

ANÁLISE DINÂMICA DE TORRES E ESTRUTURAS

ELEVADAS LATERALMENTE CARREGADAS

ROMILDE ALMEIDA DE OLIVEIRA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA-  
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

Romilde Almeida Oliveira  
Presidente

Sydney Sastry

Fernand I. Larrieu

Syrotendre V. Chary

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
FEVEREIRO - 1974

A Ediana e Enrico

A meus pais

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Paulo Alcântara Gomes, pela sugestão e orientação deste trabalho.

Aos meus Professores na COPPE pelos ensinamentos, e a todo Corpo Docente da COPPE pelo muito que tem feito em prol da elevação do nível da engenharia nacional.

À CAPES, Universidade Federal de Pernambuco e Universidade Católica de Pernambuco, pelo apoio financeiro.

À Sra. Marlene Verissimo pela apresentação datilográfica e ao Sr. Victor Samaniego pela confecção dos desenhos.

## RESUMO

São estudados dois modelos para análise dinâmica de estruturas de grande altura que tenham comportamentos assimiláveis ao de uma viga em balanço ou que tenham diafragmas rígidos horizontais. É suposta a ação do vento sob o ponto de vista determinista.

As equações gerais do movimento são obtidas a partir do Princípio de Hamilton. É introduzido o amortecimento do tipo viscoso.

Algumas considerações são feitas sobre a construção da matriz de amortecimento, fixando-se percentagens do amortecimento crítico, desacoplamento de sistemas amortecidos e métodos de cálculo de valores característicos.

Foi desenvolvido um programa automático em linguagem FORTRAN para o IBM/360 que fornece as características dinâmicas e resposta a diversos tipos de solicitações.

## ABSTRACT

The dynamic response of tall building is studied for two different behaviors of structures: a cantilever beam and a shear building. The wind action is supposed to be deterministic.

A viscous type damping is introduced and the general equations of the motion are obtained from the Hamilton Principle.

Some considerations are done on the nature of the damping matrix, by means of specifying the percentage of critical damping, uncoupling of damped systems and methods for the calculation of the eigenvalues.

An automatic computer program is developed to provide the dynamic characteristics and response to several types of loading. The program is written in FORTRAN for the IBM/360 computer.

*ÍNDICE*

PAG.

CAPÍTULO I - <u>INTRODUÇÃO</u>	1
CAPÍTULO II - <u>FUNDAMENTOS TEÓRICOS</u>	
2.1 - INTRODUÇÃO	4
2.1.1 - PRINCÍPIO DE HAMILTON	5
2.1.2 - EQUAÇÕES DE LAGRANGE	6
2.2 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO	7
2.3 - VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS	12
2.3.1 - CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS	12
2.3.2 - PROPRIEDADES DOS MODOS NORMAIS	16
2.4 - DESACOPLAMENTO DE SISTEMAS AMORTECIDOS	18
2.4.a - RELAÇÃO ENTRE A MATRIZ MODAL $[\Phi]$ E AS MATRIZES $[\Theta]$ e $[\Psi]$	21
2.4.b - CÁLCULO DA MATRIZ DE AMORTECI- MENTO	23
2.4.c - CARACTERIZAÇÃO DO AMORTECIMEN- TO ATRAVÉS DE PERCENTAGENS DO AMORTECIMENTO CRÍTICO	24
2.4.d - SOBRE ALGUMAS HIPÓTESES CLÁSSI- CAS RELATIVAS À MATRIZ DE AMOR- TECIMENTO	27
2.4.e - EXPRESSÃO DAS ENERGIAS E DESA- COPLAMENTO DO SISTEMA AMORTECI- DO	28

2.5 - VIBRAÇÕES FORÇADAS	31
2.6 - CÁLCULO DOS AUTO-VALORES E VETORES	35
2.6.1 - MÉTODO DE ITERAÇÃO DE MATRIZES	36
2.6.2 - MÉTODO DE JACOBI	40
2.6.3 - MÉTODO DE GIVENS-HOUSEHOLDER	44
<b>CAPÍTULO III - <u>DESENVOLVIMENTO DOS MODELOS</u></b>	
3.1 - INTRODUÇÃO	48
3.2 - ELEMENTO DE VIGA	48
3.2.1 - FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO	48
3.2.2 - MATRIZ DE RIGIDEZ	53
3.2.3 - MATRIZ DE MASSAS CONSISTENTES	55
3.2.4 - VETOR DE CARGAS NODAIS EQUIVALENTES	57
3.2.4.1 - FORÇAS VARIANDO LINEARMENTE AO LONGO DO ELEMENTO	57
3.2.4.2 - MOMENTOS VARIANDO LINEARMENTE AO LONGO DO ELEMENTO	58
3.2.5 - MATRIZ DE FLEXIBILIDADE	59
3.2.5.1 - EFEITO DE FLEXÃO	59
3.2.5.2 - EFEITO DE CISALHAMENTO	61
3.3 - ESTRUTURAS COM DIAFRAGMAS RÍGIDOS	63
3.3.1 - MATRIZ DE RIGIDEZ	63

3.3.2 - MATRIZ DE FLEXIBILIDADE	66
3.4 - NOTA SOBRE O COEFICIENTE DE CISALHAMENTO	66
<b>CAPÍTULO IV - PROGRAMA AUTOMÁTICO</b>	
4.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS	68
4.2 - DIAGRAMA DE BLOCOS	71
4.3 - ESQUEMA PARA OVERLAY	72
4.4 - DESCRIÇÃO DAS SUBROTINAS	73
4.5 - MANUAL DE ENTRADA	79
<b>CAPÍTULO V - APLICAÇÕES, EXEMPLOS E CONCLUSÕES</b>	
5.1 - CONSIDERAÇÕES SOBRE O VENTO	86
5.1.1 - RELAÇÃO ENTRE A VELOCIDADE DO VENTO E A PRESSÃO EXERCIDA SOBRE UMA SUPERFÍCIE PLANA	87
5.1.2 - DIREÇÃO PERPENDICULAR À DO VENTO	88
5.2 - APLICAÇÕES DOS MODELOS ESTUDADOS	90
5.3 - EXEMPLOS	92
5.3.1 - EXEMPLO 1	92
5.3.2 - EXEMPLO 2	96
5.3.2.1 - CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA	96
5.3.2.2 - CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS	98
5.3.2.3 - INFLUÊNCIAS DO AMORTECIMENTO	99

5.3.2.4 - INFLUÊNCIA DO CRES-	
CIMENTO DA CARGA	99
5.3.2.5 - CARGA DA NB-5	104
5.3.2.6 - VARIAÇÃO ARBITRÁRIA	
DA CARGA	104
5.4 - CONCLUSÕES	109
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	112
<u>APÊNDICE 1</u>	117
<u>APÊNDICE 2</u>	132
<u>APÊNDICE 3</u>	135

## NOTAÇÃO

- [B] - matriz que relaciona deslocamentos nodais com deformações
- [C] - matriz de amortecimento
- D - função de dissipação de Rayleigh
- [E] - matriz de elasticidade
- E - módulo de elasticidade longitudinal
- {F} - vetor de forças
- [F] - matriz de flexibilidade
- G - módulo de elasticidade transversal
- [I] - matriz unitária
- J - momento de inércia
- [K] - matriz de rigidez
- L - função lagrangeana
- $\ell$  - comprimento do elemento de viga
- [M] - matriz de massas
- [m] - matriz de massas diagonalizada
- M - momento fletor
- m - momento uniformemente distribuído
- [N] - matriz que define o campo de deslocamentos

P - forças nodais equivalentes

p - força uniformemente distribuída

$q_i$  - coordenadas generalizadas

$Q_i$  - forças generalizadas

[R] - matriz de rotação

S - área da seção transversal

$S^*$  - área reduzida

T - energia cinética

T - esforço cortante

t - tempo

U - energia potencial

{u} - vetor dos deslocamentos no interior do elemento

{u} - velocidade

$\ddot{u}$  - aceleração

v - deslocamento transversal de um ponto do eixo de uma viga

$v'_b$  - rotação de uma seção de uma viga

w - trabalho externo

x - abcissa segundo o eixo de uma viga

$$\beta = \frac{E J}{G S^* \ell^2}$$

$\gamma$  - coeficiente de cisalhamento

$\delta_{ij}$  - delta de Kronecker

$\{\epsilon\}$  - vetor das deformações

$\xi_i$  - coordenadas principais

$\{\phi_i\}$  - modos normais de vibrações

$[\Phi]$  - matriz modal

$[\Lambda]$  - matriz triangular inferior usada na transformação de Choleski

$\eta_i$  - percentagem do amortecimento crítico relativo ao modo i

$[\zeta]$  - matriz de amortecimento diagonalizada

$\rho$  - massa específica

$\{\sigma\}$  - vetor das tensões

$\omega$  - freqüência

$\{\cdot\}$  - vetor

$[\cdot]$  - matriz retangular

$[\cdot]$  - matriz diagonal

$\dot{y}$  - derivada em relação ao tempo da variável y

## CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

O estudo de Dinâmica das Estruturas tomou grande impulso nas duas últimas décadas, motivado pela evolução dos computadores digitais e consequente desenvolvimento de métodos de discretização que vieram atender às necessidades da indústria, notadamente a aeronáutica.

A princípio, qualquer problema estrutural é de natureza dinâmica tendo em vista que uma determinada ação sobre ela, antes de atingir um valor que se possa considerar invariável, passa por uma etapa inicial onde evolui com o tempo. O modelo estático seria assim uma simplificação. Em estruturas aeronáuticas, pontes, torres de grande altura (ação do vento), estruturas submetidas a sismos, fundações de máquinas, etc., a análise dinâmica torna-se imperiosa.

Entre os diversos processos numéricos de resolução de problema dinâmico, destaca-se a análise modal que tem como vantagens<sup>(1,2)</sup>: menor tempo de computação, facilidade de interpretação física dos parâmetros e permitir representar o amortecimento por percentagens do amortecimento crítico ( tornando-se desnecessário o conhecimento da matriz de amortecimento ). Uma grande deficiência do método está em não ser aplicável a estruturas de comportamento não-linear.

Alguns conceitos básicos, até recentemen-

te usados sob uma forma intuitiva, sofreram revisões, como foram os casos da matriz de massas com o conceito de massas consistentes introduzido por Archer<sup>(5)</sup> e a formulação matemática da representação do amortecimento através de percentagens do amortecimento crítico decorrentes dos trabalhos de Caughey<sup>(6), (7)</sup>.

Na análise modal um dos pontos que definem a possibilidade de abordar estruturas com grande número de graus de liberdade, é o cálculo das características dinâmicas que constitui um problema de valores característicos. Até pouco tempo o cálculo dos auto-valores e auto-vetores de uma matriz  $10 \times 10$ , era considerado de grande porte. Atualmente buscam-se métodos que permitam trabalhar com matrizes da ordem dos milhares. É ainda assunto de pesquisas como se pode observar através de comunicações e teses de doutoramento em diversos centros.

No presente trabalho se faz uma apreciação do problema geral e análise de modelos simplificados visando o estudo da ação dinâmica do vento em torres. Além das dificuldades anteriormente referidas, tem-se uma adicional que é a natureza da própria solicitação do vento. No Brasil pouco se tem estudado sobre o vento. Um aspecto importante é o conhecimento do seu comportamento por regiões e posterior regulamentação em normas, a exemplo de outros países.

No que segue são tratados no Capítulo II, tópicos da teoria geral de dinâmica e no Capítulo III é feita a sua aplicação aos modelos analisados. No Capítulo IV é feita uma descrição do programa automático desenvolvido e finalmente,

no Capítulo V, são dadas algumas indicações para utilização do programa e apresentados alguns resultados e conclusões.

## CAPÍTULO II

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

As soluções de problemas estáticos em Mecânica podem ser obtidas a partir do princípio dos trabalhos virtuais:

Se um sistema mecânico está em equilíbrio sob a ação de forças aplicadas e vínculos geométricos prescritos, a soma dos trabalhos virtuais infinitesimais compatíveis com os vínculos, é nula.

A recíproca é verdadeira, o que significa dizer que o princípio dos trabalhos virtuais é equivalente às equações de equilíbrio do sistema juntamente com as condições de contorno. Estes mesmos resultados podem ser estendidos para o caso dinâmico com a introdução do princípio de D'Alembert que assegura o equilíbrio das forças exteriores com as de inércia. Tem-se assim, uma formulação completa para os problemas mecânicos no sentido newtoniano. Este modo de abordar o problema necessita do conhecimento das forças. Uma forma alternativa constitui a Mecânica Analítica onde não é necessário conhecer diretamente as forças e sim os efeitos cinemáticos resultantes. Um fato importante é que esta segunda forma envolve quantidades escalares que são independentes do sistema de coordenadas empregado, permitindo a escolha de coordenadas mais adequadas.

O número mínimo de variáveis independentes necessário para descrever o movimento, constitui o número de graus de liberdade do sistema. Este conjunto de variáveis são as coordenadas generalizadas. Neste trabalho serão usados dois resultados da Mecânica Analítica a seguir enunciados<sup>(1)</sup>, <sup>(2)</sup>.

### 2.1.1 - PRINCÍPIO DE HAMILTON

O movimento de um sistema no intervalo  $(t_1, t_2)$  ocorre de tal modo que se em cada instante um deslocamento virtual é dado

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt = 0 \quad (2.1.1)$$

desde que os deslocamentos virtuais em  $t_1$  e  $t_2$  sejam nulos.

O Princípio de Hamilton como enunciado, é aplicável a forças não-conservativas. Se, em particular, as forças forem conservativas

$$\delta W = -\delta U \quad (2.1.2)$$

Sendo  $L = T - U$ , a lagrangeana do sistema, a Eq. (2.1.1) reduz-se a

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (2.1.3)$$

Os valores estacionários da integral que aparece em (2.1.1) e (2.1.3) correspondem, na realidade, a mínimos. O Princípio de Hamilton constitui uma formulação variacional para a determinação das equações do movimento que são obtidas com a condição de estacionaridade.

## 2.1.2 - EQUAÇÕES DE LAGRANGE

Sejam  $q_i \quad i = 1, 2, \dots, n$  as coordenadas generalizadas. Para um sistema em movimento, as equações

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1.4)$$

são satisfeitas, onde  $Q_i$  são as forças generalizadas e tais que

$$W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (2.1.5)$$

As dimensões das forças generalizadas não são necessariamente de forças e suas unidades dependem das coordenadas generalizadas adotadas. A satisfação das equações (2.1.4) conduzem aos valores estacionários de (2.1.1).

Seja agora

$$Q_i = Q_i^{(1)} + Q_i^{(2)} \quad (2.1.6)$$

onde  $Q_i^{(1)}$  é a parcela correspondente às forças conservativas e  $Q_i^{(2)}$  às dissipativas. As forças conservativas podem ser derivadas de um potencial

$$Q_i^{(1)} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (2.1.7)$$

e (2.1.4) pode ser escrita sob a forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i^{(2)} \quad (2.1.8)$$

A caracterização das forças não conservativas, quando do tipo viscoso, pode ser efetuada de forma análoga à equação (2.1.7), introduzindo a função de dissipação de Rayleigh,  $D$ , tal que

$$Q_i^{(2)} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.1.9)$$

e

$$D = \frac{1}{2} \{ \dot{q} \}^T [C] \{ \dot{q} \} \quad (2.1.10)$$

Neste caso, a equação (2.1.8) assume a forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (2.1.11)$$

Se o sistema for conservativo,  $Q_i^{(2)} = 0$  e as equações de Lagrange tornam-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.1.12)$$

## 2.2 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Para aplicação do Método dos Elementos Finitos, supõe-se o contínuo discretizado por elementos ligados entre si através de um número finito de pontos nodais. Os deslocamentos no interior de cada elemento são expressos, em termos dos deslocamentos dos pontos nodais, por relações funcionais - funções de interpolação. As funções de interpolação devem satisfazer a certos critérios<sup>(3,4)</sup> que assegurem a con-

vergênciadas soluções obtidas no modelo discretizado para as soluções do sistema contínuo e conduzem a relações do tipo

$$\{u\} = [N]\{q\} \quad (2.2.1)$$

nas quais a matriz  $[N]$  define o campo de deslocamentos. Os deslocamentos nodais serão tomados como coordenadas generalizadas.

Para cada elemento, a energia cinética será dada por

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \{u\}^T \{u\} dv = \frac{1}{2} \int_V \rho \{\dot{q}\}^T [N]^T [N] \{\dot{q}\} dv \quad (2.2.2)$$

$$\delta T = \{\delta \dot{q}\}^T \int_V \rho [N]^T [N] dv \cdot \{\dot{q}\} \quad (2.2.3)$$

e o trabalho por

$$W = W_d + W_v + W_s + W_a \quad (2.2.4)$$

sendo  $W_d$  o trabalho de deformação,  $W_v$ ,  $W_s$ ,  $W_a$  os trabalhos desenvolvidos pelas forças de volume, pelas forças aplicadas à superfície e pelas forças dissipativas, respectivamente. As forças não conservativas, aqui consideradas, são devidas ao amortecimento, suposto do tipo viscoso.

A equação (2.2.4) pode ser escrita como

$$\delta W = \delta W_d + \delta W_v + \delta W_s + \delta W_a \quad (2.2.5)$$

mas,

$$\delta W_d = -\delta U \quad (2.2.6)$$

Sendo  $U$  a energia potencial de deformação dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dv \quad (2.2.7)$$

O material sendo elástico linear

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} \quad (2.2.8)$$

Exprimindo  $\{\epsilon\}$  em função dos deslocamentos nodais, obtém-se

$$\{\epsilon\} = [B] \{q\} \quad (2.2.9)$$

Substituindo (2.2.9) e (2.2.8) em (2.2.7),

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{q\}^T [B]^T [E] [B] \{q\} dv \quad (2.2.10)$$

Tendo em vista (2.2.6), resulta

$$\delta W_d = - \{\delta q\}^T \int_V [B]^T [E] [B] dv \cdot \{q\} \quad (2.2.11)$$

Para as forças de volume

$$w_v = + \int_V \{u\}^T \{F_v\} dv = \int_V \{q\}^T [N]^T \{F_v\} dv \quad (2.2.12)$$

e

$$\delta w_v = \{\delta q\}^T \int_V [N]^T \{F_v\} dv \quad (2.2.13)$$

Analogamente, para as forças de superfície

$$w_s = \int_s \{u\}^T \{F_s\} ds = \int_s \{q\}^T [N]^T \{F_s\} ds \quad (2.2.14)$$

e

$$w_s = \{\delta q\}^T \int_s [N]^T \{F_s\} ds \quad (2.2.15)$$

A parcela correspondente às forças de amortecimento como consideradas na seção anterior, usando a função de dissipação de Rayleigh será:

$$\begin{aligned}\delta W_a &= - \sum_k \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k = - \\ &= - \sum_k \left[ \frac{1}{2} \{\delta_{ij}\}^T [C] \{\dot{q}\} + \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [C] \{\delta_{ij}\} \right] \delta q_k \quad (2.2.16)\end{aligned}$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker

$$\delta W_a = - \{\delta q\}^T [C] \{\dot{q}\} \quad (2.2.17)$$

A aplicação do Princípio de Hamilton juntamente com as equações (2.2.3), (2.2.11), (2.2.13), (2.2.15) e (2.2.17), fornece

$$\begin{aligned}\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \{\delta \dot{q}\}^T \int_V \rho [\bar{N}]^T [\bar{N}] dv \cdot \{\dot{q}\} - \right. \\ &\quad \{\delta q\}^T \int_V [\bar{B}]^T [\bar{E}] [\bar{B}] dv \cdot \{q\} + \\ &\quad \{\delta q\}^T \int_V [\bar{N}]^T \{F_v\} dv + \{\delta q\}^T \int_S [\bar{N}]^T \{F_s\} dv - \\ &\quad \left. \{\delta q\}^T [C] \{\dot{q}\} \right\} dt = 0 \quad (2.2.18)\end{aligned}$$

Sejam:

$$[\bar{M}]^e = \int_V \rho [\bar{N}]^T [\bar{N}] dv \quad (2.2.19)$$

$$[\bar{K}]^e = \int_V [\bar{B}]^T [\bar{E}] [\bar{B}] dv \quad (2.2.20)$$

$$[C]^e = [C] \quad (2.2.21)$$

$$\{P\}^e = \int_V [\bar{N}]^T \{F_v\} dv + \int_S [\bar{N}]^T \{F_s\} ds \quad (2.2.22)$$

Integrando, por partes, a primeira parcela do segundo membro de (2.2.18)

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\delta q\}^T [\bar{M}]^e \cdot \{\dot{q}\} dt = \left[ \{\delta q\}^T [\bar{M}]^e \{\dot{q}\} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \{\delta q\}^T [\bar{M}]^e \{\ddot{q}\} dt \quad (2.2.23)$$

O primeiro termo do segundo membro de (2.2.23) é nulo, uma vez que o Princípio de Hamilton exige a nullidade de  $\{\delta q\}$  nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ . Assim,

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\delta q\}^T [\bar{M}]^e \cdot \{\dot{q}\} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \{\delta q\}^T [\bar{M}]^e \{\ddot{q}\} dt \quad (2.2.24)$$

Substituindo agora (2.2.24) em (2.2.18) e tendo em vista as relações (2.2.19) a (2.2.22)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt = \int_{t_1}^{t_2} \{\delta q\}^T \left( -[\bar{M}]^e \{\ddot{q}\} - [\bar{C}]^e \{\dot{q}\} - [\bar{K}]^e \{q\} + \{P\} \right) dt = 0$$

Como  $\{\delta q\}$  é arbitrário, tem-se

$$[\bar{M}]^e \{\ddot{q}\} + [\bar{C}]^e \{\dot{q}\} + [\bar{K}]^e \{q\} = \{P\}^e \quad (2.2.25)$$

que é a equação do movimento para um elemento qualquer.

Efetuando a associação ao longo de toda a estrutura, obtém-se:

$$[\mathbf{M}] \{q'\} + [\mathbf{C}] \{\dot{q}\} + [\mathbf{K}] \{q\} = \{P\} \quad (2.2.26)$$

A matriz  $[\mathbf{M}]$  obtida desta maneira é a matriz de massas consistentes que foi introduzida inicialmente por Archer<sup>(5)</sup>. É costume conceber as massas concentradas em certos pontos da estrutura, obtendo-se, assim, uma matriz diagonal. No entanto, com a formulação do Método dos Elementos Finitos, suposta a existência da matriz  $[\mathbf{N}]$  dada em (2.2.1), resulta ser a matriz de massas consistentes a única admissível para assegurar a convergência do método. Com este procedimento, obtém-se frequências que convergem para as exatas por valores superiores<sup>(5)</sup>, enquanto que, com massas concentradas<sup>(5)</sup>, nada se pode afirmar.

Em (2.2.20)  $[\mathbf{K}]^e$  é a matriz de rigidez do elemento e, em (2.2.22),  $\{P\}^e$  é o vetor de cargas nodais equivalentes. Em (2.2.21),  $[\mathbf{C}]^e$  é a matriz de amortecimento que, em analogia com a terminologia para a matriz de massas, poderia ser chamada de matriz de amortecimento consistente.

## 2.3 - VIBRAÇÕES LIVRES NÃO-AMORTECIDAS

### 2.3.1 - CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS

Na ausência de cargas aplicadas e de amortecimento, tendo a estrutura sofrido uma certa excitação, a equação do movimento (2.2.26) se reduz a

$$[\mathbf{M}] \{q'\} + [\mathbf{K}] \{q\} = \{0\} \quad (2.3.1)$$

Seja <sup>(2)</sup>

$$q_i(t) = \phi_i f(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3.2)$$

Substituindo (2.3.2) em (2.3.1)

$$[M] \{ \phi \} \ddot{f}(t) + [K] \{ \phi \} f(t) = 0$$

ou

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \phi_j \ddot{f}(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} \phi_j f(t) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

que pode ser escrita como

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n k_{ij} \phi_j}{\sum_{j=1}^n m_{ij} \phi_j} = \lambda \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3.3)$$

Da equação (2.3.3) nota-se que  $\lambda$  é uma constante, pois não depende de  $t$  ou de  $i$ . Assim,

$$\ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0 \quad (2.3.4)$$

A equação (2.3.4) tem como solução:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin(\sqrt{\lambda} t + \theta) \quad \lambda > 0 \\ f(t) &= A \operatorname{senh} \sqrt{\lambda} t + B \cosh \sqrt{\lambda} t \quad \lambda < 0 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Levando (2.3.5) em (2.3.2), tem-se

$$q_i(t) = \phi_i \sin(\sqrt{\lambda} t + \theta) \quad (2.3.6)$$

ou

$$q_i(t) = \phi_i (A \operatorname{senh} \sqrt{\lambda} t + B \cosh \sqrt{\lambda} t) \quad (2.3.7)$$

Para o sistema, nas condições de (2.3.1), a energia total

$$E = \frac{1}{2} \{ \dot{q} \}^T [M] \{ q \} + \frac{1}{2} \{ q \}^T [K] \{ q \} \quad (2.3.8)$$

é conservada, sendo E limitada. Portanto,  $\{q\}$  não poderia ser determinado por (2.3.7) e  $\lambda$  é positivo. Seja

$$\lambda = \omega^2 \quad (2.3.9)$$

Assim

$$\{q\} = \{\phi\} \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \quad (2.3.10)$$

o que significa que todos os pontos executam movimentos harmônicos de mesma frequência  $\omega$  e mesma fase  $\theta$  e amplitudes  $\phi_i$ . Com

(2.3.10) e (2.3.1), tem-se

$$-\omega^2 [M] \{\phi\} + [K] \{\phi\} = 0$$

ou

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\phi\} = 0 \quad (2.3.11)$$

A equação (2.3.11) tem solução não-trivial se

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (2.3.12)$$

que é a equação característica ou equação de frequências. As suas n raízes são os valores característicos ou auto-valores. A existência de n valores positivos de  $\omega^2$  é assegurada pelo fato de serem  $[K]$  e  $[M]$  reais positivas. Os valores positivos de  $\omega_i$  são as frequências naturais do sistema, enquanto que  $\omega_1$  (menor valor) é chamado de frequência fundamental. A equação (2.3.11), para cada  $\omega_i$ , tem uma família de vetores da forma  $a_i \{\phi\}_i$  não nulos para solução que são os vetores característicos ou auto-vetores associados a  $\omega_i$ . Os elementos de  $\{\phi\}_i$  são as amplitudes dos movimentos harmônicos, de acordo com (2.3.10). Em geral, no cálculo

lo da resposta dinâmica, como será visto mais adiante, um fator multiplicativo nos auto-vetores não afeta os resultados; daí, para se trabalhar com soluções unívocas nos auto-vetores é de interesse efetuar a normalização dos vetores característicos, dividindo os seus elementos pelo maior deles, por exemplo. Os vetores resultantes são chamados modos normais ou principais de vibrações. As  $n$  frequências e os  $n$  modos normais de vibrações são invariantes do sistema que dependem das propriedades físico-geométricas traduzidas por  $[K]$  e  $[M]$ . Por esta razão, as frequências e modos normais são chamadas características dinâmicas ou vibratórias do sistema.

Como o conjunto dos modos normais é completo, ele constitui uma base para o espaço vetorial  $n$ -dimensional dos deslocamentos e, portanto, qualquer movimento possível do sistema pode ser expresso como uma combinação linear dos modos normais. A solução do problema dinâmico, conduzida desta maneira, constitui a análise modal ou método de superposição modal.

Os modos normais podem ser dispostos segundo uma matriz quadrada

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \, \{\phi\}_2 \, \dots \, \{\phi\}_n] \quad (2.3.13)$$

que é chamada matriz modal.

Semelhantemente, as frequências naturais podem ser dispostas segundo uma matriz diagonal.

$$[\Omega] = [w_i] \quad (2.3.14)$$

denominada matriz espectral.

O problema de auto-valor pode, agora, ser escrito sob a forma compacta.

$$[\underline{K}] [\Phi] = [\omega^2] [\underline{M}] [\Phi] \quad (2.3.15)$$

### 2.3.2 - PROPRIEDADES DOS MODOS NORMAIS

#### a) ORTOGONALIDADE

De (2.3.15) podemos escrever:

$$[\underline{K}] \{\phi\}_i = \omega_i^2 [\underline{M}] \{\phi\}_i \quad (2.3.16)$$

$$[\underline{K}] \{\phi\}_j = \omega_j^2 [\underline{M}] \{\phi\}_j \quad (2.3.17)$$

Pré-multiplicando (2.3.16) por  $\{\phi\}_j^T$  e (2.3.17) por  $\{\phi\}_i^T$

$$\{\phi\}_j^T [\underline{K}] \{\phi\}_i = \omega_i^2 \{\phi\}_j^T [\underline{M}] \{\phi\}_i \quad (2.3.18)$$

$$\{\phi\}_i^T [\underline{K}] \{\phi\}_j = \omega_j^2 \{\phi\}_i^T [\underline{M}] \{\phi\}_j \quad (2.3.19)$$

Transpondo ambos os membros de (2.3.18) e subtraindo (2.3.19)

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \{\phi\}_i^T [\underline{M}] \{\phi\}_j = 0 \quad (2.3.20)$$

De (2.3.20)

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ = m_i \omega_i^2 & i = j \end{cases} \quad (2.3.21)$$

Substituindo (2.3.21) em (2.3.19), resulta:

$$\{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ = m_i \omega_i^2 & i = j \end{cases} \quad (2.3.22)$$

Assim, os modos normais são ortogonais relativamente às matrizes de massa e de rigidez.

### b) DESACOPLAMENTO

Seja a transformação linear

$$\{q\} = [\Phi] \{\xi\} \quad (2.3.23)$$

Levando (2.3.23) em (2.3.1),

$$[M] \ddot{[\Phi]} \{\xi\} + [K] \dot{[\Phi]} \{\xi\} = \{0\}$$

Pré-multiplicando por  $[\Phi]^T$

$$[\Phi]^T [M] \ddot{[\Phi]} \{\xi\} + [\Phi]^T [K] \dot{[\Phi]} \{\xi\} = \{0\} \quad (2.3.24)$$

Em virtude da ortogonalidade

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [M] [\Phi] &= [m_i] \\ [\Phi] [K] [\Phi] &= [m_i \omega_i^2] \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

Então:

$$[m_i] \{\ddot{\xi}\} + [m_i \omega_i^2] \{\xi\} = \{0\} \quad (2.3.26)$$

Tem-se, portanto, um conjunto de  $n$  equações diferenciais independentes de 2ª ordem semelhantes às do caso unidimensional

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0 \quad i = 1, n \quad (2.3.27)$$

Desta maneira, a matriz modal define uma transformação linear que desacopla o sistema (2.3.1).

As coordenadas  $\xi_i$  são as coordenadas principais do sistema. Condições mais gerais sobre o desacoplamento de sistemas serão examinadas na seção seguinte.

## 2.4 - DESACOPLAMENTO DE SISTEMAS AMORTECIDOS

Em análise dinâmica de estruturas por várias razões que serão examinadas a seguir, é de grande importância saber sob quais condições o sistema:

$$[\mathbf{M}] \{q\} + [\mathbf{C}] \{\dot{q}\} + [\mathbf{K}] \{q\} = \{0\} \quad (2.4.1)$$

possui modos normais. Lord Rayleigh mostrou que se  $[\mathbf{C}] = \alpha [\mathbf{M}] + \beta [\mathbf{K}]$ , então (2.4.1) possui modos normais. Vários autores que trabalham com sistemas amortecidos assumem com o intuito de simplificar o problema matemático de integração da equação (2.4.1) que a matriz modal do sistema não-amortecido também diagonaliza a matriz  $[\mathbf{C}]$  e assim um conjunto de equações semelhantes a (2.3.27) é obtido. Isto no entanto, só é verdadeiro sob condições bastante restritas. Caughey<sup>(6)</sup> em 1960 e Caughey-O'Kelly<sup>(7)</sup> em 1965 estabeleceram as condições necessárias e suficientes para que o sistema (2.4.1) seja desacoplado. Estes resultados e alguns deles decorrentes serão a seguir, apresentados.

Desde que  $[\mathbf{M}]$  é simétrica e positiva definida, é sempre possível encontrar uma transformação que reduza o primeiro termo de (2.4.1) à matriz unidade<sup>(8)</sup>. Seja  $[\theta]$  esta transformação.

$$\{q\} = [\theta] \{z\} \quad (2.4.2)$$

Substituindo (2.4.2) em (2.4.1) e pré-multiplicando por  $[\theta]^T$ ,

$$[\theta]^T [\mathbf{M}] [\theta] \{z\} + [\theta]^T [\mathbf{C}] [\theta] \{z\} + [\theta]^T [\mathbf{K}] [\theta] \{z\} = \{0\}$$

Sejam:

$$[\theta]^T [M] [\theta] = [I]$$

$$[\theta]^T [C] [\theta] = [A] \quad (2.4.3)$$

$$[\theta]^T [K] [\theta] = [B]$$

dai,

$$[I] \{z\} + [A] \{\dot{z}\} + [B] \{z\} = \{0\} \quad (2.4.4)$$

Definição: Se o sistema (2.4.4) possui um conjunto completo de auto-vetores ortonormais, diz-se que tem modos normais clássicos.

Teorema I - ( Caughey<sup>(6)</sup> )

O sistema (2.4.4) tem modos normais clássicos se, e só se as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  se comutam no produto, isto é,

$$[A] [B] = [B] [A] \quad (2.4.5)$$

Corolário - A condição necessária e suficiente para que o sistema (2.4.1) tenha modos normais clássicos é que:

$$([M]^{-1} [C]) ([M]^{-1} [K]) = ([M]^{-1} [K]) ([M]^{-1} [C]) \quad (2.4.6)$$

Uma observação importante é que a transformação que desacopla o sistema amortecido é a mesma que desacopla o sistema não-amortecido, ou seja, se um sistema amortecido possui modos normais clássicos, estes serão idênticos ao do sis-

tema não-amortecido.

Teorema II - ( Caughey - O'Kelly<sup>(7)</sup> )

A condição necessária e suficiente para que o sistema (2.4.4) tenha modos normais clássicos, é que:

$$[\mathbf{A}] = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j [\mathbf{B}]^j \quad (2.4.7)$$

Na Referência<sup>(7)</sup> o teorema II foi estabelecido sob a restrição de  $[\mathbf{B}]$  ter auto-valores distintos. Lin<sup>(9)</sup> estendeu o resultado para o caso de auto-valores repetidos.

A transformação  $[\Psi]$  que diagonaliza  $[\mathbf{A}]$  e  $[\mathbf{B}]$  é tal que:

$$[\Psi]^T [\Psi] = [\mathbf{I}] \quad (2.4.8)$$

e,

$$[\Psi]^T [\mathbf{A}] [\Psi] = [\mathbf{D}_n] \quad (2.4.9)$$

$$[\Psi]^T [\mathbf{B}] [\Psi] = [\lambda]$$

Com a aplicação dos teoremas I e II, podem ser obtidos os resultados seguintes:

2.4.a) Relação entre a matriz modal  $[\Phi]$  e as matrizes  $[\Theta]$  e  $[\Psi]$

Da propriedade de ortogonalidade:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [m]$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [m\omega^2] \quad (2.4.10)$$

Pré- e pós-multiplicando (2.4.10) por  $[m]^{-1/2}$

$$[m]^{-1/2} [\Phi]^T [M] [\Phi] [m]^{-1/2} = [m]^{-1/2} [m] [m]^{-1/2} = [I]$$

$$[m]^{-1/2} [\Phi]^T [K] [\Phi] [m]^{-1/2} = [m]^{-1/2} [m\omega^2] [m]^{-1/2} = [\omega^2]$$

ou,

$$\begin{aligned} ([\Phi] [m]^{-1/2})^T [M] ([\Phi] [m]^{-1/2}) &= [I] \\ ([\Phi] [m]^{-1/2})^T [K] ([\Phi] [m]^{-1/2}) &= [\omega^2] \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

De (2.4.3), (2.4.8) e (2.4.9),

$$\begin{aligned} ([\theta] [\psi])^T [M] ([\theta] [\psi]) &= [I] \\ ([\theta] [\psi])^T [K] ([\theta] [\psi]) &= [\lambda] \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Tendo em vista a unicidade de  $[\Phi]$ , comparando (2.4.11) e (2.4.12):

$$[\theta] [\Psi] = [\Phi] [m]^{-\frac{1}{2}}$$

Portanto:

$$[\Phi] = [\theta] [\Psi] [m]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.4.13)$$

2.4.b) Cálculo da matriz de amortecimento em termos das matrizes de massa e rigidez.

Do Teorema II:

$$[A] = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j [B]^j \quad (2.4.7)$$

Utilizando as relações (2.4.3) em (2.4.7)

$$\begin{aligned} [\theta]^T [C] [\theta] &= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j [B]^j = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j ([\theta]^T [K] [\theta])^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j ([\theta]^T [K] [\theta]) \dots ([\theta]^T [K] [\theta]) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j [\theta]^T [K] ([\theta] [\theta]^T [K] ([\theta] [\theta]^T \dots ([\theta] [\theta]^T \dots ([\theta] [\theta]^T [K] [\theta])^j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j [\theta]^T [K] ([M]^{-1} [K]) \dots ([M]^{-1} [K]) [\theta] \\ &= [\theta]^T \left( \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j [K] ([M]^{-1} [K])^{j-1} \right) [\theta] \end{aligned}$$

Tem-se, assim

$$[C] = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j [K] ([M]^{-1} [K])^{j-1} \quad (2.4.14)$$

A matriz  $[C]$  dada por (2.4.14) constitui uma condição necessária e suficiente para que o sistema (2.4.1) seja desacoplado. Vários autores <sup>(2, 10, 11)</sup> baseados na referência <sup>(6)</sup> apresentam uma construção da matriz  $[C]$  através de uma série infinita que é uma condição apenas suficiente para o desacoplamento. A introdução da condição necessária estabelecida na referência <sup>(7)</sup>, conduz à forma polinomial (2.4.14).

#### 2.4.c) Caracterização do amortecimento através de percentagens do amortecimento crítico.

Quando se representa a amortecimento através de percentagens do amortecimento crítico, o procedimento é o que segue <sup>(2, 12, 13, 14)</sup>:

- i) - Considera-se, por hipótese, que a matriz  $[C]$  é diagonalizada pela matriz modal  $[\Phi]$ .
- ii) - Supõe-se  $[\Phi]^T [C] [\Phi] = [2\eta_{i\text{um}}]$ , onde  $\eta_i$  é a percentagem do amortecimento crítico relativo ao modo  $i$ .
- iii) - Com i) e ii) efetua-se a integração das  $n$  equações diferenciais independentes resultantes.

A motivação para se adotar a hipótese ii), é de simplificar o tratamento matemático aliada ao fato de que os

resultados experimentais mostram ser uma hipótese admissível. A literatura indica que se algo existe de conhecido sobre o amortecimento em estruturas, tendo em vista as aplicações no estágio atual, são as percentagens do amortecimento crítico.

No caso mais geral, para a determinação da matriz de amortecimento, seria necessário o conhecimento de pelo menos  $n(n + 1)/2$  parâmetros. Adotando-se a hipótese ii), impõe-se ao sistema ter modos normais clássicos e se pode calcular a matriz de amortecimento através de apenas n parâmetros. Sob estas considerações, será apresentada uma forma construtiva da matriz  $|C|$ .

Com (2.4.7) e (2.4.9)

$$[\Psi]^T [A] [\Psi] = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j [\Psi]^T [B]^j [\Psi] = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j [\lambda]^j = [\mu]$$

$$\text{Fazendo-se } \mu_i m_i = 2 n_i \omega_i m_i$$

$$\lambda_i m_i = m_i \omega_i^2$$

ou

$$\lambda_i = \omega_i^2$$

$$\mu_i = 2 n_i \omega_i$$

Tem-se o sistema

Se todas as frequências forem diferentes, os  $\alpha_i$  serão univocamente determinados, o que é facilmente visto pelo fato do determinante da matriz dos coeficientes de Vandermonde. Com os  $\alpha_i$  determinados em (2.4.15) substituídos em (2.4.14), tem-se a matriz de amortecimento.

Para o caso de frequências múltiplas seja

$$[A] = f([B]) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j [B]^j,$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$  os k auto-valores distintos

e

$\lambda_\ell = \lambda_{\ell+1} = \dots = \lambda_{\ell+m}$  um auto-valor de multiplicidade  $m+1$ . Pelo teorema de Cayley-Hamilton, para as k frequências distintas, tem-se k equações do tipo (2.4.15) e m equações do tipo<sup>(\*)</sup>

$$\left( \frac{df}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_\ell} = \alpha_1 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1} \lambda_\ell^{n-2} = n_\ell \lambda_\ell^{-1/2}$$

.....

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^m f}{d\lambda^m} \right)_{\lambda=\lambda_\ell} &= m! \alpha_m + \dots + (n-m)(n-m+1) \dots (n-1) \lambda_\ell^{n-m-1} = \\ &= (-1)^{m+1} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2m-1)}{2^{m-1}} n_\ell \lambda_\ell^{-(2m-1)/2} \end{aligned}$$

(2.4.16)

para cada raiz múltipla, ou seja:

$$\alpha_1 + \dots + (n-1) \alpha_{n-1} \omega_\ell^{2(n-2)} = \eta_\ell \omega_\ell^{-1}$$

$$m! \alpha_m + \dots + (n-m) \dots (n-1) \omega_\ell^{2(n-m+1)} = (-1)^{m+1} x$$

$$x \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2m-1)}{2^{m-1}} \eta_\ell \omega_\ell^{-(2m-1)}$$

(2.4.17)

para cada frequência de multiplicadade m.

Observando-se o sistema que permite determinar os  $\alpha_i$  e, tendo em vista que para os sistemas estruturais, as frequências de ordem mais altas são de valores elevados isto irá corresponder a baixos valores dos  $\alpha_i$  respectivos. Isto em termos práticos significa dizer que não é necessário o conhecimento de todos os  $\eta_i$ , o que vem se compatibilizar com o fato bastante conhecido que para se obter boa aproximação na resposta dinâmica, basta considerar alguns modos e frequências mais baixos.

2.4.d) Sobre algumas hipóteses clássicas relativas à matriz de amortecimento.

(i) matriz de amortecimento proporcional à matriz de massas.

Esta hipótese corresponde a se considerar

apenas o primeiro termo da expressão (2.4.14)

$$\alpha_0 [K] ([M]^{-1} [K])^{-1} = \alpha_0 [K] [K]^{-1} [M] = \alpha_0 [M]$$

ii) matriz de amortecimento proporcional à de rigidez.

Equivale a considerar apenas o segundo termo.

$$\alpha_1 [K] ([M]^{-1} [K])^0 = \alpha_1 [K]$$

outra hipótese muito usada é a de se considerar

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$

o que corresponde a se tomar os dois primeiros termos de (2.4.14).

2.4.e) Expressão das energias e desacoplamento do sistema amortecido.

Com os resultados anteriores prova-se o seguinte: (que é equivalente aos teoremas I e II)

"A condição necessária e suficiente para que o sistema

$$[M] \cdot \{q\} + [C] \cdot \{\dot{q}\} + [K] \cdot \{q\} = \{0\}$$

tenha modos normais clássicos (ou que seja desacoplado) é que e -

xista uma transformação linear de coordenadas, tal que as formas quadráticas das energias cinética e potencial, bem como a função de dissipação de Rayleigh não contenham termos cruzados".

### CONDICÃO NECESSÁRIA:

Tem-se

$$\text{Energia cinética } T = \frac{1}{2} \{ \dot{q} \}^T [M] \{ \dot{q} \}$$

$$\text{Energia Potencial } U = \frac{1}{2} \{ q \}^T [K] \{ q \} \quad (2.4.18)$$

$$\text{Função dissipação de Rayleigh } D = \frac{1}{2} \{ \dot{q} \}^T [C] \{ \dot{q} \}$$

Seja a transformação linear definida pela matriz modal

$$\{ q \} = [\Phi] \{ \xi \} \quad (2.4.19)$$

De (2.4.18) e (2.4.19):

$$T = \frac{1}{2} \{ \dot{\xi} \}^T [\Phi]^T [M] [\Phi] \{ \dot{\xi} \} = \frac{1}{2} \{ \dot{\xi} \}^T [m] \{ \dot{\xi} \} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\xi}_i^2$$

$$U = \frac{1}{2} \{ \xi \}^T [\Phi]^T [K] [\Phi] \{ \xi \} = \frac{1}{2} \{ \xi \}^T [m\omega^2] \{ \xi \} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \omega_i^2 \xi_i^2$$

$$D = \frac{1}{2} \{ \dot{\xi} \}^T [\Phi]^T [C] [\Phi] \{ \dot{\xi} \} = \frac{1}{2} \{ \dot{\xi} \}^T [\zeta] \{ \dot{\xi} \} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \zeta_i \dot{\xi}_i^2$$

(2.4.20)

CONDIÇÃO SUFICIENTE:

Tomando-se agora  $T$ ,  $U$  e  $D$  dados por  
(2.4.20) e usando a equação de Lagrange (2.1.11):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_i} + \frac{\partial U}{\partial \dot{\xi}_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}_i} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} = m_i \dot{\xi}_i ; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right) = m_i \ddot{\xi}_i ; \quad \frac{\partial T}{\partial \xi_i} = 0$$

(2.4.21)

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\xi}_i} = m_i \omega_i^2 \dot{\xi}_i \quad \text{e} \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}_i} = \zeta_i \dot{\xi}_i$$

Com (2.4.21) e (2.1.11)

$$m_i \ddot{\xi}_i + \zeta_i \dot{\xi}_i + (m_i \omega_i^2) \dot{\xi}_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

ou sob forma matricial

$$[m] \{ \ddot{\xi} \} + [\zeta] \{ \dot{\xi} \} + [m\omega^2] \{ \dot{\xi} \} = \{ 0 \}$$

o que completa a prova.

As coordenadas  $\xi$  são as coordenadas principais e a transformação citada no enunciado é definida pela ma-

triz modal.

## 2.5 - VIBRAÇÕES FORÇADAS

Nesta seção serão tratadas as vibrações forçadas de sistemas discretos amortecidos.

Seja o sistema dado através de (2.2.26)

$$[M] \{q\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{P\}$$

Como está sendo suposta a existência de modos normais clássicos, tem-se:

$$\xi_i + 2n_i \omega_i \xi_i + \omega_i^2 \xi_i = p_i \quad i = 1, n \quad (2.5.1)$$

com

$$\{p\} = [\Phi]^T \{P\} \quad (2.5.2)$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros de (2.5.1)

$$\left[ s^2 \bar{\xi}_i(s) - s \xi_i(0) - \dot{\xi}(0) \right] + 2\eta_i \omega_i \left[ s \bar{\xi}_i(s) - \xi_i(0) \right] + \omega_i^2 \bar{\xi}(s) = \bar{p}(s)$$

(2.5.3)

ou

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_i(s) &= \frac{\bar{p}_i(s)}{(s+\eta_i \omega_i)^2 + \omega_i^2 (1-\eta_i^2)} + \frac{s+2\eta_i \omega_i}{(s+\eta_i \omega_i)^2 + \omega_i^2 (1-\eta_i^2)} \xi_i(0) + \\ &\quad + \frac{1}{(s+\eta_i \omega_i)^2 + \omega_i^2 (1-\eta_i^2)} \dot{\xi}_i(0) \end{aligned}$$

(2.5.4)

Efetuando a transformação inversa, obtem-se:

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= \frac{1}{\omega_i (1-\eta_i^2)^{1/2}} \int_0^t \exp \left[ -\eta_i \omega_i (t-\tau) \right] \sin \left[ \omega_i (1-\eta_i^2)^{1/2} (t-\tau) \right] p_i(\tau) d\tau + \\ &\quad + \exp(-\eta_i \omega_i t) \left[ \cos \omega_i (1-\eta_i^2)^{1/2} t \right] \xi_i(0) \\ &\quad + \frac{1}{\omega_i (1-\eta_i^2)^{1/2}} \exp(-\eta_i \omega_i t) \sin \left[ \omega_i (1-\eta_i^2)^{1/2} t \right] (\dot{\xi}_i(0) + \eta_i \omega_i \xi_i(0)) \end{aligned}$$

(2.5.5)

A integral que aparece no segundo membro da equação (2.5.5) que fornece a contribuição das forças aplicadas nos deslocamentos é conhecida como integral de Duhamel. Dadas as condições iniciais, a equação (2.5.5) juntamente com a equação (2.4.19), permite determinar os deslocamentos  $q_i$  que definem completamente o movimento.

Se em particular  $\eta_i = 0$  em (2.5.5) tem-se os deslocamentos para o caso não-amortecido.

$$\xi_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \sin [\omega_i(t-\tau)] p_i(\tau) d\tau + \cos (\omega_i t) \xi_i(0) + \frac{1}{\omega_i} \sin (\omega_i t) \dot{\xi}_i(0) \quad (2.5.6)$$

e

$$\{q\} = [\Phi] \{\xi\}$$

A integral de Duhamel para vários tipos de cargas, no caso não-amortecido, está tabelada na referência <sup>(14)</sup>. Para o caso amortecido, foram efetuadas as integrações para diversos tipos de cargas e se encontram tabeladas no apêndice 1.

Sob forma matricial tem-se os deslocamentos

$$\begin{aligned}
 \{q\} &= [\Phi] (\left[ I \right] - \left[ \frac{\omega^2}{n} \right])^{1/2} \left[ \frac{1}{\omega} \right]^{-1} \left[ \frac{m}{n} \right]^{-1} \int_0^t \left[ \exp \left[ n\omega(t-\tau) \right] \right] \\
 &\cdot \left[ \sin \left[ \omega(1-n^2)^{1/2}(t-\tau) \right] \right] \{p\} d\tau + \\
 &+ [\Phi] \left[ \exp(-n\omega t) \right] \left[ \cos \left[ \omega(1-n^2)^{1/2} t \right] \right] \{\xi_{(0)}\} \\
 &+ [\Phi] \left[ \exp(-n\omega t) \right] (\left[ I \right] - \left[ \frac{\omega^2}{n} \right])^{1/2} \left[ \frac{1}{\omega} \right]^{-1} \\
 &\cdot \left[ \sin \left[ \omega(1-n^2)^{1/2} t \right] \right] (\{\dot{\xi}_{(0)}\} + \left[ \frac{1}{n\omega} \right] \{\ddot{\xi}_{(0)}\})
 \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Resta determinar  $\{\xi_{(0)}\}$  e  $\{\dot{\xi}_{(0)}\}$  em termos de  $\{q_{(0)}\}$  e  $\{\dot{q}_{(0)}\}$ .

De (2.4.19)

$$\{q_{(0)}\} = [\Phi] \{\xi_{(0)}\} \tag{2.5.8}$$

Pré-multiplicando por  $[\Phi]^T [M]$  e usando a ortogonalidade

$$[\Phi]^T [M] \{q_{(0)}\} = [\Phi]^T [M] [\Phi] \{\xi_{(0)}\} = [m] \{\xi_{(0)}\}$$

Portanto,

$$\{\xi_{(0)}\} = [m]^{-1} [\Phi]^T [M] \{q_{(0)}\} \tag{2.5.9}$$

Análogamente

$$\{\dot{\xi}_0\} = [\mathbf{m}]^{-1} [\phi]^T [\mathbf{M}] \{\ddot{q}(0)\} \quad (2.5.10)$$

Por derivação de (2.5.7), obtém-se as velocidades  $\{\dot{q}\}$  e acelerações  $\{\ddot{q}\}$ . As forças iniciais serão dadas por

$$\{\mathbf{F}\} = -[\mathbf{M}] \{\ddot{q}\} \quad (2.5.11)$$

## 2.6 - CÁLCULO DOS AUTO-VALORES E VETORES

Na seção (2.3) foi estabelecido o problema de auto-valor para cálculo das frequências e modos normais de vibrações sob a forma

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}]) \{\phi\} = 0 \quad (2.3.11)$$

ou

$$\frac{1}{\omega^2} \{\phi\} = [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{M}] \{\phi\} \quad (2.3.12)$$

outra forma equivalente de (2.3.11) é

$$\omega^2 \{\phi\} = [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{K}] \{\phi\} \quad (2.6.1)$$

Os diversos métodos para cálculo de auto-valores e vetores fornecem os auto-valores em ordem crescente. Como as frequências que mais interessam em problemas estruturais são as de ordem mais baixa, segue-se que a forma dada pela equação (2.3.12) é mais conveniente. Apesar de envolver a inversa de matriz de rigidez, esta inversão, em geral, não é necessária ser

efetuada diretamente. Para sistemas vinculados suficientemente ,  
 $[K]^{-1}$  é a matriz de flexibilidade.

### 2.6.1 - MÉTODO DE ITERAÇÃO DE MATRIZES<sup>(2, 17)</sup>

Também conhecido como método das potências ou de STODOLA. Parte da hipótese de que todas as frequências são diferentes, o que é uma de suas limitações.

Seja a matriz dinâmica

$$[D] = [K]^{-1} [M] \quad (2.6.2)$$

de (2.3.12)

$$[D] \{\phi\}_i = \frac{1}{\omega_i^2} \{\phi\}_i \quad (2.6.3)$$

Como foi visto na seção (2.3), qualquer movimento do sistema pode ser expresso como uma combinação linear dos modos normais. Seja  $\{\phi^{(1)}\}$  uma primeira aproximação para o primeiro modo

$$\{\phi^{(1)}\} = c_1 \{\phi\}_1 + c_2 \{\phi\}_2 + \dots + c_n \{\phi\}_n \quad (2.6.4)$$

Pré-multiplicando (2.6.4) por  $[D]$ , tem-se

$$\{\phi^{(2)}\} = [D] \{\phi^{(1)}\} = \sum_{i=1}^n c_i [D] \{\phi\}_i = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\omega_i^2} \{\phi\}_i$$

De forma semelhante, podemos formar a sequência

$$\{\phi^{(m)}\} = [\mathbf{D}] \{\phi^{(m-1)}\} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\omega_i^{2(m-1)}} \{\phi\}_i = \\ = \frac{1}{\omega_1^{2m}} \left[ c_1 \{\phi\}_1 + \sum_{i=2}^m c_i \left( \frac{\omega_1}{\omega_i} \right)^{2m} \{\phi\}_i \right] \quad (2.6.5)$$

Seja  $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$ . Se  $m \rightarrow \infty$ , o primeiro termo do segundo membro de (2.6.5) torna-se predominante e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\phi_k^{m-1}}{\phi_k^m} = \omega_1^2 \quad (2.6.6)$$

obtendo-se a primeira frequência. De (2.6.6) e (2.6.5), sendo  $m$  o número de iterações necessário para produzir uma aproximação fixada, tem-se

$$\{\phi^{(m+1)}\} = \frac{1}{\omega_1^2} \{\phi^{(m)}\} \quad (2.6.7)$$

Para determinação dos modos mais altos e frequências correspondentes, chega-se a um esquema análogo, usando as relações de ortogonalidade. Para o segundo modo, sendo este ortogonal ao primeiro, assume-se que o vetor de partida é ortogonal.

$$\{\phi\}_1^T [\mathbf{M}] \{\phi^{(1)}\} = 0 \quad (2.6.8)$$

Pré-multiplicando (2.6.4) por  $\{\phi\}_1^T [\mathbf{M}]$  e usando (2.6.8)

$$\sum_{i=1}^n c_i \{\phi\}_1^T [M] \{\phi\}_i = c_1 \{\phi\}_1^T [M] \{\phi\}_1 = 0 \quad (2.6.9)$$

Então,

$$c_1 = 0 \quad (2.6.10)$$

Tem-se, agora, a expressão que fornece uma primeira aproximação para o segundo modo

$$\{\phi^{(1)}\} = \sum_{i=2}^n c_i \{\phi\}_i \quad (2.6.11)$$

Sejam

$$\{\phi^{(1)}\}^T = \{\phi_1^{(1)} \dots \phi_n^{(1)}\}$$

$$\{\phi_1\}_1^T = \{\phi_{11} \dots \phi_{1n}\}$$

De (2.6.8)

$$\phi_1^{(1)} = - \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_{il} \phi_{li}} \left( \phi_2^{(1)} \sum_{i=1}^n m_{i2} \phi_{li} + \dots + \phi_n^{(1)} \sum_{i=1}^n m_{in} \phi_{li} \right) \quad (2.6.12)$$

O primeiro elemento da coluna de prova é determinado através de (2.6.12), enquanto que os demais são arbitrários. Sob forma matricial:

$$\left[ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccccc} -\frac{\sum_{i=1}^n m_{i2}\phi_{li}}{\sum_{i=1}^n m_{il}\phi_{li}} & \dots & -\frac{\sum_{i=1}^n m_{in}\phi_{li}}{\sum_{i=1}^n m_{il}\phi_{li}} & \left\{ \begin{array}{c} \phi_1^{(1)} \\ \phi_2^{(1)} \\ \vdots \\ \phi_n^{(1)} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} \phi_1^{(1)} \\ \phi_2^{(1)} \\ \vdots \\ \phi_n^{(1)} \end{array} \right\} \\ \hline 1 & \dots & \dots & 0 & c \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \phi_n^{(1)} \end{array} \right] \quad (2.6.13)$$

ou

$$[\mathbf{s}_1] \cdot \{\phi^{(1)}\} = \{\phi^{(1)}\}_{\mathbf{C}} \quad (2.6.14)$$

Desta maneira, podemos formar a sequência

$$[\mathbf{D}] \cdot \{\phi^{(1)}\}_C = [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{s}_1] \cdot \{\phi^{(1)}\} = \{\phi^{(2)}\}$$

(2.6.15)

$$[\mathbf{D}] \cdot \{\phi^{(m-1)}\}_{\mathbf{C}} = [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{s}_1] \cdot \{\phi^{(m-1)}\} = \{\phi^m\}$$

Com as mesmas considerações anteriores, observa-se que a convergência se verifica para a segunda frequência " e segundo modo. Analogamente se procede para os modos seguintes.

Em geral, para um modo de ordem  $p+l$  tem-se p relações de ortogonalidade que conduzem à matriz de iteração sob a forma  $[D] [S]$ .

Este método tem aplicabilidade quando se conhece a matriz de flexibilidade, pois caso contrário seria necessário inverter a matriz de rigidez, o que é um inconveniente quando se trata de grande número de graus de liberdade. Para o cálculo da primeira frequência e primeiro modo tem-se convergência rápida. O número de iterações aumenta com o número de modos. Quando se tem auto-valores próximos, a convergência é lenta.

#### 2.6.2 - MÉTODO DE JACOBI

Sejam  $[A]$  uma matriz, real e simétrica, para a qual o problema de auto-valores está colocado sob a forma

$$[A] [\Phi] = [\lambda] [\Phi] \quad (2.6.16)$$

e a matriz de rotação construída como segue

$$[R] = \begin{bmatrix} & i & & j \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \cos \alpha & 0 & 0 & -\sin \alpha & \dots & 0 & \dots & i \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sin \alpha & 0 & 0 & \cos \alpha & \dots & 0 & \dots & j \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \end{bmatrix} \quad (2.6.17)$$

Uma matriz dada por

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{R}]$$

tem a seguinte construção

$$b_{kl} = a_{kl} \quad k, l \neq i, j$$

$$b_{ik} = a_{ik} \cos \alpha + a_{jk} \sin \alpha \quad k \neq j$$

$$b_{jk} = -a_{ik} \sin \alpha + a_{jk} \cos \alpha$$

$$b_{ii} = a_{ii} \cos^2 \alpha + a_{ij} \sin 2\alpha + a_{jj} \sin^2 \alpha$$

$$b_{ij} = a_{ij} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (a_{ii} - a_{jj}) \sin 2\alpha$$

$$b_{jj} = a_{ii} \sin^2 \alpha - a_{ij} \sin 2\alpha + a_{jj} \cos^2 \alpha$$

(2.6.18)

Das equações (2.6.18), obtém-se

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

e

$$\sum_{j=1}^n b_{jj}^2 + 2 b_{ij}^2 = \sum_{j=1}^n a_{jj}^2 + 2 a_{ij}^2 \quad (2.6.19)$$

Se  $\alpha$  for escolhido tal que

$$\tan 2\alpha = \frac{2 a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} \quad (2.6.20)$$

tem-se  $b_{ij} = 0$  e, portanto,

$$\sum_{j=1}^n b_{jj}^2 = \sum_{j=1}^n a_{jj}^2 + 2 a_{ij}^2 \quad (2.6.21)$$

Observa-se, assim, que a soma dos quadrados de todos os elementos fora da diagonal de  $[B]$  é menor que a soma dos quadrados dos elementos fora da diagonal de  $[A]$ , sendo  $2 a_{ij}^2$  a diferença. Isto constitui a base de um processo que permite diagonalizar a matriz  $[A]$ . Jacobi, em 1847, demonstrou que a sequência

converge para uma matriz diagonal  $[\lambda]$ , formada pelos auto-valores e que o produto

$$[R]_1 \ [R]_2 \ \dots \ [R]_m \quad (2.6.23)$$

converge para a matriz dos auto-vetores de  $[A]$ .

O problema de auto-valor no caso dinâmico, é dado pela equação

$$[\mathbf{K}] [\Phi] = [-\omega^2] [\mathbf{M}] [\Phi] \quad (2.3.15)$$

e pode ser reduzido ao caso simétrico tratado anteriormente. De (2.3.15), resulta, supondo  $[M]$  diagonal:

$$[\mathbf{K}] [\mathbf{M}]^{-1/2} [\mathbf{M}]^{1/2} [\Phi] = [\omega^2] [\mathbf{M}]^{1/2} [\mathbf{M}]^{1/2} [\Phi] \quad (2.6.24)$$

ou

$$([\mathbf{M}]^{-1/2} [\mathbf{K}] [\mathbf{M}]^{-1/2}) [\mathbf{M}]^{1/2} [\Phi] = [\omega^2] [\Phi] [\mathbf{M}]^{1/2}$$

sendo

$$[\mathbf{M}]^{-1/2} [\mathbf{K}] [\mathbf{M}]^{-1/2} = [\mathbf{K}^0] \quad (2.6.25)$$

$$[\mathbf{M}]^{1/2} [\Phi] = [\Phi^0] \quad (2.6.26)$$

resulta

$$[\mathbf{K}^0] [\Phi^0] = [\omega^2] [\Phi^0] \quad (2.6.27)$$

e

$$[\Phi] = [\mathbf{M}]^{-1/2} [\Phi^0] \quad (2.6.28)$$

A equação (2.6.27) é idêntica à (2.6.14), pois  $[\mathbf{K}^0]$  é simétrica pelo fato de  $[\mathbf{M}]$  e  $[\mathbf{K}]$  serem simétricas. Com (2.6.27) obtém-se as frequências naturais e auto-vetores auxiliares  $[\Phi^0]$ . A transformação (2.6.28) permite determinar os modos normais de vibrações.

Sob o ponto de vista computacional, são interessantes as seguintes observações:

- A precisão do método é muito sensível aos valores do ângulo  $\alpha$  obtidos por (2.6.20).
- Se os valores dos elementos fora da diagonal de  $[\mathbf{K}^0]$  forem grandes se comparados com os da diagonal, o proce-

so de diagonalização é lento como se pode ver através de (2.6.22), requerendo, assim, um grande número de iterações para fornecer uma dada precisão.

- A redução à forma diagonal requer, teoricamente, infinitas transformações, ficando a rapidez de convergência dependente da forma da matriz.

Estes inconvenientes são eliminados em processos onde não se efetua a redução à forma diagonal, tais como os de Givens e de Householder, onde é feita redução à forma tri-diagonal, isto é, a uma matriz quadrada cujos elementos não-nulos estão dispostos sobre a diagonal principal e duas paralelas imediatamente acima e abaixo.

### 2.6.3 - MÉTODO DE GIVENS-HOUSEHOLDER<sup>(15, 16)</sup>

Grande número de variantes do método de Jacobi foram desenvolvidas. A mais importante delas é devida a Givens, que mostrou que a matriz  $[R]$  pode efetuar a redução à forma tri-diagonal, escolhendo-se convenientemente.

A escolha de  $\alpha$  é feita de tal modo que, em cada etapa, anule um elemento fora da diagonal. Um elemento, uma vez tornado nulo pela transformação, permanecerá nulo quando esta for efetuada para zerar um elemento qualquer de outra posição. Desta maneira, o número de transformações necessárias para reduzir à forma tri-diagonal é  $n(n - 1)/2$ .

Householder sugeriu que a tri-diagonalização poderia ser efetuada mais eficientemente escolhendo-se  $[R]$  ortogonal da forma  $[I] - 2 \{W\} \{W\}^T$  tal que  $\{W\}^T \{W\} = 1$ .

Wilkinson mostrou que, de fato, este procedimento conduz a um método em que o número de transformações necessárias para a tri-diagonalização é  $n-2$ . A matriz tri-diagonal  $[C]$  obtida, tem para auto-valores os mesmos da matriz original, uma vez que estas transformações são de similaridade.

Efetuada a redução, passa-se ao cálculo dos auto-valores de  $[C]$ . Este cálculo pode ser efetuado baseando-se no fato estabelecido por Givens de que os menores principais' de  $[C] - \lambda [I]$  forma uma sequência de polinômios de Sturm. Formas alternativas seriam, por exemplo, os métodos LR e LQ.

Para o cálculo dos auto-vetores, Wilkinson sugere o método de iteração inversa ou de Wiedlant, onde a análise de erro mostra ser muito eficiente.

As características dinâmicas podem ser obtidas aplicando a decomposição de Choleski, que permite calcular os auto-valores e vetores de (2.3.15), desde que se disponha de um processo para cálculo de auto-valores e vetores de matrizes simétricas.

Sendo  $[K]$  positiva definida, simétrica, é sempre possível efetuar a fatoração

$$[K] = [\Lambda] [\Lambda]^T \quad (2.6.29)$$

onde  $[\Lambda]$  é uma matriz triangular inferior, dada por

$$\Lambda_{ii} = \left( k_{ii} - \sum_{r=1}^{i-1} \Lambda_{ir}^2 \right)^{1/2}$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{k_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} \Lambda_{ir} \Lambda_{jr}}{\Lambda_{jj}} \quad (i > j) \quad (2.6.30)$$

$$\Lambda_{ij} = 0 \quad (i < j)$$

A matriz inversa  $[\Lambda]^{-1}$  pode ser facilmente obtida por

$$\mu_{ii} = \frac{1}{\Lambda_{ii}}$$

$$\mu_{ij} = - \frac{\sum_{r=j}^{i-1} \Lambda_{ir} \mu_{rj}}{\Lambda_{ii}} \quad (i > j) \quad (2.6.31)$$

$$\mu_{ij} = 0 \quad (i < j)$$

Substituindo (2.6.29) em (2.3.15), vem

$$[\Lambda] [\Lambda]^T [\Phi] = [\omega^2] [M] [\Phi] \quad (2.6.32)$$

Seja

$$[\Lambda]^T [\Phi] = [x] \quad (2.6.33)$$

$$[\Phi] = ([\Lambda]^T)^{-1} [x] \quad (2.6.34)$$

Pré-multiplicando (2.6.32) por  $[\Lambda]^{-1}$  e usando (2.6.33) e  
(2.6.34), tem-se

$$[x] = [\omega^2] ([\Lambda]^{-1} [M] [\Lambda]^T)^{-1} [x]$$

Seja

$$[G] = [\Lambda]^{-1} [M] [\Lambda]^T \quad (2.6.35)$$

Assim,

$$[x] = [\omega^2] [G] [x] \quad (2.6.36)$$

A matriz  $[G]$  é simétrica e seus auto-valores são os inversos das frequências ao quadrado, que podem ser obtidas pelo método de Givens-Householder. Os auto-vetores  $[\Phi]$  podem ser calculados a partir dos  $[x]$  com a transformação (2.6.34).

O método de Givens-Householder fornece os auto-valores em ordem decrescente, o que torna conveniente efetuar a decomposição de  $[K]$  para se obter as frequências em ordem crescente, como já foi observado anteriormente.

## CAPÍTULO III

### DESENVOLVIMENTO DOS MODELOS

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, parte da teoria exposta no anterior é aplicada para a determinação das características fí sico-geométricas dos modelos analisados.

Na seção 3.2 estuda-se o elemento de viga, onde as matrizes de rigidez e massa e o vetor de cargas são calculados com a aplicação do Método dos Elementos Finitos.

Na seção 3.3 desenvolve-se um modelo aplicável a edifícios onde os pisos têm grande rigidez (diafragma) e, na seção 3.4, são feitas algumas considerações sobre o coeficiente de cisalhamento.

#### 3.2 - ELEMENTO DE VIGA

##### 3.2.1 - FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

O campo de deslocamentos adotados, será o mesmo que se obtém no caso estático para deslocamentos unitários, aplicados aos extremos do elemento. O elemento de viga assim obtido, satisfaz aos critérios de convergência, tendo, no entanto , alguns inconvenientes.

O campo de deslocamentos é uma função do 3º grau e, portanto, as curvaturas variam linearmente, o que não

é realista para o caso dinâmico.

Outro inconveniente é que não leva em conta a história do carregamento. Handa<sup>(18)</sup> observando estes aspectos, utilizou campo de deslocamentos do 5º grau e ficou comprovada a eficiência, onde se necessita empregar um número bem menor de elementos para se obter uma certa precisão.

Seja o elemento de viga representado na Fig. 1, onde  $v_A$ ,  $v'_A$  e  $v_B$ ,  $v'_B$  são os deslocamentos aplicados em A e B, respectivamente.

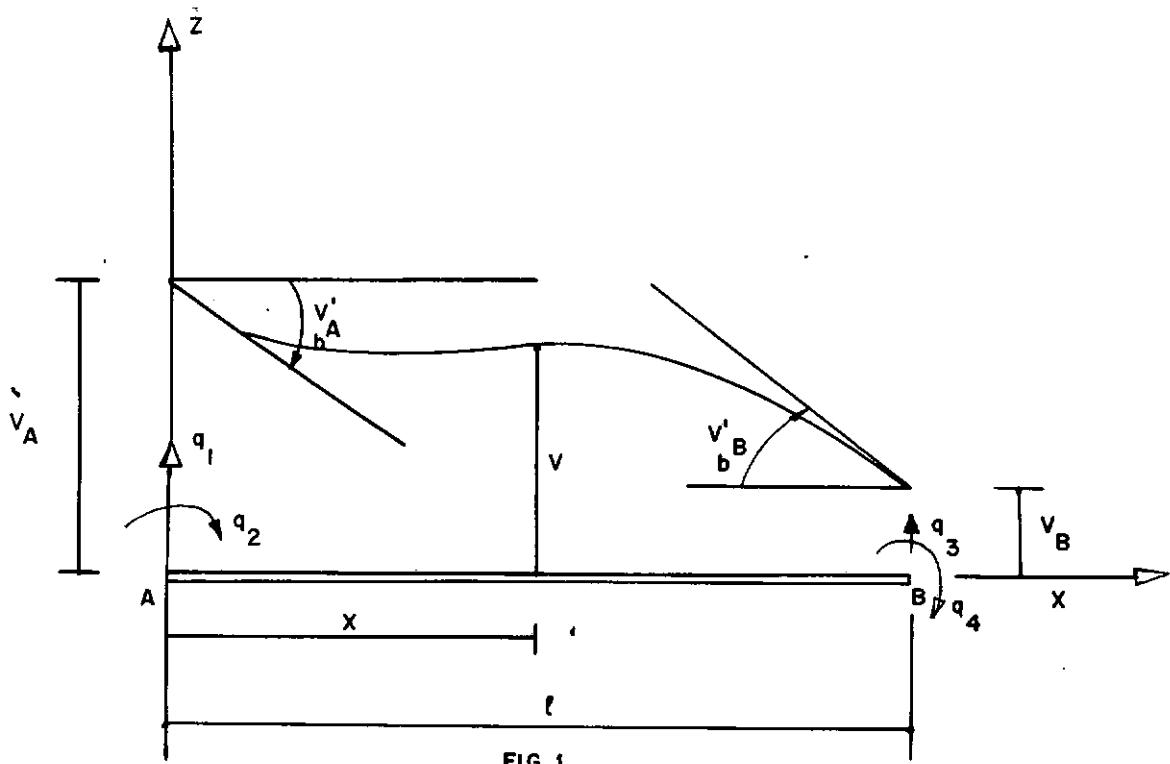


FIG. 1

As equações de Navier-Bresse<sup>(19)</sup> fornecem:

$$\begin{aligned} v'_b &= v'_{bA} + \int_0^x \frac{M}{E J} d\zeta \\ v &= v_A + v'_{bA} x + \int_0^x \frac{M(x - \zeta)}{E J} d\zeta - \int_0^x \frac{T}{G S^*} d\zeta \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

onde:

$$\begin{aligned} M &= M_A \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) + M_B \frac{x}{\ell} \\ T &= \frac{M_B - M_A}{\ell} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Fazendo-se um dos deslocamentos impostos igual a 1 com os outros três iguais a zero, as equações (3.2.1) e (3.2.2) permitem determinar  $M_A$  e  $M_B$ , efetuando a integração ao longo de todo elemento. Uma vez calculados  $M_A$  e  $M_B$ , obtém-se  $M$  e  $T$  de (3.2.2) e com estes valores, (3.2.1) fornece  $v'_b$  e  $v$ . Desta maneira, obtém-se:

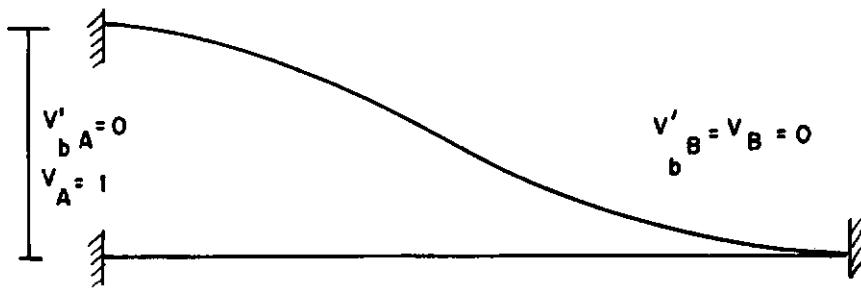


FIG. 2

$$v = N_{11} = (1 + \beta)^{-1} \left[ 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + (1 - \xi)\beta \right]$$

$$v'_b = N_{21} = 6(1 + \beta)^{-1} (-\xi + \xi^2)$$

$$\tau = \frac{12 E J}{(1+\beta) \ell^3} \quad (3.2.3.a)$$

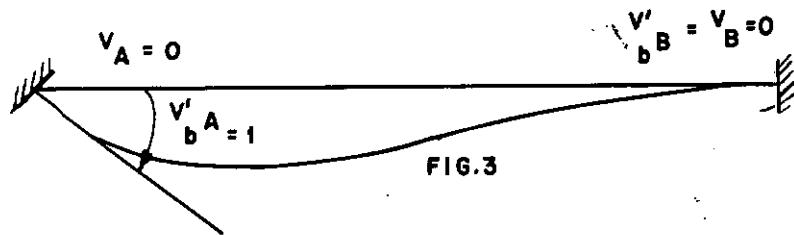


FIG. 3

$$v = N_{12} = (1 + \beta)^{-1} \left[ -\xi + 2\xi^2 - \xi^3 + \frac{1}{2} (\xi^2 - \xi)\beta \right] \ell$$

$$v'_b = N_{22} = (1 + \beta)^{-1} \left[ -1 + 4\xi - 3\xi^2 - (1 - \xi)\beta \right] \ell$$

$$\tau = \frac{6 E J}{(1+\beta)\ell^2} \quad (3.2.3.b)$$

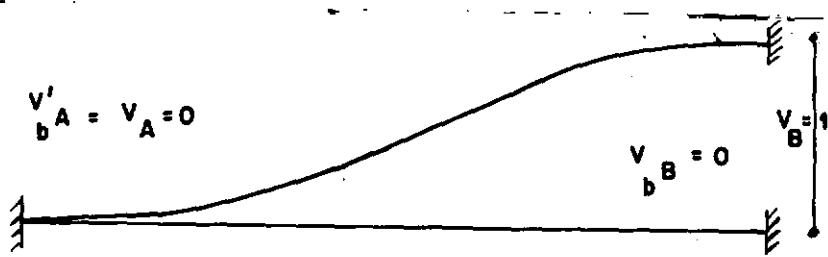


FIG. 4

$$v = N_{13} = (1 + \beta)^{-1} (3\xi^2 - 2\xi^3 + \xi\beta)$$

$$v'_b = N_{23} = 6(1 + \beta)^{-1} (\xi - \xi^2)$$

$$\tau = - \frac{12 E J}{(1+\beta)\ell^3} \quad (3.2.3.c)$$

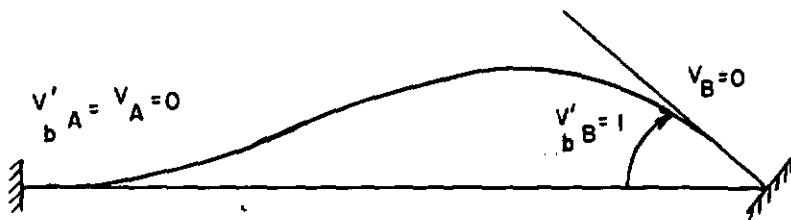


FIG. 5

$$v = N_{14} = (1 + \beta)^{-1} \left[ \xi^2 - \xi^3 + \frac{1}{2} (\xi - \xi^2) \beta \right] \ell$$

$$v'_b = N_{24} = (1 + \beta)^{-1} (2\xi - 3\xi^2 - \xi\beta) \ell$$

$$\tau = \frac{6 E J}{(1+\beta)\ell^2} \quad (3.2.3.d)$$

Ainda com relação às equações (3.2.3.a),

(3.2.3.b), (3.2.3.c) e (3.2.3.d), temos:

$$\beta = \frac{12 E J}{G S^* l^2}$$

$$S^* = \gamma S$$

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (3.2.4)$$

Os valores de  $T$  interessam para o cálculo das deformações.

Das equações (3.2.3), resulta a equação seguinte que relaciona os deslocamentos no interior do elemento (rotação e deslocamento transversal), com os deslocamentos nodais.

$$\begin{Bmatrix} v_b \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{Bmatrix}^T \quad (3.2.5)$$

### 3.2.2 - MATRIZ DE RIGIDEZ

Tem-se a relação tensão-deformação

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} \quad (3.2.6)$$

onde

$$[E] = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (3.2.7)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z \frac{\partial v_b}{\partial x} \\ \frac{T}{G S^*} \end{Bmatrix} \quad (3.2.8)$$

Substituindo (3.2.5) e (3.2.3.a) a (3.2.3.d), tem-se a relação deformações-deslocamentos nodais

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}] \{q\}^T \quad (2.2.9)$$

onde

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{1+\beta} \begin{bmatrix} 6(-1+2\xi)\frac{z}{\ell^2} & (4-6\xi+\beta)\frac{z}{\ell} & 6(1-2\xi)\frac{z}{\ell^2} & (2-6\xi-\beta)\frac{z}{\ell} \\ \frac{12 E J}{G S^* \ell^3} & \frac{6 E J}{G S^* \ell^2} & -\frac{12 E J}{G S^* \ell^3} & \frac{6 E J}{G S^* \ell^2} \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

Com as equações (2.2.20), (3.2.4) e (3.2.9), após a integração, resulta a matriz de rigidez

$$[\mathbf{K}]^e = \int_V [\mathbf{B}]^T [E] [\mathbf{B}] dv = \frac{2 E J}{\ell^3 (1+\beta)} = \begin{bmatrix} 6 & -3\ell & -6 & -3\ell \\ -3\ell & \left(\frac{\beta}{2} + 2\right)\ell^2 & 3\ell & \ell^2 \\ -6 & 3\ell & \left(\frac{\beta}{2} + 2\right)\ell^2 \\ -3\ell & \ell^2 & \text{Simétrica} \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

## 3.2.3 - MATRIZ DE MASSAS CONSISTENTES

Utilizando as equações (2.2.19) e

(3.2.6), com

$$[\mu] = \rho \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & S^* \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

obtém-se a matriz de massas (3.2.12). A segunda parcela é decorrente da inércia de rotação.

$$[m]^e = \frac{\rho S^* \ell}{(1 + \beta)^2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{\beta^2}{3} + \frac{7\beta}{10} + \frac{13}{35} & -\left(\frac{\beta^2}{24} + \frac{11\beta}{120} + \frac{11}{210}\right)\ell & \frac{\beta^2}{6} + \frac{3\beta}{10} + \frac{9}{70} & \left(\frac{\beta^2}{24} + \frac{3\beta}{40} + \frac{13}{420}\right)\ell \\ \left(\frac{\beta^2}{120} + \frac{\beta}{60} + \frac{1}{105}\right)\ell^2 & -\left(\frac{\beta^2}{24} + \frac{3\beta}{40} + \frac{13}{420}\right)\ell & -\left(\frac{\beta^2}{120} + \frac{\beta}{60} + \frac{1}{140}\right)\ell^2 & \\ \frac{\beta^2}{3} + \frac{7\beta}{10} + \frac{13}{35} & \left(\frac{\beta^2}{24} + \frac{11\beta}{120} + \frac{11}{210}\right)\ell & \\ \left(\frac{\beta^2}{120} + \frac{\beta}{60} + \frac{1}{105}\right)\ell^2 & & \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{\rho J}{\ell(1 + \beta)^2} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{10}\right) \ell & \frac{6}{5} & \left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{10}\right) \ell \\ \left(\frac{\beta^2}{3} + \frac{\beta}{6} + \frac{2}{15}\right) \ell^2 & \left(-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{10}\right) \ell & \left(\frac{\beta^2}{6} - \frac{\beta}{6} - \frac{1}{30}\right) \ell^2 \\ \frac{6}{5} & \left(-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{10}\right) \ell & \\ \left(\frac{\beta^2}{3} + \frac{\beta}{6} + \frac{2}{15}\right) \ell^2 & & \end{bmatrix}$$

## 3.2.4 - VETOR DE CARGAS NODAIS EQUIVALENTES

## 3.2.4.1 - FORÇAS VARIANDO LINEARMENTE AO LONGO DO ELEMENTO

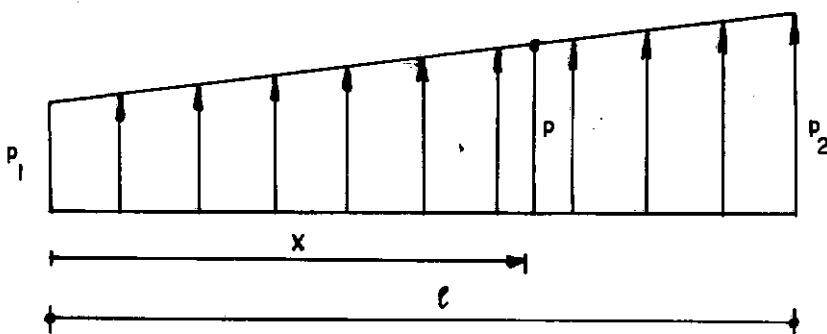


FIG. 6

Tem-se

$$\{P\}^e = \int_s [N]^T \{F_s\} ds$$

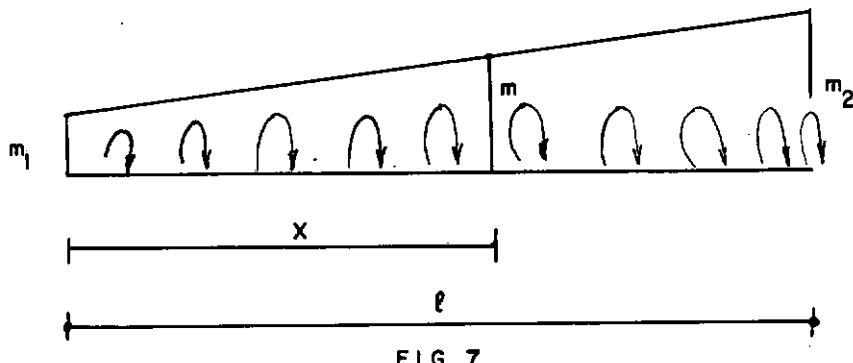
Com as funções de interpolação como em

(3.2.6), integrando:

$$p = \frac{p_2 - p_1}{l} x + p_1 \quad (3.2.13)$$

$$\{P\}^e = l (1 + \beta)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\beta}{3} + \frac{7}{20} & \frac{\beta}{6} + \frac{3}{20} \\ -\left(\frac{\beta}{24} + \frac{1}{20}\right) l & -l\left(\frac{\beta}{24} + \frac{1}{30}\right) \\ \frac{\beta}{6} + \frac{3}{20} & \frac{\beta}{3} + \frac{7}{20} \\ \left(\frac{\beta}{24} + \frac{1}{30}\right) l & l\left(\frac{\beta}{24} + \frac{1}{20}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad (3.2.14)$$

## 3.2.4.2 - MOMENTOS VARIANDO LINEARMENTE AO LONGO DO ELEMENTO



Com o mesmo procedimento, obtém-se

$$m = \frac{m_2 - m_1}{l} x + m_1 \quad (3.2.15)$$

$$\{P\}^e = \frac{1}{1 + \beta} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12} - \frac{\beta}{3} & \frac{1}{12} - \frac{\beta}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} - \frac{\beta}{6} & -\frac{1}{12} - \frac{\beta}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \quad (3.2.16)$$

## 3.2.5 - MATRIZ DE FLEXIBILIDADE

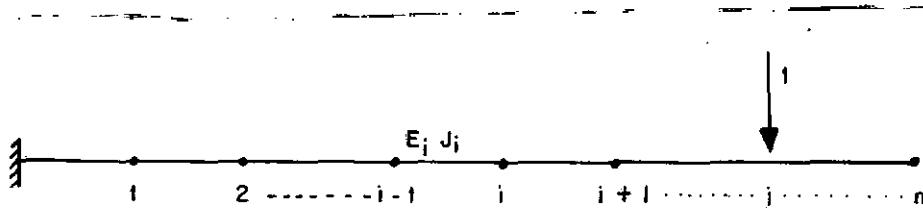


FIG. 8

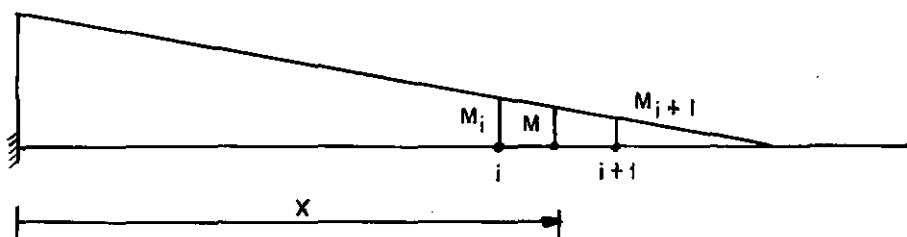


FIG. 9

As hipóteses consideradas são as mesmas da seção anterior. O elemento  $F_{ij}$  da matriz  $[F]$  é igual ao deslocamento produzido no ponto i para a carga unitária aplicada ao ponto j.

## 3.2.5.1 - EFEITO DE FLEXÃO

Para  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{E_{i+1} J_{i+1}} = \frac{x_j - x}{E_{i+1} J_{i+1}} \quad (3.2.17)$$

Integrando-se:

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{(x_j - x)^2}{2 E_{i+1} J_{i+1}} + A_{i+1, j} \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$v = \frac{(x_j - x)^3}{6 E_{i+1} J_{i+1}} + A_{i+1, j} x + B_{i+1, j} \quad (3.2.18)$$

Calculando  $\frac{dv}{dx}$  e  $v$  em cada ponto  $i$  através de (3.2.18) e aplicando a condição de compatibilidade em cada ponto pertencente a dois tramos consecutivos, obtém-se a lei de recorrência:

$$A_{i+1, j} = A_{ij} + \frac{(x_j - x_i)^2}{2} \left( \frac{1}{E_{i+1} J_{i+1}} - \frac{1}{E_i J_i} \right) \quad (3.2.19)$$

$$B_{i+1, j} = B_{ij} - \frac{(x_j - x_i)^2 (x_j + 2x_i)}{6} \left( \frac{1}{E_{i+1} J_{i+1}} - \frac{1}{E_i J_i} \right)$$

Com as condições de contorno  $\frac{dv}{dx} = v = 0$

para  $x = 0$ , tem-se:

$$A_{1j} = \frac{x_j^2}{2 E_1 J_1} \quad \text{e} \quad B_{1j} = \frac{x_j^3}{6 E_1 J_1} \quad (3.2.20)$$

As equações (3.5.19) e (3.5.20), por indução, fornecem:

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{x_j^2}{E_i J_i} + \sum_{k=1}^{i-1} x_k (x_k - 2x_j) \left( \frac{1}{E_{k+1} J_{k+1}} - \frac{1}{E_k J_k} \right) \right] \quad (3.2.21)$$

$$B_{ij} = -\frac{1}{6} \left[ \frac{x_j^3}{E_i J_i} + \sum_{k=1}^{i-1} (x_j - x_k)^2 (x_j + 2x_k) \left( \frac{1}{E_{k+1} J_{k+1}} - \frac{1}{E_k J_k} \right) \right]$$

$i > 1$

sendo os elementos da matriz de flexibilidade

$$F_{ij} = F_{ji} = \frac{(x_j - x_i)^3}{6 E_i J_i} + A_{ij} x_i + B_{ij} \quad (3.2.22)$$

### 3.2.5.2 - EFEITO DE CISALHAMENTO

De maneira análoga ao caso anterior ,

tem-se:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{T}{G_{i+1} S^*_{i+1}} = \frac{1}{G_{i+1} S^*_{i+1}} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

e

$$v = \frac{x}{G_{i+1} S^*_{i+1}} + C_{i+1}, j$$

Assim,  $v(x_i) = F_{ij}$

$$v(x_{i+1}) = F_{i+1, j}$$

Portanto,

$$F_{ij} = \frac{x_i}{G_{i+1} S^*_{i+1}} + C_{i+1, j}$$

$$F_{i+1, j} = \frac{x_{i+1}}{G_{i+1} S^*_{i+1}} + C_{i+1, j}$$

Das duas últimas equações:

$$F_{i+1, j} = F_{ij} + \frac{\ell_{i+1}}{G_{i+1} S^*_{i+1}} \quad (3.2.23)$$

onde  $\ell_{i+1}$  é o comprimento do elemento  $i+1$ .

Com a condição de contorno  $v_{(0)} = 0$ , tem-se  $C_1 = 0$  e, portanto,

$$F_{1j} = \frac{\ell_1}{G_1 S^*_1} \quad (3.2.24)$$

De (3.2.23) e (3.2.24), surge:

$$F_{ij} = F_{ji} = \sum_{k=1}^i \frac{\ell_k}{G_k S^*_k} \quad \begin{array}{l} \forall j > i \\ i = 1, n \end{array} \quad (3.2.25)$$

Superpondo os resultados de (3.2.22) e (3.2.25), tem-se a matriz de flexibilidade, considerando a ação conjunta de flexão e cisalhamento. É interessante observar que a matriz de flexibilidade assim obtida, é igual à inversa da matriz

resultante da condensação da matriz de rigidez global, da seção anterior, relativamente às rotações.

### 3.3 - ESTRUTURAS COM DIAFRAGMAS RÍGIDOS

Este modelo visa uma aproximação para a análise dinâmica de estruturas de edifício. São adotadas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- i) todos os nós são infinitamente rígidos à rotação;
- ii) todos os elementos verticais não sofrem alongamentos ou encurtamentos;
- iii) é desprezível o efeito das tensões localizadas sobre a rigidez à flexão dos elementos verticais.
- iv) as massas são concentradas nos nós.

#### 3.3.1 - MATRIZ DE RIGIDEZ

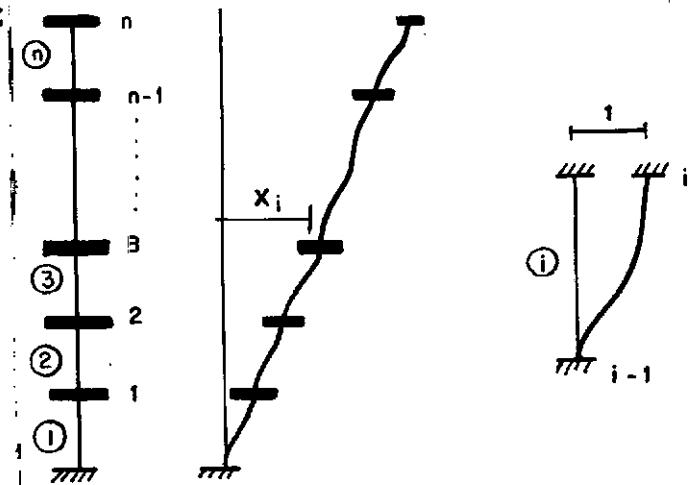


FIG. 11

FIG. 10

Com as hipóteses anteriores, cada elemento vertical terá rigidez aos deslocamentos horizontais relativos:

$$k_i = \frac{12 E_i J_i}{l_i^3} \quad i = 1, n \quad (3.3.1)$$

Sejam  $x_i$ ,  $\dot{x}_i$  e  $\ddot{x}_i$  os deslocamento, velocidade e aceleração horizontais do ponto  $i$ , respectivamente, no instante  $t$ , para a estrutura em movimento sem cargas aplicadas. Tem-se para o sistema:

Energia Cinética:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i^2 \quad (3.3.2)$$

Energia Potencial:

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n k_i (x_i - x_{i-1})^2 \quad (3.3.3)$$

O Sistema é conservativo e, portanto, válida a equação (2.1.12). De (3.3.2), (3.3.3) e (2.1.12), resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = -m_1 \ddot{x}_1 \\ -k_i x_{i-1} + (k_i + k_{i+1})x_i - k_{i+1} x_{i+1} = -m_i \ddot{x}_i \\ \qquad \qquad \qquad (i = 2, \dots, n-1) \\ -k_n x_{n-1} + k_n x_n = -m_n \ddot{x}_n \end{array} \right.$$

De acordo com (2.3.10), para

$x_i = \phi_i \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (k_1 + k_2)\phi_1 - k_2 \phi_2 = m_1 \omega^2 \phi_1 \\ -k_i \phi_{i-1} + (k_i + k_{i+1})\phi_i - k_{i+1} \phi_{i+1} = m_i \omega^2 \phi_i \\ -k_n \phi_{n-1} + k_n \phi_n = m_n \omega^2 \phi_n \end{array} \right. \quad (3.3.4)$$

Sob a forma matricial

$$[K] \{\phi\} = \omega^2 [M] \{\phi\}$$

tem-se a matriz de rigidez

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -k_i & k_i + k_{i+1} & -k_{i+1} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -k_n & k_n \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

e a matriz de massa sob a forma diagonal

$$[M] = [m_i] \quad (3.3.6)$$

## 3.3.2 - MATRIZ DE FLEXIBILIDADE

A matriz de rigidez  $[K]$  pode ser invertida diretamente<sup>(14)</sup> fornecendo a matriz de flexibilidade:

$$[F] = \begin{bmatrix} f_1 & f_1 & f_1 & \dots & f_1 \\ f_1 & f_1 + f_2 & f_1 + f_2 & \dots & f_1 + f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1 & f_1 + f_2 & f_1 + f_2 & \dots & \sum_{i=1}^n f_i \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

$$\text{onde } f_i = \frac{1}{k_i} = \frac{\ell_i^3}{12 E_i J_i} \quad (3.3.8)$$

## 3.4 - NOTA SOBRE O COEFICIENTE DE CISALHAMENTO

Para o cálculo das tensões de cisalhamento é, em geral, adotada a área reduzida  $S^* = \gamma S$ , onde  $\gamma$  é um coeficiente de redução (coeficiente de cisalhamento), introduzido para levar em conta a distribuição não-uniforme das tensões e deformações de cisalhamento ao longo da seção.

É comumente definido como a razão entre a tensão de cisalhamento média e a calculada no centróide da seção. Verifica-se que esta definição não é satisfatória em problemas que envolvem vibrações de alta frequência em vigas ou onde o efeito do cisalhamento seja significativo.

Cowper<sup>(22, 23)</sup> introduziu nova definição, considerando o deslocamento transversal médio da viga

$$v = \frac{1}{S} \int \int v(x) dx dz \quad (3.4.1)$$

em lugar do deslocamento do centróide da seção transversal.

Casos onde se pode obter valores exatos das frequências através da teoria da Elasticidade, fornecem erros máximos da ordem de 1,0%, calculados a partir desta definição, contra 8% para a definição normal (primeira freqüência).

Os valores seguintes foram obtidos na referência (22):

$$\text{retângulo} \dots \gamma = \frac{10(1 + v)}{12 + 11v}$$

$$\text{círculo} \dots \gamma = \frac{6(1 + v)}{7 + 6v} \quad (3.4.2)$$

$$\text{coroa circular} \dots \gamma = \frac{6(1 + v)(1 + m^2)^2}{(7 + 6v)(1 + m^2)^2 + (20 + 12v)m^2}$$

onde:

$v$  = coeficiente de Poisson

$m$  = razão entre o raio interno e externo

## CAPÍTULO IV

## PROGRAMA AUTOMÁTICO

## 4.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Para obtenção de resultados numéricos baseados nos capítulos anteriores, foi desenvolvido um programa em linguagem FORTRAN para o computador IBM/360.

O esquema do programa é bastante versátil, podendo ser facilmente modificado para analisar outros tipos de estruturas. Para isto, é suficiente substituir as subrotinas que formam as matrizes de massa e de rigidez. A partir daí, os cálculos das características dinâmicas e da resposta são idênticos.

A resposta pode ser determinada para diversos tipos de cargas típicas, considerando-se ou não o amortecimento. (Ver item 18 do manual de entrada).

Para o caso em que as cargas variam segundo uma lei arbitrária, a resposta é calculada aproximando-se as curvas por poligonais com o seguinte procedimento:

Sejam  $t_0, \dots, t_m$ , os instantes onde se deseja calcular a resposta e  $P_i(t)$  a carga aplicada segundo a direção i.

- No intervalo  $(t_{k-1}, t_k)$ , aproxima-se a curva pela

secante que passa por  $P_i(t_{k-1})$  e  $P_i(t_k)$ .

- b) Calculam-se os deslocamentos e velocidades no instante  $t_k$  por meio da soma dos efeitos de impulsos retangular e triangular (casos 1 e 5 do apêndice 1).
- c) Tomam-se os valores obtidos no ítem (b) como condições iniciais para o intervalo  $(t_k, t_{k+1})$  e calculam-se os deslocamentos e velocidades para o efeito conjunto das condições iniciais com os impulsos retangular e triangular neste intervalo, no instante  $t_{k+1}$ .
- d) O processo se repete até  $t_{k+1} = t_m$ .

Uma aplicação interessante deste método é o caso onde se tem registros de medições experimentais das cargas em diversos pontos de uma estrutura, ao longo do tempo.

A resposta pode ser calculada a vários tipos de cargas para uma mesma estrutura. Assim, é possível obter a resposta a um desenvolvimento em série de Fourier, combinando as leis retangulares, senoidal e co-senoidal (casos 1, 9 e 11 do apêndice 1).

A maior parte das subrotinas integrantes do programa foram colocadas em OVERLAY, conforme o esquema indicado na secção 4.3.

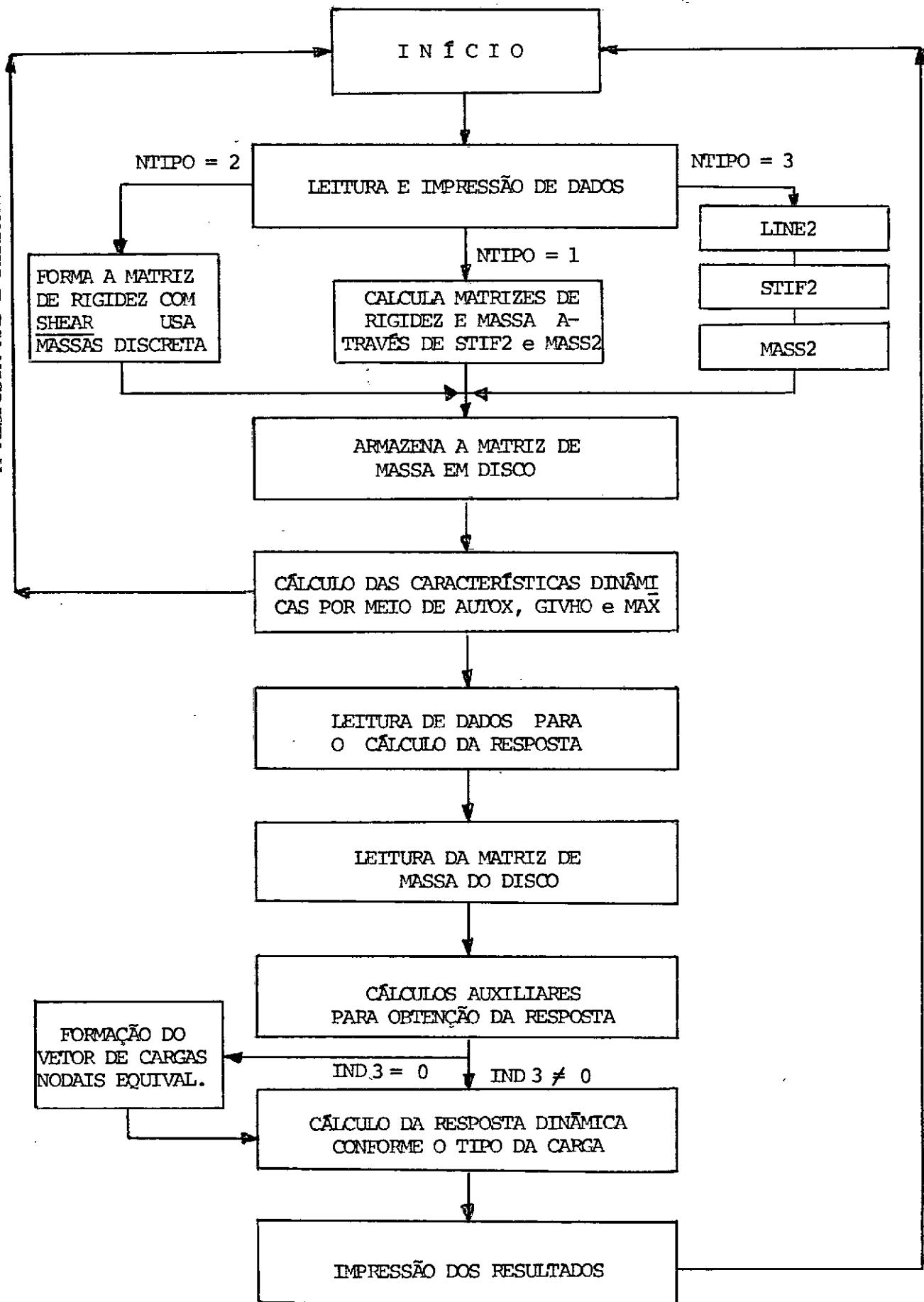
O tempo de processamento varia com  $n^3$ , onde  $n$  é o número de graus de liberdade. Grande parte deste tem-

po é despendido no cálculo das frequências e modos normais. O tempo de compilação é 7 minutos para o modelo 40 do IBM/360. Para um problema com  $n$  graus de liberdade, dois parâmetros são decisivos: o número de frequências e modos normais solicitados (NEV, NVEC) e o número de instantes onde se calcula a resposta.

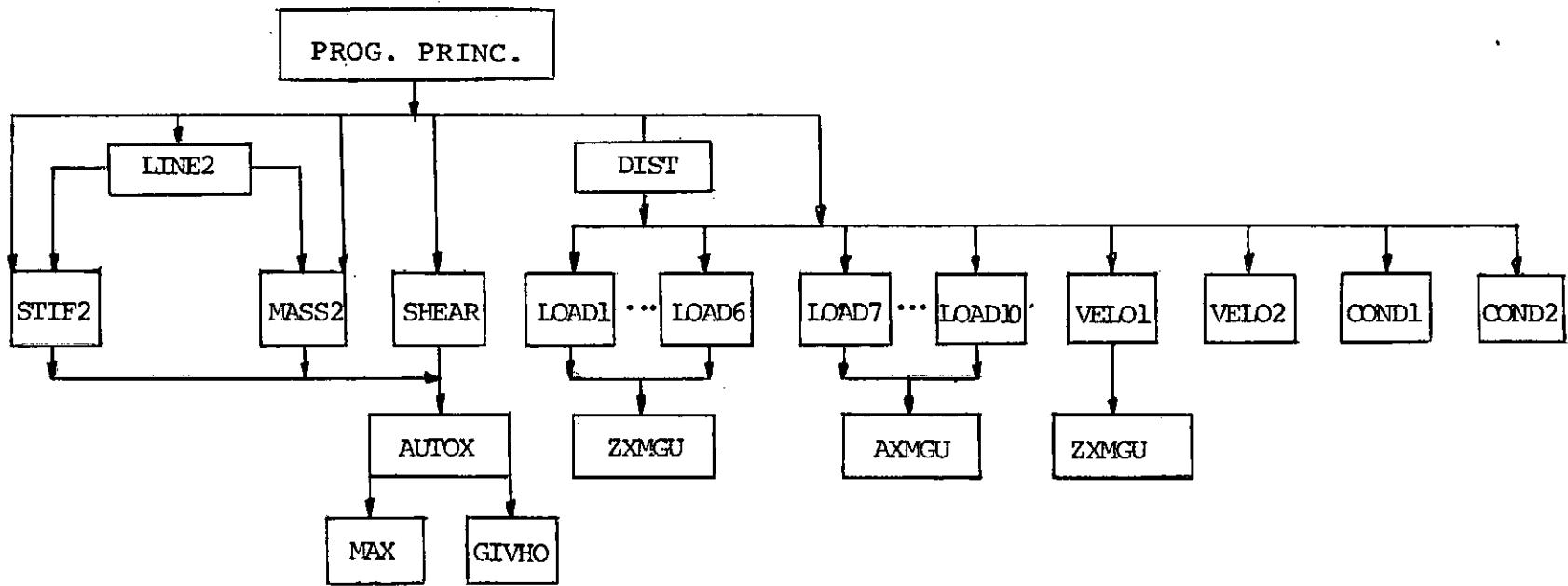
Foi analisada a alternativa de cálculo das características dinâmicas, considerando a matriz dinâmica sob a forma  $[F] [M]$ , utilizando o método de iteração de matrizes. As massas foram tomadas concentradas nos nós. Para este caso, verificam-se as seguintes desvantagens:

- a matriz de flexibilidade é má condicionada.
- o processo de iteração empregado permite calcular no máximo 4 frequências e 4 modos normais.
- não se obteve boa aproximação nas frequências mais altas (comparando-se com o método de rigidez), embora se tivesse ótimos resultados na 1.<sup>a</sup> frequência e 1º modo.

## 4.2 - DIAGRAMA DE BLOCOS



#### 4.3 - ESQUEMA PARA OVERLAY



#### 4.4 - DESCRIÇÃO DAS SUBROTINAS

##### LINE2

Calcula os parâmetros necessários à formação das matrizes de rigidez e massas consistentes de estruturas que possam ser reduzidas a uma viga em balanço. Supõe-se que as dimensões das seções transversais variam linearmente ao longo da altura. Áreas e momentos de inércia são calculados de acordo com o desenvolvimento no apêndice 2. O coeficiente do cisalhamento é calculado conforme (3.4.2).

Os dados constantes dos ítems 6, 7 e 8 do manual de entrada são lidos através desta subrotina (NTIPO=3).

##### STIF2

Forma a matriz de rigidez global de uma viga em balanço composta por N elementos.

Sejam  $k_{ij}^I$ ,  $i = 1, 4$ ;  $j = 1, 4$ ;  $I = 1, N$ ; os termos da matriz de rigidez do elemento  $I$  de viga dados por (3.2.40). Os elementos  $K_{ij}$  da matriz de rigidez global da estrutura são obtidos mediante a seguinte lei de formação:

$$\left. \begin{array}{l}
 k_{2I-1, 2I-1} = k_{33}^I + k_{11}^{I+1} \\
 k_{2I-1, 2I} = k_{34}^I + k_{12}^{I+1} \\
 k_{2I-1, 2I+1} = k_{13}^{I+1} \\
 k_{2I-1, 2I+2} = k_{14}^{I+1} \\
 k_{2I, 2I} = k_{44}^I + k_{22}^{I+1} \\
 k_{2I, 2I+1} = k_{23}^{I+1} \\
 k_{2I, 2I+2} = k_{24}^{I+1} \\
 \\[1em]
 k_{2N-1, 2N-1} = k_{33}^N \\
 k_{2N-1, 2N} = k_{34}^N \\
 k_{2N, 2N} = k_{44}^N
 \end{array} \right\}_{I=1, N-1}$$

MASS2

Forma a matriz de massas consistentes de uma viga em balanço composta por N elementos.

A lei de formação é idêntica à da matriz de rigidez global efetuada por STIF2. A matriz de massas consistentes do elemento de viga é dada por (3.2.12).

SHEAR

Forma a matriz de rigidez global de estruturas dotadas de diafragmas (shear building), conforme seção (3.3.1)

GIVHO

Calcula NEV auto-valores e NVEC auto-vetores de uma matriz real simétrica pelo método de Givens-Householder, conforme seção (2.6.3). Deve-se ter NVEC < NEV. Os auto-vetores são fornecidos normalizados. O cálculo é efetuado com um êrro inferior a  $10^{-6}$ .

MAX

Normaliza um vetor dividindo os elementos pelo maior deles.

COND1

Calcula a contribuição dos deslocamentos iniciais dos diversos pontos nodais para a resposta, sem levar em conta o amortecimento.

COND2

Mesmo que a anterior considerando o amortecimento.

DIST

Determina o vetor de cargas nodais equivalentes para distribuição linear de forças ou momentos ao longo dos elementos. Seção (3.2.4).

ZXMGU

Subrotina auxiliar para cálculo da resposta não-amortecida. Pré-multiplica um vetor por:

$$\{\phi\} [\omega]^{-1} [m]^{-1}$$

AXMGU

Subrotina auxiliar para cálculo de respos

ta com amortecimento. Pré-multiplica um vetor por

$$\{\phi\} \quad [m]^{-1} \quad [\omega]^{-1} \quad ([I] - [\zeta^2])$$

### VELO1

Calcula as velocidades para a ação combinada das condições iniciais com impulsos retangular e triangular. Não se considera o amortecimento.

### VELO2

Mesmo que VEL01, considerando o amortecimento.

LOAD1, LOAD2, LOAD3, LOAD4, LOAD5, LOAD6, LOAD7, LOAD8, LOAD9, LOAD10.

Estas subrotinas calculam nesta ordem a resposta dinâmica (deslocamentos) para cargas correspondentes a ILOAD = 1 a 10 (ítem 18 do manual de entrada). O cálculo da resposta dinâmica é efetuado utilizando as equações (2.5.7), (2.5.9) e (2.5.10) e as integrais de Duhamel fornecidas no apêndice 1.

FLEX1 e FLEX2

Formam as matrizes de flexibilidade de uma viga em balanço composta de n elementos, considerando -se os efeitos de flexão e de cisalhamento, respectivamente. Seção (3.2.5).

FLEX3

Forma a matriz de flexibilidade de estruturas do tipo "shear building". Seção (3.3.2).

STOD

Calcula os 4 primeiros auto-valores e auto-vetores da matriz dinâmica  $[F]$  [ $m$ ], usando o método de iteração de matrizes. Seção (2.6.1).

STOD1

Efetua as iterações (2.6.15) usadas por STOD.

4.5 -

MANUAL DE ENTRADA

Nº DE ORDEM	Nº DE CARTÕES	VARIÁVEIS	FORMATO
1	1	NPROB, N, NTIPO	3I5
2	1	NM, NEV, NVEC	3I5
3	1	COMENTÁRIOS	70 COLUNAS A PARTIR DA 2ª
4	N	COORD(I), JOTA(I), AREA(I), YOUNG(I), FFORM(I), G(I), RO(I)	7F10.0
5	N	COORD(I), JOTA(I), YOUNG(I) MASSA(I, I)	4F10.0
6	1	VAO, DINIC, DFIM, HINIC, HFIM, IND1, IND2	5F10.0, 2I5
7	N	RO(I), YOUNG(I), POISS(I)	3F10.0
8	1	EE, RRO, PPOIS	3F10.0
9	$\frac{NEV}{8} + 1$	XL(I)	8F10.0
10	$\frac{NVEC}{8} + 1 * N 2$	X(I,J)	8F10.0
11	1	INDIC, NTEMP, NPC, NAMT, IND2, IND3	6I5
12	NPC	I, UZERO(I), VZERO(I)	I5, 2F10.0
13	$\frac{NVEC}{8} + 1$	ETA(I)	8F10.0
14	$\frac{NTEMP}{8} + 1$	TEMPO(I)	8F10.0
15	1	IND1, IND3, T	2I5, F10.0
16	NPC	I, PD(I)	I5, I10.0
17	NPC	I, P(I)	I5, F10.0
18	1	ILOAD	I5
19	NPC	JJ	I5
	NPC * NTEMP	V(I, JJ)	8F10.0
20	1		I5

## COMENTÁRIOS:

1. NPROB - número da estrutura a ser analisada. Se menor ou igual a zero, encerra o processamento.
- N - número de elementos que compõem a estrutura.
- NTIPO - define o tipo da estrutura a ser analisada.
- NTIPO=1 - análise como viga de Timoshenko com as características físico-geométricas fornecidas diretamente.
- NTIPO=2 - análise como "shear building".
- NTIPO=3 - análise como viga de Timoshenko com geração automática das características geométricas dos elementos. É suposto que as dimensões da secções transversais (retangular ou coroa circular) variam linearmente. Neste caso são lidas as variáveis relacionadas nos ítems 6, 7 e 8.
2. NM  $\neq$  0 - as frequências e modos normais são fornecidos diretamente (ítems 9 e 10).
- = 0 - as frequências e modos normais são calculados.
- NEV - número de auto-valores (frequências).
- NVEC - número de auto-vetores (modos normais).
3. É reservado um cartão para comentários na saída. Caso não seja necessário, colocar um cartão em branco.

4. Os dados constantes deste ítem são fornecidos no caso de NTIPO=1. Para cada elemento são fornecidos:

COORD(I) - coordenada do nó I.

JOTA(I) - momento de inércia.

AREA(I) - área da secção transversal

YOUNG(I) - módulo de elasticidade longitudinal

FFORM(I) - Fator de forma da secção transversal (para cálculo da área reduzida) ou coeficiente de cisalhamento.

G(I) - módulo de elasticidade transversal.

RO(I) - massa específica.

5. As variáveis seguintes são fornecidas no caso de NTIPO=2:

COORD(I), JOTA(I), YOUNG(I) - definidas como no ítem 4.

MASSA (I, I) - massa concentrada no nó I.

6. Os dados seguintes são fornecidos se NTIPO=3:

VAO - altura total da estrutura

DINIC - diâmetro da base no caso de secção em coroa circular ou altura na base da estrutura no caso de secção retangular.

DFIM - análogo ao caso anterior para a extremidade da estrutura.

HINIC - espessura da coroa circular na base da estrutura ou base da secção retangular.

HFIM - análogo ao caso anterior para a extremidade da estrutura.

IND1 ≠ 0 - secção retangular.

= 0 - coroa circular.

IND2 ≠ 0 - existe variação das propriedades físicas ao longo da estrutura.

= 0 - todos os elementos têm as mesmas propriedades físicas.

7. Os dados relacionados neste ítem são fornecidos para cada elemento se IND2 ≠ 0.

RO(I) - massa específica.

YOUNG(I) - módulo de elasticidade longitudinal.

POISS(I) - coeficiente de Poisson.

8. Se IND2 = 0 são fornecidos os seguintes valores para a estrutura:

EE - módulo de elasticidade longitudinal.

RRO - massa específica.

PPOIS - coeficiente de Poisson.

9. As frequências XL(I) são fornecidas se NM ≠ 0.

10. Os modos normais são fornecidos se NM ≠ 0.

11. A partir deste ítem são fornecidos os dados para o cálculo da resposta dinâmica.

INDIC < 0 - não se deseja o cálculo da resposta dinâmica.

> 0 - é efetuado o cálculo da resposta dinâmica.

NTEMP - número de instantes para os quais se quer calcular a resposta.

NPC - número de direções carregadas.

- NAMT  $\neq 0$  - o amortecimento é considerado.  
     = 0 - resposta não-amortecida.
- IND2  $\neq 0$  - resposta calculada aproximando as funções que definem as cargas por secantes.  
     = 0 - resposta para cargas dos tipos 1 a 10.
- IND3  $\neq 0$  - as cargas são aplicadas aos nós diretamente.  
     = 0 - distribuição linear de carga ao longo do elemento.
12. I - número da direção.  
 UZERO(I) - deslocamento inicial da direção I.  
 VZERO(I) - velocidade inicial da direção I.
13. Os valores deste ítem são fornecidos se:  
 NAMT  $\neq 0$   
 ETA(I) - percentagem do amortecimento crítico correspondente ao modo I.
14. TEMPO(I) - instantes para os quais foi determinada a resposta.
15. IND1 < 0 - passa a analisar nova estrutura.  
     = 0 - existe contribuição das condições iniciais para a resposta.  
     > 0 - não existe influência das condições iniciais.  
 T - tempo de duração da carga aplicada ou parâmetro que define a carga conforme apêndice 1.
16. Os valores seguintes são fornecidos se IND3 = 0.  
 I - direção carregada.

$PD(I)$  - ordenada da carga distribuída na direção I, no nó correspondente.

17. Os dados seguintes são fornecidos se  $IND3 \neq 0$ :

I - direção carregada.

$P(I)$  - ordenada máxima da carga concentrada segundo I, aplicada ao nó correspondente.

18. Os valores deste ítem são fornecidos se  $IND2 = 0$

Para  $ILOAD = 1$  a 6 não se considera o amortecimento.

$ILOAD = 1$  - Impulso retangular atuante durante o tempo T.  
 $= 2$  - Impulso triangular atuante durante o tempo T.  
 $= 3$  - Variação linear da carga até o instante T, a partir do qual se mantém constante e igual a P.  
 $= 4$  - onda quadrada de período  $2T$ .  
 $= 5$  - carga senoidal de período  $2\pi$ .  
 $= 6$  - carga a forma P  $(1 - \cos \frac{2\pi t}{T})$ .

Para  $ILOAD = 7$  a 10, é considerado o amortecimento.

$ILOAD = 7$  - impulso retangular atuante durante o tempo T.  
 $= 8$  - impulso triangular atuante durante o tempo T.  
 $= 9$  - carga senoidal de período  $2\pi$ .  
 $= 10$  - carga co-senoidal de período  $2\pi$ .

19. Quando se efetua a aproximação por secantes das funções que definem as cargas ( $IND2 \neq 0$ ) são fornecidos:

JJ - direção carregada.

$V(I, JJ)$  - ordenada da carga no tempo I atuante segundo a direção JJ.

20. Indica término do processamento, podendo ser em branco ou contendo uma constante inteira negativa.

## CAPÍTULO V

## APLICAÇÕES, EXEMPLOS E CONCLUSÕES

## 5.1 - CONSIDERAÇÕES SOBRE O VENTO

O comportamento de uma estrutura solicitada pelo vento, depende diretamente da velocidade deste. Para baixas velocidades (<sup>30</sup>) o regime de escoamento é laminar e os efeitos resultantes são, praticamente, de natureza estática. A partir de velocidades da ordem de 25 m/seg (90 km/h) o regime torna-se turbulento e atua por rajadas sucessivas, podendo ter caráter periódico. Se as rajadas tiverem freqüências próximas às freqüências naturais da estrutura, há o perigo de ressonância. Outro dado importante é o tempo de duração das rajadas. Em ambos os casos o comportamento da estrutura é dinâmico e a análise sob este ponto de vista deve ser conduzida para estruturas de grande altura.

Não se tem um critério unificado para tomar um valor convencional da velocidade. Os principais são de tomar:

- velocidade instantânea (ponto de rajada) que é o valor da velocidade para o qual há uma probabilidade de ser atingido ou ultrapassado na razão de 3 dias em 1000.
- velocidade média dos valores instantâneos em determinados intervalos de tempo (5 a 10 minutos).

- velocidade média calculada em um intervalo de tempo muito grande, multiplicada por um fator de amplificação.

A tendência atual é utilizar conceitos probabilísticos. A idéia básica é de que qualquer que seja o valor adotado para a velocidade, existe uma probabilidade não nula de ser ultrapassado, conforme o intervalo de tempo considerado. Quanto maior for a vida útil e importância atribuída à obra, maior será tomada esta probabilidade. Este conceito tem a vantagem muito grande de permitir ligar o estudo do vento diretamente ao problema de segurança e conduzir a uma formulação matemática bem fundamentada.

#### 5.1.1 - RELAÇÃO ENTRE A VELOCIDADE DO VENTO E A PRESSÃO EXERCIDA SOBRE UMA SUPERFÍCIE PLANA

Aplicando o Teorema de Bernouilli, admitindo escoamento irrotacional e fluido incompressível (válido para velocidades até 300 Km/h), chega-se a:

$$q = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (5.1.1)$$

Sendo,

$$\rho = \frac{1,2255}{9,80665} \approx 0,125, \text{ tem-se}$$

$$q = \frac{v^2}{16} \quad v - \text{m/seg} \quad (5.1.2)$$

q - Kgf/m<sup>2</sup>

Na NB-5,  $q$  é chamado pressão de obstrução e é fixado em função da altura. É ainda afetado por um coeficiente que depende da geometria da obra. Estes valores sofrem severas críticas devidas ao fato de corresponderem a baixos valores de  $v$ . Sabe-se que  $v$  varia muito com as condições meteorológicas e topográficas. Um problema básico, portanto, quanto aos valores da NB-5 é que são impostos para todo o Brasil, independentemente das condições regionais.

#### 5.1.2 - DIREÇÃO PERPENDICULAR À DO VENTO.

Resultados experimentais mostram que para baixas velocidades (escoamento laminar), existem vibrações na direção perpendicular à do vento. A velocidade correspondente ao máximo deste efeito é chamada velocidade crítica.

A teoria de von Kármán explica o fenômeno em superfícies cilíndricas. Com o aumento da velocidade, verifica-se:

- a) escoamento regular do fluido.
- b) formam-se dois turbilhões simétricos em torno da superfície.
- c) os turbilhões se alternam guardando entre eles um espaçamento aproximadamente constante, da ordem de 4 a 5 vezes o diâmetro. Surgem assim, vibrações laterais de am-

plitudes crescentes.

- d) a turbulência torna-se irregular e as vibrações laterais se atenuam.

Esta teoria explica o fenômeno de uma forma qualitativa, pois conduz no caso do vento a valores elevados de velocidades que são incompatíveis com o regime laminar.

A velocidade crítica depende do número de Strouhal

$$S = \frac{\omega_v D_e}{v} \quad (5.1.3)$$

onde,

$v$  = velocidade do vento

$D_e$  = diâmetro externo

$\omega_v$  = frequência de excitação do vento

$S$  - varia entre 0,15 e 0,30.

Fazendo  $\omega_v = \omega_1$ , tem-se a velocidade crítica,

$$v_{cr} = \frac{\omega_1 D_e}{S} \quad (5.1.4)$$

Com (5.1.4) e (5.1.2), calcula-se a pressão correspondente.

## 5.2 - APLICAÇÕES DOS MODELOS ESTUDADOS

O modelo de viga é aplicável a estruturas tipo torre ou chaminés, onde o comportamento dinâmico é ajustável ao de uma viga em balanço, como revelam as experiências. O modelo de estruturas com diafragmas rígidos é aplicável aos casos de edifícios com pisos de grande rigidez, onde sejam compatíveis com as hipóteses da seção (3.3). Em qualquer caso os momentos de inércia são calculados para todos os elementos verticais em um determinado nível, relativamente a um eixo horizontal mediano. No segundo modelo as massas são concentradas nos níveis dos pisos, enquanto que no primeiro se trabalha com massas consistentes.

Alguns efeitos secundários não são aqui considerados:

- a) Ovalização - induzida pelos efeitos locais em seções transversais anelares.
- b) Rotação da base - em geral devida a recalques diferenciais do terreno de fundação.
- c) Insolação - quando assimétricas podem produzir rotações adicionais importantes.

Em estruturas civis, estes resultados têm grande importância, como são os casos de:

- perturbações em estruturas destinadas a equipamento sensível (por exemplo, torres de transmissão de sinais);

- fadiga dos materiais decorrentes de cargas cíclicas;
- desconforto humano, provocado por deslocamentos ou acelerações excessivas. Algumas normas limitam o deslocamento máximo em 1 : 1000 da altura, com limites em função das frequências e amplitudes a partir de 60 m.

As percentagens do amortecimento crítico em geral não ultrapassam 10%. Para o caso de chaminés tem-se as seguintes indicações:

- estruturas de aço soldado não revestido - 0,2 a 0,5 %
- estruturas de aço parafusado - 1,0 a 1,5 %
- chaminés de aço soldado revestido - 1,0 a 1,5 %
- chaminés de concreto - 2,0 a 3,0 %

### 5.3 - EXEMPLOS

As formas estruturais escolhidas foram as mais simples possíveis para que se pudesse efetuar comparações dos resultados.

#### 5.3.1 - EXEMPLO 1

A estrutura estudada consiste de uma série de quadros espaçados de 15 ft (4,57 m) do tipo indicado na (fig. 12). Os pilares são metálicos. Supõe-se que tanto os parâmetros físico-geométricos quanto as cargas são idênticos ao longo do comprimento e, assim, o comportamento de um quadro é representativo para toda a estrutura. A concentração das cargas nos níveis dos pisos é uma idealização de uma pressão dinâmica (vento) atuante sobre as paredes. A variação do carregamento com o tempo está indicada na (fig. 13). Este exemplo está analisado na referência (29).

As unidades foram convertidas para melhor compreensão dos resultados.

São dados:

- Cargas verticais:

1º piso	-	$104 \text{ psf} = 507,7 \text{ kgf/m}^2$
2º piso	-	$100 \text{ psf} = 488,2 \text{ kgf/m}^2$
3º piso	-	$50 \text{ psf} = 244,1 \text{ kgf/m}^2$

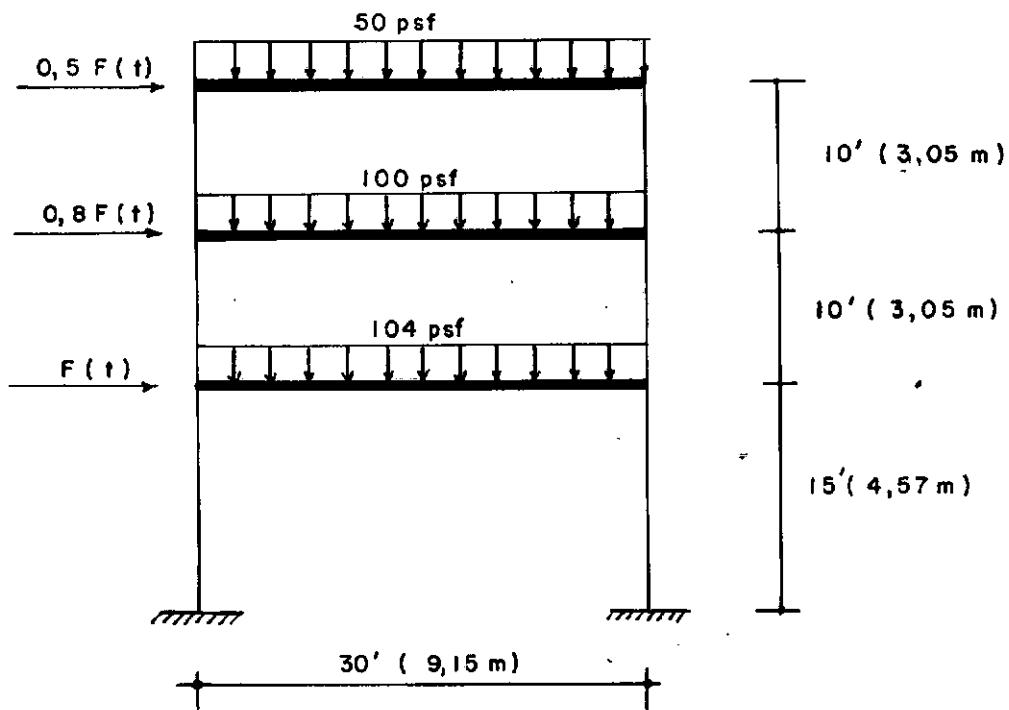


FIG. 12

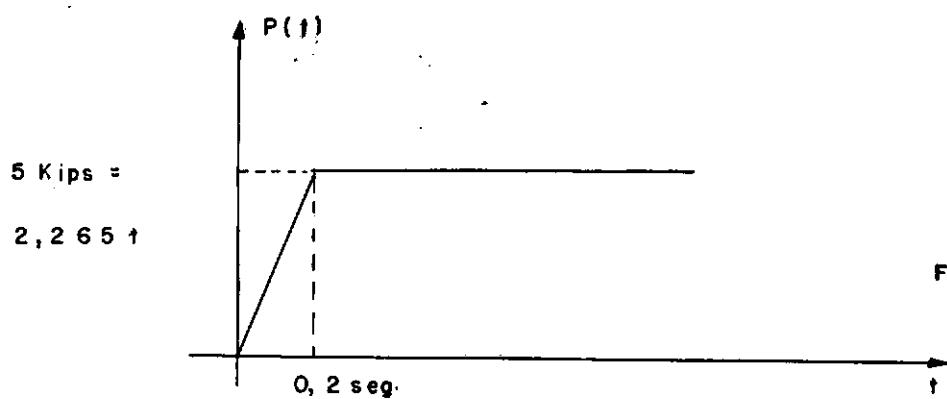


FIG. 13

- Paredes e pilares:

$20 \text{ psf} = 97,6 \text{ kgf/m}^2$  para todos os andares.

Os demais valores estão resumidos no quadro seguinte:

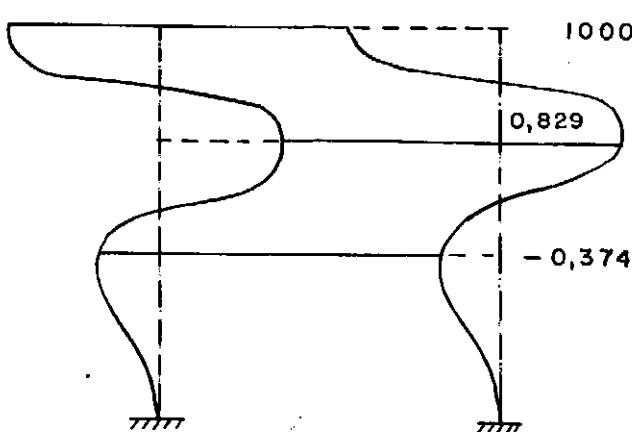
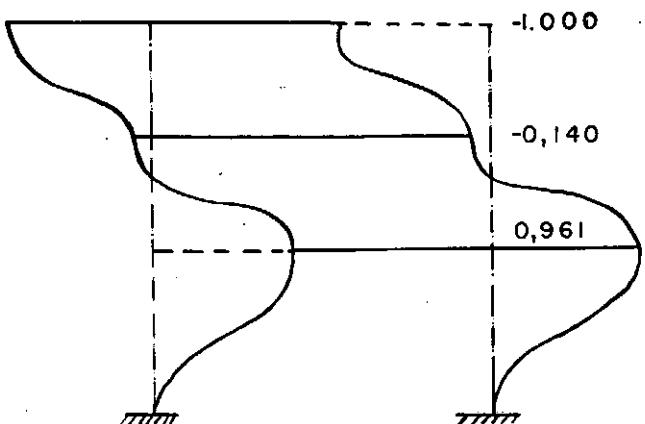
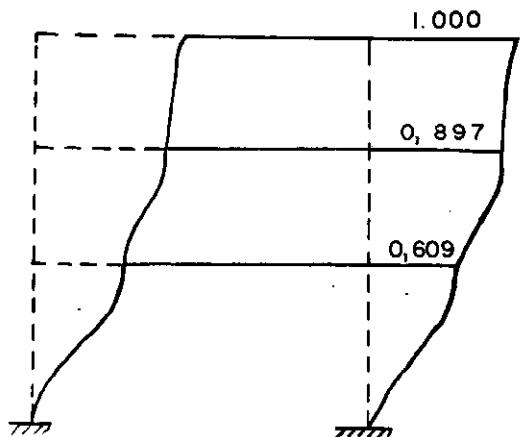
ANDAR	MASSAS		MOM.	INÉRCIA	$E \times 10^{-6}$	
	$\text{lb.sec}^2/\text{in}$	ton	$\text{in}^4$	$\text{dm}^4$	$\text{lb/in}^2$	$\text{kg/cm}^2$
1	141	2,52	497,2	1,806	30	2,1
2	132	2,36	212,6	0,773	30	2,1
3	66	1,18	212,6	0,773	30	2,1

Foram obtidos os resultados seguintes, praticamente coincidentes com os de Biggs. Diferenças desprezíveis são devidas à maior precisão que se obtém com o programa.

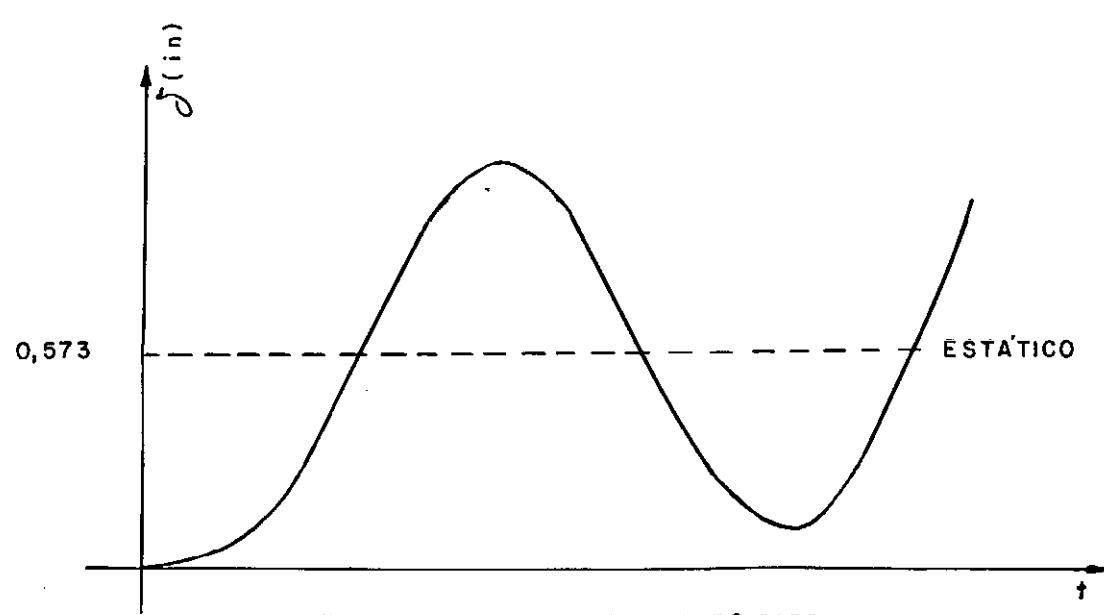
#### FREQUÊNCIAS NATURAIS

i	Hz	rd/seg
1	1,323	8,316
2	3,824	24,029
3	5,576	35,034

MODOS NORMAIS - Estão representados nas (figs. 14.a, 14.b, e 14.c).



95



## DESLOCAMENTOS MÁXIMOS

PISO	ESTÁTICO (in)	DINÂMICO		BIGGS (in)
		in	cm	
1	0,375	0,692	1,76	-
2	0,521	0,998	2,01	-
3	0,573	1,098	2,79	1,13

O fator dinâmico encontrado foi 1,90. Este valor elevado se deve à brusca variação da carga no intervalo de 0 a 0,2 seg.

A resposta para o 3º piso está indicada na (fig. 15).

## 5.3.2 - EXEMPLO 2

## 5.3.2.1 - CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA

Neste exemplo, a estrutura analisada é uma chaminé cilíndrica em concreto. Para maior compreensão dos resultados, todas as secções horizontais foram tomadas com as mesmas propriedades. Os valores assumidos são compatíveis com o problema real. Nas referências <sup>(30)</sup>e<sup>(31)</sup>, tem-se informações numerosas sobre ordem de grandeza das dimensões, consumo de mate-

rial, etc., para estruturas similares, já executadas.

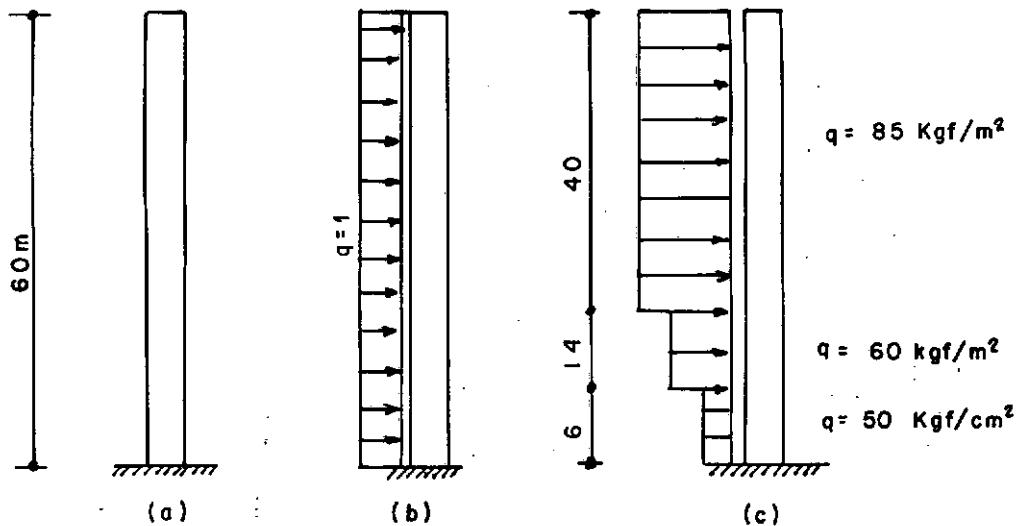


FIG. 16

Dados fornecidos:

- Altura total -  $L = 60,00\text{m}$
- Diâmetro médio -  $d_o = d_L = 3,00\text{m}$
- Espessura -  $h_o = h_L = 0,30\text{m}$
- Densidade -  $\rho = 2,4 \text{ t/m}^3$
- Módulo de Elasticidade longitudinal -  $E = 2,1 \times 10^6 \text{ Kgf/m}^2$
- Coeficiente de Poisson -  $\nu = \frac{1}{6}$

São calculados:

- Área da secção transversal -  $S = 2,8274 \text{ m}^2$
- Momento de Inércia -  $J = 3,2126 \text{ m}^4$
- Módulo de Elasticidade transversal -  $E = 0,9 \times 10^6 \text{ Kgf/m}^2$
- Coeficiente de cisalhamento -  $\gamma = 0,5269$

### 5.3.2.2 - CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS

Foram tomados 20 elementos (40 graus de liberdade) e calculados as 20 primeiras frequências e 20 primeiros modos. Em geral, para estruturas deste tipo, com os 5 primeiros modos obtem-se a resposta praticamente exata, como ficou evidenciado em diversas outras aplicações. Apenas com o 1º modo obtem-se cerca de 70% do valor exato, do deslocamento máximo.

A figura 17 mostra a convergência para a 1<sup>a</sup> frequência, tomando-se diferentes números de elementos. As 6 primeiras frequências são:

Unid.	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
Hz	0,154	0,945	2,559	4,795	7,537	10,677
rd/seg	0,970	5,941	16,077	30,128	47,356	67,086

primeiros modos relativos aos deslocamentos transversais. A curva correspondente ao modo 1 corta o eixo vertical 1 vez.

#### 5.3.2.3 - INFLUÊNCIA DO AMORTECIMENTO

A figura 19 mostra os deslocamentos ao longo do tempo devidos à carga da figura 16.b, suposta atuando instantaneamente (caso 6 do apêndice 1). Foram tomados os valores extremos: amortecimento nulo e 10% do amortecimento crítico' em todos os modos. Observa-se que o amortecimento só se faz sentir após o primeiro ponto de máximo, tendo influência crescente com o tempo. Se o problema a analisar consiste apenas em valores máximos absolutos dos deslocamentos, o amortecimento não tem grande influência. Para o caso a diferença é de 10%.

#### 5.3.2.4 - INFLUÊNCIA DO CRESCIMENTO DA CARGA

Na figura 20 estão representadas as respostas para cargas que variam linearmente durante um intervalo de tempo inicial  $T$ , onde atinge o valor indicado na figura 16. b. As respostas foram calculadas para  $T = 2, 3$  e  $10$  segundos . Os resultados mostram claramente o efeito de rajada. Quanto menor for a sua duração mais acentuado é o comportamento dinâmico. A solução estática é obtida para  $T \rightarrow \infty$ .

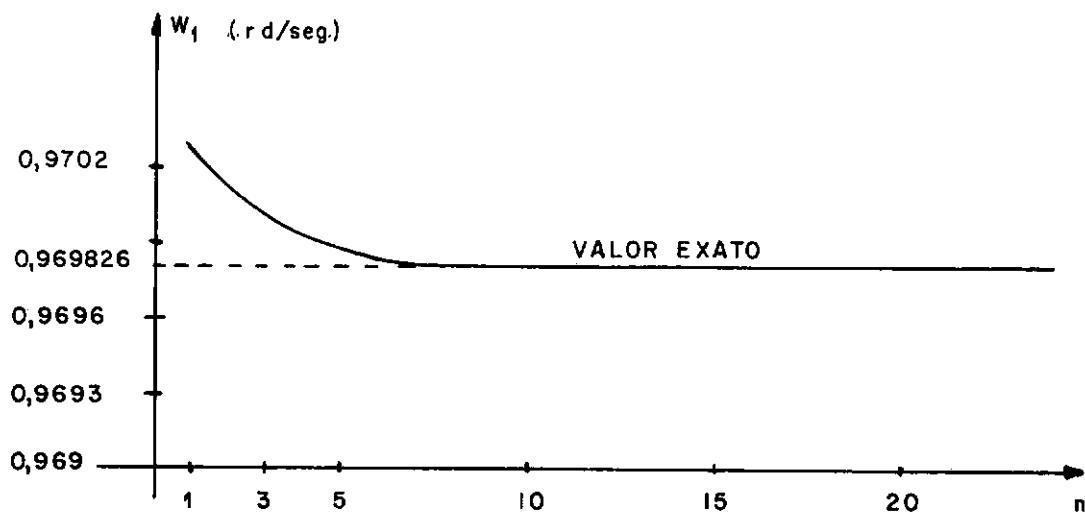


FIG.17 - CONVERGÊNCIA PARA A FREQ. FUNDAMENTAL  
n = números de elementos

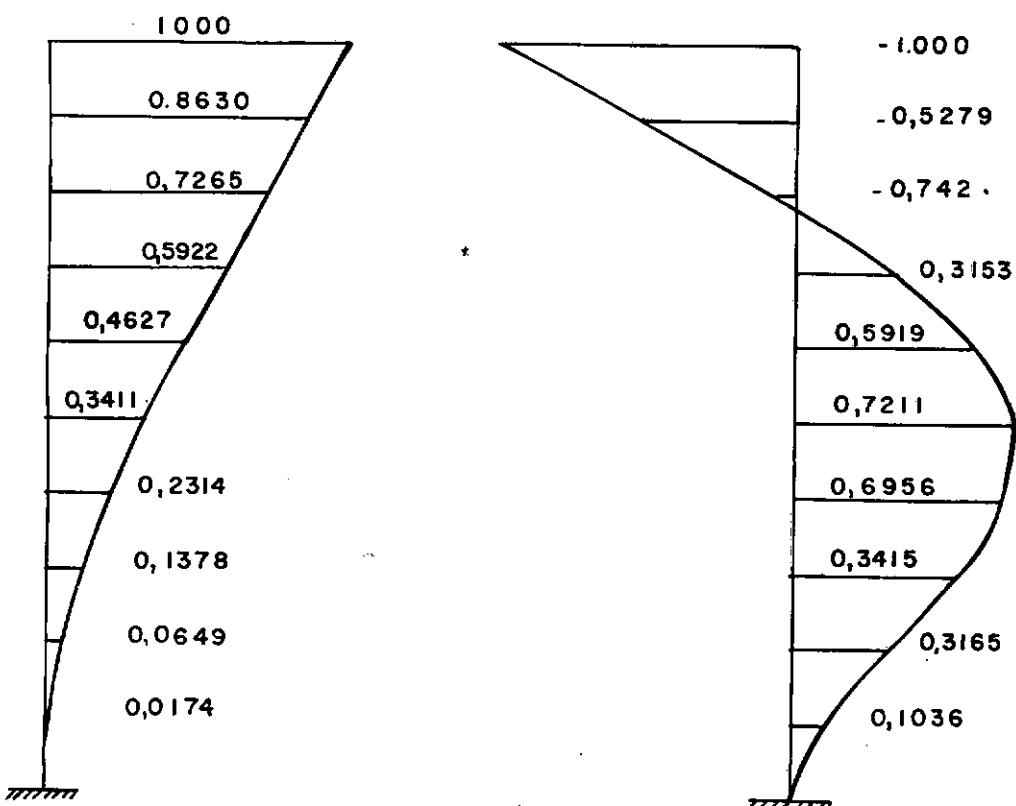


FIG. 18-a - 1º MODO

FIG. 18-b - 2º MODO

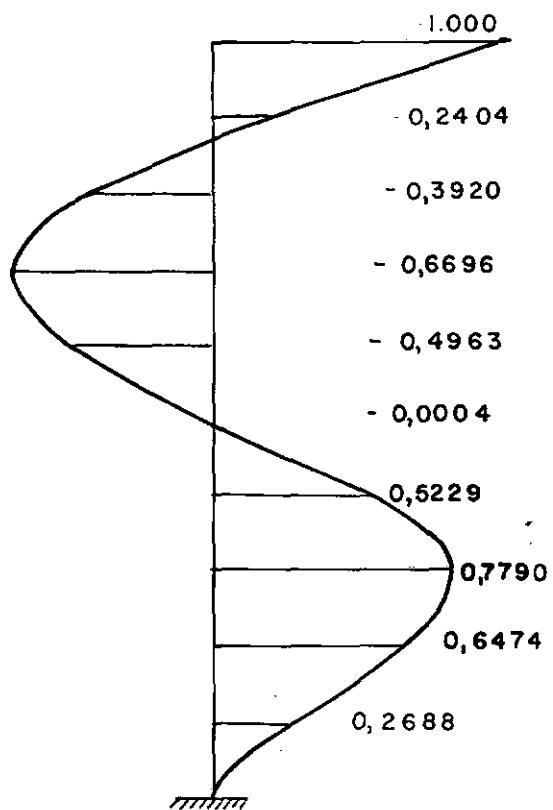


FIG. 18 c - 3° MODO

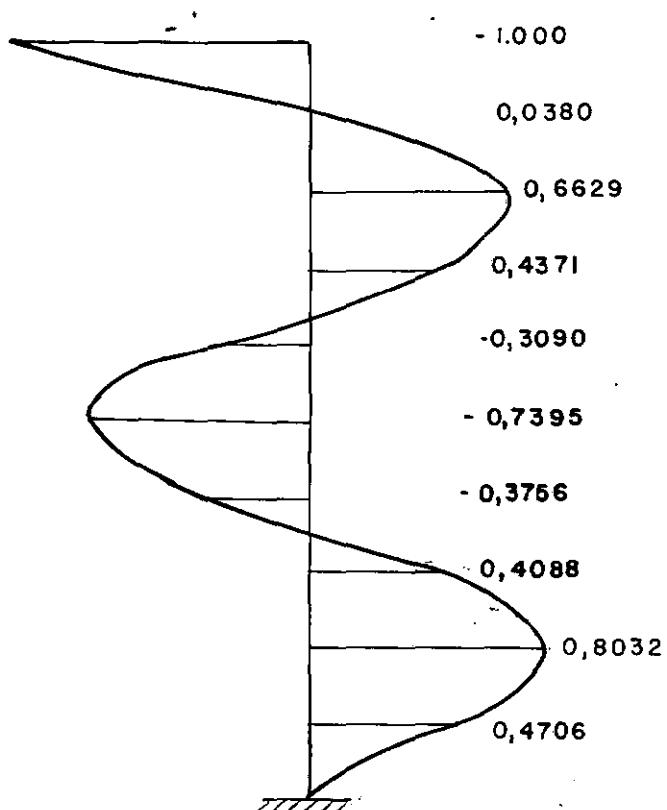


FIG. 18 d - 4° MODO

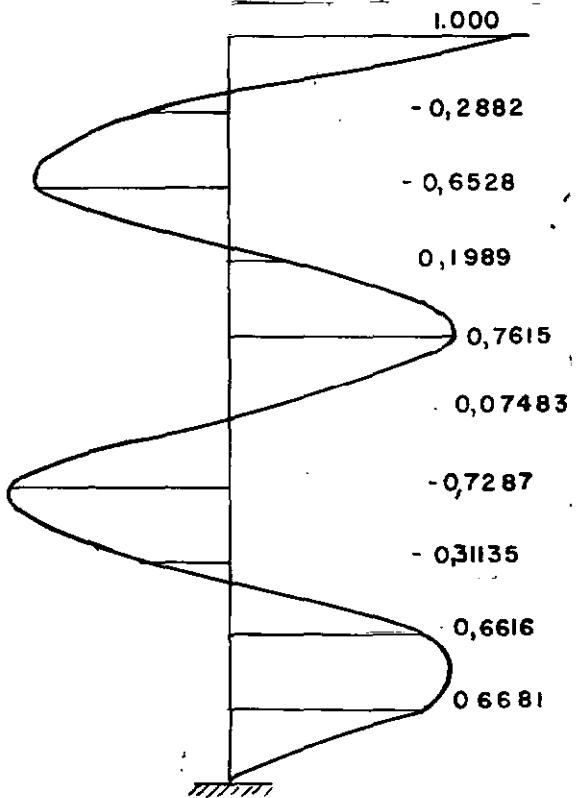


FIG. 18.e - 5° MODO

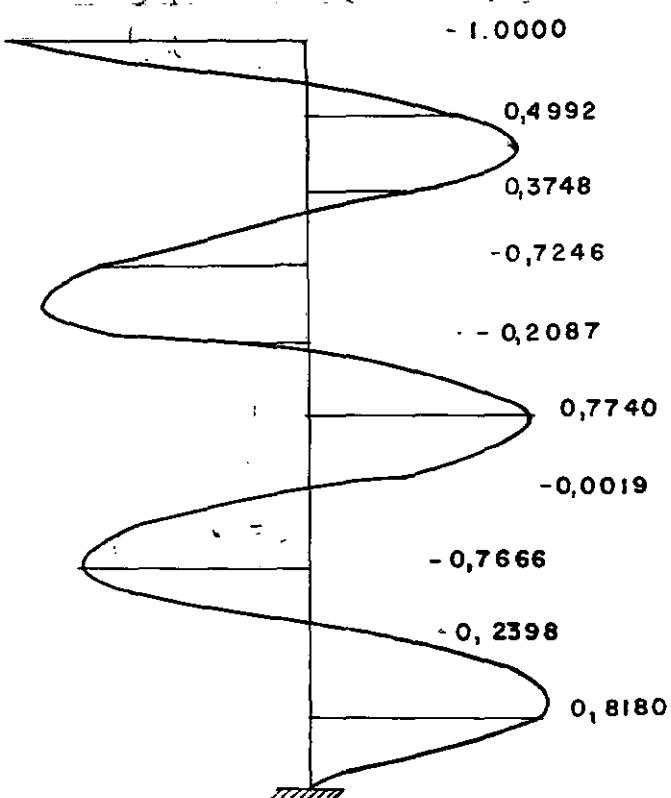


FIG. 18.f - 6° MODO

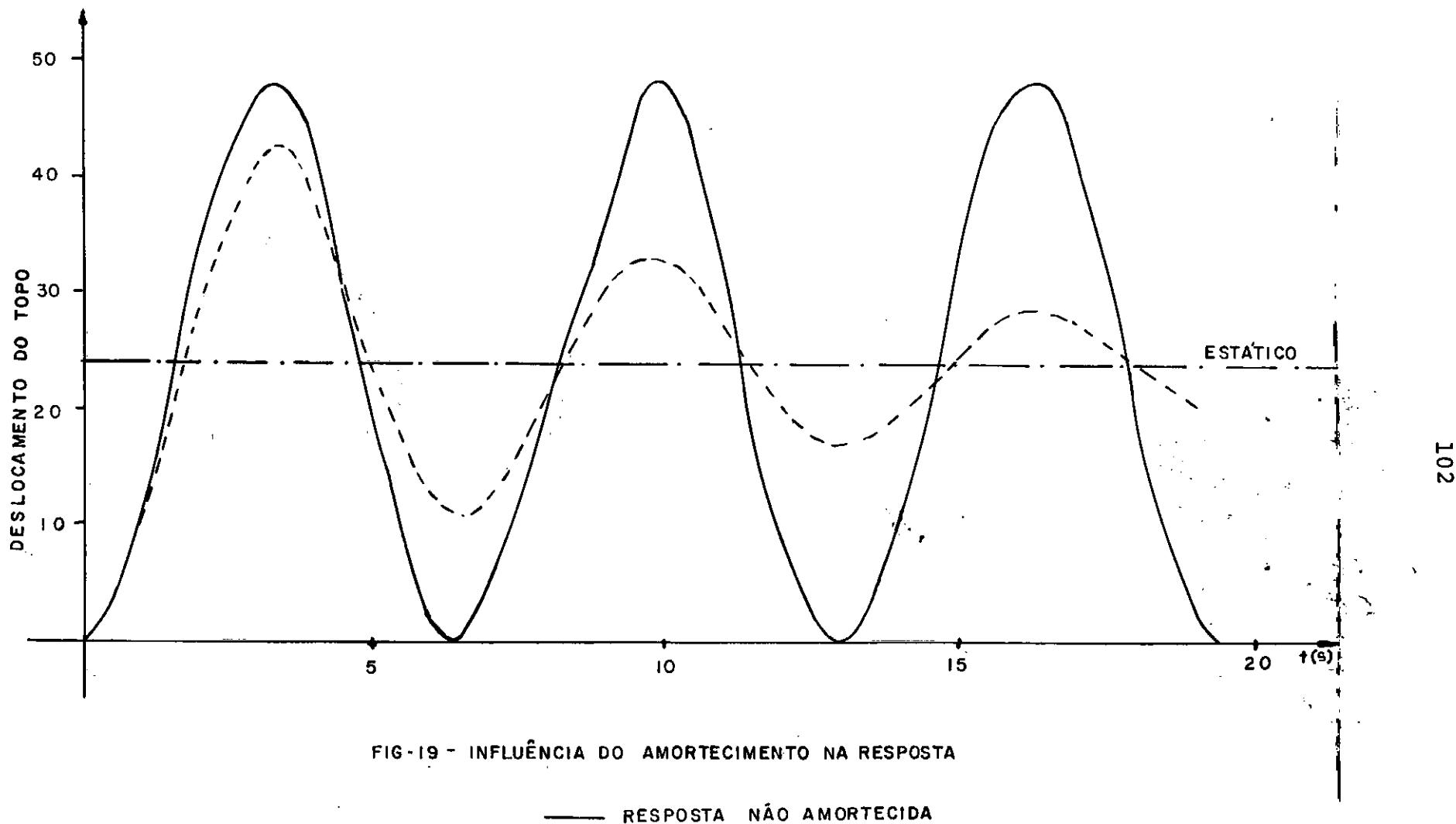


FIG-19 - INFLUÊNCIA DO AMORTECIMENTO NA RESPOSTA

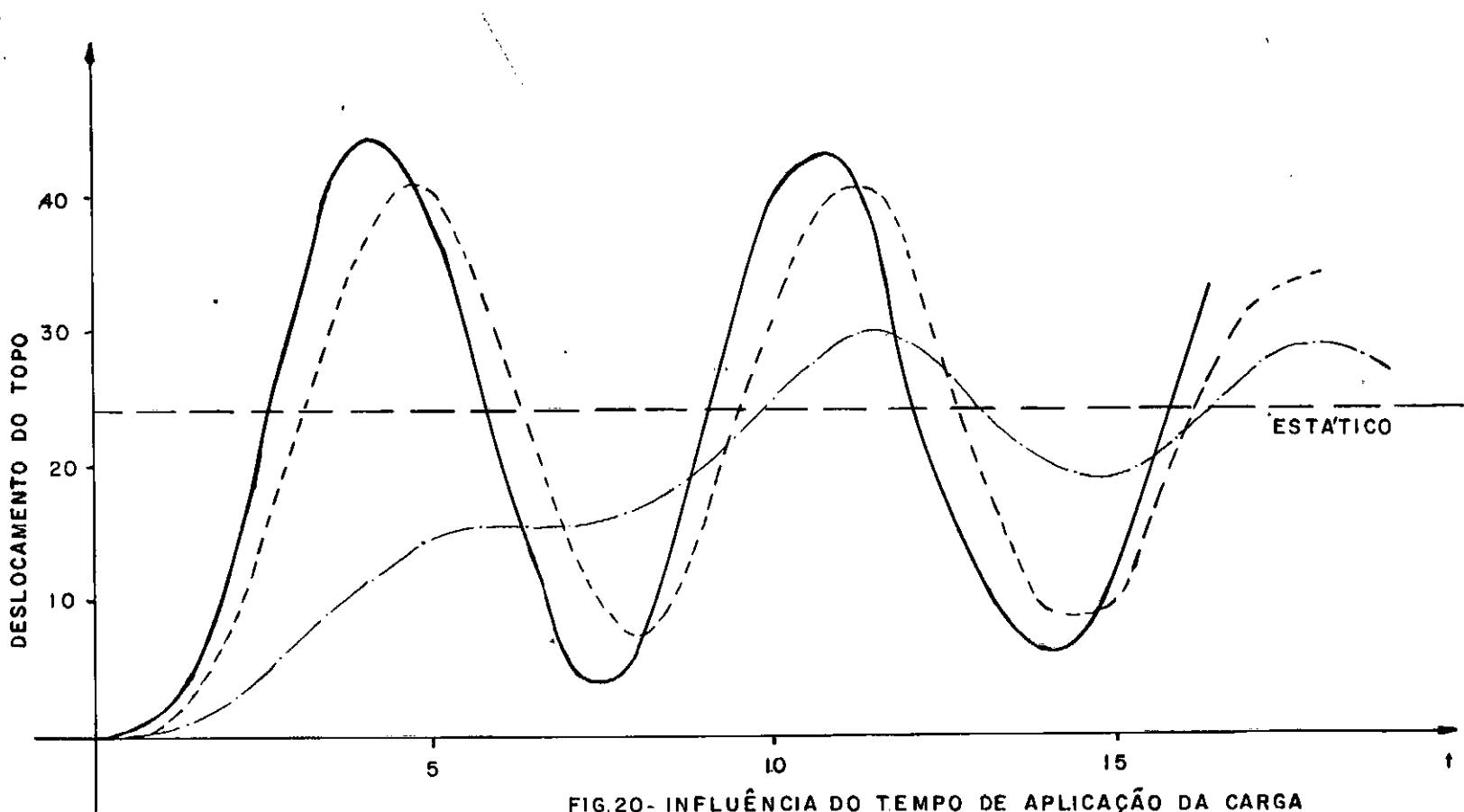


FIG.20- INFLUÊNCIA DO TEMPO DE APLICAÇÃO DA CARGA

—  $T = 2 \text{ seg}$  - - -  $T = 3 \text{ seg}$  - - - -  $T = 10 \text{ seg}$ .

### 5.3.2.5 - CARGA DA NB-5

Os valores de  $q$  indicados na figura 16.c são os fornecidos no item 8 da NB-5. O efeito global do vento é considerado multiplicando estes valores pelo coeficiente de forma  $c_g$  (NB-5, item 11).

Tem-se:

$$d \sqrt{q} > 1; \text{ então, } c_g = 0,7$$

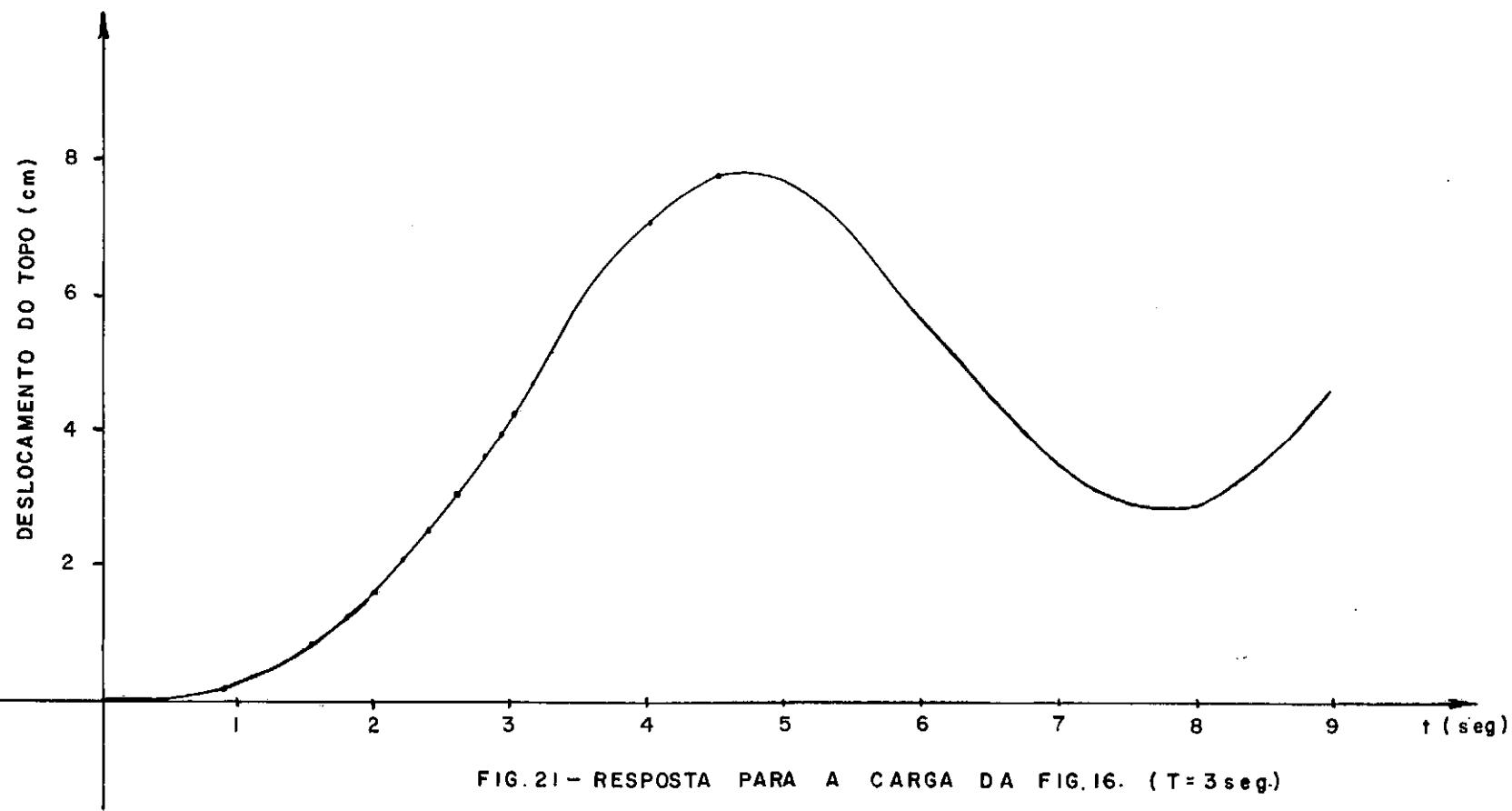
A carga ao longo do eixo vertical será:

$$0,7 \times 3,30 \times q = 2,41 q \text{ (Kgf/m)}$$

Supondo que antes de atingir estes valores houve uma variação linear inicial durante 3 segundos, obtém-se a resposta representada na figura 21.

### 5.3.2.6 - VARIAÇÃO ARBITRÁRIA DA CARGA.

Com a finalidade de mostrar uma das opções do programa automático para cálculo da resposta, tomou-se uma variação irregular da carga, com o tempo. Os valores são os da NB-5. A carga segundo o eixo vertical será 2,41 vezes os valores indicados nas figuras 21.a, 21.b e 21.c como no item prece-



dente. A resposta para o topo da chaminé está representada na figura 23.

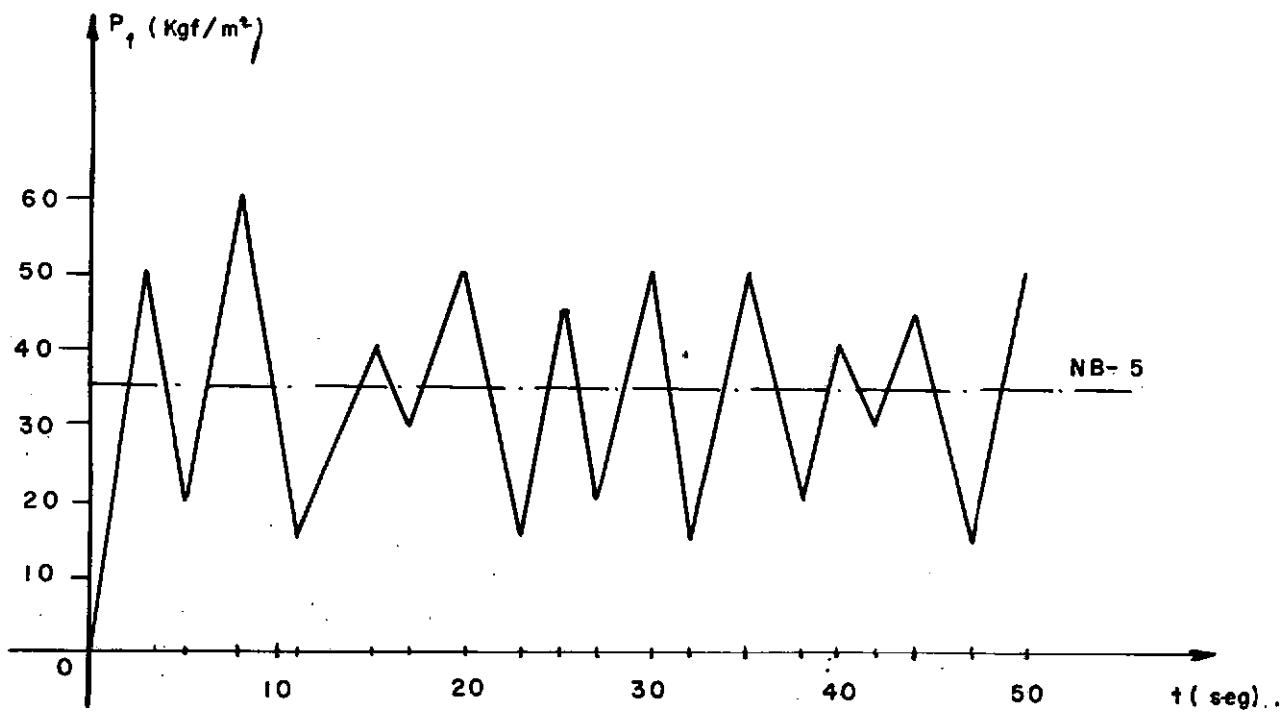


FIG. 22.a

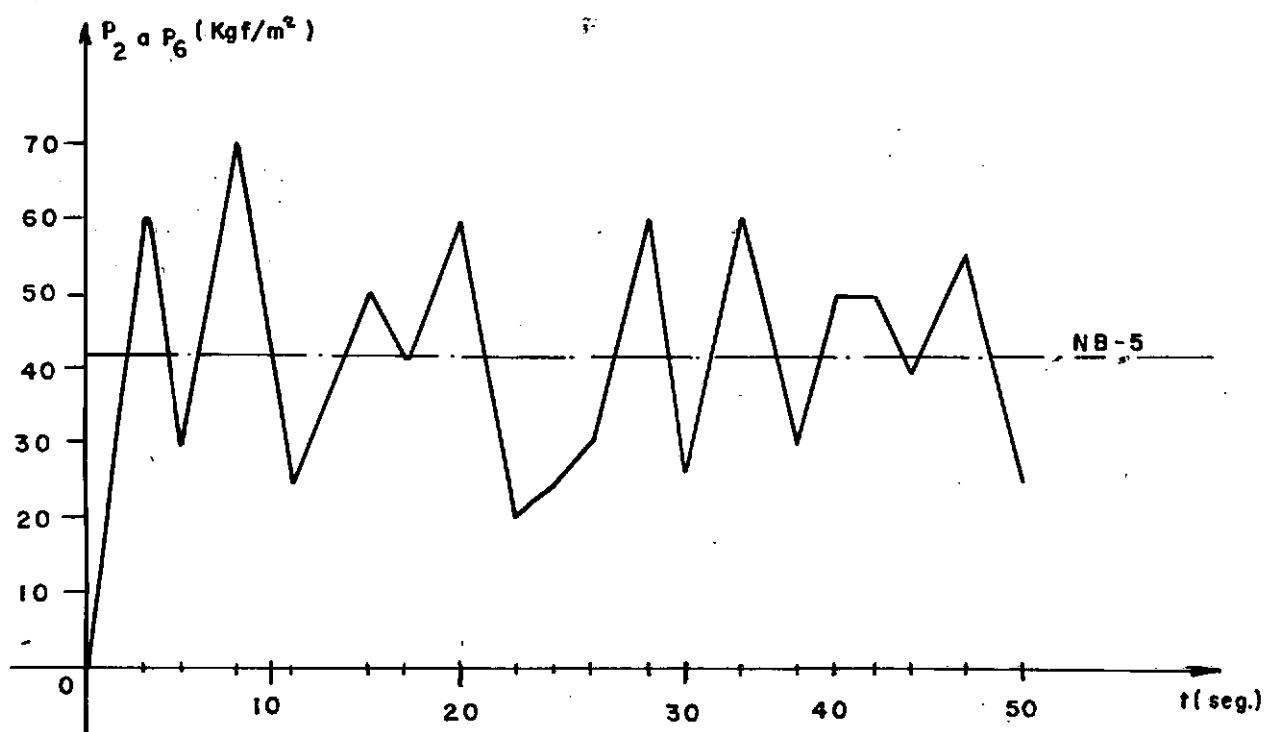


FIG. 22.b

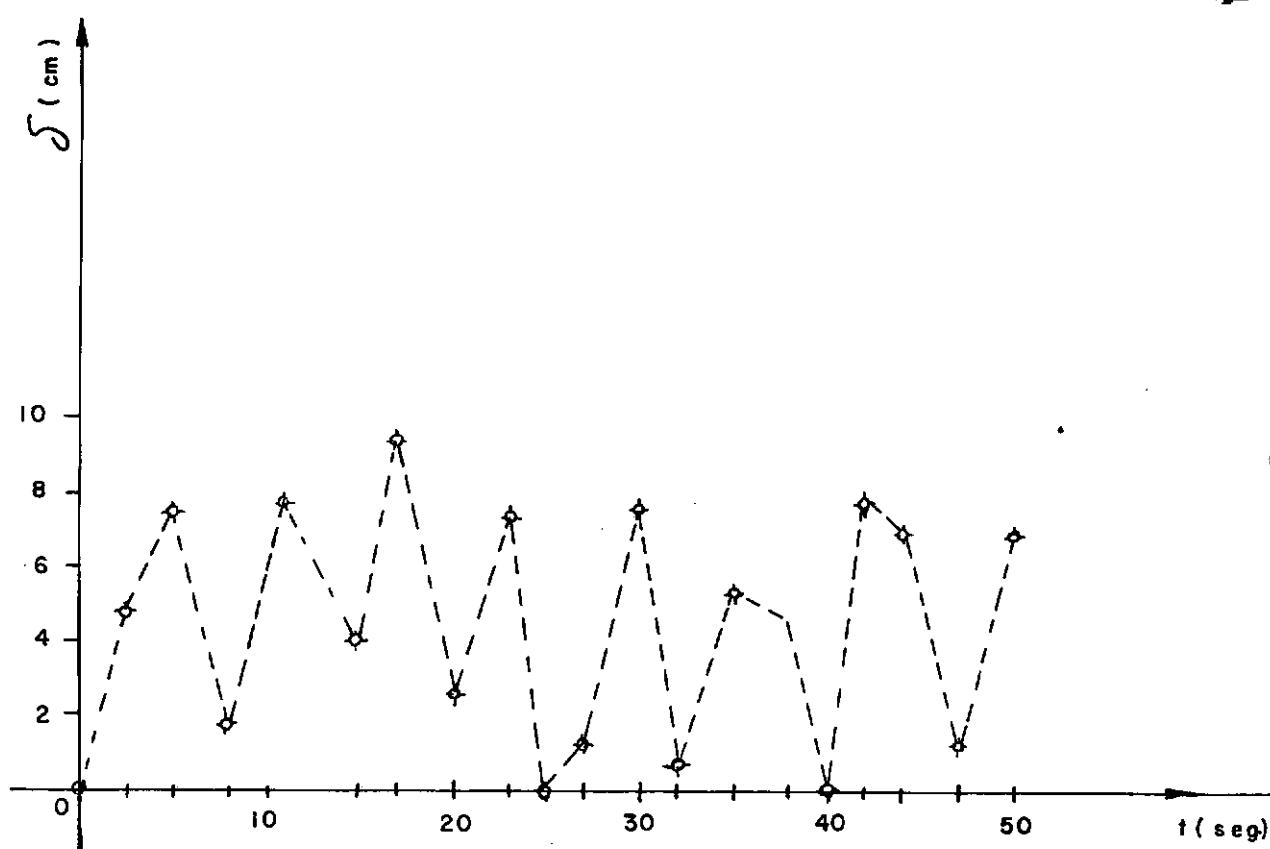
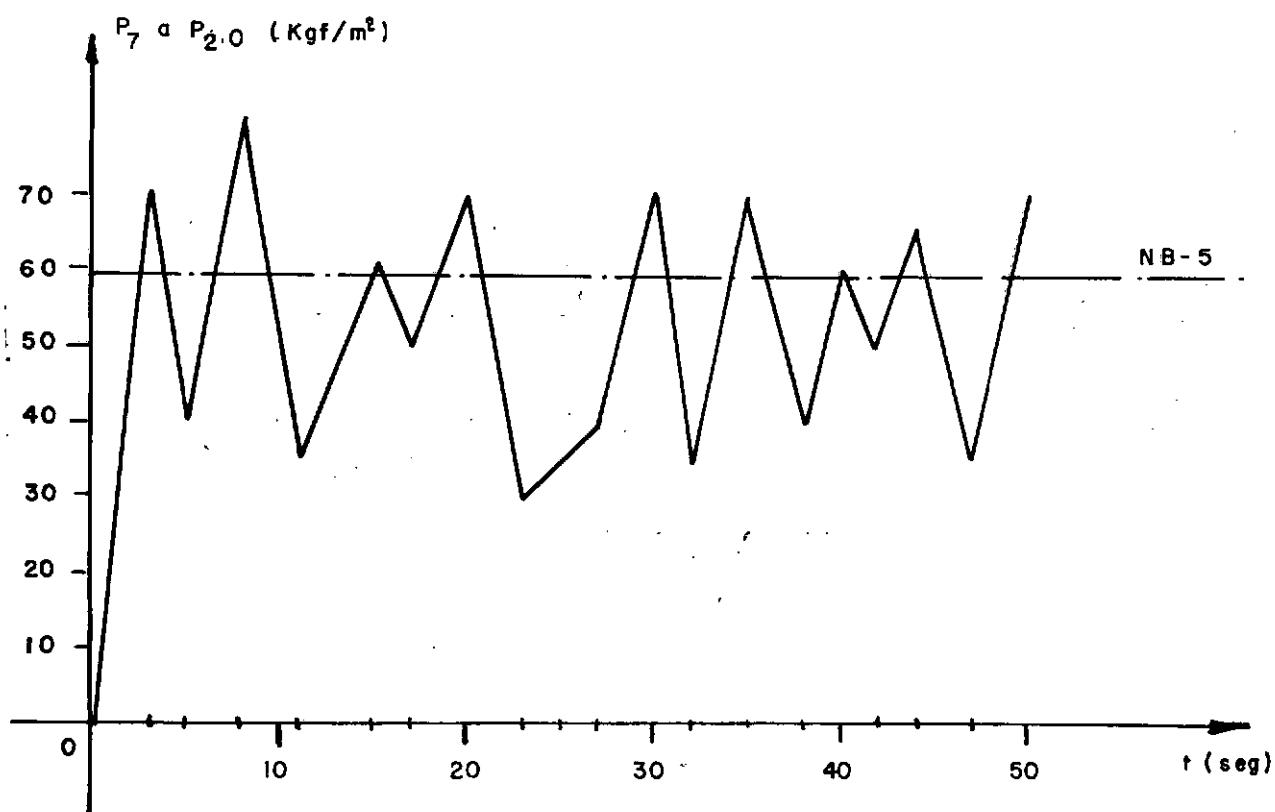


FIG. 2.3 - DESLOCAMENTOS

## 5.4 - CONCLUSÕES

- 1) - O amortecimento viscoso pode ser levado em consideração através da análise modal com a mesma ordem de dificuldades que para o caso não-amortecido. É suficiente a aplicação da teoria exposta no capítulo II, juntamente com as integrais de Duhamel do apêndice 1.
- 2) - A determinação dos coeficientes para construção da matriz de amortecimento no caso de auto-valores repetidos, desenvolvida na seção (2.4) bem como a demonstração da condição necessária no teorema da pág. 28 , não consta da literatura consultada, apesar de exaustivas pesquisas bibliográficas. Acredita-se serem aqui apresentadas pela primeira vez.
- 3) - Os modos de ordem mais alta têm pouca influência na resposta dinâmica. O mesmo ocorre com as percentagens do amortecimento crítico, bastando assim, conhecer com maior rigor as de ordem mais baixa.
- 4) - Quando se leva em conta o amortecimento em estruturas não-lineares, os processos de integração exigem de forma explícita todos os termos da matriz de amortecimento. Em geral não se tem indicações para estes valores. Uma forma de contornar o problema seria efetuar a sua construção por meio de (2.4.14), baseando-se numa análise linear como tratada neste trabalho. Um problema que se apresenta de imediato é saber se a matriz de amortecimento calculada para a estru-

tura suposta de comportamento linear difere muito da matriz para o caso não-linear.

- 5) - Em estruturas com grande número de graus de liberdade pode-se levar em conta o efeito dinâmico das cargas, de forma aproximada, a partir de uma análise estática. Para tanto, basta efetuar uma análise prévia com os modelos aqui estudados e obter um fator dinâmico de cargas máximo (valor máximo da relação entre deslocamentos dinâmicos e estáticos) e efetuar a majoração do cálculo estático através deste fator.
- 6) - Entre os processos atuais para cálculo de valores característicos de matrizes reais simétricas com todos os elementos não nulos, o mais eficiente é o de Givens-Householder. As vantagens deste método são reveladas pela análise teórica de erros de truncamento e pelo menor volume de operações (tempo de computação). No entanto, para problemas estruturais, limita-se a poucos graus de liberdade. A solução para grandes estruturas está em métodos onde permitam utilizar as características de simetria e banda das matrizes de rigidez e de massas consistentes (<sup>20</sup>), efetuando os cálculos por blocos, a exemplo de eficientes métodos existentes para solução de grandes sistemas de equações lineares. Com processos deste tipo é possível efetuar análise dinâmica de estruturas do mesmo porte das que se trata estaticamente.

Vários tópicos relacionados com os obje-

tivos deste trabalho se fazem necessários para posteriores estu-  
dos:

- a) - Considerar a interação estrutura-solo de fundação e efeitos térmicos em programas automáticos.
- b) - Considerar um modelo mais refinado, com o objetivo de analisar estruturas dos tipos aqui estudados como pórtico espacial e cascas para obtenção de efeitos locais.
- c) - Mudar o esquema do cálculo de valores característicos, conforme o ítem 6 anterior.
- d) - Efetuar em um amplo trabalho o mapeamento das diversas regiões brasileiras com informações que interessem ao estudo do vento, de natureza topográficas e meteorológicas.
- e) - Ajustagem de modelos estatísticos aos dados do ítem anterior e estudos de modelos estocásticos para a solicitação do vento.
- f) - Tratamento do problema global como de vibrações aleatórias.
- g) - Análise com comportamento não-linear.
- h) - Estudos experimentais sobre o amortecimento em estruturas típicas.
- i) - Ensaios em túneis de vento relacionados com os problemas anteriormente citados.

## BIBLIOGRAFIA

1. - VOLTERRA, E. - ZACHMANOGLON, E. C.  
"Dynamics of Vibrations"  
Charles E. Merril Books, Inc. Columbus, Ohio, 1965
2. - MEIROVITCH, L.  
"Analytical Methods in Vibrations"  
The MacMillan Company, New York, 1967
3. - DESAI, C.S. - ABEL, J.F.  
"Introduction to the Finite Element Method"  
Van Nostrand Reinhold Company, 1972
4. - ZIENCKIEWICZ, O.C.  
"The Finite Element Method in Engineering Science"  
McGraw-Hill, London, 1971
5. - ARCHER, J.S.  
"Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems"  
Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 89, ST4, 161, 1963
6. - CAUGHEY, T.K.  
"Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic System"  
Journal of Applied Mechanics, ASME, June 1960, pp. 269-271
7. - CAUGHEY, T.K. - O'KELLY, M.E.J.  
"Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamics Systems"  
Journal of Applied Mechanics, ASME, Sept. 1965, pp. 583-588

8. - HOFFMAN, K. - KUNZE, R.  
"Algebra Linear"  
Ed. Polígono 1971
9. - LIN, Y.K.  
"Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems"  
Journal of Applied Mechanics - ASME - June 1966, pp.471 - 472  
(Discussão de 7)
10. - WILSON, E.L. - PENZIEN, J.  
"Evaluation of Orthogonal Damping Matrices"  
International Journal for Numerical Methods in Engineering,  
Vol.4, 1972, pp. 5 - 10
11. - ROESSET, J.M. - WHITMAN, R.V. - DOBRY, R.  
"Model Analysis for Structures with Foundation Interaction"  
Proc. ASCE, Vol. 99, ST3, March, 1973 - pp.399-416
12. - CLOUGH, R.  
"Application of the Finite Element Method to Problems of  
Structural Dynamics"  
LNEC - Portugal - Sept. 1971
13. - VENÂNCIO FILHO, F.  
"Método dos Elementos Finitos na Análise Estrutural"  
CTA/ITA - Notas de aula do curso COC 850 - COPPE - 1972
14. - PRZEMIENIECKI, J.S.  
"Theory of Matrix Structural Analysis"  
McGraw-Hill Book Co., 1968

15. - ORTEGA, J.M.  
    "The Givens-Householder Method for the Symmetric Eigenvalue Problem".  
    Computer Science Center, Univ. of Maryland, Tech. Rep.  
    TR-64-12 Dec. 1964
16. - RALSTON, A. - WILF, H.S.  
    "Mathematical Methods for Digital Computer"  
    Vol. II, John Wiley & Sons, Inc., 1967
17. - HURTY - RUBINSTEIN, M.  
    "Dynamics Vibrations"  
    Prentice - Hall Inc., 1964
18. - HANNA, K.N. - CLARKSON, B.L.  
    "Application of Finite Element Method to the Dynamic Analysis of Tall Structures"  
    Journal of Sound and Vibration, 1971, 18(3), 391-403.
19. - COURBON, J.  
    "Cours de Résistance des Matériaux"  
    Dunod, Paris
20. - KLAUS - JÜRGEN, B. - WILSON, E.L.  
    "Large Eigenvalue Problems in Dynamic Analysis"  
    ASCE, Vol. 98, EM6, Dec. 1972, pp.1471-1485
21. - PEI, M.L.  
    "Vibration of Shear Building by Flexibility Method"  
    ASCE, Vol. 87, EM1, Feb 1961, 13-21

22. - COWPER, G.R.  
"The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory"  
J. of Appl. Mechanics, June 1966, pp. 335-340
23. - COWPER, G.R.  
"On the Accuracy of Timoshenko's Beam Theory"  
ASCE, Vo. 94, EM6, Dec. 1968, pp. 1447-53
24. - MINDLIN, R.D. - DERESIEWICZ, H.  
"Timoshenko's Shear Coefficient for Flexural Vibration of  
Beam"  
Proc. of the 2nd. USA Nat. Cong. of Appl. Mechanics -1954,  
pp. 175-179
25. - HOUSNER, G.W. - KEIGHTLEY, W.O.  
"Vibrations of Linearly Tapered Cantilever Beam"  
ASCE, Vol. 88, EM2, April, 1962 - pp. 95-123
26. - CHIN, A.N.L.  
"Response of Structures to Time Varying Wind Loads"  
ASCE, Vol. 99, ST2, Feb. 1970 - pp. 381-391
27. - ABU-SABA, E.G.  
"Vibration of Chimney Supported on Elevated Concrete Slab"  
ASCE, Vol. 97, ST2, Feb. 1971 - pp. 619-635
28. - BLUME, J.A.  
"Dynamic Characteristics of Multistory Buildings"  
ASCE, Vol. 94, ST2, Feb. 1968 - pp. 377-402

29. - BIGGS, J.M.

"Introduction to Structural Dynamics"

McGraw-Hill, 1964.

30. - DIVER, M.

"Calcul Pratique des Tours en Béton Armé"

Dunod, 1972.

31. - LEONHARDT, F.

"Modern Design of Television Towers"

Proc. - Inst. of Civil Engineers - Vol. 46, July, 1970

32. - RAVARA, A.

"Dinâmica das Estruturas"

Curso 111 - LNEC - LISBOA - 1969

33. - ARCHER, J.S.

"Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis  
Using Finite-Element Techniques"

AIAA Journal, Vol. 3, Nº 10, Oct. 1965 - pp. 1910-18

APÊNDICE 1

Na equação (2.5.7), tem-se a integral de

Duhamel

$$\{D\} = \int_0^t \left\{ \left[ \exp -n\omega_i(t-\tau) \right] \left[ \sin \left[ \omega_i(1-n_i^2)^{\frac{1}{2}}(t-\tau) \right] \right] \times \right. \\ \left. \times |\Phi|^T \{P\} \right\} d\tau \quad (\text{A.1.1})$$

$$d_i = \sum_{k=1}^n \phi_{ki} \int_0^t \exp \left[ -n_i \omega_i (t-\tau) \right] \sin \left[ \omega_i (1-n_i^2)^{\frac{1}{2}} \times \right. \\ \left. \times (t-\tau) \right] F_k(\tau) d\tau$$

ou

$$d_i = \sum_{k=1}^n \phi_{ki} D_{ik} \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.1.2})$$

onde

$$D_{ik} = \int_0^t \exp \left[ -a_i(t-\tau) \right] \sin b_i(t-\tau) F_k(\tau) d\tau \quad (\text{A.1.3})$$

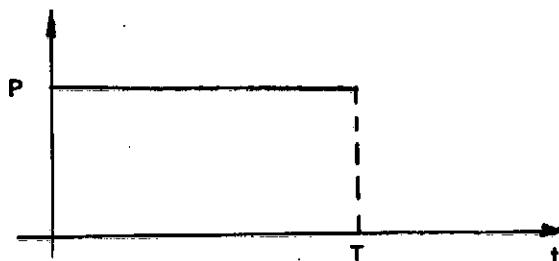
$$a_i = n_i \omega_i$$

$$b_i = \omega_i (1-n_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

Foram efetuadas as integrações de

(A.1.3) para vários tipos de cargas  $F(\tau)$ , mostradas a seguir:

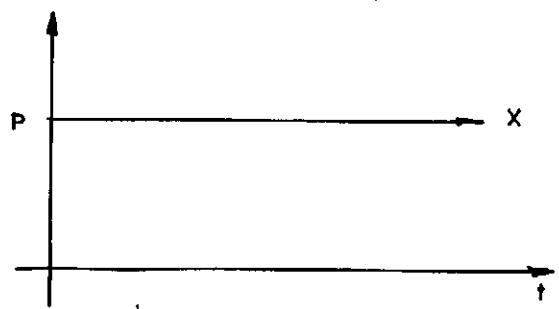
1-



$$D = \frac{P}{a^2 + b^2} \left[ b - e^{-at} (a \sin bt + b \cos bt) \right] \quad 0 \leq t \leq T$$

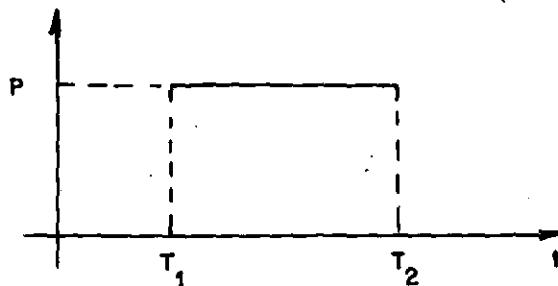
$$D = \frac{P e^{-at}}{a^2 + b^2} \left\{ e^{aT} \left[ a \sin b(t - T) + b \cos b(t - T) \right] - (a \sin bt + b \cos bt) \right\} \quad t \geq T$$

2-



$$D = \frac{P}{a^2 + b^2} \left[ b - e^{-at} (a \sin bt + b \cos bt) \right] \quad \sqrt{t} \geq 0$$

3-



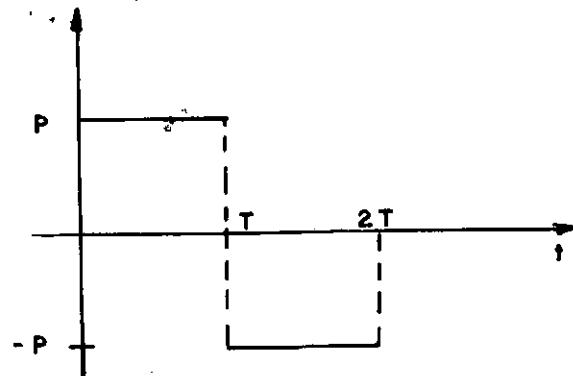
$$D = 0 \quad 0 \leq t \leq T_1$$

$$D = \frac{P}{a^2 + b^2} \left\{ b - e^{-a(t - T_1)} \left[ a \sin b(t - T_1) + b \cos b(t - T_1) \right] \right\} \quad T_1 \leq t \leq T_2$$

$$D = \frac{P e^{-a(t - T_2)}}{a^2 + b^2} \left[ a \sin b(t - T_2) + b \cos b(t - T_2) \right] -$$

$$- \frac{P e^{-a(t - T_1)}}{a^2 + b^2} \left[ a \sin b(t - T_1) + b \cos b(t - T_1) \right] \quad t \geq T_2$$

4-



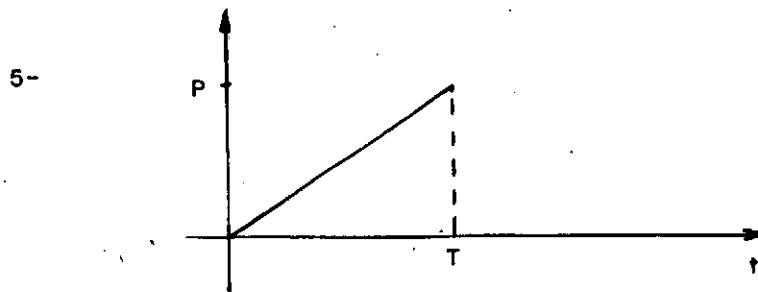
$$D = \frac{P}{a^2 + b^2} \left[ b - e^{-at} (a \sin bt + b \cos bt) \right] \quad 0 < t < T$$

$$D = -\frac{Pb}{a^2 + b^2} + \frac{Pe^{-at}}{a^2 + b^2} \left\{ 2e^{aT} \left[ a \sin b(t-T) + b \cos b(t-T) \right] - \right.$$

$$\left. - (a \sin bt + b \cos bt) \right\} \quad T < t < 2T$$

$$D = \frac{Pe^{-at}}{a^2 + b^2} \left\{ 2e^{aT} \left[ a \sin b(t-T) + b \cos b(t-T) \right] - (a \sin bt + b \cos bt) \right. \quad -$$

$$\left. - e^{2aT} \left[ a \sin b(t-2T) + b \cos b(t-2T) \right] \right\} \quad t > 2T$$

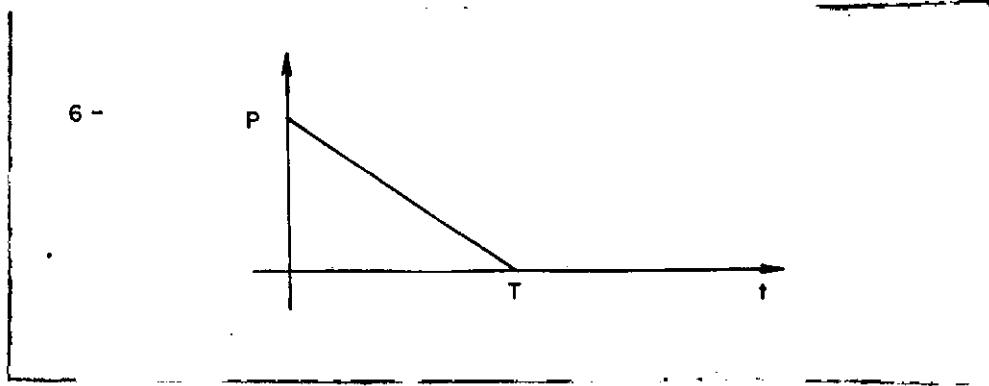


$$D = \frac{P}{T(a^2 + b^2)} \left\{ bt - \frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{e^{-at}}{a^2 + b^2} \left[ (a^2 - b^2) \sin bt + 2ab \cos bt \right] \right\}$$

$$0 \leq t \leq T$$

$$D = \frac{P e^{-a(t-T)}}{T(a^2 + b^2)^2} \left\{ T(a^2 + b^2) \left[ a \sin b(t-T) + b \cos b(t-T) \right] - \left[ (a^2 - b^2) \sin b(t-T) + 2ab \cos b(t-T) \right] \right\}$$

$$+ \frac{P e^{-at}}{T(a^2 + b^2)^2} \left[ (a^2 - b^2) \sin bt + 2ab \cos bt \right] \quad t > T$$



$$D = \frac{P}{a^2 + b^2} \left\{ b \left[ 1 - \frac{t}{T} + \frac{2a}{T(a^2 + b^2)} \right] - e^{-at} \left[ \left( a + \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)T} \right) \sin bt + \right. \right.$$

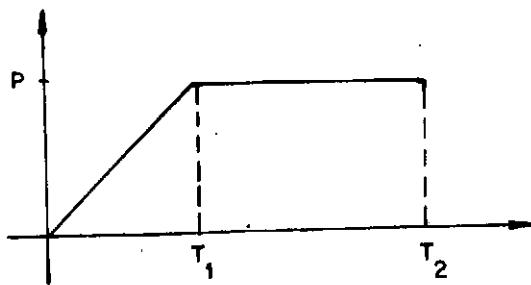
$$\left. \left. + b \left( 1 + \frac{2a}{(a^2 + b^2)T} \right) \cos bt \right] \right\} \quad 0 \leq t \leq T$$

$$D = \frac{P e^{-a(t-T)}}{T(a^2 + b^2)^2} \left[ (a^2 - b^2) \sin b(t-T) + 2ab \cos b(t-T) \right]$$

$$- \frac{P e^{-at}}{a^2 + b^2} \left\{ \left[ a + \frac{a^2 - b^2}{T(a^2 + b^2)} \right] \sin bt + b \left[ 1 + \frac{2a}{T(a^2 + b^2)} \right] \cos bt \right\}$$

$t \geq T$

7.

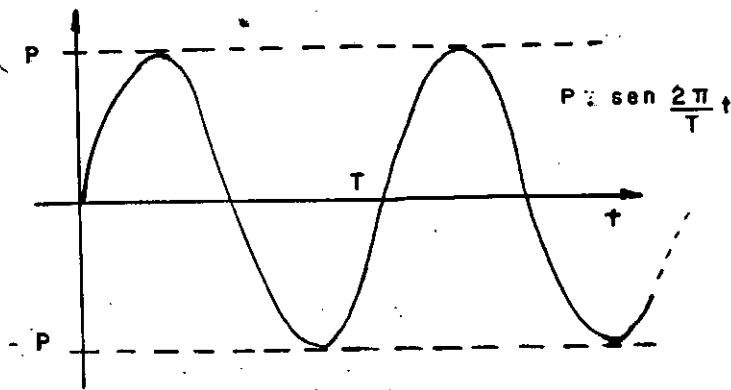


$$D = \frac{P}{T(a^2 + b^2)} \left\{ bt - \frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{e^{-at}}{a^2 + b^2} \left[ (a^2 - b^2) \sin bt + 2ab \cos bt \right] \right\} \quad 0 < t < T_1$$

$$D = \frac{Pb}{a^2 + b^2} + \frac{Pe^{-at}}{T_1(a^2 + b^2)^2} \left\{ (a^2 - b^2) \left[ \sin bt - e^{aT_1} \sin b(t - T_1) \right] + 2ab \left[ \cos bt - e^{aT_1} \cos b(t - T_1) \right] \right\} \quad T_1 < t < T_2$$

$$D = \frac{Pe^{-at}}{T_1(a^2 + b^2)^2} \left\{ (a^2 - b^2) \left[ \sin bt - e^{aT_1} \sin b(t - T_1) \right] + 2ab \left[ \cos bt - e^{aT_1} \cos b(t - T_1) \right] \right\} + \frac{Pe^{-a(t - T_2)}}{a^2 + b^2} \left[ a \sin b(t - T_2) + b \cos b(t - T_2) \right] \quad t > T_2$$

8-



$$P \equiv \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t$$

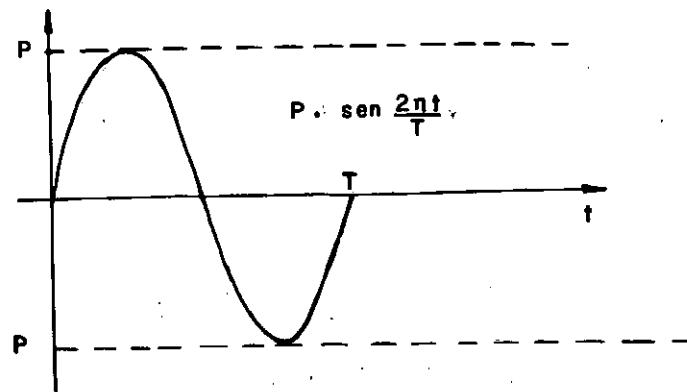
$$D = \frac{P}{2 \left[ a^2 + \left( b + \frac{2\pi}{T} \right)^2 \right]} \quad \left\{ a \cos \frac{2\pi}{T} t + \left( b + \frac{2\pi}{T} \right) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t + \right.$$

$$e^{-at} \left[ \left( b + \frac{2\pi}{T} \right) \operatorname{sen} bt - a \cos bt \right] \Bigg\}$$

$$- \frac{P}{2 \left[ a^2 + \left( b - \frac{2\pi}{T} \right)^2 \right]} \quad \left\{ a \cos \frac{2\pi}{T} t - \left( b - \frac{2\pi}{T} \right) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t + \right.$$

$$e^{-at} \left[ \left( b - \frac{2\pi}{T} \right) \operatorname{sen} bt - a \cos bt \right] \Bigg\} \quad t > 0$$

9-



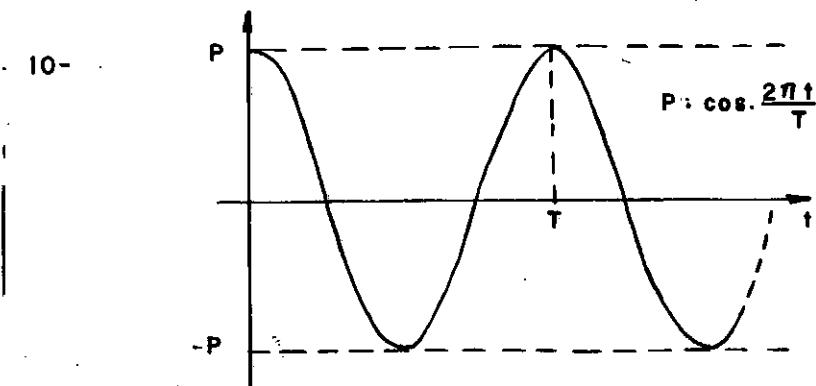
Para  $0 \leq t \leq T$ , mesma equação do caso 8.

$$D = \frac{P e^{-a(t-T)}}{a^2 + \left(b + \frac{2\pi}{T}\right)^2} \left[ a \cos b(t-T) - \left(b + \frac{2\pi}{T}\right) \sin b(t-T) - \right.$$

$$\left. e^{-aT} \left( a \cos bt - \left(b + \frac{2\pi}{T}\right) \sin bt \right) \right]$$

$$- \frac{P e^{-a(t-T)}}{a^2 + \left(b - \frac{2\pi}{T}\right)^2} \left[ a \cos b(t-T) - \left(b - \frac{2\pi}{T}\right) \sin b(t-T) - \right.$$

$$\left. e^{-aT} \left( a \cos bt - \left(b - \frac{2\pi}{T}\right) \sin bt \right) \right]$$

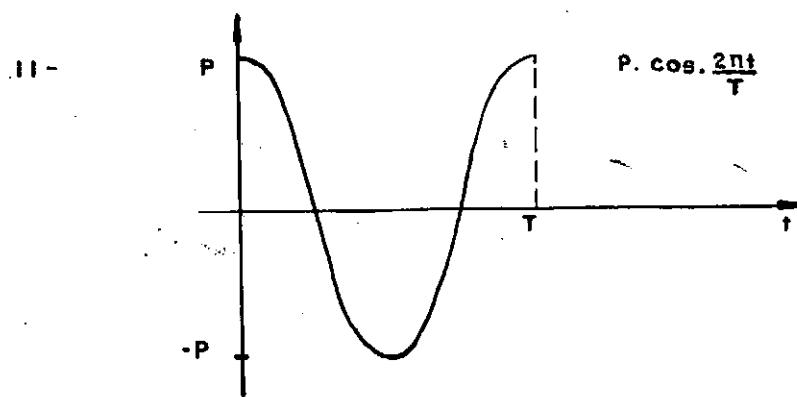


$$D = -\frac{P}{2 \left[ a^2 + \left( b + \frac{2\pi}{T} \right)^2 \right]} \left\{ -a \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} + \left( b + \frac{2\pi}{T} \right) \cos \frac{2\pi t}{T} - \right.$$

$$\left. e^{-at} \left[ a \operatorname{sen} bt + \left( b + \frac{2\pi}{T} \right) \cos bt \right] \right\}$$

$$+ \frac{P}{2 \left[ a^2 + \left( b - \frac{2\pi}{T} \right)^2 \right]} \left\{ a \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} + \left( b - \frac{2\pi}{T} \right) \cos \frac{2\pi t}{T} - \right.$$

$$\left. e^{-at} \left[ a \operatorname{sen} bt + \left( b - \frac{2\pi}{T} \right) \cos bt \right] \right\}$$



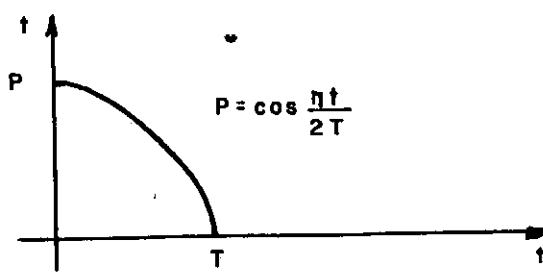
Para  $0 \leq t \leq T$ , mesma equação do caso 10.

$$D = \frac{P e^{-a(t-T)}}{2 \left[ a^2 + \left( b + \frac{2\pi}{T} \right)^2 \right]} \quad \left\{ a \operatorname{sen} b(t-T) + \left( b + \frac{2\pi}{T} \right) \cos b(t-T) - \right.$$

$$\left. e^{-aT} \left[ a \operatorname{sen} bt + \left( b + \frac{2\pi}{T} \right) \cos bt \right] \right\}$$

$$+ \frac{P e^{-a(t-T)}}{2 \left[ a^2 + \left( b - \frac{2\pi}{T} \right)^2 \right]} \quad \left\{ a \operatorname{sen} b(t-T) + \left( b - \frac{2\pi}{T} \right) \cos b(t-T) - \right.$$

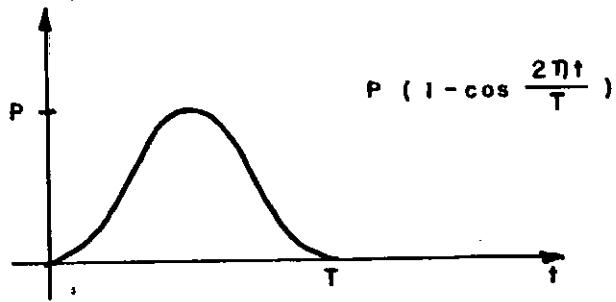
$$\left. e^{-aT} \left[ a \operatorname{sen} bt + \left( b - \frac{2\pi}{T} \right) \cos bt \right] \right\}$$



$$D = \frac{P}{2 \left[ a^2 + \left( b + \frac{\pi}{2T} \right)^2 \right]^2} \left\{ -a \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2T} + \left( b + \frac{\pi}{2T} \right) \cos \frac{\pi t}{2T} - e^{-at} \left[ a \operatorname{sen} bt + \left( b + \frac{\pi}{2T} \right) \cos bt \right] \right\} + \frac{P}{2 \left[ a^2 + \left( b - \frac{\pi}{2T} \right)^2 \right]^2} \left\{ a \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2T} + \left( b - \frac{\pi}{2T} \right) \cos \frac{\pi t}{2T} - e^{-at} \left[ a \operatorname{sen} bt + \left( b - \frac{\pi}{2T} \right) \cos bt \right] \right\} \quad 0 \leq t \leq T$$

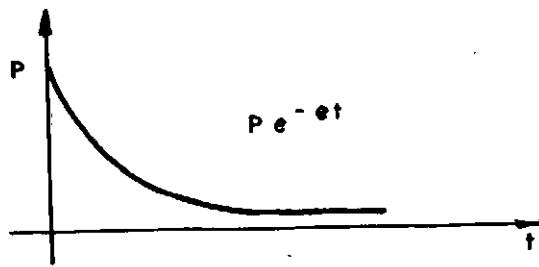
$$D = \frac{P e^{-a(t-T)}}{2 \left[ a^2 + \left( b + \frac{\pi}{2T} \right)^2 \right]} \left\{ -a \cos b(t-T) + \left( b + \frac{\pi}{2T} \right) \operatorname{sen} b(t-T) - e^{-at} \left[ a \operatorname{sen} bt + \left( b + \frac{\pi}{2T} \right) \cos bt \right] \right\} + \frac{P e^{-a(t-T)}}{2 \left[ a^2 + \left( b - \frac{\pi}{2T} \right)^2 \right]} \left\{ a \cos b(t-T) - \left( b - \frac{\pi}{2T} \right) \operatorname{sen} b(t-T) - e^{-at} \left[ a \operatorname{sen} bt - \left( b - \frac{\pi}{2T} \right) \cos bt \right] \right\} \quad t > T$$

13 -



$D_{13} = D_1 - D_{11}$ , onde  $D_1$  e  $D_{11}$  são dados pelas equações dos casos 1 e 11, respectivamente, em cada um dos intervalos.

14-

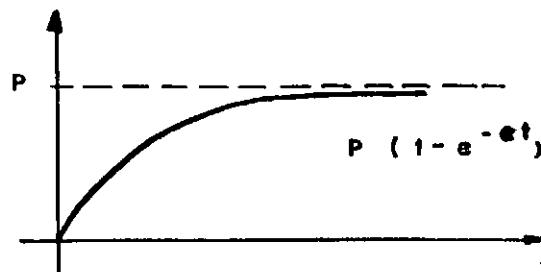


$$D = \frac{P e^{-at}}{(a - c)^2 + b^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b - e^{-at} \\ [(a - c) \sin bt + b \cos bt] \end{array} \right\}$$

 $\forall t \geq 0$ 

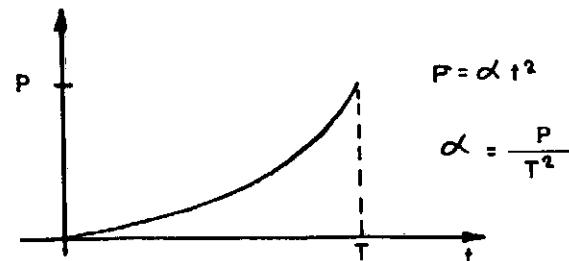
15-



$$D = D_1 - D_{14}, \quad \text{onde } D_1 \text{ e } D_{14} \text{ são dados pelas equações dos casos}$$

 $1 \text{ e } 14, \text{ respectivamente, } \forall t \geq 0$

16 -



$$P = \alpha t^2$$

$$\alpha = \frac{P}{T^2}$$

$$0 \leq t \leq T$$

$$D = \frac{\alpha b t^2}{a^2 + b^2} - \frac{4 \alpha a b t}{(a^2 + b^2)^3} + \frac{2 \alpha b (3a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^3} + \frac{2 \alpha e^{-at}}{(a^2 + b^2)^3} \times$$

$$\left[ b (b^2 - 3a^2) \cos bt + a (3b^2 - a^2) \sin bt \right]$$

$$D = -\frac{\alpha T e^{-a(t-T)}}{a^2 + b^2} \left\{ T - \frac{2a}{a^2 + b^2} \right\} \left[ a \sin b (t - T) + b \cos b (t - T) \right]$$

$$+ \frac{2 \alpha e^{-a(t-T)}}{(a^2 + b^2)^2} \left\{ \left[ \frac{a (a^2 - 3b^2)}{a^2 + b^2} + b^2 T \right] \sin b (t - T) + \right.$$

$$\left. \left[ \frac{b (3a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} - a b T \right] \cos b (t - T) \right\}$$

$$+ \frac{2 \alpha e^{-at}}{(a^2 + b^2)^3} \left[ a (3b^2 - a^2) \sin bt + b (b^2 - 3a^2) \cos bt \right]$$

APÊNDICE 2

Seja a peça conforme indicada na Fig. 24

- com seções transversais retangulares ou coroas circulares.

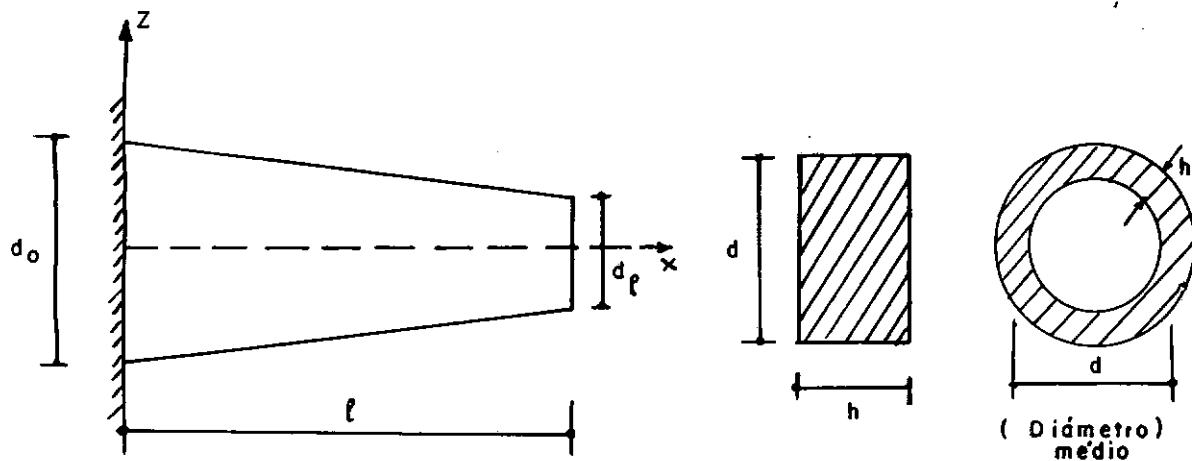


FIG. 24

Supondo-se  $d$  e  $h$  variando linearmente ao longo da direção  $x$ , tem-se

$$h = h_o [1 - (1 - H) \xi] \quad (\text{A.2.1})$$

$$d = d_o [1 - (1 - D) \xi]$$

onde

$$\xi = \frac{x}{\ell}, \quad H = \frac{h_L}{h_o} \quad \text{e} \quad D = \frac{d_L}{d_o} \quad (\text{A.2.2})$$

Área da Seção Transversal

Em ambos os casos, obtém-se

$$A = A_o (1 + a_1 \xi + a_2 \xi^2) \quad (\text{A.2.3})$$

sendo

$$A_o = k_1 h_o d_o \quad k_1 = \begin{cases} 1 & \text{retângulo} \\ \pi & \text{coroa circular} \end{cases}$$

$$a_1 = H + D - 2$$

$$a_2 = (l - H)(l - D)$$

Momento de Inércia

Para seções retangulares e coroas circulares, pode ser expresso sob a forma

$$J = J_o (1 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 + b_4 \xi^4) \quad (\text{A.2.4})$$

onde

$$J_o = k_2 h_o d_o^3 \quad k_2 = \begin{cases} 1/12 & \text{retângulo} \\ \frac{\pi(1 + \alpha^2)}{8} & \text{coroa circular} \end{cases}$$

$$b_1 = -4 + 3D + H$$

$$b_2 = 3(1 - D)(2 - D - H)$$

$$b_3 = -(1 - D)^2(4 - D - 3H)$$

$$b_4 = (1 - H)(1 - D)^3$$

O valor de  $\alpha$  que aparece na expressão de  $k_2$ , no caso de coroa circular, é dado por  $\frac{h}{d}$  e varia com  $x$ .

É conveniente tomar um mesmo valor de  $\alpha$  para todas as secções. Foi considerado o seu valor médio:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha \, dx \quad (A.2.5)$$

Das equações (A.2.1) e (A.2.5), obtém se:

$$\bar{\alpha} = \frac{h_o}{d_o} - \frac{1 - H}{1 - D} \left[ 1 + \left( \frac{1}{1 - D} - \frac{1}{1 - H} \right) \ln D \right]$$

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} \frac{h_o}{d_o} & \text{se } H = 1 \\ \frac{(1 + H) h_o}{2 h_o} & \text{se } D = 1 \end{cases} \quad (A.2.6)$$

## APÊNDICE 3 - LISTAGEM DO PROGRAMA AUTOMÁTICO

```

//ROMILDE2 JOB (2065,0296),MSGLEVEL=(1,1),CLASS=K,TIME=90
//      EXEC FORTGCLG,PARM=LKED='XREF,LET,OVLY',TIME.GD=90
//FORT.SYSIN DD *
      IMPLICIT REAL*8(A-H,D-Z)
      REAL*8 JDTA(60),MASSA(60,60)
      DIMENSION COORD(60),AREA(30),FFORM(30),G(30),YOUNG(60),
      *XMASS(60),FF(60),UZERO(60),VZERO(60),R0(30),TEMPO(20),
      *CI(60),ETA(20),U(60),P(60),COTA1(60),COTA2(60),V(20,60),
      *VZ(60),POISS(30)
      *,PD(60)
      COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
      *NAMT
      DEFINE FILE 1(60,120,U,I1)
      M1=5
      M2=6
C
C          IMPRESSAO DE TITULOS
C
      WRITE(M2,10)
10 FORMAT('1',/////////////////,34X,'*****',1X,'COPPE',17X,
      1*****',1X,'1974',1X,'*',/,,34X,'**',50X,'**',/,,34X,'**',1X,'COPPE',17X,
      2'UFRJ',18X,'1974',1X,'*',/,,34X,'**',50X,'**',/,,34X,'**',9X,'PROGRAMA
      3 DE ENGENHARIA CIVIL',9X,'**',/,,34X,'**',50X,'**',/,,34X,'**',50X,'*
      4',/,,34X,'**',50X,'**')
      WRITE(M2,11)
11 FORMAT(34X,'**',9X,'ANALISE DINAMICA DE ESTRUTURAS',9X,'**',/,,34X,
      1 '**',50X,'**',/,,34X,'**',9X,'ELEVADAS LATERALMENTE CARREGADAS',9X,'**'
      2 ,/,,34X,'**',50X,'**',/,,34X,'**',50X,'**',/,,34X,'**',50X,'**',/,,34X,'**',5
      30X,'**',/,,34X,'**',2X,'ROMILDE ALMEIDA DE OLIVEIRA - TESE DE MESTRAD
      40',2X,'**')
      WRITE(M2,12)
12 FORMAT(34X,'**',50X,'**',/,,34X,52('*'))
C
C
      20 READ(M1,30)NPROB,N,NTIPO
      IF(NPROB)35,35,40

```

```

35 CALL EXIT
40 WRITE(M2,50)NPROB
  READ(M1,30)NM,NEV,NVEC
30 FORMAT(3I5)
50 FORMAT('1',//,40X,'*****      ANALISE    NO.',I5,5X,'*****',
        *///)
  READ(M1,60)
60 FORMAT(*                                ')
  WRITE(M2,60)
N2=2*N
IF(NTIPO.EQ.2) N2=N
  WRITE(M2,70)N2
70 FORMAT(/,5X,'NUMERO DE GRAUS DE LIBERDADE =',I5,/)

C
C      LEITURA E IMPRESSAO DAS CARACTERISTICAS FISICAS E GEOME-
C      TRICAS DE ACORDO COM O TIPO DA ESTRUTURA
C
C      GO TO(210,270,325),NTIPO
C
210 WRITE(M2,220)
220 FORMAT(//,5X,'ANALISE EFETUADA COMO VIGA DE TIMOSHENKO',//)
  DO 230 I=1,N
  READ(M1,350)COORD(I),JOTA(I),AREA(I),YOUNG(I),FFORM(I),G(I)
  *,RO(I)
230 CONTINUE
  WRITE(M2,240)
240 FORMAT(/,1X,'ELEMENTO',6X,'COORD.NO',10X,'AREA',5X,'MOM.INE'
  *, 'RCIA',2X,'ELAST.LONGIT.',1X,'FATOR DE FORMA',2X,'ELAST.T'
  *, 'RANSV.',6X,'DENSIDADE',//)
  XMASS(I)=RO(I)*AREA(I)*COORD(I)
  DO 250 I=1,N
  XMASS(I)=RO(I)*AREA(I)*(COORD(I)-COORD(I-1))
  WRITE(M2,260)I,COORD(I),AREA(I),JOTA(I),YOUNG(I),FFORM(I)
  *,G(I)
  *,RO(I)
250 CONTINUE

```

```

CALL      STIF2( COORD,YOUNG,G,AREA,FFORM,JOTA  )
CALL      MASS2( COORD,YOUNG,G,AREA,FFORM,JOTA,XMASS,RO
*,MASSA)
260 FORMAT(I9,7D15.7)
GO TO 330

```

#### LEITURA E IMPRESSAO DE DADOS

```

270 WRITE(M2,280)
280 FORMAT(//,5X,'** ANALISE EFETUADA SOB A HIPOTESE DO FUNCIONAMENTO DA ESTRUTURA COMO -SHEAR BUILDING',//)
* DO 285 I=1,N
* DO 285 J=1,N
* MASSA(I,J)=0.
285 CONTINUE
DO 290 I=1,N
READ(M1,350)COORD(I),JOTA(I),YOUNG(I),MASSA(I,I)
290 CONTINUE
WRITE(M2,300)
300 FORMAT(/,1X,'ELEMENTO',6X,'COORD.NO',4X,'MOM-INERCIA',2X,
*'ELAST.LONGIT.',10X,'MASSA',/)
DO 310 I=1,N
WRITE(M2,260) I,COORD(I),JOTA(I),YOUNG(I),MASSA(I,I)
310 CONTINUE
CALL SHEAR(COORD,JOTA,YOUNG)
WRITE(M2,370)((F(I,J),J=1,N),I=1,N)
WRITE(M2,370)((MASSA(I,J),J=1,N),I=1,N)
GO TO 330

```

LEITURAS E IMPRESOES SAO EFETUADAS ATRAVES DA SUBROTINA LINEA

```

325 CALL LINE2(N,COORD,JOTA,YOUNG,XMASS,FFORM,POISS,AREA,G,RO)
CALL      STIF2( COORD,YOUNG,G,AREA,FFORM,JOTA  )
CALL MASS2(COORD,YOUNG,G,AREA,FFORM,JOTA,XMASS,RO,MASSA)
330 I1=1

```

```

      WRITE(1*I1) ((MASSA(I,J),J=1,N2),I=1,N2)
      IF(NM)509,500,509
350 FORMAT(8F10.0)
370 FORMAT(3X,8D14.6)

C
C          CALCULO DAS FREQUENCIAS E MODOS DE VIBRACOES
C
509 READ(M1,350)(XL(I),I=1,NEV)
      READ(M1,350)((X(I,J),I=1,N2),J=1,NVEC)
      WRITE(M2,510)
      GO TO 545
500 CALL AUTOX(N2,NEV,NVEC,F,MASSA,XL,X)
      PI=3.141592653589793
      PI2=2.*PI
      DO 540 I=1,NEV
      XL(I)=1./(PI2*DSQRT(XL(I)))
540 CONTINUE

C          IMPRESSAO DOS RESULTADOS - FREQUENCIAS E MODOS DE VIBRACOES
C
      WRITE(M2,530)
530 FORMAT(1,5X,45('**'),/,5X,'* FREQUENCIAS NATURAIS EM CICLOS'
*,*/SEG OU HZ **',/,5X,45('**'),/)
      WRITE(M2,370)(XL(I),I=1,NEV)
      WRITE(M2,510)
510 FORMAT(1,5X,35('**'),/,5X,'* FREQUENCIAS NATURAIS EM RAD/SE'
*,*G **',/,5X,35('**'),/)

      N=N2

      DO 520 I=1,NEV
      XL(I)=XL(I)*PI2
520 CONTINUE
545 WRITE(M2,370)(XL(I),I=1,NEV)
      WRITE(M2,550)

```

```

550 FORMAT(/,5X,30('*'),/,5X,'* MODOS NORMAIS DE VIBRACOES *',
*5X,30('*'),/)
  DO 560 J=1,NVEC
  WRITE(M2,570)J
570 FORMAT(/,5X,'MODO',I5,/)
  WRITE(M2,580)(X(I,J),I=1,N)
580 FORMAT(10X,8F12.5)
560 CONTINUE
  READ(M1,562)INDIC,NTEMP,NPC,NAMT,IND2,IND3
562 FORMAT(6I5)
  WRITE(M2,563)
563 FORMAT(//,5X,'INDIC',5X,'NTEMP',7X,'NPC',5X,'NMODO',6X,
*NAMT',6X,'IND2',6X,'IND3',/)
  WRITE(M2,564)INDIC,NTEMP,NPC,NVEC,NAMT,IND2,IND3
564 FORMAT(7I10)
  IF(INDIC)600,600,620

600 WRITE(M2,610)
610 FORMAT(//,5X,'NAO SE DESEJA O CALCULO DA RESPOSTA')
  GO TO 20
620 WRITE(M2,1150)
  WRITE(M2,630)
630 FORMAT(//,20X,15('.'),5X,'RESPOSTA DA ESTRUTURA',5X,15('.')
*)
  WRITE(M2,1150)
  I1=1
  READ (1*I1)((MASSA(I,J),J=1,N2),I=1,N2)
  DO 1570 I=1,NVEC
  DO 1570 J=1,N
  F(I,J)=0.
  DO 1570 K=1,N
  F(I,J)=F(I,J)+X(K,I)*MASSA(K,J)
1570 CONTINUE
  DO 1590 I=1,NVEC
  XMG(I)=0.
  DO 1590 K=1,N

```

```

XMG(I)=XMG(I)+F(I,K)*X(K,I)
1590 CONTINUE
DO 1600 I=1,NVEC
DO 1600 J=1,N
F(I,J)=X(J,I)/XMG(I)
1600 CONTINUE
DO 1620 I=1,NVEC
DO 1620 J=1,N
FF(J)=F(I,J)
DO 1615 K=1,N
IF(K-J)1605,1605,1610
1605 F(I,J)=F(I,J)+FF(K)*MASSA(K,J)
GO TO 1615
1610 F(I,J)=F(I,J)+F(I,K)*MASSA(K,J)
1615 CONTINUE
F(I,J)=F(I,J)-FF(J)
1620 CONTINUE
1150 FORMAT(//,1X,117('*'))
C
C      LEITURA DOS PARAMETROS PARA CALCULO DA RESPOSTA
C      SAO LIDOS APENAS OS NAO NULOS
C
DO 640 I=1,N
UZERO(I)=0.
VZERO(I)=0.
P(I)=0.
PD(I)=0.
CI(I)=0.
640 CONTINUE
DO 650 IC=1,NPC
READ(M1,660)I,UZERO(I),VZERO(I)
650 CONTINUE
IF(NAMT)1651,657,1651
1651 READ(M1,350)(ETA(I),I=1,NVEC)
WRITE(M2,1652)
1652 FORMAT(/,5X,41('*'),/,5X,'* PERCENTAGENS DO AMORTECIMENTO '

```

```

*,*CRITICO *,/,5X,41(*"),/
  WRITE(M2,370)(ETA(I),I=1,NVEC)
660 FORMAT(15,3F10.0)
657 READ(M1,350)(TEMPO(I),I=1,NTEMP)

  IMPRESSAO DOS PARAMETROS LIDOS

  WRITE(M2,670)
670 FORMAT(//,5X,'CONDICOES INICIAIS',//,5X,'PONTO NODAL',5X,
*'DESLOCAMENTO INICIAL',5X,'VELOCIDADE INICIAL',//)
  DO 680 I=1,N
  WRITE(M2,690)I,UZERO(I),VZERO(I)
680 CONTINUE
690 FORMAT(116,F25.5,F23.5)
  WRITE(M2,700)
700 FORMAT(//,5X,54(*"),/,5X,'* INSTANTES PARA OS QUAIS FOI D'
*,*ETERMINADA A RESPOSTA *',//,5X,54(*"),//)
  WRITE(M2,370)(TEMPO(I),I=1,NTEMP)
  IF(IND2)1230,1700,1230
1700 READ(M1,661)IND1,IND3,T
  661 FORMAT(2I5,F10.0)
  IF(IND1)20,705,701
  701 IF(IND3)2703,2701,2703
2701 DO 702 IC=1,NPC
  READ(M1,660)I,PD(I)
  702 CONTINUE
  GO TO 2705
2703 DO 2704 IC=1,NPC
  READ(M1,660)I,P(I)
2704 CONTINUE
2705 READ(M1,30)ILOAD
  WRITE(M2,704)ILOAD
  704 FORMAT(///,5X,'..... RESPOSTA PARA CARGA DO TIPO',15,'....'
*)
  WRITE(M2,1704)
1704 FORMAT(//,5X,'DIRECAO',5X,'ORD.MAX. DA CARGA DIST.',5X,

```

```
*"CARGA NODAL EQUIV.",5X,"DURACAO DA CARGA",//)
IF(IND3)1710,1709,1710
1709 CALL DIST (COORD,G,AREA,JOTA,PD,FFORM,YOUNG,P)
1710 DO 1705 I=1,N
   WRITE(M2,1706)I,PD(I),P(I),T
1706 FORMAT(I12,D28.7,D20.7,D21.7)
1705 CONTINUE
C
C      CONTRIBUICAO DAS CONDICOES INICIAIS
C
705 DO 1200 IC=1,NTEMP
   WRITE(M2,1150)
   TEMPI=TEMPO(IC)
   WRITE(M2,720)TEMPI
720 FORMAT(/,5X,'INSTANTE T=',F10.5,/)
IF(IND1)1200,709,811
709 WRITE(M2,710)
710 FORMAT(//,5X,'** CONTRIBUICAO DAS CONDICOES INICIAIS PARA '
*,*A RESPOSTA **',//)
   CALL COND1(UZERO,VZERO,TEMPI,C1)
   WRITE(M2,730)
730 FORMAT(/,40X,'      DIRECAO',21X,'DESLOCAMENTO',//)
   DO 750 I=1,N
   WRITE(M2,740)I,C1(I)
740 FORMAT(45X,I6,18X,D15.7)
C
750 CONTINUE
811 GO TO(751,752,753,754,755,756,757,758,759,1759),ILOAD
C
751 CALL LOAD1(TEMPI,P,T,U)
GO TO 781
C
752 CALL LOAD2(TEMPI,P,T,U)
GO TO 781
C
753 CALL LOAD3(TEMPI,P,T,U)
```

```
GO TO 781

754 CALL LOAD4(TEMPI,P,T,U)
GO TO 781

755 CALL LOAD5(TEMPI,P,T,U)
GO TO 781

756 CALL LOAD6(TEMPI,P,T,U)
GO TO 781

757 CALL LOAD7(TEMPI,P,T,ETA,U)
GO TO 781

758 CALL LOAD8(TEMPI,P,T,ETA,U)
GO TO 781

759 CALL LOAD9(TEMPI,P,T,ETA,U)

1759 CALL LOA10(TEMPI,P,T,ETA,U)
GO TO 781

781 WRITE(M2,730)
WRITE(M2,719)ILOAD
719 FORMAT(15X,'CARGA TIPO',I5)
DO 782 I=1,N
WRITE(M2,740)I,U(I)
782 CONTINUE

RESPOSTA FINAL

IF(IND1)1200,1140,1200
1140 WRITE(M2,1150)
WRITE(M2,1160)
1160 FORMAT(40X,'..... RESPOSTA FINAL .....',
```

```
*//)
      WRITE(M2,720)TEMPI
      WRITE(M2,730)
      DO 1180 I=1,N
         CI(I)=CI(I)+U(I)
         WRITE(M2,740)I,CI(I)
         CI(I)=0.
1180 CONTINUE
1200 CONTINUE
C
      DO 1181 I=1,N
         U(I)=0.
         CI(I)=0.
         P(I)=0.
         PD(I)=0.
1181 CONTINUE
C
      GO TO 1700
C
C      RESPOSTA CALCULADA APROXIMANDO A FUNCAO QUE DEFINE
C      A CARGA POR SECANTES
C
1230 DO 1235 I=1,NTEMP
      DO 1235 J=1,N
         V(I,J)=0.
1235 CONTINUE
      DO 1236 J=1,NPC
      READ(M1,30)JJ
      READ(M1,350)(V(I,JJ),I=1,NTEMP)
1236 CONTINUE
      WRITE(M2,1231)
1231 FORMAT(//,5X,36('*'),/,5X,* VALORES DAS ORDENADAS DAS CAR*
*,*GAS **,/,5X,36('*'),//)
      DO 1232 J=1,N
      WRITE(M2,1233)J
1233 FORMAT(/,1X,*DIRECAO*,I5,/)
```

```
      WRITE(M2,1234)(V(I,J),I=1,NTEMP)
1234 FORMAT(5X,8D14.6)
1232 CONTINUE
      DO 1400 IC=2,NTEMP
      TEMPI=TEMPO(IC)
      WRITE(M2,720)TEMPI
      IF(IND3)2100,2110,2100
2110 DO 2101 J=1,N
      PD(J)=V(IC,J)
2101 CONTINUE
      CALL DIST (COORD,G,AREA,JOTA,PD,FFORM,YOUNG,P)
      DO 2102 J=1,N
      V(IC,J)=P(J)
2102 CONTINUE
2100 TT=TEMPO(IC)-TEMPO(IC-1)
      DO 1508 I=1,N
      COTA1(I)=V(IC-1,I)
      COTA2(I)=V(IC,I)-V(IC-1,I)
1508 CONTINUE
      IF(NAMT)1501,1500,1501
1500 CALL COND1(UZERO,VZERO,TT,CI)
      GO TO 1502
1501 CALL COND2 (UZERO,VZERO,TT,ETA,CI)
1502 IF(NAMT)1411,1412,1411
1411 CALL LOAD7(TT,COTA1,TT,ETA,U)
      GO TO 1414
1412 CALL LOAD1(TT,COTA1,TT,U)
1414 DO 1420 I=1,N
      CI(I)=CI(I)+U(I)
1420 CONTINUE
      IF(NAMT)1421,1422,1421
1421 CALL LOAD8(TT,COTA2,TT,ETA,U)
      GO TO 1423
1422 CALL LOAD2(TT,COTA2,TT,U)
1423 IF(NAMT)1504,1503,1504
1503 CALL VELO1(TT,TT,UZERO,VZERO,COTA1,COTA2,VZ)
```

```
GO TO 1505
1504 CALL VELO2(TT,TT,UZERO,VZERO,COTA1,COTA2,ETA,VZ)
1505 DO 1430 I=1,N
      CI(I)=CI(I)+U(I)
      UZERO(I)=CI(I)
      VZERO(I)=VZ(I)
1430 CONTINUE
      IF(NTIPO-2)1810,1820,1810
1810 WRITE(M2,1506)
1506 FORMAT(15X,'PONTO',6X,'DESLOC. LINEAR',13X,'ROTACAO',7X,'V'
*, 'ELOC. LINEAR',6X,'VELOC. ANGULAR',/)
      NN2=N/2
      DO 1431 I=1,NN2
      WRITE(M2,1432)I,CI(2*I-1),CI(2*I),VZ(2*I-1),VZ(2*I)
1431 CONTINUE
1432 FORMAT(I20,4F20.7)
      GO TO 1400
1820 WRITE(M2,1830)
1830 FORMAT(15X,'PONTO',9X,'DESLOCAMENTO',10X,'VELOCIDADE',/)
      DO 1840 I=1,N
      WRITE(M2,1432) I,CI(I),VZ(I)
1840 CONTINUE
1400 CONTINUE
      GO TO 1700
      END
```

```

SUBROUTINE DIST (COORD,G,AREA,JOTA,PD,FFORM,YOUNG,P)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 JOTA(60)
DIMENSION COORD(60),G(30),YOUNG(60),AREA(30),PD(60),
*FFORM(30),P(60)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT

N1=N/2-1
C=COORD(1)
D=COORD(2)-COORD(1)
BETA1=12.*YOUNG(1)*JOTA(1)*FFORM(1)/(G(1)*AREA(1)*C*C)
BETA2=YOUNG(2)*JOTA(2)*FFORM(2)/(G(2)*AREA(2)*D*D)*12.
A1=C/(1.+BETA1)
A2=D/(1.+BETA2)
P(1)=0.5*C*PD(1)-PD(2)+A2*((BETA2/3.+0.35)*PD(1)-
1*(BETA2/6.+0.15)*PD(3))+0.5*(PD(2)+PD(4))
P(2)= C*C*PD(1)/12.+A2*D*(BETA2/24.-0.05)*PD(1)-
1A2*D*(BETA2/24.+1./30.)*PD(3)+A2*(-BETA2/12.+0.25)*PD(2)
2-D*PD(4)/12.

DO 10 I=2,N1
C=COORD(I)-COORD(I-1)
D=COORD(I+1)-COORD(I)
BETA1=12.*YOUNG(I)*JOTA(I)*FFORM(I)/(G(I)*AREA(I)*C*C)
BETA2=12.*YOUNG(I+1)*JOTA(I+1)*FFORM(I+1)/
*(G(I+1)*AREA(I+1)*D*D)
A1=C/(1.+BETA1)
A2=D/(1.+BETA2)

P(2*I-1)=A1*((BETA1/6.+0.15)*PD(2*I-3)+(BETA1/3.+0.35)*
1PD(2*I-1))-0.5*(PD(2*I-2)+PD(2*I))
P(2*I-1)=P(2*I-1)+A2*((BETA2/3.+0.35)*PD(2*I-1)+
```

```
1(BETA2/6.+0.15)*PD(2*I+1)) +0.5*(PD(2*I)+PD(2*I+2))

P(2*I)=A1*C*((BETA1/24.+1./30.)*PD(2*I-3)+(BETA1/24.+  
*0.05)*PD(2*I-1))+C*(PD(2*I)-PD(2*I-2))/12.

P(2*I)=P(2*I)+A2*D*((BETA2/24.-0.05)*PD(2*I-1)-(BETA2/24.  
*+1./30.))
1*PD(2*I+1))-D*PD(2*I+2)/12.+A2*(-BETA2/12.+0.25)*PD(2*I)

10 CONTINUE

P(N-1)=A2*((BETA2/6.+0.15)*PD(N-3)+(BETA2/3.+0.35)*PD(N-1))  
*-0.5*(PD(N-2)+PD(N))

P(N)=A2*D*((BETA2/24.+1./30.)*PD(N-3)+(BETA2/24.+0.05)*  
*PD(N-1))+D*(PD(N)-PD(N-2))/12.

RETURN
END
```

```
SUBROUTINE LOAD1(TEMPI,P,T,U)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION U(60),P(60),Z(20)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT

ESTA SUBROTINA CALCULA A RESPOSTA DA ESTRUTURA A
UM IMPULSO RETANGULAR ATUANTE DURANTE UM TEMPO T

DO 5 I=1,NVEC
Z(I)=0.
U(I)=0.
5 CONTINUE

IF(TEMPI-T)10,10,20
10 DO 15 I=1,NVEC
DO 15 K=1,N
Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(1.-DCOS(XL(I)*TEMPI))/XL(I)
15 CONTINUE
GO TO 30

20 DO 25 I=1,NVEC
DO 25 K=1,N
Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(DCOS(XL(I)*(TEMPI-T))-DCOS(XL(I)*
1TEMPI))/XL(I)
25 CONTINUE
30 CALL ZXMGU(Z,U)
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE LOAD2(TEMPI,P,T,U)
IMPLICIT REAL*8(A-H,D-Z)
DIMENSION U(60),P(60),Z(20)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT
```

ESTA SUBROTEINA CALCULA A RESPOSTA DA ESTRUTURA A  
UM IMPULSO TRIANGULAR DE INTENSIDADE P ATUANTE  
DURANTE UM TEMPO T

```
DO 5 I=1,NVEC
Z(I)=0.
U(I)=0.
5 CONTINUE
IF(TEMPI-T)10,10,20
10 DO 15 I=1,NVEC
DO 15 K=I,N
Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(TEMPI-DSIN(XL(I)*TEMPI)/XL(I))/(XL(
*I)*T)
15 CONTINUE
GO TO 30
20 DO 25 I=1,NVEC
DO 25 K=1,N
Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(T*DCOS(XL(I)*(TEMPI-T))+DSIN(XL(I)*
*(I-1)*TEMPI-T))/XL(I)-DSIN(XL(I)*TEMPI)/XL(I))/(XL(I)*T)
25 CONTINUE
30 CALL ZXMGU(Z,U)
RETURN.
END
```

```
SUBROUTINE LOAD3(TEMPI,P,T,U)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION U(60),P(60),Z(20)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT
```

ESTA SUBROTEINA CALCULA A RESPOSTA DA ESTRUTURA A  
UMA CARGA QUE E TRIANGULAR ATE O INSTANTE T E A PARTIR  
DO QUAL SE MANTEM CONSTANTE E IGUAL A P

```
DO 5 I=1,NVEC
Z(I)=0.
U(I)=0.
5 CONTINUE

IF(TEMPI-T)10,10,20
10 DO 15 I=1,NVEC
   DO 15 K=1,N
      Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(TEMPI-DSIN(XL(I)*TEMPI)/XL(I))/(
     1XL(I)*T)
15 CONTINUE
GO TO 30

20 DO 25 I=1,NVEC
   DO 25 K=1,N
      Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(T+DSIN(XL(I)*(TEMPI-T))/XL(I)-DSIN(
     1XL(I)*TEMPI)/XL(I))/(XL(I)*T)
25 CONTINUE
30 CALL XMGU(Z,U)
RETURN
END
```

```

SUBROUTINE LOAD4(TEMPI,P,T,U)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION U(60),P(60),Z(20)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT

ESTA SUBROTTINA CALCULA A RESPOSTA DA ESTRUTURA A
UMA ONDA QUADRADA DE INTENSIDADE P ATUANTE
DURANTE UM TEMPO 2.*T

DO 5 I=1,NVEC
Z(I)=0.
U(I)=0.
5 CONTINUE

IF(TEMPI-T)10,10,20
10 DO 15 I=1,NVEC
DO 15 K=1,N
Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(1.-DCOS(XL(I)*TEMPI))/XL(I)
15 CONTINUE
GO TO 30

20 IF(TEMPI-2.*T)21,21,23
21 DO 22 I=1,NVEC
DO 22 K=1,N
Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(2.*DCOS(XL(I)*(TEMPI-T))-DCOS(XL(I)*
1*TEMPI)-1.)/XL(I)
22 CONTINUE
GO TO 30

23 DO 25 I=1,NVEC
DO 25 K=1,N
Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(2.*DCOS(XL(I)*(TEMPI-T))-DCOS(XL(I)*
1*TEMPI)
1-DCOS(XL(I)*(TEMPI-2.*T)))/XL(I)

```

25 CONTINUE  
30 CALL ZMGU(Z,U)  
RETURN  
END

```
SUBROUTINE LOAD5(TEMPI,P,T,U)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION U(60),P(60),Z(20)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT
```

ESTA SUBROTINA CALCULA A RESPOSTA DA ESTRUTURA A  
UMA ONDA SÍNUSOIDAL DE AMPLITUDE P ATUANTE  
DURANTE UM TEMPO T

```
PI=3.141592653589793
PI2=2.*PI
DO 5 I=1,NVEC
Z(I)=0.
U(I)=0.
5 CONTINUE

IF(TEMPI-T)10,10,20
10 DO 15 I=1,NVEC
DO 15 K=1,N
Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*T*(XL(I)*T*DSIN(PI2*TEMPI/T)-PI2*
1DSIN(
1XL(I)*TEMPI))/(XL(I)*XL(I)*T*T-PI2*PI2)
15 CONTINUE
GO TO 30

20 DO 25 I=1,NVEC
DO 25 K=1,N
Z(I)=Z(I)+PI2*X(K,I)*P(K)*T*(DSIN(XL(I)*(TEMPI-T))-DSIN(XL
*(I)*
1TEMPI))/(XL(I)*XL(I)*T*T-PI2*PI2)
25 CONTINUE
30 CALL ZXMGU(Z,U)
RETURN
END
```

```

SUBROUTINE LOAD6(TEMPI,P,T,U)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION U(60),P(60),Z(20)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT

ESTA SUBROTTINA CALCULA A RESPOSTA DA ESTRUTURA A
UMA CARGA DA FORMA P*(1.-COS(2.*PI*TEMPI/T)) ATUANTE
DURANTE UM TEMPO T

PI=3.141592653589793
PI2=2.*PI
DO 5 I=1,NVEC
Z(I)=0.
U(I)=0.
5 CONTINUE
IF(TEMPI-T)10,10,20
10 DO 15 I=1,NVEC
DO 15 K=1,N
1T*T*(DCOS(PI2*TEMPI/T)-DCOS(XL(I)*TEMPI))/(XL(I)*XL(I)*T*T
1-PI2*PI2
*})
15 CONTINUE
GO TO 30
20 DO 25 I=1,NVEC
DO 25 K=1,N
Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)/XL(I)*(DCOS(XL(I)*(TEMPI-T))-DCOS(XL
*(I)*
1TEMPI)-XL(I)*XL(I)*T*T*(DCOS(XL(I)*(TEMPI-T))-DCOS(XL(I)*
TEMPI))/(
2(XL(I)*XL(I)*T*T-PI2*PI2))
25 CONTINUE
30 CALL ZXMGU(Z,U)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE LOAD7(TEMPI,P,T,ETA,U)
IMPLICIT REAL*8(A-H,D-Z)
DIMENSION U(60),P(60),Z(20),ETA(20)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT

ESTA SUBROTTINA CALCULA A RESPOSTA DA ESTRUTURA A
UM IMPULSO RETANGULAR DE INTENSIDADE P, ATUANTE DURANTE
UM TEMPO T, CONSIDERANDO-SE PARA O AMORTECIMENTO UM PERCENTUAL
DO AMORTECIMENTO CRITICO

DO 5 I=1,NVEC
Z(I)=0.
U(I)=XL(I)*DSQRT(1.-ETA(I)*ETA(I))
5 CONTINUE

IF(TEMPI-T)10,10,20
10 DO 15 I=1,NVEC
DO 15 K=1,N
IF(ETA(I)*XL(I)*TEMPI-100.)11,11,12
11 Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(U(I)-DEXP(-ETA(I)*XL(I)*TEMPI)*(ETA
1(I)*
1XL(I)*DSIN(U(I)*TEMPI)+U(I)*DCOS(U(I)*TEMPI)))/(ETA(I)*ETA
1(I)*
2XL(I)*XL(I)+U(I)*U(I))
GO TO 15
12 Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*U(I)/(ETA(I)*ETA(I)*XL(I)*XL(I)+U(I)
**U(I))
15 CONTINUE
GO TO 30

20 DO 25 I=1,NVEC
DO 25 K=1,N
A=ETA(I)*XL(I)
IF(A*TEMPI-100.)21,21,22
21 Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*DEXP(-A*TEMPI)/(A**2+U(I)**2)*(DEXP

```

```
1(A*T)*  
1 (A*DSIN(U(I)*(TEMPI-T))+U(I)*DCOS(U(I)*(TEMPI-T)))-  
2(A*DSIN(U(I)*TEMPI)+U(I)*DCOS(U(I)*TEMPI)))  
GO TO 25  
22 Z(I)=0.  
25 CONTINUE  
30 CALL AXMGU(Z,ETA,U)  
RETURN  
END
```

```

SUBROUTINE LOAD8(TEMPI,P,T,ETA,U)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION U(60),P(60),Z(20),ETA(20)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT

ESTA SUBROTTINA CALCULA A RESPOSTA DA ESTRUTURA A
UM IMPULSO TRIANGULAR ATUANTE DURANTE UM TEMPO T ONDE
ATINGE O VALOR MAXIMO P. CONSIDERA-SE PARA O AMORTECIMENTO UM
PERCENTUAL DO AMORTECIMENTO CRITICO

DO 5 I=1,NVEC
Z(I)=0.
U(I)=XL(I)*DSQRT(1.-ETA(I)*ETA(I))
5 CONTINUE

IF(TEMPI-T)10,10,20
10 DO 15 I=1,NVEC
A=XL(I)*ETA(I)
B=A*A+U(I)*U(I)
DO 15 K=1,N
IF(A*TEMPI-100.)11,11,12
11 Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(1./T)*(DEXP(-A*TEMPI)*(2.*A*U(I)*
1DCOS(U(I))
1*TEMPI)+(A*A-U(I)*U(I))*DSIN(U(I)* TEMPI))/(B*B)-2.*A*U(I)/
2*(B*B)+U(I)*TEMPI/B
GO TO 15
12 Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(1./T)*(-2.*A*U(I)/(B*B)+U(I)*TEMPI/B
1)
15 CONTINUE
GO TO 30

20 DO 25 I=1,NVEC
A=XL(I)*ETA(I)
B=A*A+U(I)*U(I)
DO 25 K=1,N

```

```
IF(A*(TEMPI-T)-100.) 21,21,22
21 Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(1./T)*(T*DEXP(-A*(TEMPI-T))*(A*DSIN
   1(U(I)*(TEMPI-T))+U(I)*DCOS(U(I)*(TEMPI-T)))/B+DEXP(-A*(TEMP
   2I-T))*(-2.*A*U(I)*DCOS(U(I)*(TEMPI-T))-(A*A-U(I))*DSIN(U(I)
   2*(TEMPI-T)))/(B*B)+DEXP(-A*TEMPI)*((A*A-U(I)*U(I))*DSIN(U(I
   *)*TEMPI)+2.*A*U(I)*DCOS(U(I)*TEMPI))/(B*B))
      GO TO 25
22 Z(I)=0.
25 CONTINUE
30 CALL AXMGU(Z,ETA,U)
      RETURN
      END
```

```
SUBROUTINE LOAD9(TEMPI,P,T,ETA,U)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION U(60),P(60),Z(20),ETA(20)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT
```

ESTA SUBROTINA CALCULA A RESPOSTA DA ESTRUTURA A  
 UMA ONDA SINUSOIDAL DE AMPLITUDE P ATUANTE  
 UM PERÍODO T, CONSIDERANDO-SE PARA O AMORTECIMENTO UM  
 PERCENTUAL DO AMORTECIMENTO CRÍTICO

```
GAMA=6.283185307179586/T
```

```
DO 5 I=1,NVEC
```

```
Z(I)=0.
```

```
U(I)=XL(I)*DSQRT(1.-ETA(I)*ETA(I))
```

```
5 CONTINUE
```

```
IF(TEMPI-T)10,10,20
```

```
10 DO 15 I=1,NVEC
```

```
A=XL(I)*ETA(I)
```

```
B=2.*(A*A+(U(I)+GAMA)*(U(I)+GAMA))
```

```
C=2.*(A*A+(U(I)-GAMA)*(U(I)-GAMA))
```

```
DO 15 K=1,N
```

```
IF(A*TEMPI-100.)11,11,12
```

```
11 Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*((A*DCOS(GAMA*TEMPI)+(U(I)+GAMA)*DSIN
 *GAMA*TEMPI)+DEXP(-A*TEMPI)*((U(I)+GAMA)*DSIN(U(I)*TEMPI)-A
 1*DCOS(U(I)*TEMPI)))/B-(A*DCOS(GAMA*TEMPI)-(U(I)-GAMA)*DSIN(
 *GAMA*TEMPI)+DEXP(-A*TEMPI)*((U(I)-GAMA)*DSIN(U(I)*TEMPI)-
 *A*DCOS(U(I)*TEMPI)))/C)
 GO TO 15
```

```
12 Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*((A*DCOS(GAMA*TEMPI)+(U(I)+GAMA)*
 * DSIN(GAMA*TEMPI))/B-(A*DCOS(GAMA*TEMPI)-(U(I)-GAMA)*DSIN(
```

```

*GAMA*TEMPI))/C)
15 CONTINUE
GO TO 30

20 DO 25 I=1,NVEC
A=XL(I)*ETA(I)
B=2.*(A*A+(U(I)+GAMA)*(U(I)+GAMA))
C=2.*(A*A+(U(I)-GAMA)*(U(I)-GAMA))
DO 25 K=1,N
IF(A*(TEMPI-T)-100.) 22,22,23
22 Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*DEXP(-A*(TEMPI-T))/(B*B)*
1(A*DCOS(U(I)*(TEMPI-T))-(U(I)+GAMA)*DSIN(U(I)*(TEMPI-T))-
2-DEXP(-A*T)*(A*DCOS(U(I)*TEMPI)-(U(I)+GAMA)*DSIN(U(I)*
3TEMPI)))
Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*DEXP(-A*(TEMPI-T)/(C*C)*(A*DCOS(
1U(I)*(TEMPI-T))-(U(I)-GAMA)*DSIN(U(I)*(TEMPI-T))-2DEXP(-A*T)*(A*DCOS(U(I)*TEMPI)-(U(I)-GAMA)*DSIN(
3U(I)*TEMPI)))
GO TO 25
23 Z(I)=0.
25 CONTINUE
30 CALL AXMGU(Z,ETA,U)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE LOA10(TEMPI,P,T,ETA,U)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION U(60),P(60),Z(20),ETA(20)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT

C ESTA SUBROTINA CALCILA A RESPOSTA PARA
C UMA CARGA COSENoidal DE PERÍODO T, CON
C SIDERANDO PERCENTAGENS DO AMORTECIMENTO CRITICO

C PI=3.141592653589793
DO 5 I=1,NVEC
Z(I)=0.
U(I)=XL(I)*DSQRT(1.-ETA(I)*ETA(I))
5 CONTINUE

C IF(TEMPI-T) 10,10,20
10 DO 15 I=1,NVEC
DO 15 K=1,N
A=ETA(I)*XL(I)
B=2.*(A*A+(U(I)+2.*PI/T)**2)
C=2.*(A*A+(U(I)-2.*PI/T)**2)
IF(A*TEMPI-100.) 11,11,12
11 Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(1./B)*(-A*DSIN(2.*PI*TEMPI/T)+(U(I)-
*2.*PI
1/T)*DCOS(2.*PI*TEMPI/T)-DEXP(-A*T)*(A*DSIN(U(I)*TEMPI)+(U(I)-
*2.*PI/T)*
2DCOS(U(I)*TEMPI)))
Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(1./C)*(A*DSIN(2.*PI*TEMPI/T)+(U(I)-
12.*PI/T)*DCOS(2.*PI*TEMPI/T)-DEXP(-A*TEMPI)*(A*DSIN(
2U(I)*TEMPI)+(U(I)-2.*PI/T)*DCOS(U(I)*TEMPI)))
GO TO 15
12 Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(1./B)*(-A*DSIN(2.*PI*TEMPI/T)+
1(U(I)+2.*PI/T)*DCOS(2.*PI*TEMPI/T))
Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(1./C)*(A*DSIN(2.*PI*TEMPI/T)+

```

```

1(U(I)-2.*PI/T)*DCOS(2.*PI*TEMPI/T))
15 CONTINUE

GO TO 30
20 DO 25 I=1,NVEC
   DO 25 K=1,N
      A=ETA(I)*XL(I)
      B=2.*(A*A+(U(I)+2.*PI/T)**2)
      C=2.*(A*A+(U(I)-2.*PI/T)**2)
      IF(A*(TEMPI-T)-100.) 21,21,22
21 Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*DEXP(-A*(TEMPI-T))*(-1./B)*(A*DSIN(U(I)
1)*
1*(TEMPI-T))+(U(I)+2.*PI/T)*DCOS(U(I)*(TEMPI-T))-DEXP(-A*T)*
2(A*DSIN(U(I)*TEMPI)+(U(I)+2.*PI/T)*DCOS(U(I)*TEMPI)))
   Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P(K)*(1./C)*DEXP(-A*(TEMPI-T))*(A*DSIN(U(I)
*)*
1*(TEMPI-T))+(U(I)-2.*PI/T)*DCOS(U(I)*(TEMPI-T))-*
CDEXP(-A*T)*(A*DSIN(
2U(I)*T)+(U(I)-2.*PI/T)*DCOS(U(I)*TEMPI))
   GO TO 25
22 Z(I)=0.
25 CONTINUE
30 CALL AXMGU(Z,ETA,U)
   RETURN
END

```

```

SUBROUTINE LINE2(N,COORD,JOTA,YOUNG,XMASS,FFORM,POISS,AREA,
*G,RO)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 JOTA(60)
DIMENSION YOUNG(60),RO(30),COORD(60),XMASS(60)
*,AREA(30),FFORM(30),POISS(30),G(30)

M1=5
M2=6
PI=3.141592653589793
READ(M1,20)VAO,DINIC,DFIM,HINIC,HFIM,IND1,IND2
IF(IND2)25,45,25
20 FORMAT(5F10.0,2I5)
25 DO 30 I=1,N
   READ(M1,40)RO(I),YOUNG(I),POISS(I)
30 CONTINUE
40 FORMAT(3F10.0)
45 READ(M1,40)EE,RRO,PPOIS
   DO 46 I=1,N
      RO(I)=RRO
      YOUNG(I)=EE
      POISS(I)=PPOIS
46 CONTINUE
WRITE(M2,48)
48 FORMAT(//,1X,117('*'))
AGA=HFIM/HINIC
IF(DFIM)49,47,49
47 DE=0.000001
GO TO 44
49 DE=DFIM/DINIC
44 IF(IND1)50,70,50
50 WRITE(M2,60)
60 FORMAT(//,5X,'** ANALISE DE UMA VIGA EM BALANCO COM DIMENS*'
*,*'ES DAS SECCOES TRANVERSAIS',//,5X,'RETANGULARES VARIANDO
*LINEARMENTE AO LONGODO COMPRIMENTO ** '//)
   WRITE(M2,65)

```

```

65 FORMAT(2X,'NO. DE DIVISOES',9X,'COMPRIMENTO',17X,'ALT. NO '
*, 'APOIO',5X,'ALT. NO EXTREMO',6X,'LARG. NO APOIO',7X,'ESPE'
*, 'SS. NO APOIO',7X,5X,'ESPESS. EXTREMA',/)
XK1=1.
XK2=1./12.
GO TO 120
70 WRITE(M2,80)
80 FORMAT(//,5X,'** ANALISE DE CHAMINE COM ESPESSURA E DIAMET'
*, 'RO VARIANDO LINEARMENTE AO LONGO DA ALTURA **',//)
  WRITE(M2,90)
90 FORMAT(2X,'NO. DE DIVISOES',8X,'ALTURA TOTAL',6X,'DIAM. NO'
*, ' APOIO',7X,'DIAM. EXTREMO',7X,'ESPESS. APOIO','ESPESS. E'
*, 'XTREMA',/)
XK1=PI
IF(DE-1.)100,110,100
100 ALFA=(HINIC/(DINIC*(1.-DE)))*(-DLOG(DE)+(1.-AGA)*(1.+DL
*OG(DE)/(1.-DE)))
  GO TO 115
110 ALFA=0.5*(1.+AGA)*HINIC/DINIC
115 XK2=(1.+ALFA*ALFA)*PI/8.
120 CONTINUE
  WRITE(M2,160)N,VAO,DINIC,DFIM,HINIC,HFIM

```

#### CALCULO DE PARAMETROS AUXILIARES

```

DELTA=VAO/DFLOAT(N)
A1=(AGA+DE-2.)/VAO
A2=(1.-DE)*(1.-AGA)/(VAO*VAO)
B1=(AGA+3.*DE-4.)/VAO
B2=3.*(1.-DE)*(2.-AGA-DE)/(VAO*VAO)
B3=(1.-DE)*(1.-DE)*(3.*AGA+DE-4.)/(VAO**3)
B4=(1.-AGA)*((1.-DE)**3)/(VAO**4)
AZERO=XK1*DINIC*HINIC
XJZER=XK2*HINIC*(DINIC**3)

```

#### CALCULO DE COORD,AREA,JOTA,XMASS E G

```

DO 130 I=1,N
COORD(I)=DELTA*(DFLOAT(I)-0.5)
AREA(I)=AZERO*(1.+A1*COORD(I)+A2*COORD(I)*COORD(I))
JOTA(I)=XJZER*(1.+B1*COORD(I)+B2*COORD(I)*COORD(I)+B3*
1COORD(I)**3+B4*COORD(I)**4)
G(I)=YOUNG(I)/(2.*(1.+POISS(I)))
EE=AZERO*(1.+A1*(COORD(I)-0.5*DELTA)+A2*(COORD(I)-0.5*
1DELTA)*(COORD(I)-0.5*DELTA))
RRO=AZERO*(1.+A1*(COORD(I)+0.5*DELTA)+A2*(COORD(I)+0.5*_
1DELTA)*(COORD(I)+0.5*DELTA))
XMASS(I)=RO(I)*DELTA/3.*(EE+RRO+DSQRT(EE*RRO))
130 CONTINUE

      WRITE(M2,140)
140 FORMAT(/,2X,'NO. DO ELEMENTO',2X,'COORD.PTO. CENTRAL',8X,
* 'MOM. INERCIA',3X,'MOD.ELAST.LONGIT.',11X,'DENSIDADE',3X,
* 'MASSA DO ELEMENTO',/)
      DO 150 I=1,N
      WRITE(M2,160)I,COORD(I),JOTA(I),YOUNG(I),RO(I),XMASS(I)
      IF(IND1)142,141,142
141 A1=DINIC*(1.-(1.-DE)*COORD(I)/VA0)
      A2=HINIC*(1.-(1.-AGA)*COORD(I)/VA0)
      B1=(A1-A2)/(A1+A2)
      FFORM(I)=6.*(1.+POISS(I))*(1.+B1*B1)**2/((7.+6.*POISS(I))*_
* (1.+
      181*B1)**2+(20.+12.*POISS(I))*B1*B1)
      GO TO 150
142 FFORM(I)=10.*(1.+POISS(I))/(12.+11.*POISS(I))
150 CONTINUE
160 FORMAT(117,5D20.6)
      WRITE(M2,170)
170 FORMAT(//,21X,'COEF. DE POISSON',6X,'FATOR DE FORMA',16X,
1'AREA',7X,'ELAST.TRANSV.',7X,'COORD. DOS NOS',/)
      DO 180 I=1,N
      COORD(I)=DELTA*DFLOAT(I)

```

```
      WRITE(M2,160)I,POISS(I),FFORM(I),AREA(I),G(I),COORD(I)
      FFORM(I)=1./FFORM(I)
180 CONTINUE
      WRITE(M2,48)
      RETURN
      END
```

```

SUBROUTINE MASS2( COORD,YOUNG,G,AREA,FFORM,JOTA,XMASS,RO,
*MASSA)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 JOTA(60),MASSA(60,60)
DIMENSION COORD(60),YOUNG(60),G(30),AREA(30),FFORM(30)
*,XMASS(60),RO(30)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT

N2=2*N
DO 5 I=1,N2
DO 5 J=1,N2
MASSA(I,J)=0.
5 CONTINUE

N1=N-1
DO 10 I=1,N1
IF(I-1)6,6,7
6 C=COORD(1)
GO TO 8
7 C=COORD(I)-COORD(I-1)
8 D=COORD(I+1)-COORD(I)
BETA1=YOUNG(I)*JOTA(I)*FFORM(I)/(G(I)*AREA(I)*C*C)
BETA2=YOUNG(I+1)*JOTA(I+1)*FFORM(I+1)/(G(I+1)*AREA(I+1)*
1D*D)
A1=XMASS(I)/((1.+12.*BETA1)*(1.+12.*BETA1))
A2=XMASS(I+1)/((1.+12.*BETA2)*(1.+12.*BETA2))
B1=RO(I)*JOTA(I)/(C*(1.+12.*BETA1)*(1.+12.*BETA1))
B2=RO(I+1)*JOTA(I+1)/(D*(1.+12.*BETA2)*(1.+12.*BETA2))

MASSA(2*I-1,2*I-1)=A1*(48.*BETA1*BETA1+8.4*BETA1+13./35.)+
1A2*(48.*BETA2*BETA2+8.4*BETA2+13./35.)*1.2*(B1+B2)
MASSA(2*I-1,2*I)=A1*C*(6.*BETA1*BETA1+1.1*BETA1+11./210.) -

```

```

1B1*C*(6.*BETA1-0.1)-A2*D*(6.*BETA2*BETA2+1.1*BETA2+11./210.
*)+
2B2*D*(6.*BETA2-0.1)
MASSA(2*I-1,2*I+1)=A2*(24.*BETA2*BETA2+3.6*BETA2+9./70.)-
*.2*B2
MASSA(2*I-1,2*I+2)=A2*D*(6.*BETA2*BETA2+0.9*BETA2+13./420.
*)+B2*D*(6.*BETA2 -0.1)
MASSA(2*I,2*I)=A1*C*C*(1.2*BETA1*BETA1+0.2*BETA1+1./105.)+
1B1*C*C*(48.*BETA1*BETA1+2.*BETA1+2./15.)+A2*D*D*(1.2*BETA2*BETA2+0.2*BETA2+1./105.)+B2*D*D*(48.*BETA2*BETA2+2.*BETA2+2./15.)
MASSA(2*I,2*I+1)=-A2*D*(6.*BETA2*BETA2+0.9*BETA2+13./420.)-
1B2*D*(6.*BETA2-0.1)
MASSA(2*I,2*I+2)=-A2*D*D*(1.2*BETA2*BETA2+0.2*BETA2+1./140.
*)+
1B2*D*D*(24.*BETA2*BETA2-2.*BETA2-1./30.)
10 CONTINUE
      MASSA(N2-1,N2-1)=A2*(48.*BETA2*BETA2+8.4*BETA2+13./35.)*1.2
**B2
      MASSA(N2-1,N2)=A2*D*(6.*BETA2*BETA2+1.1*BETA2+11./210.)-
1B2*D*(6.*BETA2-0.1)
      MASSA(N2,N2)=A2*D*D*(1.2*BETA2*BETA2+0.2*BETA2+1./105.)*
1B2*D*D*(48.*BETA2*BETA2+2.*BETA2+2./15.)

      DO 20 I=1,N2
      DO 20 J=1,I
      MASSA(I,J)=MASSA(J,I)
20 CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE STIF2( COORD,YOUNG,G,AREA,FFORM,JOTA )
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 JOTA(60)
DIMENSION COORD(60),YOUNG(60),G(30),AREA(30),FFORM(30)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT

N2=2*N
DO 5 I=1,N2
DO 5 J=1,N2
F(I,J)=0.
5 CONTINUE

N1=N-1
DO 10 I=1,N1
IF(I-1)6,6,7
6 C=COORD(1)
GO TO 8
7 C=COORD(I)-COORD(I-1)
8 D=COORD(I+1)-COORD(I)
BETA1=YOUNG(I)*JOTA(I)*FFORM(I)/(G(I)*AREA(I)*C*C)
BETA2=YOUNG(I+1)*JOTA(I+1)*FFORM(I+1)/(G(I+1)*AREA(I+1)*D*D)
A1=2.*YOUNG(I)*JOTA(I)/(C**3*(1.+12.*BETA1))
A2=2.*YOUNG(I+1)*JOTA(I+1)/(D**3*(1.+12.*BETA2))
F(2*I-1,2*I-1)=6.*(A1+A2)
F(2*I-1,2*I)=3.*(A1*C-A2*D)
F(2*I-1,2*I+1)=-6.*A2
F(2*I-1,2*I+2)=-3.*A2*D
F(2*I,2*I)=2.*(A1*C*C+A2*D*D)+6.*(A1*BETA1*C*C+A2*BETA2*D*D)
F(2*I,2*I+1)=3.*A2*D
F(2*I,2*I+2)=A2*D*D*(1.-6.*BETA2)
10 CONTINUE

F(N2-1,N2-1)=6.*A2

```

```
F(N2-1,N2)=3.*A2*D  
F(N2,N2)=2.*A2*D*D+6.*A2*BETA2*D*D  
  
DO 20 I=1,N2  
DO 20 J=1,I  
F(I,J)=F(J,I)  
20 CONTINUE  
RETURN  
END
```

```
SUBROUTINE SHEAR(COORD,JOTA,YOUNG)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 JOTA(60)
DIMENSION COORD(60),YOUNG(60)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT
C
DO 10 I=1,N
DO 10 J=1,N
F(I,J)=0.
10 CONTINUE
F(1,1)=12.*YOUNG(1)*JOTA(1)/((COORD(1)**3)+12.*YOUNG(2)*
1JOTA(2)/((COORD(2)-COORD(1))**3)
F(1,2)=-12.*YOUNG(2)*JOTA(2)/((COORD(2)-COORD(1))**3)
N1=N-1
DO 20 I=2,N1
F(I,I-1)=-12.*YOUNG(I)*JOTA(I)/((COORD(I)-COORD(I-1))**3)
F(I,I+1)=-12.*YOUNG(I+1)*JOTA(I+1)/((COORD(I+1)-COORD(I))
1**3)
F(I,I)=-F(I,I-1)-F(I,I+1)
20 CONTINUE
F(N,N1)=-12.*YOUNG(N)*JOTA(N)/((COORD(N)-COORD(N1))**3)
F(N,N)=-F(N,N1)
RETURN
END
```

SUBROUTINE GIVHO(A,E,V,N,NEV,NVEC)

A	- MATRIZ SIMETRICA, N*N, DE ENTRADA
NEV	- NUMERO DE AUTO-VALORES A SEREM CALCULADOS
NVEC	- NUMERO DE AUTO-VETORES A SEREM CALCULADOS. (NVEC E MENOR OU IGUAL A NEV)
E	- VETOR DE SAIDA. CONTEM OS NEV AUTO-VALORES
V	- MATRIZ DOS AUTO-VETORES DE SAIDA (NORMALIZADOS)

OBS.- SE NAO SE DESEJA O CALCULO DOS AUTO-VETORES, FORNECER  
NVEC=0. NESTE CASO NAO E NECESSARIO DIMENSIONAR V

```

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
LOGICAL MIRST,IN
DIMENSION A(60,60),E(20),V(60,20)
*,B(60),C(60),P(60),Q(60),R(60),W(60),Y(62),IN(60)
NM1=N-1
NM2=N-2

```

ETAPA 1 - REDUCAO A FORMA TRIDIAGONAL. A MATRIZ A DE  
ENTRADA E DESTRUIDA NO CALCULO

```

IF(N.LE.2) GO TO 99
DO 8 I=1,NM2
IP1=I+1
SS=0.
DO 1 J=IP1,N
1 SS=SS+A(J,I)**2
S=DSQRT(SS)
IF(A(IP1,I).LT.0.) S=-S

```

```

C(I)=A(I,I)
B(I)=-S
IF S IS ZERO THEN ALPHA MUST BE ZERO.
ALPHA=0.
IF(S.EQ.0.0) GO TO 8
ALPHA=1./(SS+A(IP1,I)*S)
T=A(IP1,I)+S
A(IP1,I)=T
W(I+1)=T
IP2=I+2
DO 2 J=IP2,N
2 W(J)=A(J,I)
DO 4 J=IP1,N
T=0.0
DO 3 K=IP1,N
3 T= T + A(J,K)*W(K)
4 P(J)=T*ALPHA
XAP=0.0
DO 5 K=IP1,N
5 XAP=XAP+W(K)*P(K)
XAP=.5*XAP*ALPHA
DO 6 K=IP1,N
6 Q(K)=P(K)-XAP*W(K)
DO 7 J=IP1,N

DO 7 K=J,N
A(J,K)=A(J,K)-(Q(J)*W(K)+Q(K)*W(J))
7 A(K,J)=A(J,K)
8 A(I,I)=ALPHA
99 C(N-1)=A(N-1,N-1)
C(N)=A(N,N)
B(N-1)=A(N-1,N)

```

AQUI TERMINA A REDUCAO A FORMA TRIDIAGONAL

## ETAPA 2 - CALCULO DOS AUTO-VALORES

```

XORM=DABS(C(1))+DABS(B(1))
DO 10 I=2,NM1
T=DABS(C(I))+DABS(B(I))+DABS(B(I-1))
10 XORM=DMAX1(XORM,T)
DO 11 I=1,NM1
11 W(I)=B(I)**2
K=1
U=XORM
DO 12 I=1,NEV
12 E(I)=-XORM
13 XL=E(K)
14 XAMBDA=.5*(XL+U)

IF((XAMBDA.EQ.XL).OR.(XAMBDA.EQ.U)) GO TO 30
CALL OVERFL(II)
MG=0
I=1
16 S=C(I)-XAMBDA
18 IF(S.GE.0.0) MG=MG+1
IF(S.EQ.0.0) GO TO 20
I=I+1
IF(I.GT.N) GO TO 22
S=C(I)-XAMBDA-W(I-1)/S
CALL OVERFL(II)

SE OCORRER OVERFLO(II=1), FAZ S=0.
```

```

IF(II.NE.1) GO TO 18
MG=MG+1
```

```

I=I-1
20 I=I+2
  IF(I.LE.N) GO TO 16

22 IF(MG.GE.K) GO TO 24
  U=XAMBDA
  GO TO 14
24 XL=XAMBDA
  M=MINO(MG,NEV)
  DO 26 I=K,M
26 E(I)=XAMBDA
  GO TO 14

30 E(K)=XAMBDA
  K=K+1
  IF(K.LE.NEV) GO TO 13

```

AQUI TERMINA O CALCULO DOS AUTO-VALORES

ETAPA 3 - CALCULO DOS AUTO-VETORES (SE NVEC E NAO NULO)

```

IF(NVEC.NE.0) GO TO 40
RETURN
40 DO 82 I=1,NVEC
  DO 44 J=1,N
    P(J)=0.
    R(J)=C(J)-E(I)
44 Y(J)=1.
    Y(N+1)=0.
    Y(N+2)=0.
    MIRST=.TRUE.

```

REDUCAO A FORMA TRIANGULAR PELA ELIMINACO DE GAUSS

```

DO 50 J=1,NM1
IF(DABS(R(J)).LT.DABS(B(J))) GO TO 46
XULT=B(J)/R(J)
IN(J)=.FALSE.
GO TO 48
46 XULT=R(J)/B(J)
IN(J)=.TRUE.
R(J)=B(J)
T=R(J+1)
R(J+1)=Q(J)
Q(J)=T
P(J)=Q(J+1)
Q(J+1)=0.

48 W(J)=XULT
Q(J+1)=Q(J+1)-XULT*P(J)
R(J+1)=R(J+1)-XULT*Q(J)
IF(R(J).EQ.0) R(J)=1.E-30
50 CONTINUE
IF(R(N).EQ.0) R(N)=1.E-30
IF(I.EQ.1.OR.DABS(E(I)-E(I-1)).GE.XORM*1.E-6) GO TO 54

```

OBS.- EM LUGAR DE FAZER EM 52 Y(J)=0., PODE SER FEITO Y(J)  
 IGUAL A UM VETOR ALEATORIO DE PARTIDA, POR EXEMPLO  
 ATRAVES DA SUBROTINA RANDU. NESTE CASO DEVE SER  
 FEITO O TESTE DE OVERFLOW

```

DO 52 J=1,N
52 Y(J)=10.

```

```

54 CALL OVERFL(II)
DO 66 JI=1,N
K=N-JI+1

```

```

T=Y(K)
62 Y(K)=(T-Y(K+1)*Q(K)-Y(K+2)*P(K))/R(K)
CALL OVERFL(II)
IF (II.NE.1) GO TO 66
DO 64 J=1,N
64 Y(J)=Y(J)*1.E-05
T=T*1.E-05
GO TO 62
66 CONTINUE

IF(.NOT.MIRST) GO TO 74
MIRST=.FALSE.
DO 70 J=1,NM1
IF(IN(J)) GO TO 68
Y(J+1)=Y(J+1)-W(J)*Y(J)
GO TO 70
68 T=Y(J)
Y(J)=Y(J+1)
Y(J+1)=T-W(J)*Y(J+1)
70 CONTINUE
GO TO 54

74 DO 78 J=1,NM2
K=N-J-1
T=0.0
M=K+1
DO 76 KK=M,N
76 T=T+A(KK,K)*Y(KK)
T=A(K,K)*T
DO 78 KK=M,N
78 Y(KK)=Y(KK)-T*A(KK,K)

O CALCULO DOS AUTO-VETORES ESTA COMPLETO. E EFETUADA A
SEGUIR A NORMALIZACAO

```

```
T=DABS(Y(1))
K=1
DO 80 J=2,N
S=DABS(Y(J))
IF(S.LE.T) GO TO 80
T=S
K=J
80 CONTINUE
T=1.0/Y(K)
DO 82 J=1,N
82 V(J,I)=Y(J)*T
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE VELO1(TEMPI,T,UZERO,VZERO,P1,P2,VZ)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION U(60),P1(60),P2(60),UZ(60),VZ(60),UZERO(60),
*VZERO(60),Z(20)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT

DO 5 I=1,N
UZ(I)=0.
VZ(I)=0.
5 CONTINUE

DO 10 I=1,NVEC
DO 10 K=1,N
UZ(I)=UZ(I)+F(I,K)*VZERO(K)
VZ(I)=VZ(I)+F(I,K)*UZERO(K)
10 CONTINUE

DO 15 I=1,NVEC
UZ(I)=UZ(I)*DCOS(XL(I)*TEMPI)-VZ(I)*XL(I)*DSIN(XL(I)*TEMPI)
15 CONTINUE
DO 20 I=1,N
VZ(I)=0.
DO 20 K=1,NVEC
VZ(I)=VZ(I)+X(I,K)*UZ(K)
20 CONTINUE
DO 22 I=1,NVEC
Z(I)=0.
U(I)=0.
DO 22 K=1,N
Z(I)=Z(I)+X(K,I)*PI(K)*DSIN(XL(I)*TEMPI)
22 CONTINUE
CALL ZXMGU(Z,U)

DO 25 I=1,N
```

```
VZ(I)=VZ(I)+U(I)
25 CONTINUE
DO 26 I=1,NVEC
Z(I)=0.
U(I)=0.
DO 26 K=1,N
Z(I)=Z(I)+X(K,I)*P2(K)*(1.-DCOS(XL(I)*TEMP1))/(XL(I)*T)
26 CONTINUE
CALL ZXMGU(Z,U)
;
DO 30 I=1,N
VZ(I)=VZ(I)+U(I)
30 CONTINUE
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE COND1(UZERO,VZERO,TEMPI,CI)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION UZERO(60),VZERO(60),CI(60),UZ(60),VZ(60)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT
DO 5 I=1,NVEC
UZ(I)=0.
VZ(I)=0.
5 CONTINUE
DO 10 I=1,NVEC
DO 10 K=1,N
UZ(I)=UZ(I)+F(I,K)*UZERO(K)
10 CONTINUE
DO 20 I=1,NVEC
DO 20 K=1,N
VZ(I)=VZ(I)+F(I,K)*VZERO(K)
20 CONTINUE
DO 30 I=1,NVEC
UZ(I)=UZ(I)*DCOS(XL(I)*TEMPI)+VZ(I)*DSIN(XL(I)*TEMPI)/XL(I)
30 CONTINUE
DO 40 I=1,N
CI(I)=0.
DO 40 K=1,NVEC
CI(I)=CI(I)+X(I,K)*UZ(K)
40 CONTINUE
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE COND2 (UZERO,VZERO,TEMPI,ETA,CI)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION UZERO(60),VZERO(60),CI(60),UZ(60),VZ(60),
*ETA(20)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT

DO 5 I=1,NVEC
UZ(I)=0.
VZ(I)=0.
5 CONTINUE

DO 10 I=1,NVEC
DO 10 K=1,N
UZ(I)=UZ(I)+F(I,K)*UZERO(K)
10 CONTINUE

DO 20 I=1,NVEC
A=XL(I)*DSQRT(1.-ETA(I)*ETA(I))*TEMPI
B=-ETA(I)*XL(I)*TEMPI
UZ(I)=UZ(I)*DEXP(B)*DCOS(A)
20 CONTINUE

DO 30 I=1,NVEC
DO 30 K=1,N
VZ(I)=VZ(I)+F(I,K)*(VZERO(K)+ETA(I)*XL(I)*UZERO(K))
30 CONTINUE

DO 40 I=1,NVEC
A=XL(I)*DSQRT(1.-ETA(I)*ETA(I))*TEMPI
B=-ETA(I)*XL(I)*TEMPI
VZ(I)=VZ(I)*DEXP(B)*DSIN(A)/(A/TEMPI)
40 CONTINUE

DO 50 I=1,N
```

```
CI(I)=0.  
DO 50 K=1,NVEC  
CI(I)=CI(I)+X(I,K)*(UZ(K)+VZ(K))  
50 CONTINUE  
C  
RETURN  
END
```

```

SUBROUTINE VELO2(TEMPI,T,UZERO,VZERO,P1,P2,ETA,VZ)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION P1(60),P2(60),UZ(60),VZ(60),UZERO(60),VZERO(60),
*ETA(20)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT

DO 5 I=1,N
UZ(I)=0.
VZ(I)=0.
5 CONTINUE

DO 10 I=1,NVEC
DO 10 K=1,N
UZ(I)=UZ(I)+F(I,K)*UZERO(K)
VZ(I)=VZ(I)+F(I,K)*(VZERO(K)+ETA(I)*XL(I)*UZERO(K))
10 CONTINUE

DO 15 I=1,NVEC
A=XL(I)*DSQRT(1.-ETA(I)*ETA(I))*TEMPI
B=-ETA(I)*XL(I)*TEMPI
UZ(I)=UZ(I)*(-B/TEMPI*DEXP(B)*DCOS(A)+DEXP(B)*A/TEMPI*
CDSIN(A))
VZ(I)=VZ(I)*(B/A*DEXP(B)*DSIN(A)+DEXP(B)*DCOS(A))
UZ(I)=-UZ(I)+VZ(I)
15 CONTINUE

DO 20 I=1,NVEC
VZ(I)=0.
A=XL(I)*DSQRT(1.-ETA(I)*ETA(I))*TEMPI
B=-ETA(I)*XL(I)*TEMPI
DO 20 K=1,N
VZ(I)=VZ(I)+X(K,I)*P1(K)*DEXP(B)*DSIN(A)
VZ(I)=VZ(I)+X(K,I)*P2(K)*TEMPI/(T*(A*A+B*B))**
*(A-DEXP(B)*(-B*DSIN(A)+A*DCOS(A)))

```

```
20 CONTINUE  
  
DO 30 I=1,NVEC  
VZ(I)=VZ(I)/(DSQRT(1.-ETA(I)*ETA(I))*XL(I)*XMG(I))  
UZ(I)=UZ(I)+VZ(I)  
30 CONTINUE  
  
DO 40 I=1,N  
VZ(I)=0.  
DO 40 K=1,NVEC  
VZ(I)=VZ(I)+X(I,K)*UZ(K)  
40 CONTINUE  
RETURN  
END
```

```
SUBROUTINE MAX(N,T,Y,K)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION Y(60)
```

CALCULO DE ABS(MAX(Y(K))), K=1,N

```
T=DABS(Y(1))
```

```
K=1
```

```
DO 80 J=2,N
```

```
S=DABS(Y(J))
```

```
IF(S-T)80,80,79
```

```
79 T=S
```

```
K=J
```

```
80 CONTINUE
```

COM O RESULTADO ANTERIOR, TEM-SE T=ABS(MAX(Y(I))) E  
A POSICAO NO VETOR

#### NORMALIZACAO

```
DO 82 I=1,N
```

```
Y(I)=Y(I)/T
```

```
82 CONTINUE
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
SUBROUTINE AUTOX(N,NEV,NVEC,F,G,E,V)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION F(60,60),E(20),V(60,20),AA(60),G(60,60)

DECOMPOSICAO DE CHOLESKI

F(1,1)=DSQRT(F(1,1))
DO 10 I=2,N
  F(I,1)=F(I,1)/F(1,1)
10 CONTINUE
DO 100 I=1,N
  DO 100 J=2,N
    J1=J-1
    IF(I-J) 50,60,70
50  F(I,J)=0.
    GO TO 100
60  DO 65 IR=1,J1
    F(I,J)=F(I,J)-F(I,IR)*F(I,IR)
65  CONTINUE
    F(I,J)=DSQRT(F(I,J))
    GO TO 100
70  DO 75 IR=1,J1
    F(I,J)=F(I,J)-F(I,IR)*F(J,IR)
75  CONTINUE
    F(I,J)=F(I,J)/F(J,J)
100 CONTINUE

DO 150 I=1,N
  F(I,I)=1./F(I,I)
150 CONTINUE
```

```
DO 200 I=2,N
II=I-1
DO 200 J=1,I
A=0.
IF(I-J)200,200,170
170 DO 190 IR=J,II
190 A=A+F(I,IR)*F(IR,J)
F(I,J)=-F(I,I)*A
200 CONTINUE
C
C      CALCULO DE (F**(-1))*G
C
DO 300 I=1,N
DO 250 K=1,N
AA(K)=G(K,I)
250 CONTINUE
DO 300 J=1,N
DO 270 L=1,J
G(J,I)=G(J,I)+F(J,L)*AA(L)
270 CONTINUE
G(J,I)=G(J,I)-AA(J)
300 CONTINUE
C
C      CALCULO DE ((F)**(-1))*G*(F**(-1))*
C
DO 400 I=1,N
DO 350 K=1,N
AA(K)=G(I,K)
350 CONTINUE
DO 400 J=I,N
DO 370 L=1,J
G(I,J)=G(I,J)+AA(L)*F(J,L)
370 CONTINUE
G(I,J)=G(I,J)-AA(J)
400 CONTINUE
DO 410 I=1,N
```

```
DO 410 J=1,I  
G(I,J)=G(J,I)  
410 CONTINUE  
  
C  
CALL GIVHO(G,E,V,N,NEV,NVEC)  
  
C  
C AGORA G E A MATRIZ SIMETRICA PROCURADA  
C  
DO 340 J=1,NVEC  
DO 320 II=1,N  
AA(II)=V(II,J)  
320 CONTINUE  
DO 340 I=1,N  
DO 330 K=I,N  
V(I,J)=V(I,J)+F(K,I)*AA(K)  
330 CONTINUE  
V(I,J)=V(I,J)-AA(I)  
DO 332 IC=1,N  
AA(IC)=V(IC,J)  
332 CONTINUE  
CALL MAX(N,T,AA,KK)  
DO 335 ICC=1,N  
V(ICC,J)=AA(ICC)  
335 CONTINUE  
340 CONTINUE  
RETURN  
END
```

```
SUBROUTINE AXMGU(Z,ETA,U)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION U(60),Z(20),ETA(20)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT
DO 35 I=1,NVEC
Z(I)=Z(I)/(XMG(I)*XL(I)*DSQRT(1.-ETA(I)*ETA(I)))
35 CONTINUE
DO 40 I=1,N
U(I)=0.
DO 40 J=1,NVEC
U(I)=U(I)+X(I,J)*Z(J)
40 CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE ZXMGU(Z,U)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION U(60),Z(20)
COMMON XL(20),X(60,20),XMG(20),N,NVEC,F(60,60),NPC,NTEMP,
*NAMT
DO 35 I=1,NVEC
Z(I)=Z(I)/(XMG(I)*XL(I))
35 CONTINUE
DO 40 I=1,N
U(I)=0.
```

```
DO 40 J=1,NVEC  
U(I)=U(I)+X(I,J)*Z(J)  
40 CONTINUE  
RETURN  
END
```

```
/*  
//LKED.SYSIN DD *  
INSERT MAIN  
OVERLAY UM  
INSERT STIF2  
OVERLAY UM  
INSERT MASS2  
OVERLAY UM  
INSERT LINE2  
OVERLAY UM  
INSERT LOAD1  
OVERLAY UM  
INSERT LOAD2  
OVERLAY UM  
INSERT LOAD3  
OVERLAY UM  
INSERT LOAD4  
OVERLAY UM  
INSERT LOAD5  
OVERLAY UM  
INSERT LOAD6  
OVERLAY UM  
INSERT LOAD7  
OVERLAY UM  
INSERT LOAD8  
OVERLAY UM
```

```
INSERT LOAD9
OVERLAY UM
INSERT LOA10
OVERLAY UM
INSERT DIST
OVERLAY UM
INSERT VEL01
OVERLAY UM
INSERT COND1
OVERLAY UM
INSERT COND2
OVERLAY UM
INSERT VEL02
OVERLAY UM
INSERT AUTOX
OVERLAY UM
INSERT SHEAR
ENTRY MAIN
NAME MAIN(R)
/*
//GO.FT01F001 DD DSN=&&ARQ1,UNIT=2314,SPACE=(480,(60,2),RLSE)
//GO.SYSIN DD *
```

```
SUBROUTINE FLEX1(N,COORD,JOTA,YOUNG,F)
REAL JOTA(60)
DIMENSION F(60,60),COORD(60),YOUNG(60)
C
DO 10 J=1,N
F(1,J)=(3.*COORD(J)-COORD(1))*COORD(1)**2/(6.*YOUNG(1)*JOTA(1))
10 CONTINUE
DO 20 I=2,N
K1=I-1
DO 20 J=I,N
F(I,J)=((COORD(J)-COORD(I))**3+3.*COORD(J)**2*COORD(I))/(6.*YOUNG(. .
*I)*JOTA(I))-COORD(J)**3/(6.*YOUNG(1)*JOTA(1))
DO 20 K=1,K1
F(I,J)=F(I,J)+0.5*COORD(I)*COORD(K)*(COORD(K)-2.*COORD(J))*(1./(YO
*UNG(K+1)*JOTA(K+1))-1./(YOUNG(K)*JOTA(K)))-0.1666666*(COORD(J)-COO
*RD(K))**2*(COORD(J)+2.*COORD(K))*(1./(YOUNG(K+1)*JOTA(K+1))-1./(YO
*UNG(K)*JOTA(K)))
20 CONTINUE
DO 30 I=1,N
DO 30 J=1,I
F(I,J)=F(J,I)
30 CONTINUE
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE FLEX2(N,COORD,AREA,FFORM,G,F )
DIMENSION COORD(60),AREA(60),FFORM(60),G(60),F2(60),F(60,60)
```

ESTA SUBROTINA CALCULA OS ELEMENTOS NECESSARIOS PARA DETERMINACAO DOS TERMOS DA MATRIZ DE FLEXIBILIDADE PROVENIENTES DO EFEITO DO ESFORCO CORTANTE

```
F2(1)=FFORM(1)*COORD(1)/(G(1)*AREA(1))
DO 10 I=2,N
F2(I)=F2(I-1)+FFORM(I)*(COORD(I)-COORD(I-1))/(G(I)*AREA(I))
10 CONTINUE
DO 15 I=1,N
DO 15 J=1,I
F(I,J)=F2(J)
F(J,I)=F(I,J)
15 CONTINUE
20 RETURN
END
```

```
SUBROUTINE FLEX3(N,COORD,YOUNG,JOTA,F )
REAL JOTA(60)
DIMENSION COORD(60),YOUNG(60),F2(60),F(60,60)

F2(1)=COORD(1)**3/(12.*YOUNG(1)*JOTA(1))
DO 10 I=2,N
  F2(I)=F2(I-1)+(COORD(I)-COORD(I-1))**3/(12.*YOUNG(I)*JOTA(I))
10 CONTINUE
DO 15 I=1,N
  DO 15 J=1,I
    F(I,J)=F2(J)
    F(J,I)=F(I,J)
15 CONTINUE
RETURN
END
```

SUBROUTINE STOD (F,N,I4,XMASS,T1,T2,T3,T4,Q1,Q2,Q3,Q4)  
DIMENSION F(60,60),Q1(60),Q2(60),Q3(60),Q4(60),XMASS(60),  
\*A2(60),A1(60),A3(60),FI(60)

C

M1=8  
READ(M1,101)ERRO  
101 FORMAT(F15.12)

C

C CALCULO DA PRIMEIRA FREQUENCIA E DO PRIMEIRO MODO

C

DO 15 I=1,N  
FI(I)=FLOAT(I)/FLOAT(N)  
15 CONTINUE  
CALL STOD1(F,N,T1,Q1,ERRO,FI)

C

C CALCULO DA SEGUNDA FREQUENCIA E DO SEGUNDO MODO

C

DO 310 J=1,N  
A1(J)=-XMASS(J)\*Q1(J)/(XMASS(1)\*Q1(1))  
310 CONTINUE  
DO 320 I=1,N  
DO 320 J=2,N  
F(I,J)=F(I,1)\*A1(J)+F(I,J)  
320 CONTINUE  
DO 325 I=1,N  
F(I,1)=0.  
325 CONTINUE  
DO 327 I=1,N  
FI(I)=FLOAT(I)/FLOAT(N)  
FI(I)=FI(I)\*(FI(I)-0.774)/0.226  
327 CONTINUE  
CALL STOD1(F,N,T2,Q2,ERRO,FI)

C

C CALCULO DA TERCEIRA FREQUENCIA E DO TERCEIRO MODO

C

I4=1  
READ(4\*I4)((F(I,J),J=1,N),I=1,N)

```

A=XMASS(1)*Q1(1)
B=XMASS(2)*Q1(2)
C=XMASS(1)*Q2(1)
D=XMASS(2)*Q2(2)
DET=A*D-B*C
DO 370 I=1,N
  A1(I)=(XMASS(I)/DET)*(B*Q2(I)-D*Q1(I))
  A2(I)=(XMASS(I)/DET)*(-A*Q2(I)+C*Q1(I))
370 CONTINUE
DO 380 I=1,N
DO 380 J=3,N
  F(I,J)=F(I,1)*A1(J)+F(I,2)*A2(J)+F(I,J)
380 CONTINUE
DO 385 I=1,N
  F(I,1)=0.
  F(I,2)=0.
385 CONTINUE
DO 387 I=1,N
  FI(I)=FLOAT(I)/FLOAT(N)
  FI(I)=0.864*FI(I)*(FI(I)-0.501)*(FI(I)-0.864)/0.0659
387 CONTINUE
CALL STOD1(F,N,T3,Q3,ERRO,FI)
I4=1
READ(4*I4)((F(I,J),J=1,N),I=1,N)
B1=XMASS(1)*Q1(1)
B2=XMASS(2)*Q1(2)
B3=XMASS(3)*Q1(3)
B4=XMASS(1)*Q2(1)
B5=XMASS(2)*Q2(2)
B6=XMASS(3)*Q2(3)
B7=XMASS(1)*Q3(1)
B8=XMASS(2)*Q3(2)
B9=XMASS(3)*Q3(3)
DET=B1*B5*B9+B2*B6*B7+B3*B4*B8-B7*B5*B3-B4*B2*B9-B1*B6*B8
DO 400 I=1,N
  A1(I)=(-XMASS(I)/DET)*(B5*B9*Q1(I)+B2*B6*Q3(I)+B3*B8*Q2(I)-B3*B5*
  *Q3(I)-B6*B8*Q1(I)-B2*B9*Q2(I))
  A2(I)=(-XMASS(I)/DET)*(B1*B9*Q2(I)+B6*B7*Q1(I)+B3*B4*Q3(I)-B3*B7*

```

```
*Q2(I)-B4*B9*Q1(I)-B1*B6*Q3(I))
A3(I)=(-XMASS(I)/DET)*(B1*B5*Q3(I)+B2*B7*Q2(I)+B4*B8*Q1(I)-B5*B7*
*Q1(I)-B1*B8*Q2(I)-B2*B4*Q3(I))
400 CONTINUE
DO 410 I=1,N
DO 410 J=4,N
F(I,J)=F(I,1)*A1(J)+F(I,2)*A2(J)+F(I,3)*A3(J)+F(I,J)
410 CONTINUE
DO 412 I=1,N
F(I,1)=0.
F(I,2)=0.
F(I,3)=0.
412 CONTINUE
FI(I)=FLOAT(I)/FLOAT(N)
FI(I)=0.721*FI(I)*(FI(I)-0.356)*(FI(I)-0.644)*(FI(I)-0.906)/0.0216
417 CONTINUE
CALL STOD1(F,N,T4,Q4,ERRO,FI)
RETURN
END
```

SUBROUTINE STOD1(D,N,T1,Q,ERRO,FI)  
DIMENSION D(60,60),FI(60),Q(60)

C  
S1=1.  
IT=0  
30 CONTINUE  
DO 25 I=1,N  
Q(I)=0.  
25 CONTINUE  
DO 40 I=1,N  
DO 40 J=1,N  
Q(I)=Q(I)+D(I,J)\*FI(J)  
40 CONTINUE  
CALL MAX(N,T,Q,K2)  
T1=1./SQRT(T)  
T2=ABS(S1-T1)  
IT=IT+1  
IF(T2-ERRO)45,46,46  
45 RETURN  
46 S1=T1  
DO 60 I=1,N  
FI(I)=Q(I)  
60 CONTINUE  
GO TO 30  
END