

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
ESCOLA DE QUÍMICA

**Mateus Marques Barbio**



**PROJETO ÓTIMO DE TROCADORES DE CALOR DE PLACAS  
SOLDADAS ASSUMINDO PROPRIEDADES VARIÁVEIS COM A  
TEMPERATURA**

RIO DE JANEIRO  
2024

Mateus Marques Barbio

**PROJETO ÓTIMO DE TROCADORES DE CALOR DE PLACAS SOLDADAS  
ASSUMINDO PROPRIEDADES VARIÁVEIS COM A TEMPERATURA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Escola de Química da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Engenheiro Químico.

Orientador(es):      Prof. Eduardo Mach Queiroz, D.Sc  
                            Prof. André Luiz Hemerly Costa, D.Sc  
                            Prof. Miguel Jorge Bagajewicz, Ph.D

Rio de Janeiro

2024

## CIP - Catalogação na Publicação

B237p Barbio, Mateus Marques  
Projeto ótimo de trocadores de calor de placas soldadas assumindo propriedades variáveis com a temperatura / Mateus Marques Barbio. -- Rio de Janeiro, 2024.  
51 f.

Orientador: Eduardo Mach Queiroz.  
Trabalho de conclusão de curso (graduação) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola de Química, Bacharel em Engenharia Química, 2024.

1. projeto de equipamentos. 2. trocadores de calor. 3. modelagem e simulação. 4. otimização. I. Queiroz, Eduardo Mach, orient. II. Título.

Mateus Marques Barbio

**PROJETO ÓTIMO DE TROCADORES DE CALOR DE PLACAS SOLDADAS  
ASSUMINDO PROPRIEDADES VARIÁVEIS COM A TEMPERATURA**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado à Escola de Química da  
Universidade Federal do Rio de Janeiro,  
como parte dos requisitos necessários à  
obtenção do grau de Engenheiro Químico.

Aprovado em 17 de dezembro de 2024.

---

Eduardo Mach Queiroz, D.Sc, UFRJ

---

André Luiz Hemerly Costa, D.Sc, UERJ

---

Miguel Jorge Bagajewicz, Ph.D, instituição

---

Tânia Suaiden Klein, D.Sc, UFRJ

---

Flávio da Silva Francisco, D.Sc., UFRJ

Rio de Janeiro  
2024

*Dedico este trabalho à minha esposa, aos meus pais e aos meus gatos.*

## RESUMO

**BARBIO, Mateus Marques. Projeto Ótimo De Trocadores De Calor De Placas Soldadas Assumindo Propriedades Variáveis Com a Temperatura.** Rio de Janeiro, 2024. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Química) - Escola de Química, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

A troca energética entre correntes é algo comum em uma planta de processos e os trocadores de calor são os equipamentos utilizados para esta tarefa. Há diferentes tipos de trocadores com diversas configurações de escoamento e características construtivas. O trocador de calor de placas soldadas é um desses equipamentos. Ele é composto por finas placas corrugadas espaçadas entre si formando canais estreitos pelos quais os fluidos escoam de forma cruzada e trocam energia. Trata-se de um equipamento que pode ser utilizado em trabalhos com pressões de até 80 bar e temperaturas de até 500°C. Além disso ele apresenta altas taxas de cisalhamento e coeficientes de troca térmica. O presente trabalho aborda de forma detalhada a construção de um modelo matemático para simulação deste equipamento considerando-se as propriedades dos fluidos como funções da temperatura, ou seja, por meio de uma abordagem rigorosa do problema. Além disso, o trabalho desenvolve um método de solução computacional do modelo proposto e o utiliza na confecção de um simulador escrito em *Python*, que é validado e testado com diferentes fluidos e condições operacionais. Em seguida, desenvolve-se problemas de projeto ótimo desse equipamento quanto a dois critérios de qualidade: a área de troca térmica e o custo total anualizado. Para isso, duas técnicas de otimização são utilizadas em conjunto para a solução desses problemas: o *Proxy Set Trimming* e o *Smart Enumeration*. Essas técnicas permitem a garantia de solução ótima sem a necessidade de simular todos os candidatos presentes no espaço amostral. Por fim, é feita uma breve análise das soluções obtidas e dos custos computacionais para solução do problema.

Palavras-chave: Trocador de calor. Simulação. Projeto.

## ABSTRACT

BARBIO, Mateus Marques. **Projeto Ótimo De Trocadores De Calor De Placas Soldadas Assumindo Propriedades Variáveis Com a Temperatura.** Rio de Janeiro, 2024. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Química) - Escola de Química, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

Energy exchange between streams is common in a process plant and heat exchangers are the equipment used for this task. There are different types of heat exchangers with different flow configurations and construction features. The welded plate heat exchanger is one of these equipment. It consists of thin corrugated plates spaced apart, forming narrow channels through which fluids flow crosswise and exchange energy. This equipment can be used in work with pressures of up to 80 bar and temperatures of up to 500°C. In addition, it has high shear rates and heat exchange coefficients. This work addresses in detail the construction of a mathematical model to simulate this equipment considering the properties of the fluids as functions of temperature, that is, through a rigorous approach to the problem. In addition, the work develops a computational solution method for the proposed model and uses it to create a simulator written in Python, which is validated and tested with different fluids and operating conditions. Next, optimal design problems for this equipment are developed regarding two quality criteria: the heat exchange area and the total annualized cost. For this purpose, two optimization techniques are used together to solve these problems: Proxy Set Trimming and Smart Enumeration. These techniques ensure an optimal solution without the need to simulate all candidates present in the search space. Finally, a brief analysis of the solutions found and the computational costs to solve the problem is made.

Keywords: Heat exchanger, Simulation, Project

## **LISTA DE ILUSTRAÇÕES**

- Figura 2.1 - Classificação de trocadores de calor
- Figura 2.2 - Escoamento em paralelo (a) e em contracorrente (b)
- Figura 2.3 - Escoamento cruzado não misturado (a) e misturado (b)
- Figura 2.4 - Região viável convexa (a) e não convexa (b)
- Figura 2.5 – Aplicação do *Set Trimming*
- Figura 2.6 – Regra 1/3 de Simpson
- Figura 3.1 – O volume de controle
- Figura 4.1 – Exemplo de malha 5x5
- Figura 4.2 – Região de aplicação dos métodos de diferenças finitas
- Figura 4.3 – Fluxograma de simulação
- Figura 6.1 – Configuração da validação de múltiplos passes
- Figura 6.2 – Efetividade x NUT para diferentes Cr (passe simples em contracorrente)
- Figura 6.3 – Efetividade x NUT para diferentes Cr (Múltiplos passes em contracorrente)
- Figura 6.4 – Comparação do U para água considerando propriedades constantes e variáveis
- Figura 6.5 – Comparação do U para petróleo cru considerando propriedades constantes e variáveis

## **LISTA DE TABELAS**

- Tabela 2.1 – Tipos de sistemas quanto ao número de soluções  
Tabela 2.2 – Objetivos típicos de otimização de projetos  
Tabela 5.1 – Valores limites de propriedades  
Tabela 6.1 – Propriedades dos fluidos para validação  
Tabela 6.2 – Propriedades do trocador para validação  
Tabela 6.3 – Erros mínimos e máximo dos testes de validação  
Tabela 6.4 – Propriedades dos fluidos para comparação de U  
Tabela 6.5 – Resultados do teste de U para água  
Tabela 6.6 – Resultados das simulações com água  
Tabela 6.7 – Resultados do teste de U para petróleo cru  
Tabela 6.8 – Resultados das simulações com petróleo cru  
Tabela 6.9 – Parâmetros de projeto  
Tabela 6.10 – Cortes do *Proxy Set Trimming* na minimização da área  
Tabela 6.11 – Resultado do projeto de menor área  
Tabela 6.12 – Cortes do *Proxy Set Trimming* na minimização da área  
Tabela 6.13 – Resultado do projeto de menor área

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

WPHE	<i>Welded Plate Heat Exchanger</i> (Trocador de calor de placas soldadas)
SI	Sistema Internacional de Unidades
CSTR	<i>Continuous-Stirred Tank Reactor</i> (Reator contínuo de tanque agitado)
FO	Função Objetivo
LP	<i>Linear Programming</i> (Programação linear)
NLP	<i>Non-Linear Programming</i> (Programação não linear)
MILP	<i>Mixed-Integer Linear Programming</i> (Programação inteira mista linear)
MINLP	<i>Mixed-Integer Non-Linear Programming</i> (Programação inteira mista não linear)
LB	<i>Lower Bound</i> (Limite inferior)
UB	<i>Upper Bound</i> (Limite superior)
VC	Volume de controle

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\dot{Q}$	Taxa de troca térmica ( $W = J.s^{-1}$ )
$U$	Coeficiente global de troca térmica ( $W.m^{-2}K^{-1}$ )
$A$	Área de troca térmica ( $m^2$ )
$\Delta T_m$	Diferença de temperatura média (-)
$h$	Coeficiente de troca térmica por convecção ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ )
$R_p$	Resistência condutiva na parede/placa ( $m^2.K.W^{-1}$ )
$R_d$	Fator de deposição ( $m^2.K.W^{-1}$ )
$t_p$	Espessura da parede/placa (m)
$k$	Condutividade térmica ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ )
$\rho$	Densidade ( $kg.m^{-3}$ )
$u$	Velocidade de escoamento ( $m.s^{-1}$ )
$L_e$	Comprimento equivalente (m)
$\mu$	Viscosidade dinâmica (Pa.s)
$C_p$	Calor específico ( $J.kg^{-1}K^{-1}$ )
$Re$	Número de Reynolds (-)
$Pr$	Número de Prandtl (-)
$Nu$	Número de Nusselt (-)
$\varepsilon$	Efetividade (-)
$NUT$	Número de unidades de transferência (-)
$C_x$	Capacidade térmica da corrente quente ou fria ( $W.K^{-1}$ )
$C_{min}$	Capacidade térmica do fluido mínimo ( $W.K^{-1}$ )
$C_{max}$	Capacidade térmica do fluido máximo ( $W.K^{-1}$ )
$V$	Volume ( $m^3$ )
$F$	Vazão volumétrica ( $m^3s^{-1}$ )
$t$	Tempo (s)
$e_U$	Energia interna intensiva/específica ( $J.kg^{-1}$ )
$e_k$	Energia cinética intensiva/específica ( $J.kg^{-1}$ )
$e_z$	Energia potencial gravitacional intensiva/específica ( $J.kg^{-1}$ )
$e_H$	Entalpia intensiva/específica ( $J.kg^{-1}$ )
$P$	pressão (Pa)

$v$	Volume intensivo/específico ( $\text{m}^3.\text{kg}^{-3}$ )
$\dot{W}$	Taxa de trabalho (W)
$T_{ref}$	Temperatura de referência (K)
$P_n(x)$	Polinômio de Taylor de grau n (-)
$R_n(x)$	Resíduo do polinômio de grau n (-)
$L_p$	Comprimento do lado da placa (m)
$t_p$	Espessura da placa (m)
$\beta$	Ângulo de corrugação ( $^{\circ}$ )
$\delta$	Espaçamento entre placas (m)
$N_p$	Número de placas (-)
$N_c$	Número de canais (-)
$N_{px}$	Número de passes da corrente quente ou fria (-)
$N_{cx}$	Número de canais da corrente quente ou fria (-)
$f_x$	Passe da corrente quente ou fria (-)
$N_{cpx,f_x}$	Número de canais no passe da corrente quente ou fria (-)
$S_{x,f_x}$	Conjunto de canais no passe da corrente quente ou fria (-)
$p_{x,f_x}$	Orientação do passe da corrente quente ou fria (-)
$G_{f_x}$	Fluxo mássico do fluido quente ou frio ( $\text{kg}.\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$ )
$T_i$	Temperatura no canal $i$ (K)
$\tilde{m}_{f_x}$	Vazão mássica do fluido quente ou frio por comprimento de placa ( $\text{kg}.\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$ )
$T_{x,e}$	Temperatura de entrada do fluido quente ou frio (K)
$T_{f_x,s}$	Temperatura de saída do passe do fluido quente ou frio (K)
$\psi$	Fração da perda de carga na parede da placa (-)
$\xi$	Fator de atrito (-)
$F_x$	Coeficiente de alargamento de área (-)
$\gamma$	Dobro do espaço entre corrugações (m)
$s$	<i>Pitch (m)</i>
$\Delta P_x$	Perda de carga total do fluido (Pa)
$\Delta P_{f_x}$	perda de carga no passe (Pa)
$P_i$	Pressão local no canal $i$ (Pa)
$P_{f_x,s}$	Pressão de saída do passe (Pa)
$P_{x,e}$	Pressão de entrada do fluido (Pa)

$\xi_{ZD}$  Fator de atrito na zona de distribuição (-)

## **LISTA DE SUBSCRITOS**

- f* Fluido frio
- q* Fluido quente
- p* Parede/placa
- e* Entrada
- s* Saída

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
1.1. ESCOPO DO TRABALHO .....	16
1.2. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	17
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>19</b>
2.1. INTRODUÇÃO.....	19
2.2. TROCADORES DE CALOR .....	19
2.2.1. <i>Trocadores de calor de placas</i> .....	22
2.2.2. <i>Projeto de trocadores de calor</i> .....	22
2.3. BALANÇO DE MASSA E ENERGIA.....	26
2.3.1. <i>Balanço de massa</i> .....	26
2.3.2. <i>Balanço de energia</i> .....	27
2.4. PERDA DE CARGA.....	30
2.5. OTIMIZAÇÃO.....	31
2.5.1. <i>Estrutura de um problema de otimização</i> .....	32
2.5.2. <i>Características da função objetivo</i> .....	33
2.5.3. <i>Apresentação do problema de otimização</i> .....	34
2.5.4. <i>Tipos de problemas de otimização</i> .....	34
2.5.5. <i>Set Trimming</i> .....	35
2.5.6. <i>Smart Enumeration</i> .....	37
2.6. MÉTODOS NUMÉRICOS .....	38
2.6.1. <i>Discretização</i> .....	38
2.6.2. <i>Linearização</i> .....	40
2.6.3. <i>Cálculo de integrais numéricas</i> .....	41
<b>3. MODELO MATEMÁTICO .....</b>	<b>43</b>
3.1. INTRODUÇÃO .....	43
3.2. CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	43
3.3. BALANÇO DE ENERGIA .....	46
3.4. CÁLCULO DA PERDA DE CARGA .....	55
<b>4. RESOLUÇÃO DO MODELO .....</b>	<b>60</b>
4.1. INTRODUÇÃO .....	60
4.2. DISCRETIZAÇÃO DO BALANÇO DE ENERGIA .....	60
4.3. DISCRETIZAÇÃO DO CÁLCULO DA PERDA DE CARGA .....	69

4.4.	ALGORITMO DE SIMULAÇÃO.....	72
<b>5.</b>	<b>OTIMIZAÇÃO DE PROJETO.....</b>	<b>77</b>
5.1.	INTRODUÇÃO.....	77
5.2.	PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO .....	77
5.2.1.	<i>Projeto de menor área total.....</i>	78
5.2.2.	<i>Projeto de menor TAC.....</i>	78
5.3.	PROXY SET TRIMMING .....	79
5.4.	SMART ENUMERANTION .....	81
<b>6.</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>82</b>
6.1.	INTRODUÇÃO.....	82
6.2.	VALIDAÇÃO .....	82
6.2.1.	<i>Modelos analíticos .....</i>	82
6.2.2.	<i>Procedimento .....</i>	83
6.2.3.	<i>Resultados – Teste de Validação .....</i>	85
6.3.	SIMULAÇÃO – PROPRIEDADES CONSTANTES E VARIÁVEIS .....	87
6.3.1.	<i>Simulação com água .....</i>	88
6.3.2.	<i>Simulação com petróleo cru .....</i>	90
6.4.	PROJETO .....	92
6.4.1.	<i>Projeto com menor área de troca térmica .....</i>	93
6.4.2.	<i>Projeto de menor custo total anualizado .....</i>	96
6.4.3.	<i>Comparação .....</i>	97
<b>7.</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>99</b>
<b>8.</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>101</b>

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1. ESCOPO DO TRABALHO

Um processo químico é composto por um conjunto de equipamentos interligados entre si por correntes de processo contendo matérias-primas ou produtos. Devido ao fato de a maior parte das reações não ocorrerem à temperatura constante, normalmente faz-se necessário o uso de trocadores de calor a fim de ajustar a temperatura dessas correntes. Uma das atribuições do engenheiro químico é a avaliação e dimensionamento destes equipamentos e correntes de processo (Brasil, 2004).

Diversos tipos de trocadores de calor estão disponíveis no mercado e estes podem ser classificados em função de diversas características como a configuração dos escoamentos em seu interior ou a forma de sua construção, por exemplo. Quanto à densidade da área de troca térmica, esses equipamentos podem ser classificados como compactos, quando possuem densidade de troca térmica elevadas, chegando a  $400 \text{ m}^2/\text{m}^3$  para líquidos ou  $700 \text{ m}^2/\text{m}^3$  para gases (Incropera, 2008).

Os trocadores de placas são formados por finas placas corrugadas espaçadas formando canais pelos quais os fluidos escoam e trocam calor. Alguns exemplos desses equipamentos são os trocadores de quadros e placas e os trocadores de placas soldadas, que podem superar os  $200 \text{ m}^2/\text{m}^3$  de superfície de troca térmica (Arsenyeva, 2016). O presente trabalho tem o seu estudo centrado nestes trocadores de placas soldadas.

Há dois tipos de problemas comuns de engenharia relacionados aos trocadores de calor. O primeiro consiste no cálculo de simulação. Neste caso o equipamento existe e as vazões e temperaturas de entrada das correntes são conhecidas, então deseja-se determinar as temperaturas de saída. O segundo refere-se ao projeto do equipamento. Este consiste em determinar seu tipo, dimensões e outros aspectos construtivos, dadas as características desejadas de entrada e saída das correntes (Incropera, 2008).

Na prática, os dois tipos de problemas estão presentes em um projeto, uma vez que simulações são realizadas ao longo do processo a fim de verificar se o equipamento candidato é adequado ao trabalho desejado. O fato é que mais de um trocador de calor pode ser viável, então normalmente o projeto é acompanhado por

um processo de otimização a fim de determinar o melhor equipamento dado algum critério de qualidade, como o custo total anualizado (TAC), por exemplo (Sinnott, 2020). Dessa forma, projeto, simulação e otimização se integram neste tipo de problema.

Por fim, é comum realizar aproximações nos modelos matemáticos a fim de facilitar a sua resolução ou tornar possível resolvê-los de forma analítica. Uma abordagem muito comum nos problemas de projeto e simulação de equipamentos térmicos é a adoção de propriedades como viscosidade, densidade, condutividade térmica e calor específico constantes no equipamento, normalmente avaliadas em alguma temperatura de referência. Entretanto, essa aproximação pode introduzir erros significativos em alguns casos (Sinnott, 2020). Um dos objetivos deste trabalho é realizar a simulação e projeto considerando a variação dessas propriedades com a temperatura ao longo do equipamento. Para isso, faz-se necessário o uso de métodos numéricos para a resolução dos modelos matemáticos sem a necessidade de recorrer a essas aproximações.

Portanto, no contexto descrito nesta seção, o presente trabalho tem por objetivo desenvolver um simulador que considera a variação das propriedades dos fluidos com a temperatura e utilizá-lo na resolução de problemas de projeto de trocadores de calor de placas soldadas, visando a obtenção de soluções ótimas.

## 1.2. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O presente trabalho está organizado da seguinte forma. O primeiro capítulo faz uma apresentação geral do escopo do estudo realizado. O segundo capítulo consiste em uma revisão bibliográfica apresentando com mais detalhes o trocador de calor de placas soldadas e introduzindo alguns conceitos importantes para o total entendimento do trabalho.

O terceiro capítulo corresponde à primeira parte da metodologia. Nele é desenvolvido o modelo matemático para simulação do trocador de calor. Ao final, é obtido um conjunto de equações que permite o cálculo do coeficiente global de transferência de calor por meio de um modelo empírico e a sua utilização em um sistema de equações diferenciais parciais para cálculo das temperaturas de saída das correntes. Além disso, o modelo permite o cálculo da perda de carga de ambas as

correntes. Em ambos os casos, as propriedades físicas são consideradas funções da temperatura.

O quarto capítulo foca nos procedimentos usados na resolução do modelo proposto no capítulo anterior. Por meio do uso da técnica de discretização é possível transformar o sistema de equações diferenciais parciais obtidos no capítulo anterior em um sistema de equações algébricas. Além disso, outros métodos numéricos são incorporados a fim de resolver algumas integrais e tornar o sistema linear.

No quinto capítulo é apresentada a formulação de dois problemas de otimização, um objetivando a menor área e outro o menor custo total. Em seguida é apresentada a abordagem de resolução, que consiste na integração de dois métodos de otimização que garantem a solução ótima global, quando utilizados juntos. Com isso, conclui-se a apresentação da metodologia adotado no presente estudo.

O sexto capítulo apresenta os resultados de testes realizados no simulador e as soluções dos problemas de otimização. A primeira parte consiste nos resultados de validação do modelo. Para isso, é realizada uma série de simulações em condições que possuem solução analítica e os resultados são comparados com os obtidos por meio dessas equações. São realizados testes considerando tanto passos simples quanto passos múltiplos. A segunda parte apresenta resultados de simulações considerando propriedades constantes e variáveis. É feita uma comparação entre os perfis do coeficiente global de troca térmica e das temperaturas de saída dos fluidos nas diferentes abordagens testadas. A terceira parte apresenta um estudo de caso de projeto. Esta seção mostra o enunciado do problema e as soluções para os dois casos de função objetivo descritos no quinto capítulo. Além disso, são apresentadas algumas informações obtidas em cada etapa do processo de otimização, a fim de avaliar o seu desempenho, e é feita uma breve discussão sobre os resultados.

Por fim o sétimo capítulo consiste em uma conclusão retomando alguns assuntos importantes que foram apresentados ao longo do texto e destacando os resultados obtidos. Também é feita uma análise sobre o cumprimento dos objetivos propostos no estudo.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são abordados conceitos básicos necessários para o entendimento do trabalho. Primeiro é feita uma revisão sobre trocadores de calor, apresentando seus tipos e aprofundando sobre o trocador de calor de placas soldadas. Em seguida é realizada uma revisão sobre a determinação do coeficiente global de troca térmica. Depois é apresentado um estudo sobre balanço de energia. Na quinta seção são introduzidos conceitos sobre cálculo de perda de carga. A sexta seção é dedicada ao estudo sobre conceitos de otimização e a última seção apresenta alguns métodos numéricos que são utilizados neste trabalho.

### 2.2. TROCADORES DE CALOR

A transferência de calor entre correntes é algo comum em uma planta de processos e os equipamentos utilizados para este fim são conhecidos genericamente como trocadores de calor. Vale ressaltar que estes equipamentos podem possuir diferentes nomes a depender da sua aplicação. Neste sentido eles podem ser chamados de trocadores de calor propriamente dito, aquecedores, resfriadores, vaporizadores, evaporadores, condensadores e refervedores (Sinnott, 2020).

Para o correto entendimento desta nomenclatura é necessário definir primeiro a classificação dos tipos de correntes presentes em um processo. As correntes em uma planta de processo podem ser separadas em duas categorias: correntes de processo e correntes de utilidades. As correntes de processo são aquelas que envolvem a ligação da alimentação de matérias primas aos produtos, com todos os intermediários presentes nesta ligação. As correntes de utilidades são correntes presentes unicamente com a finalidade de dar suporte às operações. As utilidades mais comuns são as quentes, como o vapor de água gerado em uma caldeira, e as frias, como a água de resfriamento. Ao longo do processamento não há mistura entre correntes de processo e correntes de utilidades.

Um trocador de calor é dito ser um aquecedor quando uma utilidade quente é utilizada para aquecer uma corrente de processo. Por outro lado, quando uma utilidade fria é utilizada para resfriar uma corrente de processo, diz-se que o

equipamento é um resfriador (Sinnott, 2020). Esses nomes são utilizados quando a troca térmica não acarreta uma mudança de fase.

Por outro lado, quando uma corrente de processo é aquecida até ebulação, o equipamento pode ser classificado como vaporizador, revedor ou evaporador. O primeiro tipo corresponde ao caso em que a corrente é completamente vaporizada, mas o equipamento não está associado a uma coluna de destilação. O revedor é utilizado na mesma situação que o vaporizador, mas a diferença é que ele está conectado a uma coluna de destilação, porém nele a vaporização não necessariamente é completa. Por fim, o evaporador é utilizado quando a mudança de fase é parcial com objetivo de concentrar uma solução (Sinnott, 2020).

O condensador é utilizado quando a corrente de processo na fase vapor é resfriada por uma utilidade fria até que condense, seja associada a uma coluna de destilação ou não. Por fim o trocador de calor propriamente dito é utilizado quando a troca energética ocorre entre duas correntes de processo (Sinnott, 2020).

Além disso, pode-se classificar os trocadores de calor quanto à sua configuração de escoamento e modo construtivo, conforme apresentado na Figura 2.1 (Ganesh Kumar, 2024).

**Figura 2.1 – Classificação de trocadores de calor**

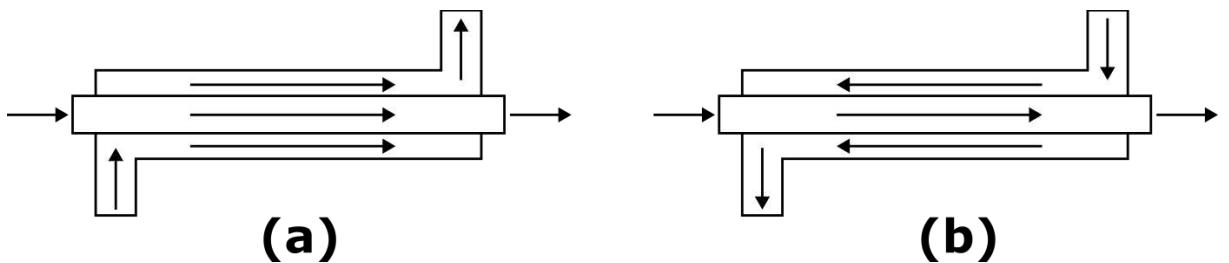


Fonte: elaboração própria. Baseado em GaneshKumar, 2024

Conforme pode ser visto na Figura 2.1, os trocadores de calor podem ser divididos em quatro grandes grupos: regenerativos, tubulares, trocadores de placas e trocadores com área estendida, ou aletados. Nesta classificação, os tubulares e os de placas são os mais comuns na indústria (Ganesh Kumar et al, 2024).

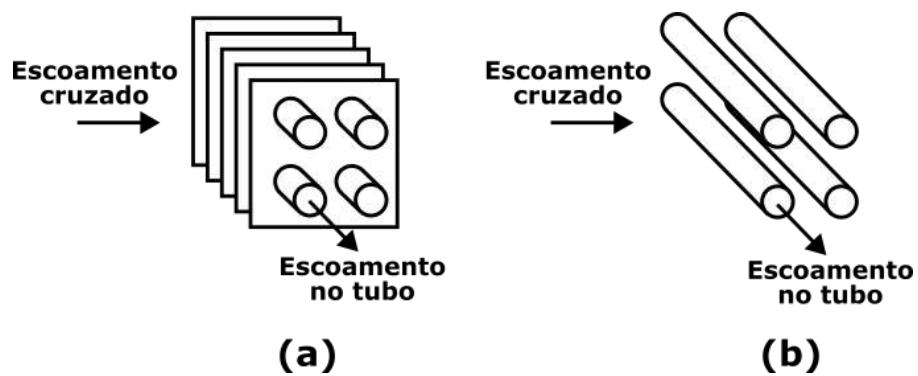
Quanto à configuração do escoamento, o mesmo pode ser classificado como paralelo, contracorrente, múltiplas passagens ou cruzado. Este último pode ainda ser classificado como misturado, quando o fluido que escoa na parte externa dos tubos pode ser misturar na direção perpendicular ao seu escoamento; ou não misturado, quando esta mistura não é possível em função da presença de placas que funcionam como aletas (Incropora, 2008). A Figura 2.2 mostra um exemplo de configuração em paralelo (a) e em contracorrente (b); a Figura 2.3 mostra os tipos de escoamentos cruzados.

**Figura 2.2 - Escoamento em paralelo (a) e em contracorrente (b)**



Fonte: elaboração própria. Baseado em Incropora, 2008

**Figura 2.3 - Escoamento cruzado não misturado (a) e misturado (b)**



Fonte: elaboração própria. Baseado em Incropora, 2008

Como pode ser visto na Figura 2.3, nos trocadores com escoamento cruzado não misturado há o impedimento da mistura ao longo da direção  $y$ , dificultando a difusão térmica nesta direção, portanto a temperatura do fluido varia de forma efetiva

nas duas direções. No segundo caso o fluido externo pode se misturar ao longo da direção y, portanto a principal variação de temperatura se dá na direção do escoamento (Incropera, 2008).

### **2.2.1. Trocadores de calor de placas**

Os trocadores de calor de placas são formados por conjuntos de placas corrugadas espaçadas entre si formando canais. Estes equipamentos possuem como principais características altos coeficientes de troca térmica e baixa taxa de incrustação devido ao alto grau de turbulência no escoamento dos fluidos (Arsenyeva, 2016).

O equipamento mais comum deste grupo é o trocador de calor de placas gaxetadas. Ele é composto por placas prensadas em um quadro formando um bloco, que é selado pelas bordas por uma gaxeta fina. Possui como principais vantagens a flexibilidade de limpeza e montagem, uma vez que os blocos podem ser desmontados e novas placas podem ser adicionadas ou retiradas, além de permitir trocas com aproximação de temperaturas (*approach*) de até 1°C. Por outro lado, o trocador de placas gaxetadas está limitado a temperaturas de até 250°C e pressões de até 30 bar, em função da presença das gaxetas (Sinnott, 2020).

Outro tipo de trocador de calor de placas é o de placas soldadas, conhecido em inglês como *Welded Plate Heat Exchanger* (WPHE). Este equipamento possui a mesma ideia do trocador de placas gaxetadas, mas a principal diferença é que suas placas são soldadas, o que permite que ele possa trabalhar a pressões de até 80 bar e temperaturas superiores a 500°C. Entretanto, por ser soldado, não permite a sua abertura para limpeza e nem apresenta a mesma flexibilidade do gaxetado em termos de mudanças em sua área (Sinnott, 2020). Outra característica importante deste trocador de calor é que o fluxo das correntes é cruzado.

### **2.2.2. Projeto de trocadores de calor**

O projeto de trocadores de calor consiste em determinar as suas características físicas de forma que seja possível definir um equipamento capaz de realizar um trabalho térmico. O básico desse processo corresponde ao cálculo da área de troca

térmica, o que pode ser feito a partir da taxa de transferência de calor definida, da configuração do escoamento adotada e do conhecimento do coeficiente global de troca térmica ( $U$ ), conforme a Equação 2.1 (Sinnott, 2020).

$$Q = U \cdot A \cdot F \cdot \Delta T_m \quad (2.1)$$

Na Equação 2.1,  $Q$  é a taxa de troca térmica,  $U$  é o coeficiente global de troca térmica,  $A$  é a área de troca térmica,  $F$  é o fator de correção da  $\Delta T_m$  e  $\Delta T_m$  é a média logarítmica das diferenças de temperatura.

O  $U$  é calculado a partir das resistências térmicas presentes entre os dois fluidos que trocam calor (Incropera. 2008). A Equação 2.2 corresponde ao cálculo genérico desse coeficiente para o caso em que dois fluidos trocam calor separados por uma barreira física.

$$\frac{1}{UA} = \frac{1}{h_f A} + \frac{R_{d,f}}{A} + R_p + \frac{1}{h_q A} + \frac{R_{d,q}}{A} \quad (2.2)$$

Na qual  $h_f$  e  $h_q$  são os coeficientes de transferência de calor por convecção para os fluidos frio e quente, respectivamente,  $R_{d,f}$  e  $R_{d,q}$  são as resistências unitárias de depósito (também chamados de fator de depósito) nos lados das correntes fria e quente, respectivamente, e  $R_p$  é o termo que representa a resistência a transferência de calor por condução na parede entre os dois fluidos. O fator de depósito corresponde a uma resistência térmica devido ao acúmulo de material sobre a superfície da parede correspondente e a forma de escrever a resistência por condução depende do formato da parede (Incropera, 2008). No caso do trocador de placas, este termo corresponde à resistência condutiva em uma placa de espessura  $t_p$ , em m, com condutividade térmica  $k_p$  em W/(K.m), podendo ser calculado pela Equação 2.3.

$$R_p = \frac{t_p}{k_p A} \quad (2.3)$$

A Equação 2.2 demanda o conhecimento dos coeficientes de troca térmica por convecção nos fluidos quentes e frios para o cálculo do  $U$ . Esses coeficientes podem ser calculados por meio de correlações empíricas em termos do número de Nusselt

( $Nu$ ) como função do número de Reynolds ( $Re$ ) e do número de Prandtl ( $Pr$ ), conforme a Equação 2.4 (Incropera, 2008).

$$Nu = C \cdot Re^m Pr^n \quad (2.4)$$

na qual  $C$ ,  $m$  e  $n$  são parâmetros a serem determinados com base em dados experimentais.

Os números Reynolds, Prandtl e Nusselt podem ser definidos de forma genérica pelas Equações 2.5 a 2.7, respectivamente (Sinnott, 2020).

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot L_e}{\mu} \quad (2.5)$$

$$Pr = \frac{C_p \mu}{k} \quad (2.6)$$

$$Nu = \frac{h L_e}{k} \quad (2.7)$$

nas quais  $\rho$  é a densidade do fluido,  $u$  é a velocidade de escoamento,  $L_e$  é o comprimento equivalente,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica,  $C_p$  é o calor específico do fluido, e  $k$  é a condutividade térmica do fluido.

Normalmente se diz que a Equação 2.1 representa a equação de projeto do método da média logarítmica. Outra forma de escrever essa equação define o chamado método da Efetividade ( $\varepsilon$ ), que envolve equações que relacionam a efetividade e o número de unidades de transferência ( $NUT$ ).

A efetividade é definida como a razão entre a taxa de transferência de calor real e taxa a máxima possível. A Equação 2.8 mostra esta definição, sendo  $\dot{Q}_{max}$  a taxa máxima de troca térmica (Incopera, 2006).

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{max}} = \frac{m_h C p_h (T_{h,e} - T_{h,s})}{C_{min} (T_{h,e} - T_{c,e})} = \frac{m_c C p_c (T_{c,s} - T_{c,e})}{C_{min} (T_{h,e} - T_{c,e})} \quad (2.8)$$

Onde  $\dot{Q}$  é a taxa de calor trocada,  $\dot{Q}_{max}$  é a máxima taxa de calor teórica alcançável,  $m_h$  e  $m_c$  são as vazões mássicas das correntes quente e fria respectivamente;  $T_{h,e}$  e  $T_{c,e}$  são as temperaturas de entrada das correntes quente e

fria;  $T_{h,s}$  e  $T_{c,s}$  são as temperaturas de saída das correntes quente e fria; e  $C_{min}$  corresponde à taxa de capacidade térmica mínima.

A taxa máxima de troca térmica é aquela que seria obtida se um dos fluidos sofresse o diferencial máximo de temperaturas disponível na troca, que é a diferença entre as temperaturas de entrada dos dois fluidos. O fluido que experimentaria a maior diferença de temperatura é aquele que possui a menor taxa de capacidade térmica  $C_{min}$ , que é definida conforme as Equações 2.9 a 2.11, na qual  $C_j$  é a taxa de capacidade térmica do fluido e  $j$  pode ser  $h$  para quente ou  $c$  para frio (Incropera, 2006).

$$C_j = m_j C p_j \quad (2.9)$$

$$C_{min} = \min(C_h, C_c) \quad (2.10)$$

$$C_{max} = \max(C_h, C_c) \quad (2.11)$$

O NUT é um número adimensional definido conforme a Equação 2.12 (Incropera, 2008):

$$NUT = \frac{UA}{C_{min}} \quad (2.12)$$

A efetividade é uma função do NUT e da razão entre  $C_{min}$  e  $C_{max}$ , definida aqui como  $C_r$ , conforme a Equação 2.13 (Incropera, 2008):

$$C_r = \frac{C_{min}}{C_{max}} \quad (2.13)$$

$$\varepsilon = f(NUT, C_r) \quad (2.14)$$

A forma da função representada pela Equação 2.14 depende da configuração do escoamento, podendo ser encontrada facilmente na literatura.

### 2.3. BALANÇO DE MASSA E ENERGIA

Os modelos matemáticos podem ser classificados de diferentes formas. Uma delas é quanto à sua natureza, onde podem ser definidos como fenomenológicos, empíricos ou híbridos. Os modelos fenomenológicos baseiam-se em balanços de massa e energia, os empíricos são oriundos de correlações matemáticas aplicadas a dados experimentais e os híbridos são obtidos pela combinação de equações de balanços e correlações empíricas (Souza e Trica, 2022).

Os balanços materiais e de energia são definidos em um sistema (volume de controle), que corresponde a uma região limitada do espaço. Dado um sistema, os balanços podem ser definidos de forma genérica conforme a Equação 2.15 (Adaptado de Souza e Trica, 2022).

$$\frac{dG}{dt} = G_e - G_s + \dot{G}_{gerado} - \dot{G}_{consumido} \quad (2.15)$$

Na qual  $G$  é uma representação genérica para massa ou energia. O termo  $\frac{dG}{dt}$  é conhecido como taxa de acúmulo,  $G_e$  e  $G_s$  são taxas de entrada e saída através das fronteiras do sistema e  $\dot{G}$  são taxas de geração ou consumo dessa grandeza. A taxa de acúmulo é nula em modelos estacionários, ou seja, aqueles em que as propriedades não variam com o tempo (Souza e Trica, 2022).

Segue uma análise mais detalhada sobre os dois tipos de balanços.

#### 2.3.1. Balanço de massa

O balanço de massa ou matéria pode ser representado seguindo o modelo da Equação 2.15 da seguinte forma,

$$\frac{d(m)}{dt} = \rho_e(t)F_e(t) - \rho_s(t)F_s(t) + \dot{m} \quad (2.16)$$

Na qual  $V$  é o volume do sistema,  $\rho$  é a densidade,  $F$  é a vazão volumétrica e  $\dot{m}$  é a taxa de geração ou consumo da matéria, se for geração  $\dot{m} > 0$ , caso contrário  $\dot{m} < 0$ . O  $t$  entre parênteses indica que a variável é função do tempo, ou seja, este é um modelo genérico dinâmico. Este modelo poderia ser utilizado para descrever o

regime transitório de um reator contínuo de tanque agitado, também conhecido como *Continuous Stirred Tank Reactor* (CSTR), (Adaptado de Souza e Trica, 2022). Muitas vezes o objetivo é o modelo estacionário, onde as propriedades são constantes no tempo. Nestes casos, a Equação 2.16 fica.

$$0 = \rho_e F_e - \rho_s F_s + \dot{m} \quad (2.17)$$

Por fim, nem todo sistema possui geração ou consumo de matéria. Normalmente estes termos são comuns apenas em reatores, onde são escritos em termos de componentes e não da massa global. Nos casos em que não há reação, pode-se eliminar o termo de geração/acúmulo ficando.

$$0 = \rho_e F_e - \rho_s F_s \quad (2.18)$$

As Equações 2.6 a 2.18 são utilizadas na modelagem de diversos tipos de sistemas. No caso em estudo é utilizado um modelo parecido com o da Equação 2.18, uma vez que se trata de um modelo em regime permanente e sem reação química.

### 2.3.2. Balanço de energia

O balanço de energia pode ser representado genericamente pela Equação 2.19.

$$\frac{d(\rho V e)}{dt} = \rho_e(t) F_e(t) e_e(t) - \rho_s(t) F_s(t) e_s(t) + \dot{Q}(t) + \dot{W} \quad (2.19)$$

na qual  $e$  é a energia intensiva por unidade de massa,  $\dot{Q}$  é o calor trocado e  $\dot{W}$  é o trabalho trocado.

A energia total do sistema pode ser escrita como a soma das energias interna, potencial gravitacional e cinética, conforme a Equação 2.20 (Souza e Trica, 2022).

$$e = e_U + e_z + e_k \quad (2.20)$$

Na qual  $e_U$  é a energia interna,  $e_z$  é a energia potencial gravitacional e  $e_k$  é a energia cinética. Todas por unidade de massa. As Equações 2.21 e 2.22 apresentam as energias potencial gravitacional e cinética intensivas.

$$e_z = gz \quad (2.21)$$

$$e_k = \frac{1}{2} u^2 \quad (2.22)$$

É comum não haver grande variação de velocidade de escoamento e alturas nos pontos de alimentação e descarga dos equipamentos industriais. Nestas situações pode-se aproximar a energia total ao valor da energia interna (Souza e Trica, 2022). Além disso, o trabalho pode ser escrito em termos da força exercida pelo fluido na entrada e na saída do sistema, conforme a Equação 2.23:

$$\dot{W} = \rho_e F_e(Pv)_e - \rho_s F_s(Pv)_s \quad (2.23)$$

na qual  $v$  é o volume específico e  $P$  a pressão. Com as considerações feitas anteriormente, a Equação 2.19 fica:

$$\frac{d(\rho V e_U)}{dt} = \rho_e(t) F_e(t) (e_{U,e}(t) + P_e V_e) - \rho_s(t) F_s(t) (e_{U,s}(t) + P_s V_s) + \dot{Q}(t) \quad (2.24)$$

A Equação 2.24 pode ser escrita em termos de entalpia, cuja forma intensiva é definida conforme a Equação 2.25.

$$e_H = e_U + Pv \quad (2.25)$$

Substituindo a Equação 2.25 na 2.24 e isolando a energia interna na Equação 2.25, e substituindo na 2.24 resulta em:

$$\frac{d(\rho V (e_H - Pv))}{dt} = \rho_e(t) F_e(t) e_{H,e}(t) - \rho_s(t) F_s(t) e_{H,s}(t) + \dot{Q}(t) \quad (2.26)$$

A Equação 2.26 é um bom exemplo do balanço que será feito durante o desenvolvimento do modelo do trocador de calor de placas soldadas no presente trabalho. Entretanto, é comum a aplicação de algumas aproximações em problemas de engenharia a fim de tornar o modelo mais fácil ou mesmo possível de se resolver analiticamente. Souza e Trica (2022) apresentaram um exemplo clássico de balanço de energia que consiste na modelagem de um tanque agitado contendo uma corrente de entrada e uma de saída, e uma resistência para promoção do aquecimento. As seguintes hipóteses são feitas: propriedades constantes; mistura perfeita e isotrópica; perda de calor para o ambiente desprezível; vazões de entrada e de saída iguais, o que acarreta volume constante no interior do tanque; e pressão constante. Com essas aproximações a Equação 2.26 fica:

$$\rho V \frac{de_H}{dt} = \rho F e_{H,e}(t) - \rho F e_{H,s}(t) + \dot{Q}(t) \quad (2.27)$$

A entalpia à pressão constante pode ser escrita da seguinte forma.

$$e_H = C_p(T - T_{ref}) \quad (2.28)$$

na qual  $T$  é a temperatura do ponto e  $T_{ref}$  é uma temperatura de referência. Sendo  $T_{ref}$  constante temos que.

$$\rho V \frac{de_H}{dt} = \rho V \frac{d(C_p(T - T_{ref}))}{dt} = \rho V C_p \frac{dT}{dt} \quad (2.29)$$

Substituindo as Equações 2.28 e 2.29 na 2.27 resulta na seguinte expressão:

$$\rho V C_p \frac{dT}{dt} = \rho F C_p (T_e(t) - T_{ref}) - \rho F C_p (T_s(t) - T_{ref}) + \dot{Q}(t) \quad (2.30)$$

Colocando os termos constantes em evidência, fica:

$$\rho V C_p \frac{dT}{dt} = \rho F C_p (T_e(t) - T_s(t)) + \dot{Q}(t) \quad (2.31)$$

A Equação 2.31 corresponde ao comportamento da temperatura no sistema apresentado como exemplo. Essa é uma forma do balanço de energia muito comum em problemas de modelagem estudados na graduação.

## 2.4. PERDA DE CARGA

A perda de carga corresponde à energia perdida na forma de calor devido ao atrito de um fluido escoando (Fox, 2014). O seu cálculo mais comum é aplicado ao escoamento interno em dutos por meio da equação da energia mecânica, também conhecida como equação de Bernoulli, conforme a Equação 2.32:

$$\left( \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\underline{u}_1^2}{2g} + z_1 \right) - \left( \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\underline{u}_2^2}{2g} + z_2 \right) = H_{l,T} \quad (2.32)$$

na qual  $H_{l,T}$  corresponde à perda de carga total. Na Equação 2.32, cada termo possui unidade de energia por peso de fluido escoando, cuja dimensão é comprimento, relacionado ao fluido envolvido. A perda de carga total pode ser representada pela soma de dois termos: as perdas maiores (ou distribuídas) ( $H_l$ ) devido ao atrito no escoamento em dutos de seção constante; e as perdas localizadas ( $H_{l,m}$ ), que são causadas por entradas, saídas, variações na tubulação e outros acessórios ao longo do escoamento (Fox, 2014).

A perda de carga distribuída pode ser calculada analiticamente para o caso de um escoamento totalmente desenvolvido em regime laminar. Entretanto, no caso de um escoamento turbulento, são necessários resultados experimentais (Fox, 2014). Em ambos os tipos de escoamento, pode-se chegar à Equação 2.33 para o cálculo desse termo por meio de análise dimensional.

$$H_l = f \frac{L}{D} \frac{\underline{u}^2}{2g} \quad (2.33)$$

Na qual  $f$  é o fator de atrito,  $L$  é o comprimento do duto e  $D$  é o diâmetro do duto. O fator de atrito pode ser calculado analiticamente para o escoamento laminar, mas necessita de dados experimentais para o regime turbulento. Entretanto, a análise dimensional indica que ele é função do número de Reynolds e da rugosidade relativa  $(\frac{\varepsilon}{D})$ . A Equação 2.34 apresenta o fator de atrito de Darcy.

$$f = \begin{cases} \frac{64}{Re}, & \text{se laminar} \\ f\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right), & \text{se turbulento} \end{cases} \quad (2.34)$$

## 2.5. OTIMIZAÇÃO

Os problemas de engenharia podem ser descritos por sistemas matemáticos, que apresentam um conjunto de equações e variáveis a serem determinadas. Os sistemas podem apresentar diferentes comportamentos quanto à sua solução. A fim de avaliar estes casos, define-se uma variável chamada grau de liberdade, que corresponde à diferença entre o número de variáveis e o de equações independentes. Dessa forma, quando o grau de liberdade é menor que zero, ou seja, quando há mais equações do que variáveis, o sistema não possui solução; quando o grau de liberdade é igual a zero, o sistema possui solução única; e quando o grau de liberdade é maior que zero, o problema admite mais de uma solução (Perlingeiro, 2018). Estes casos são resumidos na Tabela 2.1.

**Tabela 2.1 -Tipos de sistemas quanto ao número de soluções.**

Grau de liberdade	Soluções
Menor que zero	Sem solução
Igual a zero	Solução única
Maior que zero	Múltiplas soluções

Fonte: elaboração própria.

Os problemas de avaliação e simulação apresentam sistemas sem grau de liberdade, logo possuem apenas uma solução. Os de projeto, por outro lado, geralmente possuem mais variáveis do que equações, resultando em sistemas com grau de liberdade positivo. Em outras palavras, mais de um equipamento satisfaz o problema em questão. Neste caso, é interessante selecionar o candidato que

maximize ou minimize o valor de um dado critério de qualidade, procedimento que caracteriza um problema de otimização (Perlingeiro, 2018).

O critério de qualidade apresentado acima é conhecido como função objetivo. Há alguns objetivos comuns em projetos de engenharia, conforme apresentado na Tabela 2.2 adaptada de Sinnott, 2020.

**Tabela 2.2 -Objetivos típicos de otimização de projetos.**

Maximiza	Minimiza
Valor presente líquido	Custo do projeto
Taxa de retorno	Custo de produção
Viabilidade da planta	Custo total anualizado (TAC)

Fonte: Adaptado de Sinnott, 2020.

### **2.5.1. Estrutura de um problema de otimização**

Os problemas de otimização apresentam os seguintes elementos: variáveis de decisão, critério, função objetivo, restrições e região viável (Perlingeiro, 2018).

As variáveis de decisão são as que não foram especificadas, ou seja, são as variáveis cujos valores devem ser determinados. Elas correspondem em número ao grau de liberdade do problema e são as variáveis manipuladas durante a solução a fim de se obter o valor ótimo do critério de qualidade (Perlingeiro, 2018).

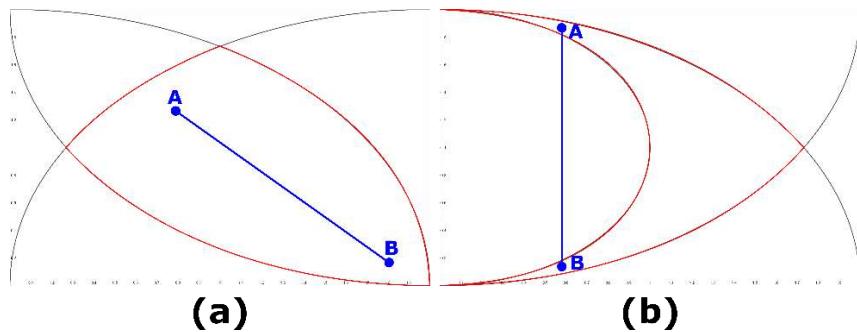
O critério define a solução ótima do problema e normalmente é de natureza econômica, conforme os apresentados na Tabela 2.2. Os problemas de otimização podem possuir mais de um critério, que podem possuir diferentes pesos a depender de sua importância (Perlingeiro, 2018).

A função objetivo é a expressão matemática que corresponde ao critério de otimização do problema (Perlingeiro, 2018). Esta função impacta diretamente na forma de abordagem do problema e nas suas chances de sucesso. Portanto é importante analisá-la antes de se resolver o problema em questão. Por isso, deve-se atentar a três aspectos dessa função: continuidade, modalidade e convexidade (Perlingeiro, 2018). Estes aspectos são discutidos na próxima subseção.

As restrições correspondem a limitações definidas por leis naturais às quais o sistema deve obedecer. Elas podem ser de dois tipos: igualdades ou desigualdades. As restrições delimitam a região viável, também conhecida como região de busca. Vale ainda ressaltar que a região viável pode ser classificada quanto à sua

convexidade (Perlingeiro, 2018). A Figura 2.6 mostra um exemplo de região convexa (a) e não convexa (b), ambas delimitadas por restrições de desigualdade de forma que a área de contorno vermelho corresponde à região viável. Quando a ligação entre quaisquer dois pontos da região viável atravessa uma região não viável, a região é definida como não convexa.

**Figura 2.4 – Região viável convexa (a) e não convexa (b)**



Fonte: elaboração própria. Baseada em Perlingeiro, 2018

### 2.5.2. Características da função objetivo

Conforme visto na Seção 2.5.1, a função objetivo pode ser classificada quanto a três características: continuidade, modalidade e convexidade.

A continuidade define a forma da função objetivo. Nesse sentido ela pode ser contínua, descontínua ou discreta. O primeiro ocorre quando a função não possui saltos ao longo do seu domínio. Do ponto de vista matemático, isso ocorre quando o limite da função em um ponto é igual ao seu valor naquele ponto, se aplicando para todo o domínio da função (Stewart, 2013). A Equação 2.35 resume esta afirmação onde  $Dm$  é o domínio da função.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (2.35)$$

$\forall a \in Dm$

A função objetivo (FO) é descontínua quando apresenta saltos, ou seja, há pontos de descontinuidade. Por fim, a função é discreta quando a variável de decisão pode assumir apenas alguns valores bem definidos (Perlingeiro, 2018). O domínio não é um intervalo, mas sim um conjunto de pontos.

Quanto à modalidade, uma função pode ser definida como unimodal ou multimodal. A primeira ocorre quando há apenas um ponto de máximo ou mínimo. A segunda ocorre quando há mais de um ponto de máximo ou mínimo. Neste caso, um é global e os demais são ditos locais. Funções multimodais apresentam dificuldades para solução, uma vez que podem convergir para ótimos locais, não resultando no melhor resultado possível (Perlingeiro, 2018).

A convexidade é uma característica de algumas funções unimodais. No caso em que há apenas uma variável de decisão, pode-se facilmente definir uma função como côncava quando o seu valor é sempre maior do que o da reta ligando dois pontos de sua curva; por outro lado, ela é convexa quando ocorre o contrário (Perlingeiro, 2018). Vale ressaltar que do ponto de vista matemático, a convexidade pode ser definida por meio da segunda derivada da função. Se for maior que zero é convexa, se for menor que zero é côncava.

A convexidade em funções com múltiplas variáveis é definida por meio da matriz Hessiana  $H(x)$ . Essa matriz é definida por meio das segundas derivadas da função em relação às variáveis de decisão (Perlingeiro, 2018).

### **2.5.3. Apresentação do problema de otimização**

Um problema de otimização é apresentado indicando a função objetivo, o tipo de otimização, se é uma maximização ou minimização; e às restrições às quais o problema está sujeito. A Equação 2.36 mostra um esquema genérico:

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(x) \\ & \text{s.a.: } g(x) \leq 0 \\ & \quad h(x) = 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

na qual  $f(x)$  é a função objetivo e  $\text{Min}$  indica que se deseja minimizá-la.  $g(x)$  são restrições de desigualdades e  $h(x)$  são igualdades. O termo s.a. indica que a função acima está sujeita às restrições abaixo (Perlingeiro, 2018).

### **2.5.4. Tipos de problemas de otimização**

Um problema de otimização pode ser definido de diferentes formas a depender dos tipos de variáveis e equações que o formam. Essas características definem os

métodos de otimização adequados para a sua solução. Dessa forma, um problema pode ser escrito com uma Programação Linear, em inglês *Linear Programming* (LP); uma Programação não Linear, em inglês *Non-Linear Programming* (NLP); ou Programação Mista, que envolve variáveis contínuas e discretas e pode ser linear, em inglês *Mixed-Integer Linear Programming* (MILP); ou não linear, em inglês *Mixed-Integer Non-Linear Programming* (MINLP) (Sinnott, 2020).

Diferentes algoritmos estão disponíveis para solução de problemas de otimização. Eles são chamados de *Solvers*. Cada um é projetado para lidar com determinados tipos de programação. Por exemplo, o SIMPLEX é um solver muito utilizado na solução de problemas de programação linear (Sinnott, 2020).

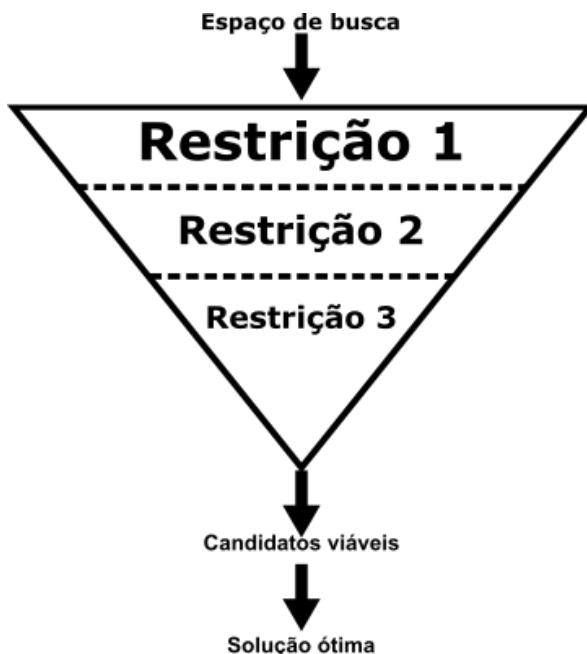
Este estudo utiliza dois métodos de otimização acoplados, o *Set Trimming* e o *Smart Enumeration*. A seguir é feita uma breve introdução a esses métodos.

### **2.5.5. Set Trimming**

*Set Trimming* é um método ou técnica de otimização desenvolvido para solução de problemas contendo apenas variáveis de decisão discretas. Portanto ele é aplicável a problemas MILP e MINLP (Costa e Bagajewicz, 2019).

Essa técnica consiste na redução da região viável por meio da aplicação de restrições de desigualdade seguido da ordenação do conjunto de candidatos quanto ao valor da função objetivo e posterior escolha do candidato com menor função objetivo (*FO*), no caso de uma minimização por exemplo (Costa e Bagajewicz, 2019). Uma vez que a seleção da solução ocorre após a ordenação de todos os candidatos quanto aos seus respectivos valores de *FO*, pode-se garantir que o ótimo é global. Esse método funciona por meio da manipulação de conjuntos, como se filtros fossem aplicados removendo os candidatos inviáveis. A Figura 2.10 mostra um exemplo do comportamento do conjunto de candidatos ao longo do processo.

**Figura 2.5 – Aplicação do Set Trimming**



Fonte: elaboração própria. Baseado em Nahes, 2021

O exemplo da Figura 2.10 é muito parecido com o caso utilizado no presente trabalho. Nele cada estrato do funil corresponde à aplicação de uma restrição de desigualdade. Ao final do processo, sobram apenas candidatos viáveis.

Vale ressaltar que todo o processo parte da premissa de ser possível aplicar as restrições de forma simples a todo o conjunto. Entretanto, há casos em que essas equações são complexas e, portanto, o *Set Trimming* não pode ser utilizado de forma completa. Neste caso pode-se aplicar uma variação conhecida como *Proxy* ou *Partial Set Trimming*, que consiste no uso de versões relaxadas dessas restrições, que podem ser limites inferiores ou superiores, em inglês *Lower Bound* (LB) e *Upper Bound* (UB), respectivamente (Nahes, 2023). Neste caso, o conjunto final contém todos os candidatos viáveis, mas também alguns inviáveis que não foram eliminados devido ao fato de as versões relaxadas das restrições serem menos restritivas do que as originais.

Aplicado o *Set Trimming*, torna-se então necessário aplicar um método de enumeração a fim de avaliar os candidatos restantes para definir o ótimo (Nahes et al, 2023). Um método que pode ser aplicado neste procedimento é o *Smart Enumeration*.

### 2.5.6. Smart Enumeration

*Smart Enumeration* é uma derivação do método da Enumeração Sucessiva que, ao contrário da original, tem por objetivo definir a solução ótima sem a necessidade de testar todos os candidatos (Costa e Bagajewicz, 2019).

Há três pontos principais nessa técnica. O primeiro é o fato de que o conjunto de candidatos deve ser ordenado quanto à função objetivo ou a sua versão relaxada, conforme discutido na Seção 2.5.5. O segundo é o critério de parada e o terceiro é o incumbente. Estes dois últimos são discutidos em mais detalhes nos próximos parágrafos.

O incumbente corresponde ao candidato viável com menor valor da função objetivo até o momento ao longo do processo de busca, considerando um problema de minimização (Costa e Bagajewicz, 2019). Ele é o alvo de comparação nos critérios de parada e deve ser atualizado sempre que um candidato apresentar uma *FO* menor que a dele.

Quanto ao critério de parada, ele pode ocorrer em duas situações. A primeira é quando não há mais candidatos a serem testados. A segunda ocorre quando a *FO* do candidato a ser testado ou a sua *LB* é maior do que a *FO* do incumbente. Neste caso, pode-se parar o processo e o incumbente é a solução. Isso é possível porque o conjunto é ordenado, logo todos os candidatos posteriores a esse apresentarão *FO* necessariamente maior do que o atual. Então pode-se garantir que o melhor resultado é o incumbente (Nahes , 2023). Esse é o critério que torna a *Smart Enumeration* mais rápida do que um método de enumeração convencional.

A seguir é descrito o algoritmo apresentado por Nahes (2023) para a *Smart Enumeration*.

1. Avaliar a função objetivo dos candidatos ou sua *LB*;
2. Iniciar a *FO* do incumbente como infinito;
3. Ordenar o conjunto em ordem crescente do valor da *FO* ou sua *LB*;
4. Iniciar um contador. Exemplo  $i = 1$ ;
5. Se o conjunto de candidatos é nulo, parar e o incumbente é a solução;
6. Pegar o candidato  $i$  no conjunto;
7. Avaliar se a *FO* do incumbente é menor ou igual à do candidato ou sua *LB*. Se for o caso, parar e o incumbente é a solução;
8. Resolver o modelo matemático para o candidato  $i$

9. Se o candidato for inviável, pular para o passo 12
10. Avaliar a  $FO$  do candidato  $i$
11. Se a  $FO$  do candidato  $i$  for menor do que a do incumbente, o candidato passa a ser o incumbente e a  $FO$  dele é atualizada;
12. Eliminar o candidato do conjunto;
13. Aumentar o contador em uma unidade, ou seja,  $i = i + 1$ ;
14. Voltar ao passo 5.

## 2.6. MÉTODOS NUMÉRICOS

Como será visto no Capítulo 3, o modelo a ser construído é composto por um sistema de equações diferenciais parciais. Além disso, algumas equações apresentam integrais a serem resolvidas. Nem sempre estes cálculos são possíveis de serem resolvidos de forma analítica. Inclusive este é um dos motivos de se aplicar aproximações. Portanto, a fim de resolver esses sistemas, torna-se necessário recorrer a métodos numéricos que permitam realizar esses cálculos.

Três tipos de métodos numéricos são necessários para a resolução do modelo proposto no presente trabalho: a discretização de equações diferenciais, a linearização de funções e o cálculo de integrais. A seguir é feita uma breve revisão sobre eles.

### 2.6.1. Discretização

Discretização é uma técnica que tem por objetivo transformar um sistema de equações diferenciais em um sistema algébrico. Isso é feito por meio da aproximação das derivadas por diferenças finitas, além de subdividir o domínio contínuo da função em pontos discretos (Ruggiero e Lopes, 2000).

Essa técnica é muito utilizada na resolução de problemas de valor de contorno, cuja forma genérica pode ser escrita conforme a Equação 2.37 (Ruggiero e Lopes, 2000):

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ a_1y(a) + b_1y'(a) = \gamma_1 \\ a_2y(b) + b_2y'(b) = \gamma_2 \end{cases} \quad (2.37)$$

Na qual  $a_1, a_2, b_1, b_2, \gamma_1$  e  $\gamma_2$  são constantes conhecidas, de forma que nem  $a_1$  e  $b_1$ , nem  $a_2$  e  $b_2$  são nulas simultaneamente (Ruggiero e Lopes, 2000). O domínio dessa função é o intervalo  $[a, b]$ .

O primeiro passo para a discretização consiste em dividir o domínio contínuo em pontos discretos espaçados igualmente. Seja  $n$  o número de pontos e  $h$  o comprimento do intervalo entre os pontos, temos que se  $x_1 = a$ ,  $x_n = b$  então  $h = \frac{b-a}{n-1}$ . Portanto, qualquer ponto no intervalo pode ser escrito conforme a Equação 2.38.

$$x_i = x_1 + h(i - 1) \text{ e } y_i = y(x_i) = y(x_1 + h(i - 1)) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.38)$$

Se a função  $f(x, y, y')$  for linear, o sistema resultante é linear. Caso contrário, o sistema será não linear (Ruggiero e Lopes, 2000). Neste último caso, pode-se linearizar o sistema a fim de torná-lo linear, conforme será apresentado na próxima subseção.

O próximo passo consiste em aproximar as derivadas por diferenças finitas. Há várias abordagens possíveis. As mais simples são a diferença para frente, a para trás e a central, que são apresentadas nas Equações 2.39 a 2.41 respectivamente.

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (2.39)$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad (2.40)$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad (2.41)$$

Vale ressaltar que as Equações 2.39 a 2.41 não são igualdades, mas sim aproximações. Portanto, elas apresentam um erro associado, assim como todo método numérico. Os livros de cálculo numérico apresentam uma análise detalhada a fim de determinar esses erros, que neste caso é feita comparando-se a aproximação com a expansão em série de Taylor correspondente. Resumindo, as diferenças para trás e para frente possuem erro na ordem de  $h$ , enquanto a diferença central possui erro na ordem de  $h^2$  (Ruggiero e Lopes, 2000). Portanto, diz-se que as duas primeiras são métodos de ordem 1, enquanto a segunda é de ordem 2, que são os expoentes

de  $h$  no erro. Como os valores de  $h$  são normalmente inferiores a 1, quanto maior a ordem, menor o erro. Então o método de diferença central possui erro menor que os outros dois.

### 2.6.2. Linearização

A linearização é um caso específico de uma aproximação de função por uma série de potências. Seja  $f(x)$  a função a ser aproximada. Ela deve ser contínua e deve possuir  $n$  derivadas no intervalo  $[a, b]$  e  $x_0$  é um ponto nesse intervalo. Então pode-se escrever essa função conforme a Equação 2.42 (Secchi e Biscaia, 2020):

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \quad (2.42)$$

na qual  $p_n(x)$  é o polinômio de Taylor de grau  $n$  e  $R_n(x)$  é o resíduo. O polinômio  $p_n(x)$  é resultado do truncamento da expansão em série de Taylor da função  $f(x)$  centrada em  $x_0$  em um termo de grau  $n$ , e o resíduo corresponde ao erro desse truncamento. A Equação 2.43 mostra a forma do polinômio de Taylor e a Equação 2.44 mostra a expressão para o resíduo (Secchi e Biscaia, 2020).

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[\xi(x)]}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \quad (2.44)$$

Na Equação 2.44  $\xi(x)$  é uma função de  $x$  que permite calcular o erro proveniente de todos os outros infinitos termos da série de Taylor em um único termo. Isso é feito por meio da aplicação do teorema do valor médio (Secchi e Biscaia, 2020).

A linearização é feita truncando o polinômio de Taylor no termo de grau 1, ou seja:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2.45)$$

Este método é utilizado neste trabalho para linearizar funções não lineares que surgem no processo de cálculo de temperatura de mistura.

### 2.6.3. Cálculo de integrais numéricas

Muitas integrais não são possíveis de serem resolvidas analiticamente e em alguns casos é desejável realizar a integração, mas apenas pontos são conhecidos e não a função matemática que deu origem a eles. Nestes casos é interessante utilizar um método de integração numérica para resolução do problema.

Há alguns métodos disponíveis para este fim, mas um dos mais utilizados é a regra 1/3 de Simpson. Ela consiste na aproximação da função a ser integrada por um polinômio de grau 2. Para isso, são necessários 3 pontos igualmente espaçados. Em seguida é feita a integral do polinômio, que é mais fácil de ser obtida analiticamente. O resultado é mostrado na Equação 2.46 (Ruggiero e Lopes, 2000).

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)] \quad (2.46)$$

O erro ( $E$ ) dessa integral é dado pela Equação 2.47.

$$E = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(c) \quad c \in (x_1, x_3) \quad (2.47)$$

Neste caso, pode-se observar que se trata de um método de ordem 5. Entretanto, com apenas 3 pontos, os pontos podem ficar muito espaçados e consequentemente o erro é grande. Então uma abordagem é utilizar a regra 1/3 de Simpson repetida ou composta, que consiste em dividir o domínio em mais subintervalos de 3 pontos, e realizar as integrações em cada subintervalo e depois somá-las (Ruggiero e Lopes, 2000). Este método demanda um número ímpar de pontos para ser aplicado, e essa é uma restrição que será destacada na resolução do modelo a ser construído. A Equação 2.48 mostra a expressão final para este método para o caso de um intervalo de  $m$  pontos, tal que  $[x_1, x_m]$ .

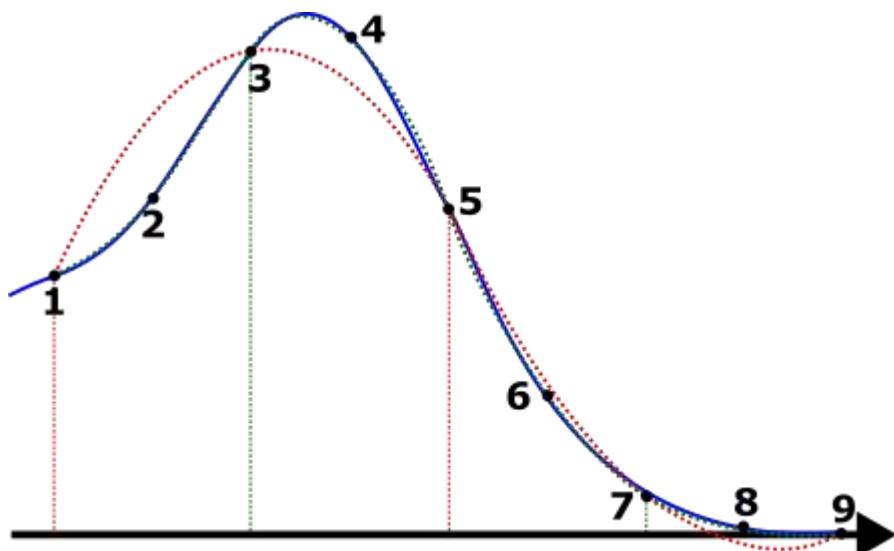
$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{h}{3} \{ [f(x_1) + f(x_m)] + 4[f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{m-1})] + 2[f(x_3) + f(x_5) + \dots + f(x_{m-2})] \} \quad (2.48)$$

A Equação 2.48 parece complexa, mas pode ser resumida da seguinte forma. Os pontos das extremidades são multiplicados por 1, os pontos internos pares são multiplicados por 4 e os ímpares são multiplicados por 2, soma-se tudo e multiplica o resultado por  $h/3$ . A Equação 2.49 mostra o erro dessa abordagem.

$$E = -\frac{mh^5}{180} f^{(iv)}[\xi(x)] \quad (2.49)$$

A Figura 2.12 mostra um exemplo gráfico da interpolação feita nesse método. A curva azul é a que se deseja integrar. A curva vermelha é composta por duas parábolas oriundas de interpolação com os pontos 1, 3 e 5 na primeira e 5, 7 e 9 na segunda. Essas parábolas são integradas e os resultados são somados. A curva azul pontilhada mostra um outro exemplo em que são utilizadas 4 parábolas, uma com os pontos 1, 2 e 3; outra com os pontos 3, 4 e 5; outra com os 5, 6 e 7; e por fim uma com os pontos 7, 8 e 9. É perceptível que a interpolação se aproxima mais da curva original e consequentemente a sua integral também (Secchi e Biscaia, 2020).

**Figura 2.6 – Regra 1/3 de Simpson**



Fonte: elaboração própria. Baseada em Secchi e Biscaia, 2020

### 3. MODELO MATEMÁTICO

#### 3.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta o desenvolvimento do modelo matemático a ser resolvido a fim de simular o trocador de calor de placas soldadas. O modelo tem por objetivo descrever o comportamento de duas grandezas: a temperatura e a perda de carga. A primeira seção consiste na definição de algumas variáveis auxiliares que são utilizadas ao longo do trabalho. A segunda parte apresenta o balanço de energia que permite calcular a temperatura do fluido em vários pontos ao longo do equipamento. Por fim, a última seção desenvolve os cálculos para se obter o mesmo nível de detalhe para a pressão.

#### 3.2. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O primeiro passo para a construção do modelo é a definição de um sistema de coordenada e a forma de se identificar os canais do equipamento. Conforme apresentado na Seção 2.2.1, o trocador de calor de placas soldadas apresenta as correntes em fluxo cruzado. Portanto, uma primeira consideração a ser feita é definir a direção do escoamento de cada corrente. Aqui convenciona-se que a corrente quente escoa ao longo do eixo x, enquanto a fria escoa ao longo do y.

Será adotada a seguinte notação ao longo do texto. Toda grandeza que possuir um acento circunflexo é um parâmetro, ou seja, é uma grandeza conhecida. Por exemplo, em uma simulação, o comprimento do lado da placa é um parâmetro e, portanto, recebe o acento; em um caso de projeto passa a ser uma variável, perdendo o acento; mas trata-se da mesma grandeza.

Quanto às variáveis geométricas do equipamento, serão consideradas placas quadradas de lado  $\hat{L}_p$ , espessura  $\hat{t}_p$  e com ângulo de corrugação  $\hat{\beta}$ . As placas são espaçadas entre si por um comprimento  $\hat{\delta}$ . O trocador possui  $\hat{N}_p$  placas e  $\hat{N}_c$  canais que são formados pelos espaços entre as placas, de forma que o número de canais é dado pela relação descrita na Equação 3.1.

$$\hat{N}_c = \hat{N}_p - 1 \quad (3.1)$$

Quanto aos fluidos, cada um possui um dado número de passes representados por  $\hat{N}_{ph}$  para o fluido quente e  $\hat{N}_{pc}$  para o frio. Eles são alocados globalmente em contracorrente, ou seja, um entra no equipamento por um bocal superior e outro por um inferior. O número de passes é contabilizado a partir da entrada do fluido quente, logo ele entra no seu primeiro passe enquanto o frio entra pelo seu último passe. Seja  $N_{ch}$  e  $N_{cc}$  o número total de canais pelos quais o fluido quente e frio escoam, respectivamente ( $N_{ch} + N_{cc} = N_c$ ); estes valores dependem de qual dentre eles escoa no primeiro canal conforme a Equação 3.2, onde  $j$  pode ser  $h$  para o fluido quente ou  $c$  para o frio. *floor* corresponde à operação matemática de arredondamento para o inteiro inferior e *ceil* é o arredondamento para o inteiro superior.

$$\hat{N}_{cj} = \begin{cases} \text{ceil}\left(\frac{\hat{N}_c}{2}\right), & \text{se escoa no primeiro canal} \\ \text{floor}\left(\frac{\hat{N}_c}{2}\right), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.2)$$

Sejam  $f_h$  e  $f_c$  um passe qualquer do fluido quente e frio, respectivamente. O número de canais em cada passe para cada fluido é dado por  $\hat{N}_{cph,f_h}$  e  $\hat{N}_{cpc,f_c}$  para o fluido quente e frio, respectivamente, e é descrito pelas Equações 3.3 e 3.4 abaixo, onde  $a \ mod \ b$  corresponde ao resto da divisão de  $a$  por  $b$ .

$$\hat{N}_{cph,f_h} = \begin{cases} \text{floor}\left(\frac{\hat{N}_{ch}}{\hat{N}_{ph}}\right), & (\hat{N}_{ch} \ mod \ \hat{N}_{ph}) = 0 \ \vee f_h > (\hat{N}_{ch} \ mod \ \hat{N}_{ph}) \\ \text{floor}\left(\frac{\hat{N}_{ch}}{\hat{N}_{ph}}\right) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\hat{N}_{cpc,f_c} = \begin{cases} \text{floor}\left(\frac{\hat{N}_{cc}}{\hat{N}_{pc}}\right), & (\hat{N}_{cc} \ mod \ \hat{N}_{pc}) = 0 \ \vee f_c \leq N_{pc} - (\hat{N}_{cc} \ mod \ \hat{N}_{pc}) \\ \text{floor}\left(\frac{\hat{N}_{cc}}{\hat{N}_{pc}}\right) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.4)$$

As Equações 3.3 e 3.4 podem ser resumidas da seguinte forma. Em um caso de divisão não inteira entre o número de canais e o número de passes, os passes por onde o fluido escoa primeiro possuem um canal a mais. No caso do fluido quente são

os primeiros passes, enquanto no frio são os últimos. Por exemplo, se o fluido quente possuir dois passes e sete canais ao todo, o primeiro passe possui 4 canais e o último possui 3; o mesmo caso para o frio resulta que o primeiro canal possui 3 enquanto o último possui 4.

Sejam  $S_{h,f_h}$  e  $S_{c,f_c}$  os conjuntos de canais pertencentes a um dado passe para o fluido quente e frio respectivamente. Eles relacionam um canal de índice  $i$  com o passe a que pertence e são definidos conforme as Equações 3.5 a 3.8, a depender do fluido que escoa no primeiro canal.

Se o fluido frio escoa pelo primeiro canal:

$$S_{c,f_c} = (i, f_c) = \left\{ 2 \cdot \left( \sum_{f'_c=1}^{p'-1} N_{cpc,f'_c} \right) < i \leq 2 \cdot \left( \sum_{f'_c=1}^{p'} N_{cpc,f'_c} \right), i \bmod 2 = 1 \right\} \quad (3.5)$$

$$S_{h,f_h} = (i, f_h) = \left\{ 2 \cdot \left( \sum_{f'_h=1}^{p'-1} N_{cph,f'_h} \right) < i \leq 2 \cdot \left( \sum_{f'_h=1}^{p'} N_{cph,f'_h} \right), i \bmod 2 = 0 \right\} \quad (3.6)$$

Caso contrário os conjuntos são definidos por:

$$S_{c,f_c} = (i, f_c) = \left\{ 2 \cdot \left( \sum_{f'_c=1}^{p'-1} N_{cpc,f'_c} \right) < i \leq 2 \cdot \left( \sum_{f'_c=1}^{p'} N_{cpc,f'_c} \right), i \bmod 2 = 0 \right\} \quad (3.7)$$

$$S_{h,f_h} = (i, f_h) = \left\{ 2 \cdot \left( \sum_{f'_h=1}^{p'-1} N_{cph,f'_h} \right) < i \leq 2 \cdot \left( \sum_{f'_h=1}^{p'} N_{cph,f'_h} \right), i \bmod 2 = 1 \right\} \quad (3.8)$$

Sejam  $p_{h,f_h}$  e  $p_{c,f_c}$  as orientações do fluido quente e frio respectivamente. Esses termos podem apenas assumir valores +1 ou -1 e se alternam entre passes, uma vez que o fluido troca de sentido. Esse comportamento é descrito pelas Equações 3.9 e 3.10.

$$p_{h,f_h} = -p_{h,f_h-1} \quad (3.9)$$

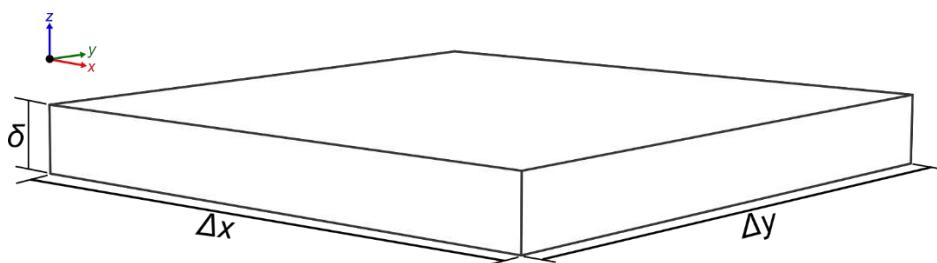
$$p_{c,f_c} = -p_{c,f_c-1} \quad (3.10)$$

Com essas considerações, foram definidas as direções de escoamento de cada fluido, assim como a sua troca de sentido entre passes. Também foram introduzidas equações que definem o número de canais pelos quais cada fluido escoa, inclusive em um passe específico. Além disso foram desenvolvidas regras que permitem saber quais canais pertencem a cada passe de um fluido. Essas expressões facilitam a descrição das próximas equações do modelo e permitem descrever cálculos de vazão mássica em canais de passes específicos de forma mais simples.

### 3.3. BALANÇO DE ENERGIA

O balanço de energia será feito considerando um volume de controle (VC) no canal formado entre duas placas consecutivas conforme a Figura 3.2. As seguintes considerações serão aplicadas ao modelo: ao longo de um canal, o fluido escoa na direção  $x$  ou  $y$ ; e a difusão térmica é desconsiderada na direção do escoamento.

**Figura 3.1 – O volume de controle**



Fonte: Elaboração própria

Seja  $G_{f_j}$  o fluxo mássico de escoamento do fluido, onde  $j$  pode ser  $h$  para o fluido quente ou  $c$  para o frio. Ele é definido conforme a Equação 3.11, onde  $m_{f_j}$  corresponde à vazão mássica do fluido no canal do passe  $f_j$  em kg/s.

$$\hat{G}_{f_j} = \frac{\hat{m}_{f_j}}{\delta \hat{L}_p} \quad (3.11)$$

Considerando o fluido quente, que escoa ao longo do eixo x. Neste caso, o balanço de energia no volume de controle presente em um canal genérico  $i$ , adotando regime permanente pode ser descrito em termos de entalpia pela Equação 3.12, considerando o fluxo constante ao longo do VC.

$$\hat{p}_{h,f_h} \hat{G}_{f_h} \delta \Delta y e_{h,i}(x) - \hat{p}_{h,f_h} \hat{G}_{f_h} \delta \Delta y e_{h,i}(x + \Delta x) + \dot{Q} = 0 \quad (3.12)$$

A Equação 3.12 indica que a diferença de entalpia entre a entrada e a saída é igual à taxa de calor trocado no volume de controle, não havendo escoamento na direção y. O produto  $\delta \Delta y$  corresponde à área do volume de controle pela qual o fluido escoa. O termo  $p_{h,f_h}$  é utilizado para considerar as trocas de sentido de escoamento do fluido. Se  $p_{h,f_h}$  for igual a +1, o fluido escoa no sentido crescente de x, caso contrário, ele entra em  $x + \Delta x$  e sai em x, portanto ele alterna o sinal desses termos. O termo  $\dot{Q}$  pode ser calculado de forma genérica considerando a troca entre os canais adjacentes, conforme a Equação 3.13.

$$\begin{aligned} \dot{Q} = & -U(T_i(x, y), T_{i+1}(x, y)) \Delta x \Delta y (T_i(x, y) - T_{i+1}(x, y)) \\ & - U(T_i(x, y), T_{i-1}(x, y)) \Delta x \Delta y (T_i(x, y) - T_{i-1}(x, y)) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Os termos possuem sinal negativo porque o fluido quente perde calor. Substituindo a Equação 3.13 na 3.12 e colocando os termos comuns em evidência, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{h,f_h} \hat{G}_{f_h} \delta \Delta y & (e_{h,i}(x) - e_{h,i}(x + \Delta x)) \\ & - [U(T_i(x, y), T_{i+1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i+1}(x, y)) \\ & + U(T_i(x, y), T_{i-1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i-1}(x, y))] \Delta x \Delta y = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dividindo-se a Equação 3.14 pelo produto  $\Delta x \Delta y$ :

$$\hat{p}_{h,f_h} \frac{\hat{G}_{f_h} \hat{\delta} (e_{h,i}(x, y) - e_{h,i}(x + \Delta x, y))}{\Delta x} - [U(T_i(x, y), T_{i+1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i+1}(x, y)) + U(T_i(x, y), T_{i-1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i-1}(x, y))] = 0 \quad (3.15)$$

Aplicando o limite com  $\Delta x$  tendendo a zero, obtém-se a Equação 3.16.

$$-\hat{p}_{h,f_h} \hat{G}_{f_h} \hat{\delta} \frac{\partial e_{h,i}(x, y)}{\partial x} - [U(T_i(x, y), T_{i+1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i+1}(x, y)) + U(T_i(x, y), T_{i-1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i-1}(x, y))] = 0 \quad (3.16)$$

A entalpia diferencial pode ser escrita em termos de temperatura conforme a Equação 3.17.

$$de_h(x, y) = Cp(T(x, y))dT(x, y) \quad (3.17)$$

Substituindo a Equação 3.17 na 3.16 e considerando  $Cp$  constante no volume de controle, tem-se.

$$-\hat{p}_{h,f_h} \hat{G}_{f_h} \hat{\delta} Cp \frac{\partial T_i(x, y)}{\partial x} - [U(T_i(x, y), T_{i+1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i+1}(x, y)) + U(T_i(x, y), T_{i-1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i-1}(x, y))] = 0 \quad (3.18)$$

Seja  $\tilde{m}_{f_h}$  o termo dado pelo produto  $G_{f_h} \delta$  conforme apresentado na Equação 3.19.

$$\tilde{m}_{f_h} = \hat{G}_{f_h} \hat{\delta} = \frac{\hat{m}_{f_h}}{\hat{\delta} \hat{L}_p} \hat{\delta} = \frac{m_{f_h}}{\hat{L}_p} \quad (3.19)$$

Substituindo a Equação 3.19 na 3.18, isolando o termo da derivada e colocando o termo  $p_{h,f_h}$  no numerador, o que não implica em efeitos matemáticos já que ele é unitário, obtém-se o balanço de energia na forma que será utilizada no modelo para o

fluido quente. Além disso, o modelo considerou  $C_p$  constante na Equação 3.18, mas a sua variação ao longo do equipamento será avaliada externamente a esse sistema, então será considerado que  $C_p$  é função da temperatura do fluido.

$$\frac{\partial T_i(x, y)}{\partial x} = -\frac{\hat{p}_{h,f_h}}{\tilde{m}_{f_h} C_p(T_i(x, y))} [U(T_i(x, y), T_{i+1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i+1}(x, y)) + U(T_i(x, y), T_{i-1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i-1}(x, y))] \quad (3.20)$$

Realizando a mesma análise para o fluido frio, obtém-se a Equação 3.21.

$$\frac{\partial T_i(x, y)}{\partial y} = -\frac{\hat{p}_{c,f_c}}{\tilde{m}_{f_c} C_p(T_i(x, y))} [U(T_i(x, y), T_{i+1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i+1}(x, y)) + U(T_i(x, y), T_{i-1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i-1}(x, y))] \quad (3.21)$$

As Equações 3.20 e 3.21 foram obtidas para fluido escoando em um canal genérico contendo outros dois canais adjacentes. Entretanto, o trocador possui casos limites em que há apenas um canal próximo. Isso ocorre quando  $i$  igual a 1 ou  $i$  igual ao número de canais  $\hat{N}_c$ . Além disso, as equações são escritas para cada  $i$  pertencente ao conjunto de canais dos fluidos, conforme descrito pelas Equações 3.5 a 3.8. Portanto, o sistema é composto das Equações 3.22 a 3.27.

Para o fluido quente:

$$\frac{\partial T_i(x, y)}{\partial x} = -\frac{\hat{p}_{h,f_h}}{\tilde{m}_{f_h} C_p(T_i(x, y))} [U(T_i(x, y), T_{i+1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i+1}(x, y)) + U(T_i(x, y), T_{i-1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i-1}(x, y))] \quad (3.22)$$

$$\forall f_h, \forall i \in S_{h,f_h} / \{1, \hat{N}_c\}$$

$$\frac{\partial T_{\hat{N}_c}(x, y)}{\partial x} = -\frac{\hat{p}_{h,f_h}}{\tilde{m}_{f_h} C_p(T_{\hat{N}_c}(x, y))} [U(T_{\hat{N}_c}(x, y), T_{\hat{N}_c-1}(x, y))(T_{\hat{N}_c}(x, y) - T_{\hat{N}_c-1}(x, y))] \quad (3.23)$$

$$se i = \hat{N}_c \in S_{h,f_h}$$

$$\frac{\partial T_1(x, y)}{\partial x} = -\frac{\hat{p}_{h,f_h}}{\tilde{m}_{f_h} C_p(T_1(x, y))} [U(T_1(x, y), T_2(x, y))(T_1(x, y) - T_2(x, y))] \quad (3.24)$$

se  $i = 1 \in S_{h,f_h}$

Para o fluido frio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i(x, y)}{\partial y} &= -\frac{\hat{p}_{c,f_c}}{\tilde{m}_{f_c} C_p(T_i(x, y))} [U(T_i(x, y), T_{i+1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i+1}(x, y)) \\ &\quad + U(T_i(x, y), T_{i-1}(x, y))(T_i(x, y) - T_{i-1}(x, y))] \quad (3.25) \\ &\forall f_c, \forall i \in S_{c,f_c}/\{1, \hat{N}_c\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\hat{N}_c}(x, y)}{\partial y} &= -\frac{\hat{p}_{c,f_c}}{\tilde{m}_{f_c} C_p(T_{\hat{N}_c}(x, y))} [U(T_{\hat{N}_c}(x, y), T_{\hat{N}_c-1}(x, y))(T_{\hat{N}_c}(x, y) \\ &\quad - T_{\hat{N}_c-1}(x, y))] \quad (3.26) \end{aligned}$$

se  $i = \hat{N}_c \in S_{c,f_c}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1(x, y)}{\partial y} &= -\frac{\hat{p}_{c,f_c}}{\tilde{m}_{f_c} C_p(T_1(x, y))} [U(T_1(x, y), T_2(x, y))(T_1(x, y) - T_2(x, y))] \quad (3.27) \\ &\quad \text{se } i = 1 \in S_{c,f_c} \end{aligned}$$

As Equações 3.22 a 3.27 descrevem balanços em cada canal. Por serem equações diferenciais, cada uma necessita de uma condição de contorno a fim de se resolver o sistema. O problema em estudo apresenta dois casos de condições de contorno. O primeiro corresponde ao canal pertencente ao passe em que o fluido entra no equipamento, logo a temperatura em um dos lados do canal é igual à de entrada do fluido. O segundo é o caso em que o canal recebe fluido proveniente de outro passe. Neste caso, uma das bordas possui a temperatura de mistura dos canais do passe pelo qual o fluido escoou anteriormente. As Equações 3.28 a 3.35 descrevem estes casos, onde  $T_{f_j,s}$  e  $T_{j,e}$  correspondem às temperaturas de saída do passe  $f_j$  e de entrada do fluido no equipamento, respectivamente. Além disso, o lado da condição de contorno depende do sentido de escoamento do fluido. Todos esses casos são contemplados pelas Equações 3.28 a 3.35.

$$T_i|_{x=0} = \hat{T}_{h,e} \quad (3.28)$$

$$\forall i \in s_{h,1}, se \ p_{h,f_h} = +1$$

$$T_i|_{x=\hat{L}_p} = \hat{T}_{h,e} \quad (3.29)$$

$$\forall i \in s_{h,1}, se \ p_{h,f_h} = -1$$

$$T_i|_{y=0} = \hat{T}_{c,e} \quad (3.30)$$

$$\forall i \in s_{c,\hat{N}_{pc}}, se \ p_{c,f_c} = +1$$

$$T_i|_{y=\hat{L}_p} = \hat{T}_{c,e} \quad (3.31)$$

$$\forall i \in s_{c,\hat{N}_{pc}}, se \ p_{c,f_c} = -1$$

$$T_i|_{x=0} = \hat{T}_{f_h-1,s} \quad (3.32)$$

$$\forall f_h \neq 1, \forall i \in s_{h,f_h}, se \ p_{h,f_h} = +1$$

$$T_i|_{x=\hat{L}_p} = \hat{T}_{f_h-1,s} \quad (3.33)$$

$$\forall f_h \neq 1, \forall i \in s_{h,f_h}, se \ p_{h,f_h} = -1$$

$$T_i|_{y=0} = \hat{T}_{f_c+1,s} \quad (3.34)$$

$$\forall f_c \neq \hat{N}_{pc}, \forall i \in s_{c,f_c}, se \ p_{c,f_c} = +1$$

$$T_i|_{y=\hat{L}_p} = \hat{T}_{f_c+1,s} \quad (3.35)$$

$$\forall f_c \neq \hat{N}_{pc}, \forall i \in s_{c,f_c}, se \ p_{c,f_c} = -1$$

As temperaturas de saída dos passes são calculadas por meio de um balanço de energia localizado na região de mistura das saídas dos canais desse passe. A ideia é ao entrar em um passe, a corrente se divide igualmente entre os canais desse passe, troca calor e depois se mistura novamente do outro lado e avança para o próximo passe em sentido oposto, misturada idealmente. As Equações 3.36 a 3.39 definem este balanço para cada fluido a depender do seu sentido de escoamento.

$$m_h \int_{T_{ref}}^{T_{f_h,s}} [Cp(T')dT'] = \sum_{i \in S_{h,f_h}} \left\{ m_{f_h} \cdot \int_0^{\hat{L}_p} \left[ \int_{T'_{ref}}^{T_i(\hat{L}_p,y)} [Cp(T'')dT''] dy \right] \right\} \quad (3.36)$$

$$\forall f_h, se \ p_{h,f_h} = +1$$

$$m_h \int_{T_{ref}}^{T_{f_h,s}} [Cp(T')dT'] = \sum_{i \in S_{h,f_h}} \left\{ m_{f_h} \cdot \int_0^{\hat{L}_p} \left[ \int_{T'_{ref}}^{T_i(0,y)} [Cp(T'')dT''] dy \right] \right\} \quad (3.37)$$

$$\forall f_h, se \ p_{h,f_h} = -1$$

$$m_c \int_{T_{ref}}^{T_{f_c,s}} [Cp(T')dT'] = \sum_{i \in S_{c,f_c}} \left\{ m_{f_c} \cdot \int_0^{\hat{L}_p} \left[ \int_{T'_{ref}}^{T_i(x,\hat{L}_p)} [Cp(T'')dT''] dx \right] \right\} \quad (3.38)$$

$$\forall f_c, se \ p_{c,f_c} = +1$$

$$m_c \int_{T_{ref}}^{T_{f_c,s}} [Cp(T')dT'] = \sum_{i \in S_{c,f_c}} \left\{ m_{f_c} \cdot \int_0^{\hat{L}_p} \left[ \int_{T'_{ref}}^{T_i(x,0)} [Cp(T'')dT''] dx \right] \right\} \quad (3.39)$$

$$\forall f_c, se \ p_{c,f_c} = -1$$

As Equações 3.36 a 3.39 podem ser resumidas da seguinte forma. No lado direito, somam-se as entalpias extensivas de cada canal pertencente ao passe, que por sua vez são calculadas integrando-se a entalpia ao longo da borda de saída do canal. Isso é feito porque, devido ao fato de os fluidos escoarem de forma cruzada, o canal apresenta um gradiente bidimensional de temperatura, logo a temperatura não é única na borda de saída. A integral mais interna corresponde ao cálculo da entalpia ao longo dessa borda em relação a uma temperatura de referência. O lado esquerdo corresponde ao cálculo da entalpia de toda a corrente após a mistura, ela é calculada integrando-se de uma temperatura de referência até a temperatura de mistura a ser calculada.

Conforme apresentado na Seção 2.2.2, os coeficientes globais de troca térmica são calculados da seguinte forma.

$$U(T_i(x, y), T_{i-1}(x, y)) = \frac{1}{\frac{1}{h(T_{i-1}(x, y))} + \hat{R}_{d,c} + \frac{\hat{t}_p}{\hat{k}_p} + \frac{1}{h(T_i(x, y))} + \hat{R}_{d,h}} \quad (3.40)$$

$\forall i \neq 1$

$$U(T_i(x, y), T_{i+1}(x, y)) = \frac{1}{\frac{1}{h(T_{i+1}(x, y))} + \hat{R}_{d,c} + \frac{\hat{t}_p}{\hat{k}_p} + \frac{1}{h(T_i(x, y))} + \hat{R}_{d,h}} \quad (3.41)$$

$\forall i \neq \hat{N}_c$

Conforme discutido na Seção 2.2, os coeficientes de troca por convecção necessitam de uma correlação empírica para serem calculados em termos de número de Nusselt, que no modelo está definido conforme a Equação 3.42.

$$Nu(T_i(x, y)) = \frac{h(T_i(x, y))\hat{d}_e}{k(T_i(x, y))} \quad (3.42)$$

Na qual o comprimento equivalente é igual a  $\hat{d}_e = 2\hat{\delta}$ . O cálculo do número de Nusselt é feito considerando a correlação obtida por Arsenyeva (2016); conforme descrito nas Equações 3.43 a 3.55. Para fins de simplificação, todo termo com índice  $i$  é função da temperatura.

$$Nu_i = 0,065 \cdot Re_i^{\frac{6}{7}} \cdot \left( \frac{\psi_i \cdot \xi_i}{F_x} \right)^{\frac{3}{7}} \cdot Pr_i^{c_i} \cdot \left( \frac{\mu_i}{\mu_{pi}} \right)^{0.14} \quad (3.43)$$

na qual  $Re_x = \frac{\hat{d}_e u_j \rho_j}{\mu_j}$  é o número de Reynolds e  $Pr = \frac{c p_j \mu_j}{k_j}$  é o número de Prandtl,  $j$  corresponde ao fluido quente ou frio,  $\psi$  corresponde à fração da perda de carga devido à fricção na placa,  $\xi$  é o fator de atrito,  $F_x$  é o coeficiente de área, presente em função das corrugações nas placas,  $\mu$  e  $\mu_p$  são as viscosidades no seio do fluido e na proximidade da placa. Este trabalho não considerará a diferença de temperatura ao longo do eixo z, logo  $\mu_i = \mu_{pi}$  e o termo correspondente pode ser suprimido da

Equação 3.43. Conforme discutido na Seção 2.2,  $c$  é um dos parâmetros experimentais a serem determinados e é definido pela Equação 3.44.

$$c_i = \begin{cases} 0,4, & \text{se } 0,7 < Pr < 15 \\ \left( \frac{1}{3} \frac{e^{\left(\frac{64}{Pr+20}\right)}}{1 - 0,012 \cdot Re_i^{0,27}} \right), & \text{se } 15 < Pr < 1000 \end{cases} \quad (3.44)$$

As Equações 3.45 a 3.47 são utilizadas para cálculo do coeficiente de fricção, que é utilizado também no cálculo da perda de carga na Seção 3.4.

$$\xi_i = 8 \left[ \left( \frac{12 + p_2}{Re_i} \right)^{12} + \frac{1}{(A_i + B_i)^3} \right]^{\frac{1}{12}} \quad (3.45)$$

$$A_i = \left[ p_4 \ln \left( \frac{p_5}{\left( \frac{7 \cdot p_3}{Re_i} \right)^{0,9} + 0,27 \cdot 10^{-5}} \right) \right]^{16} \quad (3.46)$$

$$B_i = \left( \frac{37530 \cdot p_1}{Re_i} \right)^{16} \quad (3.47)$$

Os coeficientes  $p_1, p_2, p_3, p_4$  e  $p_5$  são definidos pela forma da corrugação da placa segundo as Equações 3.48 a 3.52.

$$p_1 = e^{(-0,15705 \cdot \hat{\beta})} \quad (3.48)$$

$$p_2 = \frac{\pi \hat{\beta} \gamma^2}{3} \quad (3.49)$$

$$p_3 = e^{\left( -\pi \frac{\hat{\beta}}{180} \cdot \frac{1}{\gamma^2} \right)} \quad (3.50)$$

$$p_4 = \left( 0,061 + \left( 0,69 + \tan \left( \hat{\beta} \cdot \frac{\pi}{180} \right) \right)^{-2,63} \right) \cdot (1 + (1 - \gamma) \cdot 0,9 \cdot \hat{\beta}^{0,01}) \quad (3.51)$$

$$p_5 = 1 + \frac{\hat{\beta}}{10} \quad (3.52)$$

Onde  $\beta$  é o ângulo de corrugação, e  $\gamma$  é um coeficiente definido conforme a Equação 3.53, onde  $\hat{s}$  é o *pitch*.

$$\hat{\gamma} = 2 \frac{\hat{\delta}}{\hat{s}} \quad (3.53)$$

O coeficiente  $\psi$  pode ser calculado por meio das Equações 3.54 e 3.55.

$$A_1 = \frac{380}{\left( \tan \left( \hat{\beta} \frac{\pi}{180} \right) \right)^{-1,75}} \quad (3.54)$$

$$\psi_i = \begin{cases} 1, & \text{se } Re_i \leq A_1 \\ \left( \frac{Re_i}{A_1} \right)^{-0,15 \cdot \sin \left( \hat{\beta} \frac{\pi}{180} \right)}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.55)$$

Por meio das Equações 3.43 a 3.55 pode-se calcular o coeficiente de troca por convecção e consequentemente o coeficiente global  $U$  presente no modelo da troca de energia entre os fluidos.

### 3.4. CÁLCULO DA PERDA DE CARGA

O cálculo da perda de carga é feito com base na correlação apresentada por Arsenyeva (2016) conforme as Equações 3.56 e 3.57, onde  $\Delta P_j$  corresponde à queda de pressão total na corrente  $j$ , com  $j$  podendo ser  $h$  para a quente ou  $c$  para a fria, em Pa, e  $u_{porta}$  é a velocidade de escoamento do fluido nos dutos de distribuição do trocador de calor, em m/s.

$$\Delta P_h = \Delta P_{N_{ph}} + 1,3 \frac{\rho_h u_{porta}^2}{2} \quad (3.56)$$

$$\Delta P_c = \Delta P_1 + 1,3 \frac{\rho_c u_{porta}^2}{2} \quad (3.57)$$

Nas Equações 3.56 e 3.57, o primeiro termo corresponde à queda de pressão no escoamento entre placas nos  $N_p$  passes da corrente considerada e o segundo corresponde à perda de carga no duto de distribuição do equipamento. O  $\Delta P$  é calculado resolvendo-se o sistema a seguir.

$$\frac{\partial P_i(x, y)}{\partial x} = -p_{h,f_h} \frac{\xi_i \rho(T_i(x, y)) u(T_i(x, y))^2}{\hat{d}_e} \quad (3.58)$$

$$\forall f_h, \forall i \in S_{h,f_h}$$

$$\frac{\partial P_i(x, y)}{\partial y} = -p_{c,f_c} \frac{\xi_i \rho(T_i(x, y)) u(T_i(x, y))^2}{\hat{d}_e} \quad (3.59)$$

$$\forall f_c, \forall i \in S_{c,f_c}$$

Conforme as Equações 3.58 e 3.59 indicam, o cálculo da perda de carga depende do valor de propriedades que são função da temperatura, que varia ao longo do canal. Portanto, este sistema será resolvido depois do balanço de energia, de forma que o perfil de temperatura já é conhecido. Da mesma forma que no balanço de energia, as Equações 3.58 e 3.59 contemplam todos os canais, logo é necessário o mesmo número de condições de contorno, que são apresentadas nas Equações 3.60 a 3.71.

$$P_i|_{x=0} = P_{h,e} \quad (3.60)$$

$$\forall i \in S_{h,1}, \text{ se } p_{h,1} = +1$$

$$P_i|_{x=\hat{L}_p} = P_{h,e} \quad (3.61)$$

$$\forall i \in S_{h,1}, \text{ se } p_{h,1} = -1$$

$$P_i|_{y=0} = P_{c,e} \quad (3.62)$$

$$\forall i \in S_{c,\widehat{N}_{pc}}, se p_{c,\widehat{N}_{pc}} = +1$$

$$\begin{aligned} P_i|_{y=\widehat{L}_p} &= P_{c,e} \\ \forall i \in S_{c,\widehat{N}_{pc}}, se p_{c,\widehat{N}_{pc}} &= -1 \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} P_i|_{x=0} &= P_{f_h-1,s} \\ \forall f_h \neq 1, \forall i \in S_{h,f_h}, se p_{h,f_h} &= +1 \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} P_i|_{x=\widehat{L}_p} &= P_{f_h-1,e} \\ \forall f_h \neq 1, \forall i \in S_{h,f_h}, se p_{h,f_h} &= -1 \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} P_i|_{y=0} &= P_{f_c+1,s} \\ \forall f_c \neq \widehat{N}_{pc}, \forall i \in S_{c,f_c}, se p_{c,f_c} &= +1 \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} P_i|_{y=\widehat{L}_p} &= P_{f_c+1,s} \\ \forall f_c \neq \widehat{N}_{pc}, \forall i \in S_{c,f_c}, se p_{c,f_c} &= -1 \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} P_{f_h,s} &= \frac{1}{\widehat{N}_{cph,f_h}} \sum_{i \in S_{h,f_h}} \left\{ \frac{1}{\widehat{L}_p} \int_0^{\widehat{L}_p} [P_i|_{x=\widehat{L}_p}] dy - \xi_{ZD} \cdot \frac{\rho(\bar{T}_i) u^2(\bar{T}_i)}{2} \right\} \\ \forall f_h, se p_{h,f_h} &= +1 \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} P_{f_h,s} &= \frac{1}{\widehat{N}_{cph,f_h}} \sum_{i \in S_{h,f_h}} \left\{ \frac{1}{\widehat{L}_p} \int_0^{\widehat{L}_p} [P_i|_{x=0}] dy - \xi_{ZD} \cdot \frac{\rho(\bar{T}_i) u^2(\bar{T}_i)}{2} \right\} \\ \forall f_h, se p_{h,f_h} &= -1 \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} P_{f_c,s} &= \frac{1}{\widehat{N}_{cpc,f_c}} \sum_{i \in S_{c,f_c}} \left\{ \frac{1}{\widehat{L}_p} \int_0^{\widehat{L}_p} [P_i|_{y=\widehat{L}_p}] dx - \xi_{ZD} \cdot \frac{\rho(\bar{T}_i) u^2(\bar{T}_i)}{2} \right\} \\ \forall f_c, se p_{c,f_c} &= +1 \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$P_{f_{c,s}} = \frac{1}{\hat{N}_{cpc,f_c}} \sum_{i \in S_{c,f_c}} \left\{ \frac{1}{\hat{L}_p} \int_0^{\hat{L}_p} [P_i|_{y=0}] dx - \xi_{ZD} \cdot \frac{\rho(\bar{T}_i) u^2(\bar{T}_i)}{2} \right\} \quad (3.71)$$

$$\forall f_c, \text{ se } p_{c,f_c} = -1$$

As Equações 3.60 a 3.63 correspondem à condições de contorno no primeiro passe pelo qual o fluido escoa, enquanto as Equações 3.64 a 3.67 descrevem o contorno nos outros passes. As Equações 3.68 a 3.71 descrevem o cálculo das pressões na saída dos passes. Nessas últimas equações, o último termo corresponde à perda de carga local na zona de distribuição das placas. Neste caso, as propriedades são calculadas na temperatura média entre a entrada e saída de cada canal ( $\bar{T}_i$ ). Além disso, o termo  $\xi_{ZD}$  corresponde ao fator de atrito na zona de distribuição e ele é calculado conforme a Equação 3.72 por Arsenyeva (2013).

$$\xi_{ZD} = 38 \frac{\xi_{65}(Re(\bar{T}))}{\xi_{65}(2700)} \quad (3.72)$$

Na qual  $\xi_{65}$  corresponde ao fator de atrito calculado para o número de Reynolds dado considerando ângulo de corrugação igual a  $65^\circ$ , ou seja,  $\hat{\beta} = 65^\circ$ .

A queda de pressão em cada corrente é dada pela diferença entre a pressão de entrada no equipamento e a pressão em sua saída. Para o  $\Delta P_{f_j}$ , que aparece nas Equações 3.56 e 3.57, pode-se calculá-las conforme as Equações 3.73 e 3.74 para cada fluido.

$$\Delta P_{f_h} = P_{h,e} - P_{f_h,s} \quad (3.73)$$

$$\forall f_h$$

$$\Delta P_{f_c} = P_{c,e} - P_{f_c,s} \quad (3.74)$$

$$\forall f_c$$

Por fim, a velocidade média de escoamento no canal  $u_i$  de um dado passe pode ser calculada conforme a Equação 3.75.

$$u_i = \frac{\hat{m}_x}{\rho_i \hat{l}_p \delta \hat{N}_{cpx,f_x}} \quad (3.75)$$

Por meio desse conjunto de equações pode-se calcular a perda de carga em cada corrente no equipamento. O próximo capítulo apresenta como foi desenvolvida a solução desse modelo.

## 4. RESOLUÇÃO DO MODELO

### 4.1. INTRODUÇÃO

A proposta de solução do modelo apresentado no Capítulo 3 consiste no uso da técnica de discretização a fim de transformar os sistemas de equações diferenciais parciais em algébricos. Além disso, o sistema resultante de interesse deve ser linear, de forma que possa ser resolvido por meio de uma equação matricial. Assim, alguns métodos são acoplados com o objetivo de contabilizar as integrais e algumas linearizações são feitas. As próximas seções descrevem esse processo.

### 4.2. DISCRETIZAÇÃO DO BALANÇO DE ENERGIA

O domínio de aplicação do modelo é o canal formado entre duas placas consecutivas, que é considerado bidimensional com coordenadas  $x$  e  $y$ , ambas reais e pertencentes ao intervalo  $[0, \hat{L}_p]$ .

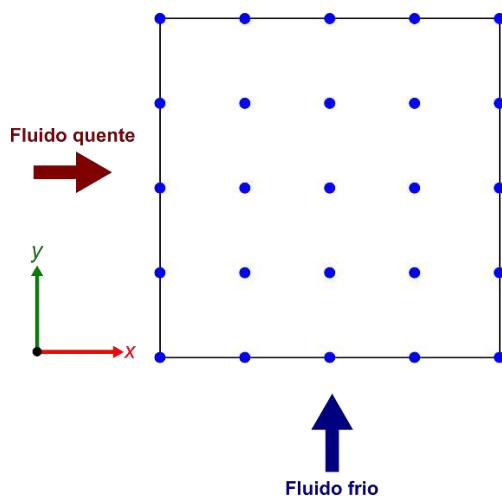
O primeiro passo para a discretização deste balanço consiste em dividir o domínio em subintervalos formados por pontos discretos indexados. Seja  $k \in \{1, 2, \dots, K\}$  e  $l \in \{1, 2, \dots, L\}$  os índices dos pontos ao longo do eixo  $x$  e  $y$  respectivamente e  $K$  e  $L$  o número total de pontos em cada eixo, de forma que as seguintes equações são verdadeiras, lembrando que as placas são consideradas quadradas.

$$x_1 = y_1 = 0 \quad (4.1)$$

$$x_K = y_L = \hat{L}_p \quad (4.2)$$

Esta discretização corresponde a dividir cada canal em uma malha contendo  $K \times L$  pontos. A Figura 4.1 mostra uma representação gráfica de um exemplo de uma malha 5x5.

**Figura 4.1 – Exemplo de malha 5x5**

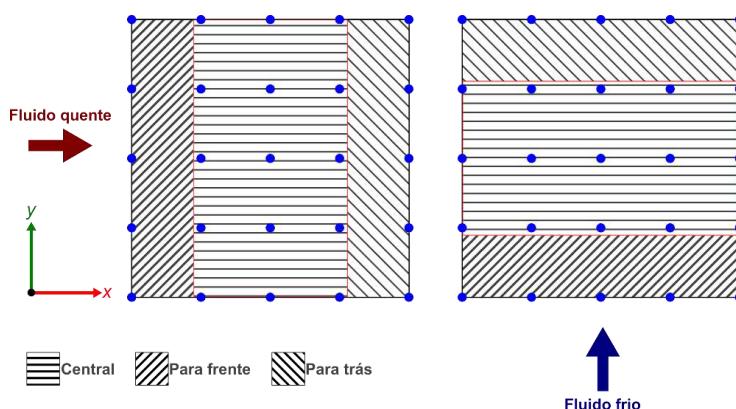


Fonte: elaboração própria

O próximo passo consiste em aplicar o método de diferenças finitas nas equações diferenciais e reescrever as outras equações em termos dos pontos indexados. Conforme visto na Seção 2.6.1, há três tipos de diferenças finitas usualmente aplicados a aproximação de derivadas: o central, que possui ordem dois, o para frente e o para trás, que possuem ordem um. Então o objetivo é aplicar diferenças centrais ao modelo por possuírem menor erro. Entretanto, para cada ponto avaliado, este método depende dos pontos anterior e posterior. Dessa forma, ele é aplicado em pontos internos da malha e nas bordas são utilizados os outros dois métodos.

Considerando o eixo de escoamento do fluido em análise, no ponto de índice 1 será utilizado diferença para frente, enquanto no último ponto será utilizado diferença para trás. Nos outros pontos é utilizado diferença central. A Figura 4.2 mostra a região de aplicação de cada método em cada fluido.

**Figura 4.2 – Região de aplicação dos métodos de diferenças finitas**



Fonte: elaboração própria

Tendo em vista as considerações anteriores, as equações do balanço de energia representadas pelas Equações 3.22 a 3.27 podem ser reescritas da seguinte forma.

Para o fluido quente:

$$\begin{aligned} \frac{T_i(x_{k+1}, y_l) - T_i(x_{k-1}, y_l)}{2\Delta x} \\ = -\frac{p_{h,f_h}}{\tilde{m}_{f_h} Cp(T_i(x_k, y_l))} [U(T_i(x_k, y_l), T_{i+1}(x_k, y_l))(T_i(x_k, y_l) \\ - T_{i+1}(x_k, y_l)) \\ + U(T_i(x_k, y_l), T_{i-1}(x_k, y_l))(T_i(x_k, y_l) - T_{i-1}(x_k, y_l))] \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\forall f_h, \forall i \in S_{h,f_h}/\{1, \hat{N}_c\}, \forall k \notin \{1, K\}, \forall l$$

$$\begin{aligned} \frac{T_i(x_2, y_l) - T_i(x_1, y_l)}{\Delta x} \\ = -\frac{p_{h,f_h}}{\tilde{m}_{f_h} Cp(T_i(x_1, y_l))} [U(T_i(x_1, y_l), T_{i+1}(x_1, y_l))(T_i(x_1, y_l) \\ - T_{i+1}(x_1, y_l)) \\ + U(T_i(x_1, y_l), T_{i-1}(x_1, y_l))(T_i(x_1, y_l) - T_{i-1}(x_1, y_l))] \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\forall f_h, \forall i \in S_{h,f_h}/\{1, \hat{N}_c\}, \forall l, \text{ se } p_{h,f_h} = -1$$

$$\begin{aligned} \frac{T_i(x_K, y_l) - T_i(x_{K-1}, y_l)}{\Delta x} \\ = -\frac{p_{h,f_h}}{\tilde{m}_{f_h} Cp(T_i(x_K, y_l))} [U(T_i(x_K, y_l), T_{i+1}(x_K, y_l))(T_i(x_K, y_l) \\ - T_{i+1}(x_K, y_l)) \\ + U(T_i(x_K, y_l), T_{i-1}(x_K, y_l))(T_i(x_K, y_l) - T_{i-1}(x_K, y_l))] \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\forall f_h, \forall i \in S_{h,f_h}/\{1, \hat{N}_c\}, \forall l, \text{ se } p_{h,f_h} = +1$$

$$\begin{aligned} \frac{T_1(x_{k+1}, y_l) - T_1(x_{k-1}, y_l)}{2\Delta x} \\ = -\frac{p_{h,1}}{\tilde{m}_1 Cp(T_1(x_k, y_l))} [U(T_1(x_k, y_l), T_2(x_k, y_l))(T_1(x_k, y_l) \\ - T_2(x_k, y_l))] \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\forall k \notin \{1, K\}, \forall l$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_1(x_2, y_l) - T_1(x_1, y_l)}{\Delta x} \\
&= -\frac{p_{h,1}}{\tilde{m}_1 C p(T_1(x_1, y_l))} [U(T_1(x_1, y_l), T_2(x_1, y_l))(T_1(x_1, y_l) \\
&\quad - T_2(x_1, y_l))] \tag{4.7}
\end{aligned}$$

$$\forall l, se p_{h,1} = -1$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_1(x_K, y_l) - T_1(x_{K-1}, y_l)}{\Delta x} \\
&= -\frac{p_{h,1}}{\tilde{m}_1 C p(T_1(x_K, y_l))} [U(T_1(x_K, y_l), T_2(x_K, y_l))(T_1(x_K, y_l) \\
&\quad - T_2(x_K, y_l))] \tag{4.8}
\end{aligned}$$

$$\forall l, se p_{h,1} = +1$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{\hat{N}_c}(x_{k+1}, y_l) - T_{\hat{N}_c}(x_{k-1}, y_l)}{2\Delta x} \\
&= -\frac{p_{h,\hat{N}_{ph}}}{\tilde{m}_{\hat{N}_{ph}} C p(T_{\hat{N}_c}(x_k, y_l))} [U(T_{\hat{N}_c}(x_k, y_l), T_{\hat{N}_c-1}(x_k, y_l))(T_{\hat{N}_c}(x_k, y_l) \\
&\quad - T_{\hat{N}_c-1}(x_k, y_l))] \tag{4.9}
\end{aligned}$$

$$\forall k \notin \{1, K\}, \forall l$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{\hat{N}_c}(x_2, y_l) - T_{\hat{N}_c}(x_1, y_l)}{\Delta x} \\
&= -\frac{p_{h,\hat{N}_{ph}}}{\tilde{m}_{\hat{N}_{ph}} C p(T_{\hat{N}_c}(x_1, y_l))} [U(T_{\hat{N}_c}(x_1, y_l), T_{\hat{N}_c-1}(x_1, y_l))(T_{\hat{N}_c}(x_1, y_l) \\
&\quad - T_{\hat{N}_c-1}(x_1, y_l))] \tag{4.10}
\end{aligned}$$

$$\forall l, se p_{h,\hat{N}_{ph}} = -1$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{\hat{N}_c}(x_K, y_l) - T_{\hat{N}_c}(x_{K-1}, y_l)}{\Delta x} \\
&= -\frac{p_{h,\hat{N}_{ph}}}{\tilde{m}_{\hat{N}_{ph}} C p(T_{\hat{N}_c}(x_K, y_l))} [U(T_{\hat{N}_c}(x_K, y_l), T_{\hat{N}_c-1}(x_K, y_l))(T_{\hat{N}_c}(x_K, y_l) \\
&\quad - T_{\hat{N}_c-1}(x_K, y_l))] \tag{4.11}
\end{aligned}$$

$$\forall l, se p_{h,\hat{N}_{ph}} = +1$$

Para o fluido frio:

$$\begin{aligned}
& \frac{T_i(x_k, y_{l+1}) - T_i(x_k, y_{l-1})}{2\Delta y} \\
&= -\frac{p_{c,f_c}}{\tilde{m}_{f_c} C p(T_i(x_k, y_l))} [U(T_i(x_k, y_l), T_{i+1}(x_k, y_l))(T_i(x_k, y_l) \\
&\quad - T_{i+1}(x_k, y_l)) \\
&\quad + U(T_i(x_k, y_l), T_{i-1}(x_k, y_l))(T_i(x_k, y_l) - T_{i-1}(x_k, y_l))] \\
&\forall f_c, \forall i \in S_{c,f_c}/\{1, \hat{N}_c\}, \forall k, \forall l \notin \{1, L\}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_i(x_k, y_2) - T_i(x_k, y_1)}{\Delta y} \\
&= -\frac{p_{c,f_c}}{\tilde{m}_{f_c} C p(T_i(x_k, y_1))} [U(T_i(x_k, y_1), T_{i+1}(x_k, y_1))(T_i(x_k, y_1) \\
&\quad - T_{i+1}(x_k, y_1)) \\
&\quad + U(T_i(x_k, y_1), T_{i-1}(x_k, y_1))(T_i(x_k, y_1) - T_{i-1}(x_k, y_1))] \\
&\forall f_c, \forall i \in S_{c,f_c}/\{1, \hat{N}_c\}, \forall k, \text{se } p_{c,f_c} = -1
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_i(x_k, y_L) - T_i(x_k, y_{L-1})}{\Delta y} \\
&= -\frac{p_{c,f_c}}{\tilde{m}_{f_c} C p(T_i(x_k, y_L))} [U(T_i(x_k, y_L), T_{i+1}(x_k, y_L))(T_i(x_k, y_L) \\
&\quad - T_{i+1}(x_k, y_L)) \\
&\quad + U(T_i(x_k, y_L), T_{i-1}(x_k, y_L))(T_i(x_k, y_L) - T_{i-1}(x_k, y_L))] \\
&\forall f_c, \forall i \in S_{c,f_c}/\{1, \hat{N}_c\}, \forall k, \text{se } p_{c,f_c} = +1
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_1(x_k, y_{l+1}) - T_1(x_k, y_{l-1})}{2\Delta y} \\
&= -\frac{p_{c,1}}{\tilde{m}_1 C p(T_1(x_k, y_l))} [U(T_1(x_k, y_l), T_2(x_k, y_l))(T_1(x_k, y_l) \\
&\quad - T_2(x_k, y_l))] \\
&\forall k, \forall l \notin \{1, L\}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_1(x_k, y_2) - T_1(x_k, y_1)}{\Delta y} \\
&= -\frac{p_{c,1}}{\tilde{m}_1 C p(T_1(x_k, y_1))} [U(T_1(x_k, y_1), T_2(x_k, y_1))(T_1(x_k, y_1) \\
&\quad - T_2(x_k, y_1))] \\
&\forall k, \text{se } p_{c,1} = -1
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_1(x_k, y_L) - T_1(x_k, y_{L-1})}{\Delta y} \\
&= -\frac{p_{c,1}}{\tilde{m}_1 C p(T_1(x_k, y_L))} [U(T_1(x_k, y_L), T_2(x_k, y_L))(T_1(x_k, y_L) \\
&\quad - T_2(x_k, y_L))] \tag{4.17}
\end{aligned}$$

$$\forall k, se p_{c,1} = +1$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{\hat{N}_c}(x_k, y_{l+1}) - T_{\hat{N}_c}(x_k, y_{l-1})}{2\Delta y} \\
&= -\frac{p_{c,\hat{N}_{pc}}}{\tilde{m}_{\hat{N}_{pc}} C p(T_1(x_k, y_l))} [U(T_{\hat{N}_c}(x_k, y_l), T_{\hat{N}_c-1}(x_k, y_l))(T_{\hat{N}_c}(x_k, y_l) \\
&\quad - T_{\hat{N}_c-1}(x_k, y_l))] \tag{4.18}
\end{aligned}$$

$$\forall k, \forall l \notin \{1, L\}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{\hat{N}_c}(x_k, y_2) - T_{\hat{N}_c}(x_k, y_1)}{\Delta y} \\
&= -\frac{p_{c,\hat{N}_{pc}}}{\tilde{m}_{\hat{N}_{pc}} C p(T_1(x_k, y_1))} [U(T_{\hat{N}_c}(x_k, y_1), T_{\hat{N}_c-1}(x_k, y_1))(T_{\hat{N}_c}(x_k, y_1) \\
&\quad - T_{\hat{N}_c-1}(x_k, y_1))] \tag{4.19}
\end{aligned}$$

$$\forall k, se p_{c,\hat{N}_{pc}} = -1$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{\hat{N}_c}(x_k, y_L) - T_{\hat{N}_c}(x_k, y_{L-1})}{\Delta y} \\
&= -\frac{p_{c,\hat{N}_{pc}}}{\tilde{m}_{\hat{N}_{pc}} C p(T_1(x_k, y_L))} [U(T_{\hat{N}_c}(x_k, y_L), T_{\hat{N}_c-1}(x_k, y_L))(T_{\hat{N}_c}(x_k, y_L) \\
&\quad - T_{\hat{N}_c-1}(x_k, y_L))] \tag{4.19}
\end{aligned}$$

$$\forall k, se p_{c,\hat{N}_{pc}} = +1$$

Conforme pode ser visto nas Equações 4.3 a 4.19, cada equação do modelo se desdobrou em três devido às diferentes formas de discretização nas bordas. As condições de contorno em termos dos pontos indexados estão descritas nas Equações 4.20 a 4.27:

$$T_i(x_1, y_l) = \hat{T}_{h,e} \quad (4.20)$$

$$\forall i \in s_{h,1}, \forall l, se p_{h,f_h} = +1$$

$$T_i(x_K, y_l) = \hat{T}_{h,e} \quad (4.21)$$

$$\forall i \in s_{h,1}, \forall l, se p_{h,f_h} = -1$$

$$T_i(x_k, y_1) = \hat{T}_{c,e} \quad (4.22)$$

$$\forall i \in s_{c,\hat{N}_{pc}}, \forall k, se p_{c,f_c} = +1$$

$$T_i(x_k, y_L) = \hat{T}_{c,e} \quad (4.23)$$

$$\forall i \in s_{c,\hat{N}_{pc}}, \forall k, se p_{c,f_c} = -1$$

$$T_i(x_1, y_l) = \hat{T}_{f_h-1,s} \quad (4.24)$$

$$\forall f_h \neq 1, \forall i \in s_{h,f_h}, \forall l, se p_{h,f_h} = +1$$

$$T_i(x_K, y_l) = \hat{T}_{f_h-1,s} \quad (4.25)$$

$$\forall f_h \neq 1, \forall i \in s_{h,f_h}, \forall l, se p_{h,f_h} = -1$$

$$T_i(x_k, y_1) = \hat{T}_{f_c+1,s} \quad (4.26)$$

$$\forall f_c \neq \hat{N}_{pc}, \forall i \in s_{c,f_c}, \forall k, se p_{c,f_c} = +1$$

$$T_i(x_k, y_L) = \hat{T}_{f_c+1,s} \quad (4.27)$$

$$\forall f_c \neq \hat{N}_{pc}, \forall i \in s_{c,f_c}, \forall k, se p_{c,f_c} = -1$$

As temperaturas de saída dos passes são dadas de forma discretizadas pelas Equações 4.28 a 4.31:

$$m_h \int_{T_{ref}}^{T_{f_h,s}} [Cp(T')dT'] = \sum_{i \in S_{h,f_h}} \left\{ m_{f_h} \cdot \int_0^{\hat{L}_p} \left[ \int_{T'_{ref}}^{T_i(x_k,y_l)} [Cp(T'')]dT'' \right] dy \right\} \quad (4.28)$$

$$\forall f_h, se \ p_{h,f_h} = +1$$

$$m_h \int_{T_{ref}}^{T_{f_h,s}} [Cp(T')dT'] = \sum_{i \in S_{h,f_h}} \left\{ m_{f_h} \cdot \int_0^{\hat{L}_p} \left[ \int_{T'_{ref}}^{T_i(x_1,y_l)} [Cp(T'')]dT'' \right] dy \right\} \quad (4.29)$$

$$\forall f_h, se \ p_{h,f_h} = -1$$

$$m_c \int_{T_{ref}}^{T_{f_c,s}} [Cp(T')dT'] = \sum_{i \in S_{c,f_c}} \left\{ m_{f_c} \cdot \int_0^{\hat{L}_p} \left[ \int_{T'_{ref}}^{T_i(x_k,y_L)} [Cp(T'')]dT'' \right] dx \right\} \quad (4.30)$$

$$\forall f_c, se \ p_{c,f_c} = +1$$

$$m_c \int_{T_{ref}}^{T_{f_c,s}} [Cp(T')dT'] = \sum_{i \in S_{c,f_c}} \left\{ m_{f_c} \cdot \int_0^{\hat{L}_p} \left[ \int_{T'_{ref}}^{T_i(x_k,y_1)} [Cp(T'')]dT'' \right] dx \right\} \quad (4.31)$$

$$\forall f_c, se \ p_{c,f_c} = -1$$

nas quais as integrais de  $Cp$  correspondem a cálculos de entalpia, que é uma função da temperatura. O procedimento de resolução dessas integrais consiste em obter a primitiva do  $Cp$  de forma analítica, uma vez que são funções conhecidas e normalmente simples de serem integradas. A Equação 4.32 representa este passo de forma genérica, em que  $P_{Cp}$  é a primitiva do  $Cp$ ,  $e_h$  é a entalpia intensiva avaliada na temperatura do ponto, e considerando  $T_{ref} = \hat{T}_{min} = \min(\hat{T}_{h,e}, \hat{T}_{c,e})$ , ou seja, a menor temperatura de entrada no equipamento.

$$\int_{T_{ref}=\hat{T}_{min}}^{T_i(x_k,y_l)} [Cp(T')dT'] = e_h(T_i(x_k, y_l)) = P_{Cp}(T_i(x_k, y_l)) - P_{Cp}(\hat{T}_{min}) \quad (4.32)$$

A primitiva de  $Cp$  normalmente não é linear. Como o objetivo é resolver um sistema linear, torna-se necessário linearizá-lo conforme apresentado na Seção 2.6.2.

A Equação 4.33 mostra a integral acima de forma linearizada em torno de  $T_i^{s-1}(x_k, y_l)$ , que é a temperatura no mesmo ponto obtida como resultado na simulação anterior, de forma que o índice  $s$  sobrescrito corresponde ao índice da simulação atual. Isso é feito com o objetivo de reduzir o erro da linearização, que diminui quanto mais próximo do valor de referência.

$$e_h(T_i(x_k, y_l)) \approx [P_{Cp}(\hat{T}_i^{s-1}(x_k, y_l)) + Cp(\hat{T}_i^{s-1}(x_k, y_l))(T_i(x_k, y_l) - \hat{T}_i^{s-1}(x_k, y_l))] - P_{Cp}(\hat{T}_{min}) \quad (4.33)$$

As integrais no espaço são obtidas por meio da aplicação da regra 1/3 de Simpson, uma vez que a função da entalpia no espaço não é conhecida, apenas pontos. A regra pode ser escrita de forma discretizada conforme as Equações 4.34 e 4.35, em que  $a \in \{0, K\}$  e  $b \in \{0, L\}$  são os índices da extremidade do canal a ser integrado. Essas constantes são usadas apenas para se evitar de escrever 4 equações parecidas de definição.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\hat{L}_p} [e_h(T_i(x_a, y_l)) dy] \\ & \approx \frac{1}{3} \Delta y \left\{ [e_h(T_i(x_a, y_1)) + e_h(T_i(x_a, y_L))] + 4 \sum_{n=1}^{\frac{L-1}{2}} e_h(T_i(x_a, y_{2n})) \right. \\ & \quad \left. + 2 \sum_{n=2}^{\frac{L-1}{2}} e_h(T_i(x_a, y_{2n-1})) \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$a \in \{1, K\}$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\hat{L}_p} [e_h(T_i(x_k, y_b)) dx] \\
& \approx \frac{1}{3} \Delta x \left\{ [e_h(T_i(x_1, y_b)) + e_h(T_i(x_K, y_b))] + 4 \sum_{n=1}^{\frac{K-1}{2}} e_h(T_i(x_{2n}, y_b)) \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{n=2}^{\frac{K-1}{2}} e_h(T_i(x_{2n-1}, y_b)) \right\} \tag{4.35}
\end{aligned}$$

$$b \in \{1, L\}$$

Computacionalmente, as Equações 4.28 a 4.31 correspondem à aplicação de todos estes métodos de forma integrada em uma única equação, que se torna muito extensa para ser escrita no texto.

Por fim, os coeficientes globais de transferência de calor são expressos pelas Equações 4.36 e 4.37.

$$U(T_i(x_k, y_l), T_{i-1}(x_k, y_l)) = \frac{1}{\frac{1}{h(T_{i-1}(x_k, y_l))} + \hat{R}_{d,c} + \frac{\hat{t}_p}{\hat{k}_p} + \frac{1}{h(T_i(x_k, y_l))} + \hat{R}_{d,h}} \tag{4.36}$$

$$\forall i \neq 1, \forall k, \forall l$$

$$U(T_i(x_k, y_l), T_{i+1}(x_k, y_l)) = \frac{1}{\frac{1}{h(T_{i+1}(x_k, y_l))} + \hat{R}_{d,c} + \frac{\hat{t}_p}{\hat{k}_p} + \frac{1}{h(T_i(x_k, y_l))} + \hat{R}_{d,h}} \tag{4.37}$$

$$\forall i \neq N_c, \forall k, \forall l$$

### 4.3. DISCRETIZAÇÃO DO CÁLCULO DA PERDA DE CARGA

A perda de carga segue a mesma ideia do balanço de energia. A malha e a regra quanto ao uso de aproximação por diferenças finitas é a mesma da Seção 4.2. A Equação 3.56 se mantém inalterada, enquanto as equações diferenciais podem ser reescritas de forma discretizada conforme as Equações 4.38 a 4.43:

$$\frac{P_i(x_{k+1}, y_l) - P_i(x_{k-1}, y_l)}{2\Delta x} = -p_{h,f_h} \frac{\xi(T_i(x_k, y_l)) \rho(T_i(x_k, y_l)) u^2(T_i(x_k, y_l))}{\hat{d}_e} \quad (4.38)$$

$\forall i \in S_{h,f_h}, \forall k \notin \{1, K\}, \forall l$

$$\frac{P_i(x_2, y_l) - P_i(x_1, y_l)}{\Delta x} = -p_{h,f_h} \frac{\xi(T_i(x_1, y_l)) \rho(T_i(x_1, y_l)) u^2(T_i(x_1, y_l))}{\hat{d}_e} \quad (4.39)$$

$\forall i \in S_{h,f_h}, \forall l, se p_{h,f_h} = -1$

$$\frac{P_i(x_K, y_l) - P_i(x_{K-1}, y_l)}{\Delta x} = -p_{h,f_h} \frac{\xi(T_i(x_K, y_l)) \rho(T_i(x_K, y_l)) u^2(T_i(x_K, y_l))}{\hat{d}_e} \quad (4.40)$$

$\forall i \in S_{h,f_h}, \forall l, se p_{h,f_h} = +1$

$$\frac{P_i(x_k, y_{l+1}) - P_i(x_k, y_{l-1})}{2\Delta y} = -p_{c,f_c} \frac{\xi(T_i(x_k, y_l)) \rho(T_i(x_k, y_l)) u^2(T_i(x_k, y_l))}{\hat{d}_e} \quad (4.41)$$

$\forall i \in S_{c,f_c}, \forall k, \forall l \notin \{1, L\}$

$$\frac{P_i(x_k, y_2) - P_i(x_k, y_1)}{\Delta y} = -p_{c,f_c} \frac{\xi(T_i(x_k, y_1)) \rho(T_i(x_k, y_1)) u^2(T_i(x_k, y_1))}{\hat{d}_e} \quad (4.42)$$

$\forall i \in S_{c,f_c}, \forall k, se p_{c,f_c} = -1$

$$\frac{P_i(x_k, y_L) - P_i(x_k, y_{L-1})}{\Delta y} = -p_{c,f_c} \frac{\xi(T_i(x_k, y_L)) \rho(T_i(x_k, y_L)) u^2(T_i(x_k, y_L))}{\hat{d}_e} \quad (4.43)$$

$\forall i \in S_{c,f_c}, \forall k, se p_{c,f_c} = +1$

As condições de contorno discretizadas são dadas por:

$$P_i(x_1, y_l) = P_{h,e} \quad (4.44)$$

$\forall i \in S_{h,1}, \forall l, se p_{h,f_h} = +1$

$$P_i(x_K, y_l) = P_{h,e} \quad (4.45)$$

$\forall i \in S_{h,1}, \forall l, se p_{h,f_h} = -1$

$$\begin{aligned}
P_i(x_k, y_1) &= P_{c,e} \\
\forall i \in S_{c,\widehat{N}_{pc}}, \forall l, se p_{c,f_c} &= +1
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
P_i(x_k, y_L) &= P_{c,e} \\
\forall i \in S_{c,\widehat{N}_{pc}}, \forall l, se p_{c,f_c} &= -1
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
P_i(x_1, y_l) &= P_{f_h-1,s} \\
\forall f_h \neq 1, \forall i \in S_{h,f_h}, \forall l, se p_{h,f_h} &= +1
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
P_i(x_K, y_l) &= P_{f_h-1,e} \\
\forall f_h \neq 1, \forall i \in S_{h,f_h}, \forall l, se p_{h,f_h} &= -1
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
P_i(x_k, y_1) &= P_{f_c+1,s} \\
\forall f_c \neq \widehat{N}_{pc}, \forall i \in S_{c,f_c}, \forall k, se p_{c,f_c} &= +1
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
P_i(x_k, y_L) &= P_{f_c+1,s} \\
\forall f_c \neq \widehat{N}_{pc}, \forall i \in S_{c,f_c}, \forall k, se p_{c,f_c} &= -1
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
P_{f_h,s} &= \frac{1}{\widehat{N}_{cph,f_h}} \sum_{i \in S_{h,f_h}} \left\{ \frac{1}{\widehat{L}_p} \int_0^{\widehat{L}_p} [P_i(x_K, y_l)] dy - \xi_{ZD} \cdot \frac{\rho(\bar{T}_i) u^2(\bar{T}_i)}{2} \right\} \\
\forall f_h, se p_{h,f_h} &= +1
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
P_{f_h,s} &= \frac{1}{\widehat{N}_{cph,f_h}} \sum_{i \in S_{h,f_h}} \left\{ \frac{1}{\widehat{L}_p} \int_0^{\widehat{L}_p} [P_i(x_1, y_l)] dy - \xi_{ZD} \cdot \frac{\rho(\bar{T}_i) u^2(\bar{T}_i)}{2} \right\} \\
\forall f_h, se p_{h,f_h} &= -1
\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
P_{f_c,s} &= \frac{1}{\widehat{N}_{cpc,f_c}} \sum_{i \in S_{c,f_c}} \left\{ \frac{1}{\widehat{L}_p} \int_0^{\widehat{L}_p} [P_i(x_k, y_L)] dx - \xi_{ZD} \cdot \frac{\rho(\bar{T}_i) u^2(\bar{T}_i)}{2} \right\} \\
\forall f_c, se p_{c,f_c} &= +1
\end{aligned} \tag{4.54}$$

$$P_{f_c,s} = \frac{1}{\hat{N}_{cpc,f_c}} \sum_{i \in S_{c,f_c}} \left\{ \frac{1}{\hat{L}_p} \int_0^{\hat{L}_p} [P_i(x_k, y_1)] dx - \xi_{ZD} \cdot \frac{\rho(\bar{T}_i) u^2(\bar{T}_i)}{2} \right\} \quad (4.55)$$

$$\forall f_c, \text{ se } p_{c,f_c} = -1$$

Assim como no caso da integral espacial nas equações referentes ao balanço de energia, a integral da pressão também é feita por meio da aplicação da regra 1/3 de Simpson, conforme as Equações 4.56 e 4.57.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\hat{L}_p} [P_i(x_a, y_l)] dy \\ & \approx \frac{1}{3} \Delta y \left\{ [P_i(x_a, y_1) + P_i(x_a, y_L)] + 4 \sum_{n=1}^{\frac{L-1}{2}} P_i(x_a, y_{2n}) \right. \\ & \quad \left. + 2 \sum_{n=2}^{\frac{L-1}{2}} P_i(x_a, y_{2n-1}) \right\} \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$a \in \{0, K\}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\hat{L}_p} [P_i(x_k, y_b)] dx \\ & \approx \frac{1}{3} \Delta x \left\{ [P_i(x_1, y_b) + P_i(x_K, y_b)] + 4 \sum_{n=1}^{\frac{K-1}{2}} P_i(x_{2n}, y_b) \right. \\ & \quad \left. + 2 \sum_{n=2}^{\frac{K-1}{2}} P_i(x_{2n-1}, y_b) \right\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$b \in \{0, L\}$$

#### 4.4. ALGORITMO DE SIMULAÇÃO

O conjunto de equações foi dividido em dois sistemas a serem resolvidos. O primeiro corresponde ao balanço de energia a fim de determinar a temperatura ao longo dos canais do equipamento e o segundo desenvolve o cálculo da perda de

carga, que depende de propriedades que são funções da temperatura. Portanto, a proposta é resolver primeiro o cálculo da temperatura e em seguida o da perda de carga.

Conforme discutido no Capítulo 3, o desenvolvimento do modelo assume propriedades dos fluidos constantes em cada volume de controle. A fim de contabilizar a variação dessas propriedades com a temperatura, o cálculo da temperatura é inserido em um processo iterativo que atualiza os valores das propriedades dos fluidos de acordo com os valores de temperatura obtidos na simulação anterior.

Cada sistema é composto por um conjunto de equações lineares que podem ser representadas em forma matricial conforme a Equação 4.58, onde  $\bar{A}$  corresponde à matriz de coeficientes,  $\vec{x}$  é o vetor solução e  $\vec{b}$  é o vetor de constantes.

$$\bar{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad (4.58)$$

A matriz é quadrada de tal forma que cada linha corresponde a uma equação e cada coluna a uma variável, ou seja, grau de liberdade igual a zero. O sistema possui número de variáveis igual ao número de pontos total no equipamento mais as temperaturas de saída em cada passe, ou seja, se  $n$  for a ordem da matriz,  $n = \hat{N}_c \cdot K \cdot L + \hat{N}_{ph} + \hat{N}_{pc}$ . O vetor de constantes possui tantos elementos quanto linhas na matriz e ambas são construídas linha a linha.

Uma vez que a matriz é quadrada e as equações são linearmente independentes, a matriz possui inversa. Portanto a forma mais direta de resolução consiste nos passos descritos na equação a seguir, onde  $\bar{A}^{-1}$  corresponde à inversa da matriz  $\bar{A}$  e  $\bar{I}$  é a matriz identidade.

$$\bar{A}^{-1} \bar{A} \cdot \vec{x} = \bar{A}^{-1} \vec{b} \rightarrow \bar{I} \cdot \vec{x} = \bar{A}^{-1} \cdot \vec{b} \rightarrow \boxed{\vec{x} = \bar{A}^{-1} \cdot \vec{b}} \quad (4.59)$$

O método da inversão de matriz é o mais direto, mas é custoso computacionalmente, uma vez que a matriz pode ser muito grande. Por exemplo, se for feita a simulação de um trocador contendo 31 placas com uma malha 11 por 11 e ambos os fluidos com um passe, a matriz terá ordem 3632, o que corresponde a

13.191.424 elementos. Há métodos numéricos disponíveis com o objetivo de tornar este cálculo menos custoso, mas o presente trabalho não se aprofundou neles.

O simulador foi desenvolvido em *Python* e as seguintes bibliotecas foram utilizadas: *numpy*, *pandas*, *matplotlib*, *scipy*, *itertools* e *copy*. A Figura 4.3 apresenta um fluxograma resumido do algoritmo utilizado. O modelo foi dividido em dois sistemas: um referente ao balanço de energia, delimitado na Figura 4.3 pela região verde, e outro para cálculo da queda de pressão, correspondente à região vermelha do fluxograma.

O primeiro passo para resolução do balanço de energia é determinar um vetor de temperaturas de base para o cálculo das propriedades, chamado de  $T^0$  na Figura 4.3. Este vetor possui a mesma dimensão e organização que o vetor a ser obtido como solução do sistema. No primeiro momento todos os elementos são definidos com o valor da temperatura média de entrada dos fluidos. Além disso, define-se também um critério de convergência. Em seguida são definidos três laços em cascata, de forma que, para cada índice  $i$  referente ao canal, percorre-se todos os índices  $k$  referentes à direção x; e para cada índice  $k$  percorre-se todos os índices  $l$  na direção y. Dessa forma, no laço mais interno há um conjunto de índices  $\{i, k, l\}$ , que define um ponto no equipamento.

Em seguida o coeficiente de troca térmica é avaliado na temperatura referente à posição  $i, k, l$  presente no vetor  $T^0$ , que inicialmente é a média das entradas. Depois o  $U$  é aplicado ao modelo gerando uma equação composta por um vetor de coeficientes e uma constante. Esses elementos são utilizados na construção da matriz ao longo das iterações, de forma que, após percorridos todos os canais, obtém-se a matriz e o vetor de constantes completos. Então o sistema é resolvido por inversão da matriz retornando o vetor de temperaturas  $x$ .

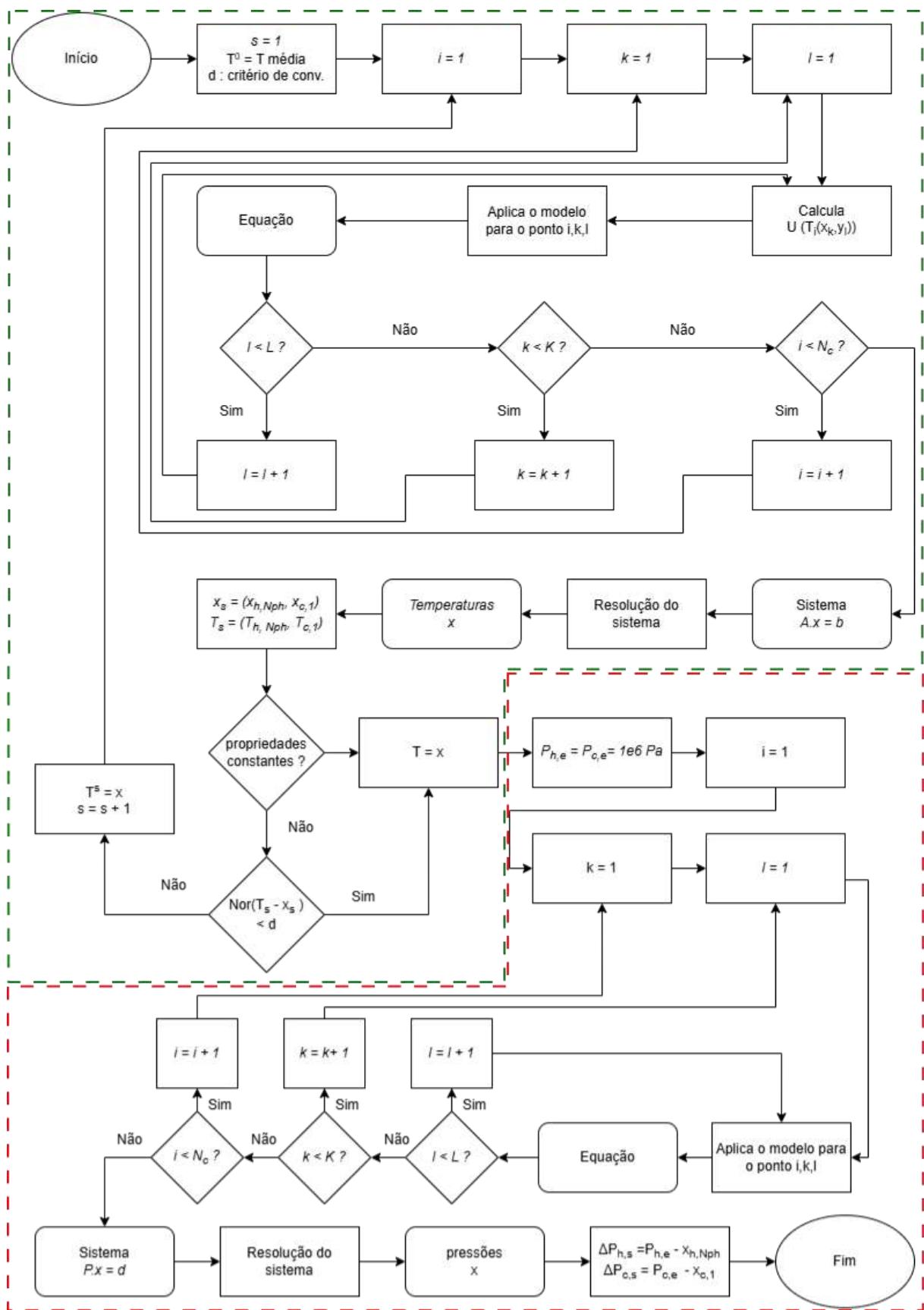
Em seguida define-se dois vetores bidimensionais contendo as temperaturas de saída das correntes. Um é referente à simulação atual e o outro é referente à simulação anterior, cujos valores estão armazenados na variável  $T^0$ , que na primeira simulação é a média da entrada dos fluidos. Então verifica-se a abordagem de simulação escolhida. Se for a que considera propriedades variáveis, é calculada a norma da diferença entre os vetores de temperatura de saída e o resultado é comparado contra o critério de convergência. Caso o critério não seja atendido, o

vetor  $T^0$  é atualizado para os resultados obtidos na simulação atual e os laços são reiniciados resolvendo-se o sistema novamente.

A partir da segunda simulação, o vetor  $T^0$  passa conter as temperaturas obtidas em cada ponto por meio da simulação anterior, o que influi no valor de  $U$  calculado. Dessa forma é possível computar as propriedades na temperatura de cada ponto, configurando a abordagem de propriedades variáveis. Simulações são realizadas até que o critério seja atendido, retornando o vetor obtido na última simulação.

O sistema de queda de pressão está delimitado na Figura 4.3 pela região tracejada vermelha. Ele é o segundo a ser resolvido, uma vez que depende das temperaturas obtidas no primeiro sistema. A abordagem é a mesma utilizada no sistema anterior, salvo o fato de que neste caso não há critério de convergência e o sistema é resolvido apenas uma vez.

**Figura 4.3 – Fluxograma de simulação**



Fonte: elaboração própria

## 5. OTIMIZAÇÃO DE PROJETO

### 5.1. INTRODUÇÃO

O projeto do trocador de calor consiste em determinar suas propriedades geométricas, como número e tamanho das placas por exemplo, para que ele atenda a uma determinada carga térmica. Conforme discutido na Seção 2.5, este problema possui mais variáveis do que equações e, portanto, possui mais de uma solução viável. Assim, este problema suscetível a um processo de otimização, a fim de se escolher o melhor candidato em relação a um critério de qualidade. Devido ao fato de projetos industriais serem intensivos em capital, normalmente os critérios escolhidos são de cunho financeiro.

No presente estudo são utilizados dois métodos ou técnicas de otimização. O primeiro é o *Set Trimming*, que em casos mais complexos funciona como uma técnica de redução do universo de possibilidades. O segundo é o *Smart Enumeration*, que consiste na simulação e avaliação dos candidatos de forma ordenada tornando possível determinar a solução ótima sem a necessidade de avaliar todos os candidatos.

Este capítulo apresenta os problemas de otimização que serão abordados, assim como o tratamento necessário para aplicação do *Set Trimming*.

### 5.2. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Há dois problemas comuns de otimização de projetos de equipamentos. O primeiro consiste na minimização da área total do equipamento, o que indiretamente minimiza o custo de capital  $C_{cap}$ , também chamado de CAPEX; e o segundo é a minimização do Custo Total Anualizado (TAC do termo de inglês *Total Annualized Cost*), que considera não apenas o custo de capital, mas também o custo de operação  $C_{op}$ , também chamado de OPEX. No presente estudo serão resolvidos estes dois tipos de problemas a fim de comparar os seus resultados. As próximas subseções definem estes problemas.

### 5.2.1. Projeto de menor área total

Este tipo de problema consiste em minimizar a área total de troca térmica dadas restrições de velocidade de escoamento nos canais ( $\hat{u}_{min}$  e  $\hat{u}_{max}$ ), restrições de perda de carga ( $\Delta\hat{P}_{max}$ ) e com o objetivo de atender a uma demanda térmica específica ( $\hat{Q}_{espec}$ ). Portanto este problema pode ser descrito conforme a Equação 5.1.

$$\min(A_t) = (N_p - 2)L_p^2$$

s.a.

$$\hat{u}_{min} \leq u_{j,i} \leq \hat{u}_{max}, \quad \forall j \in \{h, c\}, \forall f_j, \forall i \in S_{j,f_j} \quad (5.1)$$

$$\Delta P_j \leq \Delta\hat{P}_{max} \quad \forall j \in \{h, c\}$$

$$\dot{Q} \geq \hat{Q}_{espec}$$

Na Equação 5.1,  $u_{j,i}$  corresponde às velocidades de escoamento para o fluido quente ou frio no canal de índice  $i$ .

### 5.2.2. Projeto de menor TAC

O segundo tipo de problema de otimização corresponde à minimização do TAC dadas restrições de velocidade de escoamento e uma carga térmica a ser atendida. Vale ressaltar que neste problema não há restrição de perda de carga, mas ela é calculada para determinação do custo de operação  $C_{op}$ . Este caso é descrito conforme a Equação 5.2.

$$\min(TAC) = \hat{r}C_{cap} + C_{op,h} + C_{op,c}$$

s.a.

$$\hat{u}_{min} \leq u_{j,i} \leq \hat{u}_{max}, \quad \forall j \in \{h, c\}, \forall f_j, \forall i \in S_{j,f_j} \quad (5.2)$$

$$\dot{Q} \geq \hat{Q}_{espec}$$

$$\hat{r} = \frac{\hat{i}(1 + \hat{i})^{\hat{n}}}{(1 + \hat{i})^{\hat{n}} - 1}$$

$$C_{cap} = 11000 + 2000A_t^{0,84}$$

$$C_{op,x} = \hat{N}_{op} \frac{\hat{p}_e}{10^3} \left( \frac{\Delta P_j \hat{m}_x}{\hat{\eta} \rho_x} \right), \quad \forall x \in \{h, c\}$$

Na Equação 5.2, o  $\hat{r}$  é o fator de anualização,  $\hat{i}$  é a taxa de retorno,  $\hat{n}$  é o horizonte de planejamento em anos,  $\hat{N}_{op}$  é o número de horas de operação por ano,  $\hat{p}_e$  é o custo de energia elétrica em US\$/ano,  $\rho_x$  é a densidade da corrente em kg/m<sup>3</sup> e  $\hat{\eta}$  é a eficiência da bomba. A equação para cálculo do CAPEX foi obtida de Picón-Nuñez (2021); e a equação do OPEX foi obtida de Nahes (2021).

### 5.3. PROXY SET TRIMMING

Conforme discutido na Seção 2.5.5, o *Set Trimming* completo não é possível de ser aplicado a modelos complexos como o desenvolvido neste estudo. Isso decorre do fato de se considerar o efeito da temperatura nas propriedades do fluido, resultando em um sistema de equações ao invés de uma equação única. Portanto, utiliza-se uma variação do método chamado *Proxy Set Trimming*, que consiste no uso de versões relaxadas das restrições. As Equações 5.3 a 5.8 correspondem às versões relaxadas das restrições presentes nos dois problemas de otimização apresentados na Seção 5.2.

$$u_h^{LB} = \frac{\hat{m}_h}{\rho^{MAX} \hat{\delta} L_p N_{cph,1}} \geq \hat{u}_{min} \quad (5.3)$$

$$u_h^{UB} = \frac{\hat{m}_h}{\rho^{MIN} \hat{\delta} L_p N_{cph,N_{ph}}} \leq \hat{u}_{max} \quad (5.4)$$

$$u_c^{LB} = \frac{\hat{m}_c}{\rho^{MAX} \hat{\delta} L_p N_{cpc,N_{pc}}} \geq \hat{u}_{min} \quad (5.5)$$

$$u_c^{UB} = \frac{\hat{m}_c}{\rho^{MIN} \hat{\delta} L_p N_{cpc,1}} \leq \hat{u}_{max} \quad (5.6)$$

$$\dot{Q}^{UB} = U^{UB} A_t LMTD \geq \hat{Q}_{espec} \quad (5.7)$$

$$\Delta P_j^{LB} = \left( \sum_{f_j=1}^{N_{pj}} \Delta P_{f_j} \right)^{LB} + 1,3 \frac{\rho_j^{MIN} u_{porta,j}^2}{2} \leq \widehat{\Delta P}_{max} \quad (5.8)$$

$$\forall j \in \{h, c\}$$

Nas Equações 5.3 a 5.8,  $u_j^{LB}$  e  $u_j^{UB}$  correspondem aos *lower* e *Upper bounds* (*LB* e *UB* respectivamente) das velocidades de escoamento dos fluidos no canal. Isso significa que ao invés de testar cada canal individualmente, são verificadas as condições hipotéticas de maior ou menor velocidade possíveis. Os termos com *MIN* ou *MAX* sobrescritos correspondem a valores de propriedades mínimos ou máximos dentro da faixa de temperatura da corrente.  $\Delta P_j^{LB}$  é a menor perda de carga possível de se obter enquanto  $\dot{Q}^{UB}$  é a maior carga térmica possível.

Se as variáveis dos fluidos forem monotônicas, ou seja, sempre crescentes ou decrescentes com a temperatura em todo o intervalo, pode-se facilmente definir os valores máximos ou mínimos em termos de temperaturas de entrada ou saída dos fluidos conforme a Tabela 5.1 (Nahes, 2023).

**Tabela 5.1 – Valores limites de propriedades**

Propriedade	Temperatura de avaliação
$\mu^{MIN}$	Entrada do fluido quente
$\rho^{MIN}$	Entrada do fluido quente
$\rho^{MAX}$	Entrada do fluido frio
$k^{MAX}$	Entrada do fluido frio
$Cp^{MAX}$	Entrada do fluido quente

Fonte: Nahes, 2023

Vale ressaltar que, na prática, os valores limites não são necessariamente atingidos, ou seja, a carga térmica do candidato pode ser inferior ao seu *UB* ou a perda de carga ser superior à sua *LB*, mas não o contrário. Por isso, o *Proxy Set Trimming* não garante que todos os candidatos restantes sejam viáveis, mas ainda sim reduz drasticamente o universo de possibilidades. Dessa forma, torna-se necessário avaliar os candidatos após a aplicação dessa técnica a fim de determinar o candidato viável ótimo.

#### 5.4. SMART ENUMERANTION

O *Smart Enumeration* é utilizado após a aplicação da técnica do *Proxy Set Trimming* a fim de avaliar a viabilidade dos candidatos e determinar o ótimo. Conforme discutido na Seção 2.5.6, o diferencial deste método é a possibilidade de obter a solução ótima sem a necessidade de realizar a simulação de todos os candidatos. A seção citada também apresenta o algoritmo utilizado para isso. O que falta definir é a função objetivo e a ordem a ser seguida.

O primeiro passo consiste em realizar o cálculo da função objetivo, seja na sua forma completa ou relaxada e depois ordenar a lista em relação a ela. No caso da minimização do TAC, a função objetivo é relaxada em *LB*, devido à perda de carga presente no custo operacional. Enquanto na minimização da área a *FO* é completa, uma vez que é resultado direto da aplicação das variáveis de decisão. Em ambos os casos, a lista de candidatos deve ser ordenada em ordem crescente da *FO* uma vez que se trata de um problema de minimização.

Conforme visto na Seção 2.5.6, no caso da minimização da área, o primeiro candidato viável, ou seja, que atenda à carga térmica mínima e a perda de carga máxima, é necessariamente a solução ótima, uma vez que as áreas são crescentes e são funções completas. Por outro lado, no caso de minimização do TAC, a função *FO* é uma *LB*. Os resultados reais são necessariamente superiores, portanto, o ótimo só é garantido quando a *FO* do incumbente for inferior ao *LB* da *FO* do candidato.

## 6. RESULTADOS

### 6.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta os resultados obtidos de testes realizados no simulador e um estudo de caso de projeto ótimo de um trocador de calor de placas soldadas. A segunda seção apresenta o processo de validação do modelo. A terceira seção mostra resultados de simulações com dois fluidos distintos e uma comparação entre a abordagem considerando as propriedades dos fluidos como função da temperatura e considerando-as constantes. A última seção apresenta dois casos de projeto ótimo do equipamento: um minimizando a área total de troca térmica e o outro minimizando o TAC.

### 6.2. VALIDAÇÃO

A validação é um processo necessário para determinar se o modelo proposto é confiável. Ela pode ser efetuada de várias formas. O modelo em questão foi validado realizando simulações em casos próximos a limites nos quais há soluções analíticas disponíveis na literatura.

#### 6.2.1. Modelos analíticos

O simulador foi testado e comparado contra dois modelos analíticos em temos de efetividade e NUT. O primeiro corresponde a duas correntes trocando calor em fluxo cruzado com ambos os fluidos não misturados e com passe único, ou seja, contendo uma barreira física; conforme a Equação 6.1 (Incropora, 2008).

$$\varepsilon = 1 - \exp \left\{ \left( \frac{1}{C_r} \right) \cdot NUT^{0,22} [\exp[-C_r \cdot NUT^{0,78}] - 1] \right\} \quad (6.1)$$

Lembrando que  $\varepsilon$  é a efetividade definida pela Equação 2.8,  $NUT$  é o número de unidades de transferência definido pela Equação 2.12 e  $C_r$  é a razão entre as capacidades térmicas definidas pela Equação 2.10.

O segundo modelo foi proposto por Picón-Nuñez (2021) e utiliza o valor da efetividade calculada para um passe em escoamento cruzado pela Equação 6.1 e aplica em uma equação que permite determinar a efetividade geral em múltiplos passes iguais. A Equação 6.2 consiste nesta correlação onde  $\varepsilon_{cruzado}$  corresponde à efetividade de um passe determinada pela Equação 6.1.

$$\varepsilon = \frac{\left[ \left( \frac{1 - C_r \cdot \varepsilon_{cruzado}}{1 - \varepsilon_{cruzado}} \right)^{\hat{N}_{px}} - 1 \right]}{\left[ \left( \frac{1 - C_r \cdot \varepsilon_{cruzado}}{1 - \varepsilon_{cruzado}} \right)^{\hat{N}_{px}} - C_r \right]} \quad (6.2)$$

### 6.2.2. Procedimento

A validação foi feita considerando água tanto como fluido quente quanto frio. Além disso, foi considerado fator de depósito ( $R_{d,x}$ ) igual a 0,0002 m.K/W em ambos os fluidos. Vale ressaltar que todas as soluções analíticas consideram propriedades constantes nos fluidos, portanto as simulações foram feitas nestas condições. A Tabela 6.1 mostra as condições de vazão, temperaturas de entrada e temperaturas utilizadas para determinação das propriedades de cada fluido.

**Tabela 6.1 – Propriedades dos fluidos para validação**

Fluido	Vazão mássica (kg/s)	Temperatura de entrada (°C)	Temperatura das propriedades (°C)
Quente	Variável	90	70
Frio	Variável	50	70

Fonte: elaboração própria

As vazões são variáveis a fim de realizar simulações em condições definidas de NUT. Além disso, a vazão do fluido frio foi definida de forma proporcional à vazão do fluido quente de forma a modular o valor de  $C_r$  para diferentes casos. O seu valor é definido conforme a Equação 6.3 abaixo.

$$m_c = C_r \cdot m_h \quad (6.3)$$

As propriedades dos fluidos foram calculadas por meio de correlações por Green (2019). Para a água as correlações são dadas conforme as Equações 6.4 a 6.7.

$$\rho = 1,7874 \cdot 10^1 + 3,5618 \cdot 10^1 \tau^{\frac{1}{3}} + 1,9655 \cdot 10^1 \tau^{\frac{2}{3}} - 9,1306 \tau^{\frac{5}{3}} - 3,1367 \cdot 10^1 \tau^{\frac{16}{3}} - 8,1356 \cdot 10^2 \tau^{\frac{43}{3}} - 1,7421 \cdot 10^7 \tau^{\frac{110}{3}} \quad (6.4)$$

$$Cp = 2,7637 \cdot 10^5 - 2,0901 \cdot 10^3 T + 8,125 T^2 - 1,4116 \cdot 10^{-2} T^3 + 9,3701 \times 10^{-6} T^4 \quad (6.5)$$

$$\mu = \exp \left( -5,2843 \cdot 10^1 + \frac{3,7036 \cdot 10^3}{T} + 5,866 \ln(T) - 5,879 \times 10^{-29} T^{10} \right) \quad (6.6)$$

$$k = -4,32 \cdot 10^{-1} + 5,7255 \cdot 10^{-3} T - 8,078 \cdot 10^{-6} T^2 + 1,861 \times 10^{-9} T^3 \quad (6.7)$$

Nas quais  $\tau = 1 - \frac{T}{647,096}$  e todas as temperaturas são dadas em K.

A Tabela 6.2 mostra dados do trocador de calor utilizado nos testes de validação.

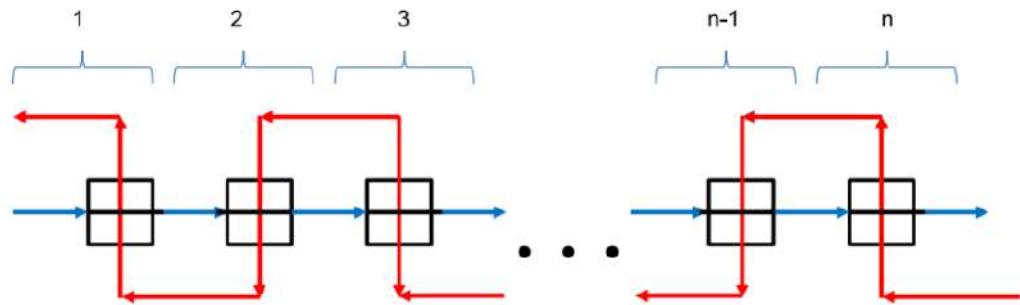
**Tabela 6.2 – Propriedades do trocador para validação**

Propriedade	Valor
Número de placas ( $\hat{N}_p$ )	Variável
Comprimento da placa ( $\hat{L}_p$ )	0,60 m
Espessura da placa ( $\hat{t}_p$ )	1,00 mm
Espaço entre placas ( $\hat{\delta}$ )	4,95 mm
Ângulo de corrugação ( $\hat{\beta}$ )	45º
<i>Pitch</i> ( $\hat{s}$ )	15 mm
Condutividade térmica da placa ( $\hat{k}_p$ )	16,2 W/(m.K)
Fator de alargamento de superfície ( $\hat{F}_x$ )	1,25

Fonte: elaboração própria

Foram feitos dois testes, um para cada caso de solução analítica. O primeiro foi feito com ambos os fluidos em passe único em contracorrente e o outro foi feito com cada fluido com número de passes igual ao número de canais, ou seja, cada passe possui um canal. A Figura 6.1 apresenta um esquema da configuração utilizada nos testes com múltiplos passes.

**Figura 6.1 – Configuração da validação de múltiplos passes**



Fonte: Picón-Núñez, 2021

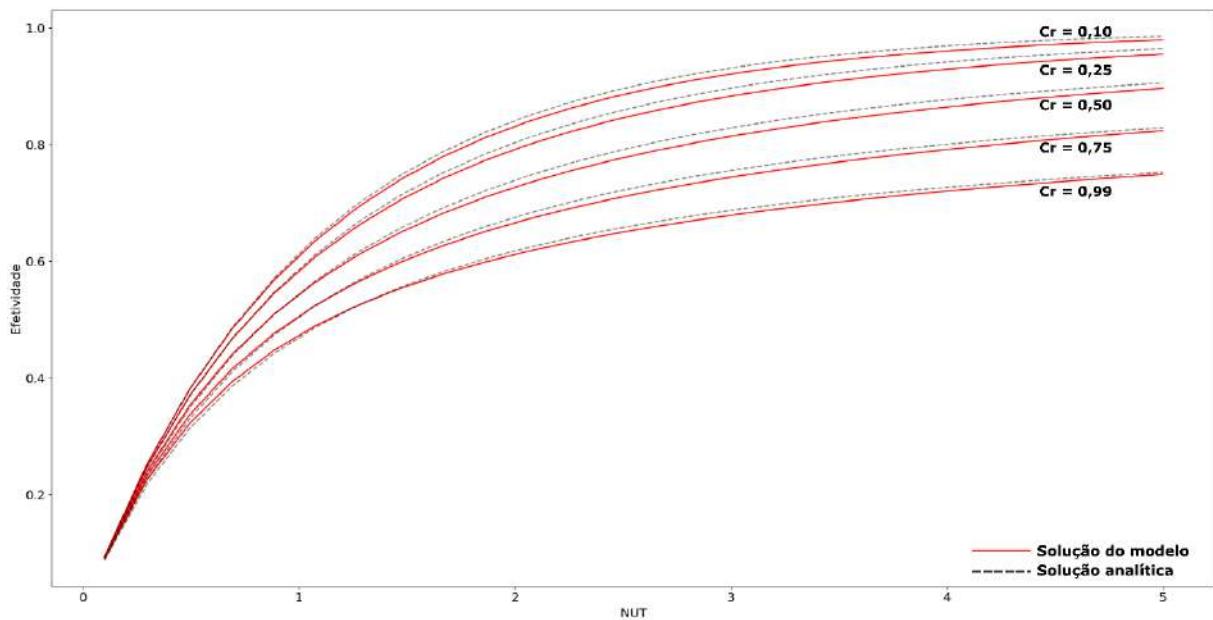
Antes de cada teste foi feito um teste de malha a fim de determinar o número de pontos necessário para se obter um resultado consistente. Este teste de malha foi feito considerando o maior número de placas a ser avaliado e condições operacionais referentes ao maior valor de NUT testado, que foi 5,0. Foram realizadas simulações com número cada vez maior de pontos até que a diferença entre o resultado de uma simulação e o anterior fosse inferior ao critério de convergência, que foi 0,05 °C na norma do vetor diferença entre temperaturas de saída.

Cada teste contou com simulações com valores de  $C_r \in \{0.99, 0.75, 0.50, 0.25, 0.10\}$  e para cada valor de  $C_r$  foram feitas simulações com número de placas variado de 5 a 75, com passos de 2 placas. As vazões foram ajustadas para valores de NUT de 0,1 a 5,0 igualmente espaçados entre as placas. De forma que o teste com 5 placas foi feito em condições de vazão para que o NUT fosse igual a 0,1; enquanto o teste com 75 placas foi feito com NUT 5,0 e as outras simulações foram casos intermediários. Ao total foram 260 simulações, 130 em cada caso.

### 6.2.3. Resultados – Teste de Validação

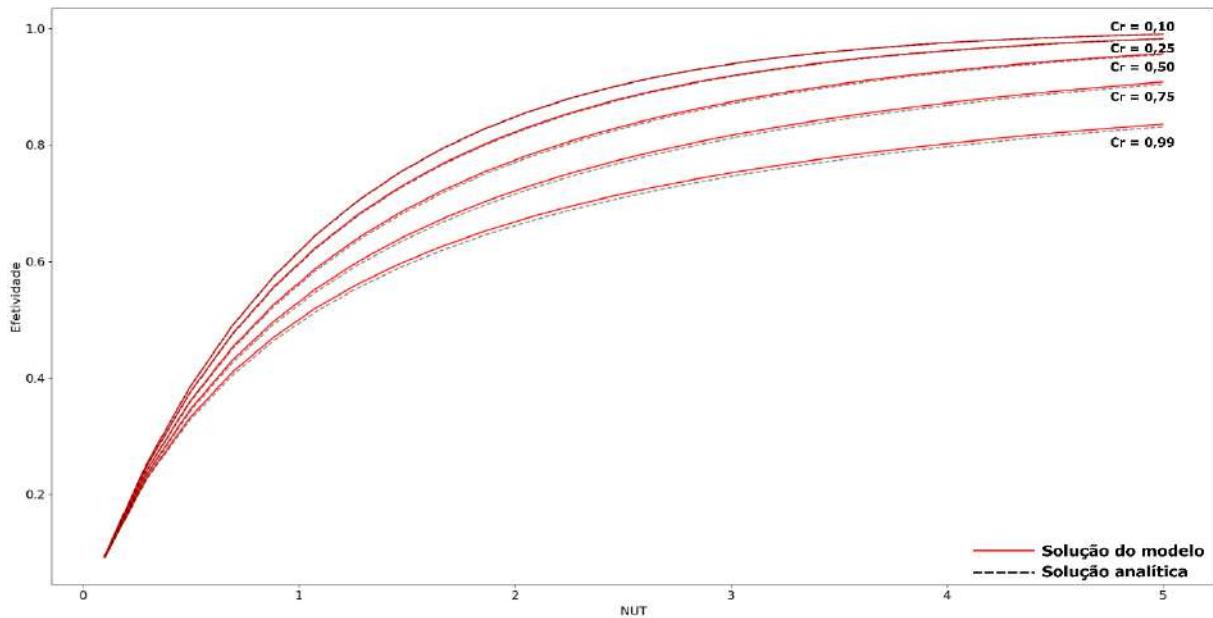
As Figuras 6.2 e 6.3 mostram os resultados dos testes de validação para passe simples em contracorrente e múltiplos passes .

**Figura 6.2 – Efetividade x NUT para diferentes  $C_r$  (passe simples em contracorrente)**



Fonte: elaboração própria

**Figura 6.3 – Efetividade x NUT para diferentes  $C_r$  (Múltiplos passes em contracorrente)**



Fonte: elaboração própria

A Tabela 6.3 mostra um resumo dos erros dos diferentes testes, que consistem na diferença entre a efetividade calculada pelo simulador e a obtida pelas soluções analíticas.

**Tabela 6.3 – Erros mínimos e máximo dos testes de validação**

Cr	Passe simples		Múltiplos passes	
	Min (%)	Max(%)	Min (%)	Max (%)
0,99	0,0	3,4	0,6	1,3
0,75	0,0	2,5	0,4	1,0
0,50	0,1	1,8	0,2	0,7
0,25	0,0	1,6	0,1	0,4
0,10	0,1	1,2	0,0	0,1

Fonte: elaboração própria

Como pode ser observado nas Figuras 6.2 e 6.3 e pelos dados na Tabela 6.3, para 260 simulações, o erro máximo obtido foi de 3,4%. Vale notar que os erros obtidos nas simulações com único passe são superiores aos obtidos com múltiplos passes. Uma explicação pode ser o fato de no caso com passe simples, os cálculos das temperaturas de saída possuírem contribuições de vários canais, cada um com uma integral numérica, que possui erro associado. Enquanto no caso com múltiplos passes, as temperaturas de saída dos passes contam com apenas um canal cada. Uma vez que o erro obtido foi baixo para diferentes condições de  $C_r$  e  $NUT$ , pode-se considerar o modelo confiável.

### 6.3. SIMULAÇÃO – PROPRIEDADES CONSTANTES E VARIÁVEIS

Esta seção tem o objetivo de realizar uma comparação entre simulações considerando propriedades constantes e variáveis com a temperatura. Para isso, serão feitos testes com dois fluidos: o primeiro com água, e o segundo com um petróleo cru. As comparações serão feitas em termos do coeficiente global de troca térmica.

As condições de vazão mássica e temperaturas de entrada em ambos os testes serão as mesmas, estando apresentadas na Tabela 6.4.

**Tabela 6.4 – Propriedades dos fluidos para comparação de U**

Fluido	Vazão mássica (kg/s)	Temperatura de entrada (°C)
Quente	40	90
Frio	20	50

Fonte: elaboração própria

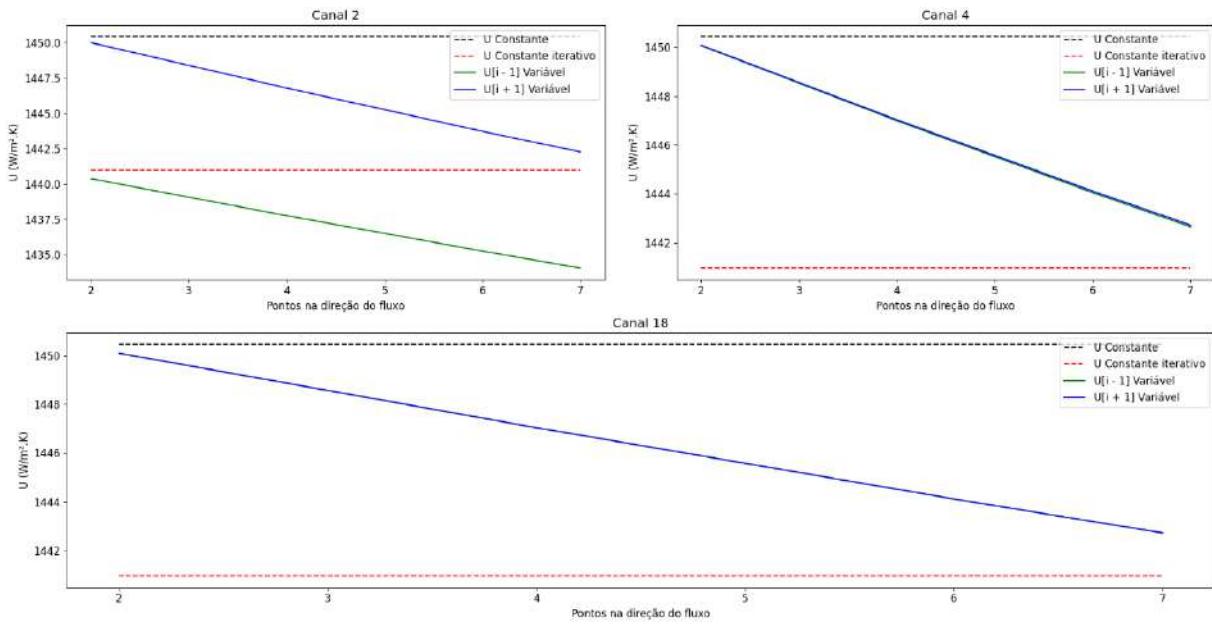
Na simulação com propriedades constantes, o valor de  $U$  é calculado considerando a temperatura média de entrada dos dois fluidos, que no exemplo proposto é igual a 70°C. Outra abordagem explorada consiste no cálculo considerando propriedades constantes calculadas de forma iterativa. Primeiro calcula-se um  $U_{\text{inicial}}$  na temperatura média de entrada dos fluidos e depois novas simulações são feitas recalculando o  $U$  com os coeficientes de troca por convecção avaliados nas temperaturas média de cada fluido, considerando o resultado da simulação anterior. Esse processo é repetido até que um critério de convergência seja atendido, que neste caso é 0,05 na norma do vetor diferença de temperatura entre simulações consecutivas.

O trocador de calor a ser simulado em ambos os testes possui as mesmas propriedades apresentadas na Tabela 6.2 com 35 placas de 0,9 m de lado. Em ambos os testes, os valores de  $U$  foram avaliados no meio dos canais 2, 4 e 18. Os canais 2 e 4 foram escolhidos por serem os dois primeiros e o 18 por corresponder ao meio do equipamento. Estes canais são percolados pelo fluido quente, uma vez que na simulação foi definido que o fluido frio escoa pelo primeiro canal. Além disso, testes de malha foram realizados antes de cada simulação. As próximas subseções mostram os resultados dos testes

### 6.3.1. Simulação com água

O primeiro teste considera que os fluidos quente e frio são água a diferentes temperaturas. As propriedades foram calculadas utilizando as Equações 6.4 a 6.7 apresentadas na seção anterior. A Figura 6.4 mostra um mosaico contendo gráficos do perfil de  $U$  no meio dos canais 2, 8 e 18. Nela, a curva tracejada preta corresponde a propriedades constantes calculadas na temperatura média de entrada dos fluidos, a curva tracejada vermelha é o resultado da simulação considerando propriedades constantes avaliadas na temperatura média de cada fluido de forma iterativa, e as curvas verde e azul correspondem aos valores de  $U$  com propriedades variáveis. A verde é o coeficiente de troca entre o canal atual e o anterior enquanto o azul corresponde à troca com o canal posterior.

**Figura 6.4 – Comparação do  $U$  para água considerando propriedades constantes e variáveis**



Fonte: elaboração própria

A Tabela 6.5 mostra um resumo dos coeficientes globais de troca térmica obtidos neste teste.

**Tabela 6.5 – Resultados do teste de  $U$  para água**

Canais	$U$ constante	$U$ constante iterativo	Mínimo	$U$ variável Máximo	Variação (%)
2	1450,5	1441,0	1434,0	1450,0	1,1
4	1450,5	1441,0	1442,6	1450,1	0,5
18	1450,5	1441,0	1442,7	1450,1	0,5

Fonte: elaboração própria

A Figura 6.4 indica que nos canais mais próximos das extremidades do equipamento, há diferença entre o coeficiente  $U$  avaliado para montante e para jusante do canal de análise, enquanto essa diferença diminui nos canais mais internos. Além disso, pode-se perceber que para os canais selecionados, o  $U$  calculado de forma rigorosa é inferior ao obtido considerando a temperatura média de entrada ao longo de toda a extensão dos canais. A maior variação entre os valores máximos e mínimos obtida foi de 1,1% no canal 2.

A Tabela 6.6 mostra as temperaturas de saída resultantes das simulações por meio das três abordagens.

**Tabela 6.6 – Resultados das simulações com água**

Método	Fluido quente		Fluido frio	
	Entrada (°C)	Saída (°C)	Entrada (°C)	Saída (°C)
Propriedades constantes	90,00	83,26	50,00	63,47
Propriedades constantes iterativo	90,00	83,32	50,00	63,43
Propriedades variáveis	90,00	83,31	50,00	63,44

Fonte: elaboração própria

Os resultados são muito próximos à abordagem com propriedades variáveis, principalmente o processo iterativo, que destoa em apenas 0,01°C na temperatura de saída. A água é um fluido cujas propriedades físicas não são tão sensíveis às variações de temperatura. Isso explica o fato de, neste caso, uma abordagem simplificada apresentar resultados próximos aos obtidos considerando-se o efeito da temperatura nas propriedades do fluido.

### 6.3.2. Simulação com petróleo cru

O segundo teste consiste em simulações com um petróleo cru como fluido. Isso é feito com o objetivo de verificar as diferenças entre as três abordagens de simulação em um fluido mais sensível às variações de temperatura. As propriedades físicas do óleo cru aqui usadas são obtidas através de correlações apresentadas por Arsenyeva (2016), apresentadas nas Equações 6.8 a 6.11.

$$\rho = 783[1 - 0,0011(T - 293,15)] \quad (6.8)$$

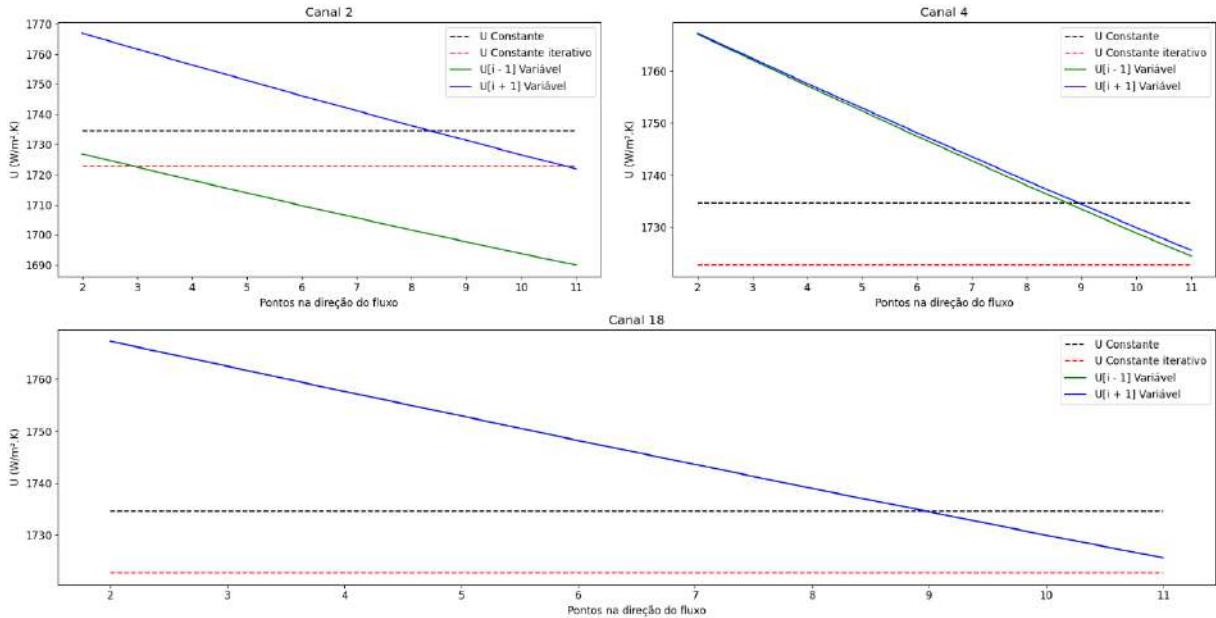
$$C_p = 1825 + 5,46(T - 293,15) \quad (6.9)$$

$$\mu = \rho \cdot 10^{-6}[\exp(19,46 - 3,3 \ln T) - 0,8] \quad (6.10)$$

$$k = 0,168 - 0,000466(T - 293,15) \quad (6.11)$$

Onde  $T$  é dado em K,  $\rho$  é dado em kg/m<sup>3</sup>,  $\mu$  é dado em Pa.s,  $k$  em W/(m.K) e  $C_p$  em J/(kg.K). As condições de simulação e canais avaliados foram os mesmos do teste com água e os resultados são apresentados na Figura 6.5.

**Figura 6.5 – Comparação do U para petróleo cru considerando propriedades constantes e variáveis**



Fonte: elaboração própria

Assim como no caso da água, a Tabela 6.6 mostra um resumo dos coeficientes de troca térmica obtidos para a simulação com petróleo cru.

**Tabela 6.6 – Resultados do teste de U para petróleo cru**

Canais	U	U	Mínimo	U variável	
	constante	constante iterativo		Máximo	Variação (%)
2	1734,7	1722,7	1690,0	1766,9	4,4
4	1734,7	1722,7	1724,4	1767,3	2,4
18	1734,7	1722,7	1725,6	1767,3	2,4

Fonte: elaboração própria

O perfil dos resultados com  $U$  variável é análogo ao obtido no teste com a água. Entretanto, no caso do petróleo cru observa-se variação máxima de  $U$  igual a 4,4%, superior ao encontrado no caso da água.

A Tabela 6.8 mostra as temperaturas de saída obtidas por meio das simulações com as diferentes abordagens aqui adotadas.

**Tabela 6.8 – Resultados das simulações com petróleo cru**

Método	Fluido quente		Fluido frio	
	Entrada (°C)	Saída (°C)	Entrada (°C)	Saída (°C)
Propriedades constantes	90,00	78,57	50,00	72,84
Propriedades constantes iterativo	90,00	79,07	50,00	73,15
Propriedades variáveis	90,00	79,06	50,00	73,19

Fonte: elaboração própria

A simulação com propriedades constantes apresentou resultados com até 0,5°C de diferença em relação à abordagem por meio de propriedades variáveis. Entretanto a aplicação de um processo iterativo na determinação de  $U$  considerando as temperaturas medidas de cada fluido diminuiu consideravelmente o erro desse método, resultado em diferenças de no máximo 0,04°C em relação ao modelo mais rigoroso.

Em ambos os casos, o uso da aproximação de propriedades constantes introduz erros à simulação e pode impactar no projeto do equipamento, resultando em um trocador superestimado ou subestimado. Normalmente fatores de segurança são aplicados ao projeto de forma a sobrepor esses erros. Como visto nos testes acima, o erro pode ser maior ou menor a depender da sensibilidade do fluido à variação de temperatura.

#### 6.4. PROJETO

Esta seção apresenta o desenvolvimento de um projeto ótimo adotando os dois critérios apresentados no Capítulo 5.

O problema consiste no projeto de um trocador de calor de placas soldadas para a troca térmica entre duas correntes de água, cujas propriedades físicas são descritas pelas Equações 6.5 a 6.8. Uma corrente escoa a 40 kg/s, entra no trocador a 90 °C e deve sair a 80°C. A outra corrente escoa a 30 kg/s e entra no trocador a 25°C. Ambos os fluidos possuem fator de depósito igual a 0,0002 m<sup>2</sup>.K/W.

As variáveis de projeto são: o número de placas, o seu comprimento, o ângulo de corrugação e o número de passes em cada corrente. As Equações 6.12 a 6.15 descrevem os valores possíveis para cada variável.

$$N_p = \{8, 9, 10, \dots, 201\} \quad (6.12)$$

$$L_p = \{0,3; 0,6; 0,9; 1,2; 1,5\} \quad (6.13)$$

$$N_{pj} = \{1, 2, 3, 4\} \quad (6.14)$$

$$\forall j \in \{h, c\}$$

$$\beta = \{30, 45, 50, 60, 65\} \quad (6.15)$$

Além das variáveis descritas, o problema possui os parâmetros apresentados na Tabela 6.9.

**Tabela 6.9 – Parâmetros de projeto**

Propriedade	Valor
Espessura da placa ( $\hat{t}_p$ )	1,00 mm
Espaço entre placas ( $\hat{\delta}$ )	4,95 mm
<i>Pitch</i> ( $\hat{s}$ )	15 mm
Condutividade térmica da placa ( $\hat{k}_p$ )	16,2 W/(m.K)
Fator de área de superfície ( $\hat{F}_x$ )	1,25
Diâmetro do distribuidor de entrada ( $\hat{D}_e$ )	256 mm
Diâmetro do distribuidor de saída ( $\hat{D}_s$ )	256 mm

Fonte: elaboração própria

As seções a seguir apresentam detalhes das condições de cada processo de otimização e mostram seus resultados.

#### 6.4.1. Projeto com menor área de troca térmica

O projeto com menor área total de troca térmica é definido pela Equação 6.16:

$$\min(A_t) = (N_p - 2)L_p^2$$

s.a.

$$0,5 \text{ m/s} \leq u_{j,i} \leq 1,5 \text{ m/s}, \quad \forall j \in \{h, c\}, \forall f_j, \forall i \in S_{j,f_j} \quad (6.16)$$

$$\Delta P_j \leq 1 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\dot{Q} \geq \hat{Q}_{espec}$$

Na Equação 6.16, 0,5 e 1,5 são os limites inferior e superior de velocidade média de escoamento nos canais entre as placas, respectivamente, e  $1 \times 10^5 \text{ Pa}$  é o limite de perda de carga permitido.

A carga térmica especificada para o projeto pode ser calculada a partir das entalpias específicas de entrada e saída das correntes, que podem ser calculadas pela Equação 6.17 para a água. Esta equação é o resultado da integração analítica da Equação 6.5. Essa abordagem se aplica na ausência de mudança de fase.

$$\begin{aligned} e_h(T) &= \int_{T_{ref}}^T Cp(T')dT' \\ &= 276370 \cdot (T - T_{ref}) - \frac{2090,1(T^2 - T_{ref}^2)}{2} + \frac{8,125(T^3 - T_{ref}^3)}{3} \\ &\quad - \frac{0,014116(T^4 - T_{ref}^4)}{4} + \frac{9,3701 \times 10^{-6}(T^5 - T_{ref}^5)}{5} \end{aligned} \quad (6.17)$$

A carga térmica a ser atendida é dada então pela Equação 6.18:

$$\hat{Q}_{spec} = \hat{m}_h [e_h(\hat{T}_{h,e}) - e_h(\hat{T}_{h,s})] \quad (6.18)$$

Não é possível calcular a perda de carga e nem a carga térmica de forma exata sem recorrer à simulação, uma vez que o modelo assume as propriedades dos fluidos como funções da temperatura. Portanto o método aplicado se trata do *Proxy Set Trimming* e as equações relaxadas em termos de *Lower* e *Upper bounds* estão descritas nas Equações 5.3 a 5.8.

A região de busca do problema de otimização é composta pela combinação das variáveis definidas nas Equações 6.12 a 6.15, que resulta em um universo inicial de 77200 candidatos. A primeira etapa na busca pela solução ótima consiste na aplicação do *Proxy Set Trimming* a fim de reduzir o universo de possibilidades. A Tabela 6.10 mostra um resumo dos cortes realizadas durante o processo de aplicação do *Proxy Set Trimming* em que a porcentagem de redução é calculada em relação ao conjunto de candidatos resultantes do corte anterior.

**Tabela 6.10 – Cortes do Proxy Set Trimming na minimização da área**

Etapa	Candidatos ao final	Redução (%)
Início	77200	0
Restrição de velocidade	10510	86,39
Restrição de perda de carga	7614	27,55
Restrição de carga térmica	4245	59,61

Fonte: elaboração própria

A aplicação do *Proxy Set Trimming* reduziu o espaço de busca de 77200 candidatos para apenas 4245, uma redução de 94,50% em relação ao conjunto inicial. Vale ressaltar que este resultado foi obtido sem a necessidade de realizar simulação, apenas por meio da aplicação de equações simples, como a restrição de velocidade de escoamento, por exemplo, que corresponde sozinha à eliminação de 86,39% dos candidatos.

O *Smart Enumeration* foi utilizado em seguida a fim de se determinar a solução ótima, cujas variáveis de projetos e outros dados correlatos são apresentados na Tabela 6.11.

**Tabela 6.11 – Resultado do projeto de menor área**

Variável	Valor
$N_p$	195
$L_p$	0,3 m
$N_{ph}$	3
$N_{pc}$	3
$\beta$	65 °
Área	17,37 m <sup>2</sup>
$\Delta P_h$	98,53 kPa
$\Delta P_c$	64,57 kPa
$T_{c,s}$	38,43 °C
$T_{h,s}$	79,98 °C

Fonte: elaboração própria

O teste foi realizado em um computador contendo um processador *Pentium Gold* G5400, com 8GB de memória RAM. Quanto à performance da solução do problema, o processo levou 366,66 s para ser concluído, dos quais 0,48 s corresponde à aplicação do *Proxy Set Trimming* e 366,18 s foram gastos na aplicação do *Smart Enumeration*, que necessitou de 53 simulações para determinação do ótimo, apenas 1,25% dos candidatos resultantes do *Set Trimming*.

#### 6.4.2. Projeto de menor custo total anualizado

O projeto de menor custo total anualizado é definido pela Equação 6.19:

$$\begin{aligned} \min(TAC) &= \hat{r}C_{cap} + C_{op,h} + C_{op,c} \\ \text{s.a.} \\ 0,5 \leq u_{j,i} &\leq 1,5, \quad \forall j \in \{h, c\}, \forall f_j, \forall i \in S_{j,f_j} \\ \dot{Q} &\geq \hat{Q}_{espec} \\ \hat{r} &= \frac{0,1(1+0,1)^{15}}{(1+0,1)^{15}-1} \\ C_{cap} &= 11000 + 2000A_t^{0,84} \\ C_{op,x} &= 7008 \frac{0,15}{10^3} \left( \frac{\Delta P_j \hat{m}_j}{0,6 \cdot \rho_j} \right), \quad \forall j \in \{h, c\} \end{aligned} \tag{6.19}$$

Na formulação apresentada na Equação 6.19, foi considerado taxa de retorno de 10%, tempo de operação de 7008 horas por ano, o que equivale a 80% do tempo operando; custo de energia igual a 0,15 US\$/kWh e eficiência da bomba igual a 60%. Assim como no caso da minimização da área, as restrições relaxadas são dadas pelas Equações 5.3 a 5.8. A Tabela 6.12 apresenta os cortes realizados durante a aplicação do *Proxy Set Trimming*.

**Tabela 6.12 – Cortes do *Proxy Set Trimming* na minimização da área**

Etapa	Candidatos ao final	Redução (%)
Início	77200	0
Restrição de velocidade	10510	86,39
Restrição de carga térmica	6449	38,64

Fonte: elaboração própria

Ao final da aplicação dos cortes, obteve-se uma lista de 6449 candidatos, 8,35% do conjunto inicial. Ao contrário do primeiro exemplo, este caso não possui restrição de perda de carga, o que explica o maior número de candidatos ao final do processo.

A Tabela 6.13 mostra os dados da solução ótima obtida após aplicação do *Smart Enumeration*.

**Tabela 6.13 – Resultado do projeto de menor área**

Variável	Valor
$N_p$	21
$L_p$	1,2 m
$N_{ph}$	1
$N_{pc}$	1
$\beta$	30º
Área	27,36 m <sup>2</sup>
$\Delta P_h$	10,75 kPa
$\Delta P_c$	7,11 kPa
$T_{c,s}$	40,18 ºC
$T_{h,s}$	78,67 ºC
TAC	3.753,13 US\$/ano

Fonte: elaboração própria

O computador utilizado foi o mesmo do descrito no primeiro exemplo. A rotina demorou 54,62 s para ser concluída. O *Proxy Set Trimming* correspondeu a 0,42 s e o *Smart Enumeration* à 54,20 s e foram necessárias 65 simulações para se obter a solução ótima, apenas 1% do número de candidatos pós *Set Trimming*.

#### 6.4.3. Comparação

Do ponto de vista computacional, o problema de minimização da área foi mais demorado do que o de minimização de TAC: 366,66 s contra 54,62 s, respectivamente. Isso para um número inferior de simulações, 53 no caso da área e 65 no exemplo do TAC. A explicação para isso decorre do fato de os primeiros candidatos simulados no caso da minimização da área apresentarem número elevado de placas pequenas. O primeiro candidato, por exemplo, possuía 185 placas de 0,3 m de lado. Neste caso, a simulação é mais demorada, explicando o maior tempo gasto com menos simulações.

As soluções obtidas apresentam características interessantes quanto aos critérios utilizados. Para fins de comparação, foi calculado o TAC da solução obtida pelo critério de menor área considerando as mesmas variáveis econômicas do problema de minimização do TAC. O resultado da minimização da área apresentou um valor de TAC muito superior ao resultado da minimização do TAC, 12.314,23 US\$/ano contra 3.753,13 US\$/ano, respectivamente. Isso ocorre mesmo com a minimização da área correspondendo de forma indireta a uma minimização do custo

de capital. O fato é que o custo de capital realmente é menor no caso de menor área, mas o custo operacional é muito superior devido a maior perda de carga, que chegou a 98 kPa no primeiro exemplo e foi inferior a 11 kPa no segundo.

Outros pontos importantes quanto às soluções é o número de placas, o seu tamanho e o número de passes das correntes. O caso de menor área apresentou maior número de placas e passes nas correntes, mas menor comprimento de placas. No caso do TAC, a solução possui apenas um passe em cada corrente e bem menos placas, mas maiores. Isso ocorre porque quanto maior o número de passes, maior a perda de carga, devido à maior velocidade de escoamento do fluido nos canais. Uma vez que o número de passes não pode ser elevado, a solução ótima tende a possuir placas maiores para atender a carga térmica.

Por fim, ainda que a minimização da área seja uma forma indireta de minimizar o custo de capital, percebe-se que o gasto operacional não é contabilizado e tende a ser maior neste tipo de problema. Por outro lado, um projeto visando o menor TAC apresenta uma análise que engloba os dois tipos de custos, resultando em um projeto mais vantajoso economicamente, pois leva em conta mais informações que compõem o custo efetivo do equipamento. Portanto, o TAC é um critério de otimização mais adequado do ponto de vista econômico.

## 7. CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou o desenvolvimento de um modelo matemático para simulação térmica e de perda de carga de trocadores de calor de placas. Além disso, foi proposto um método de resolução computacional desenvolvido em *Python*, por meio do qual foi possível considerar o efeito da temperatura nas propriedades dos fluidos.

Em seguida foi realizada a validação do simulador proposto, a qual contou com 260 simulações em diferentes condições operacionais comparados com soluções analíticas de dois casos limites disponíveis na literatura, os quais contemplaram tanto situações de passe único quanto de múltiplos passes. Os resultados mostram que o maior erro obtido foi de 3,4%, o que é considerado aceitável. Portanto pôde-se concluir que o simulador desenvolvido apresenta resultados confiáveis.

Outra etapa do trabalho apresentou comparações entre simulações considerando diferentes abordagens quanto às propriedades de dois fluidos distintos: água e petróleo cru. Foram testados três casos: propriedades constantes avaliadas na temperatura média de entrada dos fluidos; propriedades constantes avaliadas na temperatura média de entrada e saída de cada fluido mediante processo iterativo; e propriedades variáveis. Os resultados indicam que a aproximação quanto a propriedades constantes introduz erros maiores em fluidos mais sensíveis à temperatura. Além disso, pôde-se concluir que o uso de propriedades constantes aplicadas a um processo iterativo resultou em soluções muito próximas da abordagem mais rigorosa, apresentando erro máximo de 0,04°C na temperatura de saída do fluido com propriedades mais sensíveis com a temperatura.

O principal objetivo do trabalho foi o uso do simulador construído na resolução de problemas de projeto, visando a obtenção de resultados ótimos. Portanto, uma vez construída a ferramenta, foram desenvolvidos dois casos de otimização de projeto do equipamento em estudo por meio do uso da metodologia de otimização global *Proxy Set Trimming* em conjunto com *Smart Enumeration*. A abordagem utilizada garante solução global em problemas cujas variáveis de decisão são discretas e foi aplicada a um projeto demonstrativo, com critério de minimização de área total de troca térmica e com minimização do custo total anualizado.

Por fim, os problemas foram discutidos quanto às suas performances computacionais e soluções obtidas. Observou-se que o resultado de menor área

apresenta número elevado de placas pequenas e muitos passes nos fluidos, o que resulta em grande perda de carga. Por outro lado, a solução de menor TAC apresenta apenas um passe em cada fluido, e número de menor placas de maior dimensão. Isso decorre do efeito da perda de carga no cálculo do custo operacional, que não é computado no primeiro caso. Portanto conclui-se que, mesmo que a área seja uma forma indireta de minimizar o custo de capital, o TAC é mais indicado do ponto de vista econômico devido ao peso do custo operacional no projeto ao longo do horizonte de planejamento.

O presente trabalho apresentou desde o desenvolvimento do modelo matemático até a sua aplicação na confecção de um simulador e uso em problemas de projeto ótimo de trocadores de calor de placas soldadas. O modelo foi validado, simulações foram comparadas mediante diferentes abordagens e as soluções ótimas de projeto foram discutidas de forma crítica quanto a suas características e custos computacionais. Portanto, pode-se considerar que todos os objetivos propostos foram atendidos.

Uma possibilidade para trabalhos futuros consiste no estudo e implementação de métodos numéricos para resolução de sistemas lineares, a fim de tornar o simulador menos custoso computacionalmente e mais ágil. Outro teste possível de ser realizado seria a comparação dos resultados obtidos no modelo desenvolvido com resultados de um simulador comercial, como o HTRE, como mais uma forma de validação do modelo.

## 8. REFERÊNCIAS

- BRASIL, Nilo Indio do. Introdução à Engenharia Química. 2 ed. Rio de Janeiro: Interciênciia: Petrobras, 2004. p. 7, 15.
- INCROPERA, Frank P., et al. Fundamentos de Transferência de calor. 6 ed. Rio de Janeiro: TLC, 2008. p. 425-427, 434, 435, 439, 455.
- ARSENYEVA, Olga P., et al. *Two types of welded plate heat exchangers for efficient heat recovery in industry*. Applied thermal Engineering. V. 105. 2016. p. 763-773.
- SINNOTT, Ray; TOWLER, Gavin. *Chemical Engineering Design*. 6 ed. Oxford: Elsevier, 2020. p. 20, 32-36, 774, 776, 803, 804, 880, 881, 887.
- GANESHKUMAR, Poongavanam, et al. *Advancing heat exchangers for energy storage: a comprehensive review of methods and techniques*. Journal of Energy Storage. V. 99. 2024.
- SOUZA, Maurício B. de; TRICA, Diego José. Introdução à modelagem e dinâmica para controle de processos. 2022. p. 18-21, 26, 40.
- FOX, Robert W., et al. Introdução à mecânica dos fluidos. 8 ed. TLC, 2014.
- PERLINGEIRO, Carlos Augusto G. Engenharia de processos: Análise, simulação, otimização e síntese de processos químicos. 2 ed. São Paulo: Blucher, 2018. p. 7, 20, 91, 100-102.
- STEWART, James. Cálculo. V. 1. 7 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. p. 111.
- COSTA, André L. H., BAGAJEWICZ, Miguel J. *110<sup>th</sup> anniversary: On the departure from heuristics and simplified models toward globally optimal design of process equipment*. Industrial & Engineering Chemistry Research. V. 58, 2019. p. 18684-18702.
- NAHES, André L. M., et al. *Computational study of the use of set trimming for the globally optimal design of gasketed-plate heat exchangers*. Industrial & engineering Chemistry Research. V. 60, 2021. p. 1746-1755.
- NAHES, André L. M., et al. *A new approach for the globally optimal design of gasketed plate heat exchangers with variable properties*. Chemical Engineering Science. V. 280, 2023.
- RUGGIERO, Márcia A. G.; LOPES, Vera L. da. Cálculo numérico: Aspectos teóricos e computacionais. 2 ed. São Paulo: Pearson, 2000. p. 301-305, 357-361.
- SECCHI, Argimiro R.; BISCAIA, Evaristo C. Métodos numéricos para Engenheiros químicos: Algoritmos e aplicações. 1 ed. Rio de Janeiro, 2020. p. 22, 23.

ARSENYEVA, Olga P.; et al. *The influence of plate corrugations geometry on plate heat exchanger performance in specified process conditions*. Energy. V. 57, 2013. p. 201-207.

PICÓN-NÚÑEZ, Martín; et al. *Improving thermal energy recovery systems using welded plate heat exchangers*. Energy. V. 235, 2021.

GREEN, Don W. *Perry's chemical engineers' handbook*. 9 ed. McGraw-Hill Education, 2019.