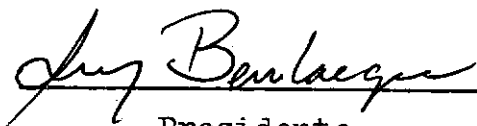


UM MÉTODO ITERATIVO PARA ANÁLISE DA NÃO-LINEARIDADE
GEOMÉTRICA EM ESTRUTURAS RETICULARES

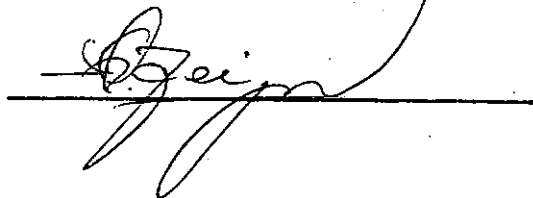
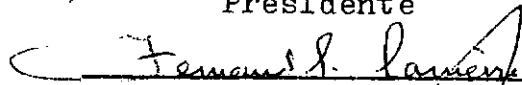
Enrique Paillié Mantilla

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA-
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSARIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIENCIA (M.Sc.)

Aprovada por :



Presidente



RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
JUNHO DE 1974

A mis padres.

Resumo

Apresenta-se um metodo iterativo para a determinação das cargas criticas de flambagem de estruturas reticuladas planas e espaciais. São levados em consideração na analise dois efeitos : as forças axiais afetando a matriz de rigidez dos elementos e as variações de geometria da estrutura, decorrentes de grandes deslocamentos.

Elaborou-se um programa automático em linguagem - FORTRAN II, ilustrando-se a sua aplicação com alguns exemplos numericos.

A G R A D E C I M I E N T O S

Al profesor Fernando Luiz Lobo B. Carneiro, por la incomparable solicitud durante mi permanencia en la COPPE.

Al profesor Luiz Bebilaqua por la revisión del trabajo.

Al Ing. Raúl A. Feijóo por sus valiosas sugerencias y constante colaboración.

Al cuerpo docente del área de Estructuras por las enseñanzas recibidas.

A la O.E.A y la COPPE por el apoyo financiero.

Resumen

Es presentado un método iterativo para determinar las cargas críticas de pandeo en estructuras reticulares en el plano y el espacio. Dos efectos són llevados en cuenta en el análisis : las fuerzas axiales afectando la matriz de rigidez de los elementos y los cambios geométricos provenientes de grandes desplazamientos en la estructura.

Se muestra también un programa automático escrito en FORTRAN II, así como ejemplos numéricos que ilustran su aplicación.

Abstract

An iteration procedure is presented to determine the buckling loads of plane and space framed structures. taking into account non-linear behavior. Two effects are included in the analysis : the axial forces on the member stiffness matrix and the changes of geometry caused by large displacements.

A Computer program written in FORTRAN II is presented and numerical examples are included to illustrate the application.

I N D I C E

Capítulos	Páginas
I <u>GENERALIDADES</u>	
1.1 - HISTORICO	4
1.2 - TEORIA DE LA VIGA COLUMNA	7
1.2.1 - CARGA DE EULER	7
1.2.2 - ECUACION FUNDAMENTAL	8
II <u>FUNCIONES DE ESTABILIDAD</u>	
2.1 - DEFINICION	10
2.1.1 - HIPOTESIS	10
2.1.2 - NOMENCLATURA	11
2.2 - FUNCIONES DE ROTACION	11
2.2.1 - CARGA AXIAL DE COMPRESION	11
2.2.2 - CARGA AXIAL DE TRACCION	16
2.3 - FUNCIONES DE TRASLACION	17
2.4 - ELEMENTO CON ROTULAS	20
2.4.1 - FUNCIONES DE ROTACION	20
2.4.2 - FUNCIONES DE TRASLACION	23
2.5 - MATRIZ DE RIGIDEZ	25
III <u>TEORIA DE LAS DEFLEXIONES FINITAS</u>	
3.1 - GENERALIDADES	28
3.2 - ANALOGIA FISICA	29
3.2.1 - CONDICION DE COMPATIBILIDAD	31

Capitulos	Páginas
3.2.2 - CONDICION DE EQUILIBRIO	32
3.3 - ESFUERZOS LOCALES	33
3.3.1 - ELEMENTO EN EL PLANO	33
3.3.2 - ELEMENTO EN EL ESPACIO	38
3.4 - ESFUERZOS GLOBALES	41
IV <u>METODO ITERATIVO</u>	
4.1 - DESCRIPCION	43
4.2 - MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE	45
4.3 - CARGAS CRITICAS	47
4.4 - BIFURCACION DEL EQUILIBRIO	47
V <u>PROGRAMA AUTOMATICO</u>	
5.1 - INTRODUCCION	48
5.2 - DIAGRAMA DE BLOQUES	49
5.3 - VARIABLES DEL PROGRAMA	50
5.4 - EJEMPLOS	52
VI <u>CONCLUSIONES</u>	63
<u>NOMENCLATURA</u>	65
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	66
<u>LISTADO EN FORTRAN</u>	69

INTRODUCCION

En general, la mayor parte de los cálculos de estructuras aporticadas és de naturaleza lineal y solo para algunos elementos, columnas principalmente, se hace un simplificado análisis que lleva en cuenta los efectos de nó-linearidad producidos por esfuerzos axiales de cierta magnitud. Esta base de cálculo es adecuada cuando se calcula en base a cargas de trabajo.

Nó obstante, para los diseños basados en coeficientes de carga, para los cuales hay notoria tendencia actualmente, el incremento en el valor de las cargas introduce efectos de nó-linearidad preponderantes en el cálculo estructural, haciendo necesaria la adopción de un método qué lleve en cuenta nuevos parámetros en el diseño, para tenerse una mayor confianza en los resultados obtenidos.

Las principales causas de nó-linearidad geométrica en una estructura, cuando solicitada por grandes cargas, són :

a) La interacción entre fuerzas axiales y laterales para el diseño a flexión de los elementos.

b) Los cambios geométricos respecto de la posición original de la estructura.

Hasta el presente hay varios métodos matriciales en la bibliografía que permiten llevar en cuenta estos dos efectos. En una forma general, su diferencia básica está en el planteo de las matrices de rigidez de los elementos, y en el proceso operativo, que puede ser iterativo, ó de obtención de los autovalores de la matriz de rigidez modificada.

En cuanto a las matrices de rigidez de los elementos, algunos métodos utilizan funciones de estabilidad, que nó són otra

cosa que factores que afectan los terminos de la matriz de rigidez usada comúnmente en análisis lineal, factores que dependen de los valores de las fuerzas axiales en los miembros de la estructura. Estas fuerzas axiales pueden conocerse por un previo análisis lineal y a partir ahí, iniciarse el análisis nó-lineal propiamente dicho, en proceso iterativo, de tal forma a lograr en dos análisis consecutivos, iguales valores para los esfuerzos de respuesta de la estructura. Logrado esto, el proceso es repetido para nuevos valores de las cargas, hasta obtenerse la singularidad de la matriz de rigidez, efecto detectado por la condición de inestabilidad de la estructura ,

$$\text{Det } \begin{vmatrix} K_o \end{vmatrix} = 0$$

condición que nos dá el valor para la carga crítica de la estructura.

En los métodos en que se calcula la carga crítica, como un problema de autovalores, se define una matriz de rigidez geometrica (20), (21), ó de tensiones iniciales, resultante de llevar en cuenta en la expresión de la energía de deformación del elemento, el término correspondiente a las fuerzas axiales.

La matriz geométrica $[K_1]$ junto con la matriz de rigidez $[K]$ pueden combinarse y el resultado és una matriz $[A]$,

$$A = - [K_1]^{-1} [K]$$

para la cual el menor autovalor corresponde a la carga crítica de la estructura.

En los métodos mencionados antes, nó se ha llevado en cuenta el efecto de cambios geométricos de la estructura, provenientes

tes de los grandes desplazamientos que pueden darse en una estructura, debido a la magnitud de las cargas cercanas a la carga crítica.

En el presente trabajo se presenta un método iterativo en el que se llevan en cuenta ambos efectos, y ha sido propuesto por S.S. Tezcan (1) en 1967.

En el capítulo I , se trata el concepto de la carga teórica de Euler, basado en la teoría de la viga-columna. A partir de este concepto, en el capítulo II se desarrollan las funciones de estabilidad necesarias para el análisis interactivo entre fuerzas axiales y cargas laterales.

El capítulo III trata el problema de grandes desplazamientos y la forma de llevar en cuenta este efecto, en el cálculo de los esfuerzos para la posición deformada de los elementos.

En el capítulo IV , se hace una descripción del proceso iterativo, así como del concepto de la matriz de rigidez tangente y la técnica empleada para detectar las cargas críticas.

Finalmente, en el capítulo V se describe en lenguaje Fortran II, el programa automático utilizado para la solución de algunos ejemplos.

CAPITULO I

GENERALIDADES

1.1 - HISTORICO

El análisis de la nó-linearidad geométrica en estructuras elásticas reticulares recibió grán atención en la década pasada debido principalmente al hecho de que este problema puede ser resuelto en grán escala con el uso de computadoras digitales.

El estudio del fenómeno de pandeo, cuando se llevan en cuenta, entre otras causas de nó-linearidad Geométrica, los desplazamientos finitos en los nudos del sistema, ha sido objeto de interesantes artículos de conocidas publicaciones citadas en la bibliografia al final de este trabajo, (1),(3),(6),(9),(10).

Livesley (11), en 1956, desarrolló un programa para análisis de reticulados planos con elementos prismáticos lineales dentro del régimen elástico y sujetos a cargas aplicadas en los nudos ; este programa desprecia los efectos de la flexión y rotación de la cuerda en el cálculo de la longitud exacta del elemento, pero incluye este último en el cálculo de los esfuerzos nodales.

Saafan (10) presentó una formulación nó-lineal para el caso plano incluyendo estos efectos. Utiliza para el análisis un proceso iterativo, explicado desde un punto de vista físico.

Renton (5) extendió la formulación presentada por Livesley al caso tridimensional incluyendo también efectos de flexo-torsión

Argyris (2) empleó una técnica incremental para determinar

una aproximación del comportamiento nó-lineal de la trayectoria carga-deflexión en marcos espaciales. Asume un comportamiento lineal para cada incremento y usa la matriz de rigidez tangente calculada para la posición anterior al nuevo incremento de carga, para calcular el incremento en el desplazamiento.

En el cálculo de la matriz de rigidez tangente desprecia el efecto de la fuerza axial en la flexibilidad del elemento, aproximación válida para el caso de que las fuerzas axiales sean pequeñas, comparadas con la carga teórica de Euler (§ 1.2.1).

Livesley (8) describió la aplicación del método de Newton-Raphson, para el análisis de estructuras nó-lineales. El proceso es general y nó presenta ecuaciones para casos particulares.

En general, dentro de los procesos iterativos, podemos mencionar dos técnicas de ataque del problema nó-lineal.

La primera técnica ha sido mostrada por Connor (3), y consiste en un proceso incremental, en el que las cargas són aumentadas en pequeños incrementos y las posiciones deflectadas son encontradas usando la matriz de rigidez tangente. Las expresiones para esta matriz són bastante complejas.

La segunda técnica puede ser denominada como un "método de carga constante". Consiste en mantener un nivel de carga constante hasta encontrar las posiciones deflectadas que producen el equilibrio entre esfuerzos internos y cargas externas para esas posiciones. El equilibrio es logrado después de algunas iteraciones, con la aproximación que se desee. Encontrado este equilibrio la carga es incrementada a un nuevo nivel y el proceso se repite.

Esta técnica ha sido propuesta por Tezcan y Ovunc (1) en trabajo publicado en 1967.

Con esta última técnica, a diferencia de la primera, nó són necesarias expresiones muy complejas para la matriz de rigi-

dez del elemento, pudiéndose utilizar directamente la matriz de rigidez tangente derivada cuando se llevan en cuenta los desplazamientos finitos de los nudos. (las rotaciones se suponen pequeñas)

Otra ventaja sobre la primera técnica es que el proceso iterativo puede iniciarse con cualquier nivel de carga, sin importar que se esté cerca de la carga crítica. (9).

Esta segunda técnica es la base del presente trabajo.

1.2 - TEORIA DE LA VIGA-COLUMNA

El análisis de sistemas estructurales elásticos, cuyos miembros están sujetos a la acción de fuerzas axiales, combinadas con momentos de flexión, hace necesaria la investigación del efecto de esas fuerzas axiales en la rotación y traslación de los nudos del sistema.

Sea una columna esbelta ideal, articulada en sus nudos y sometida a una carga axial P_a , en la figura 1.1.a ,

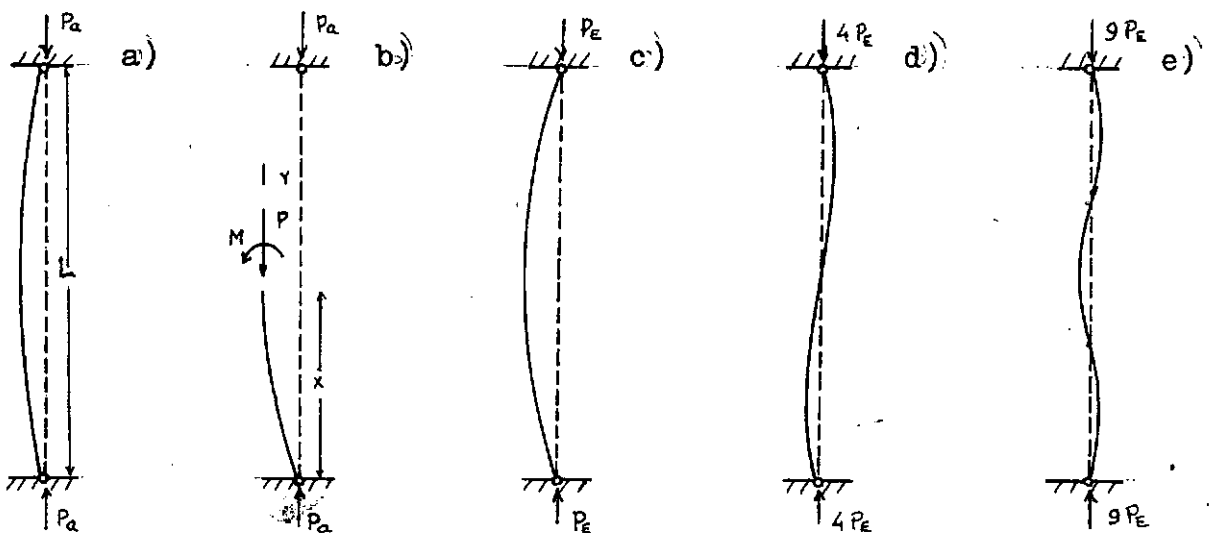


Figura 1.1

Se asume que el miembro no pesa, es perfectamente elástico y los esfuerzos están dentro del Límite de proporcionalidad.

1.2.1 - CARGA DE EULER

Cuando la carga P_a es menor que el valor crítico de pandeo, el miembro permanecerá recto y en equilibrio estable, tal que si se aplica una fuerza normal a su eje produciéndose una deflexión lateral, esta deflexión desaparece una vez removi-

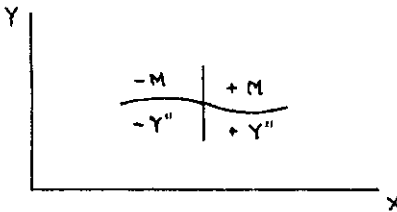
da la carga que la produce.

La carga crítica se puede definir, como la fuerza axial necesaria para mantener el miembro en la posición deflecionada y en relativo equilibrio.

El análisis teórico fué desarrollado por Leonhard Euler en 1757, y es el punto de partida del estudio de la Estabilidad Elástica.

1.2.2 - ECUACION FUNDAMENTAL

Partiendo de la ecuación diferencial de la Elástica,



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E I_z} \quad (1)$$

Resolviendo para el elemento de la figura 1.1.b,

$$E I_z y'' = M = - P_a y \quad (2)$$

La solución general de esta ecuación (15), es dada por,

$$y = A \sin \left(\frac{u}{L} x \right) + B \cos \left(\frac{u}{L} x \right) \quad (3)$$

Donde,

$$u = L \sqrt{\frac{P}{E I_z}} \quad (4)$$

Los parámetros A y B pueden ser evaluados por las condiciones de borde, $x = 0, y = 0$; $x = L, y = 0$.

$$y = A \operatorname{sen} \left(\frac{u}{L} x \right) , \quad (B = 0) \quad (5)$$

$$A \operatorname{sen} u = 0 \quad (6)$$

La solución de (6) se da para,

$$u = n \pi , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Llevando (7) en (4),

$$P_e = \frac{n^2 \pi^2 E I_z}{L^2} \quad (8)$$

En la ecuación (6), la solución $A = 0$, es la solución trivial. La otra solución se da para diferentes valores de n en la ecuación (7), lo que nos indica los distintos modos de pandeo de la viga-columna, los cuales se presentan para diferentes cargas solicitantes en la figura 1.1.

De los diferentes modos nos interesa el primero, que llamaremos de modo crítico, y la carga axial que lo produce de carga crítica.

CAPITULO II

FUNCIONES DE ESTABILIDAD

2.1 - DEFINICION

Las funciones de estabilidad pueden definirse como parámetros adimensionales, que dependiendo de los valores de los esfuerzos axiales en los elementos de una estructura reticular, afectan los términos de la matriz de rigidez de dichos elementos, relacionando en las condiciones de equilibrio, las cargas con los correspondientes desplazamientos.

Fueron introducidas y tabuladas primeramente por B.W. James (12), y subsecuentemente por D.K. Livesley y D.B. Chandler (13), quienes las derivaron en función del parámetro,

$$\phi = \frac{P_a}{P_e}, \text{ donde}$$

P_a = Esfuerzo axial.

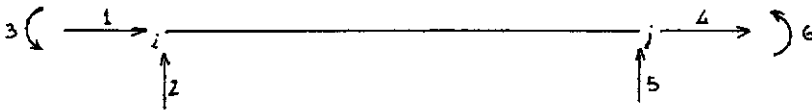
P_e = Carga teórica de Euler.

2.1.1 - Hipótesis.

Las hipótesis asumidas són las mismas que para la teoría de la flexión de vigas en general. Las cargas actúan en un plano que coincide con el centro de cortantes y este pasa por el c.d.g. de la sección. Los esfuerzos están dentro del rango elástico, dentro del Límite proporcional del material.

2.1.2 - Nomenclatura.

Se suponen las siguientes direcciones, para los esfuerzos y los desplazamientos en un elemento :



2.2 - FUNCIONES DE ROTACION

2.2.1 - Carga axial de Compresión.

Considerando el elemento prismático, (Figura 2.2.1),

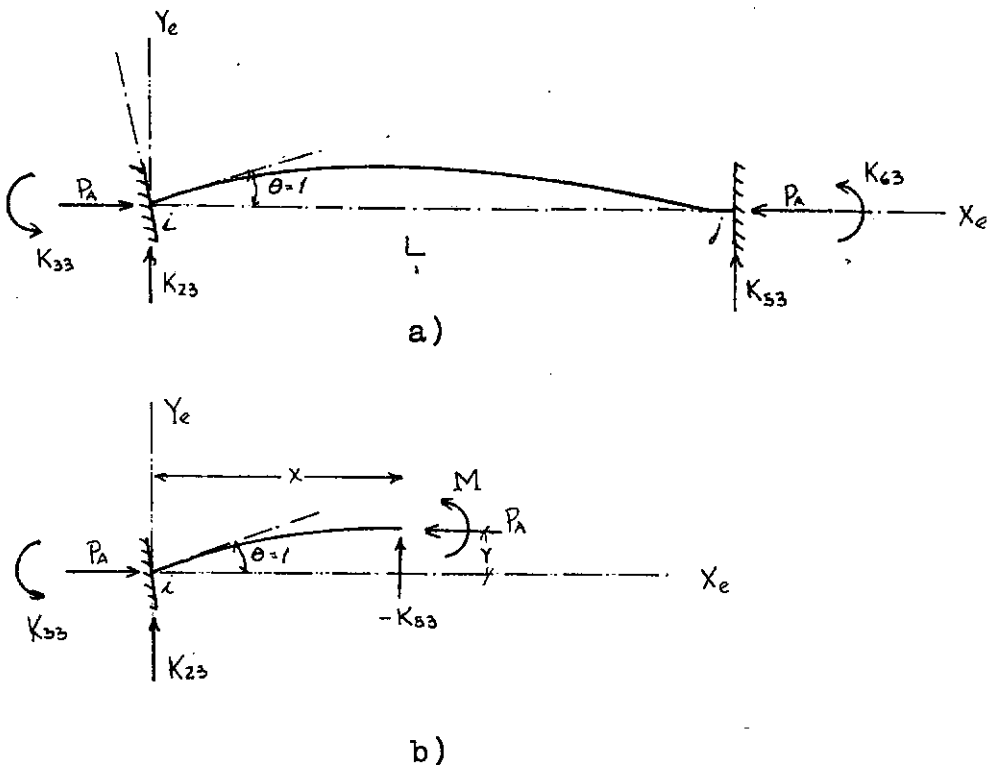


Figura 2.2.1

La rotación unitaria en el nudo j induce las acciones de restricción mostradas en la figura 2.2.1 . Por consideración del equilibrio podemos escribir,

$$K_{23} = - K_{53} = \frac{K_{33} + K_{63}}{L} \quad (10)$$

Considerando una sección a una distancia x de j, podemos escribir la ecuación de la elástica,

$$E I_z y'' = M = - (P_a y + K_{33} - K_{23} x) \quad (11)$$

Llevando (10) en (11),

$$E I_z y'' = - P_a y - K_{33} + (K_{33} + K_{63}) x/L \quad (12)$$

Expresando la fuerza axial P_a en función de la carga de Euler,

$$P_a = \phi P_e \quad (13)$$

6,

$$P_a = \phi \pi^2 \left(\frac{E I_z}{L^2} \right) \quad (14)$$

Llevando a (12),

$$y'' - \frac{\pi^2 \phi}{L^2} y = \frac{(K_{33} + K_{63}) x/L - K_{33}}{E I_z} \quad (15)$$

La solución general de esta ecuación es dada por Timoshenko (15), y se puede expresar,

$$y = A \operatorname{sen} \left(\frac{u}{L} x \right) + B \cos \left(\frac{u}{L} x \right) + \frac{L^2}{u^2 E I_z} \left[(K_{33} + K_{63}) x/L - K_{33} \right] \quad (16)$$

donde,

$$u = \pi \sqrt{\phi} \quad (17)$$

Considerando las condiciones de borde : $x = 0, y = 0$;
 $x = L, y = 0$, las constantes són :

$$A = - \frac{L^2}{u^2 E I_z} (K_{33} \operatorname{ctg} u + K_{63} \operatorname{csc} u) \quad (18 a)$$

$$B = \frac{L^2}{u^2 E I_z} K_{33} \quad (18 b)$$

Llevando a (16) ,

$$\begin{aligned} \frac{u^2 E I_z}{L^2} y = & - (K_{33} \operatorname{ctg} u + K_{63} \operatorname{csc} u) \operatorname{sen} \left(\frac{u}{L} x \right) + \\ & + K_{33} \cos \left(\frac{u}{L} x \right) + (K_{33} + K_{63}) x/L - K_{33} \end{aligned} \quad (19)$$

La pendiente de la curva elástica ,

$$\frac{u^2 E I_z}{L} y' = K_{33} \left[1 - u \operatorname{sen} \left(\frac{u}{L} x \right) - u \operatorname{ctg} u \cos \left(\frac{u}{L} x \right) \right] +$$

$$+ K_{63} \left[1 - u \csc u \cos \left(\frac{u}{L} x \right) \right] \quad (20)$$

Por la condición de borde, $x = L$, $y' = 0$,

$$K_{63} = \frac{u - \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} u - u \cos u} K_{33} \quad (21)$$

Por la otra condición, $x = 0$, $y' = 1$

$$K_{33} = \frac{u (\operatorname{sen} u - u \cos u)}{2 (1 - \cos u) - u \operatorname{sen} u} \left(\frac{E I}{L} z \right) \quad (22)$$

En esta forma quedan definidas las funciones r y c , que denominaremos como funciones de rotación,

$$r = \frac{u (\operatorname{sen} u - u \cos u)}{2 (1 - \cos u) - u \operatorname{sen} u} \quad (23 a)$$

$$c = \frac{u - \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} u - u \cos u} \quad (23 b)$$

La validez de estas expresiones puede ser comprobada, cuando se hace $P_a = 0$, (esfuerzo axial nulo). Para este caso, y haciendo uso de la regla de L'Hospital,

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{g(u)}, \quad \text{ó,} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(u)}{g'(u)} \quad (24)$$

Cuando se calculan estos límites, se obtiene :

$$r_{\phi \rightarrow 0} = 4 \quad , \quad c_{\phi \rightarrow 0} = 1/2 \quad (25)$$

que són los conocidos coeficientes de rigidez.

En resumen, las rigideces pueden ser expresadas en la siguiente forma,

$$K_{33} = r \left(\frac{E I_z}{L} \right)$$
$$K_{63} = c K_{33} = c r \left(\frac{E I_z}{L} \right) \quad (26)$$

$$K_{23} = - K_{53} = r (1 + c) \left(\frac{E I_z}{L^2} \right)$$

Operando en igual forma, cuando se dá una rotación unitaria en el nudo k del elemento, se obtiene,

$$K_{66} = r \left(\frac{E I_z}{L} \right)$$
$$K_{36} = c K_{66} = c r \left(\frac{E I_z}{L} \right) \quad (27)$$

$$K_{26} = - K_{56} = r (1 + c) \left(\frac{E I_z}{L^2} \right)$$

2.2.2 - Carga axial de tracción.

Cuando el esfuerzo axial en el elemento es de tracción, la variable μ toma un valor negativo. En este caso se define la variable compleja v como,

$$v = \pi \sqrt{\phi} = i\pi \sqrt{|\phi|} = iu \quad (28)$$

Definida la variable v , y usando las funciones hiperbólicas, $\sinh$ y $\cosh$, se encuentra ,

$$r = \frac{u (u \cosh u - \sinh u)}{2 (1 - \cosh u) + u \sinh u} \quad (29)$$

$$c = \frac{u - \sinh u}{\sinh u - u \cosh u}$$

2.3 - FUNCIONES DE TRASLACION

Las funciones r y c definidas antes están relacionadas con las rotaciones de los nudos.

En la viga prismática de la figura 2.3.a, las rigideces resultantes cuando se dá un desplazamiento unitario en el nudo j

Esta traslación puede visualizarse como una rotación total del elemento en un ángulo $1/L$, como se puede ver en la figura 2.3.b. Debido a que la pequeña rotación no introduce cambios de consideración en la carga axial, se considera la misma.

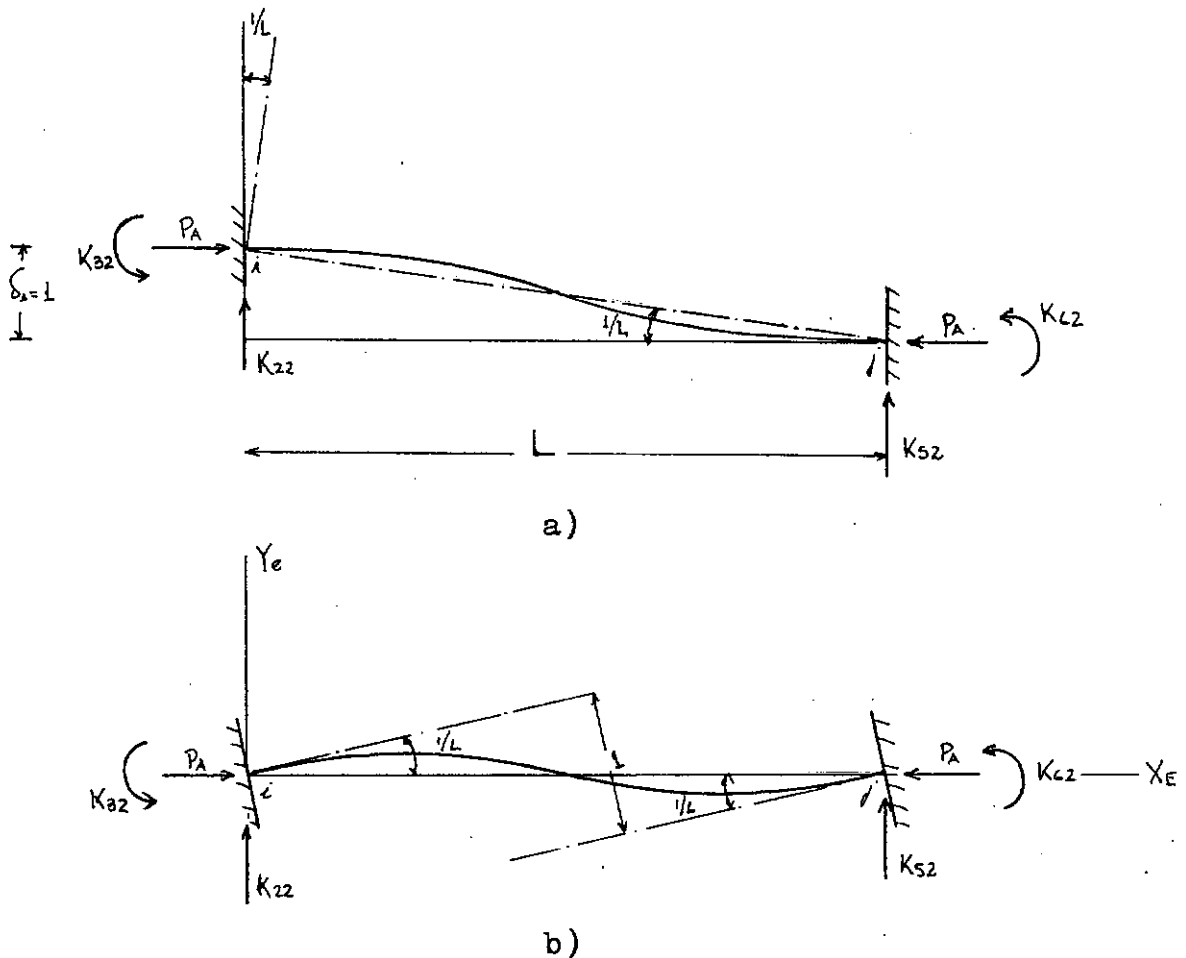


Figura 2.3

Por consideración del equilibrio,

$$K_{22} = \frac{(K_{32} + K_{62}) - P_a (1)}{L} \quad (30 a)$$

$$K_{52} = \frac{P_a (1) - (K_{32} + K_{62})}{L} \quad (30 b)$$

Debido al giro, las rigideces de rotación serán,

$$K_{32} = r \left(\frac{E I_z}{L} \right) \left(\frac{1}{L} \right) + rc \left(\frac{E I_z}{L} \right) \left(\frac{1}{L} \right) \quad (31 a)$$

$$K_{62} = rc \left(\frac{E I_z}{L} \right) \left(\frac{1}{L} \right) + r \left(\frac{E I_z}{L} \right) \left(\frac{1}{L} \right) \quad (31 b)$$

De donde,

$$K_{32} = K_{62} = r (1 + c) \left(\frac{E I_z}{L^2} \right) \quad (32)$$

Llevando a (30),

$$K_{22} = - K_{52} = 2r (1 + c) \left(\frac{E I_z}{L^3} \right) - \frac{P_a}{L} \quad (33)$$

Cuando la carga axial es nula, el último término de la ecuación (33) no existe. Luego se puede definir una función t , que llevará en cuenta este efecto haciendo,

$$K_{22} = -K_{52} = t \left(2r (1+c) \left(\frac{E I}{L^3} z \right) \right) \quad (34)$$

Igualando (33) y (34),

$$t = 1 - \frac{\pi^2 \phi}{2r (1+c)} \quad (35)$$

De donde,

$$K_{22} = -K_{52} = 2rt (1+c) \left(\frac{E I}{L^3} z \right) \quad (36)$$

De la misma forma, cuando se da una traslación unitaria en el nudo k del elemento restringido,

$$K_{35} = K_{65} = -r (1+c) \left(\frac{E I}{L^2} z \right) \quad (37)$$

$$K_{25} = -K_{55} = -2rt (1+c) \left(\frac{E I}{L^3} z \right)$$

2.4 - ELEMENTO CON ROTULAS

Las funciones de estabilidad pueden derivarse en una forma análoga para el caso de elementos que presentan liberaciones en los nudos, p.e., liberación de la rotación (rótulas).

2.4.1 - FUNCIONES DE ROTACION

Considerando el elemento de la figura 2.4.1 ,

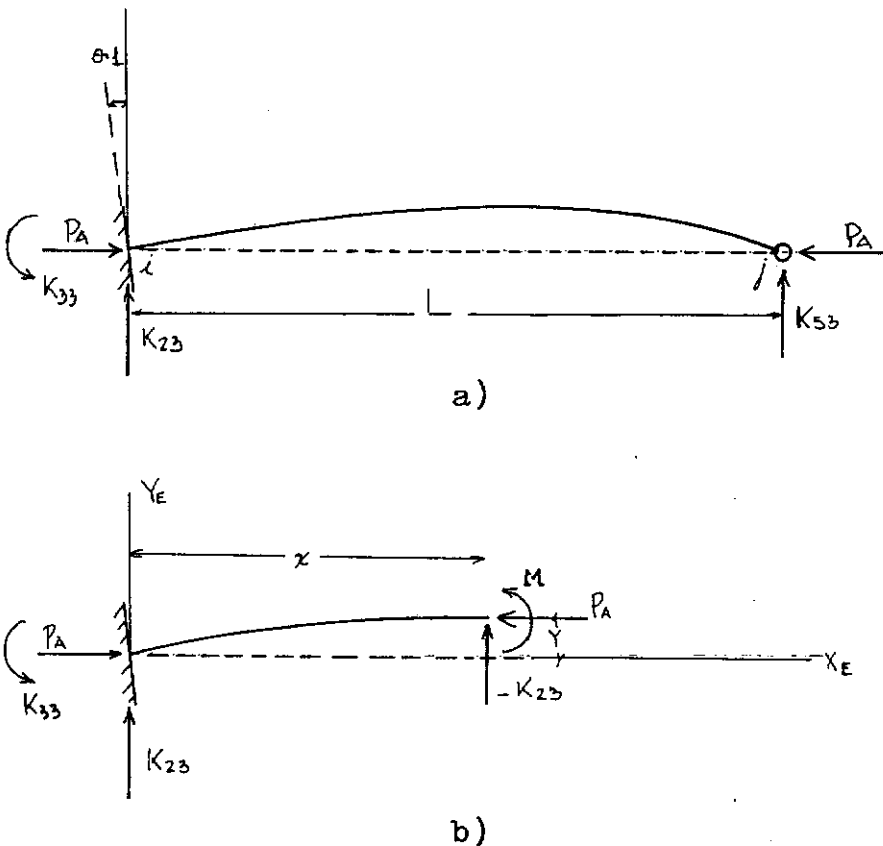


Figura 2.4.1

Considerando el equilibrio, se tiene,

$$K_{23} = - K_{53} = \frac{K_{33}}{L} \quad (38)$$

Aplicando la ecuación diferencial de la elástica,

$$E I_z y'' = M = - (P_a y + K_{33} - K_{23} x) \quad (39)$$

$$E I_z y'' = - P_a y - K_{33} + K_{33}/L x$$

Substituyendo el valor de P_a , la ecuación es,

$$y'' + \frac{\pi^2 \phi}{L^2} y = \frac{K_{33}(x/L) - K_{33}}{E I_z} \quad (40)$$

La solución es,

$$y = A \operatorname{sen} \left(\frac{u}{L} x \right) + B \cos \left(\frac{u}{L} x \right) + \frac{L^2}{u^2 E I_z} \left[\frac{K_{33} x}{L} - K_{33} \right] \quad (41)$$

Con las condiciones de borde, las constantes són,

$$A = - \frac{L^2 K_{33}}{u^2 E I_z} \operatorname{ctg} u, \quad B = \frac{L^2}{u^2 E I_z} K_{33} \quad (42)$$

Cuando se reemplazan estos valores en la ecuación diferencial, se obtienen las siguientes expresiones para las rigideces,

$$K_{33} = \frac{u^2}{1 - u \operatorname{ctg} u} \frac{E I_z}{L} \quad (43)$$

y llevando a (38),

$$K_{23} = - K_{53} = \frac{u^2}{1 - u \operatorname{ctg} u} \frac{E I_z}{L^2} \quad (44)$$

De donde,

$$r = c = \frac{u^2}{1 - u \operatorname{ctg} u} \quad (45)$$

Para el caso de carga axial nula, se comprueba,

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{f'(u)}{g'(u)} = 3$$

Quando la carga axial es de tracción, se procede como antes y se verifica,

$$r = \frac{-u^2}{1 + u \operatorname{ctgh} u} \quad (47)$$

2.4.2 - FUNCIONES DE TRASLACION

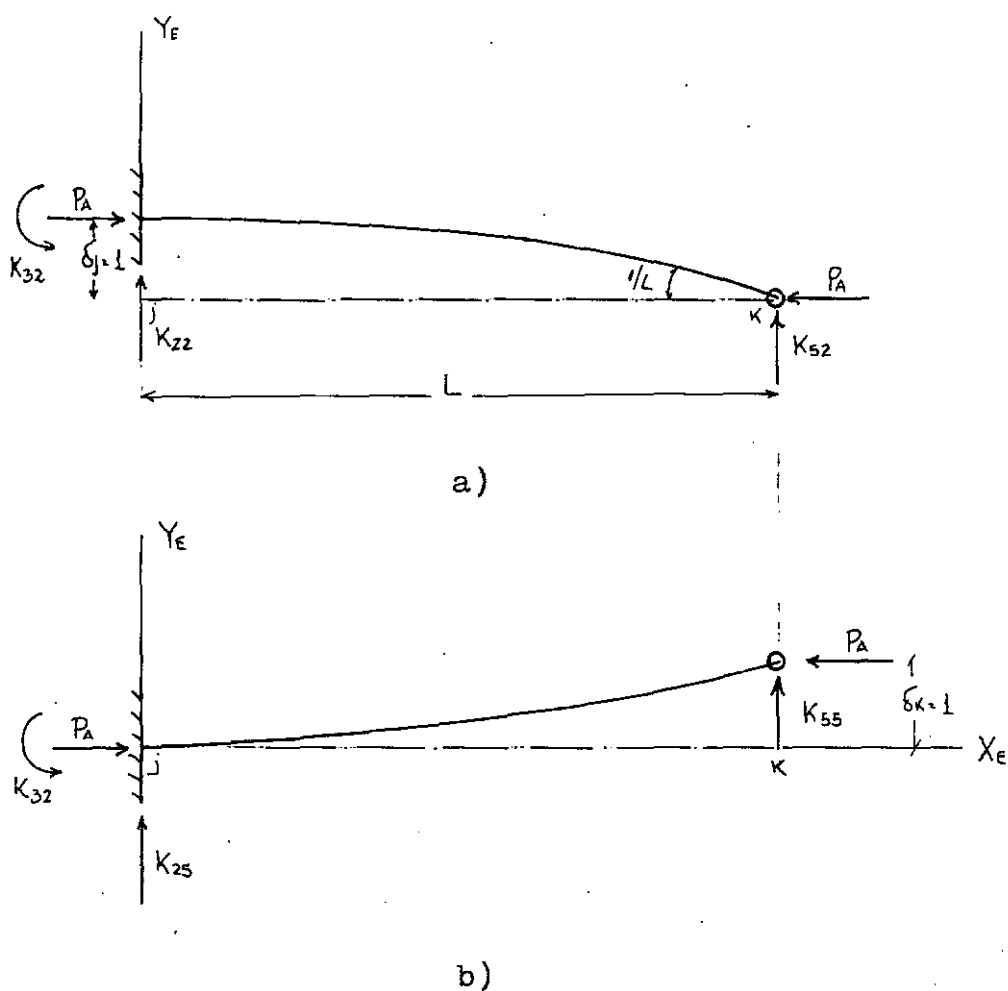


Figura 2.4.2

Tomando momentos con respecto al nudo k se tiene,

$$K_{22} = \frac{K_{32} - P_a (1)}{L}, \quad K_{52} = \frac{P_a (1) - K_{32}}{L} \quad (48)$$

Debido a la rotación indicada en la figura 2.4.2

$$K_{32} = r \left(-\frac{E I_z}{L} \right) \frac{1}{L} \quad (49)$$

De donde se concluye,

$$K_{32} = r \frac{E I_z}{L^2}, \quad K_{22} = -K_{52} = r \frac{E I_z}{L^3} - \frac{P_a}{L} \quad (50)$$

Procediendo como se hizo para elementos sin liberaciones,

$$t = 1 - \frac{\pi^2 \phi}{r} \quad (51)$$

Luego,

$$K_{22} = -K_{52} = r t \frac{E I_z}{L^3} \quad (52)$$

2.5 - MATRIZ DE RIGIDEZ

Definidas las funciones de estabilidad ó factores de rigidez como són conocidas dichas funciones por algunos autores, estamos en condiciones de ensamblar la matriz de rigidez de ún elemento para sus direcciones locales.

Para el caso del elemento de pórtico espacial, y llevando en cuenta,

$$u = L \sqrt{\frac{P_a}{E I_z}} \quad , \quad \delta \quad , \quad u = L \sqrt{\frac{P_a}{E I_y}} \quad (53)$$

Las funciones sé calcularán, llevando en cuenta el plano de flexión correspondiente; Los coeficientes de la matriz de rigidez són,

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{E A_x}{L} \quad , \quad T_k = \frac{G I_x}{L} \\ A_k &= \frac{E I_z}{L} r \quad , \quad E_k = \frac{E I_y}{L} r \\ B_k &= \frac{E I_z}{L} r c \quad , \quad F_k = \frac{E I_y}{L} r c \\ C_k &= \frac{E I_z}{L^2} r (1+c) \quad , \quad G_k = \frac{E I_y}{L^2} r (1+c) \end{aligned} \quad (54)$$

S_k	.	.	.	.	.	$-S_k$	.	.	.	.	.	1
.	D_k	.	.	.	C_k	.	$-D_k$	.	.	.	C_k	2
.	.	H_k	.	$-G_k$	.	.	.	$-H_k$	.	$-G_k$	.	3
.	.	.	T_k	.	.	.	.	.	$-T_k$	.	.	4
.	.	$-G_k$	.	E_k	.	.	.	G_k	.	F_k	.	5
.	C_k	.	.	.	A_k	.	$-C_k$	.	.	.	B_k	6
$-S_k$	.	.	.	.	.	S_k	.	.	.	.	.	7
.	$-D_k$	.	.	.	$-C_k$	.	D_k	.	.	.	$-C_k$	8
.	.	$-H_k$	.	G_k	.	.	.	H_k	.	G_k	.	9
.	.	.	$-T_k$	.	.	.	.	.	T_k	.	.	10
.	.	$-G_k$	.	F_k	.	.	.	G_k	.	E_k	.	11
.	C_k	.	.	.	B_k	.	$-C_k$	.	.	.	A_k	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	

MATRIZ DE RIGIDEZ PARA ELEMENTO
EN EL ESPACIO

$$D_k = \frac{2 E I}{L^3} z \quad r (1+c) t \quad , \quad H_k = \frac{2 E I}{L^3} y \quad r (1+c) t$$

En el caso de elementos de pórtico plano se usarán de la anterior matriz, solamente las filas y columnas numeradas con 1 , 2 , 6 , 7 , 8 , 12 .

Las direcciones referentes a estos números se presentan en la figura 2.5 ,

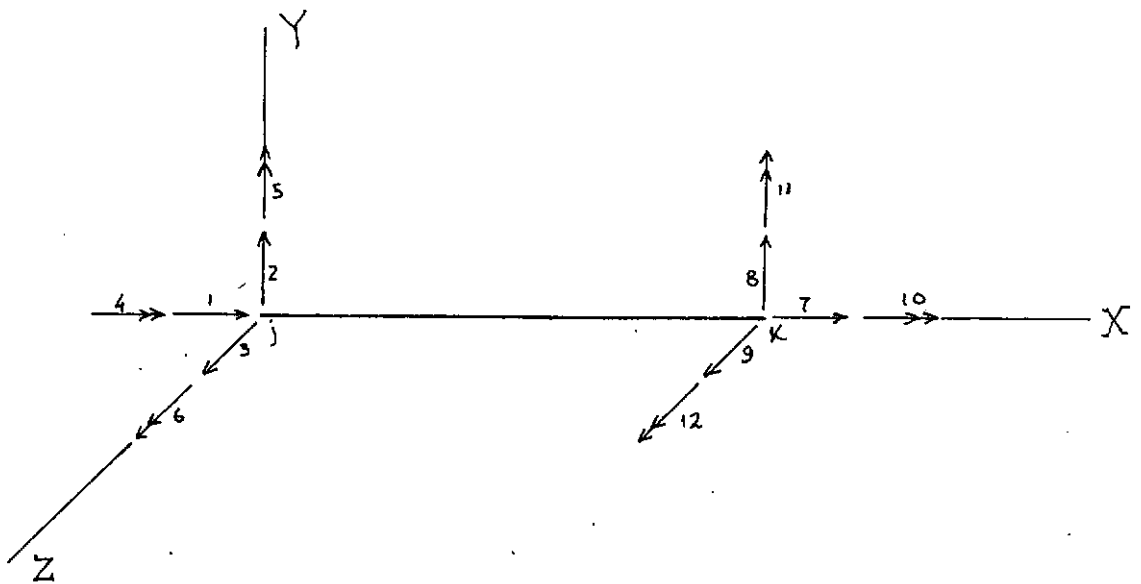


Figura 2.5

CAPITULO III

TEORIA DE LAS DEFLEXIONES FINITAS

3.1 - GENERALIDADES

Es usual en análisis de estructuras asumir que los desplazamientos en una estructura són pequeños comparados con las dimensiones de los elementos. Así, las ecuaciones de equilibrio utilizadas són estrictamente válidas en la estructura indeformada solamente, y las ecuaciones de compatibilidad desprecian efectos de segundo orden en los desplazamientos.

Los cambios de geometria tienen efecto pronunciado en el comportamiento de las estructuras, cuando se estudia el fenómeno del pandeo, yá que la estructura puede ser incapaz de soportar carga adicional por su tendencia al cambio geométrico de forma.

Las características de pandeo de una estructura són normalmente consideradas separadamente del análisis básico. Con la disponibilidad de Computadoras, este análisis puede comprender esos efectos cuando se procesa un programa de tipo iterativo.

Cuando los cambios geométricos són llevados en cuenta, la trayectoria carga-deflexión de la estructura es nó-lineal.

Así como los métodos de análisis lineal, muchos métodos de análisis nó-lineal pueden clasificarse como a) de las fuerzas , b) de desplazamientos . Cuando se usa un método iterativo, es conveniente trabajar con el método de los desplazamientos, por su facilidad de programación.

Los efectos de los cambios geométricos en una estructura pueden resumirse a los siguientes,

- a) Cambio en la rigidez lateral del elemento.
- b) Desplazamientos finitos en los nudos. (Las rotaciones en los nudos són pequeñas)
- c) Cambio en la longitud de los elementos.

La influencia de estos efectos se explicará a continuación.

3.2 - ANALOGIA FISICA

Supóngase un pórtico plano, figura 3.2.1, al que se aplica una carga generalizada W ,

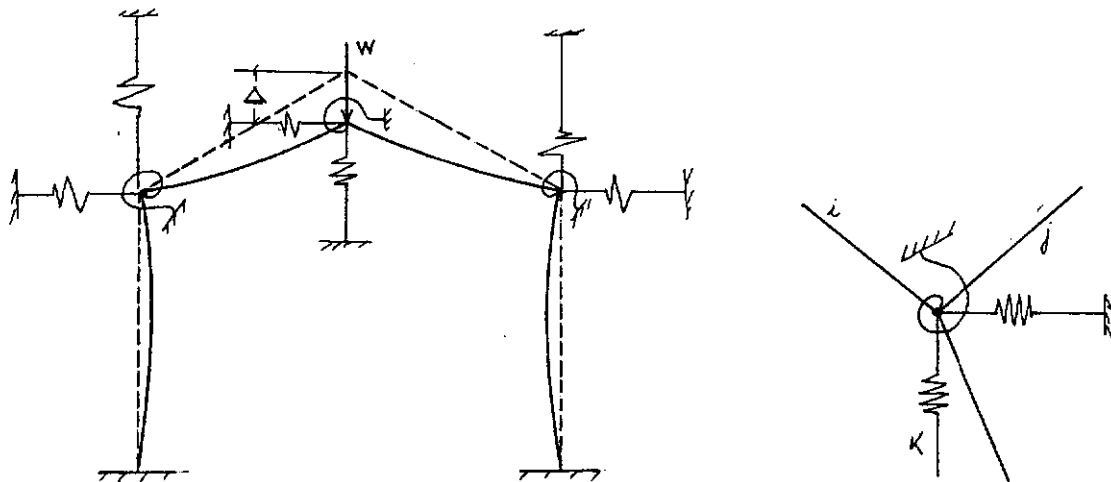


Figura 3.2.1

Supóngase un sistema autoequilibrante ideal para cada elemento, cuya función es la de absorber en parte ó totalmente la carga axial, previniendo los efectos de inestabilidad constante en cada estado de deformación, fenómeno que se refleja en los valores de las funciones de estabilidad.

Supóngase también un sistema de restricciones elásticas que idealmente absorben la diferencia entre las fuerzas generalizadas W y los esfuerzos internos inducidos F en la dirección de las cargas. Llamando este sistema por f , tendremos,

$$f = W - F$$

El papel que juegan los dos sistemas, tanto el autoequilibrante como el de restricciones elásticas, es el de mantener el equilibrio en la estructura, para cualquier estado de deformación generalizada.

Se trata de buscar la posición de equilibrio de la estructura, para la cual $f = 0$, y $\Delta = \eta$, Vector de desplazamientos generalizados.

Para comienzo del análisis se ha encontrado que los desplazamientos generalizados Δ_0 obtenidos de un análisis lineal són valores razonables como iniciales de una trayectoria de desplazamientos.

Cuando se liberan los sistemas, tanto el autoequilibrante como las restricciones elásticas, esto equivale a aplicar en la estructura deformada las fuerzas f en la dirección de las cargas, produciéndose un incremento en los desplazamientos

$$\Delta_{\eta} = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$$

Los desplazamientos Δ_n dan lugar a un sistema de fuerzas en las restricciones elásticas igual a f_{n+1} y el proceso iterativo continua hasta la precisión deseada con un error prescripto.

Cuando las fuerzas f_{n+1} están dentro del error prefijado, los desplazamientos Δ_n serán los desplazamientos finales η y estos a su vez corresponderan a la carga generalizada W .

3.2.1 - CONDICION DE COMPATIBILIDAD

Cuando se corrigen los valores de las coordenadas locales de acuerdo a los desplazamientos obtenidos en la etapa anterior y se reensambla el pórtico, automáticamente se está satisfaciendo con esta condición.

Para el caso plano, figura 3.2.2, el elemento 1-2, se ha desplazado a la posición 1'-2'. Las nuevas coordenadas serán,

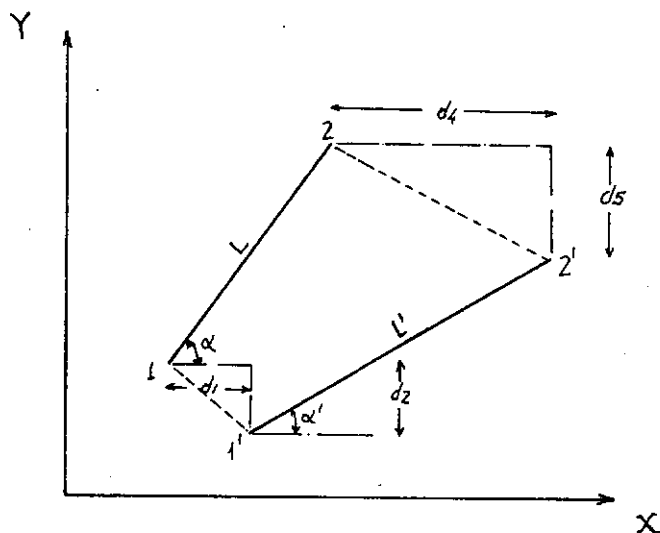


Figura 3.2.2

$$\begin{aligned} X_1' &= X_1 + d_1 & , & & X_2' &= X_2 + d_4 \\ Y_1' &= Y_1 + d_2 & , & & Y_2' &= Y_2 + d_5 \end{aligned} \tag{55}$$

3.2.2 - CONDICION DE EQUILIBRIO

En cualquier estado de deformación, las cargas W á que está sometida la estructura deben equilibrar con la suma de los esfuerzos internos F y las fuerzas asimiladas por las restricciones elásticas ideales f .

$$W = F + f$$

Los esfuerzos internos F , són calculados en cada etapa, para la posición deflectada, siendo que los valores resultantes són los exactos para esa posición.

3.3 - ESFUERZOS LOCALES

En la teoría de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos, los esfuerzos en los nudos de los elementos són calculados por la suma de las proyecciones de todos los esfuerzos actuantes, respecto de la posición nó deformada de la estructura.

Esta és una aproximación válida cuando las cargas són relativamente pequeñas cuando comparadas con las respectivas cargas teóricas de pandeo.

Por consideración de la geometría, es posible calcular en forma exacta el valor de estos esfuerzos en la posición deformada de cada elemento.

3.3.1 - ELEMENTO EN EL PLANO

Considerando la figura 3.3.1 ,

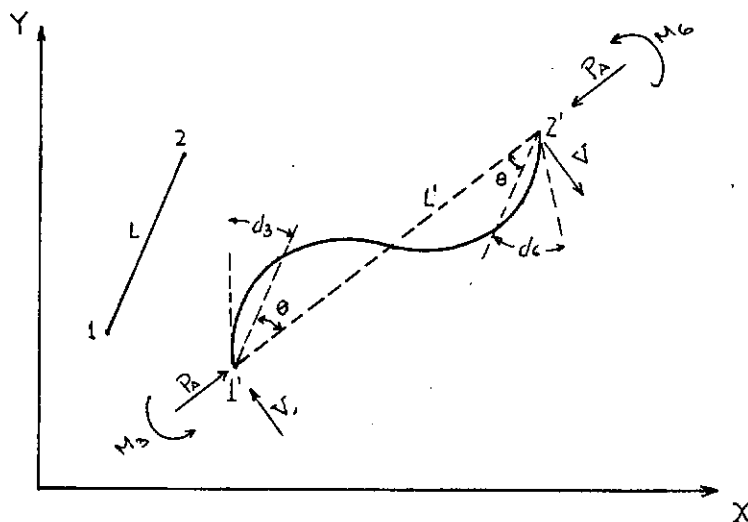


Figura 3.3.1

El esfuerzo axial puede ser calculado directamente por la Ley de Hooke ,

$$P_a = \frac{A E}{L} (L - L') \quad (56)$$

(+ compresión)

En este caso se ha despreciado el efecto de la flexión en la longitud del elemento y se considera solamente la longitud de la cuerda calculada, conocidos los desplazamientos globales.

En la teoría lineal, los momentos són calculados por la expresión,

$$M_3 = \frac{6 E I_z}{L^2} \left[(d_4 - d_1) C_y + (d_2 - d_5) C_x \right] + \frac{4 E I_z}{L} \left(d_3 + \frac{d_6}{2} \right) \quad (57)$$

donde,

$d_1, d_2, \dots, d_6$: Desplazamientos globales.

C_x, C_y : Cosenos directores respecto de la posición original del elemento.

Cuando se consideran desplazamientos grandes, los momentos deben calcularse en la posición deformada, y para ello, si usamos la longitud de la cuerda y los cosenos directores de la barra defleada, obtenemos

$$M_3 = \frac{6 E I_z}{L} \left[\frac{(d_4 - d_1) C'_y + (d_2 - d_5) C'_x}{L} \right] + \frac{4 E I_z}{L} \left(d_3 + \frac{d_6}{2} \right) \quad (58)$$

Observando la figura 3.3.2, la expresión entre paréntesis corresponde al seno del ángulo θ que hacen la posición original y la deflectada del elemento. Por lo tanto,

$$M_3 = \frac{6 E I_z}{L} (\text{sen } \theta) + \frac{4 E I_z}{L} \left(d_3 + \frac{d_6}{2} \right)$$

Siendo el ángulo θ pequeño, $\text{sen } \theta = \theta$ y componiendo los términos tendremos,

$$M_3 = \frac{4 E I_z}{L} (d_3 + \theta) + \frac{2 E I_z}{L} (d_6 + \theta) \quad (59)$$

Los coeficientes 4 y 2, corresponden a los valores de las funciones r y rc respectivamente. Haciendo,

$$d'_3 = d_3 + \theta, \quad d'_6 = d_6 + \theta$$

y tomando la longitud de la cuerda tenemos,

$$M_3 = \frac{E I_z}{L} r d'_3 + \frac{E I_z}{L} rc d'_6$$

$$M_6 = \frac{E I_z}{L} r d'_6 + \frac{E I_z}{L} rc d'_3 \quad (60)$$

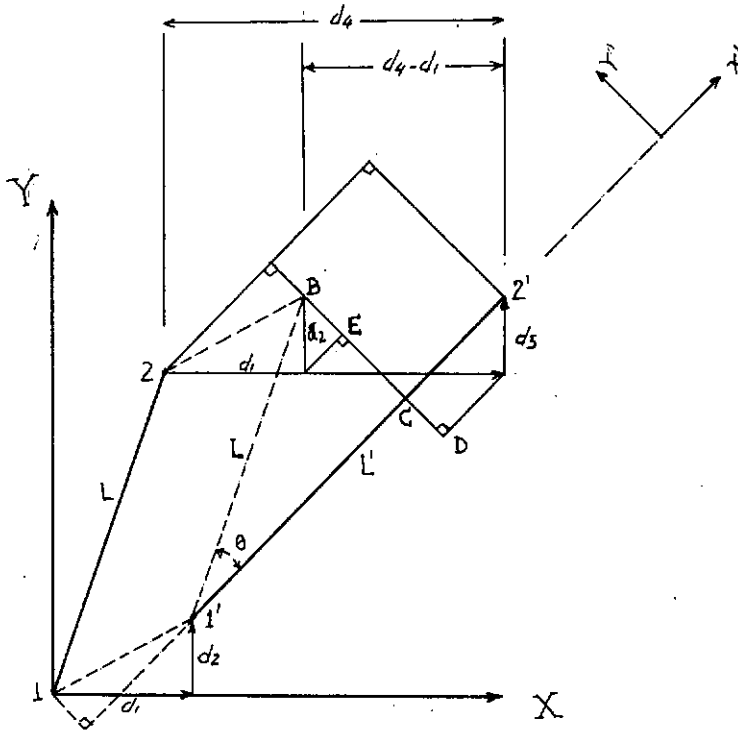


Figura 3.3.2

Conocidas las nuevas coordenadas por las ecuaciones (55), es posible calcular la nueva dimensión de los elementos L' , así como los nuevos cosenos directores de la posición deflecionada,

$$XCL' = (X_2' - X_1')$$

$$YCL' = (Y_2' - Y_1')$$

$$L' = \sqrt{XCL'^2 + YCL'^2}$$

(61)

Los cosenos directores,

$$c'_x = \frac{XCL'}{L'} \quad , \quad c'_y = \frac{YCL'}{L'} \quad (62)$$

El ángulo θ que resulta de la distorsión del elemento respecto de la posición original, puede calcularse por la geometría descrita en la figura 3.3.2 ,

Observamos,

$$\text{sen } \theta = \frac{\overline{BC}}{L} \quad , \quad \overline{BC} = \overline{ED} + \overline{BE} + \overline{CD} \quad ,$$

$$\overline{BC} = (d_4 - d_1) c'_y + (d_2 - d_5) c'_x$$

Por lo tanto el ángulo θ puede conocerse a partir de los desplazamientos globales de la estructura y los cosenos directores de la posición deflectada ,

$$\theta = \text{Arc sen } \frac{(d_4 - d_1) c'_y + (d_2 - d_5) c'_x}{L} \quad (63)$$

Conocidos los momentos en los nudos, podemos calcular los esfuerzos cortantes, considerando el equilibrio,

$$V_1 = - V_2 = \frac{M_3 + M_6}{L'} \quad (64)$$

3.3.2 - ESFUERZOS EN EL ESPACIO

Los esfuerzos locales para una viga-columna en posición tridimensional pueden derivarse de los obtenidos para el caso plano, cuando se llevan en cuenta los dos planos principales de flexión.

Al igual que en el elemento en el plano, se supone que los esfuerzos cortantes actúan en un plano que coincide con uno de los planos de inercia de la sección. Por esto se suponen despreciables, efectos de flexo-torsión.

También se supone que el efecto de la flexión en el cálculo de la longitud de los elementos es despreciable, tomándose la longitud en la posición deformada la correspondiente a la cuerda.

Para las direcciones mostradas en la figura 3.3.4 ,

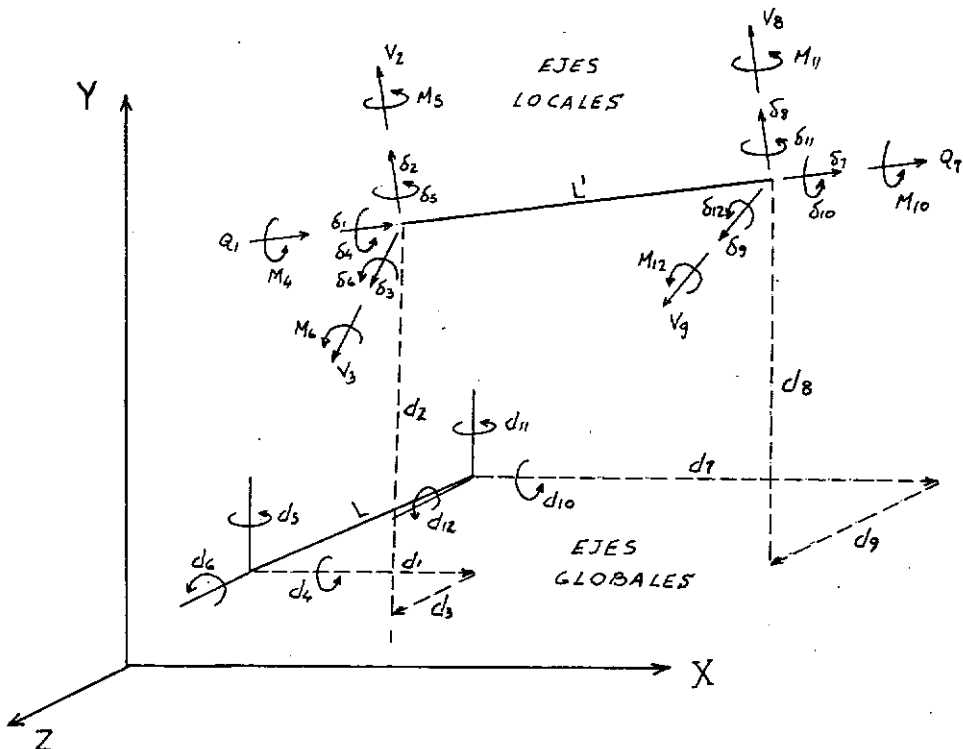


Figura 3.3.4

Los esfuerzos axiales són,

$$Q_1 = - Q_7 = \frac{A_x E}{L} (L - L') \quad (65)$$

Los momentos torsores,

$$M_4 = - M_{10} = \frac{G I_x}{L'} (\delta_4 - \delta_{10}) \quad (66)$$

Los giros en los nudos consisten de dos partes, en forma similar al caso plano,

$$\begin{aligned} d'_5 &= d_5 + \theta_z & ; & & d'_{11} &= d_{11} + \theta_z \\ d'_6 &= d_6 + \theta_y & ; & & d'_{12} &= d_{12} + \theta_y \end{aligned} \quad (67)$$

donde los ángulos θ_y y θ_z són calculados por ,

$$\theta_y = \text{arc sen} \left(\frac{\delta_9 - \delta_3}{L} \right) \quad (68)$$

$$\theta_z = \text{arc sen} \left(\frac{\delta_2 - \delta_8}{L} \right)$$

Los Momentos flectores serán,

$$M_5 = \frac{E I_y}{L'} r d'_5 + \frac{E I_y}{L'} rc d'_{11}$$

$$M_{11} = \frac{E I_y}{L'} rc d'_5 + \frac{E I_y}{L'} r d'_{11}$$

(69)

$$M_6 = \frac{E I_z}{L'} r d'_6 + \frac{E I_z}{L'} rc d'_{12}$$

$$M_{12} = \frac{E I_z}{L'} rc d'_6 + \frac{E I_z}{L'} r d'_{12}$$

Debe tenerse en cuenta que las funciones r y rc són calculadas con I_y ó I_z de acuerdo a la dirección considerada.

Las fuerzas cortantes són calculadas por equilibrio de Momentos en el elemento ,

$$V_2 = - V_8 = \frac{M_6 + M_{12}}{L'}$$

(70)

$$V_3 = - V_9 = \frac{M_5 + M_{11}}{L'}$$

La longitud del elemento para la posición deformada será ,

$$L' = \left[(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 \right]^{1/2} \quad (71)$$

donde las coordenadas han sido calculadas por la suma de los desplazamientos globales, á las coordenadas originales.

3.4 - ESFUERZOS GLOBALES

El vector de esfuerzos globales que contiene la respuesta de la estructura a la sollicitación, és obtenido de la rotación del vector de esfuerzos locales, usándose para ello la geometría deformada de la estructura.

$$[F]_{XYZ} = [R']^t [f]_{xyz} \quad (72)$$

donde $[R']^t$ és la matriz de rotación correspondiente á la posición deformada de la estructura y $[f]_{xyz}$ los esfuerzos locales para ésa posición.

Las matrices de rotación usadas són derivadas para el elemento en el plano y para el espacio, y són encontradas en extensa bibliografía (18).

La matriz de rotación para el elemento en el espacio, tiene una dimensión de 12x12 y és importante resaltar, que el angu-

lo α que define la orientación de los ejes principales de Inercia de la sección, varía de acuerdo a los giros torsionales

$$R' = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} R'_o \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} R'_o \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (73)$$

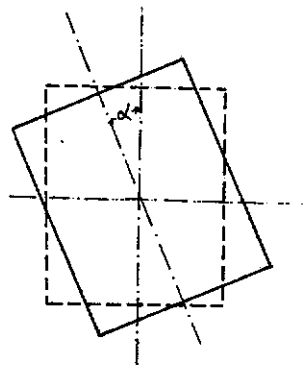
$\delta 4$ y $\delta 10$

$$R'_o = \begin{bmatrix} C'_x & C'_y & 0 \\ -C'_y & C'_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El ángulo α es modificado en cada ciclo iterativo, de acuerdo a ,

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \delta 4 \quad (\text{nudo } i)$$

$$\alpha_2 = \alpha_0 + \delta 10 \quad (\text{nudo } j)$$



De acuerdo a esto, la matriz de rotación es diferente no solo para cada nudo, sino que varía de ciclo en ciclo de la iteración.

CAPITULO IV

METODO ITERATIVO

4.1 - DESCRIPCION

El proceso iterativo usado para encontrar la trayectoria carga-deflexión del fenómeno nó-lineal puede esquematizarse de la siguiente manera ,

1) Con las cargas externas aplicadas en la estructura y operando con la geometría inicial se hace un análisis lineal, encontrándose los desplazamientos en las coordenadas globales de la estructura. Con estos desplazamientos, se calculan nuevas coordenadas para los nudos del sistema.

2) Los desplazamientos así calculados pueden proyectarse para la posición deformada en cada elemento usándose para ello la matriz de rotación respecto de la nueva geometria. Con los desplazamientos en ejes locales, se pueden calcular los esfuerzos en los nudos para esa posición. Conocidos los esfuerzos locales, se encuentran las componentes en la dirección de los ejes globales de la estructura.

3) La suma de las respectivas componentes en un nudo, para determinada dirección debe ser igual a la carga externa en esa dirección para equilibrar la estructura. Si nó lo es, esta suma es restada de la carga y la diferencia es tomada como nueva carga

en esa dirección particular.

4) Las nuevas cargas así calculadas són aplicadas a la estructura deformada y usando la matriz de rigidez tangente,¹ un nuevo análisis es hecho siguiendo los pasos 1 a 4 .

5) El proceso es repetido hasta un predeterminado error para la diferencia entre cargas y esfuerzos de respuesta. La geometría final será la geometría de equilibrio de la estructura.

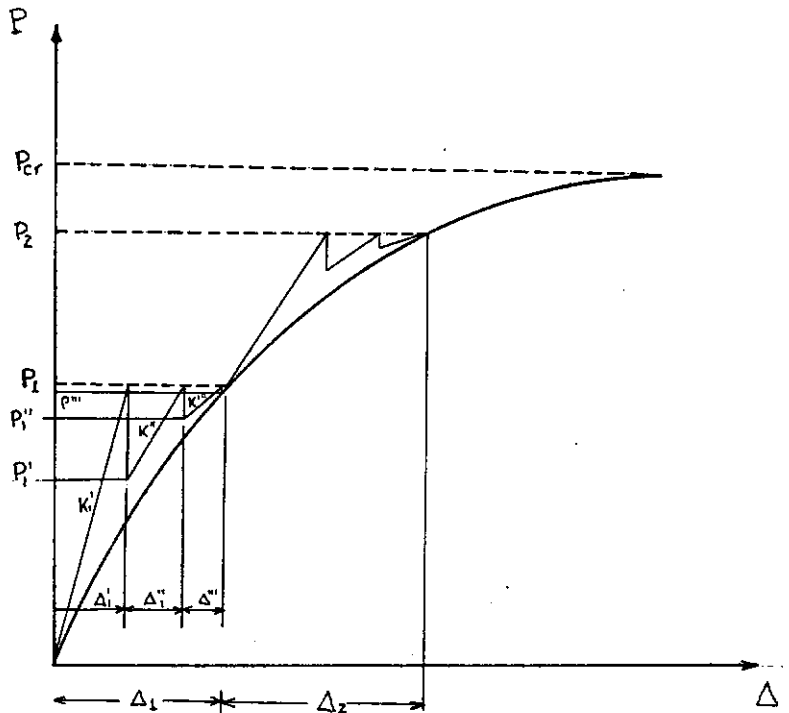


Figura 4.1

1 Ver numeral 4.2

4.2 - MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

La idea básica en un método iterativo del tipo Newton-Raphson, es la de obtener para cada paso iterativo una solución tangente a la curva representativa del fenómeno nó-lineal carga-deflexión, figura 4.1, en cada punto considerado.

Para obtener esta solución tangente, las matrices de rigidez deben ser modificadas para llevar en cuenta el efecto de las fuerzas axiales, así como los cambios geométricos.

El método de la expansión de Taylor usado por Turner (14), há probado ser viable para obtener esta matriz de rigidez tangente (15) .

Despreciando términos de alto orden, la expansión de Taylor para una función continua $G (x_1 , \dots x_n)$ en un punto particular (o) definido por las variables $(x_{10}, x_{20}, \dots x_{no})$ es ,

$$G \left[(x_{10} + dx_1), \dots, (x_{no} + dx_n) \right] = G (x_{10}, \dots, x_{no}) + \\ + \frac{\partial G}{\partial x_1} dx_1 \quad . . . + \frac{\partial G}{\partial x_n} dx_n$$

Para el caso de un elemento de pórtico plano, figura 3.3.2 si llamamos el vector de esfuerzos nodales $[F]$ en coordenadas globales (ecuación 72, §3.4) calculados para cualquier posición deformada, como la función G , y las deformaciones hasta esa posición $d_1 , d_2 , \dots d_6$ como las variables $x_1 , x_2 , \dots x_n$,

los elementos de la matriz de rigidez tangente pueden obtenerse por la derivación parcial del vector $[F]$ respecto de cada una de las deformaciones $d_1, d_2, \dots, d_6$. Desde que la derivada parcial del la fuerza F_i respecto de una deformación particular d_j nos dá el valor de la fuerza F_i causado por un cambio diferencial en d_j , el coeficiente de rigidez K_{ij} de la matriz tangente será ,

$$K_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial d_j}$$

En una forma general, tomándose todos los grados de libertad, para el elemento en el plano se tiene,

$$K_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial d_1} & . & . & . & . & \frac{\partial F_1}{\partial d_6} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{\partial F_6}{\partial d_1} & . & . & . & . & \frac{\partial F_6}{\partial d_6} \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez derivadas por este procedimiento, tanto para elementos en el plano como en el espacio, pueden consultarse en la bibliografía al final de este trabajo, p.e, (14),(15),(16).

Cuando se desprecia la variación en algunos parámetros en el proceso de derivar las expresiones F_i respecto de los desplazamientos d_j , se llega a una matriz de rigidez un poco menos compleja que la citada anteriormente, la cual ha sido mostrada en el § 2.5 ., para ejes locales del elemento.

4.3 - CARGAS CRITICAS

Obtenida la geometria de equilibrio, nuevos incrementos de carga són hechos y para cada incremento, se encuentra una nueva posición de equilibrio. Cuando las deformaciones són muy grandes para pequeños incrementos de carga, el proceso iterativo tiene una convergencia muy lenta. El valor de estas cargas puede ser visto como el valor crítico ó de pandeo de la estructura.

Un valor más exacto para la carga crítica puede obtenerse por el cálculo del determinante de la matriz de rigidez global de la estructura; Por la condición de inestabilidad del equilibrio ,

$$\begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \end{bmatrix} \quad \|K\| = 0$$

Durante el proceso iterativo, puede suceder que el determinante llegue a un valor negativo (9) , lo que nos indica que el incremento de carga ha sido muy grande y este debe reducirse con el fin de deteminar el valor crítico con mejor aproximación.

4.4 - BIFURCACION DEL EQUILIBRIO

Estructuras simétricas sometidas a cargas simétricas pueden pandear en forma nó-simétrica. En este tipo de estructuras la carga correspondiente a este modo será la crítica.

Una técnica muy conocida para encontrar esta carga (9), és la de perturbación, qué consiste en afectar la estructura con pequeñas cargas que pueden inducir el modo asimétrico de pandeo. El valor de ΔP puede ser del orden de 1 % P .

CAPITULO V

PROGRAMA AUTOMATICO

5.1 - INTRODUCCION

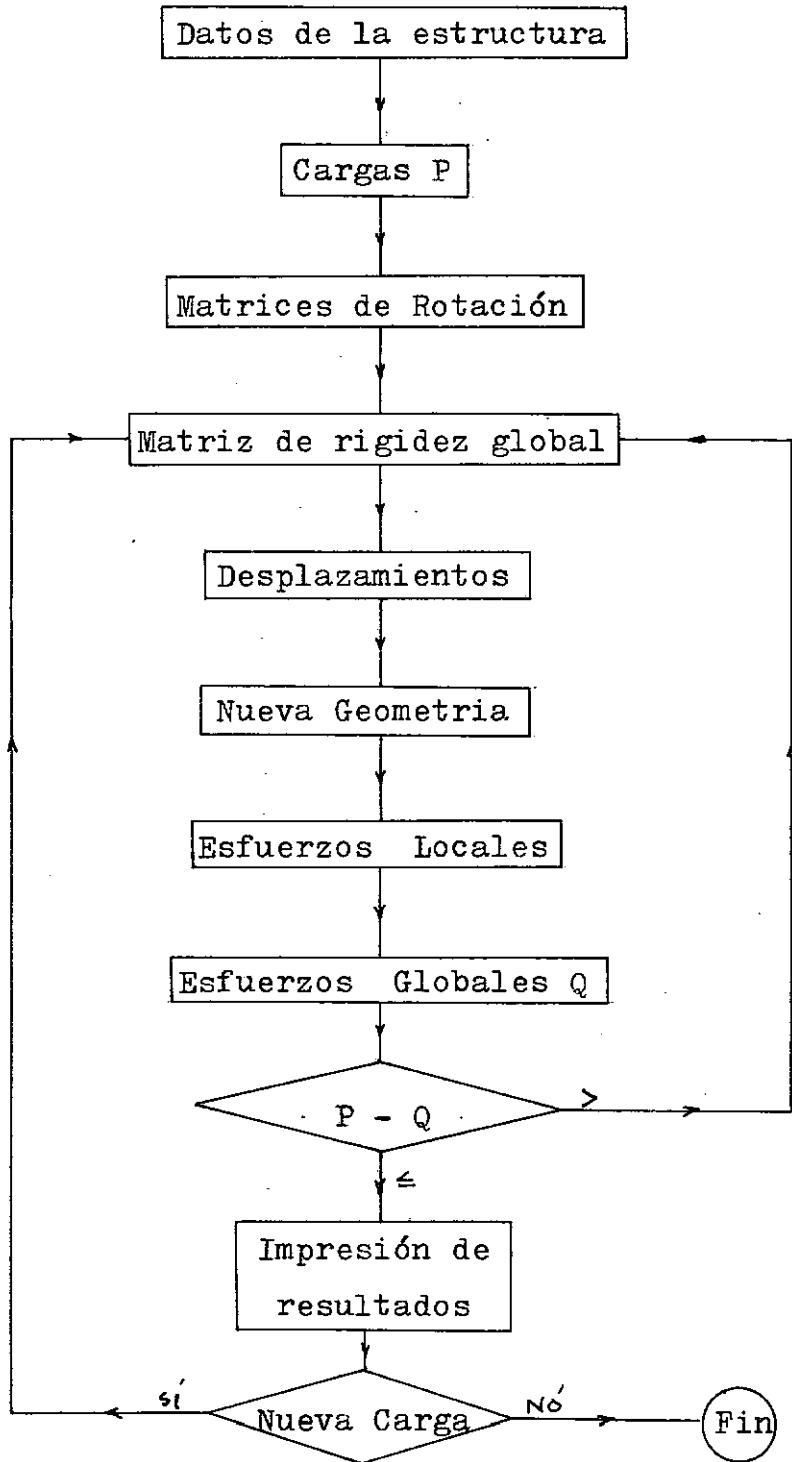
En este capítulo se presenta un programa automático escrito en fortran II que permite analizar los ejemplos mostrados a continuación, El programa ha sido escrito de una manera que permite acompañar el proceso debido a su disposición en bloques.

Para la solución del sistema de ecuaciones se há utilizado el algoritmo de Gauss que permite trabajar con la semibanda de la matriz de rigidez simétrica.

El montaje de la matriz de rigidez global es hecho con las contribuciones de cada elemento y realizado en la memoria directa del computador.

A continuación se muestra el diagrama de bloques y el significado de las variables usadas, tanto en el programa principal cuanto en las subrutinas.

5.2 - DIAGRAMA DE BLOQUES



5.3 - VARIABLES DEL PROGRAMA

A continuación se presenta una lista de las principales variables usadas en el programa y las subrutinas, con el significado de cada una.

NN	Número de nudos de la estructura.
NE	Número de elementos de la estructura.
NNDP	Número de nudos con desplazamientos prescriptos (apoyos)
NGLN	Número de grados de libertad por nudo.
NNPE	Número de nudos por elemento.
NEL (I,J)	Matriz que contiene la incidencia de los nudos para cada elemento I
NA (I)	Vector con los números de los nudos que corresponden a apoyos ó dirección restringida.
IA (I,J)	Variable que discretiza el apoyo, $IA(I,J) > 0$: No hay restricción al desplazamiento J del apoyo I $IA(I,J) < 0$. Dirección restringida.
EE , G	Constantes elásticas.
IX , IY , IZ	Momentos de Inercia de la sección.
AX	Area de la sección transversal.
ALF1 , ALF2	Angulos que definen la posición de los ejes principales de Inercia de la sección para cada nudo del elemento.
NNC	Número de nudos cargados.
NNCAR	Número de grupos de cargas solicitantes.
CMAX	Carga máxima de solicitación.
ERROR	Mínima diferencia permitida entre cargas

	solicitantes y esfuerzos de respuesta.
X(I),Y(I),Z(I)	Coordenadas nodales iniciales. $I = 1, NN$
X1(I),Y1(I),Z1(I)	Coordenadas nodales en la posición después de las cargas. $I = 1, NN$
XE(I),YE(I),ZE(I)	Coordenadas del nudo i . $I = 1, NNPE$
L(I) , Ll(I)	Longitudes de los elementos, antes y después de las cargas.
CX(I),CY(I),CZ(I)	Cosenos directores.
Pl (N,J)	Cargas nodales. $N = 1, NNCAR$, $J = 1, NGLN$.
TETA(I) , GAMA(I)	Angulos de distorsión de los elementos.
PA (I)	Fuerzas axiales en los elementos.
JBMAX	Ancho de semibanda de la Matriz de rigidez.
NIVCA	Nº de grupos de cargas.
DET	Determinante de la matriz de rigidez.
S (I,J)	Matriz de rigidez global de la estructura.
SM (I,J)	Matriz de rigidez local del elemento.
R (I), RT(I)	Matriz de rotación y su traspuesta.

5.4 - EJEMPLOS

- 1) - La figura 5.1 muestra una estructura articulada en sus nudos y sometida a una carga F_N ,

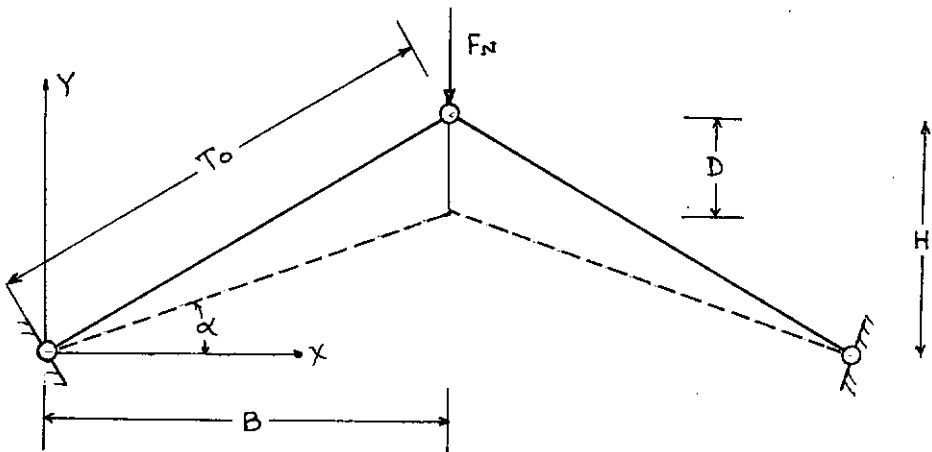


Figura 5.1

Como se trata de una estructura isostática para la cual es posible calcular fácilmente la respuesta axial para diferentes posiciones de las barras variando el ángulo α , se ha hecho un pequeño programa que nos sirve como test para los resultados que se obtienen utilizando el programa desarrollado en § 5.4 .

```
DIMENSION D(610), FN(610)
READ (8,100) TO,B,H,E,A,NINT
DELTA = 0.
NN = 2*NINT +10
```

```
HA = H/NINT
DO 1 I =1,NN
DELTA = DELTA + HA
D(I) = DELTA
T = SQRT (B**2 + (H-DELTA)**2)
DEF = (TO-T)/TO
FA = E*A*DEF
SALF = ABS(H-DELTA)/T
FN(I) = 2.*FA*SALF
1 CONTINUE
WRITE (5,101) (FN(I),D(I),I =1,NN)
100 FORMAT (5F10.0,I5)
101 FORMAT (2F20.7,20X,2F20.7)
CALL EXIT
END
```

Donde ,

E = Módulo de Elasticidad del material.

A = Area de la sección transversal.

DELTA = Incremento en desplazamiento vertical.

T = Longitud deflectada del elemento.

DEF = Deformación unitaria.

FA = Respuesta axial.

SALF = $\sin \alpha$

Para los valores ,

E = 30000

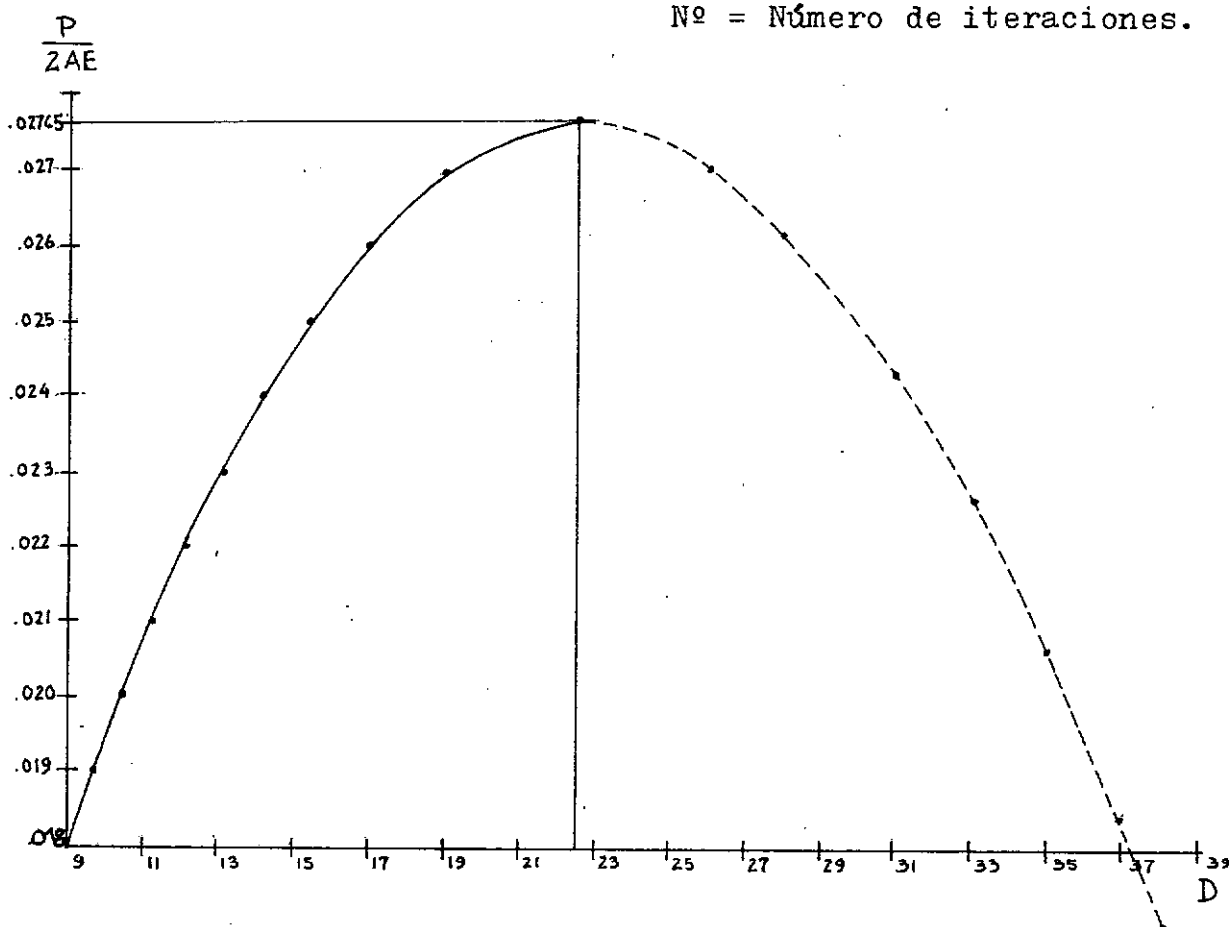
A = 1

H = 50

To = 100

P/ 2AE	P	Nº	D	D (exacta)	F A
0.01900	1140	5	9.7715	9.7714	1353.00
0.02000	1200	4	10.5156	10.5154	1446.33
0.02100	1260	4	11.3115	11.3112	1544.56
0.02200	1320	4	12.1718	12.1715	1648.84
0.02300	1380	4	13.1145	13.1144	1760.86
0.02400	1440	5	14.1687	14.1684	1883.28
0.02500	1500	5	15.3851	15.3848	2020.76
0.02600	1560	6	16.8707	16.8705	2183.09
0.02700	1620	7	18.9564	18.9560	2400.46
0.02765	1659	40	22.4683	22.4680	2737.93

Nº = Número de iteraciones.



Para una carga equivalente a $P/2AE = 0.027666$ no se logró convergencia en 400 iteraciones, lo que nos indica que la estructura sobrepasó la carga crítica. El error usado para la convergencia fué de 0.005. En consecuencia,

$$\frac{P_{\text{crit.}}}{2AE} = 0.02765 \quad , \quad D_{\text{crit}} = 22.4683$$

Resultados que coinciden con los calculados exactos usando el programa citado para este ejemplo.

2) - Para las dos condiciones de apoyo mostradas, se ha analizado el Pórtico plano de la figura 5.2.

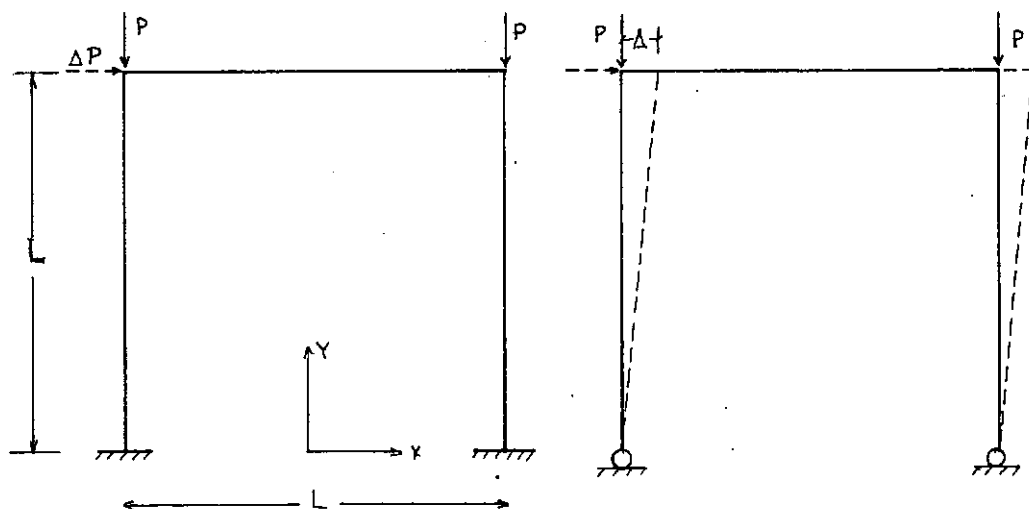


Figura 5.2

$$L = 304,8 \text{ cm} \quad , \quad A_x = 75.9 \text{ cm}^2 \quad , \quad I_z = 12900 \text{ cm}^4 \quad \text{y}$$

$$E = 2100000 \text{ Kg/cm}^2$$

Para encontrar el 1º modo crítico de pandeo se ha utilizado la tecnica de perturbación, solicitando la estructura con una pequeña carga horizontal equivalente a $\Delta P = P / 1000$.

Apoyo	P (ton.)	ΔP (ton.)	Δ (cm)	Δ^* (cm)
	500	0.5	0.041	0.041
E	1000	1.0	0.110	0.110
M	1400	1.4	0.252	0.250
P	1700	1.7	0.541	0.476
O	1800	1.8	0.750	0.668
T	1900	1.9	1.181	1.020
R	1950	1.95	1.600	1.220
A	2000	2.	2.417	1.650
D	2025	2.025	3.220	2.420
O	2050	2.050	4.80	---
	2075	2.075	11.670	---
A	200	0.2	0.085	0.082
R	300	0.3	0.185	0.176
T	400	0.4	0.440	0.435
I	450	0.45	0.840	0.685
C	500	0.5	3.040	1.850
.	510	0.51	6.070	---
	520	0.52	---	---

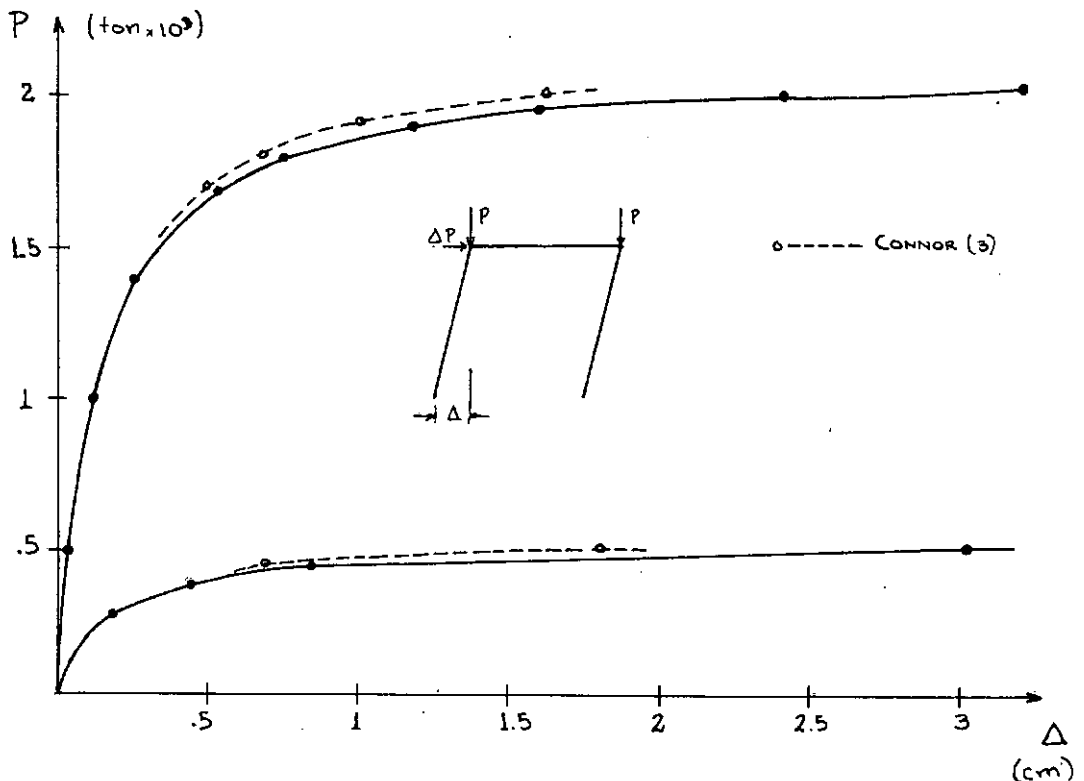
Los valores críticos de P cuando se procesa un problema de autovalores són : (Ref. 22) ,

$$P_{cr.} = \frac{7.39 E I_z}{L^2} = 2165 \text{ ton} \quad (\text{Empot.})$$

$$P_{cr.} = \frac{1.82 E I_z}{L^2} = 534 \text{ ton} \quad (\text{Artic.})$$

Utilizando el método iterativo propuesto, los valores críticos són 2075 ton y 520 ton respectivamente.

Los valores en la columna⁵ són los encontrados por Connor, (3), para este problema.



3) Para el Arco plano mostrado en la figura 5.3.

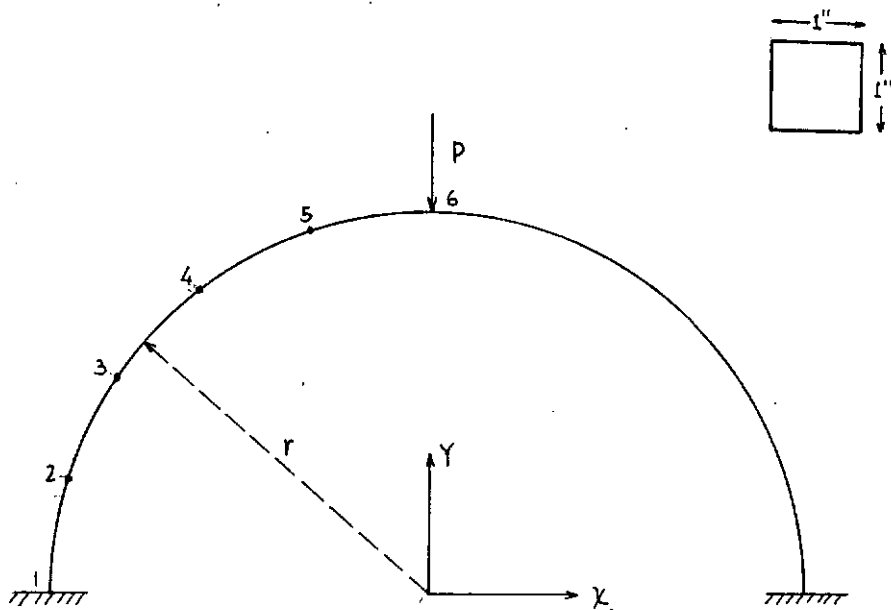


Figura 5.3

Por las condiciones de simetria, se calcula la mitad del arco, discretizado en 5 elementos rectos (cuerdas), y 6 nudos.

Para los datos ,

$$E = 30000 \text{ Kips/inch.}^2$$

$$I_z = 0.0833 \text{ inch.}^4$$

$$A_x = 1 \text{ inch.}^2$$

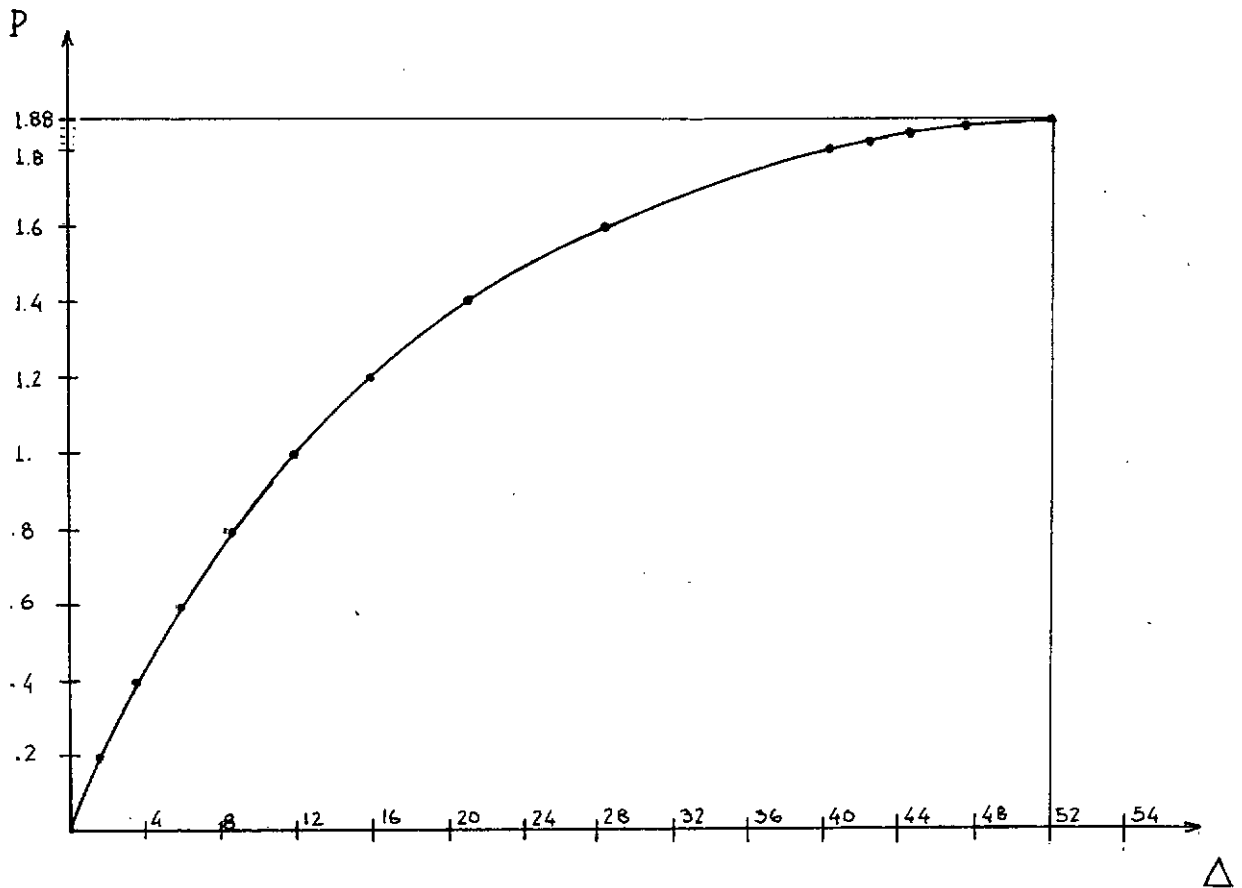
$$r = 120 \text{ inch.}$$

$$(1 \text{ inch.} = 2.54 \text{ cm})$$

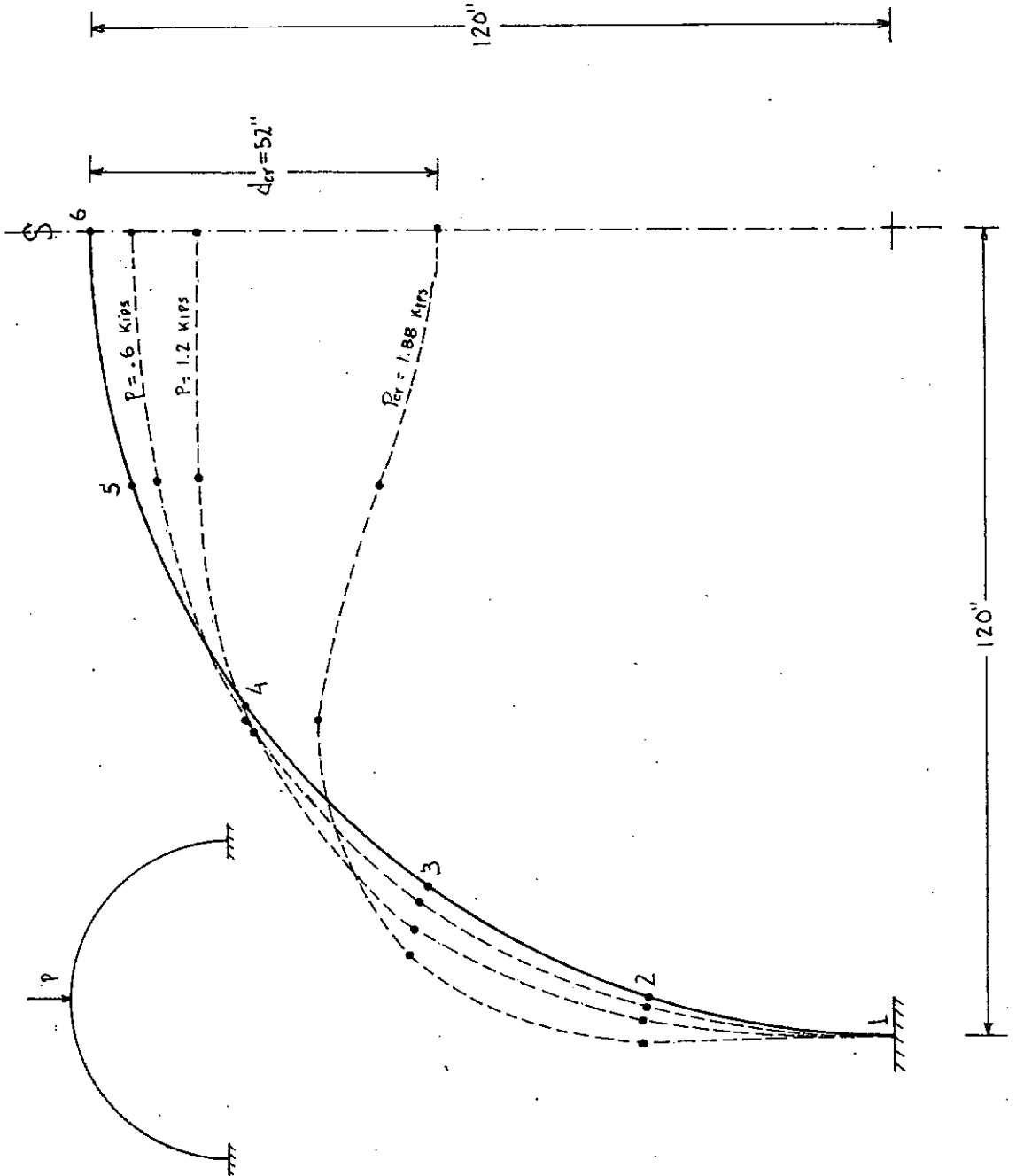
$$(1 \text{ Kip} = 0.454 \text{ ton})$$

$P_{crit.} = 1.88 \text{ Kips}$, $d_{crit.} = -52.0 \text{ in.}$

Nudo	Desplazamientos (inch., rad)			Esfuerzos (kip, kip-inch.)		
	d_x	d_y	θ	P_a	V	M
1	0.	0.	0.	0.898	-1.309	-40.781
2	-7.074	0.442	0.254	1.338	-0.856	8.386
3	-10.600	2.013	-0.129	1.537	0.401	40.516
4	-2.258	-10.671	-0.647	1.005	1.230	25.468
5	0.641	-37.100	-0.684	1.017	1.220	-20.715
6	0.	-52.000	0.	1.017	-1.220	-66.527

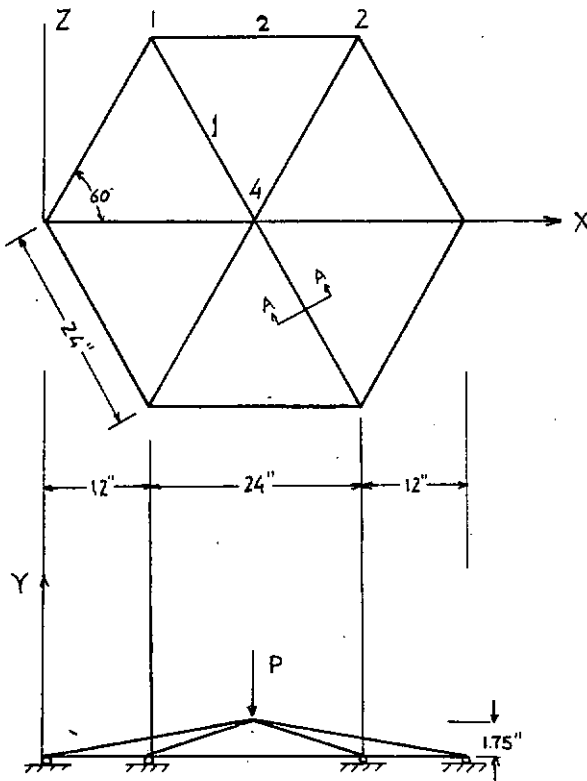


Deformada del Arco



4) - En la figura 5.4. se muestra una estructura espacial,

(1 Kip = 10^3 Lb = 0.454 ton , 1 in = 2.54 cm)



$$E = 439.8 \text{ Kip/in}^2$$

$$G = 159.0 \text{ Kip/in}^2$$

$$I_x = 0.03439 \text{ in}^4$$

$$I_y = 0.02035 \text{ in}^4$$

$$I_z = 0.02035 \text{ in}^4$$

$$A_x = 0.4942 \text{ in}^2$$

Esfuerzos Locales (Lb), (Lb-in)						
Ele. nudo	P _a	V _y	V _z	M _x	M _y	M _z
1	1 131.15	1.955	0.	0.	0.	11.75
	4 -131.15	-1.955	0.	0.	0.	35.26
2	1 -130.86	0.	0.	0.	-0.198	-11.75
	2 130.86	0.	0.	0.	0.198	11.75

El ejemplo anterior ha' sido tratado por Connor (Ref.3) y el valor obtenido para la carga crítica es de 53 lb. La carga crítica obtenida por el método propuesto es de 54 lb. El mismo problema ha sido resuelto articulando los nudos 1,2,3, 5,6,7 y el valor obtenido para la carga crítica es de 66 lb.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES

El uso de funciones de estabilidad como factores de corrección de la matriz de rigidez, es tal vez la forma más exacta de llevar en cuenta los efectos de las fuerzas axiales en la flexión, ya que son derivadas directamente de la ecuación diferencial para flexión de vigas, sin tener que recurrirse a mayores simplificaciones. Pueden ser derivadas también para llevar en cuenta otros efectos, p.e., sección variable a lo largo del elemento, cargas en los elementos, cargas cuyo centro de aplicación no coincide con el centro de cortantes (flexotorsión), entre otros.

La matriz de rigidez definida en § 2.5 se ha mostrado eficiente para la solución de los problemas presentados, obteniéndose en todos ellos una convergencia relativamente rápida; restará investigar si matrices un poco más sofisticadas del tipo mencionado en § 4.2 llegarán a soluciones más rápidas mejorándose la eficiencia en tiempo de computación.

El método iterativo usado es particularmente eficiente cuando se tienen Estructuras con elementos articulados, las cuales pueden presentar grandes modificaciones en la geometría de la misma, haciendo prácticamente imposible su solución, sin llevar en cuenta este fenómeno en el cálculo. El arco plano analizado en el ejemplo 3) es otro tipo de estructura, que por sus parámetros, tanto geométricos como elásticos, es altamente no-lineal.

lineal; aún para cargas muy pequeñas comparadas con la carga crítica, presenta apreciables diferencias entre los resultados obtenidos en un análisis lineal y los logrados mediante un método como el presentado en este trabajo. Los ejemplos 2) y 4) han sido tomados de la publicación (3) de Connor que presenta el método utilizado para el análisis no-lineal basado en la teoría de pequeños desplazamientos ; los resultados obtenidos como se muestran, son prácticamente los mismos.

El programa automático presentado en § 5.2. admite estructuras cargadas en sus nudos solamente ; Cargas distribuidas en los elementos deben ser discretizadas a los nudos para su análisis. Tal como es presentado, el programa es suficiente para resolver los ejemplos presentados.

Los resultados obtenidos han sido logrados usándose un Computador I.B.M /370-165.

NOMENCLATURA

A continuación se presenta el significado de algunas variables usadas en el texto del trabajo ,

P_a : Fuerza axial en los elementos.

P_e : Carga teórica de Euler.

K_{ij} : Coeficiente de rigidez.

r, c, t Funciones de estabilidad.

L, L' Longitud del elemento, antes y después de cargas.

C_x, C_y, C_z Cosenos directores.

E, G Constantes Elásticas.

θ Angulo de distorsión del elemento.

I_x, I_y, I_z Momentos de Inercia de la sección.

V_i Fuerza cortante en el nudo.

M_i Momento en el nudo.

d_i Desplazamiento en ejes globales.

δ_i Desplazamiento en ejes locales.

BIBLIOGRAFIA

1. TEZCAN S.S. & OVUNC B. - " An iteration method for the nonlinear buckling of framed Structures " ,
" Space Structures ", R.M. Davis ,ed., John -
Wiley & Sons, Inc., New York , N.Y., 1967 .
2. ARGYRIS, J. H. , " Recent advances in matrix methos of -
Structural analysis ", Pergamon Press, London,
England, 1964 .
3. CONNOR, J.J., LOGCHER, R.D., CHAN, S.C. - " Nonlinear Ana-
lysis of elastic framed Structures ", Journal,
ASCE, vol 94, ST6, June 1968.
4. JENNINGS, A. - " Frame Analysis including change of Geo-
metry ", Journal, ASCE, vol 94, ST3, March 1968.
5. RENTON, J.D., - " Stability of space frames by computer
Analysis", Jour. ASCE, vol 88, ST4, August 1962.
6. SAAFAN S.A., BROTON D.M. - " Elastic finite deflection
Analysis of rigid frameworks by digital Compu-
ters ",. Symposium on the use of Computers in
Civil Engineering ", vol 1, Laboratorio Nal.
de Engenharia Civil. Lisboa., 1962.
7. HORNE M.R., MERCHANT W. - " The stability of frames " ,
Pergamon Press, London, England, 1965.
8. LIVESLEY R.K. - " Matrix methods of Structural Analysis"
Pergamon Press, London, England, 1964 .

9. CHU, K.H., RAMPETSREITER, R. - " Large deflection buckling of space frames ", Jour., ASCE, vol 98, 1972.
10. SAAFAN, S.A. - " Nonlinear behavior of Structural plane frames ", Jour., ASCE, vol 89, ST4, Dec.1972.
11. LIVESLEY, R.K. - " The application of an electronic digital computer to some problems of Structural Analysis ", " The Structural Engineer ", vol 34, No 1, London, England.
12. JAMES, B.W. - " Principal effects of axial loads on Moment distribution method of rigid Structures" National Advisory Committee for Aeronautics. Washington, 1935.
13. LIVESLEY, R.K. , CHANDLER, B.W. - " Stability functions for Structural frameworks ", Manchester University Press, Manchester, England, 1956.
14. TURNER, M.J., DILL, E.H., MARTIN, H.C., and MELOSH, R.J.
" Large deflections of Structures subjected to heating and external loads ", Jour. of the Aerospace Sciences, vol 27, 1960.
15. TEZCAN, S.S. - Discussion of " Numerical Solution of Non-linear Structures " by Trevor J. Poskit, Jour. ASCE, vol 94, ST6, June 1968.
16. TEZCAN, S.S., Mahapatra B.C. - " Tangent Stiffness Matrix for Space frame members ", Jour., ASCE, vol 95, ST6, June 1969.
17. TIMOSHENKO, S.P., and GERE, J.M. - " Theory of elastic Stability ", 2^o Ed., New York, Mc Graw-Hill, 1961

18. GERE, J.M. & Weaver, W. - " Analysis de Estructuras Reti-
culares ", 2º ed. en Español, Van Nostrand Com-
pany, Princeton, New York, 1970.
19. GALLAGHER, R.H. & PADLOG, J. - " Discrete Element approach
to Estructural instability Analysis". Journal
A.I.A.A. I (6), 1963.
20. HARTZ, B.J. - " Matrix formulation of Structural Stabili-
ty problems ", Jour. ASCE, 91 ST6, 1965.
21. PACITTI, T. - " FORTRAN- Monitor, Principios", Ao Livro
Técnico " S.A., Rio de Janeiro, 1967.
22. DONG, S.B., WOLF, J.A. - " Stability Analysis of Structu-
res by a reduced system of generalized Coordi -
nates", Int. J. Solids Structures, 1970, vol 6,
Pergamon Press. England.

```

//      EXEC FORTGCLG
//FORT.SYSIN DD *
C.....PROGRAMA PARA TEST DE CARGAS CRITICAS.
      IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
      REAL *8 IZ(15),IY(15),IX(15),L(15),L1(15)
      DIMENSION X(10),Y(10),Z(10),NEL(15,2),XE(2),YE(2),ZE(2),NA(10),
*AX(15),CX(15),CY(15),CZ(15),ALF1(15),Q(60),DNA(60),P(60),P1(15,60)
*,IA(10,6),NUNCA(10),TETA(15),PA(15),ACL(15,12),S(60,30),SM(12,12),
*SE(12,12),AML(15,12),X1(10),Y1(10),Z1(10),GAMA(15)
      DIMENSION T(60),R(15,18),RT(15,18),ALF2(15)
      PI=3.1415926
      LB=30
      MR=5
      MW=6
      WRITE(MW,100)
      WRITE(MW,101)
1  WRITE(MW,100)
      READ (MR,102)
      WRITE(MW,102)
      READ (MR,103) NN,NE,NNDP,NGLN,NNPE,ITD
      NN2=NN*NGLN
      NGLE=NNPE*NGLN
      ITT=0
      IF(ITD) 2,1717,1717
-----2- WRITE(MW,104) NN,NE,NNDP,NGLN,NNPE,ITD-----
      WRITE(MW,107)
      DO 3 K=1,NE
      READ (MR,108) I,(NEL(I,J),J=1,2)
3  WRITE(MW,108) I,(NEL(I,J),J=1,2)
      WRITE(MW,109)
      DO 4 I=1,NNDP
      READ (MR,110) NA(I),(IA(I,J),J=1,NGLN)
4  WRITE(MW,110) NA(I),(IA(I,J),J=1,NGLN)
      WRITE(MW,111)
      DO 5 IC=1,NE
      READ (MR,112) I,EE,G,IX(I),IY(I),IZ(I),AX(I),ALF1(I),ALF2(I)
5  WRITE(MW,113) I,EE,G,IX(I),IY(I),IZ(I),AX(I),ALF1(I),ALF2(I)
C
C.....LECTURA DE CARGAS
C
      READ (MR,108) NNC,NNCAR
      WRITE(MW,114)
      WRITE(MW,108) NNC,NNCAR
      READ (MR,117) CMAX,ERROR
      WRITE(MW,132) CMAX,ERROR
C
C.....LECTURA DE COORDENADAS
C
      READ (MR,120) (I,X(I),Y(I),Z(I),I=1,NN)
      WRITE(MW,106)

```

```
WRITE(MW,138) (I,X(I),Y(I),Z(I),I=1,NN)
```

C

C.....GENERACION DE LA MATRIZ DE ROTACION.

C

```
WRITE(MW,123)
```

```
DO 22 I=1,NE
```

```
DO 21 K=1,NNPE
```

```
J=NEL(I,K)
```

```
XE(K)=X(J)
```

```
YE(K)=Y(J)
```

```
21 ZE(K)=Z(J)
```

```
CALL ROT176(I,XE,YE,ZE,R,L,CX,CY,CZ,RT,ALF1,ALF2)
```

```
L1(I)=L(I)
```

```
WRITE(MW,118) I,L(I),CX(I),CY(I),CZ(I)
```

```
22 CONTINUE
```

```
DO 41 I=1,NN2
```

```
DNA(I)=0.
```

```
P(I)=0.
```

```
41 Q(I)=0.
```

```
IF(NNC) 20,20,17
```

```
17 WRITE(MW,121)
```

```
KK=NGLN*NNC
```

```
DO 16 I=1,NNCAR
```

```
DO 16 M=1,KK
```

```
16 P1(I,M)=0.
```

```
DO 19 N=1,NNCAR
```

```
DO 19 I=1,NNC
```

```
J=NGLN*I
```

```
J1=J-NGLN+1
```

```
READ (MR,128) K,(P1(N,J2),J2=J1,J)
```

```
NUNCA(I)=K
```

```
IF(N-1) 32,32,19
```

```
32 J1=J1-1
```

```
DO 18 M=1,NGLN
```

```
J1=J1+1
```

```
IB=NGLN*(K-1)+M
```

```
18 P(IB)=P1(I,J1)
```

```
J1=J1-NGLN+1
```

```
WRITE(MW,122) K,(P1(I,J2),J2=J1,J)
```

```
19 CONTINUE
```

```
NIVCA=1
```

C

C.....CARGAS NODALES TOTALES

C

```
20 DO 53 M=1,NN2
```

```
Q(M)=P(M)
```

```
53 CONTINUE
```

```
WRITE(MW,116)
```

```
WRITE(MW,127) (Q(J),J=1,NN2)
```

```
DO 23 I=1,NE
```

```
ACL(I,1)=0.
TETA(I)=0.
GAMA(I)=0.
23 PA(I)=0.
88 CONTINUE
9 JBMAX=0
DO 24 I=1,NN2
DO 24 J=1,LB
24 S(I,J)=0.
```

C

C.....MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

C

```
DO 35 I=1,NE
PP=ACL(I,1)
CALL MRELE(I,EE,AX,IZ,IY,IX,G,L1,R,SM,PP,SE)
DO 35 M=1,NNPE
DO 35 K=1,NNPE
DO 31 J=1,NGLN
J1=NGLN*(NEL(I,M)-1)+J
JE=NGLN*(M-1)+J
DO 31 IJ=1,NGLN
IB=NGLN*(NEL(I,K)-1)+IJ
IE=NGLN*(K-1)+IJ
JB=J1-IB+1
IF(JB) 31,31,28
28 IF(JB-JBMAX) 30,30,29
29 JBMAX=JB
IF(JBMAX-LB) 30,30,333
30 S(IB,JB)=S(IB,JB)+SE(IE,JE)
31 CONTINUE
35 CONTINUE
```

C

C.....DESPLAZAMIENTOS NULOS

C

```
DO 57 I=1,NNDP
DO 57 J=1,NGLN
IF(IA(I,J)) 54,54,57
54 IB=NGLN*(NA(I)-1)+J
DO 56 KJ=2,JBMAX
S(IB,KJ)=0.
JL=IB-KJ+1
IF(JL) 56,56,55
55 S(JL,KJ)=0.
56 CONTINUE
S(IB,1)=1.
Q(IB)=0.
57 CONTINUE
```

C

C.....TEST DE CONVERGENCIA.

C

```

DIFA=0.
DO 74 I=1,NN
DO 74 J=1,NGLN
M=NGLN*(I-1)+J
IF(DIFA-DABS(Q(M))) 73,74,74
73 K=M
DIFA=DABS(Q(M))
74 CONTINUE
IF(DIFA-ERROR) 79,79,78
79 WRITE(MW,136) ITT
WRITE(MW,119) K,DIFA
WRITE(MW,115) DET
WRITE(MW,105)
WRITE(MW,129) (N,DNA(6*N-5),DNA(6*N-4),DNA(6*N-3),DNA(6*N-2),
*DNA(6*N-1),DNA(6*N),N=1,NN)
WRITE(MW,123)
WRITE(MW,118) (I,L1(I),CX(I),CY(I),CZ(I),I=1,NE)
WRITE(MW,143)
WRITE(MW,151)
WRITE(MW,125) ((ACL(I,J),J=1,12),I=1,NE)
WRITE(MW,134)
WRITE(MW,129) (N,T(6*N-5),T(6*N-4),T(6*N-3),T(6*N-2),T(6*N-1),T(6*
*N),N=1,NN)
NIVCA=NIVCA+1
IF(NIVCA-NNCAR) 97,97,96
96 GO TO 1
97 DO 86 J=1,NNC
JJ=NGLN*(J-1)
K=NUNCA(J)
DO 86 M=1,NGLN
JJ=JJ+1
IB=NGLN*(K-1)+M
P(IB)=P(IB)+P1(NIVCA,JJ)
Q(IB)=Q(IB)+P1(NIVCA,JJ)
IF(DABS(P(IB))-CMAX) 86,86,87
86 CONTINUE
WRITE(MW,149)
WRITE(MW,127) (P(I),I=1,NN2)
WRITE(MW,131)
WRITE(MW,127) (Q(I),I=1,NN2)
ITT=0
GO TO 88
78 ITT=ITT+1
IF(ITT-500) 77,77,87
87 GO TO 1
77 CONTINUE

```

C
C.....DESPL. NODALES ACUMULADOS.
C

CALL SSEGB(S,Q,DET,NN2,JBMAX)


```

      IF(DET) 11,11,12
11  WRITE(MW,115) DET
      WRITE(MW,136) ITT
      WRITE(MW,131)
      WRITE(MW,127) (Q(I),I=1,NN2)
      GO TO 1717
12  DO 58 J=1,NN2
58  DNA(J)=DNA(J)+Q(J)

```

C
C.....DESPLAZAMIENTOS EN COORDENADAS LOCALES
C

```

      DO 37 I=1,NE
      DO 37 J=1,NGLE
37  AML(I,J)=0.
      DO 38 I=1,NE
      DO 38 M=1,NNPE
      DO 38 N=1,NNPE
      DO 38 J=1,3
      IB=(6*M+N*3-9)+J
      DO 38 K=1,3
      ID=(9*M+3*J-12)+K
      IE=(6*NEL(I,M)+3*N-9)+K
38  AML(I,IB)=AML(I,IB)+R(I,ID)*DNA(IE)
      DO 34 I=1,NE
      ALF1(I)=AML(I,4)
      ALF2(I)=AML(I,10)
34  CONTINUE

```

C
C.....CALCULO DE LA ROTACION TETA Y GEOMETRIA DEFORMADA.
C

```

      DO 39 I=1,NN
      X1(I)=0.
      Y1(I)=0.
39  Z1(I)=0.
      DO 68 I=1,NN
      X1(I)=X(I)+DNA(6*I-5)
      Y1(I)=Y(I)+DNA(6*I-4)
68  Z1(I)=Z(I)+DNA(6*I-3)
      DO 62 I=1,NE
      DO 61 J=1,NNPE
      K=NEL(I,J)
      XE(J)=X1(K)
      YE(J)=Y1(K)
      ZE(J)=Z1(K)
61  CONTINUE
      CALL ROT76(I,XE,YE,ZE,R,L1,CX,CY,CZ,RT,ALF1,ALF2)
62  CONTINUE
      DO 65 I=1,NE
      SEN0=(AML(I,2)-AML(I,8))/L(I)
      SINO=(AML(I,9)-AML(I,3))/L(I)

```

TETA(I)=DARSIN(SENO)

GAMA(I)=DARSIN(SINO)

65 CONTINUE

C

C.....ROTACIONES TOTALES.

C

DO 94 I=1,NE

DO 94 J=1,NNPE

J3=NGLN*(J-1)+5

K3=NGLN*(J-1)+6

AML(I,J3)=AML(I,J3)+GAMA(I)

AML(I,K3)=AML(I,K3)+TETA(I)

94 CONTINUE

C

C.....CALCULO DE ESFUERZOS AXIALES

C

DO 59 I=1,NE

SCM1=(EE*AX(I))/L(I)

59 PA(I)=SCM1*(L(I)-L1(I))

C

C.....CALCULO DE ESFUERZOS EN COORDENADAS LOCALES

C

DO 66 I=1,NE

DO 66 J=1,NGLE

66 ACL(I,J)=0.

DO 70 I=1,NE

ACL(I,1)= PA(I)

ACL(I,7)=-PA(I)

ACL(I,4)=G*IX(I)*(AML(I,4)-AML(I,10))/L1(I)

ACL(I,10)=-ACL(I,4)

CALL MRELE(I,EE,AX,IZ,IY,IX,G,L1,R,SM,PP,SE)

DO 90 J=1,NNPE

J6=J*6

J5=J6-1

DO 90 K=1,NNPE

K6=NGLN*(K-1)+6

K5=NGLN*(K-1)+5

ACL(I,J5)=ACL(I,J5)+SM(J5,K5)*AML(I,K5)

90 ACL(I,J6)=ACL(I,J6)+SM(J6,K6)*AML(I,K6)

ACL(I,2)=(ACL(I,6)+ACL(I,12))/L1(I)

ACL(I,8)=-ACL(I,2)

ACL(I,9)=(ACL(I,5)+ACL(I,11))/L1(I)

ACL(I,3)=-ACL(I,9)

70 CONTINUE

C

C.....ESFUERZOS EN COORDENADAS GLOBALES.

C

DO 71 I=1,NN2

T(I)=0.

71 Q(I)=0.

```

DO 72 I=1,NE
DO 72 M=1,NNPE
DO 72 N=1,NNPE
DO 72 J=1,3
IB=(6*NEL(I,M)+3*N-9)+J
DO 72 K=1,3
ID=(9*M+3*J-12)+K
IE=(6*M+3*N-9)+K
72 T(IB)=T(IB)+RT(I,ID)*ACL(I,IE)
DO 75 I=1,NN
DO 75 J=1,NGLN
M=NGLN*(I-1)+J
Q(M)=P(M)-T(M)
75 CONTINUE
GO TO 9
100 FORMAT(// '-----' //)
101 FORMAT(1H1, 'ANALISIS DE RETICULADOS PARA CARGAS CRITICAS' //
* ' ENRIQUE PAILLIE M. TESIS-COPPE/UFRJ/73' //)
102 FORMAT(' ')
103 FORMAT(8I5)
104 FORMAT(//, 'NN' =', I2, /, 'NE' =', I2, /, 'NNDP' =', I2, /, 'NGLN' =', I2, /,
* 'NNPE' =', I2, /, 'ITD' =', I2, /)
105 FORMAT(//, 'DESP. NODALES ACUM.' //, 'NUDO', 8X, 'DX'
*, 10X, 'DY', 10X, 'DZ', 10X, 'RX', 10X, 'RY', 10X, 'RZ' //)
106 FORMAT(//, 'COORDENADAS DE LOS NUDOS' //,
* 'NUDO', 6X, 'X', 9X, 'Y', 9X, 'Z' //)
107 FORMAT(//, 'DEFINICION DE ELEMENTOS' //,
1 'NEL', 'JJ', 'JK' //)
108 FORMAT(7I5)
109 FORMAT(//, 'DEFINICION DE APOYOS' //,
* 'NUDO', 'D1', 'D2', 'D3', 'D4', 'D5', 'D6' //)
110 FORMAT(7I5)
111 FORMAT(//, 'PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS' //
* 6X, 'M', 10X, 'ME', 10X, 'G', 10X, 'IX', 10X, 'IY', 10X, 'IZ', 8X, 'AX', 8X,
* 'ALFA' //)
112 FORMAT(I5, 6F10.0, 2F5.0)
113 FORMAT(5X, I3, 4X, 8E12.5)
114 FORMAT(//, 'TIPOS DE CARGA' //, 'NNC', 2X, 'NNCAR' //)
115 FORMAT(// 2X, 'DETERMINANTE' =', E15.7, //)
117 FORMAT(3F15.0)
118 FORMAT(I5, 4F15.7)
120 FORMAT(I5, 3F15.0)
121 FORMAT(//, 'CARGAS EN LOS NUDOS' //,
1 'NUDO', 6X, 'PX', 8X, 'PY', 8X, 'PZ' //)
122 FORMAT(I5, 6F12.3)
123 FORMAT(//, 'GEOMETRIA DEL ELEMENTO' //, 3X,
* 'ELEM', 9X, 'L', 8X, 'CX', 8X, 'CY', 8X, 'CZ' //)
125 FORMAT(8X, 6E17.7)
127 FORMAT(// 2X, 9F13.7)
128 FORMAT(I5, 6F10.0)

```

```
129 FORMAT(I5,6F15.5)
130 FORMAT(///' DESPLAZAMIENTOS LOCALES. DISTORCIONES. '///)
149 FORMAT(///' NUEVO INTERVALO DE CARGA'///)
134 FORMAT(///' E S F U E R Z O S   G L O B A   E S'///)
135 FORMAT(///' AUMENTAR ANCHURA DE BAND1 EN EL DIMENSION'///)
136 FORMAT(1H1,' ITERACION NUMERO =',I3,/)
138 FORMAT(I5,3F10.4)
119 FORMAT(///' DIRECCION =',I4,///,' MAYOR DIFERENCIA =',E15.8,///)
131 FORMAT(///' CARGAS NODALES RECIDUALES'///)
132 FORMAT(//2X,'CARGA LIMITE =',F15.7,/,2X,'ERROR PERMITIDO =',F10.7,
*///)
143 FORMAT(///' ESFUERZOS LOCALES ACUMULADOS'///)
151 FORMAT(//15X,'AM1',14X,'AM2',14X,'AM3',14X,'AM4',14X,'AM5',14X,
*'AM6'///)
116 FORMAT(///' CARGAS NODALES TOTALES'///)
333 WRITE(MW,135)
1717 CALL EXIT
      DEBUG SUBCHK
      END
// FOR
      SUBROUTINE SSEGB(A,B,DET,N,M)
        IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
        DIMENSION A(60,30),B(60)
        NM1=N-1
        DO 3 I=1,NM1
          DO 3 J=2,M
            II=I+J-1
            IF(II-N)1,1,3
1          F=-A(I,J)/A(I,1)
            B(II)=B(II)+F*B(I)
            MJ1=M-J+1
            DO 2 K=1,MJ1
              L=K+J-1
2          A(II,K)=A(II,K)+F*A(I,L)
3          CONTINUE
            DET=A(1,1)/1.E+50
            DO 4 I=2,N
              DET=DET*A(I,1)
              B(N)=B(N)/A(N,1)
              DO 6 L=2,N
                I=N-L+1
                C=B(I)
                DO 5 K=2,M
                  IK1=I+K-1
                  IF(IK1-N)5,5,6
5          C=C-A(I,K)*B(IK1)
6          B(I)=C/A(I,1)
              RETURN
            DEBUG SUBCHK
            END
```

// FOR

```

SUBROUTINE RO176(I,X,Y,Z,R,L,CX,CY,CZ,RT,ALF1,ALF2)
C.....SUBROUTINA CALCULADORA DE LAS MATRICES DE ROTACION.
  IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
  REAL *8 L(15)
  DIMENSION X(2),Y(2),Z(2),R(15,18),RT(15,18),CX(15),CY(15),CZ(15),
  *ALF1(15),ALF2(15)
  XCL=X(2)-X(1)
  YCL=Y(2)-Y(1)
  ZCL=Z(2)-Z(1)
  L(I)=DSQRT(XCL**2+YCL**2+ZCL**2)
  CX(I)=XCL/L(I)
  CY(I)=YCL/L(I)
  CZ(I)=ZCL/L(I)
C.....MATRIZ DE ROTACION.
  DO 1 J=1,9
    R(I,J)=0.
  1 RT(I,J)=0.
  C1=DSQRT(CX(I)**2+CZ(I)**2)
  R(I,1)=CX(I)
  R(I,2)=CY(I)
  R(I,3)=CZ(I)
  R(I,4)=(-CX(I)*CY(I)*DCOS(ALF1(I))-CZ(I)*DSIN(ALF1(I)))/C1
  R(I,5)=C1*DCOS(ALF1(I))
  R(I,6)=(-CY(I)*CZ(I)*DCOS(ALF1(I))+CX(I)*DSIN(ALF1(I)))/C1
  R(I,7)=(CX(I)*CY(I)*DSIN(ALF1(I))-CZ(I)*DCOS(ALF1(I)))/C1
  R(I,8)=-C1*DSIN(ALF1(I))
  R(I,9)=(CY(I)*CZ(I)*DSIN(ALF1(I))+CX(I)*DCOS(ALF1(I)))/C1
  R(I,10)=R(I,1)
  R(I,11)=R(I,2)
  R(I,12)=R(I,3)
  R(I,13)=(-CX(I)*CY(I)*DCOS(ALF2(I))-CZ(I)*DSIN(ALF2(I)))/C1
  R(I,14)=C1*DCOS(ALF2(I))
  R(I,15)=(-CY(I)*CZ(I)*DCOS(ALF2(I))+CX(I)*DSIN(ALF2(I)))/C1
  R(I,16)=(CX(I)*CY(I)*DSIN(ALF2(I))-CZ(I)*DCOS(ALF2(I)))/C1
  R(I,17)=-C1*DSIN(ALF2(I))
  R(I,18)=(CY(I)*CZ(I)*DSIN(ALF2(I))+CX(I)*DCOS(ALF2(I)))/C1
C.....MATRIZ DE ROTACION TRASPUESTA.
  RT(I,1)=R(I,1)
  RT(I,5)=R(I,5)
  RT(I,9)=R(I,9)
  RT(I,2)=R(I,4)
  RT(I,4)=R(I,2)
  RT(I,3)=R(I,7)
  RT(I,7)=R(I,3)
  RT(I,8)=R(I,6)
  RT(I,6)=R(I,8)
  RT(I,10)=R(I,10)
  RT(I,14)=R(I,14)
  RT(I,18)=R(I,18)

```

```
RT(I,11)=R(I,13)
RT(I,13)=R(I,11)
RT(I,12)=R(I,16)
RT(I,16)=R(I,12)
RT(I,15)=R(I,17)
RT(I,17)=R(I,15)
RETURN
DEBUG SUBCHK
END
```

// FOR

```
SUBROUTINE MRELE(I,E,AX,IZ,IY,IX,G,L,R,SM,PP,SMD)
IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
REAL *8 L(15),IZ(15),IY(15),IX(15)
DIMENSION AX(15),R(15,18),SM(12,12),SMR(12,12),SMD(12,12)
MW=6
R1=L(I)*DSQRT(DABS(PP/(E*IZ(I))))
R2=L(I)*DSQRT(DABS(PP/(E*IY(I))))
IF(PP) 100,101,102
100 SENHU=(DEXP(R1)-DEXP(-R1))/2.
    SENHO=(DEXP(R2)-DEXP(-R2))/2.
    COSHU=(DEXP(R1)+DEXP(-R1))/2.
    COSHO=(DEXP(R2)+DEXP(-R2))/2.
    CH1=2.-2.*COSHU+R1*SENHU
    CH2=2.-2.*COSHO+R2*SENHO
    S1Z=R1*(R1*COSHU-SENHU)/(4.*CH1)
    S1Y=R2*(R2*COSHO-SENHO)/(4.*CH2)
    S2Z=R1*(SENHU-R1)/(2.*CH1)
    S2Y=R2*(SENHO-R2)/(2.*CH2)
    GO TO 103
102 CC1=2.-2.*DCOS(R1)-R1*DSIN(R1)
    CC2=2.-2.*DCOS(R2)-R2*DSIN(R2)
    S1Z=R1*(DSIN(R1)-R1*DCOS(R1))/(4.*CC1)
    S1Y=R2*(DSIN(R2)-R2*DCOS(R2))/(4.*CC2)
    S2Z=R1*(R1-DSIN(R1))/(2.*CC1)
    S2Y=R2*(R2-DSIN(R2))/(2.*CC2)
    GO TO 103
C.....FUNCIONES PARA CARGA AXIAL NULA.
101 S1Z=1.
    S1Y=1.
    S2Z=1.
    S2Y=1.
103 DO 49 J=1,12
    DO 49 K=1,12
    SM(J,K)=0.
    SMR(J,K)=0.
    49 SMD(J,K)=0.
C.....VARIABLES AUXILIARES
A1=4.*E*IZ(I)*S1Z/L(I)
E1=4.*E*IY(I)*S1Y/L(I)
B1=2.*E*IZ(I)*S2Z/L(I)
```

```
F1=2.*E*IY(I)*S2Y/L(I)
C1=(A1+B1)/L(I)
G1=(E1+F1)/L(I)
D1=(2.*C1-PP)/L(I)
H1=(2.*G1+PP)/L(I)
S1=AX(I)*E/L(I)
T1=G*IX(I)/L(I)
```

C.....MATRIZ DE RIGIDEZ LOCAL DEL ELEMENTO.

```
SM(1,1)=S1
SM(7,7)=S1
SM(1,7)=-S1
SM(7,1)=-S1
SM(2,2)=D1
SM(8,8)=D1
SM(2,8)=-D1
SM(8,2)=-D1
SM(2,6)=C1
SM(2,12)=C1
SM(8,6)=-C1
SM(8,12)=-C1
SM(3,3)=H1
SM(9,9)=H1
SM(3,9)=-H1
SM(9,3)=-H1
SM(3,5)=-G1
SM(3,11)=-G1
SM(9,5)=G1
SM(9,11)=G1
SM(4,4)=T1
SM(10,10)=T1
SM(4,10)=-T1
SM(10,4)=-T1
SM(5,3)=-G1
SM(11,3)=-G1
SM(5,9)=G1
SM(11,9)=G1
SM(5,5)=E1
SM(11,11)=E1
SM(5,11)=F1
SM(11,5)=F1
SM(6,2)=C1
SM(12,2)=C1
SM(6,8)=-C1
SM(12,8)=-C1
SM(6,6)=A1
SM(12,12)=A1
SM(6,12)=B1
SM(12,6)=B1
```

C.....CALCULO DEL PRODUCTO SMR=SM*R
NDJ=6

```

NDJD=2*NDJ/6
NDJT=2*NDJ
DO 50 K=1,NDJD
DO 50 J=1,NDJT
SMR(J,3*K-2)=SM(J,3*K-2)*R(I,1)+SM(J,3*K-1)*R(I,4)+SM(J,3*K)*R(I,7
*)
SMR(J,3*K-1)=SM(J,3*K-2)*R(I,2)+SM(J,3*K-1)*R(I,5)+SM(J,3*K)*R(I,8
*)
SMR(J,3*K)=SM(J,3*K-2)*R(I,3)+SM(J,3*K-1)*R(I,6)+SM(J,3*K)*R(I,9)
50 CONTINUE
DO 51 K=3,4
DO 51 J=1,NDJT
SMR(J,3*K-2)=SM(J,3*K-2)*R(I,10)+SM(J,3*K-1)*R(I,13)+SM(J,3*K)*
R(I,16)
SMR(J,3*K-1)=SM(J,3*K-2)*R(I,11)+SM(J,3*K-1)*R(I,14)+SM(J,3*K)*
R(I,17)
SMR(J,3*K)= SM(J,3*K-2)*R(I,12)+SM(J,3*K-1)*R(I,15)+SM(J,3*K)*
R(I,18)
51 CONTINUE
C.....CALCULO DEL PRODUCTO SMD=SMR*R(I)
DO52 J=1,NDJD
DO 52 K=1,NDJT
SMD(3*J-2,K)=R(I,1)*SMR(3*J-2,K)+R(I,4)*SMR(3*J-1,K)+R(I,7)*SMR(3*
*J,K)
SMD(3*J-1,K)=R(I,2)*SMR(3*J-2,K)+R(I,5)*SMR(3*J-1,K)+R(I,8)*SMR(3*
*J,K)
SMD(3*J,K)=R(I,3)*SMR(3*J-2,K)+R(I,6)*SMR(3*J-1,K)+R(I,9)*SMR(3*
*J,K)
52 CONTINUE
DO 53 J=3,4
DO 53 K=1,NDJT
SMD(3*J-2,K)=R(I,10)*SMR(3*J-2,K)+R(I,13)*SMR(3*J-1,K)+R(I,16)*
*SMR(3*J,K)
SMD(3*J-1,K)=R(I,11)*SMR(3*J-2,K)+R(I,14)*SMR(3*J-1,K)+R(I,17)*
*SMR(3*J,K)
SMD(3*J,K)= R(I,12)*SMR(3*J-2,K)+R(I,15)*SMR(3*J-1,K)+R(I,18)*
*SMR(3*J,K)
53 CONTINUE
RETURN
DEBUG SUBCHK
END

/*
//LKED.SYSLMOD DD SPACE=(1024,(100,50,1),RLSE)
//GO.SYSIN DD *
```