ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS DE PONTES PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS - APLICAÇÃO A VIGAS GERBER

Paulo Roberto Miana

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:

Paulo Alcantara Gomes

Presidente

RIO DE JANEIRO
ESTADO DO RIO DE JANEIRO - BRASIL
DEZEMBRO DE 1975

A meus pais

A meus irmãos

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Paulo Alcântara Gomes, pela sugestão e orientação deste trabalho.

Ao Prof. Fernando Luiz Lobo B. Carneiro, e a todo o Corpo Docente da COPPE pelos conhecimentos transmitidos.

Aos funcionários da COPPE e do Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, pela inestimável ajuda.

À Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

A todos mais que, de uma maneira ou de outra, colaboraram para a realização deste trabalho.

SINOPSE

A análise dinâmica de pontes é apresentada, sendo a ponte idealizada como uma viga elástica sob a ação de cargas concentradas móveis constantes. Dá-se ênfase especial à resposta dinâmica de vigas Gerber.

A estrutura é discretizada em elementos finitos e a análise feita pelo método da superposição modal. O elemento empregado leva em consideração os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento.

Um programa FORTRAN para o computador Burroughs B6700 é desenvolvido. Alguns exemplos de pontes rodoviárias e ferroviárias existentes são estudados. Os resultados são comparados com soluções analíticas e numéricas conhecidas e a eficiência do programa é analisada.

ABSTRACT

The dynamic analysis of bridges is presented, being the bridge idealized as an elastic beam under the action of moving constant forces. Special emphasis is given to the dynamic behavior of cantilever bridges.

The structure is discretized in finite elements and the analysis is conducted by means of the modal superposition method. The element which is used takes into account the effects of rotary inertia and shear deformation.

A FORTRAN program for the Burroughs B6700 computer is developed. Some example of existing highway and railway bridges are studied. The results are compared with known analytical and numerical solutions and the efficiency of the program is analysed.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO

A análise dinâmica de pontes em viga de eixo reto tem sido objeto de inúmeras contribuições nos últimos anos, graças ao desenvolvimento das técnicas computacionais, em especial a dos elementos finitos. É destacável, inicialmente, o trabalho de Wen e Toridis - 1962 - (17), que determina as propriedades vibratórias e a resposta à passagem de cargas móveis de vigas Gerber pelo método das massas discretas, não cogitando ainda da utilização do conceito de matrizes de massas consistentes, o que foi preconizado por Archer - 1963 - (21). Seguiram-se inúmeros trabalhos marcantes sobre o assunto como os desenvolvidos por: Venâncio Filho - 1966 - (20), uma aplicação do método das massas discretas a estruturas reticuladas ; Veletsos e Huang - 1970 - (28), que definem um modelo matemático do veículo trafegando sobre uma ponte; Yoshida e Weaver - 1971 - (18), uma análise de vigas e placas sob a ação de cargas móveis pelo método dos elementos finitos; Jung - 1973 - (32), estudo de estruturas reticuladas; Bruch - 1973 - (33), dinâmica de placas.

Além desses trabalhos por métodos numéricos, continuam em evidência as soluções analíticas, como as apresentadas por Jagadish e Pahwa - 1968 - (22), Fryba - 1972 - (15), Nagaraju et alli - 1973 - (16) e Wang et alli - 1975 - (30), exemplos das mais recentes publicações onde a resposta dinâmica de vigas Gerber ou vigas contínuas é estudada.

O objetivo do presente trabalho é obter a resposta dinâmica de vigas, em especial vigas Gerber, à ação de cargas móveis.

Para tanto, apresenta-se no segundo capítulo uma revisão dos métodos da análise dinâmica, incluindo as soluções analíticas para sistemas contínuos e os métodos de discretização (massas discretas, deslocamentos generalizados, elementos finitos). O método da superposição modal é o empregado, o que é possível devido à linearidade do problema decorrente da não consideração da massa do carregamento.

No Capítulo III procura-se detalhar o Método dos Elementos Finitos, deduzindo as matrizes de massa e rigidez para um elemento de viga. As considerações sobre as liberações ou restrições a serem introduzidas nos casos de vigas Gerber ou contínuas são também abordadas.

As aplicações e resultados numéricos são apresentados no Capítulo IV, sendo analisados vários casos reais. O Programa desenvolvido já tem sido utilizado em vários problemas como o de torres e passarelas, o que, de certa forma, mostra sua versatilidade.

Finalmente, no Capítulo V descreve-se o programa de cálculo automático e no Capítulo VI colocam-se algumas conclusões e sugestões.

II - MÉTODOS DA ANÁLISE DINÂMICA

2.1 - INTRODUÇÃO

Define-se aqui o termo *dinâmico* simplesmente como *variável com o tempo*; assim, um carregamento dinâmico é qualquer carregamento no qual a intensidade, direção ou posição variam com o tempo. No presente trabalho, estudam-se cargas cuja posição é função do tempo, isto é, cargas móveis. Desse modo, a resposta da estrutura, caracterizada por suas deformações e esforços resultantes, é também variável no tempo, ou dinâmica.

São basicamente dois os tipos de análise dinâmica : determinística e não-determinística. Se a variação no tempo é expressa por uma relação analítica qualquer, a análise da resposta de qualquer sistema estrutural é definida como *análise determinística*. No caso contrário, em que a variação no tempo da solicitação pode apenas ser definida dentro de um conceito estatístico (carregamento aleatório), a análise é dita *não-determinística*. No que se segue, a posição da carga é definível matematicamente no tempo e, consequentemente, a análise é determinística.

Duas são as características essenciais de um problema dinâmico, que o diferenciam do correspondente problema estático. A primeira é, por definição, a variação no tempo, que faz com que a resposta seja uma sucessão de soluções, uma para cada instante considerado. A segunda e mais fundamental característica é o fato de que aos deslocamentos da estrutura associam-se acelerações as quais produzem forças de inércia que a elas resistem.

O aparecimento das forças de inércia distribuídas resultantes dos deslocamentos da estrutura, que por sua vez são influenciados pelas intensidades destas mesmas forças de inércia, obviamente complica a análise do problema. A formulação direta pode ser obtida por meio de equações diferenciais, mais exatamente equações diferenciais parciais, visto que se tem como variáveis independentes a posição e o tempo.

Estas equações diferenciais parciais podem ser resolvidas diretamente para alguns casos, como será visto no ítem (2.2). Porém, para problemas mais complexos, não é possível, senão por métodos numéricos, a solução das equações formuladas para o sistema considerado como contínuo.

É viável, então, substituir-se um sistema contínuo por um sistema discreto, considerando-se um número finito de componentes de deslocamento que sejam suficientes para representar os efeitos de todas as forças de inércia relevantes da estrutura, definido como o número de graus de liberdade. São essencialmente três os métodos de discretização: massas discretas, deslocamentos generalizados e o método dos elementos finitos.

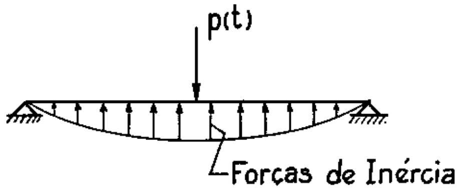


Fig.(2.1a)

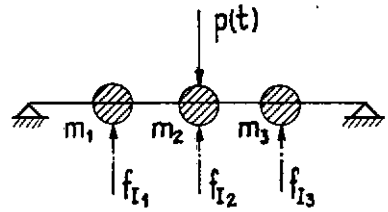


Fig.(2.1b)

a) Massas Discretas

Esse procedimento consiste em substituir um sistema com massa distribuída continuamente, logo com infinitos graus de liberdade, por um sistema em que a massa é concentrada num determinado número de pontos, onde podem se desenvolver forças de inércia. Seja a viga da Figura (2.1) um sistema dinâmico. O método das massas discretas consiste na substituição das forças de inércia distribuídas da Figura (2.1a) pelo sistema discreto da Figura (2.1b), onde se desenvolvem forças em três direções (supondo-se desprezível a inércia de rotação).

b) Deslocamentos Generalizados

O método das massas discretas é mais eficiente para sistemas em que uma grande parte da massa é realmente concentrada em alguns pontos. Assim, considera-se que a massa da estrutura pode ser também concentrada nesses pontos, e a mesma tomada como se não possuísse peso.

Um outro procedimento pode ser preferível nos casos em que a massa é uniformemente distribuída. Tal procedimento baseia-se na suposição de que a deformação da estrutura pode ser expressa como uma série de funções de deslocamentos, que são as coordenadas de deslocamento da estrutura.

Seja a Figura (2.2). Se as funções $\psi_N(x)$ são compatíveis com as condições de contorno e mantêm a necessária continuidade dos deslocamentos internos, uma expressão generalizada para os deslocamentos pode ser expressa por:

$$w(x) = \sum_N Z_N \cdot \psi_N(x) \tag{2.1}$$

onde os termos de amplitude Z_N são denominados coordenadas generalizadas e N é o número de graus de liberdade usados nesse tipo de idealização.

Em geral, para um mesmo número de graus de liberdade melhor aproximação é obtida com a idealização por meio de tais funções do que com o procedimento das massas discretas. Entretanto, o cálculo para cada grau de liberdade é mais trabalhoso com o emprego de coordenadas generalizadas.

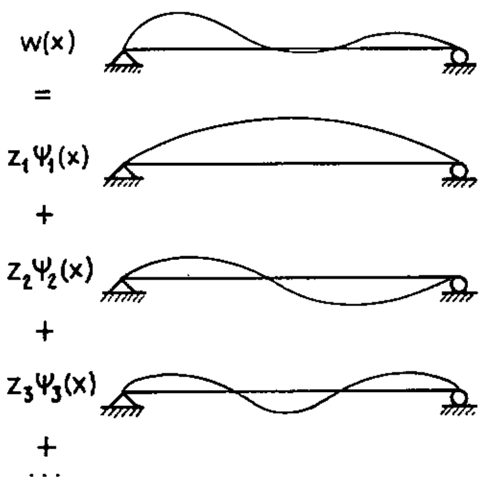


Fig.(2.2)

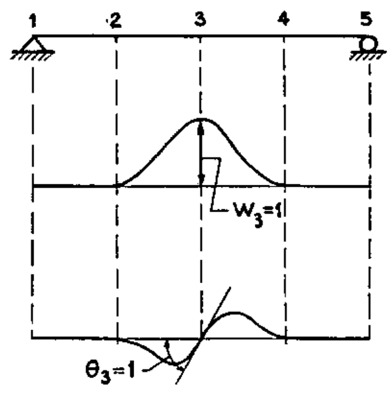


Fig.(2.3)

c) Método dos Elementos Finitos

Este terceiro método, que combina alguns aspectos dos dois anteriores, fornece uma idealização confiável e conveniente do sistema e é particularmente eficiente para uso em computadores digitais.

O primeiro passo na discretização de qualquer estrutura em elementos finitos, por exemplo, a viga da Figura(2.3), consiste em dividí-la em um número apropriado de segmentos, ou elementos, de tamanho arbitrário. Estes elementos estão ligados por pontos nodais, cujos deslocamentos são as coordenadas generalizadas do sistema. A deflexão de toda a estrutura é agora definida em termos dessas coordenadas, assumindo-se um conjunto de funções de deslocamentos como na equação

(2.1). Essas funções são agora chamadas funções de interpolação, pois definem a forma apenas entre os pontos nodais especificados. Na Figura (2.3), mostram-se as funções de interpolação associadas com os dois graus de liberdade do nó 3. Essas funções podem ser qualquer curva que é contínua internamente e satisfaz as condições geométricas impostas pelos deslocamentos nodais. No caso de elementos uni-dimensionais, usam-se as funções que representam a deflexão causada pelos deslocamentos nodais (polinômios de Hermite de 3º grau).
O método dos elementos finitos, bastante empregado ultimamente, em geral fornece a maneira mais adequada para se expressar o comportamento de sistemas estruturais por meio de um conjunto discreto de coordenadas. Será este o empregado no presente trabalho.

A formulação das equações do movimento de uma estrutura, cuja solução fornece a história dos deslocamentos desta, pode ser feita por três diferentes métodos, baseados nos conceitos fundamentais seguintes: equilíbrio direto usando o Princípio de D'Alembert, o Princípio dos Deslocamentos Virtuais e o Princípio de Hamilton.

a) Equilíbrio Direto Usando o Princípio de D'Alembert

As equações do movimento de qualquer sistema dinâmico representam expressões da segunda lei do movimento de Newton, que estabelece que a derivada em relação ao tempo da quantidade de movimento ("momentum") de qualquer massa m é igual à força que atua sobre ela. Isto se expressa na equação diferencial:

$$\bar{p}(t) = \frac{d}{dt}\left(m \frac{d\bar{r}(t)}{dt}\right) \qquad (2.2)$$

onde $\bar{p}(t)$ é a força aplicada e $\bar{r}(t)$ é o vetor posição da massa m.

Na maioria dos problemas, a massa é considerada constante no tempo, de modo que a expressão fica

$$\bar{p}(t) = m \frac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2} \equiv m\,\ddot{\bar{r}}(t) \qquad (2.3)$$

onde o ponto representa derivação em relação ao tempo. Pode-se colocar a equação (2.3) na forma:

$$\bar{p}(t) - m\,\ddot{\bar{r}}(t) = 0 \qquad (2.4)$$

chamando-se agora o termo $(-\,m\,\ddot{\bar{r}}(t))$ de *força de inércia*, "resistente à aceleração". Este conceito é o conhecido princípio de D'Alembert: uma massa gera uma força de inércia proporcional à sua aceleração e oposta a ela.

Deste modo, formulam-se equações de movimento como equações de equilíbrio de todas as forças agindo sobre a massa, incluindo as forças de inércia. Esta formulação direta é, em geral, a mais conveniente para sistemas simples.

b) O Princípio dos Deslocamentos Virtuais

Quando o sistema se torna razoavelmente complexo, geralmente as várias forças envolvidas podem ser expressas em termos de deslocamentos, mas suas equações de equilíbrio tornam-se obscuras. Nesses casos, a substituição das equações de equilíbrio pelo princípio dos deslocamentos virtuais mostra ser conveniente. O princípio estabelece: "se um sistema que está em equilíbrio sob a ação de um conjunto de forças for submetido a um deslocamento virtual, isto é, um deslocamento compatível com as restrições do sistema, o trabalho total realizado pelas forças será nulo".

Assim, determinando todas as forças atuantes no sistema, incluindo as forças de inércia definidas de acordo com o Princípio de D'Alembert, introduzindo deslocamentos virtuais para cada grau de liberdade e igualando a zero o trabalho realizado, as equações do movimento do sistema são finalmente obtidas.

A vantagem desse tipo de enfoque é que as contribuições dos trabalhos virtuais são grandezas escalares, enquanto que as forças atuantes são grandezas vetoriais e, como tal, podem ser somadas apenas vetorialmente.

c) O Princípio de Hamilton

Um terceiro enfoque é o que faz uso de expressões de energia em forma variacional. O conceito variacional aplicável é o princípio de Hamilton, que estabelece que a variação das energias cinética e potencial, mais o trabalho virtual total realizado pelas forças, durante qualquer intervalo de tempo, deve ser igual a zero. O princípio expressa-se

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)\, dt + \int_{t_2}^{t_2} \delta\, W\, dt = 0$$

onde:

T - energia cinética;

V - energia potencial de deformação;

W - trabalho virtual total realizado pelas forças, incluindo amortecimento e quaisquer forças externas arbitrárias;

δ - variação tomada sobre o intervalo de tempo $t_1 - t_2$.

A aplicação deste princípio leva diretamente às equações do movimento. Difere da análise por trabalhos virtuais por não envolver explicitamente na formulação forças nem deslocamentos, grandezas vetoriais, mas sim expressões puramente escalares de energia. Nisto reside também sua vantagem, pois apesar dos termos de trabalho virtual serem escalares, as grandezas envolvidas são vetoriais.

É evidente que os três métodos acima são equivalentes, levando às mesmas equações do movimento do sistema estrutural.

No ítem (2.3) mostraremos a formulação das equações do movimento de um sistema discretizado em elementos finitos pelo princípio de Hamilton.

2.2 - SISTEMAS CONTÍNUOS

Foi referido no ítem (2.1) que a análise de um sistema contínuo, logo contendo infinitos graus de liberdade, pode ser conduzida em têrmos de equações diferenciais parciais, nas quais temos variáveis independentes de posição e tempo. Estas equações podem ser resolvidas em forma fechada para alguns casos mais simples, como será mostrado.

Desenvolvem-se a seguir as equações referentes à flexão de vigas, que é o assunto do presente trabalho. Mostra-se a solução das equações para o caso de vigas simples, com diferentes condições de bordo, e para as vigas Gerber de três vãos, sendo o vão central suspenso.

2.2.1 - Equações do Movimento de Vigas

Considere-se o caso simples da viga não-uniforme de eixo reto, mostrada na Figura (2.4a), com condições de bordo quaisquer (apresentada como bi-apoiada). Deste modo, o problema é unidimensional e as variáveis independentes são o tempo t e a coordenada de posição x. Consideram-se como propriedades físicas da viga a rigidez à flexão $EI(x)$ e a massa por unidade de comprimento $m(x)$. A viga está sujeita a um carregamento transversal $p(x , t)$

e a resposta é a deflexão $w(x\ ,\ t)$.

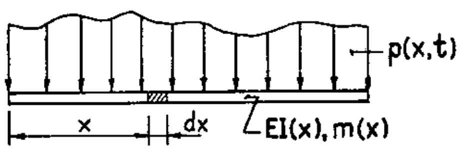


Fig. (2.4a)

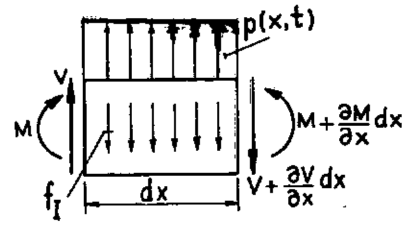


Fig. (2.4b)

Fazendo-se o equilíbrio das forças que agem sobre um segmento infinitesimal dx da viga, chegam-se às equações do movimento. O equilíbrio das forças verticais fornece:

$$V + p\ dx - (V + \frac{\partial V}{\partial x}\ dx) - f_I\ dx = 0 \tag{2.5}$$

A força de inércia distribuída é expressa em termos da aceleração no local por:

$$f_I\ dx = m\ dx\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.6}$$

Levando a equação (2.6) na equação (2.5) e simplificando, vem:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = p - m\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.7}$$

Pelo equilíbrio de momentos em torno do eixo que passa no lado direito do segmento, vem:

$$M + V\,dx - (M + \frac{\partial M}{\partial x}\,dx) = 0 \tag{2.8}$$

onde as parcelas do carregamento e da força de inércia são desprezadas por serem de segunda ordem. A simplificação de equação (2.8) leva à conhecida relação estática entre força cortante e momento

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \tag{2.9}$$

Derivando a equação (2.9) e levando na equação (2.7), vem:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = p - m\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.10}$$

Introduzindo a relação básica entre momento e curvatura, $M = EI(x) \cdot (\partial^2 w/\partial x^2)$, tem-se finalmente:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(EI(x)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + m(x)\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x\;,\;t) \tag{2.11}$$

Nesta equação não se leva em conta os efeitos da deformação por cortante e da inércia de rotação da viga, que são ponderáveis em frequências altas. A expressão mais geral que considera estes efeitos está dada em (3, 4, 5).

Supondo-se que as propriedades físicas não variam com a posição, a equação (2.11) torna-se:

$$EI \cdot w^{IV} + \bar{m}\,\ddot{w} = p \tag{2.12}$$

onde os índices indicam derivação em relação a x e os pontos derivação em t.

2.2.2 - Vibrações Livres Não-Amortecidas

Da equação (2.12), fazendo $p = 0$ e dividindo-se toda a expressão por EI, obtém-se:

$$w^{IV} + \frac{\bar{m}}{EI}\,\ddot{w} = 0 \tag{2.13}$$

A equação (2.13) pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis, assumindo-se a solução

$$w(x\ ,\ t) = \phi(x) \cdot Y(t) \tag{2.14}$$

Daí:

$$\begin{gathered} \phi^{IV}(x) \cdot Y(t) + \frac{\bar{m}}{EI}\,\phi(x) \cdot \ddot{Y}(t) = 0 \\ \frac{\phi^{IV}(x)}{\phi(x)} + \frac{\bar{m}}{EI} \cdot \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = 0 \end{gathered} \tag{2.15}$$

Na equação (2.15), o primeiro termo é função apenas de x e o segundo apenas de t. Logo, uma solução para quaisquer x e t só pode ser obtida se ambos forem iguais a uma constante.

Fazendo esta constante, por conveniência, igual a a^4 , obtem-se:

$$\frac{\phi^{IV}(x)}{\phi(x)} = a^4 \quad \therefore \quad \phi^{IV}(x) - a^4 \cdot \phi(x) = 0 \qquad (2.16a)$$

$$-\frac{\bar{m}}{EI}\frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = a^4 \quad \therefore \quad \ddot{Y}(t) + \omega^2\, Y(t) = 0 \qquad (2.16b)$$

onde,

$$\omega^2 = \frac{a^4 \cdot EI}{\bar{m}}$$

A equação (2.16b) é a equação da vibração livre de um sistema com um grau de liberdade e tem a solução:

$$Y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t) \qquad (2.17)$$

na qual as constantes A e B dependem das condições iniciais de velocidade e deslocamento.

A equação (2.16a) pode ser resolvida do modo usual, supondo-se uma solução na forma

$$\phi(x) = C \cdot e^{sx} \qquad (2.18)$$

Levando a equação (2.18) em equação (2.16a), vem:

$$(s^4 - a^4)\, C\, e^{sx} = 0$$

Daí, conclue-se ser $s = \pm a, \pm ia$ o conjunto de soluções e, consequentemente, a solução será

$$\phi(x) = C_1' e^{iax} + C_2' e^{-iax} + C_3' e^{ax} + C_4' e^{-ax} \qquad (2.19)$$

Em termos de funções trigonométricas e hiperbólicas, a equação (2.19) escreve-se:

$$\phi(x) = C_1 \,\text{sen}(ax) + C_2 \cos(ax) + C_3 \,\text{senh}(ax) + C_4 \cosh(ax) \qquad (2.20)$$

As constantes C_i dependem das condições de contorno e definem a forma e a amplitude da vibração da viga. A introdução das condições permite o cálculo das constantes em termos de uma delas e fornecem uma expressão (chamada equação de frequência ou característica) da qual podem ser calculados os valores do parâmetro a, que fornece as frequências ω. A quarta constante, que define a amplitude, não é determinada.

As equações (2.17) e (2.20), junto com as condições iniciais e as condições de contorno definem a solução de equação (2.13).

a) Vigas Simples

Com as expressões desenvolvidas , faz-se agora a análise das propriedades vibratórias de uma viga simples, bi-apoiada - Figura (2.5).

Tem-se as condições de bordo (deflexão e momento nulos nas extremidades) dada por:

$$w(0,t) = 0 \qquad \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$w(L,t) = 0 \qquad \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{2.21}$$

Daí,

$$\phi(0) = 0 \quad \phi''(0) = 0$$

$$\phi(L) = 0 \quad \phi''(L) = 0 \tag{2.22}$$

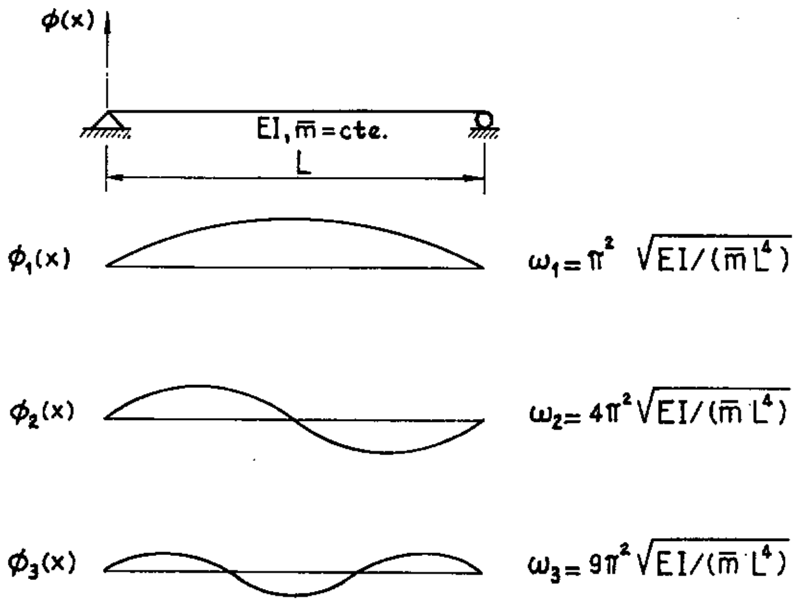


Fig. (2.5)

As duas primeiras condições, levadas na equação (2.20), fornecem:

$$\phi(0) = C_1 \cdot \text{sen}(0) + C_2 \cdot \cos(0) + C_3 \cdot \text{senh}(0) + C_4 \cdot \cosh(0) = 0$$

$$\phi''(0) = a^2(- C_1 \cdot sen(0) - C_2 \cdot cos(0) + C_3 \cdot senh(0) + C_4 \cdot cosh(0)) = 0$$

Daí,

$$C_2 + C_4 = 0 \quad e \quad - C_2 + C_4 = 0$$

$$\therefore \quad C_2 = C_4 = 0$$

Do mesmo modo, condições em $x = L$, levam a :

$$\phi (L) = C_1 \cdot sen(aL) + C_3 \cdot senh(aL) = 0$$

$$\phi''(L) = a^2(- C_1 \cdot sen(aL) + C_3 \cdot senh(aL)) = 0$$

Somando:

$$2 C_3 \cdot senh(aL) = 0 \quad \therefore C_3 = 0$$

A solução trivial $(C_1 = 0)$ sendo excluída, o sistema homogêneo fornece a equação de frequências:

$$sen(aL) = 0$$

da qual vem

$$aL = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

e, como

$$a^4 = \frac{\omega^2 \bar{m}}{EI}$$

tem-se, finalmente:

$$\omega_n = n^2\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}\ L^4}} \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

A expressão dos modos de vibração é a equação (2.20), com $C_2 = C_3 = C_4 = 0$:

$$\phi_n(x) = C_1 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\ \pi\ x}{L}\right)$$

Na Figura (2.5) estão mostrados os três primeiros modos de vibração.

A solução geral da equação do movimento que satisfaz as condições de contorno é, portanto, a soma de todas as vibrações características

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\ \pi\ x}{L}\right) \left[A_n \cdot \operatorname{sen}(\omega_n t) + B_n \cdot \cos(\omega_n t)\right] \tag{2.23}$$

As constantes A_n e B_n são determinadas a partir das condições iniciais:

$$\begin{aligned} w(x,0) &= \varphi(x) \\ \dot{w}(x,0) &= \psi(x) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\ \pi\ x}{L}\right) &= \varphi(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \omega_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\ \pi\ x}{L}\right) &= \psi(x) \end{aligned} \tag{2.25}$$

e, finalmente, multiplicando-se a equação (2.25) por sen($n\pi x/l$) e integrando em relação a x entre 0 e L, temos os valores das constantes A_n e B_n :

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\ \text{sen}\ (\frac{n\pi x}{L})\ dx$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n t}\int_0^L \psi(x)\ \text{sen}\ (\frac{n\pi x}{L})\ dx \qquad (2.26)$$

É interessante observar que as funções características $\phi_n(x)$ possuem relações de ortogonalidade, sob quaisquer condições de contorno, relações estas que garantem que:

$$\int_0^L \phi_n(x)\cdot\phi_m(x)\ m(x)\ dx = \begin{cases} 0 & p/m \neq n \\ \int_0^L \left[\phi_n(x)\right]^2 m(x)\ dx & p/m = n \end{cases} \qquad (2.27)$$

desde que as frequências ω_n e ω_m sejam diferentes, o que normalmente ocorre nos sistemas estruturais.

De forma análoga à desenvolvida acima, podem-se estabelecer as propriedades vibratórias de vigas simples bi-engastadas, engastadas e apoiadas, em balanço, e com outras condições de bordo. Tal desenvolvimento pode ser encontrado em (1, 2, 3, 29).

b) Vigas Gerber (22)

Analisam-se agora as propriedades vibratórias da viga da Figura (2.6), com três vãos MN, NQ e QR, sendo o vão central NQ suspenso. A estrutura é simétrica em relação a $x_3 = 0$. Sejam $w_1(x)$, $w_2(x)$ e $w_3(x)$ as deflexões nos tramos MN, NO e OP, respectivamente. Supondo-se vibrações harmônicas, as equações que definem a deflexão da viga em qualquer modo tem forma semelhante à equação (2.16a):

$$\frac{d^4\phi_1(x_1)}{dx_1^4} - a^4\phi_1(x_1) = 0 \qquad (2.28)$$

$$\frac{d^4\phi_2(x_2)}{dx_1^4} - a^4\phi_2(x_2) = 0 \qquad (2.29)$$

$$\frac{d^4\phi_3(x_3)}{dx_3^4} - a^4\phi_3(x_3) = 0 \qquad (2.30)$$

sendo

$$a^4 = \frac{\bar{m}\ \omega^2}{EI}$$

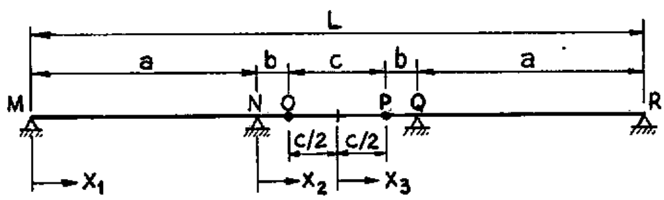


Fig.(2.6)

As funções ϕ_i têm que atender às condições de bordo seguintes :

Em M

$$\phi_1\Big|_{x_1 = 0} = 0 \qquad (2.31)$$

$$\left.\frac{d^2\phi}{dx_1^2}\right|_{x_1 = 0} = 0 \tag{2.32}$$

Em N

$$\left.\phi_1\right|_{x_1 = a} = 0 \tag{2.33}$$

$$\left.\frac{d\phi_1}{dx_1}\right|_{x_1 = a} = \left.\frac{d\phi_2}{dx_2}\right|_{x_2 = 0} \tag{2.34}$$

$$\left.\frac{d^2\phi_1}{dx_1^2}\right|_{x_1 = a} = \left.\frac{d^2\phi_2}{dx_2^2}\right|_{x_2 = 0} \tag{2.35}$$

$$\left.\phi_2\right|_{x_2 = 0} = 0 \tag{2.36}$$

Em O

$$\left.\phi_2\right|_{x_2 = b} = \left.\phi_3\right|_{x_3 = -c/2} \tag{2.37}$$

$$\left.\frac{d^2\phi_2}{dx_2^2}\right|_{x_2 = b} = 0 \tag{2.38}$$

$$\left.\frac{d^2\phi_3}{dx_3^2}\right|_{x_3 = -c/2} = 0 \tag{2.39}$$

$$\left.\frac{d^3\phi_2}{dx_2^3}\right|_{x_2 = b} = \left.\frac{d^3\phi_3}{dx_3^3}\right|_{x_3 = -c/2} \tag{2.40}$$

As equações (2.28), (2.29) e (2.30) têm solução da forma da equação (2.20), sendo que as constantes são determinadas com as condições das equações (2.31) a (2.40) e ainda as condições de simetria em $x_3 = 0$.

Assim, consideram-se o caso simétrico e o caso anti-simétrico, para se obter:

- caso simétrico

$$\phi_1 = A_1 \cdot \text{sen}\,\frac{\lambda x_1}{c} + A_2 \cdot \cos\frac{\lambda x_1}{c} + A_3 \cdot \text{senh}\,\frac{\lambda x_1}{c} + A_4 \cdot \cosh\frac{\lambda x_1}{c}$$

$$\phi_2 = B_1 \cdot \text{sen}\,\frac{\lambda x_2}{c} + B_2 \cdot \cos\frac{\lambda x_2}{c} + B_3 \cdot \text{senh}\,\frac{\lambda x_2}{c} + B_4 \cdot \text{senh}\,\frac{\lambda x_2}{c} \tag{2.41}$$

$$\phi_3 = C_1 \cdot \cos\frac{\lambda x_3}{c} + C_2 \cdot \cosh\frac{\lambda x_3}{c}$$

onde se faz

$$\lambda^4 = \frac{a^4}{c^4}$$

- caso anti-simétrico

$$\phi_1 = A_1' \cdot \text{sen}\,\frac{\lambda x_1}{c} + A_2' \cdot \cos\frac{\lambda x_1}{c} + A_3' \cdot \text{senh}\,\frac{\lambda x_1}{c} + A_4' \cdot \cosh\frac{\lambda x_1}{c}$$

$$\phi_2 = B_1' \cdot \text{sen}\,\frac{\lambda x_2}{c} + B_2' \cdot \cos\frac{\lambda x_2}{c} + B_3' \cdot \text{senh}\,\frac{\lambda x_2}{c} + B_4' \cdot \cosh\frac{\lambda x_2}{c} \tag{2.42}$$

$$\phi_3 = C_1' \cdot \text{sen}\,\frac{\lambda x_3}{c} + C_2' \cdot \text{senh}\,\frac{\lambda x_3}{c}$$

onde, novamente

$$\lambda^4 = \frac{a^4}{c^4}$$

Os grupos de equações (2.41) e (2.42), com a introdução das condições de bordo, vão fornecer duas equações transcedentes de frequência, cujas soluções são as frequências de vibração nos modos simétricos e anti-simétricos. Com as frequências e os coeficientes A_i , B_i , C_i e A_i' , B_i' , C_i' definem-se os modos normais simétricos pela equações (2.41) e os anti-simétricos pelas equações (2.42).

O desenvolvimento descrito acima pode ser encontrado em (22),cujos resultados serão comparados com os obtidos pela solução por elementos finitos apresentados.

Como pode-se inferir da solução descrita acima, o problema será bem mais complexo caso a viga tenha mais um vão, ou, ainda, não possua simetria. O encaminhamento apresentado para as vigas Gerber pode ser seguido para cálculo de vigas contínuas, introduzindo-se condições de contorno adequadas. Para este caso, encontram-se soluções analíticas em Timoshenko(3,4) e Nowacki(14).

2.2.3 - Vibrações Forçadas

No ítem (2.2.2) foi mostrada a determinação de frequências e modos normais de vibração para sistemas contínuos. Uma vez que estas características possam ser calculadas, a resposta de um sistema estrutural a uma solicitação dinâmica $p(x , t)$ pode ser encontrada por uma superposição dos diferentes modos normais, que são em número infinito. Escreve-se a resposta $w(x , t)$, para sistemas unidimensionais, na forma

$$w(x , t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(t) \cdot \phi_i(x) \qquad (2.43)$$

onde, $\phi_i(x)$ são as funções características definidas no ítem anterior e $Y_i(t)$ são as amplitudes dos modos normais, que funcionam como coordenadas generalizadas, chamadas *coordenadas normais* *ou modais.*

Este procedimento é definido como *superposição modal*, para sistemas analisados como contínuos. Adiante, será mostrada a formulação deste processo, quando se tem um sistema discreto.

As coordenadas normais são em número infinito, como indica o somatório da equação (2.43), porém para as análises práticas apenas a consideração de uns poucos modos fornece resultados compatíveis com as aproximações requeridas.

A equação do movimento de uma viga, considerando-se propriedades físicas variáveis ao longo do comprimento, é a equação (2.11), que se escreve:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] + m(x)\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x\,,\,t)$$

Introduzindo-se $w(x\,,\,t)$ como definido na equação (2.43), vem:

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(x)\cdot\phi_i(x)\cdot\ddot{Y}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\,\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}\right]Y_i(t) = p(x\,,\,t) \tag{2.44}$$

Multiplicando-se cada termo por $\phi_n(x)$ e integrando-se em x, obtém-se :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{Y}_i(t) \int_0^L m(x) \cdot \phi_i(x) \cdot \phi_n(x)\, dx \, +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(t) \int_0^L \phi_n(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\, \frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}\right] dx = \int_0^L \phi_n(x) \cdot p(x,t)dx \tag{2.45}$$

Com as relações de ortogonalidade da equação (2.27) e observando-se que

$$\int_0^L \phi_n(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x) \cdot \frac{d^2\phi_n(x)}{dx^2}\right] dx = \omega_n^2 \int_0^L \left[\phi_n(x)\right]^2 m(x)\, dx$$

a equação (2.45) fica desacoplada em equações diferenciais do tipo:

$$\int_0^L \phi_n^2(x) \cdot m(x)\, dx \cdot \ddot{Y}_n(t) + \omega_n^2 \int_0^L \phi_n^2(x) \cdot m(x)\, dx \cdot Y_n(t) =$$

$$= \int_0^L \phi_n(x)\, p(x\,,\,t)\, dx \tag{2.46}$$

Fazendo

$$\int_0^L \phi_n(x) \cdot m(x)\, dx = M_n \tag{2.47}$$

$$\int_0^L \phi_n(x) \cdot p(x\,,\,t)\, dx = P_n(t) \tag{2.48}$$

onde M_n é a massa generalizada associada ao modo $\phi_n(x)$ e P_n é o carregamento generalizado, a equação (2.46) se torna:

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + \omega_n^2 M_n Y_n(t) = P_n \qquad (2.49)$$

A equação (2.49) pode ser resolvida para cada modo n, obtendo-se as coordenadas normais $Y_n(t)$, que, levadas na Equação (2.43), fornecem a resposta $w(x, t)$.

O problema que se pretende analisar neste trabalho é a resposta de uma viga à passagem de uma força concentrada móvel. O efeito de cargas móveis atravessando vigas simples está desenvolvido em (1, 2, 3, 4, 15).

Nagaraju et alli (16) apresentam a resposta de vigas Gerber de três vãos - Figura (2.6) -, a uma carga móvel, definindo-se o carregamento pela expressão:

$$p(x, t) = P \cdot \delta(x - vt) \qquad (2.50)$$

onde P é a intensidade da carga e $\delta(x - vt)$ é a função de Dirac, tal que

$$\delta(x - vt) = 0 \quad p/ \quad x \neq vt$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - vt)\, dx = 1$$

Com a equação (2.50), a equação (2.48) se escreve :

$$\int_0^L \phi_n(x) \cdot P \cdot \delta(x - vt)\, dx = P \cdot \phi_n(vt)$$

Fazendo-se ainda

$$M_n = \int_0^L \phi_n^2(x) \cdot m(x)\, dx = \bar{m} \int_0^L \phi_n^2(x) = \bar{m}\, K_n L$$

a equação (2.49) se torna:

$$\ddot{Y}_n(t) + \omega_n^2\, Y_n(t) = \zeta_n\, \phi_n(vt) \qquad n = 1,2,...$$

com

$$\zeta_n = \frac{P}{\bar{m}\, K_n\, L}$$

O sistema desacoplado da equação (2.51) é resolvido para $Y_n(t)$ tomando-se a transformada de Laplace nos dois lados da expressão genérica e fazendo-se, a seguir, a transformação inversa. Além disso, introduzindo-se as condições iniciais Y_{n_o} e $\dot{Y}_{n_o}$, chega-se a:

$$Y_n(t) = Y_{n_o} \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \frac{\dot{Y}_{n_o}}{\omega_n} \operatorname{sen}(\omega_n \cdot t) + \zeta_n\, \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2+\omega_n^2}\, \mathcal{L}\, \phi_n(vt) \right] \tag{2.52}$$

As expressões de $\phi_n(x)$ estão calculadas em (22). Determina-se, então, $\phi_n(vt)$ e chegam-se às expressões de $Y_n(t)$ introduzindo condições iniciais apropriadas, tomadas nulas para o primeiro vão (MN) e calculadas para os demais. Finalmente, as deflexões são dadas pela equação (2.43). Os momentos são obtidos por:

$$M(x, t) = - EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t) \cdot \phi_n''(x) \qquad (2.53)$$

A série diferenciada da equação (2.53) não apresenta boa convergência. É conveniente separar-se a solução $w(x, t)$ em duas partes, fazendo:

$$w(x, t) = V(x, t) + U(x, t) \qquad (2.54)$$

onde $V(x, t)$ satisfaz a equação diferencial

$$EI \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = P \cdot \delta(x - vt) \qquad (2.55)$$

e é chamada "solução quase-estática". $U(x, t)$ é denominada "solução das forças de inércia".

Levando a equação (2.54) na equação do movimento a equação (2.12) e, tendo em vista as equações (2.55) e (2.43), chega-se a:

$$EI \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = - \bar{m} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{A}_n(t) \cdot \phi_n(x) \qquad (2.56)$$

Expandindo-se $U(x, t)$ em uma série de funções características

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cdot \phi_n(x) \qquad (2.57)$$

obtém-se das equações (2.56) e (2.43)

$$b_n(t) = - \frac{\bar{m}\ c^4}{EI} \cdot \frac{1}{\lambda_n^4} \cdot \ddot{A}_n(t) \tag{2.58}$$

onde

$$\frac{\lambda_n^4}{c^4} = a_n^4 = \frac{\bar{m}\ \omega_n^2}{EI}$$

Pela teoria elementar de flexão de vigas,tem-se que

$$V(x\ ,\ t) = \frac{P\ L^3}{EI}\ \delta_D \tag{2.59}$$

sendo δ_D o "coeficiente de influência para deflexão". Assim, levando na equação (2.54) as equações (2.57),(2.58) e (2.59), chega-se a:

$$w(x\ ,\ t) = \frac{P\ L^3}{EI}\left[\delta_D - \frac{c^4}{L^4}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{K_n\ \lambda_n^4} \cdot P_n(t) \cdot \phi_n(x)\right\}\right] \tag{2.60}$$

onde:

$$\ddot{A}_n(t) = \frac{P}{\bar{m}\ L\ K_n} \cdot P_n(t)$$

Da equação (2.53), com

$$- EI\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = P \cdot L \cdot \delta_M$$

onde δ_M é o "coeficiente de influência para momentos", vem:

$$M(x\ ,\ t) = P\ L\ \left[\delta_M + \frac{c^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{K_n\ \lambda_n^2} \cdot P_n(t) \cdot \bar{\phi}_n(x)\right\}\right] \tag{2.61}$$

onde

$$\phi_n(x) = \frac{c^2}{\lambda_n^2}\ \phi_n''(x)$$

As equações (2.60) e (2.61) fornecem as deflexões e os momentos, respostas à solicitação da equação (2.50). Em (16), Nagaraju et alli apresentam resultados utilizando estas equações. Tais resultados serão comparados com a solução apresentada.

2.3 - SISTEMAS DISCRETOS - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.3.1 - Equações de Lagrange

Como foi dito no ítem (2.1), as equações do movimento para um sistema discreto, com N graus de liberdade, podem ser formuladas a partir do princípio variacional de Hamilton, que se repete aqui:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} (T - V)\ dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W \cdot dt = 0 \tag{2.62}$$

desde que se exprima a energia cinética total T, a energia de deformação V e o trabalho virtual total W em função de um conjunto de coordenadas generalizadas q_1, q_2, ... , q_N. É conveniente lembrar que coordenadas generalizadas para um sistema com

N graus de liberdade são definidas como qualquer conjunto de N valores independentes que determinam completamente a posição de cada ponto do sistema.

Para a maioria dos sistemas estruturais ou mecânicos, a energia cinética pode ser escrita em função das coordenadas generalizadas e suas derivadas primeiras, ao passo que a energia potencial é função apenas das coordenadas generalizadas. Ainda, o trabalho virtual total das forças quando agem sobre deslocamentos virtuais resultantes de um conjunto arbitrário de variações nas coordenadas generalizadas pode ser escrito como combinação linear dessas variações. Matematicamente, exprime-se:

$$T = T(q_1 , q_2 , \ldots , q_N , \dot{q}_1 , \dot{q}_2 , \ldots , \dot{q}_N) \qquad (2.63a)$$

$$V = V(q_1 , q_2 , \ldots , q_N) \qquad (2.63b)$$

$$\delta W = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_N \cdot \delta q_N \qquad (2.63c)$$

onde $Q_1 , Q_2 , \ldots , Q_N$ são funções solicitantes generalizadas correspondentes a $q_1 , q_2 , \ldots , q_i , \ldots , q_N$, respectivamente.

Levando as equações (2.63) em (2.62), permutando os operadores integral e variacional e efetuando as variações, vem:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \ldots + \frac{\partial T}{\partial q_N} \delta q_N + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_N} \delta \dot{q}_N - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 - \ldots - \frac{\partial V}{\partial q_N} \delta q_N + Q_1 \, \delta q_1 + \ldots + Q_N \, \delta q_N \right) dt = 0 \qquad (2.64)$$

Os termos dependentes das velocidades na equação (2.64) são integrados por partes da forma seguinte:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \, dt = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \, dt$$

(2.65)

A condição básica imposta às variações é que $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, o que torna nulo o primeiro termo do segundo membro da equação (2.65). Substituindo agora a equação (2.65) na equação (2.64), obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[- \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i \, dt = 0 \qquad (2.66)$$

Como as variações são arbitrárias, a expressão entre colchetes da equação (2.66) deve ser nula; logo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \qquad (2.67)$$

As equações (2.67) são as conhecidas equações de Lagrange, que são um resultado direto da aplicação do princípio variacional de Hamilton, sob as condições especificadas.

2.3.2 - Equações Gerais do Movimento

Para sistemas lineares sujeitos a oscilações de pequena amplitude, as energias cinética e potencial podem ser escritas na forma quadrática seguinte:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} m_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\underset{\sim}{q}}^T \underset{\sim}{m} \dot{\underset{\sim}{q}} \tag{2.68}$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=j}^{N} \sum_{j=1}^{N} k_{ij} \cdot q_i \cdot q_j = \frac{1}{2} \underset{\sim}{q}^T \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{q} \tag{2.69}$$

onde N é o número de graus de liberdade do sistema. É evidente então que o segundo termo da equação (2.67) - $\partial T/\partial q_i$ - anula-se,de modo que as equações de Lagrange se tornam:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{2.70}$$

Substituindo as equações (2.68) e (2.69) em (2.70) e efetuando a derivação, escreve-se, em forma matricial:

$$\underset{\sim}{m} \ddot{\underset{\sim}{q}} + \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{Q} \tag{2.71}$$

É conveniente lembrar que nas forças generalizadas Q estão incluídas todas as forças não-conservativas, inclusive as forças de amortecimento.

Suponhamos agora o sistema discretizado em elementos finitos, de tal modo que os deslocamentos u no interior de cada elemento sejam dados em função dos deslocamentos nodais U pela expressão:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{U} \tag{2.72}$$

A equação (2.72) é instituída para sistemas estáticos em regime de pequenos deslocamentos. Para sistemas dinâmicos, em geral, esta relação não é válida. Contudo, se um número suficiente de deslocamentos $\underset{\sim}{U}$ é considerado, a relação da equação (2.72) é uma boa aproximação, desde que os deslocamentos sejam calculados a partir das equações dinâmicas do sistema. Admite-se então que

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}(x\,,\,y\,,\,z\,,\,t)$$

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U}(t)$$

$$\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}(x\,,\,y\,,\,z)$$

Da equação (2.72), vem:

$$\dot{\underset{\sim}{u}} = \underset{\sim}{a} \cdot \dot{\underset{\sim}{U}} \qquad (2.73)$$

Tomando os deslocamentos nodais como as coordenadas generalizadas do sistema, pode-se escrever, para cada elemento:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \, \underset{\sim}{u}^T \, \underset{\sim}{u} \, dV \qquad (2.74)$$

onde ρ é a massa específica do elemento.

Levando a equação (2.73) na (2.74), vem:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \, \dot{\underset{\sim}{U}}^T \, \underset{\sim}{a}^T \, \underset{\sim}{a} \, \dot{\underset{\sim}{U}} \, dV = \frac{1}{2} \, \dot{\underset{\sim}{U}}^T \left[\int_V \rho \, \underset{\sim}{a}^T \, \underset{\sim}{a} \, dV) \right] \dot{\underset{\sim}{U}} \qquad (2.75)$$

Para a energia potencial V tem-se:

$$V = \frac{1}{2} \int_V \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{\varepsilon} \, dV \qquad (2.76)$$

As deformações $\underset{\sim}{\varepsilon}$ podem ser expressas em termos dos deslocamentos nodais pela expressão:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{b} \, \underset{\sim}{U} \qquad (2.77)$$

onde a matriz $\underset{\sim}{b}$ é obtida de $\underset{\sim}{a}$ por derivação.

Supondo, ainda, material elástico linear, tem-se:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{E} \, \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad (2.78)$$

onde $\underset{\sim}{E}$ é a matriz das constantes elásticas.

Substituindo agora as equações (2.77) e (2.78) em (2.76), obtém-se:

$$V = \frac{1}{2} \int_V \underset{\sim}{U}^T \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{E} \, \underset{\sim}{b} \, \underset{\sim}{U} \, dV = \frac{1}{2} \underset{\sim}{U}^T \left[\int_V \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{E} \, \underset{\sim}{b} \, dV \right] \underset{\sim}{U} \qquad (2.79)$$

Comparando a equação (2.68) com (2.75) e a equação (2.69) com (2.79) e lembrando que os deslocamentos nodais $\underset{\sim}{U}$ são as coordenadas generalizadas, tem-se que:

$$\underset{\sim}{m}^e = \int_V \rho \, \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{a} \, dV \qquad (2.80)$$

$$\underset{\sim}{k}^e = \int_V \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{E} \, \underset{\sim}{b} \, dV \qquad (2.81)$$

A matriz $\underset{\sim}{m}^e$ é chamada matriz de massas consistentes, havendo sido inicialmente deduzida por Archer (21). A matriz $\underset{\sim}{k}^e$ é a matriz de rigidez do elemento.

Para o cálculo das funções $\underset{\sim}{Q}$, determina-se o trabalho virtual total das forças, que pode ser escrito:

$$W = W_s + W_v + W_a \tag{2.82}$$

onde,

W_s - é o trabalho desenvolvido pelas forças de superfície

W_v - é o trabalho desenvolvido pelas forças de volume

W_a - é o trabalho desenvolvido pelas forças dissipativas.

Da equação (2.82), escreve-se:

$$\delta W = \delta W_s + \delta W_v + \delta W_a \tag{2.83}$$

Para as forças de superfície, tem-se:

$$W_s = \int_s \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{F}_s \, dS = \int_s \underset{\sim}{U}^T \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{F}_s \, dS$$

e (2.84)

$$\delta W_s = \delta \underset{\sim}{U}^T \cdot \int_s \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{F}_s \, dS$$

onde $\underset{\sim}{F}_s$ são as forças de superfície.

Para as forças de volume, tem-se:

$$W_v = \int_v \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{F}_v \, dV = \int_v \underset{\sim}{U}^T \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{F}_v \, dV$$

e (2.85)

$$\delta W_v = \delta \underset{\sim}{U}^T \cdot \int_v \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{F}_v \, dV$$

onde $\underset{\sim}{F}_v$ são as forças de volume.

Considerando-se amortecimento viscoso, obtêm-se:

$$\delta W_a = \delta \underset{\sim}{U}^T \cdot \underset{\sim}{c}^e \, \dot{\underset{\sim}{U}} \tag{2.86}$$

sendo $\underset{\sim}{c}^e$ a matriz de amortecimento.

Comparando a equação (2.86) com (2.63c), chega-se à expressão matricial:

$$\underset{\sim}{Q} = - \underset{\sim}{c}^e \, \dot{\underset{\sim}{U}} + \underset{\sim}{p}^e \tag{2.87}$$

onde,

$$\underset{\sim}{p}^e = \int_v \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{F}_s \, dS + \int_v \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{F}_v \, dV \tag{2.88}$$

é o vetor das cargas nodais equivalentes.

Temos, assim, a equação do movimento para um elemento qualquer expressa por:

$$\underset{\sim}{m}^e \, \ddot{\underset{\sim}{U}} + \underset{\sim}{c}^e \, \dot{\underset{\sim}{U}} + \underset{\sim}{k}^e \, \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{p}^e \tag{2.89}$$

Fazendo a associação ao longo de toda a estrutura, obtém-se, finalmente, as equações gerais do movimento:

$$\underset{\sim}{m}\,\ddot{\underset{\sim}{U}} + \underset{\sim}{c}\,\dot{\underset{\sim}{U}} + \underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{p} \qquad (2.90)$$

Convém notar que a matriz global $\underset{\sim}{m}$ é formada por processo idêntico ao da matriz $\underset{\sim}{k}$, como está mostrado em (7), processo este já bastante conhecido.

Substituir-se a matriz $\underset{\sim}{m}$ como dada na equação (2.80) por uma matriz de massas concentradas nos pontos nodais (matriz de massas discretas), é técnica empregada e apresenta a vantagem de simplificar os cálculos. Porém, do desenvolvimento apresentado, pode-se inferir ser a matriz de massas consistentes a compatível com o método dos elementos finitos. Trabalhando-se com esta, sendo as funções de interpolação compatíveis, tem-se a garantia de que as frequências convergem para as exatas por valores superiores (21), ao passo que de outro modo nada se pode garantir.

A determinação dos coeficientes c_{ij} da matriz de amortecimento $\underset{\sim}{c}$ é uma questão ainda em aberto. É usual definir-se $\underset{\sim}{c}$ diretamente, como uma combinação de $\underset{\sim}{k}$ e $\underset{\sim}{m}$, buscando assegurar que o sistema das equações (2.90) possua modos normais clássicos de vibração e possa ser desacoplado, o que está mostrado em (23). No presente trabalho, a influência do amortecimento estrutural é desprezada, considerando-se que sua influência é pequena nos casos práticos.

Para sistemas lineares, as equações (2.90) podem ser desacopladas em equações diferenciais ordinárias independentes por meio de uma transformação para coordenadas normais ou modais. Essa é a base do *método de superposição modal*. Contudo, para sistemas não-lineares, nos quais as matrizes de massa ou de rigidez são variáveis com o tempo, não mais se caracterizam modos normais clássicos de vibração e o método referido acima não é aplicável. A solução para tais casos consiste em resolver-se diretamente o sistema de equações acopladas através métodos numéricos. A integração passo a passo das equações, que supõem a cada incremento de tempo a linearidade do sistema com as propriedades determinadas no início do intervalo, é em geral o método mais indicado (3,5).

No que se segue, supõe-se que as propriedades físicas da estrutura são constantes no tempo e não se leva em conta a massa das cargas móveis, de maneira que o sistema é linear, o método da superposição modal é válido e será empregado.

2.3.3 - Vibrações Livres Não-Amortecidas

As equações (2.90), para um sistema vibrando livremente e na ausência de amortecimento estrutural, escrevem-se:

$$\underset{\sim}{m}\,\ddot{\underset{\sim}{U}} + \underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{0} \tag{2.91}$$

onde $\underset{\sim}{0}$ é o vetor nulo.

O estudo das vibrações livres consiste em se determinar sob que condições as equações (2.91) admitem solução não-trivial, isto é, permitem movimento. As oscilações livres são harmônicas, de modo que assume-se

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{\phi} \ \mathrm{sen}(\omega t + \theta) \qquad (2.92)$$

onde $\underset{\sim}{\phi}$ é o vetor coluna das amplitudes dos deslocamentos $\underset{\sim}{U}$, ω é a frequência circular de vibração e θ é o ângulo de fase. Derivando-se duas vezes a equação (2.92) em relação ao tempo, vem :

$$\ddot{\underset{\sim}{U}} = \underset{\sim}{\phi}(-\ \omega^2) \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \theta) \qquad (2.93)$$

Levando as equações (2.92) e (2.93) em (2.91), tem-se:

$$-\ \omega^2 \ \underset{\sim}{m} \ \underset{\sim}{\phi} \ \mathrm{sen}(\omega t + \theta) + \underset{\sim}{k} \ \underset{\sim}{\phi} \ \mathrm{sen}(\omega t + \theta) = \underset{\sim}{0}$$

e,

$$-\ \omega^2 \ \underset{\sim}{m} \ \underset{\sim}{\phi} + \underset{\sim}{k} \ \underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{0}$$

ou, ainda

$$\left[\underset{\sim}{k} - \omega^2 \ \underset{\sim}{m}\right] \underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{0} \qquad (2.94)$$

Pela regra de Cramer sabe-se que o sistema das equações (2.94) adimite solução não-trivial se e somente se o determinante da matriz dos coeficientes é nulo. Tem-se, então:

$$\left\|\underset{\sim}{k} - \omega^2 \ \underset{\sim}{m}\right\| = 0 \qquad (2.95)$$

Em um sistema com N graus de liberdade, a expansão do determinante da equação (2.95) leva a uma equação de N-ésima ordem em ω^2 . Esta equação é chamada equação característica ou equação de frequências do sistema, cujas raízes são as frequências dos N modos normais de vibração possíveis (interessam apenas os valores positivos de $\underline{\omega}$). Pode-se mostrar que para matrizes de massa e de rigidez reais, simétricas e positivamente definidas, o que ocorre para sistemas estruturais estáveis, a equação característica possui todas as raízes reais e positivas.

Portanto, para esses N valores da frequência o sistema das equações (2.94) apresenta uma solução. Seja ω_n uma qualquer das frequências. Tem-se:

$$(\underset{\sim}{k} - \omega_n^2 \underset{\sim}{m}) \underset{\sim}{\phi}_n = \underset{\sim}{0} \qquad (2.96)$$

O vetor $\underset{\sim}{\phi}_n$ das amplitudes não fica explicitamente determinado pela equação (2.96), visto ser o sistema homogêneo. Pode-se, porém, determinar as componentes de $\underset{\sim}{\phi}_n$ em função de uma delas, definindo-se assim a forma ou modo de vibração do sistema, sendo a amplitude indeterminada.

As equações de vibração livre, as equações (2.94) , são uma forma de problema de autovalor da Álgebra Matricial, no qual as frequências são os autovalores e os autovetores correspondentes são os modos de vibração.

Levando os N autovalores e autovetores nas equações (2.96), pode-se escrever:

$$\underset{\sim}{k}\ \underset{\sim}{\phi}_1 - \omega_1\ \underset{\sim}{m}\ \underset{\sim}{\phi}_1 = \underset{\sim}{0}$$

$$\underset{\sim}{k}\ \underset{\sim}{\phi}_2 - \omega_2\ \underset{\sim}{m}\ \underset{\sim}{\phi}_2 = \underset{\sim}{0} \qquad (2.97)$$

$$\cdots$$

$$\underset{\sim}{k}\ \underset{\sim}{\phi}_N - \omega_N\ \underset{\sim}{m}\ \underset{\sim}{\phi}_N = \underset{\sim}{0}$$

Em forma geral, tem-se:

$$\underset{\sim}{k}\ \underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{\Omega}^2\ \underset{\sim}{m}\ \underset{\sim}{\Phi} \qquad (2.98)$$

onde

$$\underset{\sim}{\Phi} = \left[\underset{\sim}{\phi}_1\ \underset{\sim}{\phi}_2\ \cdots\ \underset{\sim}{\phi}_N\right]$$

é chamada matriz modal e

$$\underset{\sim}{\Omega}^2 = \left[\omega_1^2\ \omega_2^2\ \cdots\ \omega_N^2\right]$$

a matriz das freqüências ou matriz espectral.

A solução direta das equações (2.94) torna-se impraticável para sistemas com muitos graus de liberdade. No Capítulo 3, mostra-se a solução do problema de autovalor pelo processo de Givens-Householder e sua aplicação ao caso estudado.

2.3.4 - Propriedades dos Modos Normais de Vibração

Mostra-se a seguir que os modos normais de vibração $\underset{\sim}{\phi}_k$ são ortogonais às matrizes de massa e rigidez, de maneira análoga às relações de ortogonalidade mostradas para sistemas contínuos - equação (2.27).

Para tanto, premultiplica-se ambos os membros da equação (2.98) por $\underset{\sim}{\Phi}^T$, obtendo:

$$\underset{\sim}{\Phi}^T \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{\Omega}^2 \underset{\sim}{\Phi}^T \underset{\sim}{m} \underset{\sim}{\Phi} \tag{2.99}$$

Fazendo

$$\underset{\sim}{\Phi}^T \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{K}_d$$

e

$$\underset{\sim}{\Phi}^T \underset{\sim}{m} \underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{M}_d$$

onde $\underset{\sim}{K}_d$ e $\underset{\sim}{M}_d$ são denominadas matrizes de rigidez e massa generalizadas, obtém-se:

$$\underset{\sim}{K}_d = \underset{\sim}{\Omega}^2 \underset{\sim}{M}_d \tag{2.100}$$

Representando-se a equação (2.100) na forma

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{D} \cdot \underset{\sim}{A} \tag{2.101}$$

onde $\underset{\sim}{S}$ e $\underset{\sim}{A}$ são simétricas e $\underset{\sim}{D}$ é diagonal, tem-se:

$$s_{ij} = \sum_{r=1}^{N} d_{ir} \, a_{rj} = d_{ii} \, a_{ij}$$

e

$$s_{ji} = \sum_{r=1}^{N} d_{jr} \, a_{ri} = d_{jj} \, a_{ji}$$

Como $s_{ij} = s_{ji}$, vem:

$$d_{ii} \cdot a_{ij} = d_{jj} \cdot a_{ji} \tag{2.102}$$

A equação (2.102) só é verdadeira se a matriz $\underset{\sim}{D}$ é escalar ($d_{ii} = d_{jj}$) ou se $\underset{\sim}{A}$ é diagonal. Como $\underset{\sim}{\Omega}^2$ não é escalar, $\underset{\sim}{A}$, isto é, $\underset{\sim}{M}_d$, deve ser diagonal e, consequentemente, $\underset{\sim}{K}_d$ também é diagonal.

Assim, fica mostrado que os modos normais $\underset{\sim}{\phi}_k$ são ortogonais tanto em relação à matriz de rigidez $\underset{\sim}{k}$ quanto em relação à matriz de massas $\underset{\sim}{m}$, podendo-se escrever:

$$\underset{\sim}{\phi}_i^T \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}_j = \begin{cases} 0 & \text{SE} \quad i \neq j \\ M_{di} & \text{SE} \quad i = j \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{\phi}_i^T \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}_j = \begin{cases} 0 & \text{SE} \quad i \neq j \\ K_{di} & \text{SE} \quad i = j \end{cases} \tag{2.103}$$

2.3.5 - Vibrações Forçadas

As equações (2.90) para sistemas não-amortecidos sujeitos a excitações $\underset{\sim}{p}$, escrevem-se:

$$\underset{\sim}{m} \, \ddot{\underset{\sim}{U}} + \underset{\sim}{k} \, \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{p} \tag{2.104}$$

Transformando os deslocamentos nodais $\underset{\sim}{U}$ em coordenadas normais ou modais $\underset{\sim}{q}$ por meio da matriz modal, vem:

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{q} \tag{2.105}$$

e

$$\ddot{\underset{\sim}{U}} = \underset{\sim}{\Phi}\,\ddot{\underset{\sim}{q}} \tag{2.106}$$

Levando as equações (2.105) e (2.106), em (2.104) tem-se

$$\underset{\sim}{m}\,\underset{\sim}{\Phi}\,\ddot{\underset{\sim}{q}} + \underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{p} \tag{2.107}$$

Premultiplicando a equação (2.07) por Φ^T, obtém-se:

$$\underset{\sim}{\Phi}^T\,\underset{\sim}{m}\,\underset{\sim}{\Phi}\,\ddot{\underset{\sim}{q}} + \underset{\sim}{\Phi}^T\,\underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{\Phi}^T\,\underset{\sim}{p} \tag{2.108}$$

Tendo em vista as relações de ortogonalidade dos modos normais e chamando

$$\underset{\sim}{P}_d(t) = \underset{\sim}{\Phi}^T \cdot \underset{\sim}{p}(t) \tag{2.109}$$

o vetor das forças nodais generalizado, vem:

$$\underset{\sim}{M}_d\,\ddot{\underset{\sim}{q}} + \underset{\sim}{\Omega}^2\,\underset{\sim}{M}_d\,\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{P}_d(t) \tag{2.110}$$

O sistema das equações (2.110), visto serem as matrizes $\underset{\sim}{M}_d$ e $\underset{\sim}{\Omega}^2$ diagonais, está descoplado em N equações diferenciais ordinárias da forma:

$$M_{d_k}\,\ddot{q}_k + \omega_k^2\,M_{d_k}\,q_k = P_{d_k}(t) \qquad k = 1, 2, \ldots, N \tag{2.111}$$

ou,

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 \, q_k = M_{d_k}^{-1} \, P_{d_k}(t) \qquad k = 1, 2, \ldots, N \qquad (2.112)$$

As equações (2.112), semelhante à equação para sistemas com um grau de liberdade, pode ser resolvida tomando-se a transformada de Laplace em ambos os membros e fazendo-se, a seguir, a transformação inversa. Daí,

$$q_k = q_{k_0} \cdot \cos \omega_k t + \frac{\dot{q}_{k0}}{\omega_k} \operatorname{sen} \omega_k t + M_{dk}^{-1} \, \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{S^2 + \omega_k^2} \, \mathcal{L}\left[P_{d_k}\right] \right] \qquad (2.113)$$

onde q_{k_0} e $\dot{q}_{k_0}$ são as condições iniciais em $t = 0$.

Pelo teorema da convolução (31), tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{S^2 + \omega_k^2} \cdot \mathcal{L}\left[P_{d_k}\right] \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\omega_k} \, \mathcal{L}\left[\operatorname{sen} \omega_k t\right] \cdot \mathcal{L}\left[P_{d_k}\right] \right] =$$

$$= \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \operatorname{sen}\left[\omega_k (t - \tau)\right] \, P_{d_k}(\tau) \, d\tau \qquad (2.114)$$

Levando a equação (2.114) em equação (2.113), vem , finalmente,

$$q_k = q_{k_0} \cdot \cos \omega_k t + \frac{q_{k0}}{\omega_k} \cdot \operatorname{sen} \omega_k t + \omega_k^{-1} \, M_{d_k}^{-1} \int_0^t \operatorname{sen}\left[\omega_k (t - \tau)\right] \cdot P_{d_k}(\tau) \cdot d\tau \qquad (2.115)$$

A integral nas equações (2.114) e (2.115) é chamada integral de Duhamel, que será usada no capítulo seguinte para determinar a resposta dinâmica de uma viga à passagem de cargas móveis.

III - ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS DE PONTES PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 - INTRODUÇÃO

No Capítulo II foram mostrados os princípios fundamentais da análise dinâmica, formuladas as equações do movimento para um sistema discreto pelo princípio de Hamilton e, assumida a linearidade do sistema, mostrou-se a solução pelo método da superposição modal. Esse método apresenta como vantagem principal o fato de que nos casos práticos apenas uns poucos modos precisam ser considerados para fornecer a resposta na precisão requerida. Desse modo, o cálculo é bastante simplificado e, mesmo para problemas com muitos graus de liberdade, o programa desenvolvido mostra ser eficiente. Por outro lado, o programa não permite analisar estruturas de comportamento não-linear.

Os modelos considerados são simples: a ponte é idealizada como uma viga e os veículos como cargas móveis, sem levar em conta a massa do carregamento. Com isso, no que se segue são apresentados um elemento de viga e suas propriedades, o processo de Givens-Householder para solução de problemas de autovalor e o desenvolvimento para cálculo da resposta dinâmica a cargas concentradas móveis.

3.2 - PROPRIEDADES DO ELEMENTO

3.2.1 - Funções de Interpolação

Tratam-se aqui vigas retas, discretizadas em um número arbitrário de elementos, de comprimentos também arbitrários Figura (3.1). Consideram-se deslocamentos e rotações, em apenas um plano, os deslocamentos nodais, como é mostrado na Figura (3.2). Supõe-se válida a relação - equação (2.72) - entre deslocamentos $\underset{\sim}{u}$ no interior do elemento e os deslocamentos nodais $\underset{\sim}{U}$, aqui repetida:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{U}$$

As funções de interpolação utilizadas são as deformadas estáticas obtidas quando se faz cada um dos deslocamentos nodais U_i assumir um valor unitário, com os demais mantidos nulos.

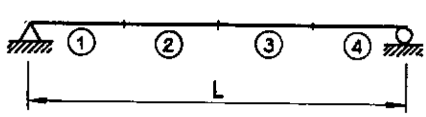


Fig.(3.1)

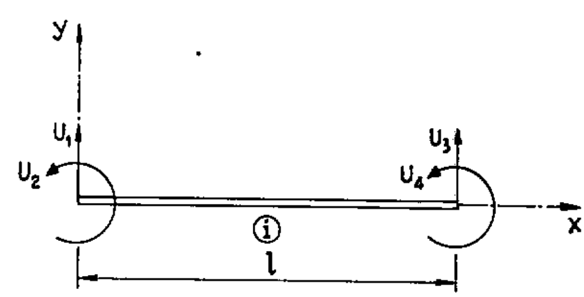


Fig.(3.2)

Pode-se escrever a equação acima na forma:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} \qquad (3.1)$$

onde u é o deslocamento na direção X devido à rotação e w o deslocamento na direção Y .

Chamando V_1 , M_1 , V_2 e M_2 os esforços cortante e momento associado a cada uma das direções representadas na figura (3.2) e lembrando que se considera a deformação por cisalhamento, tem-se as seguintes equações diferenciais da deformada:

$$\frac{d\,w_s}{dx} = \frac{-\,V_1}{G\,A^*} \tag{3.2a}$$

e

$$E\,I_z\,\frac{d^2\,w_b}{dx^2} = V_1\,x - M_1 \tag{3.2b}$$

onde w_s é a parcela do deslocamento devido ao esforço cortante e w_b devida à deformações por flexão. Na equação (3.2), G é o módulo de elasticidade transversal, $A^* = \gamma \cdot A$ é a área da seção transversal efetiva e γ o fator de correção ao cisalhamento, E é o módulo de elasticidade e I_z o momento de inércia em relação ao eixo $\underline{z}$, normal ao plano da figura (3.2).

Assim,

$$w = w_b + w_s$$

$$\theta = \frac{d\,w_b}{dx} = \frac{dw}{dx} - \frac{d\,w_s}{dx} \quad \text{e} \quad u = -\,\theta \cdot y$$

podem ser obtidos por integração das equações (3.2), com as condições de contorno adequadas.

É interessante observar que a condição de engastamento é dada por:

$$\frac{d\ w_b}{dx} = \frac{dw}{dx} - \frac{d\ w_s}{dx} = 0$$

Desse modo, introduzindo as condições de bordo para cada caso, obtém-se:

para $U_1 = 1$ -

$$N_{11} = \left[1 + \phi_s\right]^{-1} \left[6\ (\xi - \xi^2)\ \eta\right] \qquad (3.3a)$$

$$N_{21} = \left[1 + \phi_s\right]^{-1} \left[1 - 3\ \xi^2 + 2\ \xi^3 + (1 - \xi)\ \phi_s\right] \qquad (3.3b)$$

para $U_2 = 1$ -

$$N_{12} = \left[1 + \phi_s\right]^{-1} \left[- 1 + 4\ \xi - 3\ \xi^2 - (1 - \xi)\ \phi_s\right] \eta \ell \qquad (3.3c)$$

$$N_{22} = \left[1 + \phi_s\right]^{-1} \left[\xi - 2\ \xi^2 + \xi^3 + \frac{\phi_s}{2}\ (\xi - \xi^2)\right] \ell \qquad (3.3d)$$

para $U_3 = 1$ -

$$N_{13} = \left[1 + \phi_s\right]^{-1} \left[6(- \xi + \xi^2)\ \eta\right] \qquad (3.3e)$$

$$N_{23} = \left[1 + \phi_s\right]^{-1} \left[3\ \xi^2 - 2\ \xi^3 + \xi \cdot \phi_s\right] \qquad (3.3f)$$

para $U_4 = 1$ -

$$N_{14} = \left[1 + \phi_s\right]^{-1} \left[2\ \xi - 3\ \xi^2 - \xi\ \phi_s\right] \eta \ell \qquad (3.3g)$$

$$N_{24} = \left[1 + \phi_s\right]^{-1} \left[-\ \xi^2 + \xi^3 - \frac{\phi_s}{2} (\xi - \xi^2)\right] \ell \qquad (3.3h)$$

onde

$$\xi = \frac{x}{\ell}\ ,\ \eta = \frac{y}{\ell} \quad e \quad \phi_s = \frac{12\ E\ I_z}{G\ A^*\ \ell^2}$$

é o parâmetro da deformação por cisalhamento.

3.2.2 - <u>Matriz de Massa do Elemento</u>

A expressão da matriz de massas consistentes de um elemento está dada na equação (2.80), aqui repetida:

$$\underset{\sim}{m}^e = \int_V \rho\ \underset{\sim}{a}^T\ \underset{\sim}{a}\ dv$$

Levando a matriz $\underset{\sim}{a}$ dada no ítem (3.2.1) na equação acima e procedendo às operações, chega-se à expressão da matriz $\underset{\sim}{m}^e$ (7):

$$
\underset{\sim}{m}^{e} = \frac{\rho \cdot A \cdot \ell}{(1+\phi_s)^2}
\left[\begin{array}{c:c:c:c}
\frac{13}{35}+\frac{7}{10}\phi_s+\frac{1}{3}\phi_s^2 & & \text{S I M É T R I C A} & \\
\hdashline
\left(\frac{11}{210}+\frac{11}{120}+\frac{1}{24}\phi_s^2\right)\ell & \left(\frac{1}{105}+\frac{1}{60}\phi_s+\frac{1}{120}\phi_s^2\right)\ell^2 & & \\
\hdashline
\frac{9}{70}+\frac{3}{10}\phi_s+\frac{1}{6}\phi_s^2 & \left(\frac{13}{420}+\frac{3}{40}\phi_s+\frac{1}{24}\phi_s^2\right)\ell & \frac{13}{35}+\frac{7}{10}\phi_s+\frac{1}{3}\phi_s^2 & \\
\hdashline
-\left(\frac{13}{420}+\frac{3}{40}\phi_s+\frac{1}{24}\phi_s^2\right)\ell & -\left(\frac{1}{140}+\frac{1}{60}\phi_s+\frac{1}{120}\phi_s^2\right)\ell^2 & -\left(\frac{11}{210}+\frac{11}{120}\phi_s+\frac{1}{24}\phi_s^2\right)\ell & \left(\frac{1}{105}+\frac{1}{60}\phi_s+\frac{1}{120}\phi_s^2\right)\ell^2
\end{array}\right] +
$$

$$
+ \frac{\rho \cdot I_z}{(1+\phi_s)^2 \ell}
\left[\begin{array}{c:c:c:c}
\frac{6}{5} & & \text{S I M É T R I C A} & \\
\hdashline
\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\phi_s\right)\ell & \left(\frac{2}{15}+\frac{1}{6}\phi_s+\frac{1}{3}\phi_s^2\right)\ell^2 & & \\
\hdashline
-\frac{6}{5} & \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\phi_s\right)\ell & \frac{6}{5} & \\
\hdashline
\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\phi_s\right)\ell & \left(-\frac{1}{30}-\frac{1}{6}\phi_s+\frac{1}{6}\phi_s^2\right)\ell^2 & \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\phi_s\right)\ell & \left(\frac{2}{15}+\frac{1}{6}\phi_s+\frac{1}{3}\phi_s^2\right)\ell^2
\end{array}\right] \qquad (3.4)
$$

O primeiro termo da equação (3.4) representa a inércia de translação, enquanto o segundo termo representa a inércia de rotação da viga. ϕ_s é o parâmetro da deformação por cisalhamento, como definido no ítem anterior.

3.2.3 - Matriz de Rigidez do Elemento

A expressão da matriz de rigidez de um elemento está dada na equação (2.81), que se escreve:

$$\underset{\sim}{k}^e = \int_V \underset{\sim}{b}^T \, \underset{\sim}{E} \, \underset{\sim}{b} \, dV$$

onde $\underset{\sim}{E}$ é a matriz das constantes elásticas e $\underset{\sim}{b}$ é obtida de $\underset{\sim}{a}$ por derivação. Efetuando-se as operações indicadas, chega-se à expressão de $\underset{\sim}{k}^e$ para o elemento estudado (7):

$$\underset{\sim}{k}^e = \frac{E \cdot I_z}{\ell^3(1 + \phi_s)} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 12 & & \text{S I M É T R I C A} & \\ \hline 6\,\ell & (4 + \phi_s)\,\ell^2 & & \\ \hline -\,12 & -\,6\,\ell & 12 & \\ \hline 6 & (2 - \phi_s)\,\ell^2 & -\,6\,\ell & (4 + \phi_s)\,\ell^2 \end{array} \right] \tag{3.5}$$

onde E é o módulo de elasticidade.

Para a consideração de vigas Gerber, supõe - se que o elemento possua uma liberação em uma das direções de suas extremidades. Desse modo, pode-se ter liberação do cortante - Figura (3.3a) - ou liberação do momento - Figura (3.1b) -, nas extremi dades esquerda ou direita do elemento. O desenvolvimento que se segue é geral, apesar de ser de maior interesse, no presente estudo, o segundo tipo. É evidente que não se admitem combinações que tornem o membro hipostático.

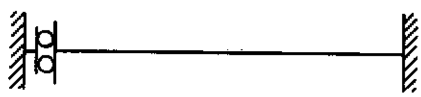


Fig.(3.3a)

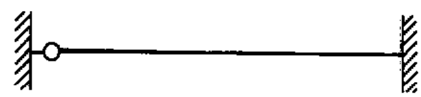


Fig.(3.3b)

É possível escrever a matriz de rigidez de elemento com liberação nas extremidades por meio de alterações simples na matriz do elemento sem liberações - equação (3.5). Chamando $\underset{\sim}{AM}^m$ o vetor das ações na extremidade do elemento $\underline{m}$ e $\underset{\sim}{AML}^m$ o vetor das ações de engastamento, tem-se a equação:

$$\underset{\sim}{AM}^m = \underset{\sim}{k}^m \underset{\sim}{D}^m + \underset{\sim}{AML}^m \qquad (3.6)$$

onde $\underset{\sim}{k}^m$ é a matriz de rigidez e $\underset{\sim}{D}^m$ o vetor dos deslocamentos das extremidades do elemento, que são iguais aos deslocamentos nodais correspondentes, exceto quando há uma liberação.

Suponha-se agora que a direção $\underline{2}$, por exemplo, corresponda a uma liberação - Figura (3.3b). A condição fica expressa na nulidade da ação de extremidade AM_2^m. Desenvolvendo a equação (3.6) e fazendo $AM_2^m = 0$, obtém-se a expressão de D_2^m, que é diferente do correspondente deslocamento nodal:

$$D_2^m = -\frac{1}{k_{22}^m}\left[k_{21}^m \cdot D_1^m + k_{23}^m \cdot D_3^m + k_{24}^m \cdot D_4^m + AML_2^m\right] \qquad (3.7)$$

Substituindo D_2^m como dado na equação (3.7), tem-se para as outras ações:

$$AM_1^m=(k_{11}^m-\frac{k_{12}^m \cdot k_{21}^m}{k_{22}^m})D_1+(k_{13}^m-\frac{k_{12}^m \cdot k_{23}^m}{k_{22}^m})D_3+(k_{14}^m-\frac{k_{12}^m \cdot k_{24}^m}{k_{22}^m})D_4+(AML_1^m-\frac{k_{12}^m}{k_{22}^m}AML_2^m) \qquad (3.8)$$

$$AM_3^m=(k_{31}^m-\frac{k_{32}^m \cdot k_{21}^m}{k_{22}^m})D_1+(k_{33}^m-\frac{k_{32}^m \cdot k_{23}^m}{k_{22}^m})D_3+(k_{34}^m-\frac{k_{32}^m \cdot k_{24}^m}{k_{22}^m})D_4+(AML_3^m-\frac{k_{32}^m}{k_{22}^m}AML_2^m) \qquad (3.9)$$

$$AM_4^m=(k_{41}^m-\frac{k_{42}^m \cdot k_{21}^m}{k_{22}^m})D_1+(k_{43}^m-\frac{k_{42}^m \cdot k_{23}^m}{k_{22}^m})D_3+(k_{44}^m-\frac{k_{42}^m \cdot k_{24}^m}{k_{22}^m})D_4+(AML_4^m-\frac{k_{42}^m}{k_{22}^m}AML_2^m) \qquad (3.10)$$

As equações acima fornecem as ações nas extremidades de um elemento que possui uma liberação na direção $\underline{2}$ e fica claro que se pode chegar a elas por alterações na matriz de rigidez $\underset{\sim}{k}^m$ e no vetor $\underset{\sim}{AML}^m$. Então, observando as equações (3.7) a (3.10), escreve-se de forma geral para liberação em uma direção $\underline{\ell}$ qualquer (ℓ = 1, ..., 4):

$$k_{ij}^{m*} = k_{ij}^{m} - \frac{k_{i\ell}^{m} \cdot k_{\ell j}^{m}}{k_{\ell\ell}^{m}} \qquad (3.11)$$

$$AML_{i}^{m*} = AML_{i}^{m} - \frac{k_{i\ell}^{m}}{k_{\ell\ell}^{m}} \cdot AML_{\ell}^{m} \qquad (3.12)$$

$$D_{\ell}^{m} = - \frac{1}{k_{\ell\ell}^{m}} \left(k_{\ell 1}^{m} \, D_{1}^{m} + k_{\ell 2}^{m} \, D_{2}^{m} + \ldots + AML_{\ell}^{m} \right) \qquad (3.13)$$

onde k_{ij}^{m*} e AML_{i}^{m*} são, respectivamente, a matriz de rigidez e o vetor das ações de engastamento alterados e D_{ℓ}^{m} é o deslocamento da extremidade do elemento $\underline{m}$ na direção $\underline{\ell}$, diferente do deslocamento nodal correspondente. Observe-se que na equação (3.13) o termo correspondente a D_{ℓ}^{m} não está incluido no parenteses.

Desse modo, com as equações (3.11), (3.12) e (3.13), fica automaticamente introduzida uma liberação em um elemento $\underline{m}$ qualquer.

3.3 - PROPRIEDADES DINÂMICAS DA ESTRUTURA

No ítem (2.3.3) foi mostrado que as características dinâmicas de uma estrutura são determinadas pela solução do problema de autovalor

$$(\underset{\sim}{k} - \omega^2 \, \underset{\sim}{m}) \, \underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{0} \qquad (2.94)$$

ou

$$\underset{\sim}{k} \, \underset{\sim}{\phi} = \omega^2 \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi} \qquad (3.14)$$

onde $\underset{\sim}{k}$ e $\underset{\sim}{m}$ são as matrizes de rigidez e massa globais, obtidas por montagem das matrizes dos elementos (11). As matrizes $\underset{\sim}{k}$ e $\underset{\sim}{m}$ são de ordem N , onde N é o número de graus de liberdade do sistema.

É evidente que a solução da equação (3.15) por processo direto, envolvendo determinantes, torna-se impraticável quando N cresce. Em verdade, este enfoque é eficiente apenas quando se tem até 5 graus de liberdade. Considerando problemas de porte médio com até 150 graus de liberdade, o que é um número razoável para os casos aqui estudados, rotinas de cálculo de autovalores para matrizes simétricas, em particular o processo de Givens-Householder, apresentam-se como a técnica mais eficiente. Uma alternativa é o emprego de processos iterativos, como o conhecido método de Stodola (24).

3.3.1 - Redução do Problema a Forma Clássica

As rotinas de autovalor operam sobre o problema na forma clássica:

$$\underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{Y} = \lambda\ \underset{\sim}{Y} \tag{3.15}$$

onde $\underset{\sim}{A}$ é simétrica, $\underset{\sim}{Y}$ é o autovetor e λ o autovalor.

Fazer-se na equação (3.14) $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{k}^{-1} \cdot \underset{\sim}{m}$ ou $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{m}^{-1} \cdot \underset{\sim}{k}$ não é válido no caso, visto não se garantir a simetria de $\underset{\sim}{A}$. Aplica-se então a decomposição de Choleski para a transformação à forma clássica. Decompõe-se a matriz de rigidez no produto de uma matriz triangular inferior pela sua transposta, escrevendo-se:

$$\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{L}^T \tag{3.16}$$

Levando a equação (3.16) em (3.14), vem:

$$\underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{L}^T\ \underset{\sim}{\phi} = \omega^2\ \underset{\sim}{m}\ \underset{\sim}{\phi} \tag{3.17}$$

Fazendo

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{L}^T\ \underset{\sim}{\phi} \tag{3.18}$$

o que leva a

$$\underset{\sim}{\phi} = (\underset{\sim}{L}^T)^{-1}\ \underset{\sim}{Y} \tag{3.19}$$

a equação (3.17) fica:

$$\underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{Y} = \omega^2\ \underset{\sim}{m}\ (\underset{\sim}{L}^T)^{-1}\ \underset{\sim}{Y} \tag{3.20}$$

Premultiplicando a equação (3.20) por $\underset{\sim}{L}^{-1}$, tem-se

$$\underset{\sim}{Y} = \omega^2\ \underset{\sim}{L}^{-1}\ \underset{\sim}{m}\ (\underset{\sim}{L}^T)^{-1}\ \underset{\sim}{Y} \tag{3.21}$$

ou

$$(\underset{\sim}{L}^{-1}\ \underset{\sim}{m}\ (\underset{\sim}{L}^T)^{-1})\ \underset{\sim}{Y} = (1/\omega^2)\ \underset{\sim}{Y} \tag{3.22}$$

Comparando a equação (3.22) com (3.15), escreve-se:

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}^{-1}\ \underset{\sim}{m}\ (\underset{\sim}{L}^T)^{-1} \tag{3.23}$$

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{\phi} \tag{3.23}$$

Com a decomposição proposta, formula-se o problema na forma da equação (3.16). Os autovalores do problema transformado são os mesmos do problema original, visto serem as transformações do tipo de similaridade. Os autovetores $\underset{\sim}{\phi}$ são calculados dos autovetores $\underset{\sim}{Y}$, através da equação (3.19). Como as rotinas normalmente fornecem os autovalores em forma decrescente, com a mudança proposta os autovalores representam $(1/\omega^2)$ e, logo, as mais baixas frequências são as primeiro determinadas. Por este motivo preferiu-se a decomposição da matriz de rigidez à da matriz de massa, pois são as frequências baixas as que têm maior influência na resposta.

A matriz $\underset{\sim}{L}$ da equação (3.16) fica determinada por (12, 27):

$$\ell_{ii} = \left(k_{ii} - \sum_{r=1}^{i-1} \ell_{ir}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ell_{ij} = \frac{k_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} \ell_{ir} \cdot \ell_{jr}}{\ell_{jj}} \qquad \text{se} \quad i > j \tag{3.24}$$

$$\ell_{ij} = 0 \qquad \text{se} \quad i < j$$

A inversa $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{L}^{-1}$ é facilmente obtida por:

$$r_{ii} = \frac{1}{\ell_{ii}}$$

$$r_{ij} = - \frac{\sum_{p=j}^{i-1} \ell_{ip}\, r_{pj}}{\ell_{ii}} \qquad \text{se} \quad i > j \tag{3.25}$$

$$r_{ij} = 0 \qquad \text{se} \quad i < j$$

Com as equações (3.23), (3.24) e (3.25), leva-se a equação (3.14) ã forma clãssica, na qual ẽ resolvido o problema de autovalor.

3.3.2 - Processo de Givens-Householder (13)

O objetivo do processo de Givens-Householder ẽ o cãlculo dos autovalores e autovetores de uma matriz simẽtrica $\underset{\sim}{A}$, de ordem N.

O processo consta de três fases: redução ã forma tridiagonal, cãlculo dos autovalores e cãlculo dos autovetores.

a) Redução ã Forma Tridiagonal

Em 1847, Jacobi mostrou que o cãlculo de autovalores podia ser feito criando-se uma sequência $\underset{\sim}{A}_1 = \underset{\sim}{R}_1 \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{R}_1^T$, $\underset{\sim}{A}_2 = \underset{\sim}{R}_2 \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{R}_2^T$, ..., de matrizes ortogonalmente similares, de tal modo que $\underset{\sim}{A}_k$ tenda ã matriz diagonal dos autovalores quando $k \to \infty$. As matrizes $\underset{\sim}{R}_k$ são de rotações planas.

Daĩ surgiram inũmeras modificações, das quais a mais importante deve-se a Givens que mostrou ser possĩvel, por meio de uma sẽrie finita de rotações como acima, transformar-se $\underset{\sim}{A}$ em uma matriz na forma:

$$\underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} x & x & & & & \\ x & x & x & & & \\ & x & x & x & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & x & x & x \\ & & & & x & x \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

onde todos os elementos distantes da diagonal mais de uma linha ou coluna são nulos. As matrizes $\underset{\sim}{R}_k$ são escolhidas de modo a zerar um a um os elementos fora da tridiagonal, permanecendo nulos estes elementos na transformação seguinte. Assim, a redução necessita no máximo $N \cdot (N - 1)/2$ passos.

Householder sugeriu que esta tridiagonalização pode ria ser feita tomando-se $\underset{\sim}{R}_k$ como matrizes ortogonais da forma

$$\underset{\sim}{R}_k = \underset{\sim}{I} - 2\, \underset{\sim}{z} \cdot \underset{\sim}{z}^T \tag{3.27}$$

onde $\underset{\sim}{I}$ é a matriz identidade e $\underset{\sim}{z}$ é um vetor coluna tal que $\underset{\sim}{z}^T \cdot \underset{\sim}{z} = 1$.

A eficiência do processo foi confirmada por Wilkinson. São necessárias apenas $(N - 2)$ transformações para se chegar a forma da equação (3.26).

São definidas $(N - 2)$ matrizes ortogonais $\underset{\sim}{P}_1 , \ldots , \underset{\sim}{P}_{N-2}$, tais que:

$$\underset{\sim}{A}_i = \underset{\sim}{P}_i \underset{\sim}{P}_{i-1} \cdots \underset{\sim}{P}_1 \underset{\sim}{A} (\underset{\sim}{P}_i \underset{\sim}{P}_{i-1} \cdots \underset{\sim}{P}_1)^T \qquad (3.28)$$

seja tridiagonal nas primeiras $\underline{i}$ linhas e colunas; logo, $\underset{\sim}{A}_{N-2}$ é tridiagonal.

$\underset{\sim}{P}_i$ tem a forma da equação (3.27), sendo $\underset{\sim}{z}^T \cdot \underset{\sim}{z} = 1$, e mostra-se que tais matrizes são simétricas e ortogonais. Para a primeira transformação,

$$\underset{\sim}{A}_1 = (\underset{\sim}{I} - 2 \underset{\sim}{z} \underset{\sim}{z}^T) \underset{\sim}{A} (\underset{\sim}{I} - 2 \underset{\sim}{z} \underset{\sim}{z}^T)^T \qquad (3.29)$$

escolhe-se $\underset{\sim}{z}$ de tal modo que seu primeiro elemento seja nulo, logo a primeira coluna de $\underset{\sim}{A}_1$ será a mesma de $(\underset{\sim}{I} - 2 \underset{\sim}{z} \underset{\sim}{z}^T) \underset{\sim}{A}$. Assim, se $\underset{\sim}{a}_c$ é a primeira coluna de $\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{c}$ é da forma $\underset{\sim}{c}^T = (x , x , 0 , \ldots , 0)$ procura-se $\underset{\sim}{z}$ tal que:

$$(\underset{\sim}{I} - 2 \underset{\sim}{z} \underset{\sim}{z}^T) \underset{\sim}{a}_c = \underset{\sim}{c}$$

com

$$\underset{\sim}{z}^T \underset{\sim}{z} = 1$$

e

$$\underset{\sim}{z}^T = (0 , x , \ldots , x)$$

Pode-se provar que isto é possível, desde que:

$$\underset{\sim}{c}^T = (a_{11} , \pm s , 0 , \ldots , 0)$$

onde

$$s^2 = (\underset{\sim}{a}_c^T \cdot \underset{\sim}{a}_c) - a_{11}^2 = \sum_{j=2}^{n} a_{ji}^2$$

Então, com

$$z^T = \frac{(\underset{\sim}{a}_c - \underset{\sim}{c})^T}{\left[(\underset{\sim}{a}_c - \underset{\sim}{c})^T (\underset{\sim}{a}_c - \underset{\sim}{c})\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$\underset{\sim}{A}_1$ tem a primeira linha e primeira coluna na forma tridiagonal.

Procedendo-se de maneira análoga, completa-se o processo, bastando observar que $\underset{\sim}{A}_{i-1}$ está transformada convenientemente nas primeiras $(i - 1)$ filas, devendo-se portanto tomar $\underset{\sim}{z}_i$ com os primeiros i elementos nulos. Desse modo, apenas a parte direita da matriz de ordem $(N - i + 1)$ será afetada.

b) Cálculo do Autovalores

Seja $\underset{\sim}{C}$ a matriz tridiagonalizada tem-se:

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}_{N-2} = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 & & & \\ b_1 & c_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & c_n \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

assumindo-se $b_i \neq 0$, para $i = 1 , \ldots , N-1$.

Os autovalores de $\underset{\sim}{A}$ são os mesmos de $\underset{\sim}{C}$, visto serem de similaridade as transformações efetuadas. Para o cálculo dos autovalores de $\underset{\sim}{C}$ definem-se os polinômios

$$p_0\ (\lambda) = 1$$

$$p_1\ (\lambda) = (c_1 - \lambda)$$

$$\ldots$$

$$p_i\ (\lambda) = (c_i - \lambda) \cdot p_{i-1}(\lambda) - b_{i-1}^2(\lambda) \cdot p_{i-2}(\lambda) \qquad (3.31)$$

$$i = 2\ , \ldots , N$$

Verifica-se ser p_i o polinômio característico do menor principal de ordem i de $\underset{\sim}{C}$ e, em particular, p_N é o polinômio característico de $\underset{\sim}{C}$. Mostra-se que, se $p_i(\lambda_0) = 0$, então:

$$p_{i+1}(\lambda_o) \cdot p_{i-1}(\lambda_o) = 0 \qquad (3.32)$$

$$i = 1\ , \ldots , N-1$$

o que, juntamente com a condição $p_0 = 1$, é suficiente para que $p_0\ , p_1\ , \ldots , p_N$ formem uma sequência de Sturm. A característica dessas sequências é justamente que as raízes de p_i separam as raízes de p_{i+1} .

Define-se $ag(\lambda)$ como o número de concordâncias de sinal na sequência $(1\ , p_1(\lambda)\ , p_2(\lambda)\ , \ldots , p_N(\lambda))$, tomando-se, se $p_i(\lambda) = 0$, seu sinal igual ao de $p_{i-1}(\lambda)$. Pode-se demonstrar o teorema:

$ag(\lambda)$ *é o número de raízes de* p_N *maiores ou iguais a* λ

Com este teorema, é possível calcular as raízes de

p_N . Supõe-se que é procurada uma aproximação para λ_{n-m+1} , a m-ésima maior raiz, sabendo-se que ela está contida no intervalo $[\ell , u]$. Toma-se γ_1 como o ponto médio de $[\ell , u]$, determina se $ag(\gamma_1)$ e compara-se:

se $ag(\gamma_1) \geq m$, λ_{n-m+1} está contida em $[\gamma_1 , u]$

se $ag(\gamma_1) < m$, λ_{n-m+1} está contida em $[\ell , \gamma_1)$

Depois de k sucessivas subdivisões, chega-se a um intervalo de comprimento $2^{-k}(u - \ell)$, que contém λ_{n-m+1} , podendo-se tornar este intervalo tão pequeno como desejado. De modo análogo, determinam-se alguns ou todos os autovalores de $\underset{\sim}{C}$, que são os mesmos de $\underset{\sim}{A}$.

c) Cálculo dos Autovetores

Resta agora determinar o autovetor de $\underset{\sim}{A}$ dado o autovalor associado λ . Inicialmente, calcula-se o autovetor da matriz tridiagonal e, a partir deste, determina-se o autovetor correspondente de $\underset{\sim}{A}$. Utiliza-se o método da iteração inversa, sugerido por Wilkinson.

Assume-se que $\bar{\lambda}$ é uma aproximação de λ , mas não exatamente um autovetor, de modo que $\underset{\sim}{C} - \bar{\lambda}\underset{\sim}{I}$ é não-singular. Então, dado $\underset{\sim}{z}^{(0)} = \underset{\sim}{0}$, define-se uma sequência de vetores $\underset{\sim}{z}^{(p)}$ como soluções dos sistemas lineares

$$(\underset{\sim}{C} - \bar{\lambda}\underset{\sim}{I})\ \underset{\sim}{z}^{(p)} = \underset{\sim}{z}^{(p-1)} \ , \quad p = 1 , 2 , \ldots \qquad (3.33)$$

e os vetores normalizados

$$\underset{\sim}{y}^{(p)} = \begin{cases} \dfrac{\underset{\sim}{z}^{(p)}}{\underset{\sim}{z}^{(p)T} \cdot \underset{\sim}{z}^{(p)}} , & \lambda - \bar{\lambda} > 0 \\ \\ \dfrac{(-1)^{p} \cdot \underset{\sim}{z}^{(p)}}{\underset{\sim}{z}^{(p)T} \cdot \underset{\sim}{z}^{(p)}} , & \lambda - \bar{\lambda} < 0 \ , \ p = 1 \ , 2 \ , \ldots \end{cases} \tag{3.34}$$

Pode-se provar que os vetores $\underset{\sim}{y}^{(p)}$ convergem para um autovetor normalizado de $\underset{\sim}{C}$ associado a λ, sob a condição simples de que $\bar{\lambda}$ seja uma melhor aproximação de λ que de qualquer outro autovalor; esta é a base do método.

Na prática, usa-se o processo de eliminação de Gauss para calcular

$$(\underset{\sim}{C} - \bar{\lambda}\underset{\sim}{I})\ \underset{\sim}{z}^{(1)} = \underset{\sim}{z}^{(0)}$$

de modo que se reduz inicialmente o problema para a forma triangular

$$\underset{\sim}{T}\ \underset{\sim}{z}^{(1)} = \underset{\sim}{q}$$

Fazendo-se, então, todos os elementos de $\underset{\sim}{q}$ unitários, define-se o vetor de partida $\underset{\sim}{z}^{(0)}$ implicitamente. Esta aproximação funciona bem e invariavelmente dois passos de iteração na equação (3.33) são suficientes. Quando o autovalor λ é repetido, o segundo vetor de partida é gerado aleatoriamente, o que fornece autovetores linearmente independentes, que podem ser ortogonalizados. Apesar de não haver garantia de que $\underset{\sim}{z}^{(0)}$ é um bom vetor de partida, na prática o procedimento acima mostra eficiência.

Ficam assim calculados os autovetores de $\underset{\sim}{C}$. A equação (3.28) dá a relação entre $\underset{\sim}{C}$ e $\underset{\sim}{A}$, que se escreve:

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{P}\ \underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{P}^T$$

ou

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{P}^T\ \underset{\sim}{C}\ \underset{\sim}{P}$$

sendo

$$\underset{\sim}{P} = (\underset{\sim}{P}_{N-2}\ \underset{\sim}{P}_{N-1} \cdots \underset{\sim}{P}_1)$$

Então, se $\underset{\sim}{y}$ é um autovetor de $\underset{\sim}{C}$, tem-se que

$$\underset{\sim}{C}\ \underset{\sim}{y} = \lambda \underset{\sim}{y}$$

e

$$\lambda \underset{\sim}{P}^T\ \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{P}^T\ \underset{\sim}{C}\ \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{P}^T\ \underset{\sim}{C}\ \underset{\sim}{P}\ \underset{\sim}{P}^T\ \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{P}^T\ \underset{\sim}{y}$$

de modo que $\underset{\sim}{P}^T\ \underset{\sim}{y}$ é o correspondente autovetor de $\underset{\sim}{A}$

Tendo em vista a modificação - equações (3.22) e (3.23) - feita nas equações de vibrações livres, as frequências e modos normais ficam, finalmente, determinados por:

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda i}}$$
$$\underset{\sim}{\phi}_i = (\underset{\sim}{L}^T)^{-1}\ \underset{\sim}{Y}_i \qquad (3.35)$$

onde λ_i e $\underset{\sim}{Y}_i$ são, respectivamente, os i-ésimos autovalor e autovetor calculados pelo processo de Givens-Householder.

3.4.- RESPOSTA DINÂMICA DA ESTRUTURA SOB CARGAS MÓVEIS

Conhecidas as propriedades dinâmicas da estrutura , determina-se agora sua resposta à passagem de uma carga concentrada móvel de intensidade P , que percorre a viga com velocidade constante v.. Assim, a posição da carga é variável no tempo e a solicitação pode ser escrita como uma função $f(t)$.

A solução é apresentada pelo método da superposição modal, desenvolvido no ítem (2.3.5), sendo as equações diferenciais já desacopladas resolvidas pela integral de Duhamel, conforme a equação (2.115).

Supõe-se que, em determinado instante, a carga P percorra o elemento i - Figura (3.4). Se a referência de tempo é a extremidade esquerda do elemento, a posição da carga no instante t é dada por:

$$x = v \cdot t \qquad (3.36)$$

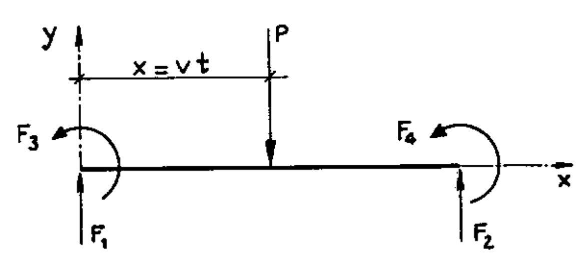


Fig.(3.4)

A expressão da equação (2.88) que dá o vetor de cargas nodais equivalentes escreve-se:

$$\underset{\sim}{p}^e = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ F_4(t) \end{Bmatrix} = \int_0^{\ell} \underset{\sim}{a}^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ P \cdot \delta(x - vt) \end{Bmatrix} \cdot dx \qquad (3.37)$$

onde $\delta(x - vt)$ é a função de Dirac e não se consideram cargas momento aplicadas.

Da equação (3.37), vem:

$$\begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ F_4(t) \end{Bmatrix} = \int_0^{\ell} \begin{Bmatrix} N_{21}(x) \\ N_{22}(x) \\ N_{23}(x) \\ N_{24}(x) \end{Bmatrix} \cdot P \cdot \delta(x - vt) \cdot dx$$

e, efetuando-se a integração

$$\begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ F_4(t) \end{Bmatrix} = P \cdot \begin{Bmatrix} N_{21}(vt) \\ N_{22}(vt) \\ N_{23}(vt) \\ N_{24}(vt) \end{Bmatrix} \qquad (3.38)$$

Substituindo na equação (3.38) as expressões de $N_{2j}(x)$, $j = 1 , \dots , 4$, dadas pelas equações (3.3), com $x = vt$, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} F_1(t) \\ \\ F_2(t) \\ \\ F_3(t) \\ \\ F_4(t) \end{Bmatrix} = \frac{P}{1+\phi_s} \begin{Bmatrix} 1 - \dfrac{3\ v^2 t^2}{\ell^2} + \dfrac{2\ v^3 t^3}{\ell^3} + (1 - \dfrac{vt}{\ell})\ \phi_s \\ \\ vt - \dfrac{2\ v^2 t^2}{\ell} + \dfrac{v^3 t^3}{\ell^2} + \dfrac{\phi_s}{2}\ (vt - \dfrac{v^2 t^2}{\ell}) \\ \\ 3\ \dfrac{v^2 t^2}{\ell^2} - 2\ \dfrac{v^3 t^3}{\ell^3} + \dfrac{vt}{\ell}\ \phi_s \\ \\ -\ \dfrac{v^2 t^2}{\ell} + \dfrac{v^3 t^3}{\ell^2} - \dfrac{\phi_s}{2}\ (vt - \dfrac{v^2 t^2}{\ell}) \end{Bmatrix} \tag{3.39}$$

O vetor $\underset{\sim}{F}(t)$ pode ser levado na integral de Duhamel - equação (2.114) -, fornecendo:

$$\begin{Bmatrix} AML_1(t) \\ AML_2(t) \\ AML_3(t) \\ AML_4(t) \end{Bmatrix} = \int_0^t \text{sen}\ [\omega_k\ (t - \tau)] \cdot \begin{Bmatrix} F_1(\tau) \\ F_2(\tau) \\ F_3(\tau) \\ F_4(\tau) \end{Bmatrix} d\tau \tag{3.40}$$

Desenvolvendo a equação (3.40) e substituindo a equação (3.39), vem:

$$AML_1(t) = \frac{P}{1+\phi_s} \int_0^t \text{sen} \left[\omega_k(t-\tau)\right] \left[1 - \frac{3v^2}{\ell^2}\ \tau^2 + \frac{2v^3}{\ell^3}\ \tau^3 + (1 - \frac{v}{\ell}\ \tau)\right] d\tau \tag{3.41a}$$

$$AML_2(t) = \frac{P}{1+\phi_s} \int_0^t \text{sen} \left[\omega_k(t-\tau)\right] \left[v\tau - \frac{2v^2}{\ell}\ \tau^2 + \frac{v^3}{\ell^2}\ \tau^3 + \frac{\phi_s}{2}(v\tau - \frac{v^2}{\ell}\ \tau^2)\right] d\tau \tag{3.41b}$$

$$AML_3(t) = \frac{P}{1+\phi_s}\int_0^t sen\left[\omega_k(t-\tau)\right]\left[\frac{3v^2}{\ell^2}\tau^2 - \frac{2v^3}{\ell^3}\tau^3 + \frac{v\phi_s}{\ell}\tau\right] d\tau \qquad (3.41c)$$

$$AML_4(t) = \frac{P}{1+\phi_s}\int_0^t sen\left[\omega_k(t-\tau)\right]\left[-\frac{v^2}{\ell}\tau^2 + \frac{v^3}{\ell^2}\tau^3 - \frac{\phi_s}{2}(v\tau - \frac{v^2}{\ell}\tau^2)\right] d\tau$$

(3.41d)

Fazendo

$$I_{1k} = \int_0^t sen\left[\omega_k\ (t-\tau)\right]d\tau = \frac{1}{\omega_k}\ (1 - \cos\ \omega_k t) \qquad (3.42a)$$

$$I_{2k} = \int_0^t \tau \cdot sen\left[\omega_k\ (t-\tau)\right]\ d\tau = \frac{1}{\omega_k}\ (t - \frac{sen\ \omega_k t}{\omega_k})$$

(3.42b)

$$I_{3k} = \int_0^t \tau^2 \cdot sen\left[\omega_k(t-\tau)\right]d\tau = \frac{1}{\omega_k}\ (t^2 - \frac{2}{\omega_k^2} + \frac{2}{\omega_k^2} \cdot \cos\ \omega_k t)$$

(3.42c)

$$I_{4k} = \int_0^t \tau^3 \cdot sen\left[\omega_k(t-\tau)\right]d\tau = \frac{1}{\omega_k}\ (t^3 - \frac{6t}{\omega_k^2} + \frac{6}{\omega_k^3} \cdot sen\ \omega_k t)$$

(3.42d)

pode-se desenvolver as equações (3.41) e introduzir as definições das equações (3.42), obtendo finalmente:

$$AML_1(t) = \frac{P}{1+\phi_s}\left[(1+\phi_s)\ I_{1k} - \frac{v}{\ell}\phi_s \cdot I_{2k} - \frac{3v^2}{\ell^2}I_{3k} + \frac{2v^3}{\ell^3}I_{4k}\right]$$

(3.43a)

$$AML_2(t) = \frac{P}{1+\phi_s}\left[(1+\frac{\phi_s}{2})\ v\ I_{2k} - (2+\frac{\phi_s}{2})\ \frac{v^2}{\ell}\ I_{3k} + \frac{v^3}{\ell^2}\ I_{4k}\right] \quad (3.43b)$$

$$AML_3(t) = \frac{P}{1+\phi_s}\left[\frac{v}{\ell}\ \phi_s\ I_{2k} + \frac{3v^2}{\ell^2}\ I_{3k} - \frac{2v^3}{\ell^3}\ I_{4k}\right] \quad (3.43c)$$

$$AML_4(t) = \frac{P}{1+\phi_s}\left[-\frac{\phi_s}{2}\ v\ I_{2k} + (-1+\frac{\phi_s}{2})\ \frac{v^2}{\ell}\ I_{3k} + \frac{v^3}{\ell^2}\ I_{4k}\right] \quad (3.43d)$$

As equações (3.43), juntamente com as equações (3.42), definem o vetor $\underset{\sim}{AML}^i(t)$. A expressão da equação (2.115) pode ser posta na forma

$$q_k = q_{ko} \cdot \cos\omega_k t + \frac{\dot{q}_{ko}}{\omega_k}\ \text{sen}\ \omega_k t + \omega_k^{-1} M_{dk}^{-1}\ \underset{\sim}{\Phi}^T \cdot \underset{\sim}{AC}_k(t) \quad (3.44)$$

onde $\underset{\sim}{\Phi}$ é a matriz modal e o vetor $\underset{\sim}{AC}_k(t)$ é obtido por montagem dos $\underset{\sim}{AML}^i(t)$. Convém ressaltar que se a carga está sobre o elemento i sua influência é apenas sobre os nós deste, sendo os demais $\underset{\sim}{AML}(t)$ nulos.

Resta determinar as condições iniciais, tendo em vista a mudança da referência dos tempos de elemento a elemento. Para o primeiro, faz-se $q_{ko} = \dot{q}_{ko} = 0$. Nos demais, as condições iniciais para i são os valores finais de q_k e $\dot{q}_k$ para $i-1$.

Derivando em relação ao tempo a equação (3.44), tem-se:

$$\dot{q}_k = -q_{ko} \cdot \omega_k \cdot \text{sen}\ \omega_k t + \dot{q}_{ko} \cdot \cos\omega_k t + \omega_k^{-1}\ M_{dk}^{-1}\ \underset{\sim}{\Phi}^T\ \frac{d}{dt}\ (\underset{\sim}{AC}_k(t)$$

Chamando

$$D_{1k} = \frac{d}{dt} I_{1k} = \text{sen } \omega_k t \tag{3.46a}$$

$$D_{2k} = \frac{d}{dt} I_{2k} = \frac{1}{\omega_k} (1 - \cos \omega_k t) \tag{3.46b}$$

$$D_{3k} = \frac{d}{dt} I_{3k} = \frac{1}{\omega_k} (2t - \frac{2}{\omega_k} \text{ sen } \omega_k t) \tag{3.46c}$$

$$D_{4k} = \frac{d}{dt} I_{4k} = \frac{1}{\omega_k} (3t^2 - \frac{6}{\omega_k^2} + \frac{6}{\omega_k^2} \cos \omega_k t) \tag{3.46d}$$

das equações (3.43) obtêm-se:

$$\frac{d}{dt} \left[AML_1(t)\right] = \frac{P}{1+\phi_s} \left[(1+\phi_s) D_{1k} - \frac{v}{\ell} \phi_s \cdot D_{2k} - \frac{3v^2}{\ell^2} \cdot D_{3k} + \frac{2v^3}{\ell^3} D_{4k}\right] \tag{3.47a}$$

$$\frac{d}{dt} \left[AML_2(t)\right] = \frac{P}{1+\phi_s} \left[(1+\frac{\phi_s}{2}) v \cdot D_{2k} - (2 + \frac{\phi_s}{2}) \frac{v^2}{\ell} D_{3k} + \frac{v^3}{\ell^2} D_{4k}\right] \tag{3.47b}$$

$$\frac{d}{dt} \left[AML_3(t)\right] = \frac{P}{1+\phi_s} \left[\frac{v}{\ell} \phi_s D_{2k} + \frac{3v^2}{\ell^2} D_{3k} - \frac{2v^3}{\ell^3} D_{4k}\right] \tag{3.47c}$$

$$\frac{d}{dt} \left[AML_4(t)\right] = \frac{P}{1+\phi_s} \left[- \frac{\phi_s}{2} v \cdot D_{2k} + (- 1 + \frac{\phi_s}{2}) \frac{v^2}{\ell} D_{3k} + \frac{v^3}{\ell^2} D_{4k}\right] \tag{3.47d}$$

As equações (3.47), juntamente com as equações (3.46), definem o vetor $\dot{\underset{\sim}{AML}}{}^i(t) = \frac{d}{dt} (\underset{\sim}{AML}^i(t))$. Por montagem desses vetores, chega-se ao vetor $\dot{\underset{\sim}{AC}}_k(t) = \frac{d}{dt} (AC_k(t))$, com o qual calcula-se a equação (3.45). É interessante observar que $\underset{\sim}{AML}(t)$ e $\dot{\underset{\sim}{AML}}(t)$ têm a mesma forma, bastando substituir de um para o ou tro I_{ik} por D_{ik} . No desenvolvimento, a força P é considerada positiva quando atua no sentido representado na Figura (3.4), isto é, sentido contrário ao do eixo orientado Oy .

Finalmente, determinadas as coordenadas nodais $\underset{\sim}{q}$, calculam-se os deslocamentos nodais pela expressão

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{\Phi}\, \underset{\sim}{q} \tag{2.105}$$

Os esforços e reações de apoio são calculados a partir do deslocamento $\underset{\sim}{U}$.

Quando a carga abandona a viga, tem-se um problema de vibrações livres não-amortecidas com condições iniciais dadas,e que é resolvido simplesmente fazendo $\underset{\sim}{A}C(t) = \underset{\sim}{0}$ na equação (3.44).

Os sistemas analisados são lineares, sendo portanto válido o princípio da superposição de efeitos. Tendo-se então um trem de cargas móveis, efetua-se o cálculo para cada uma delas e superpõem-se os deslocamentos $\underset{\sim}{U}$ (4) .

IV - APLICAÇÕES

4.1 - INTRODUÇÃO

Com base no que foi exposto no Capítulo III, desenvolveu-se um programa para cálculo automático da resposta dinâmica de vigas, com aplicação a vigas Gerber. Este programa será explicado no próximo capítulo. Apresentam-se a seguir alguns resultados obtidos.

Estudam-se inicialmente vigas simplesmente apoiadas, inércia constante ou variável, alguns resultados sendo comparados com os obtidos por Yoshida (18) e por Venâncio Filho (20). As vigas Gerber estudadas são as mesmas apresentadas por Nagaraju et alli (16), ao passo que na consideração da inércia de rotação e deformação por cisalhamento comparam-se os resultados com a solução analítica proposta por Wang et alli (30). Mostra-se ainda uma análise comparativa de quatro diferentes tipos de viga e, finalmente, apresenta-se a resposta de uma viga contínua à passagem, com diferentes velocidades, de uma simulação do trem-tipo TB-32.

Os gráficos mostrados são de duas espécies: curvas de história, ou linhas de influência, da resposta de uma determinada seção e espectros de amplificação. As primeiras relacionam a posição relativa da carga ($v \cdot t/L$, sendo v a velocidade da carga, t o tempo decorrido e L o comprimento total da viga) com "fatores de amplificação" definidos como a relação entre o valor dinâmico para determinada posição e o máximo valor estático para a seção analisada. Assim, tem-se:

FAD - fator de amplificação para deslocamento e

FAM - fator de amplificação para momento;

estas curvas são para determinada velocidade, fixada pelo parâmetro ξ, denominado "parâmetro de velocidade" e dado por

$$\xi = \frac{v \cdot T_1}{2 \cdot L} \tag{4.1}$$

onde T_1 é o período fundamental de vibração da estrutura. Os espectros de amplificação relacionam parâmetros de velocidade com os máximos fatores de amplificação obtidos em determinada seção. Define-se, assim,

MFAD - máximo fator de amplificação para deslocamento

MFAM - máximo fator de amplificação para momento.

Além dos gráficos adimensionados citados, apresentam-se alguns quadros com frequências e outros com máximos fatores de amplificação.

4.2 - VIGAS SIMPLESMENTE APOIADAS

4.2.1.- Cálculo de Frequências

Para a viga simples uniforme da Figura (4.1), apresentam-se no Quadro (4.1) os valores das duas primeiras frequências, considerando-se discretizações de 4, 5, 6, 7 e 8 elementos. Os valores exatos dessas frequências são:

$$\omega_1 = 353.106 \text{ rd/s}$$

$$\omega_2 = 1\,412.423 \text{ rd/s}$$

o que mostra ser a formulação consistente, isto é, as frequências convergem para o valor exato por valores superiores. Além disso, verifica-se que a discretização em 4 elementos dá erro de apenas 0.03% na primeira frequência, sendo aproximação excelente para os casos práticos.

Nas características da viga, A é a área da seção transversal, I_z o momento de inércia, E o módulo de elasticidade e ρ a massa específica.

ELEMENTOS	ω_1	ω_2
4	353.209	1418.143
5	353.143	1414.763
6	353.127	1413.510
7	353.116	1413.183
8	353.113	1412.760

QUADRO (4.1)

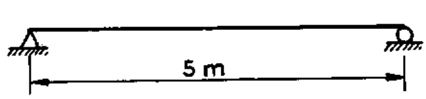


Fig.(4.1)

$A = 0.2\ m^2$

$I_z = 0.016\ m^4$

$E = 2. \times 10^6\ tf/m^2$

$\rho = .2\ t/m^3$

4.2.2 - Viga Uniforme

Analisou-se a resposta da seção S , no meio do vão da viga representada na figura (4.2), à passagem de uma carga móvel unitária. Observe-se que as cargas percorrem as vigas sempre da extremidade esquerda para a direita. Este exemplo, de caráter acadêmico, foi proposto por Yoshida (18). No Quadro (4.2), apresentam-se valores dos máximos fatores de amplificação para 5 velocidades, comparando os resultados com os obtidos por Yoshida (18), Venâncio Filho (20) e com a solução analítica (4,15). Nas figuras (4.3) e (4.4) mostra-se a resposta da seção S para deslocamento e momento, respectivamente, com ξ = 0.25, 0.5 e 1.0 .

Chamamos w_{st} o máximo deslocamento estático e M_{st} o máximo momento estático para a seção analisada.

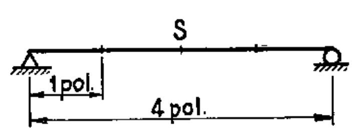


Fig. (4.2)

$E = 3. \times 10^7$ lb/pol^2

$A = 0.0625$ pol^2

$\rho = 0.001$ lb - s^2/pol^4

$I_z = 3.255 \times 10^{-4}$ pol^4

$T_1 = 8.149 \times 10^{-4}$ s

$w_{st} = 0.13654 \times 10^{-3}$ pol

$M_{st} = 1.$ lb - pol

VIGA BI-APOIADA - DESLOCAMENTO SEÇÃO S

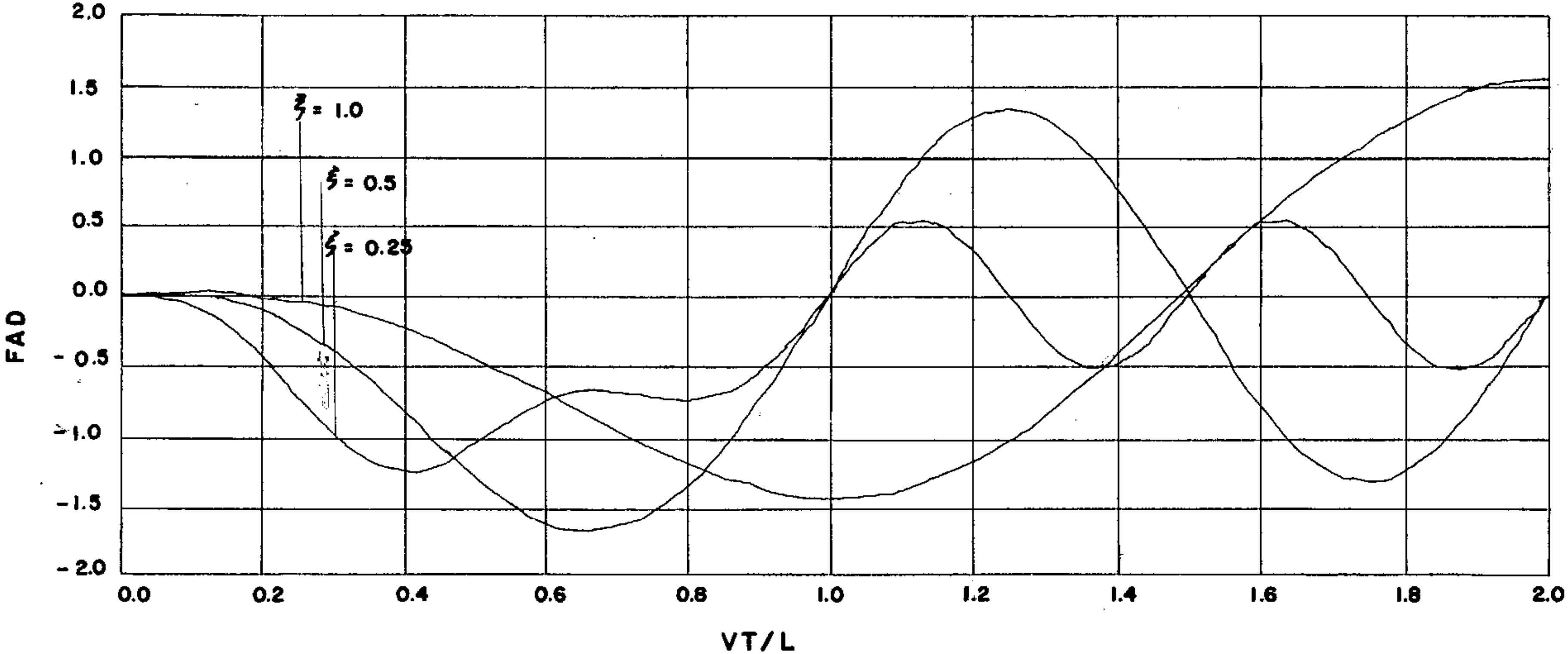


FIG. 4.3

VIGA BI-APOIADA - MOMENTO SEÇÃO S

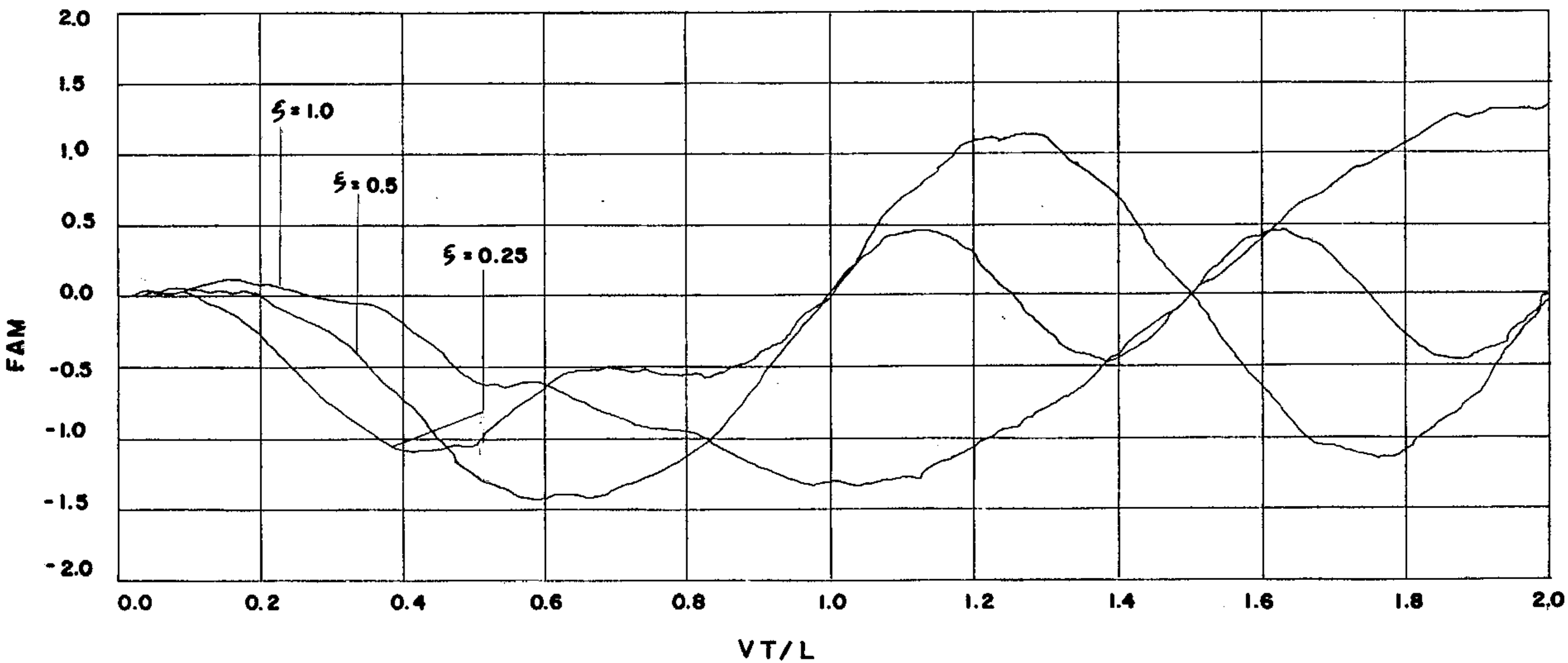


FIG. 4.4

ξ	v	M F A D				M F A M
		MIANA	YOSHIDA	VENÂNCIO	SOL. ANALÍTICA	MIANA
.0625	614	1.060	1.055	-	1.045	1.011
.125	1228	1.120	1.112	1.11	1.108	1.029
.25	2456	1.258	1.251	1.24	1.250	1.098
.5	4912	1.705	1.700	1.68	1.707	1.411
1.	9824	1.547	1.540	1.54	1.550	1.343

QUADRO (4.2)

4.2.3 - Viga de Inércia Variável

Foi estudada a resposta de uma das vigas do acesso à Ponte Presidente Costa e Silva, ligação Rio de Janeiro - Niteroi, mostrada na figura (4.5), discretizada em 20 elementos. No Quadro (4.3) apresentam-se as propriedades de cada um dos elementos. No Quadro (4.4) estão os máximos fatores de amplificação para a seção S, no meio do vão, com diferentes velocidades.

A figura (4.6) mostra o deslocamento da seção S à passagem de uma carga móvel de 10 tf , com $\xi = 0.5$.

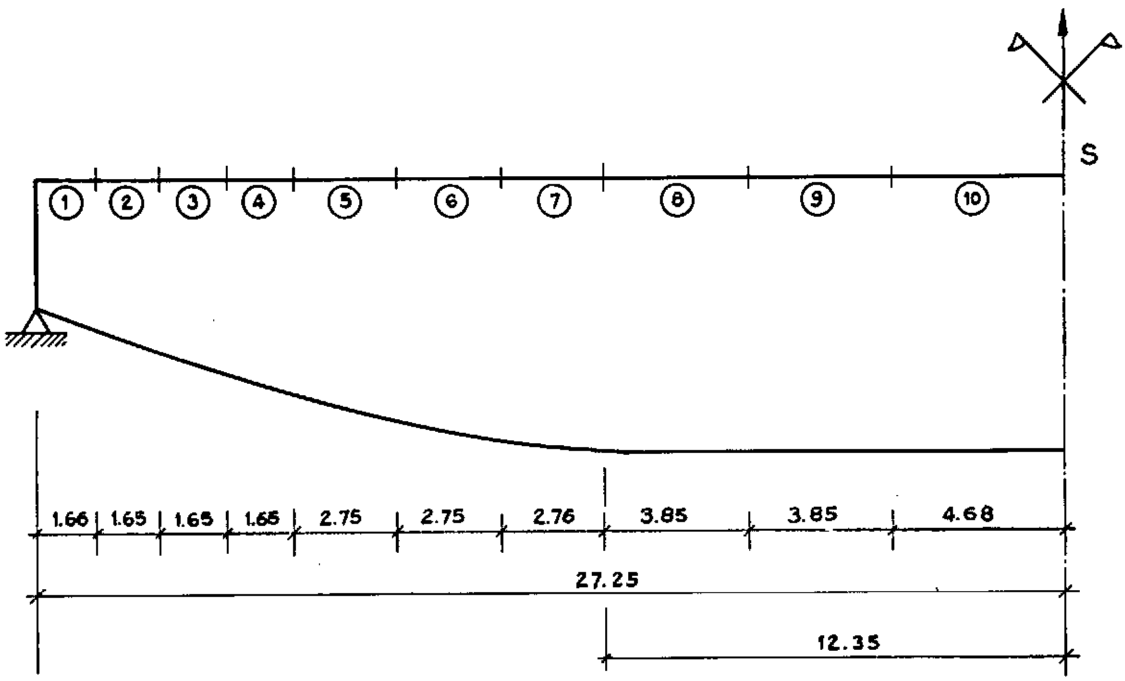

S
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
1.66
1.65
1.65
1.65
2.75
2.75
2.76
3.85
3.85
4.68
27.25
12.35

Fig. (4.5)

ELEMENTO	ℓ(m)	A(m^2)	I_z (m^4)
1	1.66	1.05970	0.19282
2	1.65	1.29330	0.35335
3	1.65	1.17970	0.49045
4	1.65	0.95650	0.61585
5	2.75	0.95735	0.81135
6	2.75	0.95815	1.00550
7	2.76	0.95865	1.10260
8	3.85	0.95880	1.16390
9	3.85	0.95880	1.16760
10	4.68	0.95880	1.16760

QUADRO (4.3)

A estrutura é simétrica, os demais elementos tendo as propriedades iguais às de seu correspondente.

$E = 3. \times 10^6$ tf/m^2

$\rho = .24$ t/m^3

$T_1 = 0.5006525$ s (sem considerar inércia de rotação)

$T_1 = 0.5011845$ s (considerando inércia de rotação)

$w_{st} = .10033 \times 10^{-1}$ m

$M_{st} = 136.250$ tf - m

ξ	V		COM INÉRCIA		SEM INÉRCIA	
	C/INÉRCIA	S/INÉRCIA	M F A D	M F A M	M F A D	M F A M
.25	54.37	54.43	1.2642	1.0760	1.2647	1.0717
.5	108.74	108.86	1.7098	1.3999	1.7105	1.4074
.75	163.11	163.29	1.7006	1.3989	1.6993	1.3971
1.	217.48	217.72	1.5750	1.3984	1.5682	1.3793

QUADRO (4.4)

As colunas referidas *com/sem inércia* referem-se à consideração ou não da inércia de rotação, respectivamente.

Observa-se que o comportamento dinâmico da viga é bastante próximo ao de uma viga uniforme, fato que pode ser explicado tendo em vista que, apesar da variação de inércia, a área da seção transversal é praticamente constante - Quadro (4.3) - logo a massa da viga também o é. Nota-se ainda que a consideração da inércia de rotação neste problema apresenta influência mínima, perfeitamente desprezível.

VIGA INÉRCIA VARIÁVEL - SEÇÃO S

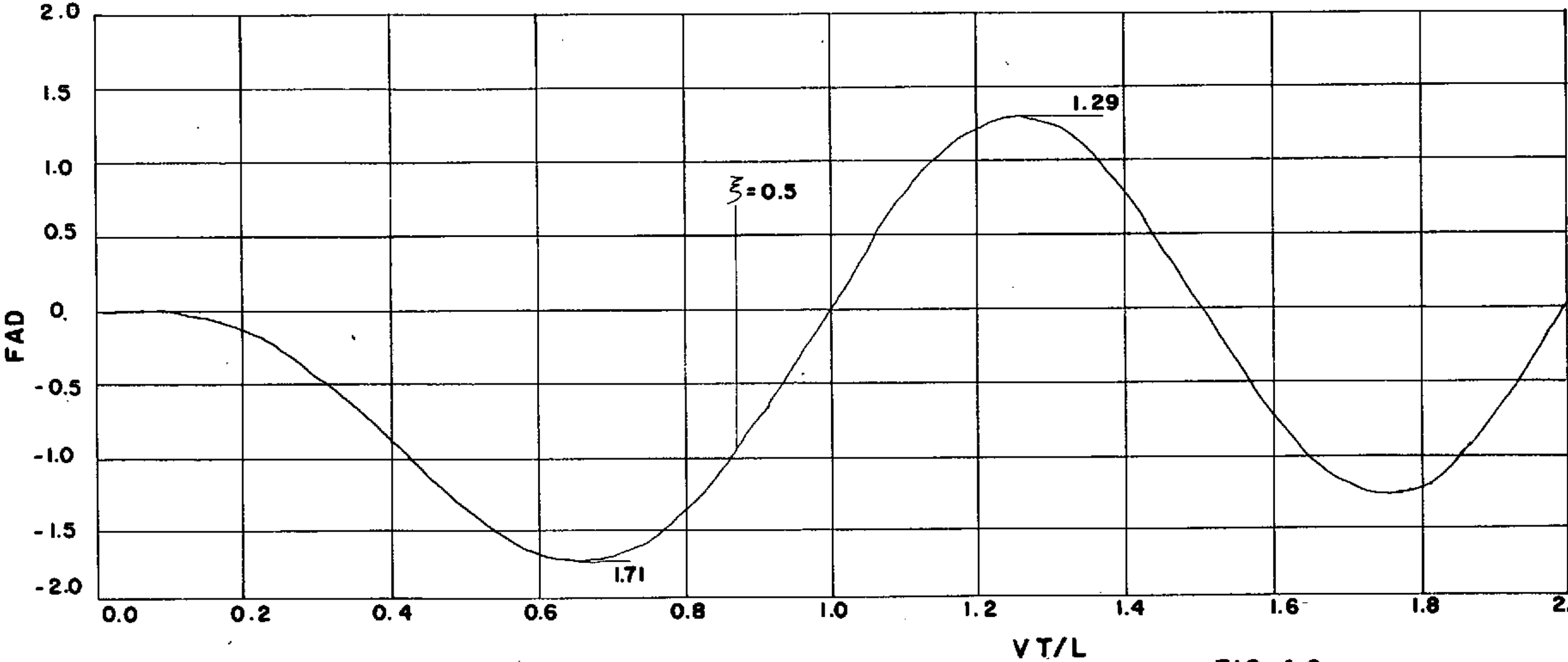


FIG. 4.6

4.3 - VIGAS GERBER

As vigas estudadas são as mesmas do trabalho de Nagaraju et alli (16), estando representadas, com a discretização em elementos finitos, na figura (4.7). São vigas Gerber simétricas, com o vão central OP suspenso. Chamando a o comprimento dos vãos MN e QR , b o dos vãos NO e PQ e c o comprimento do vão suspenso, definimos os coeficientes de aspecto pelas relações: $\alpha = a/c$ e $\beta = b/c$. As características de cada uma dessas vigas estão no Quadro (4.5), onde mostra-se ainda o valor do período fundamental T_1 encontrado na referência (16). Chamamos de C e D as seções no meio do primeiro e último vãos, respectivamente.

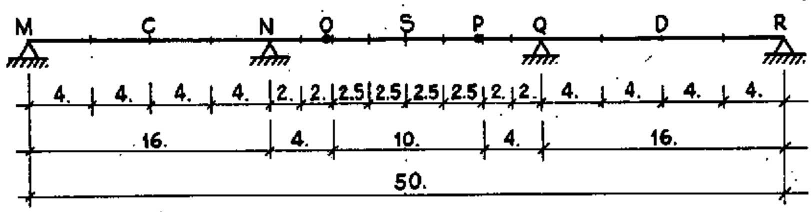
VIGA	c(m)	α	β	L(m)	A(m^2)	I_z(m^4)	ρ(t/m^3)	T_1(s)	
								MIANA	NAGARAJU
I	10.0	1.6	0.4	50.00	2.283	0.761	.2435	0.1312	0.130
II	11.4	1.6	0.1	50.16	2.283	0.761	.2435	0.1299	0.130
III	40.0	0.6	0.1	96.00	4.375	2.277	.216	0.4868	0.487
IV	28.0	1.0	0.2	95.20	4.055	1.337	.216	0.4158	0.415

$E = 2. \times 10^6$ tf/m^2 - para todas as vigas

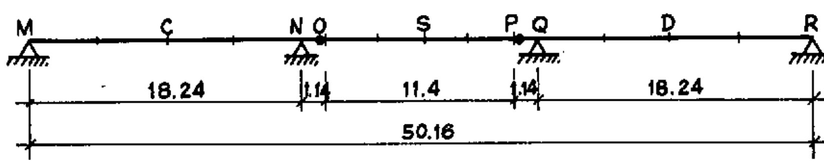
QUADRO (4.5)

Na figura (4.8) estão representadas as curvas de história para o deslocamento da seção D da viga I , com $\xi = 0.09$, considerando-se na análise 1, 3, 5 e 6 modos de vibração. Como se pode observar, a curva para 3 modos já está praticamente coincidente com a para 5 modos, sendo que a curva considerando-se 6 modos

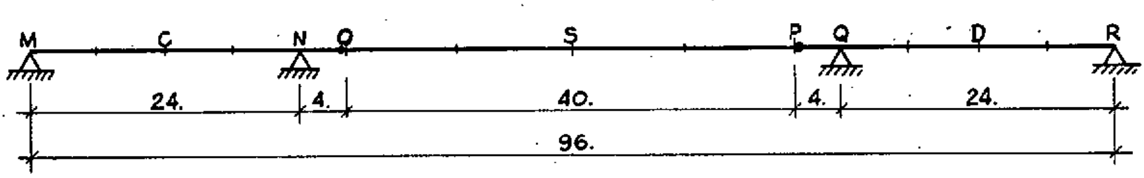
VIGA I –



VIGA II –



VIGA III –



VIGA IV –

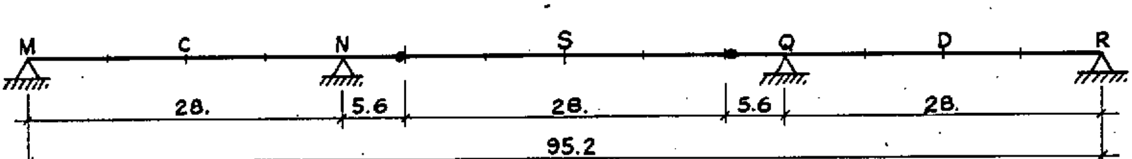


Fig. (4.7)

VIGA I - DESLOCAMENTO SEÇÃO D - INFLUENCIA DOS MODOS

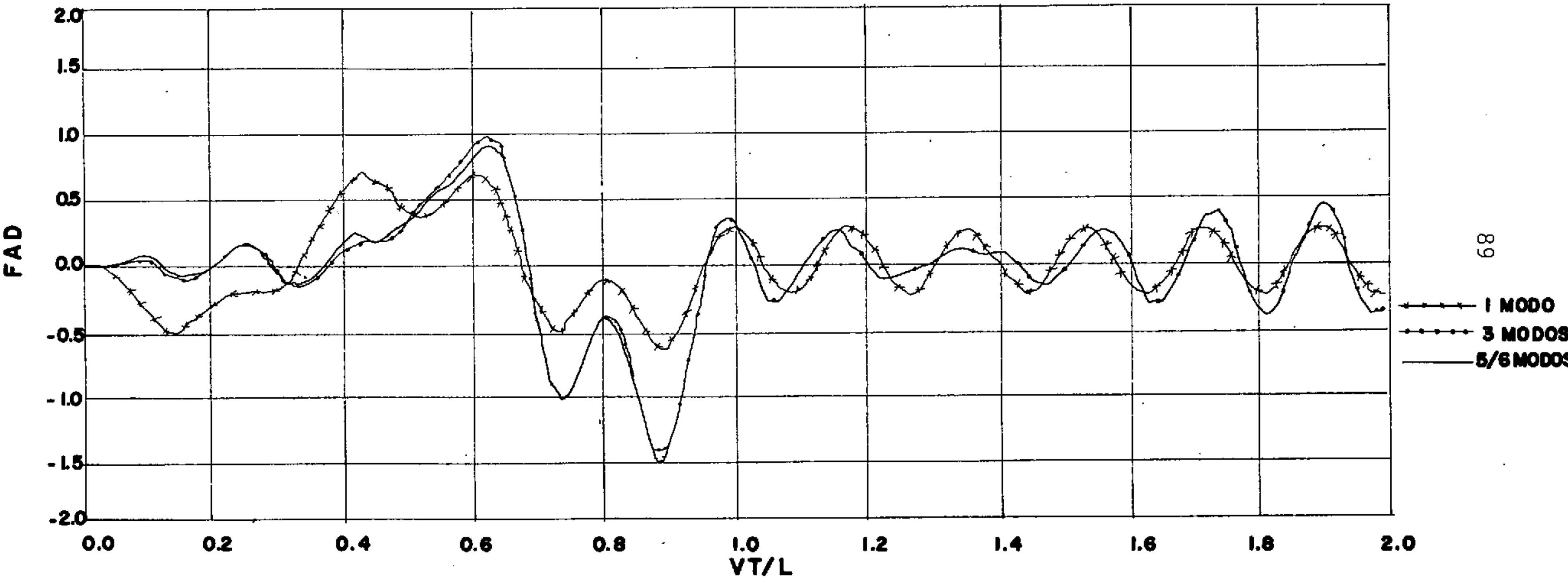


FIG. 4.8

não é distinguível na precisão do gráfico. Isto confirma que é necessário considerar-se apenas poucos modos de vibração na análise.

O Quadro (4.6) apresenta valores dos máximos fatores de amplificação para diferentes parâmetros de velocidade nas seções C e D das vigas estudadas, sob a ação de uma carga de 1 tf. É interessante observar que, normalmente, maiores resultados são encontrados para as seções D, no meio do último tramo. Observe-se ainda que os máximos valores obtidos são, em geral, para ξ entre 0.25 e 0.5. É conveniente assinalar que alguns valores da velocidade v são excessivos se comparados com casos reais.

A resposta dinâmica da seção C das vigas I, II, III e IV está apresentada nos gráficos das figuras (4.9) a (4.16). Para a viga I, $\xi = 0.045$ ($v = 34.30$ m/s) e as curvas para deslocamento e momento são, respectivamente, as figuras (4.9) e (4.10). Para a viga II, $\xi = 0.05$ ($v = 38.62$ m/s) e as curvas são as figuras (4.11) e (4.12), na mesma ordem. Para a viga III, $\xi = 0.09$ ($v = 35.50$ m/s) e as curvas são as figuras (4.13) e (4.14). Finalmente, para a viga IV, toma-se $\xi = 0.08$ ($v = 36.63$ m/s), sendo as curvas correspondentes as figuras (4.15) e (4.16). Quando a carga ultrapassa a rótula P, continuam havendo oscilações na seção C de níveis significantes, exceto para a viga III, o que pode ser explicado tendo em vista os pequenos valores de α e β para esta viga. Para as velocidades consideradas, é interessante observar que o máximo valor dinâmico ocorre quando a carga está próxima da seção analisada. O máximo valor negativo, nestes casos, ocorre quando a carga está próxima à primeira rótula (seção O).

As figuras (4.17) e (4.18) são os espectros de amplificação para o deslocamento das seções O e P, respectivamente, para a viga III. Os valores de ξ variam de 0.03 a 0.17. Verifica-se que a seção P sofre maiores deflexões.

ξ	v	SEÇÃO C		SEÇÃO D	
		M F A D	M F A M	M F A D	M F A M
VIGA I - $w_{st} = .56067 \times 10^{-4}$, $M_{st} = 4.$					
.05	38.12	1.1040	1.0556	1.2431	1.0790
.10	76.23	1.2920	1.1913	1.5227	1.1497
.15	114.35	1.4888	1.2418	1.7451	1.4956
.25	190.58	2.7801	2.2724	4.1507	3.3823
.50	381.16	2.1681	2.0790	1.2838	1.2398
ξ	VIGA II - $w_{st} = .83065 \times 10^{-4}$, $M_{st} = 4.56$				
.05	38.62	1.1446	1.1134	1.1642	1.0772
.10	77.23	1.3247	1.2148	1.3111	1.1691
.15	115.85	1.6221	1.4309	1.6729	1.5476
.25	193.08	1.9173	1.6896	2.1207	1.8803
.50	386.16	1.4508	1.3333	1.3166	1.2527
ξ	VIGA III - $w_{st} = .63241 \times 10^{-4}$, $M_{st} = 6.$				
.05	19.72	1.0189	0.9419	1.0908	0.9598
.10	39.44	1.1517	1.0888	1.1268	0.9295
.15	59.17	1.1030	0.9824	1.2821	1.0240
.25	98.61	1.4360	1.3354	1.9440	1.6227
.50	197.22	3.7711	3.1097	3.9240	3.2531
.75	295.84	2.5113	2.2142	2.5725	2.2080
ξ	VIGA IV - $w_{st} = .17103 \times 10^{-3}$, $M_{st} = 7.$				
.05	22.90	1.0511	1.0201	1.2208	1.1505
.10	45.79	1.1872	1.0779	1.0177	0.9801
.15	68.69	1.4304	1.3149	1.7909	1.5508
.25	114.48	2.8993	2.3137	4.0765	3.4539
.50	228.96	1.5042	1.5666	1.6139	1.5896
.75	343.44	1.1586	1.3468	1.0788	0.9005

QUADRO (4.6)

VIGA I - DESLOCAMENTO SEÇÃO C

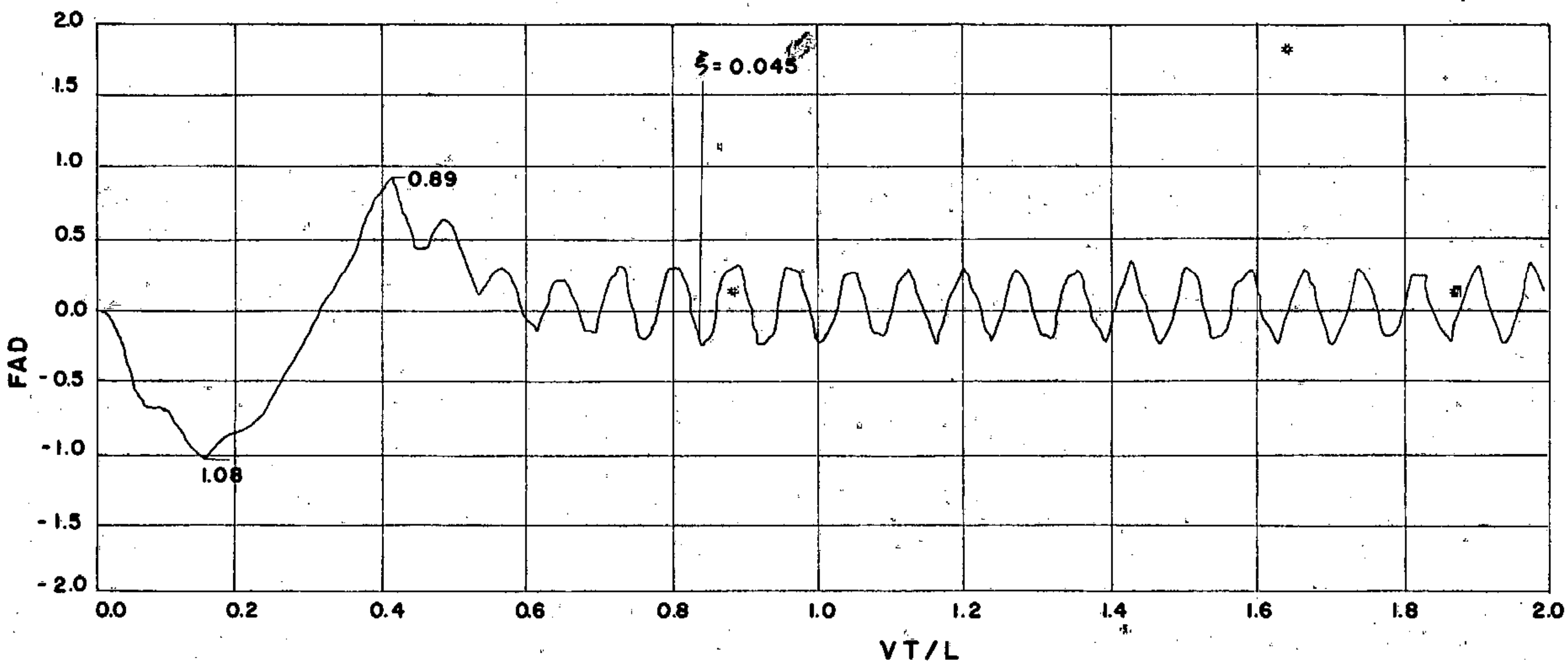


FIG. 4.9

VIGA I - MOMENTO SEÇÃO C

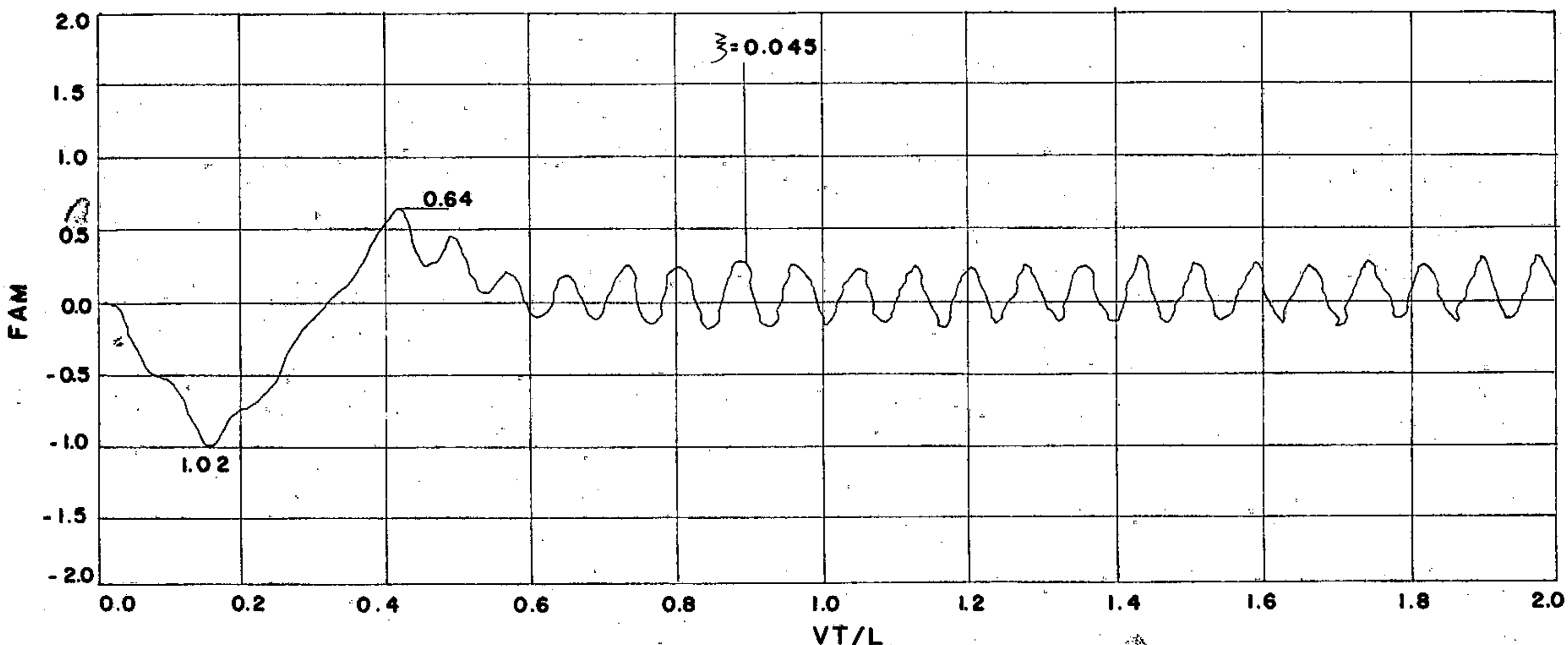


FIG. 4.10

VIGA II - DESLOCAMENTO SEÇÃO C

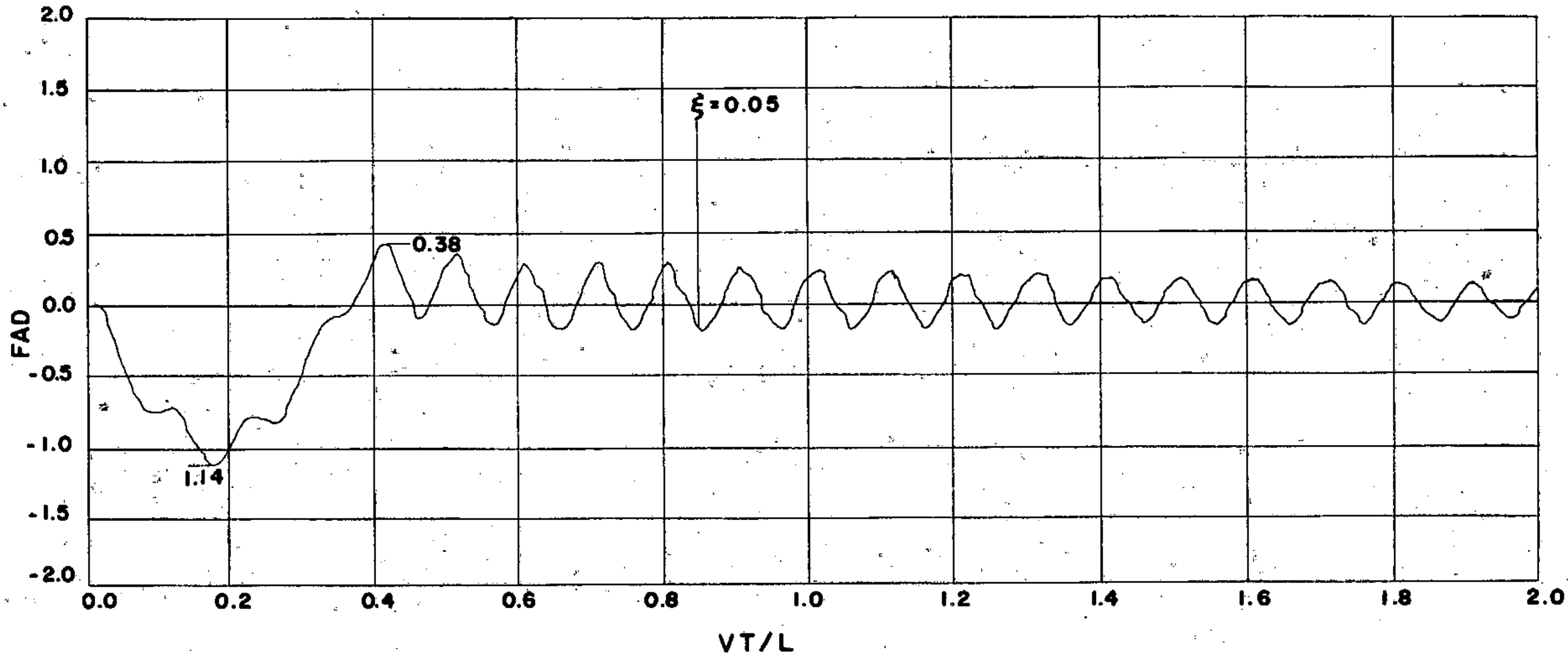


FIG. 4.11

VIGA II MOMENTO SEÇÃO C

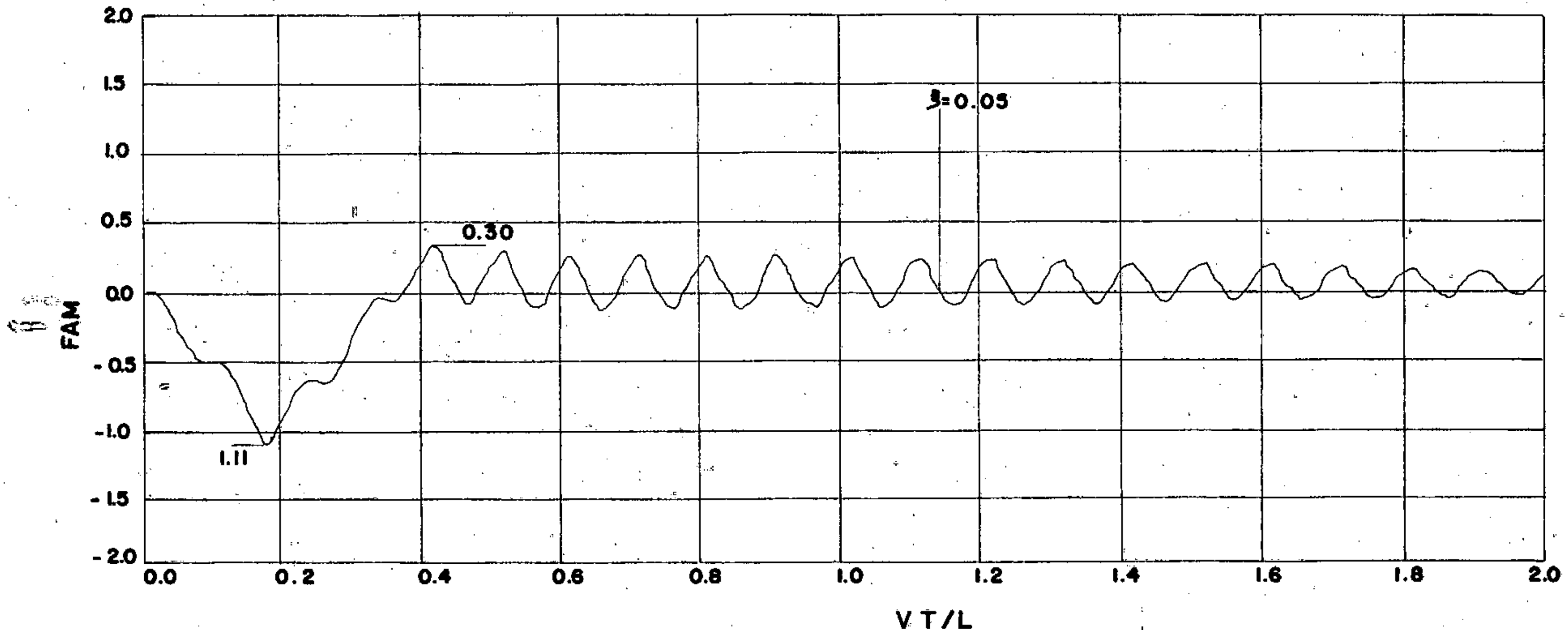


FIG. 4.12

VIGA III - DESLOCAMENTO SEÇÃO C

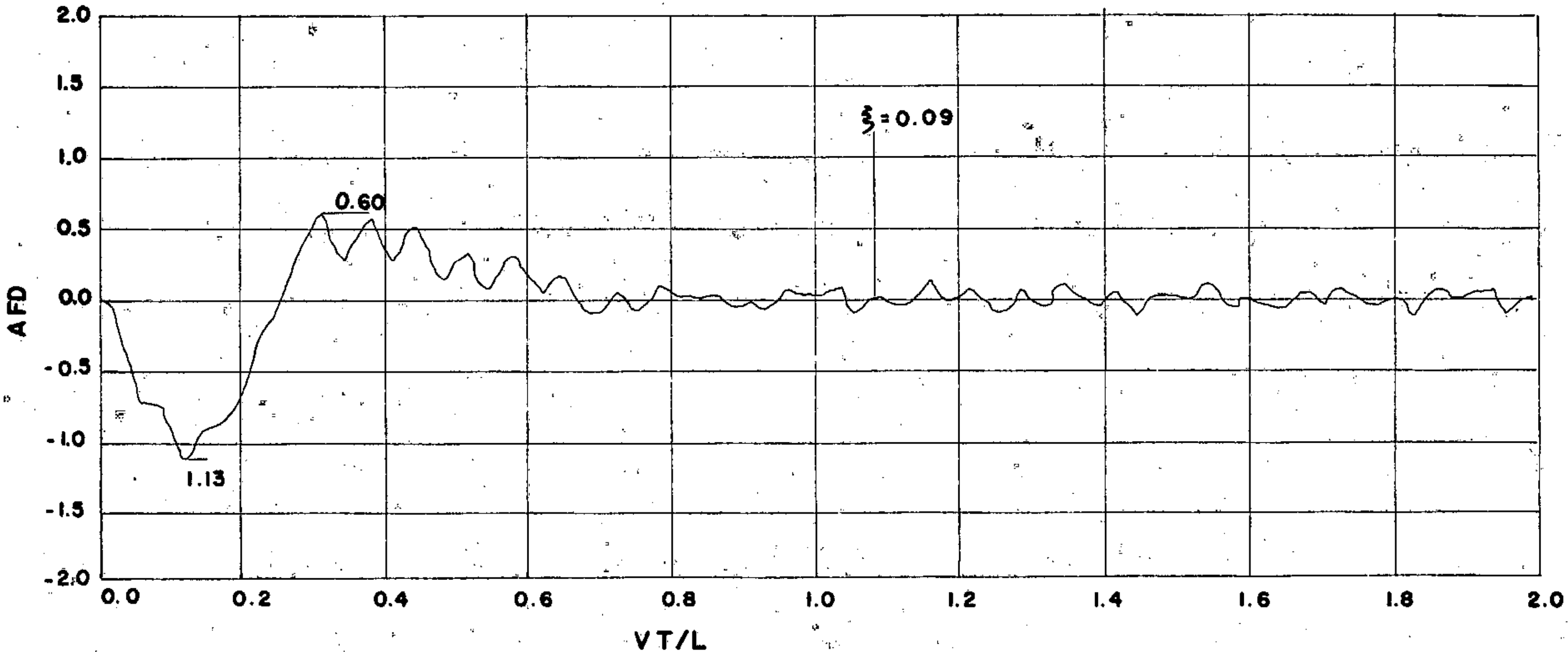


FIG. 4.13

VIGA III — MOMENTO SEÇÃO C

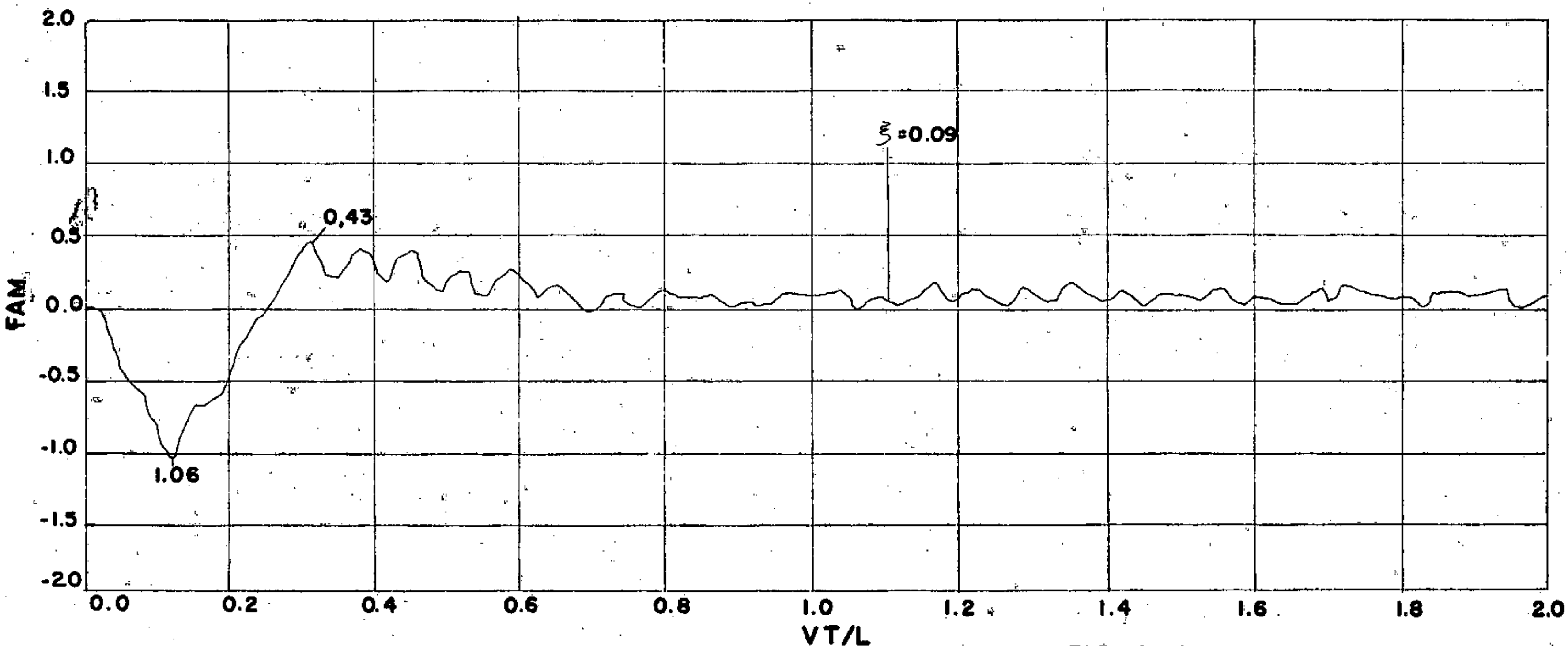


FIG. 4.14

VIGA IV - DESLOCAMENTO SEÇÃO C

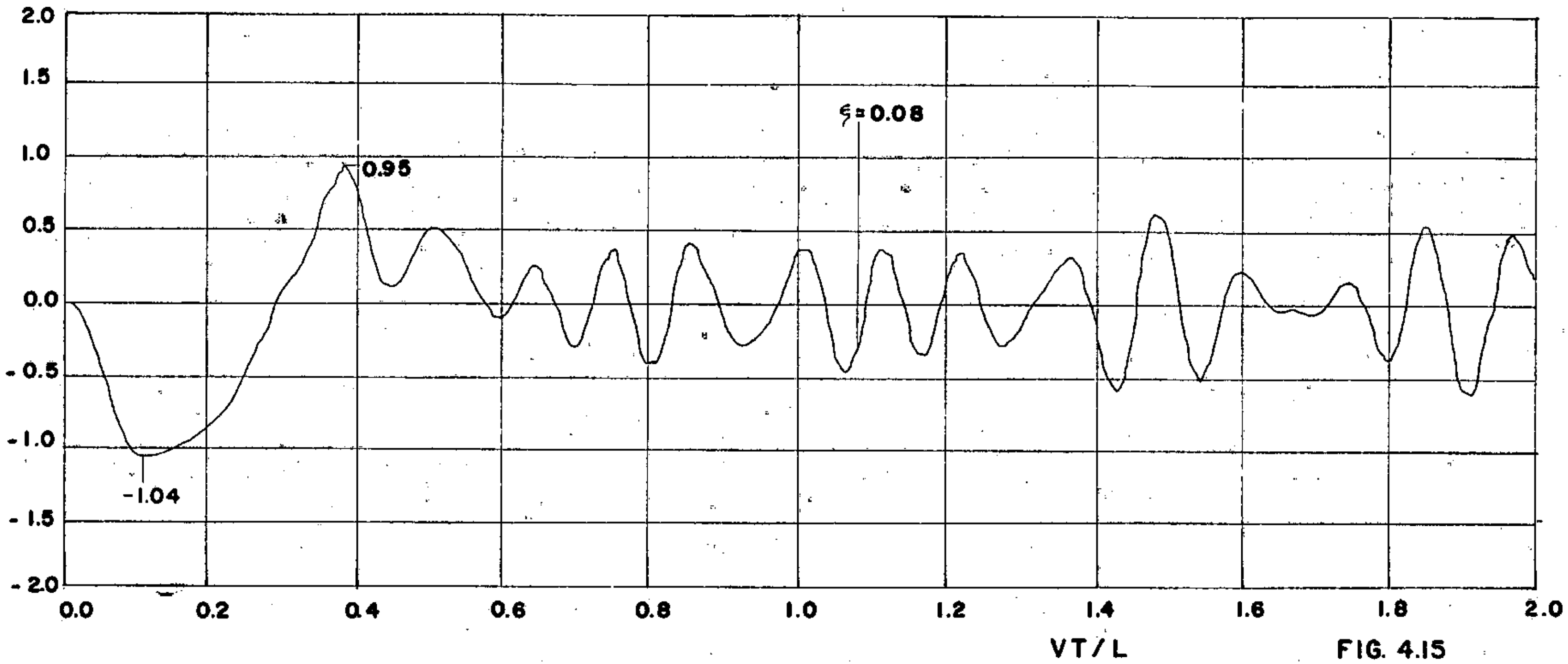


FIG. 4.15

VIGA IV - MOMENTO SEÇÃO C

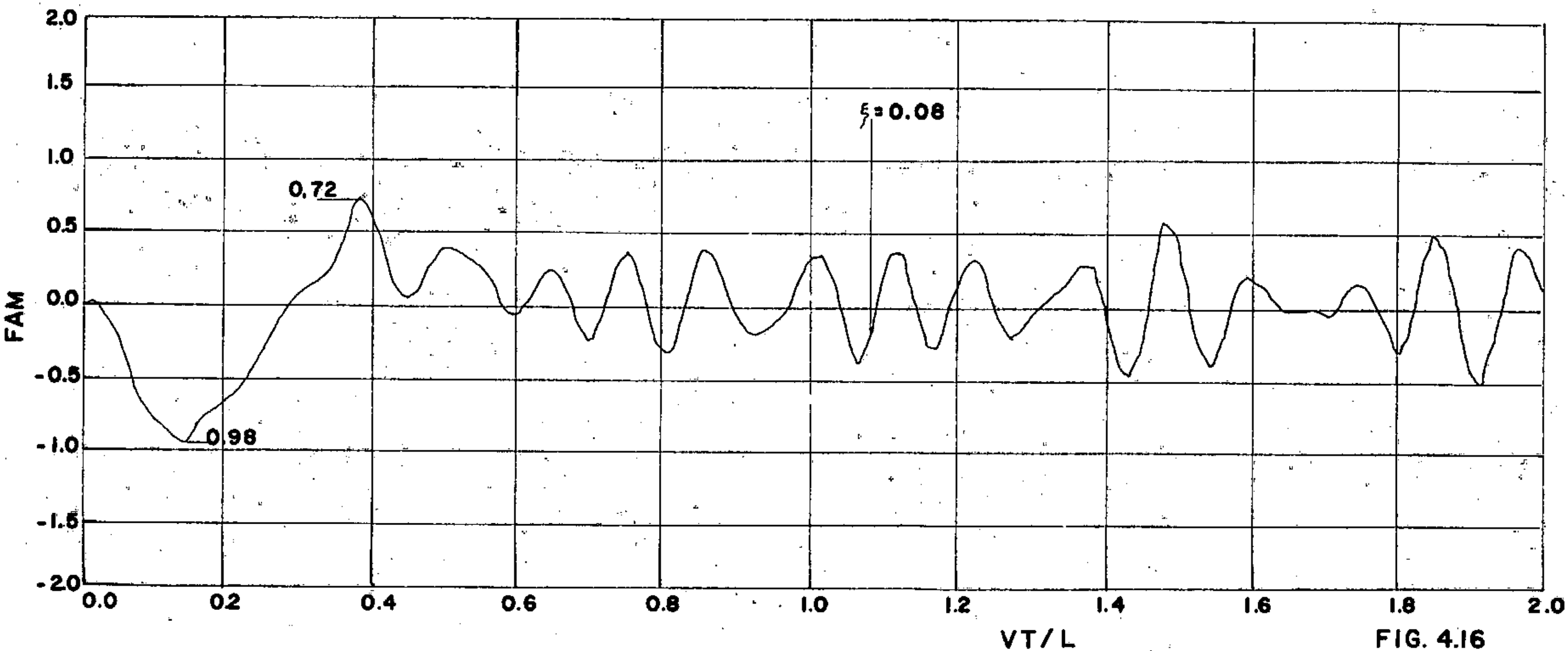


FIG. 4.16

VIGA III ESPECTRO DE AMPLIFICAÇÃO - SEÇÃO O

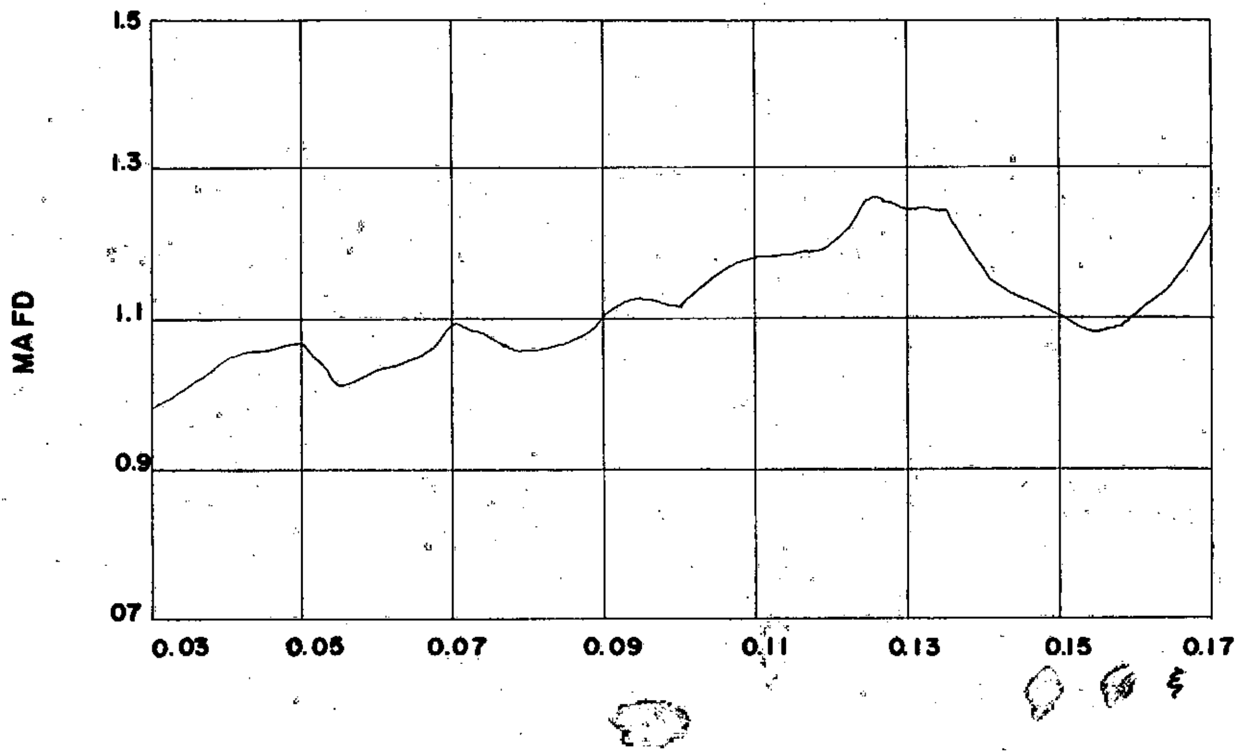


FIG. 4. 17

VIGA III ESPECTRO DE AMPLIFICAÇÃO - SEÇÃO P

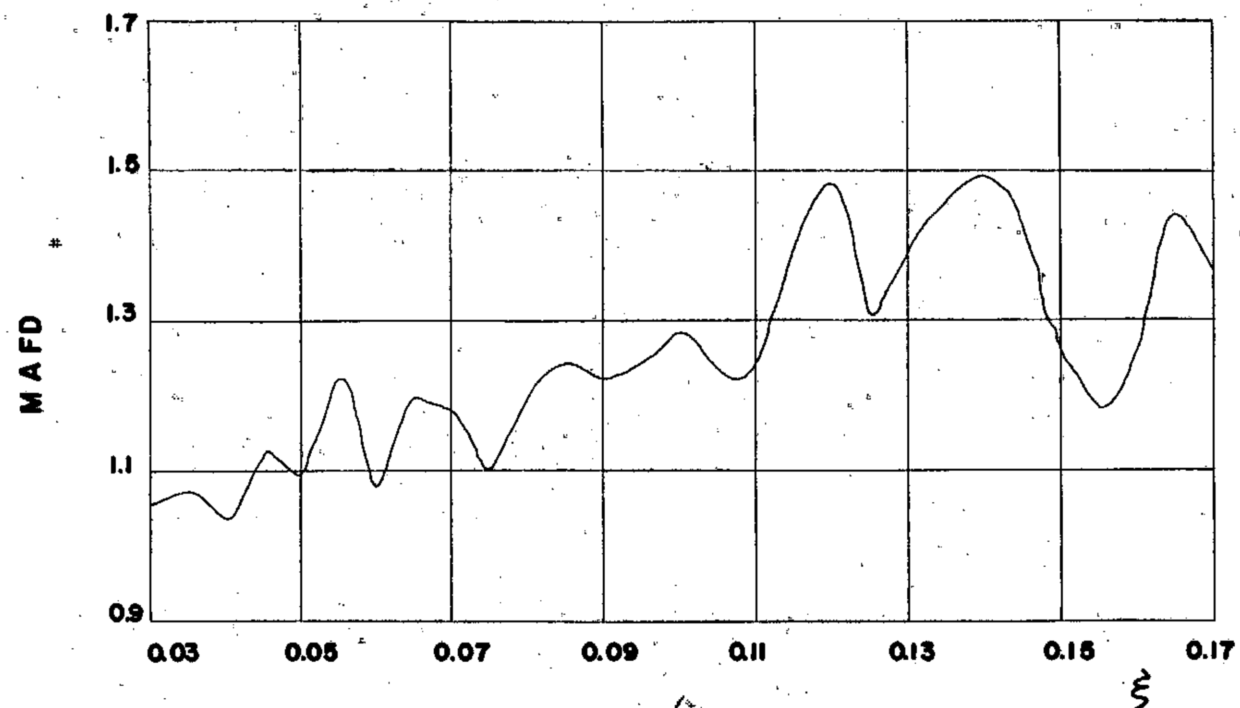


FIG. 4.18

Wang et alli (30) apresenta a solução analítica para o estudo de vibrações livres de vigas Gerber, considerando a influência da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento. Estudam-se aqui duas vigas, mostradas na figura (4.19).

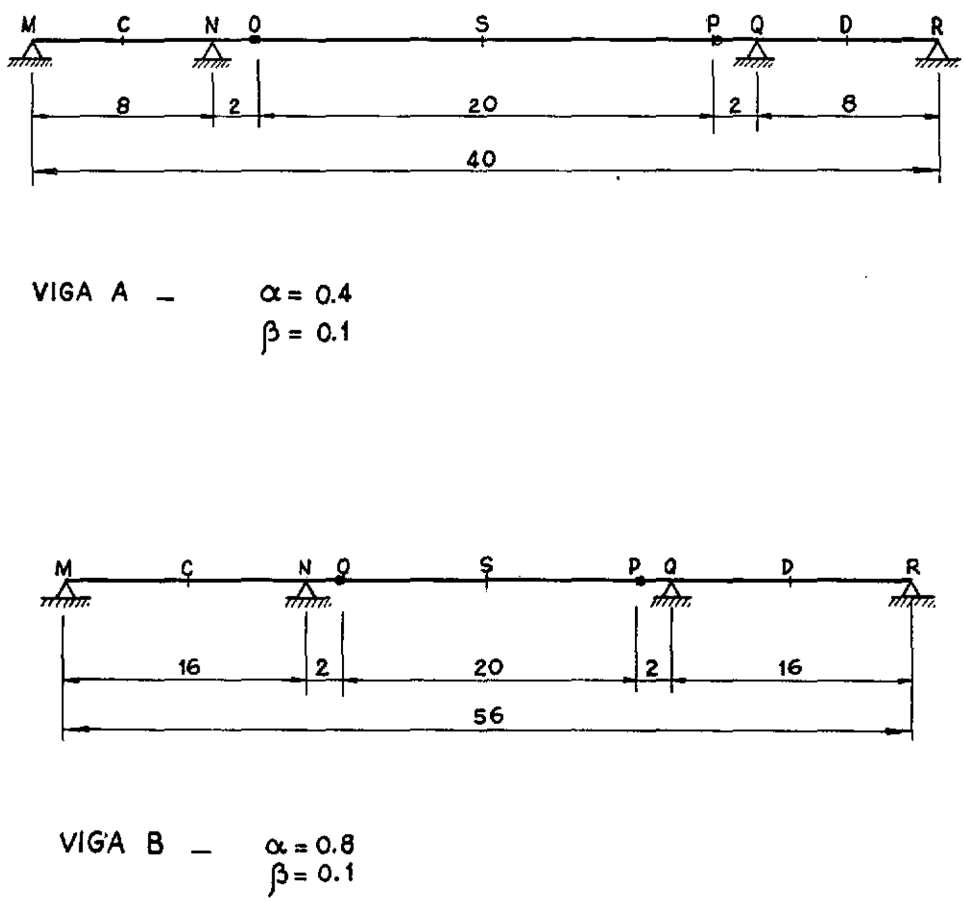


Fig. (4.19)

Estas vigas têm as seguintes propriedades físicas:

$$E = 2.10645 \times 10^7 \ tf/m^2$$

$$G = 0.84258 \times 10^7 \ tf/m^2$$

$$\gamma = 0.667$$

$$\rho = 0.245 \ t/m^3$$

No Quadro (4.7) estão comparados os resultados obtidos com os dados nos ábacos da referência acima, até a quarta frequência. O parâmetro r é dado por:

$$r^2 = \frac{I_z}{A \cdot c^2}$$

sendo que $r = 0.0$ corresponde ao caso no qual não se leva em conta os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cortante.

Os valores do quadro são parâmetros de frequência (p), definidos como:

$$p = \omega \cdot c^2 \quad \frac{\rho A}{E \cdot I_z}$$

onde ω é a frequência circular e c é o comprimento do vão suspenso ($c = 20$ m para as vigas analisadas).

Observe-se que para as vigas analisadas existe uma grande influência dos efeitos referidos, o que é natural tendo em vista a grande altura das vigas em relação ao seu comprimento.

VIGA	ω	r = 0.0		r = 0.06		r = 0.10	
		WANG	MIANA	WANG	MIANA	WANG	MIANA
A	1ª	9.55	9.55	8.56	8.67	7.49	7.59
	2ª	33.30	33.36	25.20	26.10	18.80	19.95
	3ª	49.40	48.54	36.47	37.97	26.80	29.03
	4ª	59.40	58.15	42.35	43.61	31.30	32.98
B	1ª	9.15	9.17	8.38	8.41	7.33	7.45
	2ª	14.80	14.74	13.00	13.33	11.40	11.67
	3ª	15.59	15.76	13.53	14.04	11.47	12.12
	4ª	35.59	35.76	26.18	27.34	19.41	20.71

QUADRO (4.7)

Para a viga A, mostra-se na figura (4.20) as linhas de influência do deslocamento da seção D, nos casos de $r = 0.0$ (sem considerar os efeitos de inércia de rotação e deformação por cisalhamento) e de $r = 0.06$. As curvas dinâmicas são para carga móvel com $\xi = 0.05$, o que corresponde às velocidades $v = 169.19$ m/s e $v = 153.55$ m/s, respectivamente.

Para esta viga, nas velocidades estudadas, verifica-se atingir valores pequenos a resposta dinâmica quando comparada com a estática, porém havendo uma diferença sensível entre as curvas para $r = 0.0$ e $r = 0.06$ quando a carga está próxima à seção D.

VIGA GERBER - DESLOCAMENTO SEÇÃO D - EFEITO DA INÉRCIA DE ROTAÇÃO E DEF. POR CISALHAMENTO

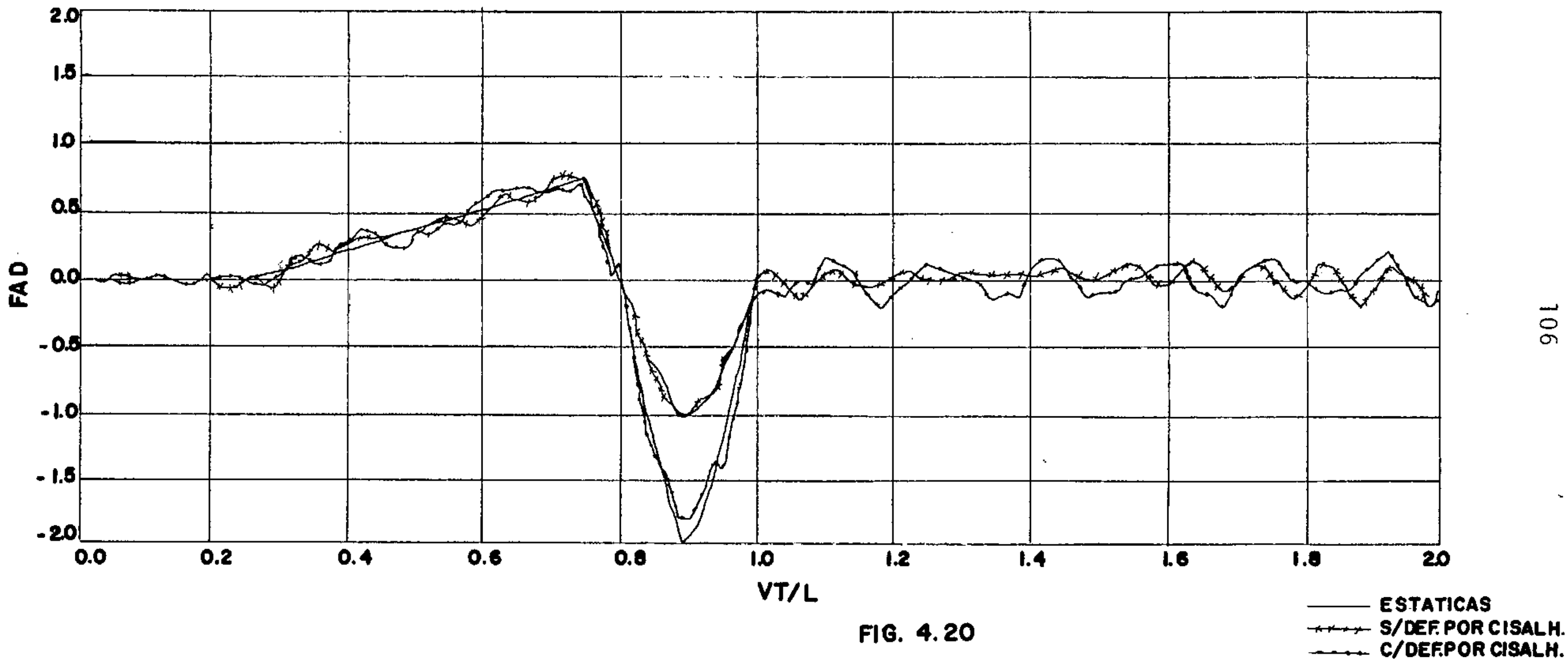


FIG. 4.20

4.4 - COMPARAÇÃO DE VIGAS

Faz-se o estudo de quatro tipos de vigas, representadas na figura (4.21) :

a) viga bi-apoiada

b) viga contínua de três vãos

c) viga Gerber com liberações no vão central

d) viga Gerber com liberações nos vãos laterais

As vigas são uniformes e possuem as seguintes características:

$$A = 2.4 \ m^2$$
$$I_z = 0.8 \ m^4$$
$$E = 2 \times 10^6 \ tf/m^2$$
$$\rho = 0.24 \ t/m^3$$

A seguir mostram-se os valores do período fundamental e os máximos valores estáticos para a ação de uma carga unitária em cada uma das vigas:

a) Viga bi-apoiada:

$$T_1 = 0.224426 \ s$$
$$w_{st} = 0.18545 \times 10^{-3} \ m$$
$$M_{st} = 6.06 \ tf/m$$

b) Viga contínua:

$$T_1 = 0.143651 \ s$$
$$w_{st} = 0.81136 \times 10^{-4} \ m$$
$$M_{st} = 3.7875 \ tf/m$$

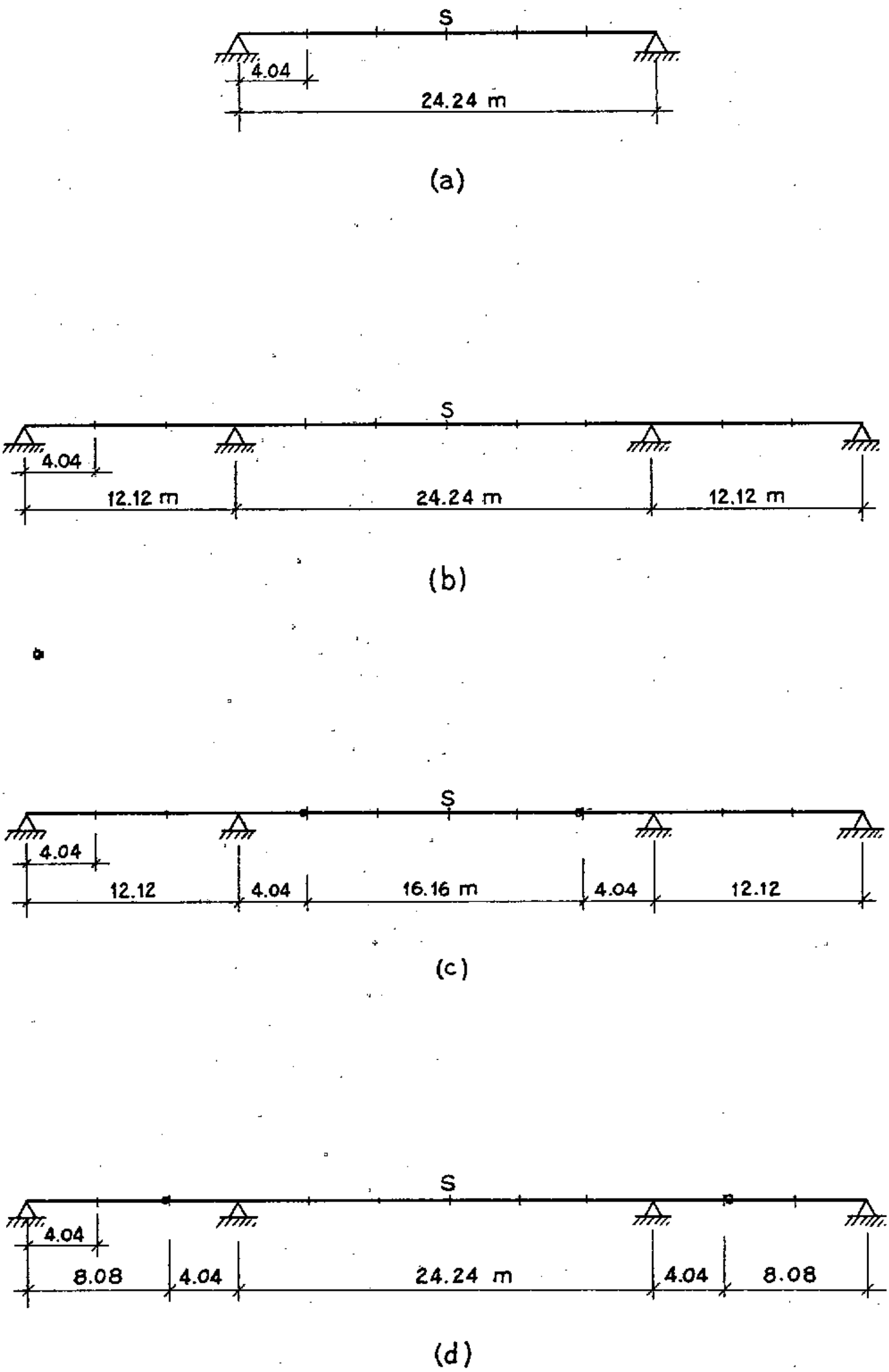

S
4.04
24.24 m
(a)
S
4.04
12.12 m
24.24 m
12.12 m
(b)
S
4.04
12.12
4.04
16.16 m
4.04
12.12
(c)
S
4.04
8.08
4.04
24.24 m
4.04
8.08
(d)

Fig.(4.21)

c) Viga Gerber com liberações no vão central:

$$T_1 = 0.144476 \text{ s}$$
$$w_{st} = 0.82424 \times 10^{-4} \text{ m}$$
$$M_{st} = 4.04 \text{ tf/m}$$

d) Viga Gerber com liberações nos vãos laterais:

$$T_1 = 0.249894$$
$$w_{st} = 0.18545 \times 10^{-3} \text{ m}$$
$$M_{st} = 6.06 \text{ tf/m}$$

As figuras (4.22) e (4.23) são os espectros de amplificação das vigas para deslocamento e momento na seção S, respectivamente (a seção S é o ponto central de cada uma das vigas). O parâmetro de velocidade ξ varia de 0.05 a 0.50. As figuras mostram ser as vigas Gerber as que sofrem maior influência da ação dinâmica da cargas móveis. Esta maior influência é mais notável nas velocidades mais altas.

4.5 - RESPOSTA À PASSAGEM DE UM TREM DE CARGAS

Considera-se agora a viga da figura (4.24), com um comprimento total de 100 m e com as seguintes características:

$$A = 3.36 \text{ m}^2$$
$$I_z = 2.1952 \text{ m}^4$$
$$E = 2. \times 10^6 \text{ tf/m}^2$$
$$\rho = 0.245 \text{ t/m}^3$$
$$T_1 = 0.332837 \text{ s}$$

São analisadas as seções C (meio do primeiro vão)

ESPECTRO DE AMPLIFICAÇÃO - DESLOCAMENTO SEÇÃO S

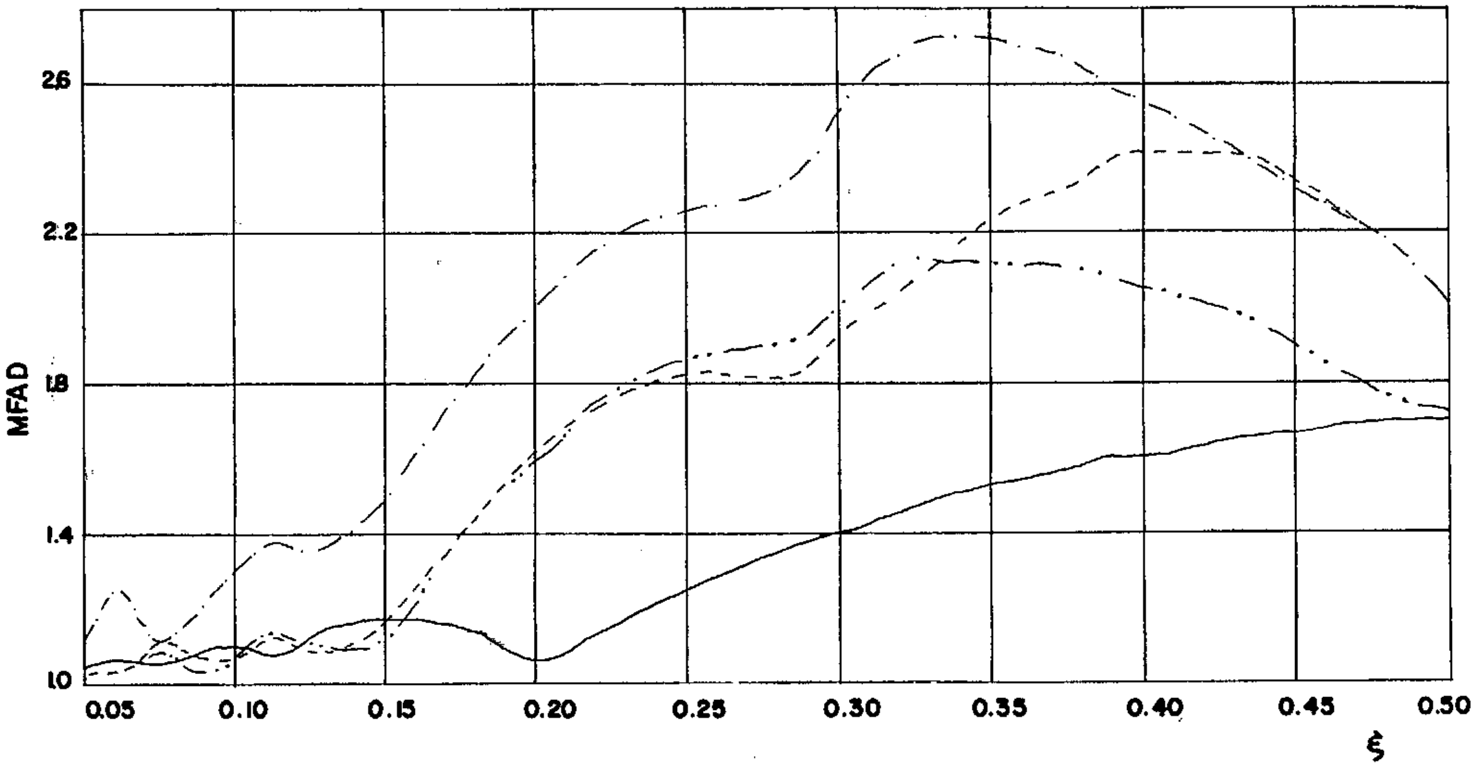


FIG. 4.22

BI-APOIADA
GERBER - VÃO LATERAL
GERBER - VÃO CENTRAL
CONTÍNUA

ESPECTRO DE AMPLIFICAÇÃO - MOMENTO SEÇÃO S

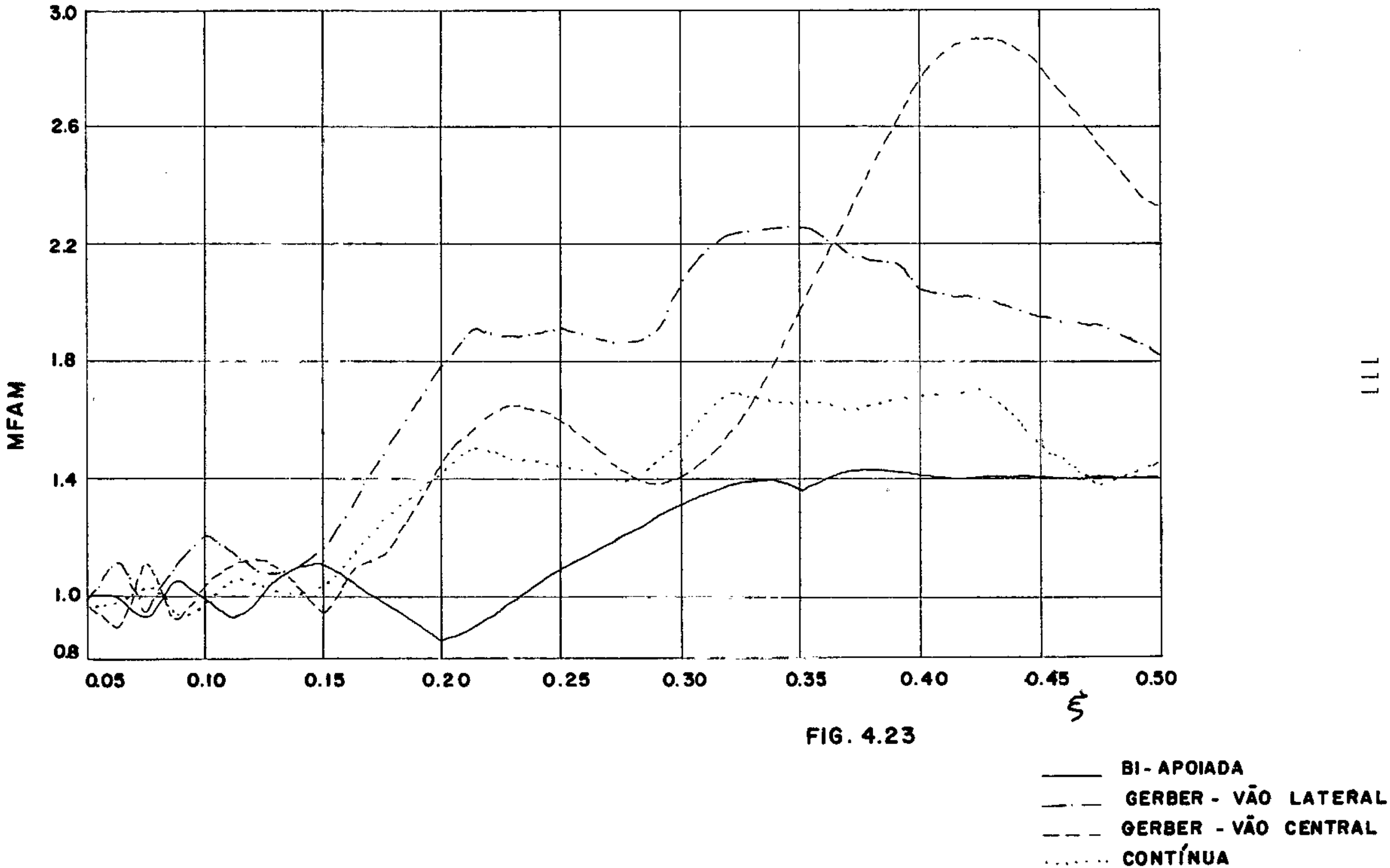


FIG. 4.23

e S (meio do vão central). Considera-se uma simulação do trem-tipo TB-32, compreendendo 18 cargas concentradas, que está representado na figura (4.25).

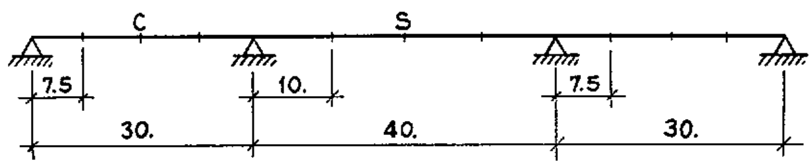


Fig.(4.24)

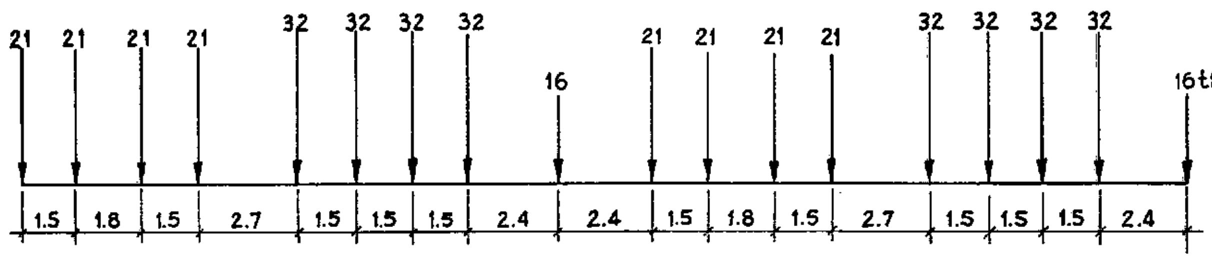


Fig.(4.25)

Os máximos valores estáticos encontrados são os seguintes:

- Seção C

Carga unitária - $w_{st} = 0.94580 \times 10^{-4}$ m

$M_{st} = 6.1875$ tf-m

TB-32 - $w_{st} = 0.23889 \times 10^{-1}$ m

$M_{st} = 1211.977442$ tf-m

- Seção S

Carga unitária - w_{st} = 0.15185 x 10^{-3} m

M_{st} = 6.666667 tf-m

TB-32 - w_{st} = 0.47568 x 10^{-1} m

M_{st} = 1562.8152 tf-m

Consideram-se três parâmetros de velocidade ξ = 0.046, 0.092 e 0.14, correspondendo aproximadamente a velocidades de 100, 200 e 300 km/h. Os Quadros (4.8) e (4.9) mostram os valores máximos dos fatores de amplificação nas seções C e S, respectivamente.

ξ	CARGA UNITÁRIA		TB-32	
	M F A D	M F A M	M F A D	M F A M
.046	1.0650	1.0046	1.0174	1.0168
.092	1.1010	1.0233	1.0167	1.0257
.14	1.2700	1.1613	1.1094	1.1114

QUADRO (4.8)

ξ	CARGA UNITÁRIA		TB-32	
	M F A D	M F A M	M F A D	M F A M
.046	1.0576	1.0304	1.0002	1.0180
.092	1.0208	0.9020	1.1073	1.1033
.14	1.0616	0.9904	1.1720	1.1628

QUADRO (4.9)

A figura (4.26), mostra o deslocamento da Seção C para $\xi = 0.0$ e $\xi = 0.046$, sendo a primeira, evidentemente, a linha de influência estática. A figura (4.27) é a curva de história para o deslocamento desta mesma seção, com $\xi = 0.092$ e $\xi = 0.14$. Finalmente, as figuras (4.28) e (4.29) dão o momento em C para as mesmas velocidades.

VIGA CONTÍNUA - DESLOCAMENTO SEÇÃO C - TB-32

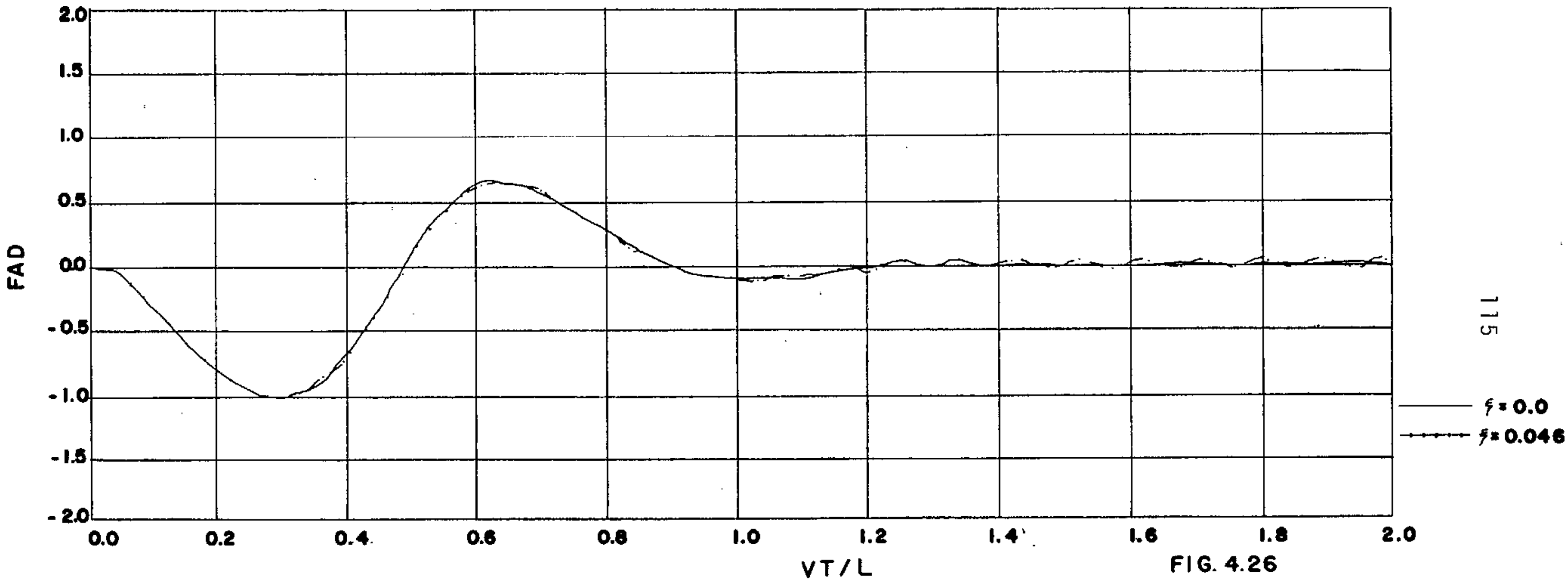


FIG. 4.26

VIGA CONTÍNUA - DESLOCAMENTO SEÇÃO C - TB-32

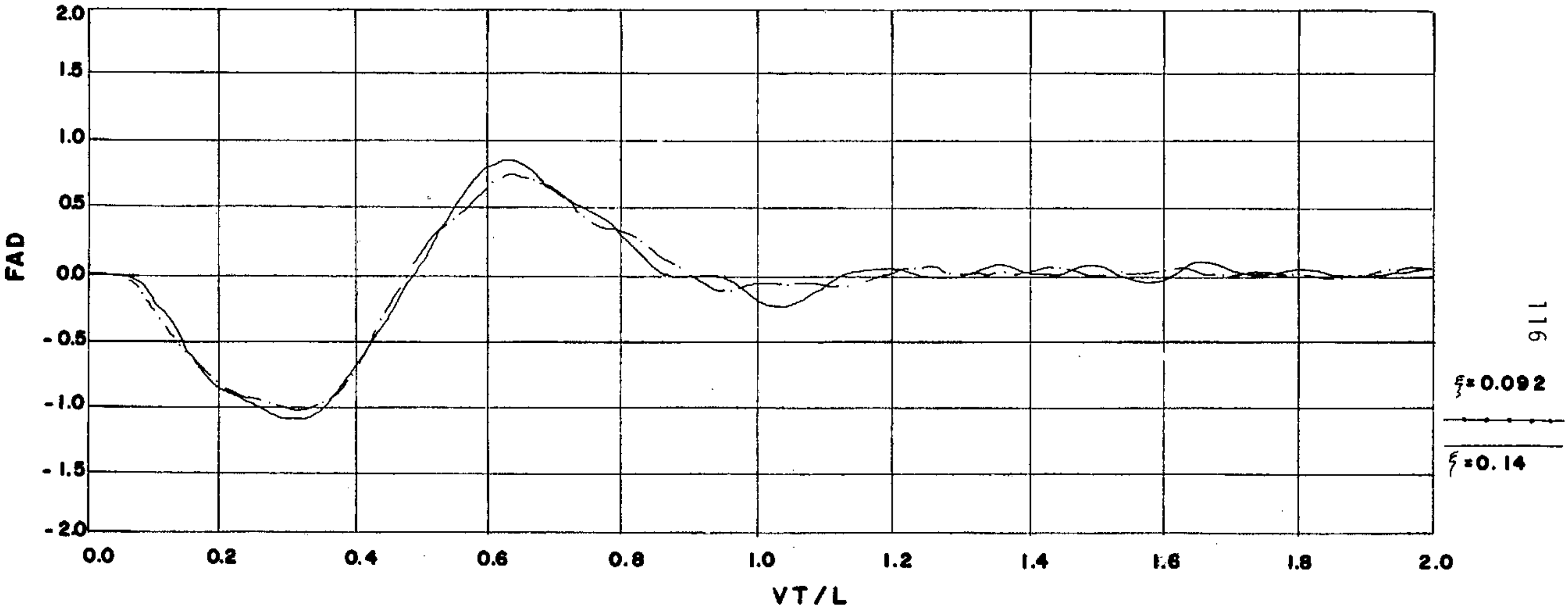


FIG. 4.27

VIGA CONTÍNUA - MOMENTO SEÇÃO C - TB-32

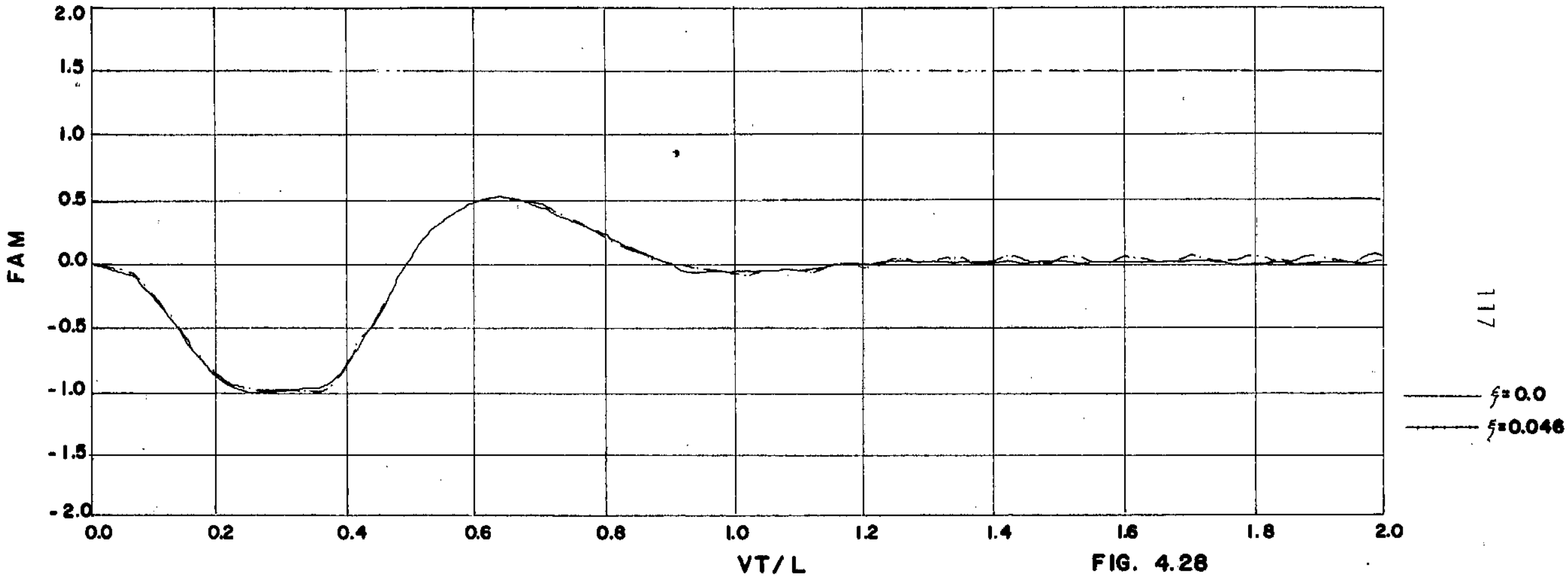


FIG. 4.28

VIGA CONTÍNUA MOMENTO SEÇÃO C TB-32

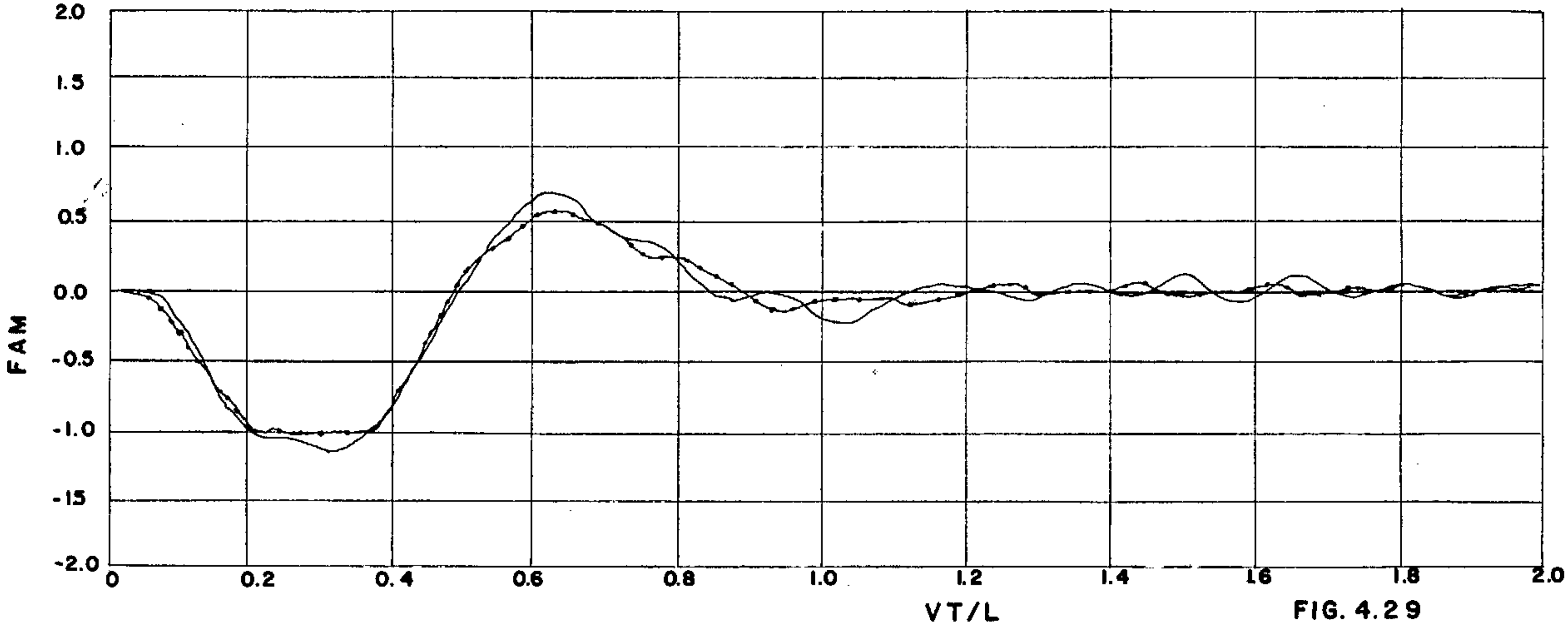


FIG. 4.29

$\xi = 0.092$

$\xi = 0.140$

V - PROGRAMA AUTOMÁTICO

5.1 - INTRODUÇÃO

Os resultados numéricos apresentados no Capítulo IV foram obtidos fazendo uso de um programa automático desenvolvido em linguagem FORTRAN para o computador Burroughs B6700 (34, 35), o qual está listado no Apêndice.

Dadas as propriedades da estrutura, montam-se as matrizes de massa e rigidez e calculam-se as propriedades dinâmicas, resolvendo o problema de autovalor pelo processo de Givens-Householder. Caso seja pedida a resposta a cargas móveis, são lidos os dados da solicitação e é solucionado o sistema de equações por superposição modal. Determinados os deslocamentos dinâmicos, determinam-se os esforços e imprimem-se os resultados para cada posição das carga. Pode-se, ainda, calcular a resposta estática para cada uma dessa posições.

O programa é eficiente, em especial quando se consideram poucos modos de vibração na análise, o que diminui o tempo de processamento da subrotina de autovalor. Para os problemas onde se consideram diversas cargas móveis, como é empregada a superposição de efeitos, perde-se um pouco em eficiência. Para as vigas estudadas, com aproximadamente 30 graus de liberdade, o tempo de processamento fica em torno de um minuto para apenas uma carga móvel, ao passo que na análise sob a ação do trem-tipo simulado, este tempo é perto de oito minutos.

No ítem (5.2) dá-se o manual de entrada do programa, definindo as variáveis e dando seus limites. Vale destacar que, caso necessário, tais limites podem ser ampliados, bastando tão somente alterar as dimensões das variáveis no programa. Como está apresentado, admitem-se até 29 elementos, o que é bastante razoável para as vigas correntes. Tendo em vista a enorme capacidade do computador utilizado, é evidente que este número pode ser bastante aumentado.

Em (5.3) mostra-se um fluxograma simplificado do programa e, finalmente, em (5.4) explica-se sucintamente a utilização de cada subrotina.

5.2 - MANUAL DE ENTRADA

ORDEM	Nº DE CARTÕES	VARIÁVEIS	FORMATO
1	1	NPROB	I5
2	1	Título	cols.(11-63)
3	1	M, NR, NRJ, NM	4I5
4	M	I, LELEM(I), L(I), A(I), IZ(I), E(I), DENS(I), G(I), GAMA(I)	I5, L5, 7F10.0
5	NRJ	K, RL(2*K-1), RL(2*K)	3I5
6	NM	I, LM(I , J)	5I5
7	1	CEST, INERC, CPRINT	3L5
8	1	CIMP, JJC, IIC	L5, 2I5
9	1	NEV, NVEC	2I5
10	1	NCAR, NSPEED	2I5
11	NCAR	JJ, FORCE(JJ), DIST(JJ)	I5, 2F10.0
12	1/2	SPEED(J)	8F10.0
13	1	IK, FRACAO	I5, F10.0

1 - NPROB (inteira) - número do problema

Para NPROB = 0 o programa é encerrado

2 - Título - comentário qualquer no campo das colunas (11-63)

3 - M (inteira) - número de elementos

Dimensionado para $M \leq 29$

NR (inteira) - número de restrições

NRJ (inteira) - número de nós com restrições

NM (inteira) - número de elementos com liberações nas extremidades.

O número de graus de liberdade é dado por:

N = (M + 1) * 2 - NR

4 - I (inteira) - número do elemento

LELEM(I) (lógica) - . T . - elemento com liberação

. F . - elemento sem liberação

L(I) (real) - comprimento

A(I) (real) - área da seção transversal

IZ(I) (real) - momento de inércia da seção transversal

E(I) (real) - módulo de elasticidade

DENS(I)(real) - massa específica

G(I) (real) - módulo de elasticidade transversal

GAMA(I)(real) - fator de correção ao cisalhamento

As unidades das variáveis devem ser coerentes. Para não se considerar a deformação por cisalhamento, dá-se GAMA(I) = 0.

5 - K (inteira) - número do nó restringido

RL(2 * K-1) (inteira) - restrição na direção (2 * K-1)

RL(2 * K) (inteira) - restrição na direção (2 * K)

É válida a convenção: 0 - não há restrição

1 - há restrição

6 - I (inteira) - número do elemento com liberações

LM(I, J) (inteira) - direção liberada nas extremidades do elemento

Tem-se (J = 1, ..., 4) e a convenção:

0 - não há liberação

1 - há liberação

7 - CEST (lógica) - . T . - é feito o cálculo estático
. F . - não é feito o cálculo estático

INERC(lógica) - . T . - considera-se a inércia de rotação
. F . - não se considera a inércia de rotação

CPRINT(lógica) - . T . - imprime apenas deslocamentos e reações de apoio
. F . - imprime deslocamentos, reações de apoio e ações nas extremidades dos elementos

8 - CIMP (lógica) - . T . - imprime apenas deslocamentos do nó JJC e ações na extremidade do elemento IIC
. F . - imprime os deslocamentos de todos nós e ações em todos os elementos

JJC (inteira) - número do nó no qual se desejam os deslocamentos.

IIC (inteira) - número do elemento no qual se desejam as ações nas extremidades.

9 - NEV (inteira) - número de autovalores (frequências) a ser determinado

NVEC (inteira) - número de autovetores (modos de vibração) a ser determinado (NVEC $\leq$ NEV)

Dimensionado para NEV $\leq$ 20

10- NCAR(inteira) - número de cargas móveis

NSPEED(inteira) - número de parâmetros de velocidade

O programa está dimensionado para NCAR $\leq$ 20 e e NSPEED $\leq$ 10. Se NCAR = 0 , não se calcula a resposta dinâmica.

11- JJ (inteira) - número da carga móvel

FORCE(JJ)(real)- intensidade da carga móvel

DIST(JJ)(real)- distância entre a carga JJ e a carga JJ + 1

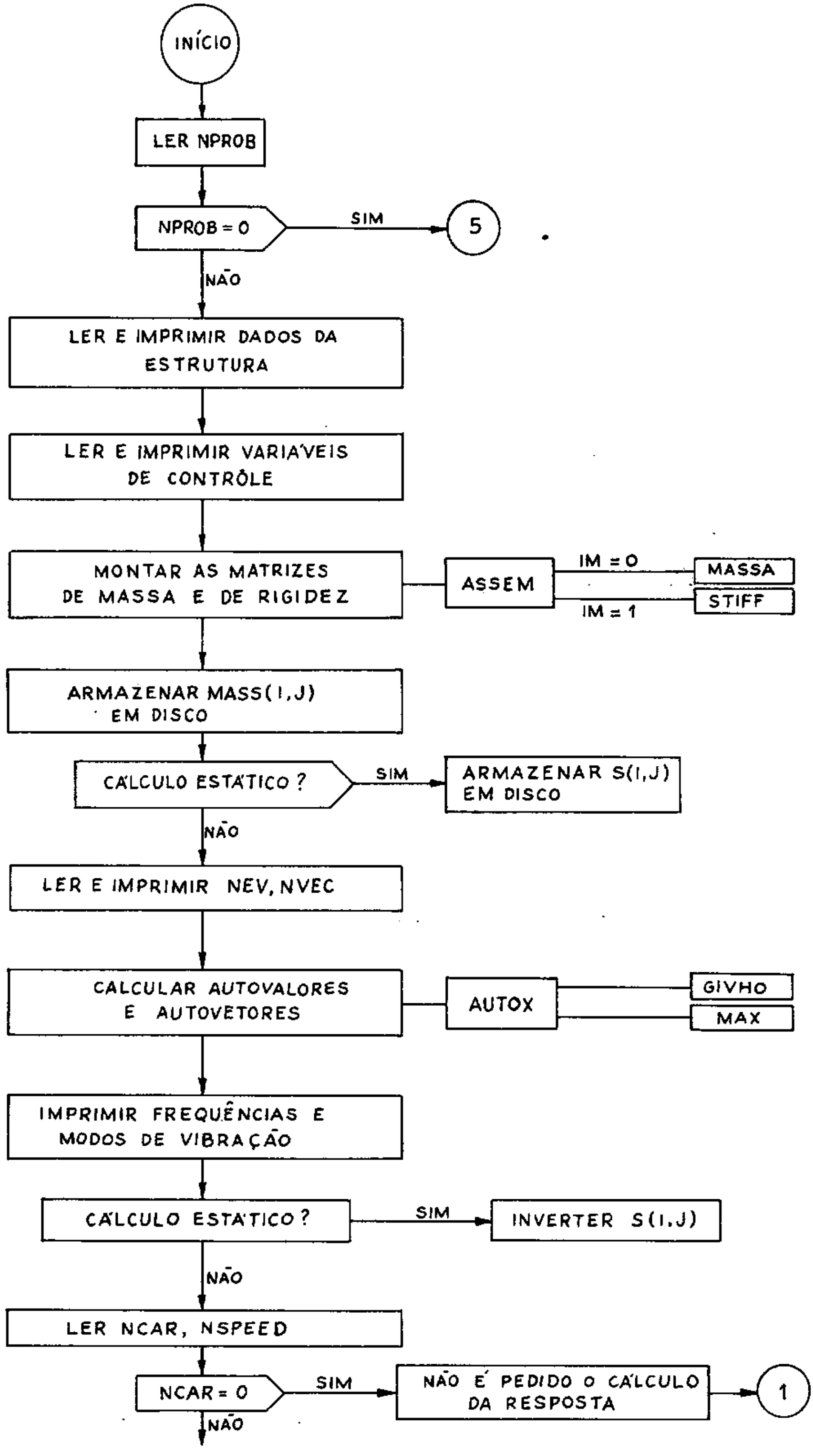
12- SPEED(J)(real)- parâmetro de velocidade α

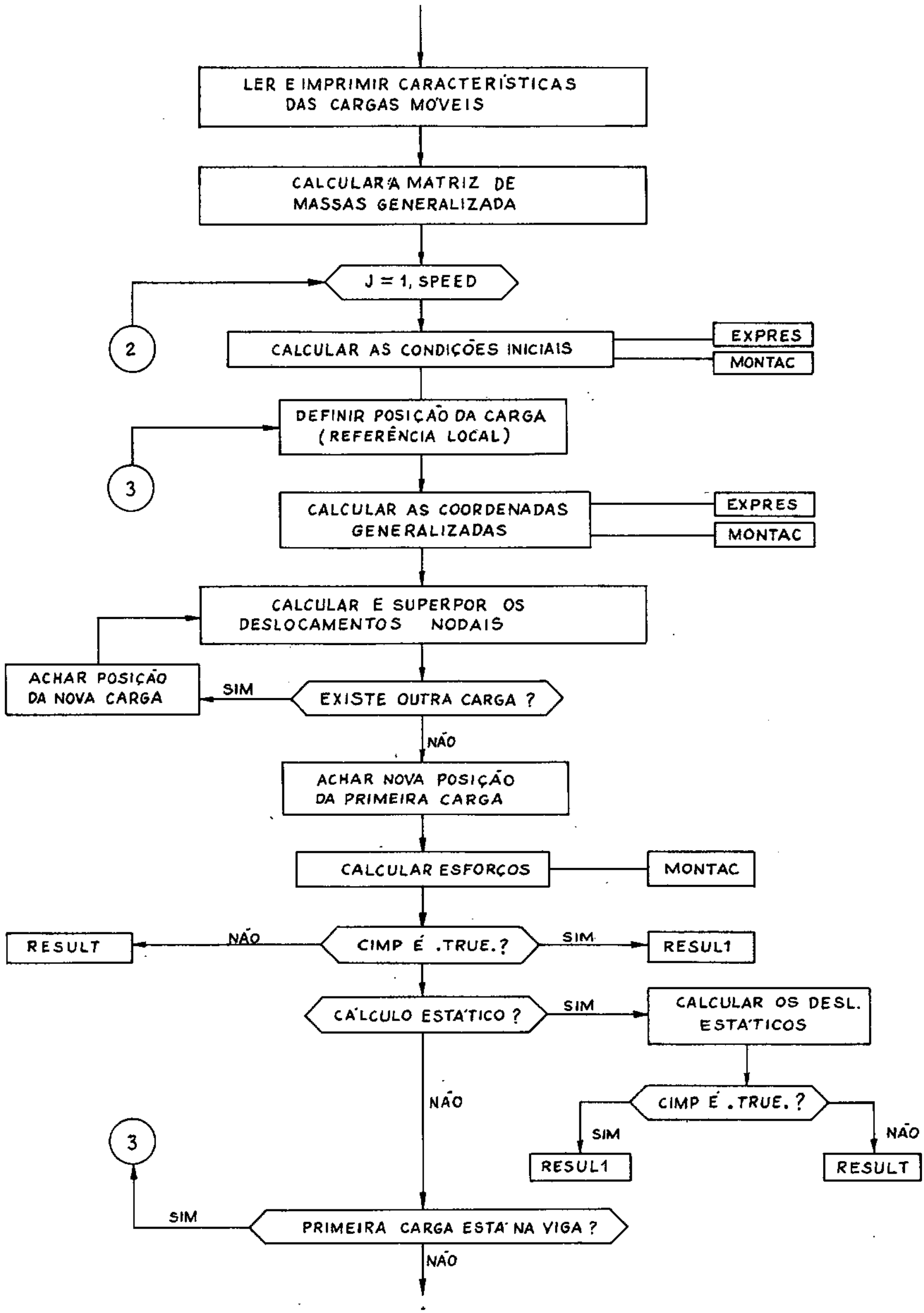
Como SPEED $\leq$ 10, ler-se-ã, no máximo, dois cartões

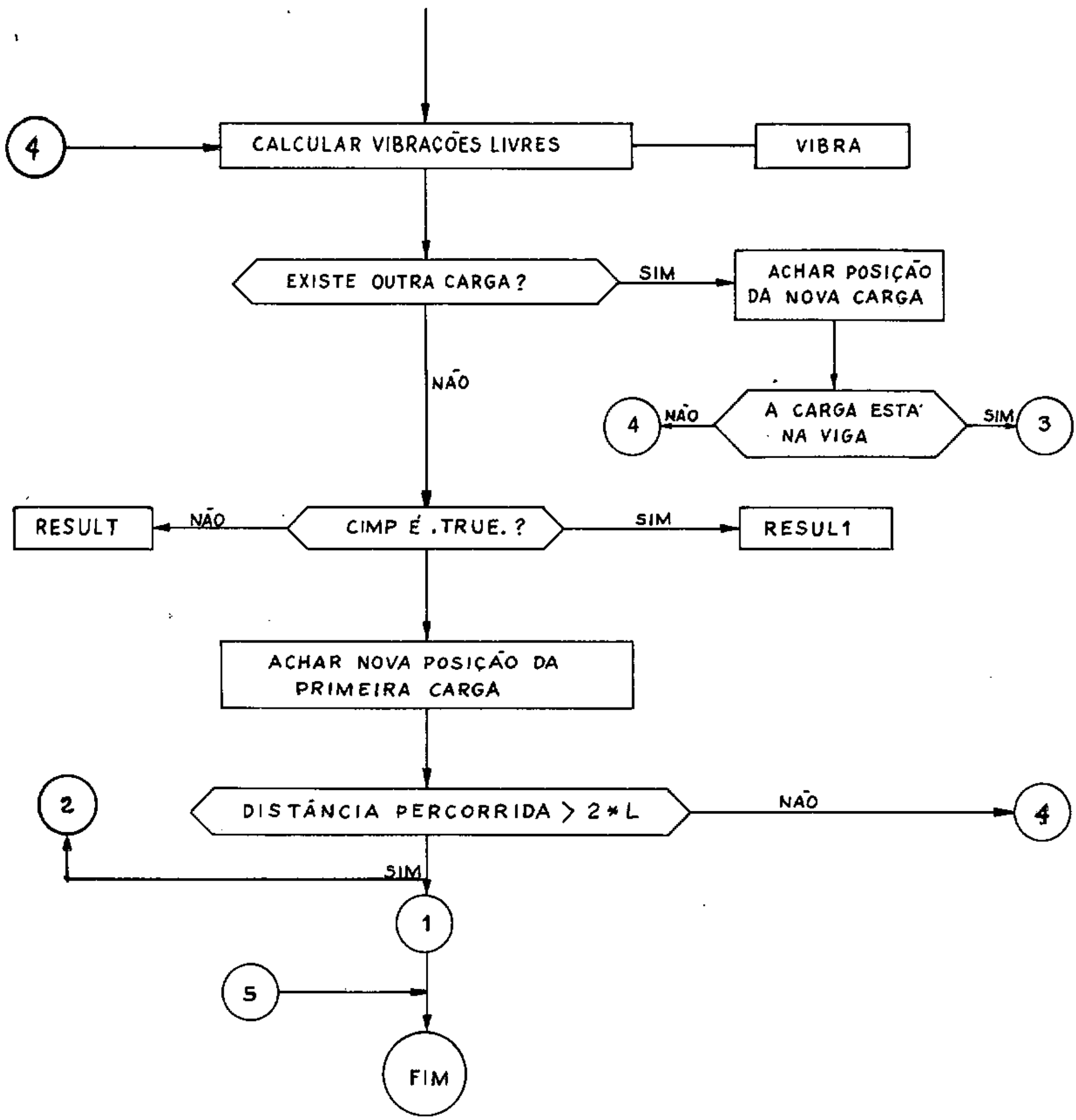
13- IK (inteira) - índice do período considerado para o cálculo do intervalo de tempo (IK $\leq$ NEV)

FRACAO (real) - fração do período IK que dá o intervalo de tempo (= T(IK) * FRACAO)

5.3 - FLUXOGRAMA -




LER E IMPRIMIR CARACTERÍSTICAS DAS CARGAS MÓVEIS
CALCULAR A MATRIZ DE MASSAS GENERALIZADA
J = 1, SPEED
2
CALCULAR AS CONDIÇÕES INICIAIS
EXPRES
MONTAC
DEFINIR POSIÇÃO DA CARGA (REFERÊNCIA LOCAL)
3
CALCULAR AS COORDENADAS GENERALIZADAS
EXPRES
MONTAC
CALCULAR E SUPERPOR OS DESLOCAMENTOS NODAIS
ACHAR POSIÇÃO DA NOVA CARGA
SIM
EXISTE OUTRA CARGA ?
NÃO
ACHAR NOVA POSIÇÃO DA PRIMEIRA CARGA
CALCULAR ESFORÇOS
MONTAC
RESULT
NÃO
CIMP É .TRUE.?
SIM
RESUL1
CÁLCULO ESTÁTICO ?
SIM
CALCULAR OS DESL. ESTÁTICOS
NÃO
CIMP É .TRUE.?
SIM
NÃO
RESUL1
RESULT
3
SIM
PRIMEIRA CARGA ESTÁ NA VIGA ?
NÃO


4
CALCULAR VIBRAÇÕES LIVRES
VIBRA
EXISTE OUTRA CARGA ?
SIM
ACHAR POSIÇÃO DA NOVA CARGA
NÃO
4
NÃO
A CARGA ESTÁ NA VIGA
SIM
3
RESULT
NÃO
CIMP É .TRUE. ?
SIM
RESUL1
ACHAR NOVA POSIÇÃO DA PRIMEIRA CARGA
2
DISTÂNCIA PERCORRIDA > 2 * L
NÃO
4
SIM
1
5
FIM

5.4 - DESCRIÇÃO DAS SUBROTINAS

a) MASSA

Determina a matriz de massas consistentes de um elemento consistentes de um elemento, considerando a inércia de rotação e a deformação por cisalhamento.

b) STIFF

Define a matriz de rigidez de um elemento, considerando a influência da deformação por cisalhamento.

c) ASSEM

Efetua a montagem das matrizes de massa e rigidez globais, introduzindo as condições de contorno pelo processo de reordenação (11).

d) GIVHO

Calcula NEV autovalores e NVEC autovetores de uma dada matriz simétrica.

e) MAX

Normaliza um autovetor, fazendo o maior elemento igual a 1 (um).

f) AUTOX

Transforma o cálculo das vibrações livres em um problema de autovalor na forma clássica, por meio de uma decomposição de Choleski. Com as subrotinas GIVHO e MAX calcula as frequências e modos de vibração da estrutura.

g) INVER

Inverte, pelo processo da partição, uma matriz quadrada.

h) EXPRES

Calcula as ações equivalentes nos nós de um elemento, decorrentes da passagem de uma carga móvel. Se IDV = 1 , calcula as derivadas dessas ações para a determinação das condições iniciais.

i) MONTAC

Faz a montagem e reordenação do vetor das ações combinadas nos nós.

j) RESULT

Calcula as reações de apoio e as ações nas extremidades dos elementos, imprimindo os resultados em todos os nós e todos os elementos.

k) RESULT1

Imprime os deslocamentos de determinado nó e calcula e imprime as ações nas extremidades de determinado elemento.

l) VIBRA

Determina as vibrações livres da estrutura depois da passagem da carga móvel.

VI - CONCLUSÃO

O programa elaborado permite a análise dinâmica de vigas Gerber ou contínuas. A consideração da inércia de rotação e da deformação por esforço cortante é uma alternativa do programa, embora os resultados para os exemplos estudados tenham mostrado que a sua influência, pelo menos a frequências baixas, é desprezível. Nos casos em que a relação (vão/altura da seção transversal) é pequena, essa influência é um pouco mais sensível.

É possível estudar-se também vigas de seção transversal variável. A subdivisão em elementos de seção constante não conduz a erros apreciáveis desde que se tenha o cuidado de escolher um número suficiente de elementos.

A resposta dinâmica pode ser obtida para cargas concentradas móveis ou grupos de cargas concentradas (caso da simulação do trem-tipo TB-32). Em uma primeira aproximação, é possível obter uma resposta para cargas distribuídas. Entretanto, esta seria uma das possíveis extensões do presente trabalho.

Outra possível extensão, de grande interesse, é a consideração da deformabilidade da fundação na análise dinâmica. Isto é possível mediante algumas alterações no programa base.

Os espectros de amplificação obtidos mostram a vantagem da análise dinâmica sobre os métodos de dimensionamento clássicos, visto que os fatores de amplificação (coeficientes de impacto) de normas são uniformes e com valores em torno de 1.5, e em alguns casos foram obtidos valores bem maiores. É de se salientar ainda que tais fatores de amplificação ocorrem principalmente em vigas Gerber.

Embora não tenha sido considerado o amortecimento da estrutura, este é um problema que constitue uma interessante continuação do presente trabalho.

B I B L I O G R A F I A

(1) VOLTERRA, E.; ZACHMANOGLOU, E.C. - "Dynamics of Vibrations" - Columbus, Charles E. Merril Books, Inc., 1965.

(2) MEIROVICTH, L. - "Analytical Methods in Vibrations" - New York, The MacMillan Company, 1967.

(3) TIMOSHENKO, STEPHEN P.; YOUNG, D.H.; WEAVER, W., Jr. - Vibration Problems in Engineering" - New York, John Wiley & Sons, Inc., 1974.

(4) TIMOSHENKO, STEPHEN P.; YOUNG, D.H. - "Vibration Problems in Engineering" - Princeton, New Jersey, D. van Nostrand Company, Inc., 1966.

(5) CLOUGH, RAY W.; PENZIEN, JOSEPH - "Dynamics of Structures" - New York, McGraw-Hill Book Comapany, Inc., 1975.

(6) THOMPSON, WILLIAM T. - "Vibration Theory and Applications" - London, George Allen & Unwin, Ltd., 1966.

(7) PRZEMIENIECKI, J.S. - "Theory of Matrix Structural Analysis" - New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1968.

(8) DESAI, C.S.; ABEL, J.F. - "Introduction to the Finite Element Method" - New York, Van Nostrand Reinhold Company, 1972.

(9) ZIENCKIEWICZ, O.C. - "The Finite Element Method in Engineering Science" - London, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1968.

(10) MARTIN, HAROLD C.; CAREY, GRAHAM F. - "Introduction to the Finite Element Analysis" - New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1973.

(11) GERE, JAMES M. ; WEAVER, W., Jr. - " Analysis of Framed Structures" - Princeton, New Jersey, D. Van Nostrand Company, Inc., 1965.

(12) GERE, JAMES M.; WEAVER, W., Jr. - "Matrix Algebra for Engineers" - Princeton, New Jersey, D. Van Nostrand Company, Inc., 1965.

(13) RALSTON, A. ; WILF, H.F. ; Editado por-"Mathematical Methods for Digital Computers - Vol. II" - New York, John Wiley & Sons, Inc., 1967 - pp. 94-115.

(14) NOWACKI, W. - "Dynamics of Elastic Systems" - London, Chapman & Hall Ltd., 1963.

(15) FRYBA, L. - "Vibrations of Solids and Structures Under Moving Loads" - Groningen, Noordhoff International Publishing, 1972.

(16) NAGARAJU, N.; JAGADISH, K.S.; SUNDARA RAJA YENGAR, K.T. - "Dynamic Behavior of Cantilever Bridges under Moving Loads" - Publications, IABSE, 33-II: 149-172, 1973.

(17) WEN, R.K.; TORIDIS, T. - "Dynamic Behavior of Cantilever Bridges" - Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 88(EM4): 27-43, Aug. 1962.

(18) YOSHIDA, DAVID M. ; WEAVER, W., Jr. - "Finite-Element Analysis of Beams and Plates with Moving Loads" - Publications, IABSE, 31-I: 179-195, 1971.

(19) VENÂNCIO FILHO, F. - "Análise Dinâmica de Estruturas com Massas Discretas" - Estrutura, vols. 63/64, 1968.

(20) VENÂNCIO FILHO, F. - "Dynamic Influence Lines of Beams and Frames" - Journal of the Structural Division, ASCE, 92 (ST2): 371-386, April 1966.

(21) ARCHER, J.S. - "Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems" - Journal of the Structural Division, ASCE, 89 (ST4): 161-178, August 1963.

(22) JAGADISH, K.S.; PAHWA, J.L. - "The Vibration of Cantilever Bridges" - Journal of Sound and Vibration, 7(3):449-459, 1968.

(23) CAUGHEY, T.K.; O'KELLY, M.E.J. - "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamics Systems" - Journal of Applied Mechanics, ASME, pp. 583-588, September 1965.

(24) CLOUGH, RAY W. - "Application of Finite Element Method to Problems of Structural Dynamics" - Lisboa, LNEC, September 1971.

(25) BIGGS, J.M. - "Introduction to Structural Dynamics" - New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1964.

(26) HURTY, WALTER C.; RUBINSTEIN, MOSHE F. - "Dynamics of Structures" - Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall , Inc., 1965.

(27) FRANKLIN, JOEL N. - "Matrix Theory" - Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1968.

(28) VELETSOS, ANESTIS S.; HUANG, TSENG - "Analysis of Dynamic Response of Highway Bridges" - Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 96 (EM5):593-620,October, 1970

(29) LEPORATI, E. - "Sulle Vibrazioni di Travi al Variare della Posizione Lungo l'Asse de Forze Punctualli Eccitanti" - Atti dell'Instituto di Scienza delle Construzioni dell' Università di Pisa, vol. XI: 61-81, 1970.

(30) WANG, T.M.; KIERONSKI, J.F.; MARQUIS, J.P. - "Effect of Rotary Inertia and Shear on Natural Frequencies of Cantilever Bridges" - Journal of Sound and Vibration, 40(4):535-559 June, 1975.

(31) KREIDER, D.L.; KULLER, R.G.; OSTBERG, D.R.; PERKINS, F.W. - "Introdução à Análise Linear - Vol. 1" - Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S.A., 1972.

(32) JUNG, MARCOS DE PAULA - "Dinâmica de Estruturas Reticuladas sob Cargas Móveis pelo Método dos Elementos Finitos" - Tese de Mestrado, Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1973.

(33) BRUCH, YECID ALIAGA - "Análise Dinâmica de Placas pelo Método dos Elementos Finitos" - Tese de Mestrado, Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1973.

(34) PACITTI, T. - "FORTRAN - Monitor Princípios" - Rio de Janeiro Ao Livro Técnico S.A., 1967.

(35) BURROUGHS B6700/B7700 - "FORTRAN Reference Manual" - Burroughs Corporation, 1974.

(36) OLIVEIRA, ROMILDE A. - "Análise Dinâmica de Tôrres e Estruturas Elevadas Lateralmente Carregadas" - Tese de Mestrado, Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1974.

A P Ê N D I C E

```
FILE   8=CARTOES;UNIT=READER
FILE   5=IMPRESS;UNIT=PRINTER
FILE   7=FURO,UNIT=PUNCH
FILE   15=ARQ,UNIT=DISKPACK,AREA=30,RECORD=32
FILE   16=ARQ1,UNIT=DISKPACK,AREA=120,RECORD=8
FILE   17=ARQ2,UNIT=DISKPACK,AREA=120,RECORD=2
FILE   18=ARQ3,UNIT=DISKPACK,AREA=60,RECORD=120
FILE   19=ARQ4,UNIT=DISKPACK,AREA=60,RECORD=120
      SUBROUTINE MASSA(ME,DENS,A,L,IZ,PHI,I,INERC)
C
C     SUBROTINA QUE DEFINE A MATRIZ DE MASSAS CONSISTENTES DO
C     ELEMENTO, CONSIDERANDO INERCIA DE ROTACAO E DEFORMACAO
C     POR CISALHAMENTO
C     ARMAZENA NA MATRIZ ME(4 X 4) A MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8 L(29),IZ(29),ME(4,4)
      LOGICAL INERC
      DIMENSION DENS(29),PHI(29),A(29)
      B=DENS(I)*A(I)*L(I)/(1.+PHI(I))**2
      C=DENS(I)*IZ(I)/(L(I)*(1.+PHI(I))**2)
      IF(.NOT.INERC) C=0.
      ME(1,1)=B*(PHI(I)**2/3.+7.*PHI(I)/10.+13./35.)+C*6./5.
      ME(2,1)=+B*(PHI(I)**2/24.+11.*PHI(I)/120.+11./210.)*L(I)-C*
     1L(I)*(PHI(I)/2.-1./10.)
      ME(3,1)=B*(PHI(I)**2/6.+3.*PHI(I)/10.+9./70.)-C*6./5.
      ME(4,1)=-B*L(I)*(PHI(I)**2/24.+3.*PHI(I)/40.+13./420.)-C*(
     1PHI(I)/2.-1./10.)*L(I)
      ME(2,2)=B*L(I)**2*(PHI(I)**2/120.+PHI(I)/60.+1./105.)+C*
     1L(I)**2*(PHI(I)**2/3.+PHI(I)/6.+2./15.)
      ME(3,2)=+B*L(I)*(PHI(I)**2/24.+3.*PHI(I)/40.+13./420.)-C*
     1L(I)*(-PHI(I)/2.+1./10.)
      ME(4,2)=-B*L(I)**2*(PHI(I)**2/120.+PHI(I)/60.+1./140.)+C*
     1L(I)**2*(PHI(I)**2/6.-PHI(I)/6.-1./30.)
      ME(3,3)=ME(1,1)
      ME(4,3)=-B*(PHI(I)**2/24.+11.*PHI(I)/120.+11./210.)*L(I)-C*
     1(-PHI(I)/2.+1./10.)*L(I)
      ME(4,4)=ME(2,2)
C
```

```
C     CONSIDERACAO DA SIMETRIA
      DO 50 J=1,4
      DO 50 K=1,4
   50 ME(J,K)=ME(K,J)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE STIFF(SM,E,IZ,L,PHI,NM,LM,I,LELEM)

      SUBROTINA DEFINIDORA DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO,
      CONSICERANDO DEFORMACAO POR CISALHAMENTO
      ARMAZENA NA MATRIZ SM(4X4) A MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8 L(29),IZ(29)
      LOGICAL LELEM(29)
      DIMENSION SM(4,4),E(29),PHI(29),LM(29,4),A(4)
      B=E(I)*IZ(I)/(L(I)**3*(1.+PHI(I)))
      SM(1,1)=12.*B
      SM(2,1)=6.*L(I)*B
      SM(2,2)=(4.+PHI(I))*L(I)**2*B
      SM(3,1)=-SM(1,1)
      SM(3,2)=-SM(2,1)
      SM(3,3)=SM(1,1)
      SM(4,1)=SM(2,1)
      SM(4,2)=(2.-PHI(I))*L(I)**2*B
      SM(4,3)=SM(3,2)
      SM(4,4)=SM(2,2)

      POR SIMETRIA DA MATRIZ, TEMOS OS DEMAIS TERMOS

      DO 50 J=1,4
      DO 50 K=1,4
   50 SM(J,K)=SM(K,J)

      INTRODUCAO DAS ARTICULACOES

      VERIFICACAO DA EXISTENCIA DE LIBERACOES
      IF(.NOT.LELEM(I)) GO TO 60
      MODIFICACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ
      DO 53 JI=1,4
      IF(LM(I,JI).EQ.0) GO TO 53
      DO 51 K=1,4
   51 A(K)=SM(JI,K)
      ID=4*(I-1)+JI
      WRITE(16'ID) (A(K),K=1,4)
```

```
   DO 52 J=1,4
   DO 52 K=1,4
52 SM(J,K)=SM(J,K)-A(J)*A(K)/A(JI)
53 CONTINUE

   ARMAZENAMENTO DE 'SM' EM DISCO

60 WRITE(15'I) ((SM(J,K),K=1,4),J=1,4)
   RETURN
   END
```

```
      SUBROUTINE ASSEM(S,M,N,RL,CRL,IM,DENS,E,A,L,IZ,PHI,NM,LM,
     1LELEM,INERC)

      SUBROTINA PARA MONTAGEM DAS MATRIZES DE RIGIDEZ E MASSA,
      UTILIZANDO A TECNICA DA REORDENACAO
      SE IM=0, DEVOLVE EM S A MATRIZ DE MASSA DA ESTRUTURA
      SE IM=1, DEVOLVE EM S A MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA

      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8 L(29),IZ(29)
      LOGICAL LELEM(29),INERC
      INTEGER RL(60),CRL(60)
      DIMENSION S(60,60),DENS(29),A(29),PHI(29),LM(29,4),E(29),
     1SM(4,4)

      ZERAGEM DA MATRIZ S

      ND=2*(M+1)
      DO 30 JJ=1,ND
      DO 30 KK=1,ND
   30 S(JJ,KK)=0.

      GRANDE 'DO' PERCORRENDO TODOS OS ELEMENTOS

      DO 1 I=1,M

      RENUMERACAO DAS DIRECOES

      J1=2*I-1
      J2=2*I
      K1=2*I+1
      K2=2*I+2
      IF(RL(J1))2,2,3
    2 J1=J1-CRL(J1)
      GO TO 4
    3 J1=N+CRL(J1)
    4 IF(RL(J2))5,5,6
    5 J2=J2-CRL(J2)
      GO TO 7
    6 J2=N+CRL(J2)
```

```
 7 IF(RL(K1))8,8,9
 8 K1=K1-CRL(K1)
   GO TO 10
 9 K1=N+CRL(K1)
10 IF(RL(K2))11,11,12
11 K2=K2-CRL(K2)
   GO TO 13
12 K2=N+CRL(K2)

   TESTE DEFINIDOR DA MATRIZ A SER MONTADA
13 IF(IM)14,14,15
14 CALL MASSA(SM,DENS,A,L,IZ,PHI,I,INERC)
   GO TO 16
15 CALL STIFF(SM,E,IZ,L,PHI,NM,LM,I,LELEM)

   MONTAGEM DA MATRIZ

16 IF(RL(2*I-1).NE.0) GO TO 17
   S(J1,J1)=S(J1,J1)+SM(1,1)
   S(J2,J1)=S(J2,J1)+SM(2,1)
   S(K1,J1)=SM(3,1)
   S(K2,J1)=SM(4,1)
17 IF(RL(2*I).NE.0) GO TO 18
   S(J1,J2)=S(J1,J2)+SM(1,2)
   S(J2,J2)=S(J2,J2)+SM(2,2)
   S(K1,J2)=SM(3,2)
   S(K2,J2)=SM(4,2)
18 IF(RL(2*I+1).NE.0) GO TO 19
   S(J1,K1)=SM(1,3)
   S(J2,K1)=SM(2,3)
   S(K1,K1)=S(K1,K1)+SM(3,3)
   S(K2,K1)=S(K2,K1)+SM(4,3)
19 IF(RL(2*I+2).NE.0) GO TO 1
   S(J1,K2)=SM(1,4)
   S(J2,K2)=SM(2,4)
   S(K1,K2)=S(K1,K2)+SM(3,4)
   S(K2,K2)=S(K2,K2)+SM(4,4)
 1 CONTINUE
   RETURN
   END
```

```
SUBROUTINE GIVHO(A,E,V,N,NEV,NVEC)

A      - MATRIZ SIMETRICA, N*N, DE ENTRADA
NEV    - NUMERO DE AUTO-VALORES A SEREM CALCULADOS
NVEC   - NUMERO DE AUTO-VETORES A SEREM CALCULADOS
E      - VETOR DE SAIDA. CONTEM OS NEV AUTO-VALORES
V      - MATRIZ DOS AUTO-VETORES DE SAIDA (NORMALIZADOS)

OBS.- SE NAO SE DESEJA O CALCULO DOS AUTOVETORES, FORNECER
NVEC=0. NESTE CASO NAO E NECESSARIO DIMENSIONAR V

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
LOGICAL MIRST,IN
DIMENSION A(60,60),E(20),V(60,20),B(60),C(60),P(60),Q(60),
1R(60),W(60),Y(62),IN(60)
NM1=N-1
NM2=N-2

ETAPA 1 - REDUCAO A FORMA TRIDIAGONAL. A MATRIZ  A  DE
          ENTRADA E DESTRUIDA NO CALCULO

IF(N.LE.2) GO TO 99
DO 8 I=1,NM2
IP1=I+1
SS=0.
DO 1 J=IP1,N
1 SS=SS+A(J,I)**2
S=DSQRT(SS)
IF(A(IP1,I).LT.0.) S=-S
 C(I)=A(I,I)
B(I)=-S

SE S E ZERO, ENTAO ALPHA DEVE SER ZERO

ALPHA=0.
IF(S.EQ.0.0) GO TO 8
ALPHA=1./(SS+A(IP1,I)*S)
T=A(IP1,I)+S
A(IP1,I)=T
W(I+1)=T
IP2=I+2
```

```
      DO 2 J=IP2,N
    2 W(J)=A(J,I)
      DO 4 J=IP1,N
      T=0.0
      DO 3 K=IP1,N
    3 T=T+A(J,K)*W(K)
    4 P(J)=T*ALPHA
      XAP=0.0
      DO 5 K=IP1,N
    5 XAP=XAP+W(K)*P(K)
      XAP=.5*XAP*ALPHA
      DO 6 K=IP1,N
    6 Q(K)=P(K)-XAP*W(K)
      DO 7 J=IP1,N
      DO 7 K=J,N
      A(J,K)=A(J,K)-(Q(J)*W(K)+Q(K)*W(J))
    7 A(K,J)=A(J,K)
    8 A(I,I)=ALPHA
   99 C(N-1)=A(N-1,N-1)
      C(N)=A(N,N)
      B(N-1)=A(N-1,N)

       AQUI TERMINA A REDUCAO A FORMA TRIDIAGONAL

      ETAPA 2 - CALCULO DOS AUTO-VALORES

      XORM=DABS(C(1))+DABS(B(1))
      DO 10 I=2,NM1
      T=DABS(C(I))+DABS(B(I))+DABS(B(I-1))
   10 XORM=DMAX1(XORM,T)
      DO 11 I=1,NM1
   11 W(I)=B(I)**2
      K=1
      U=XORM
      DO 12 I=1,NEV
   12 E(I)=-XORM
   13 XL=E(K)
   14 XAMBDA=.5*(XL+U)
C     TESTE DE CONVERGENCIA COMO FEITO AQUI PERMITE CONTINUAR O
      CALCULO ATE QUE O INTERVALO (XL,U) NAO POSSA SER DIMINUIDO
```

```
   IF((XAMBDA.EQ.XL).OR.(XAMBDA.EQ.U)) GO TO 30
   MG=0
   I=1
16 S=C(I)-XAMBDA
18 IF(S.GE.0.0) MG=MG+1
   IF(S.EQ.0.0) GO TO 20
   I=I+1
   IF(I.GT.N) GO TO 22
   S=C(I)-XAMBDA-W(I-1)/S
   GC TO 18
20 I=I+2
   IF(I.LE.N) GO TO 16
22 IF(MG.GE.K) GO TO 24
   U=XAMBDA
   GC TO 14
24 XL=XAMBDA
   M=MINO(MG,NEV)
   CC 26 I=K,M
26 E(I)=XAMBDA
   GO TO 14
   C K-ESIMO AUTOVALOR ESTA CALCULADO. GUARDE EM E(K) E
   PROSSIGA
30 E(K)=XAMBDA
   K=K+1
   IF(K.LE.NEV) GO TO 13

   ESTA COMPLETO O CALCULO DOS AUTOVALORES

   ETAPA 3 - CALCULO DOS AUTO-VETORES (SE NVEC E NAO NULO)
   IF(NVEC.NE.0) GO TO 4C
   RETURN
40 CO 82 I=1,NVEC
   INICIALIZACAO PARA ESTE AUTOVETOR
   CC 44 J=1,N
   P(J)=0.
   C(J)=B(J)
   R(J)=C(J)-E(I)
44 Y(J)=1.
   Y(N+1)=0.
   Y(N+2)=0.
   FIRST=.TRUE.
```

```
   REDUCAO A FORMA TRIANGULAR PELA ELIMINACAO DE GAUSS

   DO 50 J=1,NM1
   IF(DABS(R(J)).LT.DABS(B(J))) GO TO 46
   XULT=B(J)/R(J)
   IN(J)=.FALSE.
   GO TO 48
46 XULT=R(J)/B(J)
   IN(J)=.TRUE.
   R(J)=B(J)
   T=R(J+1)
   R(J+1)=Q(J)
   Q(J)=T
   P(J)=Q(J+1)
   Q(J+1)=0.

48 W(J)=XULT
   Q(J+1)=Q(J+1)-XULT*P(J)
   R(J+1)=R(J+1)-XULT*Q(J)
   IF(R(J).EQ.0.) R(J)=1.E-30
50 CONTINUE
   IF(R(N).EQ.0.) R(N)=1.E-30
   ARMAZENAMENTO DOS MULTIPLICADORES PARA USO POSTERIOR

   IF(I.EQ.1) GO TO 54
   IF(DABS(E(I)-E(I-1)).GE.XORM*1.E-6) GO TO 54

   ISTO COMPLETA A REDUCAO. INICIO DA RETROSUBSTITUICAO

   SE E(I) E AUTOVALOR REPETIDO, GERE UM VETOR ALEATORIO DE
   PARTIDA EM Y(J)

   DO 52 J=1,N
52 Y(J)=RANDOM
54 DO 66 JI=1,N
   K=N-JI+1
   T=Y(K)
   Y(K)=(T-Y(K+1)*Q(K)-Y(K+2)*P(K))/R(K)
66 CONTINUE
   ISTO COMPLETA A RETROSUBSTITUICAO
```

```
   IF(.NOT.MIRST) GO TO 74
   MIRST=.FALSE.
   DO 70 J=1,NM1
   IF(IN(J)) GO TO 68
   Y(J+1)=Y(J+1)-W(J)*Y(J)
   GO TO 70
68 T=Y(J)
   Y(J)=Y(J+1)
   Y(J+1)=T-W(J)*Y(J+1)
70 CONTINUE
   ISTO COMPLETA A REDUCAO DO LADO DIREITO. FACA MAIS UMA
   ITERACAO
   GO TO 54
   Y E AGORA UM AUTOVETOR DA MATRIZ TRIDIAGONALIZADA. COMECE
   RETROTRANSFORMACAO

74 DO 78 J=1,NM2
   K=N-J-1
   IF(N.LE.2) K=K+1
   T=0.0
   M=K+1
   DO 76 KK=M,N
76 T=T+A(KK,K)*Y(KK)
   T=A(K,K)*T
   DO 78 KK=M,N
78 Y(KK)=Y(KK)-T*A(KK,K)

   RETROTRANSFORMACAO ESTA COMPLETA. Y E AGORA UMA AUTOVETOR
   DE  A . EFETUE A NORMALIZACAO

   T=DABS(Y(1))
   K=1
   DO 80 J=2,N
   S=DABS(Y(J))
   IF(S.LE.T) GO TO 80
   T=S
   K=J
80 CONTINUE
   T=1./Y(K)
   DO 82 J=1,N
```

```
82 V(J,I)=Y(J)*T
   I-ESIMA COLUNA DE V E O I-ESIMO AUTOVETOR NORMALIZADO COM
   MAIOR ELEMENTO IGUAL A 1
   RETURN
   END
```

```
      SUBROUTINE MAX(N,T,Y,K)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION Y(60)

      SUBROTINA QUE NORMALIZA O AUTOVETOR Y, COM MAIOR ELEMENTO
      FEITO IGUAL A 1

      CALCULO DE ABS(MAX(Y(K))), K=1,N

      T=DABS(Y(1))
      K=1
      DO 80 J=2,N
      S=DABS(Y(J))
      IF(S-T) 80,80,79
   79 T=S
      K=J
   80 CONTINUE

      COM O RESULTADO ANTERIOR, TEM-SE T=ABS(MAX(Y(I))) E
      A POSICAO NO VETOR

      NORMALIZACAO

      DO 82 I=1,N
      Y(I)=Y(I)/T
   82 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE AUTOX(N,NEV,NVEC,F,G,E,V)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION F(60,60),E(20),V(60,20),AA(60),G(60,60)
C
C     DECOMPOSICAO DE CHOLESKI
C
C     F - MATRIZ DE RIGIDEZ, A SER DECOMPOSTA
C     G - MATRIZ DE MASSA. SERA TRANSFORMADA NA MATRIZ DINAMICA
C         PARA O CALCULO DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES
C     E - VETOR QUE CONTERA OS NEV MENORES AUTOVALORES
C     V - MATRIZ QUE CONTERA OS NVEC AUTOVETORES CORRESPONDENTES,
C         NORMALIZADOS COM MAIOR ELEMENTO IGUAL A 1
C
      F(1,1)=DSQRT(F(1,1))
      DO 10 I=2,N
      F(I,1)=F(I,1)/F(1,1)
   10 CONTINUE
      DO 100 I=1,N
      DO 100 J=2,N
      J1=J-1
      IF(I-J) 50,60,70
   50 F(I,J)=0.
      GO TO 100
   60 DO 65 IR=1,J1
      F(I,J)=F(I,J)-F(I,IR)*F(I,IR)
   65 CONTINUE
      F(I,J)=DSQRT(F(I,J))
      GO TO 100
   70 DO 75 IR=1,J1
      F(I,J)=F(I,J)-F(I,IR)*F(J,IR)
   75 CONTINUE
      F(I,J)=F(I,J)/F(J,J)
  100 CONTINUE
C
C
      DO 150 I=1,N
      F(I,I)=1./F(I,I)
  150 CONTINUE
      DO 200 I=2,N
      II=I-1
      DO 200 J=1,I
      A=0.
      IF(I-J)200,200,170
```

```
170 DO 190 IR=J,II
190 A=A+F(I,IR)*F(IR,J)
    F(I,J)=-F(I,I)*A
200 CONTINUE

    CALCULO DE (F**(-1))*G

    DO 300 I=1,N
    DO 250 K=1,N
    AA(K)=G(K,I)
250 CONTINUE
    DO 300 J=1,N
    DO 270 L=1,J
    G(J,I)=G(J,I)+F(J,L)*AA(L)
270 CONTINUE
    G(J,I)=G(J,I)-AA(J)
300 CONTINUE

    CALCULO DE ((F**(-1)*G*(F**(-1))'

    DO 400 I=1,N
    DO 350 K=1,N
    AA(K)=G(I,K)
350 CONTINUE
    DO 400 J=1,N
    DO 370 L=1,J
    G(I,J)=G(I,J)+AA(L)*F(J,L)
370 CONTINUE
    G(I,J)=G(I,J)-AA(J)
400 CONTINUE
    DO 410 I=1,N
    DO 410 J=1,I
    G(I,J)=G(J,I)
410 CONTINUE

    G E A MATRIZ SIMETRICA PROCURADA. CALCULE OS AUTOVALORES
    E AUTOVETORES DE G.

    CALL GIVHO(G,E,V,N,NEV,NVEC)

    IF(NVEC.NE.0) GO TO 310
    RETURN
310 DO 340 J=1,NVEC
```

```
      DO 320 II=1,N
      AA(II)=V(II,J)
  320 CONTINUE
      DO 340 I=1,N
      DO 330 K=1,N
      V(I,J)=V(I,J)+FM(K,I)*AA(K)
  330 CONTINUE
      V(I,J)=V(I,J)-AA(I)
      DO 332 IC=1,N
      AA(IC)=V(IC,J)
  332 CONTINUE
      CALL MAX(N,T,AA,KK)
      DO 335 ICC=1,N
      V(ICC,J)=AA(ICC)
  335 CONTINUE
  340 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE INVER(A,N)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(60,60),G(60),H(60)
      A(1,1)=1./A(1,1)
      N1=N-1
      DO 50 M=1,N1
      K=M+1
      DO 9 I=1,M
    9 G(I)=0.
      DO 10 I=1,M
      DO 10 J1=1,M
   10 G(I)=G(I)+A(I,J1)*A(J1,K)
      D=0.
      DO 12 I=1,M
   12 D=D+A(K,I)*G(I)
      E=A(K,K)-D
      A(K,K)=1./E
      DO 14 I=1,M
   14 A(I,K)=-A(K,K)*G(I)
      DO 16 J=1,M
   16 H(J)=0.
      DO 18 J=1,M
      DO 18 J2=1,M
   18 H(J)=H(J)+A(K,J2)*A(J2,J)
      DO 20 J=1,M
   20 A(K,J)=-A(K,K)*H(J)
      DO 30 I=1,M
      DO 30 J=1,M
   30 A(I,J)=A(I,J)-G(I)*A(K,J)
   50 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE EXPRES(P,WK,LE,TC,VELOC,I,M,PHIE,AML,IDV)

      SUBROTINA QUE CALCULA AS ACOES DE ENGASTAMENTO PERFEITO
      PARA A CARGA MOVEL
      SE IDV=1, CALCULA AS DERIVADAS DAS ACOES PARA O CALCULO DAS
      NOVAS CONDICOES INICIAIS

      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL*8 LE
      DIMENSION AML(29,4)
      DO 50 JJ=1,M
      DO 50 KK=1,4
   50 AML(JJ,KK)=0.
      IF(IDV.EQ.1) GO TO 51
      TI1=1./WK*(1.-DCOS(WK*TC))
      TI2=1./WK*(TC-DSIN(WK*TC)/WK)
      TI3=1./WK*(TC**2-2./WK**2+2./WK**2*DCOS(WK*TC))
      TI4=1./WK*(TC**3-6.*TC/WK**2+6./WK**3*DSIN(WK*TC))
      GO TO 52
   51 TI1=DSIN(WK*TC)
      TI2=1./WK*(1.-DCOS(WK*TC))
      TI3=1./WK*(2.*TC-2./WK*DSIN(WK*TC))
      TI4=1./WK*(3.*TC**2-6./WK**2+6./WK**2*DCOS(WK*TC))
   52 AML(I,1)=P/(1.+PHIE)*((1.+PHIE)*TI1-VELOC/LE*PHIE*TI2-3.*
     1VELOC**2/LE**2*TI3+2.*VELOC**3/LE**3*TI4)
      AML(I,2)=P/(1.+PHIE)*((1.+PHIE/2.)*VELOC*TI2-(2.+PHIE/2.)*
     1VELOC**2/LE*TI3+VELOC**3/LE**2*TI4)
      AML(I,3)=P/(1.+PHIE)*(VELOC/LE*PHIE*TI2+3.*VELOC**2/LE**2*
     1TI3-2.*VELOC**3/LE**3*TI4)
      AML(I,4)=P/(1.+PHIE)*(-PHIE/2.*VELOC*TI2+(-1.+PHIE/2.)*
     1VELOC**2/LE*TI3+VELOC**3/LE**2*TI4)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE MONTAC(N,I,RL,CRL,AML,AC)
C
C     SUBROTINA QUE FAZ A MONTAGEM DO VETOR AC, JA REORDENADO
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      INTEGER RL(60),CRL(60)
      DIMENSION AML(29,4),AC(60)
      IF(RL(2*I-1).EQ.0) GO TO 50
      J1=N+CRL(2*I-1)
      GO TO 51
50    J1=(2*I-1)-CRL(2*I-1)
51    AC(J1)=AC(J1)-AML(I,1)
      IF(RL(2*I).EQ.0) GO TO 52
      J2=N+CRL(2*I)
      GO TO 53
52    J2=(2*I)-CRL(2*I)
53    AC(J2)=AC(J2)-AML(I,2)
      IF(RL(2*I+1).EQ.0) GO TO 54
      K1=N+CRL(2*I+1)
      GO TO 55
54    K1=(2*I+1)-CRL(2*I+1)
55    AC(K1)=AC(K1)-AML(I,3)
      IF(RL(2*I+2).EQ.0) GO TO 56
      K2=N+CRL(2*I+2)
      GO TO 57
56    K2=(2*I+2)-CRL(2*I+2)
57    AC(K2)=AC(K2)-AML(I,4)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE RESULT(D,AC,AML,RL,CRL,S,M,N,ND,LM,LELEM,CPRINT)

      SUBROTINA QUE CALCULA AS REACOES DE APOIO, ACOES NAS
      EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS E IMPRIME OS RESULTADOS

      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      INTEGER RL(60),CRL(60)
      LOGICAL LELEM(29),CPRINT
      DIMENSION D(60),AC(60),AML(29,4),S(60,60),LM(29,4),AR(60),
     1SM(4,4),DM(4),AA(4),AM(4)
      CALCULO DAS REACOES DE APOIO
      DO 10 JJ=N+1,ND
      AR(JJ)=-AC(JJ)
      DO 10 KK=1,N
   10 AR(JJ)=AR(JJ)+S(JJ,KK)*D(KK)
      VOLTA DOS DESLOCAMENTOS E REACOES A NUMERACAO ORIGINAL
      J=N+1
      DO 12 K=1,ND
      JE=ND+1-K
      IF(RL(JE).NE.0) GO TO 11
      J=J-1
      D(JE)=D(J)
      GO TO 12
   11 D(JE)=0.
   12 CONTINUE
      K=N
      DO 14 KE=1,ND
      IF(RL(KE).NE.0) GO TO 13
      AR(KE)=0.
      GO TO 14
   13 K=K+1
      AR(KE)=AR(K)
   14 CONTINUE
      IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS E REACOES DE APOIO
      WRITE(5,100)
  100 FORMAT(///,T24,'DESLOCAMENTOS',T51,'REACOES DE APOIO',//,
     1T12,'NO',T20,'DIRECAO Y',T32,'DIRECAO Z',T48,'DIRECAO Y',
     2T62,'DIRECAO Z',/)
      DO 15 JE=2,ND,2
   15 WRITE(5,101) JE/2,D(JE-1),D(JE),AR(JE-1),AR(JE)
  101 FORMAT(10X,I3,1X,2D15.5,1X,F12.6,2X,F12.6)
      IF(CPRINT) GO TO 26
      CALCULO DOS DESLOCAMENTOS DAS EXTREMIDADES DE ELEMENTOS COM
      LIBERACAO (DIFERENTES DOS DESLOCAMENTOS NODAIS)
      DO 19 II=1,M
      IF(.NOT.LELEM(II)) GO TO 19
      WRITE(5,102) II
```

```
102 FORMAT(///,10X,'DESLOCAMENTOS LIBERADOS NAS EXTREMIDADES D'
   1,'O ELEMENTO  ',I3)
    IF(LM(II,1).EQ.0) GO TO 16
    ID=4*(II-1)+1
    READ(16'ID) (AA(K),K=1,4)
    READ(17'ID) AMLL
    DML=-1./AA(1)*(AA(2)*D(2*II)+AA(3)*D(2*II+1)+AA(4)*
   1D(2*II+2)+AMLL)
    WRITE(5,103) 1,DML
103 FORMAT(/,10X,'DESLOCAMENTO NA DIRECAO  ',I2,'  DA EXTREMID'
   1,'ADE - DM =',D15.5)
 16 IF(LM(II,2).EQ.0) GO TO 17
    ID=4*(II-1)+2
    READ(16'ID) (AA(K),K=1,4)
    READ(17'ID) AMLL
    DML=-1./AA(2)*(AA(1)*D(2*II-1)+AA(3)*D(2*II+1)+AA(4)*
   1D(2*II+2)+AMLL)
    WRITE(5,103) 2,DML
 17 IF(LM(II,3).EQ.0) GO TO 18
    ID=4*(II-1)+3
    READ(16'ID) (AA(K),K=1,4)
    READ(17'ID) AMLL
    DML=-1./AA(3)*(AA(1)*D(2*II-1)+AA(2)*D(2*II)+AA(4)*
   1D(2*II+2)+AMLL)
    WRITE(5,103) 3,DML
 18 IF(LM(II,4).EQ.0) GO TO 19
    ID=4*(II-1)+4
    READ(16'ID) (AA(K),K=1,4)
    READ(17'ID) AMLL
    DML=-1./AA(4)*(AA(1)*D(2*II-1)+AA(2)*D(2*II)+AA(3)*
   1D(2*II+1)+AMLL)
    WRITE(5,103) 4,DML
 19 CONTINUE
    CALCULO DAS ACOES NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS
    WRITE(5,104)
104 FORMAT(///,T29,'ACOES NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS',//,
   1T27,'EXTREMIDADE ESQUERDA',T60,'EXTREMIDADE DIREITA',/,T11,
   2'ELEMENTO',T26,'DIRECAO Y',T41,'DIRECAO Z',T58,'DIRECAO Y',
   3T73,'DIRECAO Z',/)
    DO 25 I=1,M
    DO 20 J=1,4
 20 AM(J)=0.
    READ(15'I) ((SM(JJ,KK),KK=1,4),JJ=1,4)
    DM(1)=D(2*I-1)
    DM(2)=D(2*I)
    DM(3)=D(2*I+1)
    DM(4)=D(2*I+2)
```

```
      DO 22 J=1,4
      AM(J)=AML(I,J)
      DO 22 K=1,4
   22 AM(J)=AM(J)+SM(J,K)*DM(K)
   25 WRITE(5,105) I,(AM(J),J=1,4)
  105 FORMAT(12X,I3,T24,F12.6,3X,F12.6,5X,F12.6,3X,F12.6)
   26 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE RESUL1(XABCIS,D,AML,RL,CRL,CPRINT,JJC,IIC)

      SUBROTINA QUE IMPRIME DESLOCAMENTOS EM NO E ACOES NAS
      EXTREMIDADES DE ELEMENTO ESPECIFICADOS

      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      INTEGER RL(60),CRL(60)
      LOGICAL CPRINT
      DIMENSION D(60),AML(29,4),SM(4,4),DM(4),AM(4)
      IF(RL(2*JJC-1).EQ.0) GO TO 8
      D1=0.
      GO TO 9
    8 D1=D((2*JJC-1)-CRL(2*JJC-1))
    9 IF(RL(2*JJC).EQ.0) GO TO 10
      D2=0.
      GO TO 11
   10 D2=D((2*JJC)-CRL(2*JJC))
   11 WRITE(5,101) XABCIS,D1,D2
  101 FORMAT(10X,F7.4,13X,D15.5,5X,D15.5)
      WRITE(7,200) XABCIS,D1
  200 FORMAT(2X,F7.4,E12.5)
      IF(CPRINT) GO TO 25
      DO 12 J=1,4
   12 AM(J)=0.
      READ(15'IIC) ((SM(JJ,KK),KK=1,4),JJ=1,4)
      IF(RL(2*IIC-1).EQ.0) GO TO 13
      DM(1)=0.
      GO TO 14
   13 DM(1)=D((2*IIC-1)-CRL(2*IIC-1))
   14 IF(RL(2*IIC).EQ.0) GO TO 15
      DM(2)=0.
      GO TO 16
   15 DM(2)=D((2*IIC)-CRL(2*IIC))
   16 IF(RL(2*IIC+1).EQ.0) GO TO 17
      DM(3)=0.
      GO TO 18
   17 DM(3)=D((2*IIC+1)-CRL(2*IIC+1))
   18 IF(RL(2*IIC+2).EQ.0) GO TO 19
      DM(4)=0.
      GO TO 20
   19 DM(4)=D((2*IIC+2)-CRL(2*IIC+2))
   20 DO 21 J=1,4
      AM(J)=AML(IIC,J)
      DO 21 K=1,4
   21 AM(J)=AM(J)+SM(J,K)*DM(K)
      WRITE(5,102) (AM(J),J=1,4)
  102 FORMAT(30X,4F14.6)
      WRITE(7,200) XABCIS,AM(2)
```

```
25 RETURN
   ENC
```

```
      SUBROUTINE VIBRA(I,JCK,W,X,TT,QI,QDI,ND,NVEC,D,TFIX)

      SUBROTINA QUE CALCULA AS VIBRACOES LIVRES RESULTANTES DA
      PASSAGEM DA CARGA

      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION W(20),X(60,20),QI(30,20,20),QDI(30,20,20),D(60),
     1DD(60),Q(20)
      TC=TT-TFIX
      DO 10 JJ=1,ND
   10 DD(JJ)=0.
      DO 11 K=1,NVEC
      WK=W(K)
   11 Q(K)=QI(I,JCK,K)*DCOS(WK*TC)+QDI(I,JCK,K)*DSIN(WK*TC)/WK
      DO 12 JJ=1,ND
      DO 12 KK=1,NVEC
   12 DD(JJ)=DD(JJ)+X(JJ,KK)*Q(KK)
      SUPERPOSICAO DOS DESLOCAMENTOS
      DO 13 JJ=1,ND
   13 D(JJ)=D(JJ)+DD(JJ)
      RETURN
      END
```

```
C     COPPE/UFRJ    PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL/1975
C     PROGRAMA PARA ANALISE DINAMICA DE VIGAS DE PONTES PELO
C     METODO DOS ELEMENTOS FINITOS - APLICACAO A VIGAS GERBER
C     TESE DE MESTRADO   -   PAULO ROBERTO MIANA

      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8 L(29),MASS(60,60),IZ(29),LE,LTOTAL
      LOGICAL LELEM(29),CEST,INERC,CPRINT,CIMP,FIRST
      INTEGER RL(60),CRL(60)
      DIMENSION S(60,60),E(29),DENS(29),PHI(29),A(29),G(29),
     1GAMA(29),LM(29,4),W(20),X(60,20),T(20),SPEED(10),DMASS(20),
     2TM(30),AML(29,4),QI(30,20,20),QDI(30,20,20),AC(60),ACD(60),
     3AA(4),D(60),DE(60),DD(60),Q(20),FORCE(20),DIST(20)
  200 FORMAT(I5)
  500 READ(8,200) NPROB
      IF(NPROB) 1000,1000,1

C     IMPRESSAO DE TITULOS GERAIS

    1 WRITE(5,201)
  201 FORMAT('1',///,10X,80('*'),/,10X,10('*'),T81,10('*'),/,10X,
     110('*'),T25,'COPPE/UFRJ    -    PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL'
     2,'/1975',T81,10('*'),/,10X,10('*'),T81,10('*'),/,10X,10
     3('*'),T42,'TESE DE MESTRADO',T81,10('*'),/,10X,10('*'),T81,
     410('*'),/,10X,10('*'),T41,'PAULO ROBERTO MIANA',T81,10('*')
     5,/,10X,10('*'),T81,10('*'),/,10X,80('*'))
      WRITE(5,202) NPROB
  202 FORMAT(////,10X,80('*'),/,10X,10('*'),T81,10('*'),/,10X,
     110('*'),T27,'ANALISE DINAMICA DE VIGAS DE PONTES PELO M.E.'
     2,'F.',T81,10('*'),/,10X,10('*'),T81,10('*'),/,10X,10('*'),
     3T38,'PROBLEMA NUMERO   ',I2,T81,10('*'),/,10X,10('*'),T81,
     410('*'),/,10X,80('*'),///)
      READ(8,203)
  203 FORMAT('                                                          ')
      WRITE(5,203)
      WRITE(5,230)
  230 FORMAT(////,10X,10('*'),T37,'CARACTERISTICAS DA ESTRUTURA',
     1T81,10('*'))

C     LEITURA DOS DADOS GERAIS DA ESTRUTURA

      READ(8,204) M,NR,NRJ,NM
  204 FORMAT(4I5)
      NJ=M+1
      N=2*NJ-NR
      ND=2*(M+1)
      WRITE(5,205) M,N,NR,NRJ,NM
  205 FORMAT(///,15X,'DADOS GERAIS DA ESTRUTURA',/,10X,'M=',I3,
```

```
  1'     N=',I3,'     NR=',I3,'     NRJ=',I3,'     NM=',I3)
C
C    LEITURA E IMPRESSAO DAS CARACTERISTICAS DOS ELEMENTOS
C
     DO 2 IC=1,M
     READ(8,206) I,LELEM(I),L(I),A(I),IZ(I),E(I),DENS(I),G(I),
    1GAMA(I)
206  FORMAT(I5,L5,7F10.0)
     IF(GAMA(I).EQ.0) GO TO 11
     PHI(I)=12.*E(I)*IZ(I)/(G(I)*GAMA(I)*A(I)*L(I)**2)
     GO TO 2
 11  PHI(I)=0.
  2  CONTINUE
C    CALCULO DO COMPRIMENTO TOTAL DA VIGA
     LTOTAL=0.
     DO 84 I=1,M
 84  LTOTAL=LTOTAL+L(I)
     WRITE(5,207)
207  FORMAT(//,50X,'PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS',//,11X,'I',7X,
    1'L',11X,'A',11X,'IZ',10X,'E',10X,'DENS',8X,'G',10X,'GAMA',
    28X,'PHI',6X,'LELEM',/)
     DO 12 I=1,M
 12  WRITE(5,208) I,L(I),A(I),IZ(I),E(I),DENS(I),G(I),GAMA(I),
    1PHI(I),LELEM(I)
208  FORMAT(10X,I3,8E12.5,3X,L1)
C
C    LEITURA DAS RESTRICOES DOS NOS
C
     DO 30 K=1,ND
     RL(K)=0.
 30  CRL(K)=0.
     WRITE(5,209)
209  FORMAT(//,10X,'RESTRICOES DOS NOS',/,10X,'NO',3X,'DIR Y',3X
    1,'DIR Z',/)
     DO 3 J=1,NRJ
  3  READ(8,210) K,RL(2*K-1),RL(2*K)
210  FORMAT(3I5)
     DO 13 K=1,NJ
 13  WRITE(5,211) K,RL(2*K-1),RL(2*K)
211  FORMAT(10X,I2,4X,I2,6X,I2)
C
C    LEITURA E IMPRESSAO DAS LIBERACOES DOS ELEMENTOS
C
     DO 31 J=1,M
     DO 31 K=1,4
 31  LM(J,K)=0
     IF(NM.EQ.0) GO TO 10
     WRITE(5,212)
212  FORMAT(//,10X,'LIBERACOES NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS',
    1/,22X,'EXT ESQUERDA',4X,'EXT DIREITA',/,10X,'ELEMENTO',5X,
```

```
   2'DIR Y   DIR Z',3X,'DIR Y   DIR Z',/)
    DO 4 IC=1,NM
    READ(8,213) I,(LM(I,J),J=1,4)
213 FORMAT(5I5)
  4 WRITE(5,214) I,(LM(I,J),J=1,4)
214 FORMAT(12X,I3,9X,I2,6X,I2,6X,I2,6X,I2)

    MONTAGEM DA LISTA ACUMULADA DAS RESTRICOES

 10 CRL(1)=RL(1)
    DO 5 K=2,2*NJ
  5 CRL(K)=CRL(K-1)+RL(K)

    LEITURA DO INDICE DEFINIDOR DO CALCULO ESTATICO, DA
    CONSIDERACAO DE INERCIA DE ROTACAO E DA SAIDA DE RESULTADOS

    READ(8,229) CEST,INERC,CPRINT
229 FORMAT(3L5)
    IF(INERC)WRITE(5,233)
233 FORMAT(///,10X,'LEVA-SE EM CONSIDERACAO A INERCIA DE ROTAC'
   1,'AO')
    READ (8,234) CIMP,JJC,IIC
234 FORMAT(L5,2I5)

    MONTAGEM DA MATRIZ DE MASSAS CONSISTENTES

    IM=0
    CALL ASSEM(MASS,M,N,RL,CRL,IM,DENS,E,A,L,IZ,PHI,NM,LM,
   1LELEM,INERC)
    DO 14 ID=1,N
 14 WRITE(19'ID) (MASS(ID,J),J=1,N)

    MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ

    IM=1
    CALL ASSEM(S,M,N,RL,CRL,IM,DENS,E,A,L,IZ,PHI,NM,LM,LELEM,
   1INERC)
    IF(.NOT.CEST) GO TO 32
    DO 33 ID=1,N
 33 WRITE(18'ID)(S(ID,J),J=1,N)

    LEITURA DO NUMERO DE AUTO-VALORES E AUTO-VETORES A CALCULAR

 32 READ(8,220) NEV,NVEC
220 FORMAT(2I5)
    WRITE(5,215)NEV,NVEC
215 FORMAT(///,10X,'NUMERO DE AUTOVALORES    -    NEV=',I3,//,10X
   1,'NUMERO DE AUTOVETORES    -    NVEC=',I3,/)

    CALCULO DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES PELO PROCESSO DE
```

```
      GIVENS-HOUSEHOLDER

      WRITE(5,231)
  231 FORMAT(///,10X,10('*'),T33,'PROPRIEDADES DINAMICAS DA ESTR'
     1,'UTURA',T81,10('*'))
      CALL AUTOX(N,NEV,NVEC,S,MASS,W,X)
      PI=3.14159265358979323846 26
      DO 8 J=1,NEV
      W(J)=1./(DSQRT(W(J))*2.*PI)
    8 T(J)=1./W(J)
      WRITE(5,216)
  216 FORMAT(///,10X,'MODO',3X,'FREQUENCIAS NATURAIS (HZ)',3X,
     1'PERIODOS (S)',/)
      WRITE(5,217) (J,W(J),T(J),J=1,NEV)
  217 FORMAT(10X,I3,T25,F14.6,T45,F10.6)
      WRITE(5,225)
  225 FORMAT(///,10X,'MODO',3X,'FREQUENCIAS CIRCULARES (RD/S)',/)
      DO 6 J=1,NEV
    6 W(J)=2.*PI*W(J)
      WRITE(5,221) (J,W(J),J=1,NEV)
  221 FORMAT(10X,I3,T25,F14.6)
      WRITE(5,218)
  218 FORMAT(///,10X,'DIR',T21,'MODOS NORMAIS DE VIBRACAO',/)
      DO 7 J=1,N
    7 WRITE(5,219) J,(X(J,K),K=1,NVEC)
  219 FORMAT(10X,I3,2X,7F12.6,/,15X,7F12.6,/,15X,7F12.6)

      INVERSAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ ORIGINAL

      IF(.NOT.CEST) GO TO 15
      DO 34 ID=1,N
   34 READ(18'ID) (S(ID,J),J=1,N)
      CALL INVER(S,N)

      CALCULO DA RESPOSTA DINAMICA A UMA CARGA CONCENTRADA MOVEL

   15 READ(8,220) NCAR,NSPEED
      IF(NCAR.NE.0) GO TO 35
      WRITE(5,241)
  241 FORMAT(////,10X,'NAO E PEDIDO O CALCULO DA RESPOSTA DINAMI'
     1,'CA')
      GO TO 500
   35 WRITE(5,242)
  242 FORMAT(////,10X,10('*'),' RESPOSTA DINAMICA DA ESTRUTURA A'
     1,' CARGAS CONCENTRADAS MOVEIS',10('*'))
      LEITURA E IMPRESSAO DO TREM DE CARGAS MOVEIS
      DO 19 JJ=1,NCAR
   19 READ(8,251) JJ,FORCE(JJ),DIST(JJ)
  251 FORMAT(I5,2F10.0)
      READ(8,243) (SPEED(JJ),JJ=1,NSPEED)
```

```
243 FORMAT(8F10.0)
    WRITE(5,244)
244 FORMAT(///,T19,'CARGAS MOVEIS',/,10X,'NUM',3X,'INTENSIDADE'
   1,3X,'DISTANCIA',/)
    DO 18 JJ=1,NCAR
 18 WRITE(5,239) JJ,FORCE(JJ),DIST(JJ)
239 FORMAT(10X,I2,T17,F10.3,T31,F8.3)
    READ(8,245) IK,FRACAO
245 FORMAT(I5,F10.0)
    WRITE(5,246) FRACAO,IK
246 FORMAT(///,10X,'O INTERVALO DE TEMPO CONSIDERADO E',F7.3,
   1'     DO PERIODO NUMERO',I5)

    CALCULO DA MATRIZ DE MASSAS DIAGONALIZADA PELA MATRIZ MODAL

    DO 16 ID=1,N
 16 READ(19'ID) (MASS(ID,J),J=1,N)
    DO 38 JJ=1,N
    DO 36 KK=1,NVEC
    DMASS(KK)=0.
    DO 36 LL=1,N
 36 DMASS(KK)=DMASS(KK)+MASS(JJ,LL)*X(LL,KK)
    DO 37 KK=1,NVEC
    MASS(JJ,KK)=DMASS(KK)
 37 DMASS(KK)=0.
 38 CONTINUE
    COMO A MATRIZ RESULTANTE E DIAGONAL, CALCULAMOS E
    ARMAZENAMOS APENAS OS TERMOS DA DIAGONAL, JA INVERTIDOS
    DO 17 KK=1,NVEC
    DO 39 LL=1,N
 39 DMASS(KK)=DMASS(KK)+X(LL,KK)*MASS(LL,KK)
 17 DMASS(KK)=1./DMASS(KK)

    CALCULO DA RESPOSTA PARA CADA VELOCIDADE DA CARGA

    DO 100 J=1,NSPEED
    VELOC=2.*LTOTAL*SPEED(J)/T(1)
    WRITE(5,247) SPEED(J),VELOC
247 FORMAT(////,10X,10('*'),T27,'PARAMETRO =',F8.4,7X,'VELOCID'
   1,'ADE =',F10.4,T81,10('*'))
    IF(CIMP) WRITE(5,235) JJC,IIC
235 FORMAT(//,10X,'POSICAO',10X,'DESLOCAMENTO NO',I4,8X,'ACOES'
   1,' ELEMENTO',I4,/)
    CALCULO DO TEMPO NECESSARIO PARA A CARGA ATINGIR CADA NO
    TM(1)=0.
    DO 40 JI=2,NJ
 40 TM(JI)=TM(JI-1)+L(JI-1)/VELOC
    CALCULO DAS CONDICOES INICIAIS PARA CADA ELEMENTO, CADA
    CARGA, CADA MODO
    DO 41 J5=1,NCAR
```

```
   CC 41 K5=1,NVEC
   QI(1,J5,K5)=0.
41 QDI(1,J5,K5)=0.
   CC 67 I5=1,M
   LE=L(I5)
   PHIE=PHI(I5)
   TC=TM(I5+1)-TM(I5)
   I6=I5+1
   CC 67 J5=1,NCAR
   P=FORCE(J5)
   CO 67 K5=1,NVEC
   WK=W(K5)
   CO 61 JJ=1,ND
   ACD(JJ)=0.
61 AC(JJ)=0.
   ICV=0
65 CALL EXPRES(P,WK,LE,TC,VELOC,I5,M,PHIE,AML,IDV)
   IF(.NOT.LELEM(I5)) GO TO 64
   DO 63 JI=1,4
   IF(LM(I5,JI).EQ.0) GO TO 63
   ID=4*(I5-1)+JI
   READ(16'ID) (AA(KK),KK=1,4)
   CO 62 JK=1,4
62 AML(I5,JK)=AML(I5,JK)-AA(JK)/AA(JI)*AML(I5,JI)
63 CCNTINUE
64 IF(IDV.EQ.0) CALL MONTAC(N,I5,RL,CRL,AML,AC)
   ICV=ICV+1
   IF(IDV.EQ.1) GO TO 65
   CALL MONTAC(N,I5,RL,CRL,AML,ACD)
   PRCC=0.
   PROD1=0.
   CO 66 JJ=1,N
   PRCC=PROD+X(JJ,K5)*AC(JJ)
66 PROD1=PROD1+X(JJ,K5)*ACD(JJ)
   QI(I6,J5,K5)=QI(I5,J5,K5)*DCOS(WK*TC)+QDI(I5,J5,K5)*
  1CSIN(WK*TC)/WK+DMASS(K5)/WK*PROD
67 QDI(I6,J5,K5)=-QI(I5,J5,K5)*WK*DSIN(WK*TC)+QDI(I5,J5,K5)*
  1CCOS(WK*TC)+DMASS(K5)/WK*PRODI
   CCNSIDERE O PRIMEIRO ELEMENTO E A PRIMEIRA CARGA
   IC=1
   JCK=1
   NCAR1=NCAR
   TDEC=T(IK)*FRACAO
   FIRST=.TRUE.
   NPONT=0
   DO 49 JJ=1,ND
49 C(JJ)=0.
96 JM=JCK
   I=IC
   P=FORCE(JM)
```

```
   TC=TDEC-TM(I)
95 IF(TC.GE.(TM(I+1)-TM(I))) TC=TM(I+1)-TM(I)
   LE=L(I)
   PHIE=PHI(I)
   DO 50 K=1,NVEC
   WK=W(K)
   IDV=0
   CALL EXPRES(P,WK,LE,TC,VELOC,I,M,PHIE,AML,IDV)
   DO 42 JJ=1,ND
42 AC(JJ)=0.
   MODIFICACAO DA MATRIZ AML NO CASO DE ELEMENTO COM LIBERACAO
   IF(.NOT.LELEM(I)) GO TO 45
   DO 44 JI=1,4
   IF(LM(I,JI).EQ.0) GO TO 44
   ID=4*(I-1)+JI
   READ(16'ID) (AA(KK),KK=1,4)
   DO 43 JK=1,4
43 AML(I,JK)=AML(I,JK)-AA(JK)/AA(JI)*AML(I,JI)
44 CONTINUE
   MONTAGEM DO VETOR AC
45 CALL MONTAC(N,I,RL,CRL,AML,AC)
   CALCULO DO DESLOCAMENTO GENERALIZADO NO MODO K
   PROD=0.
   DO 46 JJ=1,N
46 PROD=PROD+X(JJ,K)*AC(JJ)
50 Q(K)=QI(I,JM,K)*DCOS(WK*TC)+QDI(I,JM,K)*DSIN(WK*TC)/WK+
  1CMASS(K)/WK*PROD
   XC=TC*VELOC

   CALCULO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS

   DO 68 JJ=1,NC
68 DD(JJ)=0.
   DO 69 JJ=1,NC
   DO 69 KK=1,NVEC
69 DD(JJ)=DD(JJ)+X(JJ,KK)*Q(KK)
   SUPERPOSICAO DOS DESLOCAMENTOS
   DO 70 JJ=1,ND
70 D(JJ)=D(JJ)+DD(JJ)
   IF(NCAR1.EQ.1) GO TO 74
   VERIFICACAO DA POSICAO DA CARGA SEGUINTE
71 IF(XC.LE.DIST(JM)) GO TO 72
   TC=(XC-DIST(JM))/VELOC
   JM=JM+1
   IF(JM.GT.NCAR) GO TO 74
   P=FORCE(JM)
   GO TO 95
72 IF((I-1).EQ.0) GO TO 74
   IF((XC+L(I-1)).LE.DIST(JM)) GO TO 73
   I=I-1
```

```
      TC=(L(I)+XC-DIST(JM))/VELOC
      JM=JM+1
      IF(JM.GT.NCAR) GO TO 74
      P=FORCE(JM)
      GO TO 95
   73 XC=XC+L(I-1)
      I=I-1
      GO TO 72
      DEFINICAO DA NOVA POSICAO DA PRIMEIRA CARGA
   74 I1=IC
      IF(TDEC.GE.(TM(IC+1)-1.E-10)) GO TO 47
      ABCIS=(TDEC-TM(IC))*VELOC
      TDEC=TDEC+T(IK)*FRACAO
      GO TO 48
   47 TDEC=TM(IC+1)+T(IK)*FRACAO
      ABCIS=L(IC)
      IC=IC+1

      CALCULO DOS ESFORCOS

   48 IF(.NOT.FIRST) GO TO 89
      XABCIS=(TDEC-T(IK)*FRACAO)*VELOC/LTOTAL
      NPONT=NPONT+1
   89 IF(.NOT.CIMP) WRITE(5,248) XABCIS
  248 FORMAT(///,10X,10('*'),T31,'POSICAO DA CARGA (REF.GLOBAL) '
     1,'-',F10.4,T81,10('*'))
      IF(.NOT.CEST.AND.CIMP.AND.CPRINT) GO TO 103
      DO 75 JJ=1,M
      DO 75 KK=1,4
   75 AML(JJ,KK)=0.
      DO 86 II=1,M
      IF(.NOT.LELEM(II)) GO TO 86
      DO 85 JI=1,4
      IF(LM(II,JI).EQ.0) GO TO 85
      ID=4*(II-1)+JI
   85 WRITE(17'ID) AML(II,JI)
   86 CONTINUE
      DO 87 JJ=1,ND
   87 AC(JJ)=0.
      JM=JCK
      P=FORCE(JM)
   88 IF(ABCIS.EQ.L(I1)) GO TO 81
      CARGA NO MEIO DO VAO
      LE=L(I1)
      AML(I1,1)=P/(1.+PHI(I1))*(1.-3.*ABCIS**2/LE**2+2.*ABCIS**3/
     1LE**3+(1.-ABCIS/LE)*PHI(I1))
      AML(I1,2)=P/(1.+PHI(I1))*(ABCIS-2.*ABCIS**2/LE+ABCIS**3/
     1LE**2+PHI(I1)/2.*(ABCIS-ABCIS**2/LE))
      AML(I1,3)=P/(1.+PHI(I1))*(3.*ABCIS**2/LE**2-2.*ABCIS**3/
     1LE**3+ABCIS/LE*PHI(I1))
```

```
      AML(II,4)=P/(1.+PHI(I1))*(-ABCIS**2/LE+ABCIS**3/LE**2-
     1PHI(I1)/2.*(ABCIS-ABCIS**2/LE))
C     MODIFICACAO DA MATRIZ AML NO CASO DE ELEMENTO COM LIBERACAO
      DO 79 II=1,M
      IF(.NOT.LELEM(II)) GO TO 79
      DO 78 JI=1,4
      IF(LM(II,JI).EQ.0) GO TO 78
      ID=4*(II-1)+JI
      READ(16'ID) (AA(KK),KK=1,4)
      READ(17'ID) AMLL
      AMLL=AMLL+AML(II,JI)
      WRITE(17'ID) AMLL
      DO 77 JK=1,4
   77 AML(II,JK)=AML(II,JK)-AA(JK)/AA(JI)*AML(II,JI)
   78 CONTINUE
   79 CONTINUE
C     MONTAGEM DO VETOR AC
   80 CALL MONTAC(N,I1,RL,CRL,AML,AC)
      GO TO 90
C     CARGA NA EXTREMIDADE DO ELEMENTO
   81 IF(RL(2*I1+1).EQ.0) GO TO 82
      K1=N+CRL(2*I1+1)
      GO TO 83
   82 K1=(2*I1+1)-CRL(2*I1+1)
   83 AC(K1)=AC(K1)-P
C     VERIFICACAO DA EXISTENCIA DE MAIS DE UMA CARGA
   90 IF(NCAR1.EQ.1) GO TO 99
      IF(ABCIS.LE.DIST(JM)) GO TO 97
      ABCIS=ABCIS-DIST(JM)
      JM=JM+1
      IF(JM.GT.NCAR) GO TO 99
      P=FORCE(JM)
      GO TO 88
   97 IF((I1-1).EQ.0) GO TO 99
      IF((ABCIS+L(I1-1)).LE.DIST(JM)) GO TO 98
      I1=I1-1
      ABCIS=L(I1)+ABCIS-DIST(JM)
      JM=JM+1
      IF(JM.GT.NCAR) GO TO 99
      P=FORCE(JM)
      GO TO 88
   98 ABCIS=ABCIS+L(I1-1)
      I1=I1-1
      GO TO 97
   99 IF(CIMP) GO TO 103
      CALL RESULT(D,AC,AML,RL,CRL,S,M,N,ND,LM,LELEM,CPRINT)
      GO TO 104
  103 CALL RESUL1(XABCIS,D,AML,RL,CRL,CPRINT,JJC,IIC)
C
C     CALCULO ESTATICO
```

```
104 IF(.NOT.CEST) GO TO 93
    IF(CIMP) GO TO 106
    WRITE(5,249)
249 FORMAT(////,10X,10('*'),T30,'ANALISE ESTATICA PARA CADA PO
   1SICAO DA CARGA',T81,10('*'))
106 DO 91 JK=1,ND
 91 DE(JK)=0.
    CALCULO DOS DESLOCAMENTOS ESTATICOS - A MATRIZ DE RIGIDEZ
    ESTA INVERTIDA
    DO 92 JI=1,N
    DO 92 KI=1,N
 92 DE(JI)=DE(JI)+S(JI,KI)*AC(KI)
    IF(CIMP) GO TO 105
    CALL RESULT(DE,AC,AML,RL,CRL,S,M,N,ND,LM,LELEM,CPRINT)
    GO TO 93
105 CALL RESUL1(XABCIS,DE,AML,RL,CRL,CPRINT,JJC,IIC)

    CALCULO PARA NOVA POSICAO DA CARGA

 93 DO 107 JJ=1,ND
107 D(JJ)=0.
    IF(IC.LE.M.AND.FIRST) GO TO 96
    IF(FIRST) TDEC1=TDEC
    FIRST=.FALSE.
    JCK=1
    NCAR1=NCAR
    IC=M+1
    CALL VIBRA(IC,JCK,W,X,TDEC1,QI,QDI,ND,NVEC,D,TM(NJ))
    IF(NCAR1.EQ.1) GO TO 111
    XC=(TDEC1-TM(NJ))*VELOC
    YC=DIST(JCK)
108 IF(YC.GE.XC) GO TO 109
    TDEC=TDEC1-YC/VELOC
    YC=YC+DIST(JCK+1)
    JCK=JCK+1
    NCAR1=NCAR1-1
    CALL VIBRA(IC,JCK,W,X,TDEC,QI,QDI,ND,NVEC,D,TM(NJ))
    IF(NCAR1.EQ.1) GO TO 111
    GO TO 108
109 XC=XC+L(IC-1)
    IF(YC.GE.XC) GO TO 110
    TDEC=TDEC1-YC/VELOC
    IC=IC-1
    JCK=JCK+1
    NCAR1=NCAR1-1
    XABCIS=TDEC1*VELOC/LTOTAL
    NPONT=NPONT+1
    TDEC1=TDEC1+T(IK)*FRACAO
    GO TO 96
```

```
  110 IC=IC-1
      IF(IC.LE.1) GO TO 111
      GO TO 109
  111 XABCIS=TDEC1*VELOC/LTOTAL
      NPONT=NPONT+1
      DO 114 II=1,M
      DO 114 JJ=1,4
  114 AML(II,JJ)=0.
      DO 115 JJ=1,ND
  115 AC(JJ)=0.
      IF(CIMP) GO TO 112
      WRITE(5,248) XABCIS
      CALL RESULT(D,AC,AML,RL,CRL,S,M,N,ND,LM,LELEM,CPRINT)
      GO TO 113
  112 CALL RESUL1(XABCIS,D,AML,RL,CRL,CPRINT,JJC,IIC)
  113 TDEC1=TDEC1+T(IK)*FRACAO
      IF(TDEC1.LE.(2.*LTOTAL/VELOC)) GO TO 93
      WRITE(7,250) NPONT
  250 FORMAT(2X,I5)
C     CALCULO PARA NOVA VELOCIDADE
  100 CONTINUE
      GO TO 500
 1000 CONTINUE
      END
```

NOTAÇÃO

A - área da seção transversal

A^* - área da seção transversal efetiva

$\underset{\sim}{a}$ - matriz das funções de interpolação

$\underset{\sim}{AML}$ - vetor das ações de engastamento perfeito

$\underset{\sim}{b}$ - matriz que relaciona deslocamentos nodais com deformações

$\underset{\sim}{c}$ - matriz de amortecimento

c - comprimento do vão suspenso de uma viga Gerber

$\underset{\sim}{C}$ - matriz tridiagonal

$\underset{\sim}{D}$ - deslocamentos das extremidades de um elemento

$\underset{\sim}{E}$ - matriz de elasticidade

E - módulo de elasticidade

F - forças nodais equivalentes

f_I - forças de inércia distribuídas

G - módulo de elasticidade transversal

I - momento de inércia

$\underset{\sim}{I}$ - matriz de unidade

$\underset{\sim}{k}^e$ - matriz de rigidez do elemento

$\underset{\sim}{k}$ - matriz de rigidez global

$\underset{\sim}{K}_d$ - matriz de rigidez generalizada

ℓ - comprimento do elemento

L - comprimento total da viga

$\underset{\sim}{L}$ - matriz triangular inferior

$\bar{m}$ - massa por unidade de comprimento

$\underset{\sim}{m}^e$ - matriz de massa de um elemento

$\underset{\sim}{m}$ - matriz de massa global

$\underset{\sim}{M}_d$ - matriz de massa generalizada

M - momento fletor

N - número de graus de liberdade

N_{ij} - função de interpolação

P - intensidade da carga concentrada

p - carregamento transversal

$\underset{\sim}{p}^e$ - vetor das cargas nodais equivalentes do elemento

$\underset{\sim}{p}$ - vetor das cargas nodais equivalentes global

$\underset{\sim}{P}_d$ - vetor das cargas nodais equivalentes generalizado

q - coordenada generalizada

Q - forças generalizadas

$\bar{r}$ - vetor posição

$\underset{\sim}{R}$ - inversa da matriz triangular inferior

T - energia cinética

t - tempo

T_i - período

$\underset{\sim}{U}$ - vetor dos deslocamentos nodais

u - deslocamento na direção x

$\underset{\sim}{u}$ - vetor dos deslocamentos no interior do elemento

V - energia potencial
- esforço cortante

v - velocidade da carga móvel

x - posição segundo o eixo da viga

y - posição segundo a altura da viga

$\underset{\sim}{Y}$ - autovetor

w - deslocamento na direção y

W - trabalho das forças externas

ξ - parâmetro de velocidade

α , β - coeficientes de aspecto de uma viga Gerber

γ - fator de correção ao cisalhamento

λ - autovalor

ω - frequência de vibração

$\underset{\sim}{\phi}$ - modos normais de vibração

$\underset{\sim}{\Omega}^{-2}$ - matriz espectral

$\underset{\sim}{\Phi}$ - matriz modal

ρ - massa específica

Φ_s - parâmetro da deformação por cisalhamento

θ - rotação

δ - variação

$\delta(\ )$ - função de Dirac

FAD - fator de amplificação para deslocamento

FAM - fator de amplificação para momento

MFAD - máximo fator de amplificação para deslocamento

MFAM - máximo fator de amplificação para momento

$\dot{w}$ - derivada de w em relação ao tempo

w' - derivada de w em relação a x