, i.e., existência de comerciantes que podem vender e comprar megawatts de produtores e consumidores, e uma rede linear.

- Os índices  $i$  e  $j$  indicam os nós. Cada empresa  $f$  tem diversas unidades de geração distribuídas através da rede.
- $C(P_{fgi})$  é o custo por megawatt-hora da unidade geradora que pertence à empresa  $f$  e é colocada no nó  $i$ ; sua produção é  $P_{fgi}$  MW.
- A máxima capacidade de um gerador é  $P_{\max fgi}$  MW. Os consumidores no nó  $i$  consomem  $q_i$  MW. Em cada nó, as funções de demanda lineares são assumidas para ser da forma  $p_i(q_i) = P_{i0} - (P_{i0}/Q_{i0})$  U.S.\$/MWh, onde  $P_{i0}$  e  $Q_{i0}$  são as intercepções de preço e quantidade, respectivamente.
- Assume-se que o mercado é bilateral e  $s_{fj}$  MW são vendidos pela empresa  $f$  para os consumidores no nó  $j$ . A compensação do mercado é tal que  $\sum_f s_{fj} = q_j$ . Um balanço de energia é imposta a cada empresa  $\sum_{i,g} P_{fgi} = \sum_f s_{fj}$ .

Dado que cada empresa  $f$  escolhe a geração  $P_{fgi}$  e vendas  $s_{fi}$  para maximizar seu lucro U.S.\$/h, o qual é igual ao rendimento menos os custos de geração

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_j \left[ P_{j0} - \left( \frac{P_{j0}}{Q_{j0}} \right) \left( s_{fj} + \sum_{k \neq f} s_{kj} \right) \right] s_{fj} - \sum_{i,g} C(P_{fgi}) P_{fgi} \\
s.t. \quad & P_{fgi} \leq P_{\max fgi}, \forall \text{ nó } i, \text{ gerador } g \\
& \sum_j s_{fj} = \sum_{i,g} P_{fgi} \\
& \sum_j s_{fj} = q_j \\
& \forall s_{fj}, P_{fgi} \geq 0.
\end{aligned}$$

A data para a formulação deste problema é dada a continuação.

- São considerados três buses  $i = 1, 2, 3$  cada dos quais tem consumidores, o bus é um elemento de transmissão físico que conecta dois ou mais nós em uma representação de rede de uma grade de transmissão eléctrica. A geração só acontece nos nós 1 e 2 e cada par de buses é conectado por uma única linha de transmissão.
- As funções de demanda são  $p_i(q_i) = 40 - 0.08q_i$  para os buses  $i = 1, 2$  e  $p_3(q_3) = 32 - 0.0516q_3$  U.S.\$/MWh. Assim a demanda é mais elástica somente no nó 3 (bus 3).
- O gerador da empresa 1 é alocado em  $i = 1$  e da empresa 2 em  $i = 2$ . Ambos geradores tem uma capacidade ilimitada e os custos marginais constantes são U.S.\$ 15 /MWh para a empresa 1 e U.S.\$ 20/MWh para a empresa 2.

Na tabela 6.12 mostra-se o valor do equilíbrio normalizado para este problema, onde é representado o primeiro cenário do problema de 3 BUS ou o problema base.

| Vendas da Empresa 1 (MWh) |          |          | Vendas da Empresa 2 (MWh) |          |          | Geração por Empresa $F$ |       |
|---------------------------|----------|----------|---------------------------|----------|----------|-------------------------|-------|
| $s_{11}$                  | $s_{12}$ | $s_{13}$ | $s_{21}$                  | $s_{22}$ | $s_{23}$ | $P_1$                   | $P_2$ |
| 125                       | 125      | 124.1    | 62.5                      | 62.5     | 45.2     | 392.1                   | 179.2 |

Tabela 6.9: Geração e vendas para o exemplo de 3-BUS

No trabalho [3] foram introduzidas diversas restrições que modificam o problema original (problema base) e partir disto são apresentados a seguir três cenários mais.

**Exemplo 6.14.** *O problema 6.13 é um modelo chamado de rede multi-gerador e multi-nó. Em [3] são agregadas restrições de transmissão e poluição.*

- *Restrição de transmissão. A rede de energia é formada por nós. Estes estão conectados por linhas de transmissão, que permitem transmitir energia dos geradores até os nós de consumo. A seguinte representação expressa o fluxo através das linhas de transmissão.*

$$\mathbf{P}_{i \rightarrow j} \equiv [B_d \cdot A^\top \cdot B^{-1}] \cdot \mathbf{P}.$$

Onde,  $\mathbf{P}_{i \rightarrow j}$  é o vetor coluna cujo número de linhas no vetor é igual ao número de linhas de transmissão, e cada elemento representa o fluxo da linha de transmissão entre o nós  $i$  e  $j$ , medido em MW. As matrizes  $B_d$ ,  $A$  e  $B$  representam a topologia da rede e define a susceptância das conexões, (a susceptância é a medida da franquia ou permissão à passagem da corrente elétrica). Finalmente,  $P$  é um vetor coluna de dimensão igual ao número dos nós menos um, chamado de slack node em inglês. Isto é porque para representar a topologia da rede, é necessário selecionar um nó como o nó de referência. Para representar a topologia da rede, é necessário selecionar um nó como o nó de referência. Este é chamado de nó oscilante, que no problema é o nó 3.

Os elementos da restrição são da forma geração menos demanda,  $(P_{f_{gi}} - q_f)$ , que representa a energia injetada em MW em cada nó, exceto no nó slack.

Os limites para o fluxo de energia, são representados por restrições de desigualdade.

$$|\mathbf{P}_{i \rightarrow j}| \leq \bar{\mathbf{P}}_{i \rightarrow j},$$

onde  $\bar{\mathbf{P}}_{i \rightarrow j}$  é um vetor columna que representa o limite da potência ativa máxima em MW que pode fluir através de uma linha. O vetor  $\mathbf{P}_{i \rightarrow j}$  depende das estratégias de geração de todos os agentes, isto significa que as estratégias  $s$  devem ser selecionadas para satisfazer as restrições de transmissão.

Os valores dos parâmetros da capacidade das linhas de transmissão são:

$$\left| \begin{pmatrix} 0.33 & -0.33 \\ 0.66 & 0.33 \\ 0.33 & 0.66 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 - q_1 \\ P_2 - q_2 \end{pmatrix} \right| \leq \begin{pmatrix} 25 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Os valores das restrições das linhas de transmissão são 25 MW desde o nó 1

até o nó 2, e os outros dois valores são arbitrários e correspondem as outras linhas.

| Vendas da Empresa 1 (MWh) |          |          | Vendas da Empresa 2 (MWh) |          |          | Geração por Empresa $F$ |       |
|---------------------------|----------|----------|---------------------------|----------|----------|-------------------------|-------|
| $s_{11}$                  | $s_{12}$ | $s_{13}$ | $s_{21}$                  | $s_{22}$ | $s_{23}$ | $P_1$                   | $P_2$ |
| 113.4                     | 101.8    | 115.1    | 85.7                      | 74.1     | 72.2     | 330.3                   | 232   |

Tabela 6.10: Geração e vendas para o exemplo de 3-BUS com restrição de transmissão

- *Restrições de Poluição.* O objetivo destas restrições é reduzir a emissão de poluentes no processo de geração de energia. A geração total de poluição das unidades de geração é denotado por  $K_l$ , ao invés de emissões individuais  $E_f$ , que são a quantidade de substância nociva que sai do gerador  $f$ . Pode haver  $L$  tipos de emissões (por exemplo,  $SO_2$  ou  $CO_2$ ) produzidas pelas saídas  $P_f(s)$ , em que  $f$  é o índice de um gerador. A seguinte função quadrática reflete melhor o efeito prejudicial da grande produção.

$$K_l = \sum_f [\alpha_{fl} + \beta_{fl}P_f + \gamma_{fl}P_f^2], \quad l = 1, \dots, L.$$

Os coeficientes  $\alpha_{fl}, \beta_{fl}$  e  $\gamma_{fl}$  foram calibrados para uma topografia específica, isto é, distância, ventos predominantes, etc., e  $l$ th tipo de poluição.

Aqui são somadas as poluições de diferentes geradores e são restringidas em conjunto por  $K$ . Assim, a poluição máxima permitida do tipo  $l$  deve ser restringida da seguinte forma

$$K_l \leq \bar{K}_l, \quad l = 1, \dots, L.$$

Esta restrição é imposta por um agente regulador e a quantidade  $K_l$  depende das estratégias de geração de todos os agentes. Especificamente, o caso de estudo neste cenário é sob o  $CO_2$ , onde o máximo valor permitido é de:

$$(20 - 0.4 \cdot P_1 + 0.004 \cdot P_1^2) + (22 - 0.3 \cdot P_2 + 0.005 \cdot P_2^2) \leq 250,$$

A quantidade máxima de poluição permitida para o  $CO_2$  é assumida em  $\bar{K} = 250$  lb/h.

- Neste último cenário ambas restrições anteriores são consideradas e o equilíbrio normalizado é mostrado na seguinte tabela.

| Vendas da<br>Empresa 1<br>(MWh) |          |          | Vendas da<br>Empresa 2<br>(MWh) |          |          | Geração<br>por<br>Empresa<br>$F$ |       |
|---------------------------------|----------|----------|---------------------------------|----------|----------|----------------------------------|-------|
| $s_{11}$                        | $s_{12}$ | $s_{13}$ | $s_{21}$                        | $s_{22}$ | $s_{23}$ | $P_1$                            | $P_2$ |
| 85.9                            | 85.9     | 81.4     | 53.2                            | 53.2     | 30.8     | 253.2                            | 137.2 |

Tabela 6.11: Geração e vendas para o exemplo de 3-BUS com restrições de poluição

| Vendas da<br>Empresa 1<br>(MWh) |          |          | Vendas da<br>Empresa 2<br>(MWh) |          |          | Geração<br>por<br>Empresa<br>$F$ |       |
|---------------------------------|----------|----------|---------------------------------|----------|----------|----------------------------------|-------|
| $s_{11}$                        | $s_{12}$ | $s_{13}$ | $s_{21}$                        | $s_{22}$ | $s_{23}$ | $P_1$                            | $P_2$ |
| 86.3                            | 79.1     | 76.5     | 61.1                            | 54.0     | 37.5     | 241.9                            | 152.6 |

Tabela 6.12: Geração e vendas para o exemplo de 3-BUS com restrição de transmissão e poluição

**Exemplo 6.15.** *Neste exemplo o problema A.18 é modificado. Aqui agregamos uma restrição não linear, similar à restrição de poluição do exemplo anterior.*

Tabela 6.13: Características de cada GNEP com restrições compartilhadas.

| Problema        | N  | n  | m  | $f^\nu$    | $g$        |
|-----------------|----|----|----|------------|------------|
| A11             | 2  | 2  | 2  | quadratic  | linear     |
| A13             | 3  | 3  | 9  | quadratic  | linear     |
| A14             | 10 | 10 | 20 | não linear | linear     |
| A16a            | 5  | 5  | 10 | não linear | linear     |
| A16b            | 5  | 5  | 10 | não linear | linear     |
| A16c            | 5  | 5  | 10 | não linear | linear     |
| A16d            | 5  | 5  | 10 | não linear | linear     |
| A17             | 2  | 3  | 7  | quadrática | linear     |
| A18             | 2  | 12 | 28 | quadrática | linear     |
| Harker          | 2  | 2  | 6  | quadrática | linear     |
| Rosen           | 2  | 2  | 3  | quadrática | linear     |
| Lin(a)          | 2  | 2  | 3  | não linear | linear     |
| Lin(b)          | 2  | 2  | 3  | não linear | linear     |
| Lin(c)          | 2  | 2  | 3  | não linear | linear     |
| Lin(d)          | 2  | 2  | 3  | não linear | linear     |
| Lin(e)          | 2  | 2  | 3  | não linear | linear     |
| Lin(f)          | 2  | 2  | 3  | não linear | linear     |
| NTF1            | 2  | 2  | 4  | quadrática | linear     |
| NTF2            | 2  | 2  | 4  | quadrática | não linear |
| MYS             | 2  | 2  | 1  | não linear | linear     |
| IEEE 30-bus (a) | 2  | 6  | 8  | não linear | linear     |
| IEEE 30-bus (b) | 2  | 6  | 9  | não linear | linear     |
| IEEE 30-bus (c) | 2  | 6  | 9  | não linear | não linear |
| IEEE 30-bus (d) | 2  | 6  | 10 | não linear | não linear |
| A18n            | 2  | 12 | 29 | quadrática | não linear |

N: # jogadores; n: # variáveis, m: # restrições

Tabela 6.14: Resultados dos GNEP's com restrições compartilhadas - Algoritmo 1.

| Problem | Iter <sub>H</sub> | Iter <sub>I</sub> | Iter <sub>B</sub> | $x_H^*$                                                              |                                                        | $x_I^*$                                                               |                                                 | $x_B^*$                                                               |                                                 |
|---------|-------------------|-------------------|-------------------|----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| A11     | 29                | 150               | 106               | (0.749, 0.249)                                                       |                                                        | (0.748, 0.249)                                                        |                                                 | (0.749, 0.249)                                                        |                                                 |
| A13     | 18                | 275               | 58                | (21.141,<br>2.721)                                                   | 16.027,                                                | (21.141,<br>2.726)                                                    | 16.0279,                                        | (21.141,<br>2.721)                                                    | 16.027,                                         |
| A14     | 39                | 120               | 123               | (0.0877,..., 0.0877)                                                 |                                                        | (0.0877,..., 0.0877)                                                  |                                                 | (0.0877,..., 0.0877)                                                  |                                                 |
| A16a    | 9                 | 19                | 19                | (10.403,<br>15.406,<br>18.770)                                       | 13.035,<br>17.380,                                     | (10.403,<br>15.406,<br>18.770)                                        | 13.035,<br>17.380,                              | (10.403,<br>15.406,<br>18.770)                                        | 13.035,<br>17.380,                              |
| A16b    | 12                | 25                | 22                | (14.050,<br>20.907,<br>24.132)                                       | 17.798,<br>23.111,                                     | (14.049,<br>20.906,<br>24.132)                                        | 17.797,<br>23.110,                              | (14.049,<br>20.906,<br>24.132)                                        | 17.797,<br>23.110,                              |
| A16c    | 13                | 38                | 29                | (23.587,<br>32.020,<br>32.417)                                       | 28.683,<br>33.286,                                     | (23.587,<br>32.020,<br>32.417)                                        | 28.683,<br>33.286,                              | (23.587,<br>32.020,<br>32.417)                                        | 28.683,<br>33.286,                              |
| A16d    | 36                | 105               | 100               | (35.779,<br>42.798,<br>38.6944)                                      | 40.743,<br>41.962,                                     | (35.779,<br>42.798,<br>38.694)                                        | 40.743,<br>41.963,                              | (35.779,<br>42.798,<br>38.694)                                        | 40.743,<br>41.962,                              |
| A17     | 53                | 215               | 216               | (0.023,<br>7.975)                                                    | 10.975,                                                | (0.023,<br>7.975)                                                     | 10.975,                                         | (0.023,<br>7.975)                                                     | 10.975,                                         |
| A18     | 73                | 103               | 111               | (77.030,<br>22.965,<br>41.78,<br>59.881,<br>0.003, 2.821,<br>47.174) | 0.003,<br>0.003,<br>8.208,<br>40.114,<br>0.003, 0.003, | (76.400,<br>23.581,<br>40.174,<br>58.078,<br>0.160, 5.213,<br>44.776) | 0.017,<br>0.021,<br>9.803,<br>41.760,<br>0.008, | (77.039,<br>22.950,<br>41.748,<br>59.915,<br>0.009, 2.802,<br>47.186) | 0.009,<br>0.009,<br>8.241,<br>40.074,<br>0.009, |
| Harker  | 13                | -                 | -                 | (5.000, 8.999)                                                       |                                                        | -                                                                     |                                                 | -                                                                     |                                                 |
| Rosen   | 33                | 53                | 50                | (0.980, 0.031)                                                       |                                                        | (0.984, 0.027)                                                        |                                                 | (0.987, 0.024)                                                        |                                                 |
| Lin(a)* | 51                | 51                | 56                | (1.832, 1.333)                                                       |                                                        | (1.832, 1.333)                                                        |                                                 | (1.832, 1.333)                                                        |                                                 |
| Lin(b)* | 30                | 26                | 30                | (3.666, 1.666)                                                       |                                                        | (3.666, 1.666)                                                        |                                                 | (3.666, 1.666)                                                        |                                                 |
| Lin(c)* | 28                | 24                | 25                | (3.497, 1.998)                                                       |                                                        | (3.498, 1.998)                                                        |                                                 | (3.498, 1.998)                                                        |                                                 |
| Lin(d)* | 94                | 93                | 94                | (3.309, 2.177)                                                       |                                                        | (3.309, 2.177)                                                        |                                                 | (3.309, 2.177)                                                        |                                                 |
| Lin(e)* | 85                | 83                | 90                | (4.932, 2.133)                                                       |                                                        | (4.933, 2.133)                                                        |                                                 | (4.932, 2.133)                                                        |                                                 |
| Lin(f)* | 31                | 29                | 28                | (4.001, 3.997)                                                       |                                                        | (4.001, 3.997)                                                        |                                                 | (4.001, 3.997)                                                        |                                                 |
| NTF1    | 29                | 22                | 29                | (0.599, 0.399)                                                       |                                                        | (0.599, 0.398)                                                        |                                                 | (0.599, 0.398)                                                        |                                                 |
| NTF2    | 15                | 12                | 17                | (0.689, 0.724)                                                       |                                                        | (0.689, 0.723)                                                        |                                                 | (0.689, 0.724)                                                        |                                                 |

Iter: # iterações,  $x_H^*$ : GNE usando  $B_H$ ,  $x_I^*$ : GNE usando  $B_I$ ,  $x_B^*$ : GNE usando  $B_B$ .  
Problem\*: critério de parada  $\|d\| \leq 10^{-3}$ .

Tabela 6.15: Resultados dos GNEP's com restrições compartilhadas - Algoritmo 1.

| Problem               | Iter <sub>H</sub> | Iter <sub>I</sub> | Iter <sub>B</sub> | $x_H^*$                                                                                                   | $x_I^*$                                                                                                   | $x_B^*$                                                                                                   |
|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| MYS                   | 2                 | 2                 | 2                 | (1.001, 1.001)                                                                                            | (1.001, 1.001)                                                                                            | (1.001, 1.001)                                                                                            |
| IEEE<br>30-bus<br>(a) | 8                 | 171               | 19                | (125.000, 125.000,<br>142.118, 62.499,<br>62.499, 45.219)                                                 | (125.000, 125.000,<br>142.120, 62.499,<br>62.499, 45.218)                                                 | (125.000, 125.000,<br>142.119, 62.499,<br>62.499, 45.219)                                                 |
| IEEE<br>30-bus<br>(b) | 58                | 121               | 55                | (113.447, 101.894,<br>115.252, 85.605,<br>74.052, 72.086)                                                 | (113.447, 101.895,<br>115.253, 85.604,<br>74.052, 72.084)                                                 | (113.444, 101.890,<br>115.257, 85.609,<br>74.055, 72.085)                                                 |
| IEEE<br>30-bus<br>(c) | 42                | 62                | 11                | (85.856, 85.856,<br>81.431, 53.190,<br>53.190, 30.787)                                                    | (85.853, 85.858,<br>53.193, 53.194,<br>30.776)                                                            | (85.854, 85.854,<br>81.428, 53.189,<br>53.189, 30.784)                                                    |
| IEEE<br>30-bus<br>(d) | 27                | 150               | 6                 | (86.269, 79.233,<br>76.617, 60.984,<br>53.948, 37.415)                                                    | (86.862, 79.856,<br>75.392, 60.365,<br>53.360, 38.643)                                                    | (86.307, 79.243,<br>76.552, 60.950,<br>53.939, 37.475)                                                    |
| A18n                  | 116               | 109               | 156               | (75.997, 0.009,<br>22.118, 0.009,<br>40.792, 7.510,<br>43.304, 30.438,<br>0.009, 8.877, 0.009,<br>31.381) | (75.985, 0.002,<br>22.132, 0.002,<br>40.841, 7.473,<br>43.278, 30.487,<br>0.002, 8.884, 0.002,<br>31.365) | (75.984, 0.002,<br>22.137, 0.002,<br>40.844, 7.466,<br>43.273, 30.490,<br>0.002, 8.889, 0.002,<br>31.364) |

Iter: # iterações,  $x_H^*$ : GNE usando  $B_H$ ,  $x_I^*$ : GNE usando  $B_I$ ,  $x_B^*$ : GNE usando  $B_B$ .

Problem\*: critério de parada  $\|d\| \leq 10^{-3}$ .

Tabela 6.16: Resultados dos GNEP's com restrições compartilhadas - Algoritmo 2.

| Problem | Iter <sub>H</sub> | Iter <sub>I</sub> | Iter <sub>B</sub> | $x_H^*$                                                                                    | $x_I^*$                                                                                    | $x_B^*$                                                                                    |
|---------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| A11     | 28                | 120               | 87                | (0.725, 0.225)                                                                             | (0.725, 0.225)                                                                             | (0.725, 0.225)                                                                             |
| A13     | 10                | 50                | 25                | (21.121, 15.997, 2.706)                                                                    | (21.1315, 15.996, 2.723)                                                                   | (21.032, 16.022, 2.573)                                                                    |
| A14     | 39                | 120               | 123               | (0.0877, ..., 0.0877)                                                                      | (0.0877, ..., 0.0877)                                                                      | (0.0877, ..., 0.0877)                                                                      |
| A16a    | 10                | 14                | 9                 | (10.403, 13.035, 15.406, 17.380, 18.770)                                                   | (10.403, 13.035, 15.406, 17.380, 18.770)                                                   | (10.403, 13.035, 15.406, 17.380, 18.770)                                                   |
| A16b    | 11                | 22                | 11                | (14.058, 17.796, 20.901, 23.107, 24.130)                                                   | (14.079, 17.788, 20.893, 23.106, 24.129)                                                   | (14.058, 17.796, 20.901, 23.107, 24.130)                                                   |
| A16c    | 51                | 28                | 19                | (23.679, 28.640, 31.990, 33.275, 32.411)                                                   | (23.677, 28.690, 32.130, 33.279, 32.410)                                                   | (23.603, 28.676, 32.012, 33.282, 32.415)                                                   |
| A16d    | 32                | 112               | 34                | (35.768, 40.732, 42.788, 41.956, 38.689)                                                   | (35.797, 40.732, 42.794, 41.961, 38.693)                                                   | (35.769, 40.732, 42.789, 41.956, 38.690)                                                   |
| A17     | 76                | 58                | 99                | (0.014, 10.935, 7.915)                                                                     | (0.014, 10.934, 7.916)                                                                     | (0.014, 10.935, 7.915)                                                                     |
| A18     | 74                | 92                | 101               | (77.103, 0.017, 22.877, 0.013, 41.618, 8.366, 59.883, 40.099, 0.015, 2.801, 0.015, 47.182) | (77.100, 0.017, 22.981, 0.013, 41.174, 8.565, 59.877, 40.099, 0.013, 2.834, 0.012, 47.177) | (77.102, 0.017, 22.955, 0.013, 41.546, 8.677, 59.989, 40.089, 0.012, 2.813, 0.011, 47.186) |
| Harker  | 45                | 47                | 56                | (5.015, 8.989)                                                                             | (5.050, 8.998)                                                                             | (5.050, 8.998)                                                                             |
| Rosen   | 25                | 45                | 40                | (0.992, 0.041)                                                                             | (0.991, 0.047)                                                                             | (0.991, 0.044)                                                                             |
| Lin(a)* | 2                 | 3                 | 2                 | (1.866, 1.367)                                                                             | (1.866, 1.367)                                                                             | (1.866, 1.367)                                                                             |
| Lin(b)* | 13                | 12                | 12                | (3.746, 1.737)                                                                             | (3.750, 1.732)                                                                             | (3.752, 1.730)                                                                             |
| Lin(c)* | 3                 | 3                 | 3                 | (3.486, 1.996)                                                                             | (3.484, 1.993)                                                                             | (3.484, 1.993)                                                                             |
| Lin(d)* | 13                | 12                | 12                | (3.277, 2.187)                                                                             | (3.283, 2.179)                                                                             | (3.281, 2.182)                                                                             |
| Lin(e)* | 10                | 16                | 12                | (4.866, 2.166)                                                                             | (4.879, 2.160)                                                                             | (4.866, 2.166)                                                                             |
| Lin(f)* | 3                 | 3                 | 3                 | (4.007, 3.986)                                                                             | (4.006, 3.986)                                                                             | (4.006, 3.986)                                                                             |
| NTF1    | 35                | 33                | 22                | (0.598, 0.399)                                                                             | (0.599, 0.399)                                                                             | (0.599, 0.399)                                                                             |
| NTF2    | 21                | 22                | 27                | (0.688, 0.711)                                                                             | (0.688, 0.713)                                                                             | (0.688, 0.711)                                                                             |

Iter: # iterações,  $x_H^*$ : GNE usando  $B_H$ ,  $x_I^*$ : GNE usando  $B_I$ ,  $x_B^*$ : GNE usando  $B_B$ .  
Problem\*: criterio de parada  $\|d\| \leq 10^{-3}$ .

Tabela 6.17: Resultados dos GNEP's com restrições compartilhadas - Algoritmo 2.

| Problem               | Iter <sub>H</sub> | Iter <sub>I</sub> | Iter <sub>B</sub> | $x_H^*$                                                                                                   | $x_I^*$                                                                                                   | $x_B^*$                                                                                                   |
|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| MYS                   | 4                 | 3                 | 3                 | (1.001, 1.001)                                                                                            | (1.001, 1.001)                                                                                            | (1.001, 1.001)                                                                                            |
| IEEE<br>30-bus<br>(a) | 9                 | 80                | 50                | (125.001, 125.001,<br>142.121, 62.506,<br>62.506, 45.235)                                                 | (125.0011, 125.001,<br>142.121, 62.506,<br>62.506, 45.235)                                                | (125.001, 125.001,<br>142.120, 62.506,<br>62.506, 45.236)                                                 |
| IEEE<br>30-bus<br>(b) | 14                | 49                | 100               | (113.450, 101.898,<br>115.255, 85.610,<br>74.059, 72.097)                                                 | (113.451, 101.900,<br>115.261, 85.606,<br>74.056, 72.095)                                                 | (113.440, 101.990,<br>115.257, 85.709,<br>74.155, 72.005)                                                 |
| IEEE<br>30-bus<br>(c) | 16                | 43                | 80                | (85.866, 85.866,<br>81.445, 53.156,<br>53.156, 30.736)                                                    | (85.303, 72.685,<br>70.463, 58.905,<br>46.536, 30.922)                                                    | (85.853, 85.858,<br>53.193, 53.194,<br>30.776)                                                            |
| IEEE<br>30-bus<br>(d) | 19                | 112               | 24                | (86.035, 79.450,<br>76.152, 60.704,<br>53.310, 37.847)                                                    | (86.283, 79.856,<br>75.286, 60.884,<br>53.315, 37.066)                                                    | (86.034, 79.243,<br>76.416, 60.973,<br>53.665, 37.862)                                                    |
| A18n                  | 89                | 102               | 106               | (75.018, 0.006,<br>22.359, 0.006,<br>38.533, 8.862,<br>44.240, 29.231,<br>0.006, 9.200, 0.006,<br>31.202) | (75.090, 0.006,<br>22.355, 0.006,<br>38.656, 8.678,<br>44.288, 29.343,<br>0.006, 9.233, 0.006,<br>31.212) | (75.081, 0.006,<br>22.352, 0.006,<br>38.477, 7.897,<br>44.576, 29.767,<br>0.006, 9.243, 0.006,<br>31.078) |

Iter: # iterações,  $x_H^*$ : GNE usando  $B_H$ ,  $x_I^*$ : GNE usando  $B_I$ ,  $x_B^*$ : GNE usando  $B_B$ .

Problem\*: critério de parada  $\|d\| \leq 10^{-3}$ .

# Capítulo 7

## Conclusões e Sugestões para trabalhos futuros

### 7.1 Conclusões

O presente trabalho abrange uma discussão sobre uma reformulação para o problema de equilíbrio generalizado de Nash com restrições compartilhadas e próprias. O enfoque proposto é baseado na reformulação que implica a concatenação das condições de otimalidade de Karush-Khun-Tucker de cada um dos problemas de otimização associados a cada jogador, isto com o objetivo de encontrar a melhor estratégia para todos os jogadores de forma simultânea, esta estratégia simultânea é chamada de equilíbrio. Em particular, esta reformulação permite obter um equilíbrio chamado equilíbrio normalizado desde que os multiplicadores de Lagrange das restrições compartilhadas sejam iguais. Este fato é imposto convenientemente no método proposto. Assim mesmo, usando uma adaptação para o método de pontos interiores e direções viáveis (FDIPA), os algoritmos apresentados geram sequências de pontos no interior da região das estratégias viáveis do GNEP com direções viáveis, na literatura pode-se encontrar trabalhos que usam o método de ponto interior mas não geram direções viáveis.

Nos capítulos 4 e 5 empregando apropriadas funções potenciais obtém-se o decréscimo esperado no processo de otimização.

No algoritmo apresentado no capítulo 4 a função potencial é chamada de função multipotencial pois por cada problema de otimização de cada jogador define-se uma função potencial associada. O algoritmo resolve um sistema linear onde o bloco do sistema correspondente ao bloco associado à segunda derivada do lagrangiano é substituído convenientemente por uma matriz diagonal por blocos, esta matriz é útil no sentido que evitamos o cálculo explícito da segunda derivada. Além disso, pelas condições do problema esta matriz diagonal por blocos é uma matriz

definida positiva, mas o inconveniente é que neste processo omitimos informação que proporciona a segunda derivada explícita fora dos blocos diagonais. A função multipotencial guia a busca linear para cada jogador que procura um passo apropriado em cada iteração para cada função potencial, sendo escolhido o passo mínimo entre todos os passos apropriados em cada iteração. E assim, é gerado um novo ponto na sequência que converge ao equilíbrio normalizado.

Por outro lado, no algoritmo apresentado no capítulo 5 é proposta uma função potencial global que associa todos os problemas de otimização de todos os jogadores. Uma diferença entre este segundo algoritmo com respeito ao primeiro é que no segundo se faz uso da segunda derivada de forma explícita, de qualquer modo esta derivada poderia ser substituída por alguma aproximação, incluso pela matriz inversa para casos mais práticos. A única condição em base a esta matriz explícita é que seja inversível, isto com o fim de garantir que o sistema esteja bem definido. Seguidamente a função potencial global guia a busca linear de forma global para todos os jogadores e encontra um passo apropriado em cada iteração, e em consequência a geração de um novo ponto na sequência é garantida, ao tempo que converge ao equilíbrio normalizado.

Com respeito aos testes numéricos, deve-se notar que o fato de que todos os testes sejam resolvidos com os mesmos parâmetros mostra que os algoritmos são robustos. Os problemas resolvidos pelos algoritmos são problemas encontrados na literatura o que faz possível comparar com nossos resultados numéricos e garantir o bom desenvolvimento dos algoritmos.

## 7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Sobre as sugestões poderiam ser aplicadas outras reformulações do GNEP além da concatenação das condições de Lagrange. Com respeito aos sistemas lineares a matriz da derivada das condições de Lagrange pode ser substituída por uma aproximação usando diferentes métodos e analisando as diferenças com respeito à precisão do resultado e à velocidade de convergência. Outras possíveis funções potenciais podem também ser estudadas e analisadas no sentido de esperar que exista um decréscimo em cada iteração do algoritmo assim como foi mostrado nos capítulos 4 e 5. Pode ser estudado o caso quando os multiplicadores de Lagrange são diferentes nas restrições compartilhadas. Assim também, o estudo de problemas mais grandes e mais complexos no sentido de restrições altamente não lineares pode ser adicionado ao trabalho como forma de avaliar o desempenho dos algoritmos.

# Referências Bibliográficas

- [1] Arrow, K. J., and Debreu, G. “Existence of an equilibrium for a competitive economy”. *Econometrica*, vol. 22, pag. 265–290, (1954).
- [2] Contreras, Javier, Matthias Klusch, and Jacek B. Krawczyk. “Numerical solutions to Nash-Cournot equilibria in coupled constraint electricity markets”. *IEEE Transactions on Power Systems* 19.1, pp. 195-206, (2004).
- [3] CONTRERAS, Javier; KRAWCZYK, Jacek B.; ZUCCOLLO, James. “Economics of collective monitoring: a study of environmentally constrained electricity generators”. *Computational Management Science*, v. 13, n. 3, p. 349-369, (2016).
- [4] Dennis, J. E, and Schnabel, Robert B. “Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations (Classics in Applied Mathematics, 16)”. Soc for Industrial & Applied Math. (1996).
- [5] Dreves, A., Facchinei, F., Kanzow, C. and Sagratella S. “On The Solution of the KKT conditions of generalized Nash equilibrium problems”. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 21, No. 3, pp. 1082–1108, (2011).
- [6] Facchinei, F., Fischer, A., Piccialli, V. “Generalized Nash equilibrium problems and Newton methods”. *Math. Program., Ser. B* , vol. 194, pag. 163–194, (2009).
- [7] Facchinei, F., Fischer, A., Piccialli. “On generalized Nash games and variational inequalities”. *Oper. Res. Lett* , vol. 35, pag. 159–164, (2007).
- [8] Facchinei, F., Pang, J. “Exact penalty functions for generalized Nash problems”. *Springer, Heidelberg*, pp 115–126. (2006)
- [9] Facchinei, F., Kanzow, C., “Generalized Nash equilibrium problems”. *Springer Science+Business Media*, (2009)
- [10] Facchinei, F., Kanzow, C., “Penalty methods for the solution of generalized Nash equilibrium problems (with complete test problems)”. (2009)

- [11] Fukushima, M., Pang, J., “Quase-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi- leader-follower games”. *Comput. Manage. Sci.*, vol. 2, pag. 21–56. (2005)
- [12] Gutierrez, A. E., Mazorche, S. R., Herskovits, J., and Chapiro, G. “An interior point algorithm for mixed complementarity nonlinear problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*”, vol. 175, n. 2, pag. 432-449, (2017).
- [13] Harker, P. T. “Generalized Nash games and quase-variational inequalities”. *European Journal of Operational Research*, vol. 54, pag. 81–94, (1991).
- [14] Herskovits, J. “A feasible direction interior-point technique for nonlinear optimization”. *JOTA - Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 46, pag. 53–58, (1998).
- [15] Herskovits, J. “A View on Nonlinear Optimization”. *Kluber Academic Publishers*, chapter-3, pag. 71–116, (1995).
- [16] Herskovits J., “A Two-Stage Feasible Directions Algorithm for Nonlinear Constrained Optimization”. *Mathematical Programming*, Vol. 36, pp. 19-38 (1986)
- [17] Herskovits, J. “An interior point technique for nonlinear optimization”. Tese de Doutorado. INRIA (1992)
- [18] Herskovits, J. “A two-stage feasible direction algorithm including variable metric techniques for non-linear optimization problems”. Diss. INRIA, 1982.
- [19] Izmailov, Alexey, and Mikhail Solodov. “Otimização, volume I.” *Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade*. IMPA, Rio de Janeiro 2 (2007).
- [20] Izmailov, Alexey, and Mikhail Solodov. “Otimização, volume 2.” *Métodos Computacionais*. IMPA, Rio de Janeiro 2 (2012).
- [21] Kesselman, A., Leonardi, S. and Bonifaci, V. “Game-theoretic analyses of internet switching with selfish users”. *Lecture Notes in Computer Science* 3828, pp. 236–245 (2005).
- [22] Krawczyk J. B. and Uryasev, S. “Environmental Modeling and Assessment”, vol. 5, no. 1, pp. 63–73, 2000.

- [23] Li, Peiyu, and Guihua Lin. “Solving a class of generalized Nash equilibrium problems”. *J. Math. Res. Appl* 33.3, pp. 372-378, (2013).
- [24] Luenberger, D. G. and Ye, Y. “Linear and Nonlinear Programming.” *Springer*, (2008).
- [25] Matioli, Luiz Carlos, Wilfredo Sosa, and Jinyun Yuan. “A numerical algorithm for finding solutions of a generalized Nash equilibrium problem”. *Computational Optimization and Applications* 52.1, pp. 281–292, (2012).
- [26] Nabetani, K., Tseng, P. and Fukushima, M. “Parametrized variational inequality approaches to generalized Nash equilibrium problems with shared constraints”, *Computational Optimization and Applications*, vol. 48, no. 3, pp. 423–452, May 2009.
- [27] Nabetani, K. “Variational inequality approaches to generalized Nash equilibrium problems”. Master Theses, Department of Applied Mathematics and Phycis, Kyoto Universety, Japan, february 2009.
- [28] Nash J. “Non-Cooperative Games”. *Annals of Mathematics*, vol. 54, No. 2, pag. 286–295, (1951).
- [29] Nikaido, H., Isoda, K., “Note on noncooperative convex games”. *Pac. J. Math.*, vol. 5, pag. 807–815 (1955).
- [30] Murphy, F., Sherali, H.D. and Soyster, A.B. “A mathematical programming approach for determining oligopolistic market equilibrium Mathematical Programming”, vol. 24, 1982, pp. 92–100.
- [31] Outrata, J., Kovara, M. and Zowe, J. “Introduction, Nonsmooth Approach to Optimization Problems with Equilibrium Constraints”, pp. 311, 1998
- [32] Panier, E., Tits, A. and Herskovits, J. “A QP-free, globally convergent, locally superlinearly convergent algorithm for inequality constrained optimization”, *SIAM Journal on Control and Optimization*, pp. 788–811, vol. 26, 1988 PTH88.
- [33] Robinson, S.M., “Shadow prices for measures of effectiveness”. *II. General Model Oper. Res.*, vol. 41, pag. 536–548 (1993).
- [34] Rosen, J.B., “Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games”. *Econometrica*, vol. 33, pag. 520–534 (1965).
- [35] von Heusenger, A. “Numerical Methods for the Solution of the Generalized Nash Equilibrium Problem”, Universidade de Wurzburg, 2009.

# Apêndice A

## Método de Pontos Interiores

O algoritmo de pontos interiores usado neste capítulo é o FDIPA (Feasible Direction Interior Point Algorithm) proposto por Herskovits [14]. Dado um ponto interior inicial  $x^0$  um algoritmo de pontos interiores gerará uma sequência  $\{x^k\}$  de pontos interiores com valores decrescentes na função objetivo e que convergem a um ponto de KKT do seguinte problema de otimização.

$$\begin{cases} \underset{x \in \Omega}{\text{minimizar}} & f(x) \\ \text{sujeito a:} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são funções diferenciáveis e não necessariamente convexas.

O FDIPA em cada iteração define uma direção de busca, a qual é uma direção de descida da função objetivo  $f(x)$  e também é uma direção viável. E seguidamente uma busca linear é executada para garantir a geração de um novo ponto interior e um objetivo de menor valor.

A partir das equações que determinan as condições de KKT do problema (A.1)

$$\nabla f(x) + \lambda^\top \nabla g(x) = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\lambda^\top g(x) = 0, \quad (\text{A.3})$$

uma iteração de Newton é definida:

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ \lambda_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x) & \nabla g(x) \\ \Lambda \nabla g^\top(x) & G(x) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \nabla g(x) \\ G(x)\lambda \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Onde  $G_{ii}(x) = \text{diag}(g_i(x))$  e  $\Lambda_{ii} = \text{diag}(\lambda_i)$ , para  $i = 1, \dots, m$ .

Reescrevendo o sistema (A.4), tem-se que

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x) & \nabla g(x) \\ \Lambda \nabla g^\top(x) & G(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha - x \\ \lambda_\alpha - \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \nabla g(x) \\ G(x)\lambda \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

A matriz  $\nabla_{xx}^2 L(x)$  pode ser substituída por uma matriz definida como  $B$ , esta matriz pode ser uma estimativa de  $\nabla_{xx}^2 L(x)$  ou a matriz identidade. Para garantir convergência global do FDIPA  $B$  deve ser definida positiva.

Define-se a direção de busca  $d_\alpha$  no espaço primal, como

$$d_\alpha = x_\alpha - x.$$

Então (A.5) pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} B & \nabla g(x) \\ \Lambda \nabla g^\top(x) & G(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_\alpha \\ \lambda_\alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) \\ 0. \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Este sistema calcula  $d_\alpha$  no espaço primal e uma nova estimativa de  $\lambda$ .

Segundo o sistema (A.6) a direção  $d_\alpha$  é uma direção de descida da função  $f(x)$ , porém  $d_\alpha$  nem sempre viável, isto porque quando as restrições tendem a ser ativas forçam à direção  $d_\alpha$  a ser tangente ao conjunto viável. A segunda equação do sistema (A.6) é equivalente a

$$\lambda_i \nabla g_i^\top(x) d_\alpha + g_i(x) \lambda_{\alpha i} = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

implica que  $\lambda_i \nabla g_i(x) d_\alpha = 0$ , então  $\nabla g_i(x) d_\alpha = 0$  para  $g_i(x) = 0$ . Isto é,  $d_\alpha$  não é uma direção viável. Este fato é mostrado na figura A.1, onde  $\nabla g_i(x) d_\alpha \leq 0$  deve satisfazer-se para garantir que as direções são viáveis para o problema (A.1), caso contrário não haveria viabilidade.

Para evitar o anterior, define-se o mesmo sistema linear adicionando-se uma perturbação ao lado direito do sistema

$$\begin{bmatrix} B & \nabla g(x) \\ \Lambda \nabla g^\top(x) & G(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_\beta \\ \lambda_\beta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) \\ \rho \Lambda \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

onde  $\rho$  é um escalar positivo  $\bar{\lambda}$  é a nova estimativa de  $\lambda$ . Assim, a relação sobre as restrições impõe uma perturbação ao lado direito.

$$\lambda_i \nabla g_i^\top(x) d_\alpha + g_i(x) \bar{\lambda}_i = -\rho \lambda_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

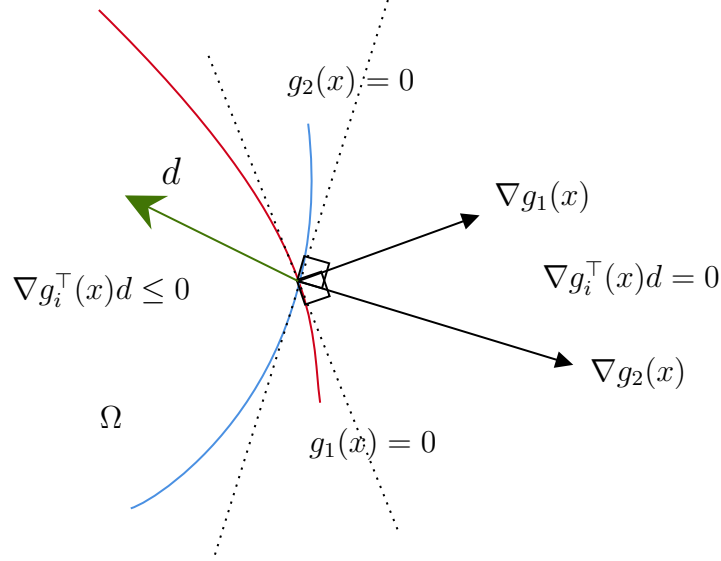


Figura A.1: Direções Viáveis

Para as restrições ativas,

$$\lambda_i \nabla g_i^\top(x) d_\alpha = -\rho \lambda_i < 0.$$

Onde uma nova direção é formada a partir da combinação linear de  $d_\alpha$  e  $d_\beta$ , da seguinte forma:

$$d = d_\alpha + \rho d_\beta, \quad (\text{A.8})$$

que além de ser uma direção de descida também é viável.

É possível garantir que  $d$  é uma direção de descida, desde que  $d_\alpha^\top \nabla f < 0$  e considerando-se a desviação do novo sistema.

$$d^\top \nabla f \leq \xi d_\alpha^\top \nabla f < 0, \quad \xi \in (0, 1) \quad (\text{A.9})$$

implica que  $d^\top \nabla f < 0$ . Posteriormente mediante uma busca linear o algoritmo encontra uma longitude de passo que satisfaz a condição de Armijo, e assim o algoritmo gera uma sequência de pontos que convergem na solução do problema (A.1). Para provar convergência global do FDIPA diversas hipóteses são assumidas

## A.1 Algoritmo FDIPA

Nesta seção é apresentada o algoritmo FDIPA para problemas com restrições de desigualdade que convergem globalmente no espaço primal à ponto de KKT do

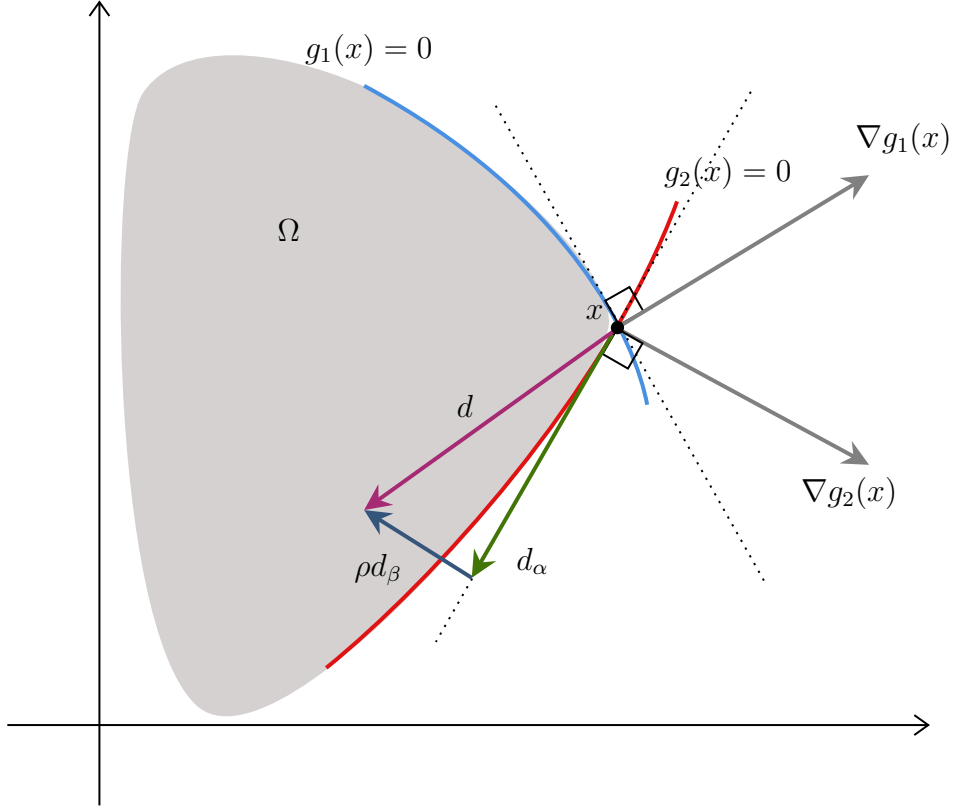


Figura A.2: Enfoque empregado no FDIPA obtendo a direção  $d$  mediante a combinação linear das direções  $d_\alpha$  e  $d_\beta$ .

problema.

### A.1.1 Algoritmo

Parâmetros.  $\xi \in (0, 1)$ ,  $\eta \in (0, 1)$ ,  $\varphi > 0$  y  $\nu \in (0, 1)$ .

Dados.  $x \in \Omega_a^0$ ,  $0 < \lambda \in R^m$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matriz simétrica e definida positiva.

Passo 1. Cálculo da direção de busca

i) Calcula-se  $(d_\alpha, \lambda_\alpha)$  resolvendo o sistema linear

$$Bd_\alpha + \nabla g(x)\lambda_\alpha = -\nabla f(x), \quad (\text{A.10})$$

$$\Lambda \nabla g^\top(x)d_\alpha + G(x)\lambda_\alpha = 0. \quad (\text{A.11})$$

Se  $d_\alpha = 0$ , STOP.

ii) Calcula-se  $(d_\beta, \lambda_\beta)$  resolvendo o sistema linear

$$Bd_\beta + \nabla g(x)\lambda_\beta = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\Lambda \nabla g^\top(x)d_\beta + G(x)\lambda_\beta = -\lambda. \quad (\text{A.13})$$

iii) Se  $d_\beta^\top \nabla f > 0$ , se estabelece que

$$\rho = \min\{\varphi\|d_\alpha\|^2; (\xi - 1)d_\alpha^\top \nabla f / d_\beta^\top \nabla f(x)\}. \quad (\text{A.14})$$

Em outros casos, se estabelece

$$\rho = \varphi\|d_\alpha\|^2. \quad (\text{A.15})$$

iv) Calcula-se a direção de busca

$$d = d_\alpha + \rho d_\beta \quad (\text{A.16})$$

e

$$\bar{\lambda} = \lambda_\alpha + \rho \lambda_\beta. \quad (\text{A.17})$$

Passo 2. Busca Linear. Calcula-se  $t$ , o primeiro número da sequência  $\{1, v, v^2, \dots\}$  que satisfaz

$$f(x + td) \leq f(x) + t\eta \nabla f^\top(x) d \quad (\text{A.18})$$

e

$$g_i(x + td) < 0, \text{ si } \bar{\lambda}_i \geq 0, \quad (\text{A.19})$$

$$g_i(x + td) < g_i(x), \text{ si } \bar{\lambda}_i > 0. \quad (\text{A.20})$$

Passo 3. Atualizações.

- $x := x + td$  e define-se novos valores para  $\lambda > 0$  e  $B$ .
- Voltar ao Passo 1.