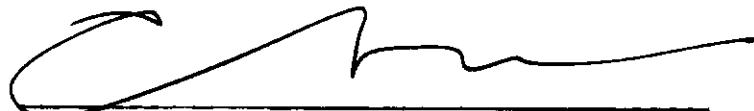


ESTUDO DE FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA
EM SEÇÕES RETANGULARES SIMÉTRICAS

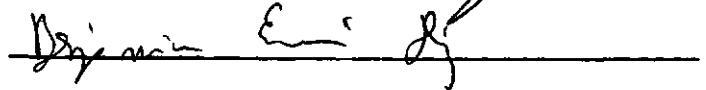
Nelson Szilard Galgoul

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.SC.).

Aprovada por:



Presidente



RIO DE JANEIRO

ESTADO DO RIO DE JANEIRO - BRASIL

MAIO DE 1975

ABSTRACT

A computer program was developed in order to design reinforced rectangular full or hollow concrete sections with symmetrical uniformly distributed reinforcement under biaxial bending. Theoretical bases followed CEB-FIP-1970 recommendations.

Comments on graphical methods for design and checking were also presented.

Studies on approximate methods presented by several authors and codes were analysed as to their security and economic features.

AGRADECIMENTOS

A B. Ernani Diaz pela amizade, estímulo e orientação dada a este trabalho.

Ao Professor Fernando Luiz Lobo Carneiro por ensinamentos ministrados.

A Carlos Henrique Hölick pela orientação dada.

Ao amigo Jaques Arnaldo Szczerbacki pela ajuda prestada.

A Nelson Esnarriaga pela confecção das figuras deste trabalho.

A Suely pelo excelente trabalho de datilografia.

RESUMO

Foi desenvolvido um programa de computador para dimensionamento de peças em concreto armado com seções retangulares cheias ou vazadas com armadura simétrica e uniformemente distribuída submetidas a flexão composta oblíqua. Foram utilizadas as recomendações do CEB - FIP - 1970.

Métodos gráficos de verificação e dimensionamento também foram abordados.

Foram estudados métodos aproximados de dimensionamento e verificação apresentados por vários autores e normas, tendo sido analisados quanto à segurança e economia.

CAPÍTULO I - Introdução	1
CAPÍTULO II - Conceitos Gerais das Recomendações CEB-FIP - 1970	2
2-1 - Coeficientes de Segurança	2
2-2 - Diagramas Tensão-Deformação do Concreto	3
2-3 - Diagrama Tensão-Deformação do Aço	4
2-4 - Hipóteses Gerais para o Dimensionamento	4
CAPÍTULO III - <u>Métodos Gráficos de Verificação e Dimensionamento</u>	7
3-1 - Conceito de Curva de Interação	7
3-2 - Abacos para Dimensionamento a Flexão Composta Reta	10
3-3 - Conceito de Superfície de Interação	12
3-4 - Abacos para Dimensionamento a Flexão Composta Obliqua	15
CAPÍTULO IV - <u>Métodos Numéricos para Verificação e Dimensionamento</u>	17
4-1 - Introdução	17
4-2 - Dispositivos Operacionais para Uso de Computador	17
4-3 - <u>Métodos Numéricos para Verificação</u>	18
4.3.1 - <u>Método dos Oito Pontos</u>	19
4.3.1.1 - Roteiro	19
4.3.1.2 - Comentários	21
4.3.2 - <u>Método dos Erros Sucessivos</u>	22
4.3.2.1 - Roteiro	22

4.3.2.2 - Comentários	25
4-4 - Métodos Numéricos para Dimensionamento	26
4.4.1 - Dimensionamento Através de Verificações Sucessivas	26
4.4.2 - Método Direto de Dimensionamento	26
4.4.2.1 - Introdução	26
4.4.2.2 - Roteiro	27
4.4.2.3 - Comentários	30
CAPÍTULO V - Estudo de Métodos Aproximados	33
5-1 - Introdução	33
5-2 - Métodos Baseados na Redução a Dois Casos de Flexão Composta Reta	33
a.- Método da Superposição	33
b.- Método da Norma Venezuelana	34
c.- Método da Corda	35
d.- Método da Decomposição	35
e.- Método da Norma Russa (Bresler)	37
5-3 - Métodos Baseados na Redução a Um Caso de Flexão Composta Reta	38
a.- Método de A. Aas - Jakobsen	38
b.- Método de Parme	39
c.- Método Proposto por Montoya	40
5-4 - Comentários	41
CAPÍTULO VI - Programa BIAX1	42
6-1 - Manual de Utilização	42
6-2 - Listagem do Programa	46

6-3	Exemplo de utilização do programa BIAX1.	59
	Bibliografia.	60
	Notação.	62

INDICE DE FIGURAS

- 1 - Diagrama tensão-deformação parabólico retangular do concreto.
- 2 - Diagrama tensão-deformação retangular 1.
- 3 - Diagrama tensão-deformação retangular 2.
- 4 - Diagrama tensão-deformação do aço CA-24.
- 5 - Diagrama tensão-deformação do aço CA-50A.
- 6 - Diagrama tensão-deformação do aço CA-50B.
- 7 - Diagrama tensão-deformação recomendável do aço CA-50.
- 8 - Diagrama de deformações de estados limite últimos do CEB.
- 9 - Diagrama de interação para flexão composta reta.
- 10 - Abaco para dimensionamento à flexão composta reta.
- 11 - Perspectiva de diagrama de interação para flexão composta oblíqua.
- 12 - Representação do diagrama de interação para flexão composta oblíqua através de curvas de esforço normal constante no plano $M_x - M_y$.
- 13 - Perspectiva do diagrama de interação $N - e_x - e_y$.
- 14 - Representação de curvas de esforço normal constante no plano $e_x - e_y$.
- 15 - Abaco para dimensionamento à flexão composta oblíqua.
- 16 - Equações que definem as deformações de estado limite último em função de um parâmetro ALFA.
- 17 - Resultados obtidos utilizando o método iterativo dos oito pontos.
- 18a - Representação dos pontos de uma interação no plano ALFA - BETA.

- 18b - Representação dos pontos de uma iteração no plano ex - ey.
- 19 - Método Iterativo de erros sucessivos.
- 20 - Resultado obtido utilizando o método iterativo de erros sucessivos.
- 21 - Representação do tipo de convergência para o método iterativo do programa BIAX1.
- 22 - Resultados obtidos com iterações do programa BIAX1.
- 23 - Método da Superposição.
- 24 - Método da Norma Venezolana.
- 25 - Método da Corda.
- 26 - Redução a um problema de flexão composta reta.
- 27 - Representação da variação de forma de curvas de esforço normal constante no plano ex - ey.
- 28 - Quadro comparativo de armaduras obtidas por diversos métodos.

CAPÍTULO I

Introdução

Será abordado aqui o dimensionamento de peças em concreto armado de seções retangulares cheias ou vazadas, com armadura uniformemente distribuída, submetidas a flexão composta oblíqua. Vários métodos aproximados com esse intuito têm sido apresentados. Os mais conhecidos serão aqui comentados quanto à sua segurança e eficiência.

Foi desenvolvido um programa de computador, cuja metodologia será explanada, que serviu de base ao estudo feito. Sua listagem encontra-se anexa ao final desse trabalho.

Métodos numéricos apresentados em outros trabalhos serão também aqui comentados.

Embora sejam obedecidas as recomendações do CEB-FIP-1970 (ver /1/), as notações aqui utilizadas são da versão 1972 (ver /2/).

Será abordado aqui apenas o dimensionamento de peças não esbeltas de concreto armado submetidas a cargas estáticas. Não será estudado o dimensionamento de seções protendidas bem como problemas de fissuração, fadiga, flambagem, aderência, etc., embora sejam necessários a um dimensionamento a flexão composta.

CAPÍTULO II

Conceitos Gerais das Recomendações CEB-FIP-1970

2-1 Coeficientes de Segurança

A Norma CEB-FIP-1970 adota dois tipos de coeficientes de segurança para as verificações nos diversos estados limite:

1- os coeficientes de minoração para os materiais:

γ_s - para o aço

γ_c - para o concreto;

2- os coeficientes de majoração para as cargas

γ_f - para solicitações produzidas por esforços aplicados diretamente e os produzidos por deformações impostas.

Os valores dos coeficientes de segurança nos estados limite últimos são os seguintes:

$\gamma_s = 1,15$ - para o aço

$\gamma_c = 1,5$ - para concreto moldado "in situ"

$\gamma_c = 1,4$ - para concretos rigorosamente dosados e controlados e empregados em peças prémolhadas em fábricas

$\gamma_f = 1,5$ ou $0,9$ - para cargas permanentes

$\gamma_f = 1,5$ - para cargas móveis

$\gamma_f = 1,2$ - para solicitações provocadas por deformações impostas, com exceção da protensão.

Com estes coeficientes obtém-se as solicitações de cálculo S_d em função das solicitações características S_gk (de cargas permanentes), S_qk (de cargas móveis) e S_{ek} (provocadas por deformações impostas) - (Ver R 21,2 em /1/).

$$S_d = 1,5 \cdot S_{gk} + 1,5 \cdot S_{qk} + 1,2 \cdot S_{ek}$$

ou

$$0,9 \cdot S_{gk} + 1,5 \cdot S_{qk} + 1,2 \cdot S_{ek}$$

Com os coeficientes de minoração γ_s e γ_c são determinadas resistências de cálculo do aço e do concreto em função das resistências características (ver item R.21 em /1/).

2-2 Diagramas Tensão - Deformação do Concreto

Os diagramas de tensão-deformação apresentados pelo CEB-FIP representam uma simplificação das curvas experimentais obtidas de ensaios realizados em prismas com incremento de deformação constante.

Essas experiências mostraram variarem as curvas de tensão-deformação em função de inúmeros parâmetros como por exemplo: forma da seção, idade de aplicação da carga, resistência do concreto, modalidades de aplicação da carga, retração, deformação lenta, qualidade do cimento, etc., (ver /3/ e /4/). Para definição do diagrama normativo, tensão-deformação do concreto, partiu-se da hipótese de que a idade do concreto quando se inicia o carregamento é de 28 dias e que a carga é aplicada gradualmente em vinte minutos sendo então mantida constante (ver /5/).

O coeficiente 0,85 de redução da tensão de ruptura a compressão do concreto medida em corpos de prova cilíndricos nos diagramas de dimensionamento, levam em conta, basicamente a queda de resistência do concreto sob carga constante comparada à resistência obtida sob ação de cargas rápidas (ver /4/ e /5/).

São previstos três diagramas tensão-deformação de cálculo para o concreto. O primeiro é o parabólico retangular (ver figura 1), válido para qualquer seção, tendo sido este o utilizado para cálculo dos esforços gerados internamente pelo concreto no programa de computador desenvolvido; o segundo é o retangular (ver figu-

ra 2), válido para seções cuja largura aumenta em direção às fibras mais comprimidas (por exemplo, vigas T); e o terceiro também retangular (ver figura 3), válido para seções cuja largura diminui em direção às fibras mais comprimidas (por exemplo: seções circulares e triangulares).

2-3 Diagrama Tensão-Deformação do Aço

O diagrama tensão-deformação de cálculo dos diferentes aços é obtido a partir da curva característica dividindo os valores das tensões por 1,15 (coeficiente γ_s já citado) e deslocando os pontos segundo uma paralela à tangente, na origem, à curva tensão-deformação. As curvas para aços de dureza natural e encruados mais usualmente empregados estão representados nas figuras 4, 5 e 6.

Nos casos de existência concomitante de aços de dureza natural e encruados no mercado, aconselha-se o uso de um diagrama característico convencional de dimensionamento, adotando-se a curva do aço encruado até a tensão $f_{0,2}$ (tensão correspondente a uma deformação permanente de 0,2%) e a partir daí, considerar a curva do aço de dureza natural, ou seja, manter a tensão constante igual à tensão de escoramento (ver figura 7).

2-4 Hipóteses Gerais para o Dimensionamento

São as seguintes as hipóteses básicas para dimensionamento no estado limite de ruptura à flexão simples, composta e desviada, adotadas pela Norma CEB-FIP-1970: (para descrição completa ver item R.42, 111 em /1/)

a.- A variação das deformações específicas do concreto ao longo da altura da seção é linear. Essa hipótese corresponde a de Bernouilli que admite que seções perpendiculares à linha de centro da peça continuam planas e perpendiculares à linha de centro deformada durante o processo de flexão e compressão;

- b.- As armaduras estão sujeitas a variações de deformações iguais às deformações específicas do concreto adjacente suposto não fissurado;
- c.- A resistência a tração do concreto é desprezada;
- d.- O diagrama correspondente às deformações específicas do concreto é limitado a 10% na altura da armadura mais tracionada, ficando assim implicitamente limitada a deformação no aço;
- e.- O encurtamento de ruptura do concreto é limitado a 2% no caso de compressão centrada e 3,5% no caso de flexão;
- f.- As curvas tensão-deformação de cálculo do concreto e do aço são as indicadas nos itens R.42, 112 e R.42,113 da Norma CEB-FIP-1970 /1/ (já anteriormente descritos em 2-2 e 2-3);
- g.- No caso de existência de esforço normal, deverá ser considerada uma excentricidade adicional e_a igual a $h/30$ e no mínimo igual a 2cm, sendo h a altura total da peça;
- h.- Os diagramas de deformações específicas do concreto são os esquematizados na figura 8.

Estas hipóteses de cálculo fixam um critério de ruptura para uma peça de concreto armado. Há três casos distintos de ruptura a considerar.

- a.- A inutilização da peça por deformação plástica excessiva do aço mais tracionado ($\epsilon_s = 0,0100$). É o que ocorre para deformações de estados limite últimos nas zonas 1 e 2 da figura 8;
- b.- Ruptura por deformação excessiva do concreto mais comprimido ($\epsilon_{cc} = -0,0035$). Ocorre para estados limite útimos definidos nas zonas 3, 4 e 4a;

c.- Ruptura por deformação excessiva do concreto com toda a seção comprimida. Ocorre para estados limite últimos definidos na zona 5.

O critério de ruptura dado com fixação de encurtamentos máximos, foi definido com o propósito de se obter um método de cálculo simples que permitisse determinar com segurança a capacidade à ruptura de uma peça.

Na realidade, o encurtamento de ruptura do concreto depende de inúmeros fatores como por exemplo, a qualidade do concreto, forma da seção, modalidade de carregamento, etc. (ver /4/ e /5/).

A fixação do alongamento de 10% para a deformação específica do concreto na altura da armadura mais tracionada obriga, indiretamente, a uma limitação na tensão do aço no cálculo a ruptura. Pode-se verificar entretanto que mesmo com a limitação de 5% utilizada pela Norma Alemã 1045 (ver /6/) os aços atingem sempre valores de tensão, nas zonas 1 e 2 da figura 8, acima dos valores correspondentes à tensão $f_{0,2}$ (tensão no aço correspondente à deformação permanente de 0,2%). Constatase também que as diferenças nos valores dos momentos fletores gerados internamente da primeira delimitação 10% para a segunda 5% não são significativas.

CAPÍTULO III

Métodos Gráficos de Verificação e Dimensionamento

3-1 Conceito de Curva de Interação

Consideremos uma seção retangular com armadura uniformemente distribuída previamente fixada, sujeita a flexão composta reta. Seja calcular os esforços internos gerados pela peça para diversas configurações de ruptura, de deformação do concreto por posições de linha neutra correspondentes a todas as faixas definidas na figura 8 utilizando as seguintes equações gerais de equilíbrio:

$$N = f_A 0,85 + \sigma_{cc}(\epsilon_{cc}) \cdot d_A + \sum_{i=1}^n \sigma_s (\epsilon_s) \cdot A_{si}$$

$$M_x = f_A 0,85 \cdot \sigma_{cc}(\epsilon_{cc}) \cdot y \cdot d_A + \sum_{i=1}^n \sigma_s (\epsilon_s) \cdot y_i \cdot A_{si}$$

$$M_y = f_A 0,85 \cdot \sigma_{cc}(\epsilon_{cc}) \cdot x \cdot d_A + \sum_{i=1}^n \sigma_s (\epsilon_s) \cdot x_i \cdot A_{si}$$

Para cada diagrama de encurtamento determina-se a posição da linha neutra e as deformações em cada barra. Com auxílio das deformações do concreto na altura das barras, as tensões de tração ou compressão no aço são determinadas utilizando-se o diagrama tensão-deformação de cálculo do aço empregado, considerando-se que a deformação do aço seja igual à do concreto (hipótese "b" de dimensionamento - item 2-4). As forças nas barras são determinadas multiplicando-se a tensão obtida pela área de aço correspondente. Assim procedendo, a segunda parcela de cada esforço definido pelas equações de equilíbrio fica determinada. (Vale ressaltar desde já que será nulo o momento cujo vetor estiver contido no plano de simetria considerado para aplicação do esforço normal).

Para determinação da primeira parcela das equações gerais correspondente aos esforços gerados pelo concreto a compressão é comum discretizar-se a seção por meio de pequenos retângulos e pro-

ceder-se de forma análoga ao aço, considerando-se várias forças puntiformes, representativas do concreto, aplicadas no centro de gravidade de cada retângulo. Nesse caso porém a determinação analítica desses esforços não oferece maiores problemas.

Para cada posição de linha neutra, calcula-se a resultante geral dos esforços normais e o momento fletor em relação ao centro de gravidade da seção somando-se contribuições de aço e concreto. Com os diversos pares de esforço normal e momento fletor desenha-se um gráfico denominado diagrama de interação ou curva de interação $M-N$. Adota-se usualmente o valor positivo para N se a resultante dos esforços normais for de tração e negativo se for de compressão.

Os pontos obtidos a partir de diagramas indicados na figura 8 geram apenas um ramo da curva, visto que em valor algébrico as deformações do bordo superior são sempre menores que as do bordo inferior. Devido à dupla simetria de seção representamos na figura 9 ambos os ramos da curva já que são também simétricos.

Com respeito à curva final obtida três conclusões importantes podem ser tiradas:

a.- A curva é contínua e fechada.

Isso nos permite definir uma região do plano $M - N$, interior à curva, onde se situam todos os pares $M - N$ que podem ser resistidos pela seção. A curva gerada é o lugar geométrico dos pontos $M-N$ que levam a seção a colapso.

Assim sendo dado um par de valores $M-N$ e conhecida a curva de interação de determinada seção com armadura pré-fixada, a verificação desse par de esforços é extremamente simples.

Ex.:

Para a curva dada o par $M=500\text{tf}, N=-300\text{tf}$ representa um pon-

to interior a curva portanto pode ser resistido;

b.- A segunda propriedade que nos convém ressaltar é proveniente das próprias equações de equilíbrio. Trata-se do fato das contribuições do aço e do concreto serem parcelas independentes. É fácil compreendermos que para uma mesma posição de linha neutra, se aumentarmos linear e uniformemente a área de todas as barras da seção, estaremos variando também linearmente a parcela de contribuição do aço para os esforços globais pois as tensões não variam em cada barra. Dessa propriedade simples mas extremamente importante resulta que conhecidas as deformações de estado limite de ruptura da seção a ser estudada, podemos conhecer a armação necessária para resistir aos esforços aplicados variando linearmente o comprimento do vetor $\overrightarrow{EB-E}$ (ver figura 9). Voltaremos a essa propriedade quando chegarmos à descrição do programa de computador desenvolvido.

c.- A terceira propriedade importante do diagrama de interação é sua convexidade. É ela que nos assegura que um segmento de reta que une quaisquer dois pontos da curva, estará inteiramente contido em seu interior.

Como corolário dessa propriedade, há um princípio que poderíamos chamar de "Princípio da combinação linear de efeitos de carga" que é de grande importância no problema de verificação de uma seção. É o seguinte o seu enunciado:

É condição suficiente para que uma seção resista a uma solicitação S , que S possa ser expressa como uma combinação linear de duas solicitações A e B suportadas por essa seção segundo a seguinte expressão:

$$S = \alpha A + (1 - \alpha) B \quad \text{desde que}$$

$$NA < N_s < NB \quad \text{e} \quad MA < M_s < MB$$

Isso equivale a dizer que o ponto que representa S está sobre o segmento \overline{AB} entre os pontos citados e por tanto interior ao diagrama de interação.

Consideremos duas solicitações compostas como a seguir:

$$Sd1 = 1,5 \text{ Sgk} + 1,5 \text{ Sqk}$$

$$Sd2 = 0,9 \text{ Sgk} + 1,5 \text{ Sqk}$$

Não fora a curva convexa, não seria suficiente verificar para carregamentos de peso próprio e carga móvel as duas combinações $Sd1$ e $Sd2$ pois poderíamos encontrar um carregamento

$$Sd = \gamma g \text{ Sgk} + 1,5 \text{ Sqk}$$

onde $0,9 < \gamma g < 1,5$

exterior ao diagrama e que não seria resistido pela seção com armadura pré-fixada.

Até hoje, contudo, não nos consta que tenha sido possível provar essa convexidade do diagrama de interação como propriedade geral, nem tão pouco estabelecer condições quanto à forma da seção e distribuição da armadura de forma a assegurá-lo (ver /7/). Contudo, as seções estudadas até hoje com diferentes formas e diferentes distribuições de armadura para diversas aplicações sempre resultaram serem convexas. Assim sendo por hora teremos que admitir essa propriedade adicional como simples postulado.

3-2 Abacos para Dimensionamento a Flexão Composta Reta

Utilizando conceitos similares aos empregados na obtenção do diagrama de interação da figura 9, são feitos abacos de dimensionamento (ver figura 10) onde são plotados momentos fletores e esforços normais reduzidos.

$$v \text{ (esforço normal reduzido)} = \frac{N}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

$$\mu \text{ (momento fletor reduzido)} = \frac{M}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}}$$

onde b e h são base e altura da seção retangular, respectivamente. Esses ábacos além de adimensionais apresentam como grande vantagem o fato de serem independentes das dimensões da seção e da resistência de cálculo dos materiais empregados. São função apenas da distribuição pré-fixada de armadura e da curva de cálculo do aço utilizado. Os ábacos desse gênero fornecem a percentagem mecânica de armadura:

$$\omega = \frac{A_s f_y d}{A_c f_{cd}} \quad \text{onde}$$

A_s é a área de aço desejada e
 A_c a área total de concreto, da seção

A obtenção dessas curvas faz-se de modo análogo ao descrito para cálculo da curva de interação adotando-se valores unitários para as dimensões e resistência do concreto. Considera-se uma quantidade de configurações de estados limite de ruptura suficientes para obtenção de uma curva por pontos. Calculam-se para cada configuração de estado limite de ruptura os esforços gerados internamente pelo concreto e por uma armadura unitária. Obtida a curva de interação do concreto isolado, outras curvas são definidas variando-se linearmente a parcela de contribuição do aço para cada configuração adotada.

Apenas para exemplificar o uso da tabela, consideremos uma seção retangular

$$b = 1,00m \quad h = 2,00m \quad d'/h = 0,1$$

$$N_d = -500 \text{ tf} \quad M_d = 800 \text{ tf.m} \quad f_{ccd} = 1000 \text{ tf/m}^2 \quad f_y = 42000 \text{ tf/m}^2$$

$$v = \frac{-500}{1 \times 2 \times 1000} = -0,25 \quad \mu = \frac{800}{1 \times 4 \times 1000} = 0,20$$

Interpolando no gráfico da figura 10 obtemos:

$$\omega = 0,28$$

$$A_s = \frac{0,28 \times 1 \times 2 \times 1000}{42000/1,15} = 0,0153 \text{ m}^2$$
$$A_s = 153 \text{ cm}^2$$

3-3 Conceito de Superfície de Interação

Se agora supusermos a linha neutra inclinada de um certo ângulo β em relação a um dos eixos de simetria da seção e o mantermos constante enquanto calcularmos para configurações de estado limite último esforços gerados correspondentes a pontos de uma curva de interação análoga à obtida anteriormente enquanto variarmos a posição de linha neutra, serão gerados internamente desta feita três esforços: N , M_x , M_y . Apesar de β ser constante a relação $\frac{M_x}{M_y}$ não o é, portanto os pontos gerados não pertencem a um mesmo plano. Essa curva reversa, contudo, mantém em relação ao eixo dos esforços normais as mesmas características da linha gerada para flexão composta reta (ver item 3-1).

Se fizermos agora variar o ângulo β com sucessivos acréscimos, obtendo para cada nova posição outra curva de interação, poderemos gerar uma superfície que contém todas as curvas obtidas e que constitui a superfície de interação para flexão composta oblíqua (ver figura 11).

É importante ressaltar que a superfície assim gerada mantém ainda propriedades similares às da curva de interação da seção simétrica sujeita a flexão composta reta, ou seja:

- a.- Novamente a superfície é contínua e fechada. O espaço interior à superfície é a região na qual estão os pontos representativos de combinações de esforços às quais a seção resiste e a superfície é o lugar geométrico de combinações de esforços que aplicados à seção levam-na à ruptura.
- b.- A propriedade aditiva da contribuição do aço, permite chegarmos facilmente a outra superfície com maior ou menor

percentagem de armadura variando linearmente o comprimento do vetor $\overrightarrow{EB-E}$ (ver figura 11) onde EB e E são pontos gerados para as mesmas deformadas e inclinação de linha neutra com percentuais de armadura zero e $\omega > 0$ respectivamente.

c.- E ainda que não o possamos demonstrar, registramos ter sido constatado que a superfície é convexa para seções regulares estudadas até hoje. Fica assegurado, portanto, que o segmento de reta que une dois pontos quaisquer da superfície encontra-se totalmente interior a ela.

Embora saibamos agora que a verificação de determinada combinação de esforços aplicados à seção em estudo está assegurada desde que o ponto que a representa seja interior à superfície gerada, essa verificação não é tão simples. Inicialmente porque é preciso um grande número de pontos para conhecer com precisão apenas razoável a superfície de interação. Por esse motivo surgem métodos aproximados para verificação que serão comentados mais adiante. O segundo motivo é a dificuldade de fazer-se uma representação gráfica da superfície por ser espacial.

Na figura 12 vemos uma maneira de representar a superfície por meio de curvas de esforço normal constante desenhadas no plano $Mx-My$. Essa representação mostra-se inconveniente porque as curvas de nível superiores se superpõem às inferiores tornando a representação confusa. A verificação da seção para determinada combinação de esforços N , Mx , My faz-se como exemplificado a seguir.

Exemplo:

$$N = -40 \text{ tf} \quad Mx = 28 \text{ tf.m} \quad My = 21 \text{ tf.m}$$

Com auxílio de Mx e My marcamos o ponto P na figura 12 e interpolando linearmente entre curvas de nível obtemos dois valores para esforços normais.

$$N \text{ inferior} = -8t$$

N superior = -56 tf

Valendo-nos da propriedade que tem a curva de ser convexa basta que

N inferior > N > N superior para que o ponto N , M_x , M_y possa estar no interior da superfície.

Nesse caso $-8 > -40 > -56$

Logo a seção pode resistir a esses esforços.

Outra maneira de representar a superfície de interação tornando a verificação gráfica mais intuitiva é a utilização de excentricidades ao invés de momentos. A superfície $N - ex - ey$ tem o aspecto mostrado na figura 13 e a representação no plano $ex - ey$ de curvas de esforço normal constante está representado na figura 14. A obtenção dessas curvas exige maiores cuidados pois como pode ser constatado na figura 13, a superfície já não é mais convexa e a interpolação linear nem sempre é a favor da segurança. Nesse caso recomenda-se em /7/ que seja feita uma interpolação de segundo grau.

Por exemplo:

$$ex = \frac{(N - N_2)(N - N_3)}{(N_1 - N_2)(N_1 - N_3)} ex_1 + \frac{(N - N_3)(N - N_1)}{(N_2 - N_3)(N_2 - N_1)} ex_2 + \frac{(N - N_1)(N - N_2)}{(N_3 - N_1)(N_3 - N_2)} ex_3$$

$$ey = \frac{(N - N_2)(N - N_3)}{(N_1 - N_2)(N_1 - N_3)} ey_1 + \frac{(N - N_3)(N - N_1)}{(N_2 - N_3)(N_2 - N_1)} ey_2 + \frac{(N - N_1)(N - N_2)}{(N_3 - N_1)(N_3 - N_2)} ey_3$$

onde (N_1, ex_1, ey_1) , (N_3, ex_2, ey_2) , (N_3, ex_3, ey_3) são três pontos cujos valores de N mais se aproximam do valor do esforço normal desejado.

Essa representação nos traz duas vantagens de ordem prática:

a.- A função $N = f(ex, ey)$ é unívoca, pois para cada par de excentricidades existe apenas um valor de N de mesmo sinal, o que não ocorria no caso anterior (figura

12) onde havia superposição das curvas de esforço normal constante.

b.- A verificação se faz por simples comparação de esforços normais, ou seja, para mesmas excentricidades será mais desfavorável o carregamento que detiver o maior valor de esforço normal, em valor absoluto.

Utilizando a superfície representada por curvas de esforço normal constante na figura 14 podemos verificar a seção em estudo a determinada combinação de esforços.

Seja: $N = -200\text{tf}$ $M_x = -150\text{ tf.m}$ $M_y = -100\text{ tf.m}$
 $ex = 0,5\text{m}$ $ey = 0,75\text{m}$

Com auxílio de ex , ey obtemos uma normal $N = -175\text{ tf}$, logo a seção não pode resistir a esses esforços.

3-4 Abacos para Dimensionamento a Flexão Composta Oblíqua

Cráficos compactos para dimensionamento de uma seção sujeita a flexão composta oblíqua são apresentados em forma de roseta. Na figura 15 está representado um desses abacos. São utilizados também esforços reduzidos que tornam os abacos adimensionais e dependentes, tal como anteriormente, apenas da distribuição de armadura e da curva de cálculo do aço empregado. São representados em cada quadrante (quando há dois eixos de simetria) ou octante (quando há quatro eixos de simetria) curvas de esforço normal constante para diversas percentagens mecânicas de armadura (ver figura 15).

A construção desses abacos não apresenta maiores dificuldades. Conhecidos o tipo de aço e a distribuição pré-fixada da armadura atribui-se valores unitários às dimensões da peça, à resistência de cálculo do concreto e à percentagem mecânica de armadura. Para cada curva de interação correspondente a um ângulo de inclinação da linha neutra com um dos eixos de simetria, interpola-se o valor dos esforços normais desejados. Unindo os pontos de mesmo esforço normal obtidos a partir de curvas de interação de mesma percentagem de armadura chegamos às curvas de esforço normal constante. Ressaltamos que cada curva de percentagem mecânica diferente

deve ser integralmente construída a partir da curva de interação de concreto e da parcela de contribuição do aço (que será adicionada linearmente) antes de proceder-se a interpolação dos esforços normais pois não há linearidade no plano de esforço normal constante.

Para exemplificar o uso desses ábacos consideremos uma seção retangular com armadura igual nas quatro faces (figura 15).

Seja: $b = 1,00m$ $a = h = 2,00m$ $fcd = 1000 \text{ tf/m}^2$
 $fy = 42000 \text{ tf/m}^2$
 $da = 0,20m$ $db = 0,10m$
 $M_{xd} = M_{ad} = 400 \text{ tf.m}$ $M_{yd} = M_{bd} = 400 \text{ tf.m}$
 $N_d = -300 \text{ tf}$
 $\mu_a = \frac{400}{1 \times 4 \times 1000} = 0,1$
 $\mu_b = \frac{400}{1 \times 2 \times 1000} = 0,2$
 $n = \frac{-300}{1 \times 2 \times 1000} = -0,15$
 $\mu_a < \mu_b$ $\mu_1 = 0,2$ $\mu_2 = 0,1$

Interpolando no ábaco temos:

para $v = 0$ $\omega = 0,63$
para $v = -0,2$ $\omega = 0,54$

Interpolando novamente

$$\omega = 0,63 + \frac{(0,54 - 0,63)}{-0,2} \times (-0,15) = 0,562$$

$$A_s = \frac{0,562 \times 1 \times 2 \times 1000}{42000 / 1,15} = 0,0307 \text{ m}^2$$

$$A_s = 307 \text{ cm}^2$$

Chamamos a atenção para o fato de serem feitas duas interpolações para chegar-se ao " ω " desejado. A precisão dos resultados obtidos utilizando esse tipo de ábaco embora sempre a favor da segurança não é grande.

CAPÍTULO IV

Métodos Numéricos para Verificação e Dimensionamento

4-1 Introdução

Embora seja inegável a eficiência do uso de ábacos para verificação e dimensionamento de seções correntes, a utilização de métodos numéricos com auxílio de computador se justifica quando:

- a.- devem ser verificadas ou dimensionadas muitas combinações de esforços;
- b.- a seção que desejamos verificar ou dimensionar é incomum e não dispomos de ábacos para o caso;
- c.- maior precisão dos resultados se faz necessário, pois vimos que os ábacos "tipo roseta" embora compactos, o são em prejuízo da precisão.

Alguns dos métodos que serão descritos a seguir têm caráter geral e poderiam ser aplicados a uma seção de forma qualquer. Todo o desenvolvimento feito, contudo, assim como exemplos apresentados têm em conta apenas seções retangulares cheias ou vazadas com armadura uniformemente distribuída interna e ou externamente de forma simétrica.

4-2 Dispositivos Operacionais para Uso de Computador

Quer seja o nosso problema apenas o de verificação de uma seção sujeita a determinada combinação de esforços quer seja dimensioná-la, as incógnitas do nosso problema serão sempre as deformações de estado limite último e o ângulo de inclinação da linha neutra.

Faz-se necessário, portanto, definir uma referência a ser usada.

a.- Escolha da Inclinação de Linha Neutra

A inclinação da linha neutra será considerada aqui como o ângulo que esta forma com o semi-eixo positivo "y" medido a partir deste no sentido positivo de rotação até a linha neutra.

b.- Escolha das Deformações de Estado Limite Último

Com o intuito de podermos varrer toda a gama de deformações de estados limite últimos estabelecidos pelo CEB (figura 8) foram utilizadas as equações mostradas na figura 16 sugeridas por Moran em /7/.

A variação de "ALFA" se faz de -1 (tração axial) até +2 (compressão axial). Não há qualquer implicação teórica na forma de escolher o parâmetro ALFA. A forma de variação poderia ser qualquer. Ressaltamos apenas as vantagens introduzidas para efeito de programação. Dovravante poderemos nos referir a uma variação de ALFA ou a uma variação de deformações de estado limite último indistintamente.

4-3 Métodos Numéricos para Verificação

Serão abordados a seguir dois métodos iterativos utilizados para verificação de seções retangulares cheias ou vazadas com armadura uniformemente distribuída e simétrica. Devido à dupla simetria que apresenta esse tipo particular de seção, os momentos bastam ser considerados sempre em valor absoluto. Assim procedendo todo o estudo apresentado estará limitado a um único quadrante reduzindo dessa forma o tempo de processamento.

O emprego de um método iterativo, requer sempre que a precisão dos resultados seja previamente fixada e é óbvio que quanto maior a precisão desejada para os resultados, maior será também o tempo de processamento.

Ambos os métodos que serão descritos a seguir têm como meta a obtenção de um ALFA e um BETA tais que as excentricidades exey do esforço normal gerado internamente, sejam iguais às excentricidades do carregamento aplicado. A verificação se fará então comparando os dois esforços normais, o obtido e o aplicado externamente.

4.3.1 Método dos Oito Pontos

Esse método foi originalmente proposto por Moran em /7/.

4.3.1.1 Roteiro do Método Iterativo

Serão apresentados a seguir a sequência de "passos" indicados em /7/ de modo a obter um ALFA e um BETA tais que o esforço gerado internamente tenha excentricidades iguais àquelas do esforço normal aplicado.

a.- São atribuídos inicialmente valores a ALFA e a BETA. Esses valores poderiam ser quaisquer mas é intuitivo que quanto mais próximos estivermos dos valores reais das deformadas procuradas mais rápida será a convergência.

Os valores sugeridos em /7/ foram testados para várias combinações de esforços e mostraram-se bastante satisfatórios.

$$\text{ALFA (0)} = 0,5$$

$$\text{BETA (0)} = \text{Arc tg (ey/ex)}$$

Fixemos ainda acréscimos DALFA e DBETA de variações dos parâmetros ALFA e BETA respectivamente, inicialmente iguais a 10% das respectivas faixas de variação

$$\begin{aligned} -1 &\leq \text{ALFA} \leq 2 & \text{DALFA} &= 0,3 \\ 0 &\leq \text{BETA} \leq 90 & \text{DBETA} &= 9 \end{aligned}$$

b.- Para cada iteração serão gerados oito pontos ao redor do inicial variando da seguinte forma os valores de

ALFA e de BETA:

- 1- ALFA (1) = ALFA (0) + DALFA
BETA (1) = BETA (0) + DBETA
- 2- ALFA (2) = ALFA (0) + DALFA
BETA (2) = BETA (0)
- 3- ALFA (3) = ALFA (0) + DALFA
BETA (3) = BETA (0) - DBETA
- 4- ALFA (4) = ALFA (0)
BETA (4) = BETA (0) + DBETA
- 5- ALFA (5) = ALFA (0)
BETA (5) = BETA (0) - DBETA
- 6- ALFA (6) = ALFA (0) - DALFA
BETA (6) = BETA (0) + DBETA
- 7- ALFA (7) = ALFA (0) - DALFA
BETA (7) = BETA (0)
- 8- ALFA (8) = ALFA (0) - DALFA
BETA (8) = BETA (0) - DBETA

Os valores de ALFA (i) e BETA (i) ficam naturalmente limitados a seus respectivos intervalos de variação.

$$-1 \leq ALFA \leq 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq BETA \leq 90$$

A cada par ALFA (i), BETA (i), $i = 0, \dots, 8$, corresponde uma distância $d(i)$ igual à distância de ponto de aplicação do esforço normal gerado internamente (ex_i, ey_i) à posição do esforço normal aplicado externamente (ex, ey)

$$d(i) = \sqrt{(ex_i - ex)^2 + (ey_i - ey)^2}$$

- c.- Seja $d(j)$ o menor valor assumido por $d(i)$, $i = 1, \dots, 8$.
- d.- Se $d(j) < d_{max}$ onde d_{max} define a precisão desejada então o processo iterativo chega ao seu final e vamos

para o item "g".

e.- Caso contrário, se $d(j) < d(0)$ então fazemos:

$$\text{ALFA (0)} = \text{ALFA (j)}$$

$$\text{BETA (0)} = \text{BETA (j)}$$

e retornamos ao item "b" para iniciar nova iteração mantendo-se os valores de DALFA e DBETA.

f.- Quando $d(j) > d(0)$ então ALFA (0) e BETA (0) são os mais próximos ao ALFA e BETA desejados que definem um esforço normal gerado internamente com excentricidades iguais às do esforço normal aplicado. Nesse caso reduzimos o intervalo de variação de ALFA e BETA fazendo:

$$\text{DALFA} = \text{DALFA}/2$$

$$\text{DBETA} = \text{DBETA}/2$$

Retornamos a seguir ao item "b" para início da nova iteração.

g.- Obtidos um ALFA e um BETA tais que o esforço normal gerado internamente tem excentricidades iguais ao esforço normal aplicado a verificação se fará comparando os dois esforços normais.

A seção resistirá aos esforços aplicados se o esforço normal gerado for maior que o aplicado e não resistirá em caso contrário.

4.3.1.2 Comentários

Na figura 17 apresentamos uma listagem dos resultados que mostram a convergência para um exemplo de verificação utilizando esse método.

Observada atentamente a lógica do método, poder-se-ia dizer que a convergência nesse caso está sempre assegurada mas tal

fato não deu para vários testes feitos. Constatamos que quando as excentricidades são extremamente grandes (é o caso de uma peça solicitada praticamente a flexão pura), a convergência não é possível. Embora os oito pontos gerados em um diagrama ALFA-BETA ocupem vértices e pontos médios dos lados de um retângulo de lados $2 \cdot \text{DALFA}$ e $2 \cdot \text{BETA}$ (figura 18a) em um diagrama ex - ey os pontos poderiam se dispor como mostrado na figura 18b. A medida que as excentricidades crescem, os pontos gerados tendem a formar-se em linha nas curvas $\text{BETA} = \text{Constante}$ e em breve o processo de convergência é interrompido por erros de precisão do computador utilizado.

4.3.2 Método dos Erros Sucessivos

Esse método foi apresentado em /8/ e tem como grande vantagem a rapidez com que se dá a convergência.

Antes de apresentarmos o roteiro da parte iterativa convém acompanhar na figura 19 a forma pela qual as sucessivas iterações convergem para melhor compreensão do roteiro.

Inicialmente são definidos um vetor de trabalho (distância do centro ao ponto ex₁ - ey₁ definido por ALFA 1 e BETA 1) e um vetor solução (distância do centro ao ponto de aplicação do carregamento externo).

Variando apenas os valores de ALFA, variamos o vetor de trabalho até obtermos para este módulo igual ao do vetor solução. A seguir giramos o vetor de trabalho até coincidir em direção e sentido com o vetor solução através de sucessivas variações desta feita apenas de BETA. Durante a rotação foi introduzido um novo erro no módulo do vetor de trabalho. Reinicia-se então o processo que será prolongado até que o módulo do vetor de trabalho e o ângulo deste com o vetor solução atendam à precisão desejada.

4.3.2.1 Roteiro

Apresentamos a seguir a sequência de instruções do proces-

so iterativo utilizada na confecção de um programa cuja listagem foi dada em /8/.

a.- Assim como no primeiro método, escolhemos um ponto de partida com o qual fica definido o vetor de trabalho, sejam:

$$\text{ALFA 1} = 0,5 \quad \text{e} \\ \text{BETA 1} = \text{Arc. tg (ey/ex)}$$

Tomemos também os acréscimos

$$\text{DALFA} = 0,1 \\ \text{DBETA} = 9$$

b.- O vetor solução fica definido pelo seu módulo

$$R_0 = \sqrt{ex^2 + ey^2} \quad \text{e}$$

pelo ângulo de inclinação da reta que une o ponto de aplicação da carga externa (ex - ey) com a origem
 $\text{FI} = \text{Arc. tg (ey/ex)}$

c.- Podemos definir para os esforços gerados internamente com ALFA 1 e BETA 1 os erros

$$\text{ER01} = \sqrt{ex_1^2 + ey_1^2} - R_0 \\ \text{EFI1} = \text{Arc. tg (ey}_1/\text{ex}_1) - \text{FI}$$

d.- Variamos a seguir apenas o valor de ALFA

$$\text{ALFA 2} = \text{ALFA 1} + \text{DALFA}$$

$$-1 \leq \text{ALFA 2} \leq 2$$

$$\text{BETA 2} = \text{BETA 1}$$

de forma análoga obtemos os erros ER02 e EFI2.

e.- Verificamos se ER02 está dentro da precisão desejada

$$\text{ER02} < 0,001 \cdot R_0$$

Se essa condição não for atendida passamos ao item "f". Caso o seja verificamos também se EFI2 atende a precisão fixada.

$$EFI2 \leq 0,1$$

Satisfeita essa condição, o processo está encerrado e vamos para o item "j", caso contrário passamos ao item "g".

f.- Calcula-se um novo DALFA pelo método da corda:

$$DALFA = \frac{ALFA1 - ALFA2}{ER01 - ER02} \cdot ER02$$

Se DALFA > 0,1 mantemos o valor 0,1 mas tomamos o sinal encontrado e fazemos então

$$ALFA1 = ALFA2$$

$$ER01 = ER02$$

$$ALFA2 = ALFA2 - DALFA, \text{ não esquecendo que } -1 \leq ALFA2 \leq 2$$

Conhecidos os esforços gerados internamente, recalculamos os erros ER02 e EFI2 e voltamos ao item "e".

g.- Tomamos:

$$\text{BETA } 1 = \text{BETA } 2$$

$$\text{EFI } 1 = \text{EFI } 2$$

$$\text{BETA } 2 = \text{BETA } 1 + DBETA$$

$$\text{onde } 0 \leq \text{BETA} \leq 90$$

Para os novos esforços gerados achamos os erros:

$$ER02 \text{ e } EFI2$$

h.- Verificamos se EFI2 atende à tolerância imposta:

$$EFI2 < 0,1$$

Se não for atendida essa verificação passamos ao item "i". Caso o seja verificamos também o erro ER02.

$$ER02 < 0,001 \cdot RO$$

Se essa verificação também for satisfeita o processo iterativo é encerrado e vamos para o item "j", mas em caso contrário fazemos

$$\text{ALFA 1} = \text{ALFA 2}$$

$$ERO 1 = ERO 2$$

e retornamos ao item "d" para reiniciar o acerto do môdulo do vetor de trabalho.

i.- Calculamos um novo valor para DBETA

$$DBETA = \frac{\text{BETA1} - \text{BETA2}}{\text{EFI1} - \text{EFI2}} \cdot \text{EFI2}$$

$$\text{onde } DBETA < 9$$

Se essa verificação não for atendida fazemos $DBETA = 9$ mas mantemos o sinal encontrado. Fazemos a seguir:

$$\text{BETA 1} = \text{BETA 2}$$

$$\text{EFI1} = \text{EFI2}$$

$$\text{BETA 2} = \text{BETA 2} - DBETA$$

$$\text{onde } 0 < \text{BETA} < 90$$

Para esforços gerados internamente, recalculamos os erros $ER02$ e $EFI2$ e retornamos ao item "h".

j.-Obtidos um ALFA e um BETA tais que o esforço normal gerado internamente tenha excentricidades iguais a do esforço normal aplicado a verificação se fará comparando esses esforços normais. A seção resiste se for maior em valor absoluto o esforço normal gerado internamente e sofrerá colapso em caso contrário.

4.3.2.2 Comentários

A convergência por esse método é bem mais rápida que pelo

anterior como já foi dito. Basta ver que para o mesmo exemplo (ver figura 20) foram feitas 15 iterações deste método contra 17 do anterior, e lembramos que a cada iteração do outro método, corresponde o cálculo de oito estados limite últimos enquanto para esse a cada iteração corresponde apenas um.

Constatamos ainda, porém, que para excentricidades pouco maiores que uma vez as dimensões da seção a convergência não se dá. Verificamos que ao girarmos o vetor para corrigir o erro EFI, podemos introduzir um erro no módulo do mesmo talvez maior que o anterior e o processo não convergirá.

4-4 Métodos Numéricos para Dimensionamento

4.4.1 Dimensionamento Através de Verificações Sucessivas

Baseados nos métodos de verificação aqui apresentados, foram desenvolvidos também programas de computador para dimensionamento através de sucessivas verificações de esforço normal fazendo variar uniformemente a percentagem de armadura da seção. A relação variação de esforço normal - variação de % de armadura não é linear. Apesar disso, contudo, foi possível obtermos o valor de esforço normal desejado, com erros inferiores a 1% após 5 ou 6 verificações. Os métodos de verificação utilizando excentricidades que foram apresentados em 4-3 mostraram não serem de caráter geral por não convergirem sempre. Assim sendo, os programas de dimensionamento neles baseados ficam restritos aos casos em que essa convergência se dá, perdendo, portanto, sua generalidade.

4.4.2 Método Direto de Dimensionamento

4.4.2.1 Introdução

Deixando de lado as excentricidades mas guardando a ideia do método de verificação (método dos oito pontos), foi desenvolvi-

do nesse trabalho um novo método iterativo trabalhando desta feita com esforço normal e momentos fletores. Assim podemos nos valer da propriedade que possui a superfície de interação de ser contínua e fechada.

O caso de flexão composta reta foi tratada aqui de forma particular pois BETA é conhecido e disso nos valemos para simplificar o método iterativo e torná-lo mais eficiente.

4.4.2.2 Roteiro

Serão descritos a seguir os "passos" do método iterativo utilizado para confecção do programa BIAXI cuja listagem encontra-se ao final desse trabalho.

a.- Consideremos inicialmente tal como no primeiro método de verificação um ponto de partida:

$$\text{ALFA (0)} = 0,5$$

$$\text{BETA (0)} = \text{Arc. tg (Mx/My)}$$

e também os acréscimos desta feita iguais a:

$$\text{DALFA} = 0,3$$

$$\text{DBETA} = 18$$

b.- Suponhamos existir uma armadura pré-fixada igual a 10% da área de concreto. Calculemos então para as deformações ALFA (0), BETA (0) os pontos:

EB (0) - estado limite último para esforços gerados apenas pelo concreto; e

E (0) - estado limite último para esforços gerados pelo concreto adicionados à parcela de contribuição do aço.

O segmento de reta $\overline{\text{EB (0)} - \text{E (0)}}$, como já foi visto anteriormente, é o lugar geométrico dos pontos que representam os estados limite

últimos (para todos os percentuais de armadura entre 0 e 10%) com deformações e inclinação de linha neutra iguais às implicitamente fixadas por ALFA (0) e BETA(0).

Lembramos ainda que conhecido o ponto EB (0) com percentagem nula de armadura e o ponto E (0) com 10%, a variação da percentagem geométrica de armadura se faz linearmente entre esses dois pontos.

c.- Da mesma forma que anteriormente, podemos definir oito combinações de DALFA e DBETA com o ponto inicial ALFA (0), BETA (0) para obter oito pontos no seu entorno.

1- $ALFA(1) = ALFA(0) + DALFA$
 $BETA(1) = BETA(0) + DBETA$

2- $ALFA(2) = ALFA(0) + DALFA$
 $BETA(2) = BETA(0)$

3- $ALFA(3) = ALFA(0) + DALFA$
 $BETA(3) = BETA(0) - DBETA$

4- $ALFA(4) = ALFA(0)$
 $BETA(4) = BETA(0) + DBETA$

5- $ALFA(5) = ALFA(0)$
 $BETA(5) = BETA(0) - DBETA$

6- $ALFA(6) = ALFA(0) - DALFA$
 $BETA(6) = BETA(0) + DBETA$

7- $ALFA(7) = ALFA(0) - DALFA$
 $BETA(7) = BETA(0)$

8- $ALFA(8) = ALFA(0) - DALFA$
 $BETA(8) = BETA(0) - DBETA$

onde $-1 \leq ALFA(i) \leq 2$ e

$0 \leq BETA(i) \leq 90$

Para cada par ALFA (i), BETA (i) fica definido um segmento de reta EB (i) - E (i) análogo ao descrito em

"b".

Para o caso particular de flexão composta reta, onde BETA é conhecido e constante, são necessários apenas dois estados limite últimos ao invés de oito para garantir a convergência. Nesse caso teríamos:

1- $\text{ALFA}(1) = \text{ALFA}(0) + \Delta \text{ALFA}$
 $\text{BETA}(1) = \text{BETA}(0)$

2- $\text{ALFA}(2) = \text{ALFA}(0) - \Delta \text{ALFA}$
 $\text{BETA}(2) = \text{BETA}(0)$

d.- Seja $d(i)$ a distância do ponto $P(N, Mx, My)$, cuja armadura queremos definir, a cada um dos vetores definidos por $\text{ALFA}(i)$ e $\text{BETA}(i)$, $i = 0, \dots, 8$ (para flexão composta reta, $i = 0, \dots, 2$).

Essa distância pode ser calculada facilmente com auxílio do produto escalar dos vetores

$$\overrightarrow{\text{EB}(i) \cdot \text{E}(i)} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{\text{EB}(i) \cdot \text{P}} \quad (\text{ver figura 21})$$

$$U = |\overrightarrow{\text{EB}(i) \cdot \text{E}(i)}|$$

$$V = |\overrightarrow{\text{EB}(i) \cdot \text{P}}|$$

$$\overrightarrow{\text{EB}(i) \cdot \text{E}(i)} \cdot \overrightarrow{\text{EB}(i) \cdot \text{P}} = U \cdot V \cos \alpha$$

onde α é o ângulo entre os dois vetores

Logo $d(i) = V \cdot \sin \alpha$

e.- Seja $d(j)$ o valor mínimo assumido por $d(i)$, $i = 1, \dots, 8$

(Para flexão composta reta, $i = 1, \dots, 2$)

f.- Se $d(j) < d(0)$ então faz-se

$$d(0) = d(j)$$

$$\text{ALFA}(0) = \text{ALFA}(j)$$

$$\text{BETA}(0) = \text{BETA}(j)$$

e passa-se ao item "g"

Caso contrário faz-se

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha/2$$

$$\Delta\beta = \Delta\beta/2$$

g.- Testa-se a distância $d(0)$ para saber se o processo iterativo pode parar.

Se $d(0) < 0,01 \cdot \text{DIST}$

$$\text{onde } \text{DIST} = \sqrt{N^2 + M_x^2 + M_y^2}$$

o processo iterativo se encerra e passa-se ao item "h". Caso contrário, retorna-se ao item "c" para iniciar nova iteração.

h.- A obtenção da percentagem geométrica de armadura necessária para resistir aos esforços N , M_x , M_y faz agora interpolando linearmente.

Seja $\text{EXT} = V \cdot \cos \alpha$ (ver figura 21)

Se $\text{EXT} < 0$ o ponto é interior à superfície de percentagem zero de armadura e o estado limite último não chegou a ser atingido. Neste caso obviamente as deformações da peça não podem ser avaliadas pois todas as posições do diagrama de deformações proposto pelo CEB dizem respeito à configurações de estado limite último.

Portanto para $\text{EXT} > 0$

$$A_s = A_c \cdot \frac{10}{U} \cdot \text{EXT}$$

Embora o CEB não faça restrições à armação máxima que uma seção pode ter, esse máximo foi limitado por motivo de ordem prática a 10% da área de concreto.

4.4.2.3 Comentários

A figura 22 nos mostra iterações feitas para a mesma com-

binação de esforços utilizada para verificação sendo agora dimensionada com distribuição também igual de armadura.

Os oito vetores que geramos para os oito pares ALFA (i) e BETA(i), $i = 1, \dots, 8$ definem uma superfície piramidal em cujo interior encontra-se o vetor definido por ALFA(0), BETA(0). As sucesivas iterações fazem transladar e girar a pirâmide até que P esteja interior a ela e mais próximo a $\overrightarrow{EB(0) \cdot E(0)}$ que a qualquer dos outros vetores. Quando isso ocorre diminui-se a abertura da pirâmide e reinicia-se o processo até que dentro da precisão estipulada P seja um ponto do vetor $\overrightarrow{EB(0) \cdot E(0)}$.

Para combinações de esforços correspondentes a pontos situados no interior da superfície de interação com percentagem nula de armadura a convergência nem sempre pode ser obtida dessa forma. Isso ocorre porque no interior dessa superfície as arestas da "pirâmide" se cruzam e, por esta não ter forma regular, o vetor $\overrightarrow{EB(0) - E(0)}$ pode passar a não ser mais interior a pirâmide.

Torna-se portanto necessário verificar inicialmente se o ponto correspondente à combinação de esforços dada é interior a essa superfície ou não.

Isso se faz utilizando o mesmo método já descrito anteriormente tomando contudo como vértice da pirâmide um ponto "N" situado sobre o eixo dos esforços normais e define-se cada um dos oito vetores pelo ponto "N" e o ponto situado sobre a superfície com percentagem nula de armadura "EB(I)".

Conhecido o vetor $\overrightarrow{N \cdot EB(I)}$ que contém o ponto P , este será interior a superfície se $|\overrightarrow{N \cdot EB(I)}| > |\overrightarrow{N \cdot Pt}|$. Caso contrário, o uso de armadura é necessário e iniciamos então o processo já descrito anteriormente.

O ponto "N" utilizado no programa BIAXI1 corresponde à metade do máximo esforço normal centrado resistido pela seção de concreto sem armadura.

Convém ressaltar que o vetor $\overrightarrow{N \cdot EB(I)}$ serve apenas para localizar geometricamente o ponto P em relação à superfície de arma-

dura nula e não constitui mais o lugar geométrico de pontos representativos de combinações de esforços de ALFA e BETA constantes como no caso anterior.

Para o caso particular de flexão composta reta os dois vetores gerados são coplanares e definem um ângulo em cujo interior está o vetor $\overrightarrow{EB(0) \cdot E(0)}$. A convergência se faz de maneira análoga. Desloca-se toda a figura até que $\overrightarrow{EB(0) \cdot E(0)}$ seja o vetor mais próximo do ponto solução.

Diminui-se, então, a abertura do ângulo e reinicia-se o processo até que dentro da precisão estipulada P seja um ponto do vetor $\overrightarrow{EB(0) \cdot E(0)}$.

CAPÍTULO V

Estudo de Métodos Aproximados

5-1 Introdução

O dimensionamento de uma seção retangular com armadura distribuída sujeita à flexão composta oblíqua tem sido objeto de várias normas e autores no sentido de se obter maneiras simplificadas e seguras de resolver o problema.

Alguns desses métodos, mais comuns, serão aqui apresentados e comentados.

Dois pontos chaves serão ressaltados:

1. Segurança
2. Economia

5-2 Métodos Baseados na Redução a Dois Casos de Flexão Composta Reta

a.- Método da Superposição

Esse método que é frequentemente usado na prática corrente, considera independentemente os pares de esforços (N , M_x) e (N , M_y). Isso equivale a considerar o esforço normal aplicado nos pontos 1 e 2 da figura 23.

Determina-se uma armadura disposta simetricamente apenas nas fases mais e menos deformadas para cada par N - M separadamente. A armadura final considera a existência simultânea das duas armaduras encontradas.

O uso desse método é totalmente desaconselhável pois não há para ele qualquer base teórica e os resultados

podem ser muito desfavoráveis em termos de segurança. O concreto nesse caso foi considerado duas vezes.

Seja dimensionar, por exemplo, uma seção, tal que:

$$b = 1,0\text{m} \quad h = 2,0\text{m}, \quad d' \cdot b/b = d' \cdot h/h = 0,1\text{m}$$

$$f_{cd} = 1\ 000\text{tf/m}^2 \quad f_y = 42\ 000\text{tf/m}^2$$

$$N = -500\text{tf}, \quad M_x = 700\ \text{tf.m}, \quad M_y = 350\ \text{tf.m}$$

Com auxílio do ábaco da figura 10 obtemos:

$$\text{para } N, M_x \quad A_{s1} = 120\ \text{cm}^2$$

$$\text{para } N, M_y \quad A_{s2} = 120\ \text{cm}^2 \quad A_s = 240\ \text{cm}^2$$

A armadura correta nesse caso seria de $378\ \text{cm}^2$.

Logo esse método não deve ser usado.

b.- Método da Norma Venezuelana

Esse método consiste em considerar uma reta passando por N (figura 24) interceptando os eixos principais da seção nos pontos 1 e 2. A seção deverá ser dimensionada inicialmente com o esforço normal aplicado em 1 e a seguir em 2. As armaduras encontradas são então adicionadas. Na prática corrente, toma-se uma reta tal que as excentricidades e_1 , e_2 sejam o dobro das excentricidades do esforço normal aplicado e dimensiona-se cada caso com armadura simétrica situada apenas nas faces mais e menos deformada. As armaduras obtidas são então somadas. Os resultados desse método estarão sempre do lado da segurança.

Para estudos feitos em /7/, as cargas que levam a seção a ruptura variam entre 1, 1N e 1, 7N para a armadura obtida, onde N é o esforço normal aplicado. Concluímos, portanto, que embora esse método seja seguro não

é econômico por conduzir a armaduras muito maiores que as necessárias (ver exemplos na tabela da figura 28).

c.- Método da Corda

Da mesma forma que no método da Norma Venezolana, consideraremos uma reta passando por N e interceptando os dois eixos de simetria. Nesse caso, contudo, a distribuição de armadura deve ser previamente fixada.

O dimensionamento se fará separadamente para o esforço normal aplicado e o momento fletor M_1 e depois para o esforço normal aplicado e o momento fletor M_2 (ver figura 25). Nesse caso, porém, basta adotar-se a maior das armaduras encontradas e em caso de otimização, fazer girar a reta com ponto fixo em N até que as duas armaduras sejam iguais. Olhando para a figura 25 vemos que devido à convexidade das curvas de esforço normal constante, quando as duas armaduras forem iguais os pontos 1 e 2 estão sobre uma curva de percentagem de armadura $\omega_2 > \omega_1$ onde está o ponto N .

Para o caso particular de seção retangular cheia com armaduras iguais nas quatro faces e recobrimentos proporcionais aos lados, a reta otimizada que passa por N é paralela à diagonal da peça.

É fácil compreender também, à luz desse método, porque a Norma Venezolana é sempre segura e também porque nos leva a armaduras tão elevadas.

Estudos feitos com esse método nos levaram a armaduras no máximo 1,5 vezes maiores que as necessárias.

O método embora sempre a favor da segurança e bem mais econômico que o da Norma Venezolana, não pode ser encarado como ideal.

d.- Método da Decomposição

Esse método consiste em decompor a normal N em duas forças estaticamente equivalentes N_x e N_y , o que conduz a $N_x + N_y = N$

Novamente considera-se uma linha passando pelo ponto de aplicação de N e interceptando os eixos de simetria da peça em 1 e 2, onde serão aplicados N_x e N_y , respectivamente.

N_x e N_y devem ser tais que:

$$N_x \cdot e_1 = M_y$$

$$N_y \cdot e_2 = M_x$$

A seção é dimensionada a flexão composta reta para os esforços N_x , M_x com armadura simétrica disposta apenas nas faces mais e menos deformadas e considerando uma redução na resistência de cálculo do concreto tal que:

$$f_{c1} = \frac{N_x}{N} \cdot f_{cd}$$

Da mesma forma a seção é dimensionada a seguir sob ação dos esforços N_y , M_y e tendo como resistência de cálculo do concreto

$$f_{c2} = \frac{N_y}{N} \cdot f_{cd}$$

A armadura final será obtida admitindo-se a existência simultânea das duas armaduras encontradas.

Como caso particular teríamos uma reta tal que o ponto 2 estivesse no infinito. Nesse caso consideraríamos primeiro o carregamento N , M_x sem qualquer redução na resistência do concreto e a seguir dimensionaríamos a seção para resistir ao momento M_y desprezando totalmente o concreto.

Nenhum apoio teórico pode ser encontrado para esse método. Todavia para os casos estudados, ele mostrou -se sempre do lado da segurança com percentuais de armadu-

ra variando entre 1,00 e 1,37 v es o necessário. Parece tratar-se de um método satisfatório embora pouco utilizado.

c.- Método da Norma Russa (Método de Bresler)

Esse método vem merecer especial aten o, trata-se de um método bastante utilizado.

Exige esse método que seja verificada a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} - \frac{1}{N_0} \quad \text{onde}$$

N_1 -  o maior esforço normal aplicado no ponto 1 (ver figura 23) que a se o pode suportar;

N_2 -  o maior esforço normal aplicado no ponto 2 que a se o pode suportar;

N_0 -  o maior esforço axial de compressão a que pode resistir a se o.

A grande desvantagem nesse caso  o fato de tratar-se de um método apenas de verific o e assim o dimensionamento são poderá ser feito através de verifica es sucessivas o que o torna pouco prático.

Estudos realizados em /7/ mostram que para pequenas percentagens de armadura e também pequenas excentricidades o método torna-se inseguro.

Como exemplo consideremos a seguinte combina o de esforços para efeito de verific o de uma se o retangular $b = 1m$ $h = 2m$ $fcd = 1000tf/m^2$ $fy = 42000tf/m^2$ $N = -500tf$ $M_x = 700 tf.m$ $M_y = 300 tf.m$ $As = 400 cm^2$ com $100 cm^2$ por face e recobrimentos iguais a 10% de cada lado.

$$N_0 = -2795tf \quad N_1 = -772tf \quad N_2 = -900tf$$

Aplicando a equação dada, temos:

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{-772} + \frac{1}{-900} - \frac{1}{-316}$$

$$N_{max} = -478tf$$

logo esses esforços não podem ser resistidos pela seção. Se refizermos o exemplo com 420 cm^2 chegamos a $-500tf$. O dimensionamento correto nos leva a 328 cm^2 .

Logo, comparando com a armadura real necessária são precisos 1,28 vezes mais.

5-3 MÉtodos Baseados na Redução a Flexão Composta Reta em Um Plano de Simetria

Consideremos uma seção retangular com percentagens iguais de armadura nas quatro faces e recobrimentos x e y também iguais.

Sejam A, B e C (ver figura 26) três pontos sobre uma curva de esforço normal constante e armadura constante em um diagrama de excentricidades $ex - ey$. A seção que tem uma percentagem de armadura pré-estabelecida atinge o estado limite de ruptura para um esforço normal N aplicado sobre qualquer ponto da curva. O problema de dimensionar essa seção para um ponto qualquer sobre a curva com excentricidades ex, ey poderá ser reduzido a um dimensionamento equivalente para um ponto de excentricidade e_0 em A ou C.

Se conhecessemos a forma da curva, poderíamos obter a excentricidade equivalente " e_0 ". As equações das curvas de esforço normal constante não podem contudo ser determinadas e torna-se necessário tentar utilizar as equações que mais de perto as representam. Com esse intuito alguns métodos foram apresentados.

a.- MÉtodo de A. Aas - Jakobsen

Nesse método foi feita uma tentativa de aproximação u-

tilizando uma curva circular.

$$e_0 = \sqrt{ex^2 + ey^2}$$

Essa expressão é bastante simples mas satisfatória apenas em alguns casos. Se atentarmos para a figura 27, veremos que as curvas de esforço normal constante tem grandes variações nas suas formas. Podem ser quase retas como A-B1-C e tão angulares quanto A-B5-C.

Em todos os casos em que a curva tiver forma mais achatada que a do círculo, a fórmula de A. Aas - Jakobsen nos fornecerá valores inseguros para o dimensionamento. Em alguns casos os erros relativos cometidos em termos de percentual de armadura podem atingir ou ultrapassar 40%, segundo estudos também realizados em /7/.

b.- Método de Parme

Em virtude das deficiências apresentadas pela utilização da curva circular, propôs Parme que ao invés do círculo, fosse utilizado uma espécie de generalização do mesmo, ou seja

$$e_0 = (ex^m + ey^m)^{\frac{1}{m}}$$

Essas curvas receberam o nome de hiperelipses, onde

$$m = -\log 2 / \log \beta$$

sendo β um parâmetro que tem uma função de achatamento. Para $\beta = 0,5$ por exemplo obtemos $m = 1$ que nos dâ uma reta que representa bem A-B1-C; para $\beta = 1$ temos $m = \infty$ e obtemos uma curva quebrada que representa bem A-B5-C.

A dificuldade de tabelar valores de "m" para múltiplos casos fizeram com que esse método servisse apenas de ponto de partida para outros que aprimoraram as idéias de Parme.

c.- Método Proposto por Montoya

(Manual of Bending and Compression /9/)

Propõe Montoya que seja utilizada a fórmula

$$e_0 = ea + \beta \cdot eb \cdot \frac{a}{b}$$

onde requer-se que

$$\frac{ea}{a} > \frac{eb}{b}$$

β é um coeficiente que depende da normal reduzida v

$$v = \frac{N_d}{a \cdot b \cdot f_{cd}}$$

Os valores de β apresentam-se tabelados para diversos valores de v

v	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	$>1,2$
β	0,6	0,7	0,8	0,9	0,9	0,8	0,7	0,7	0,6	0,6	0,5	0,5	0,4

Se a percentagem mecânica de armadura

$$\omega = \frac{A_{tot} \cdot f_{yd}}{a \cdot b \cdot f_{cd}}$$

obtida for maior que 0,6 o dimensionamento deverá ser refeito aumentando-se o valor de β de 0,1. Por outro lado se o valor de ω for inferior a 0,2 o valor de β poderá ser diminuído de 0,1.

Os coeficientes tabelados são de natureza experimental. Um estudo realizado em /7/ utilizando 220 curvas de esforço normal constante e tomando 11 pontos sobre cada curva indicaram para esse método um erro médio de 6% sempre do lado da segurança.

Apesar de ser limitado a uma seção com armaduras iguais nas quatro faces e recobrimentos proporcionais aos lados, os resultados obtidos por esse método são os melhores proporcionados por um método aproximado.

5-4 Comentários

Na figura 28 apresentamos alguns resultados de um estudo comparativo realizado para dimensionar uma seção retangular cheia com armaduras iguais nas quatro faces (para métodos que exigem distribuição pré-fixada de armadura) e recobrimentos proporcionais aos lados sujeita a flexão composta oblíqua.

Uma rápida inspeção dos valores encontrados nos levaria ao método da decomposição como ideal. Embora não tenhamos encontrado para esse método valores de armaduras inferiores aos necessários o fato dos erros relativos tenderem positivamente a zero nos sugere podermos chegar a valores também desfavoráveis.

Deve ser lembrado que todos os métodos apresentados restringem-se a seções retangulares cheias, para as quais já estão bastante difundidos os ábacos do tipo "roseta" que além de mais precisos são também de mais fácil uso. Assim sendo os métodos aproximados passam a ter uma importância bem menor.

CAPÍTULO VI

Programa BIAXI

6-1 Manual de Utilização

Finalidade: Dimensionamento de seções retangulares cheias ou vazadas com armadura simétrica distribuída, submetidas a flexão composta oblíqua.

Saída: São fornecidas a armação necessária e as deformações no concreto e aço e a inclinação da linha neutra em relação ao eixo y.

Unidades: Toneladas força e metros.

Dados de entrada:

Cartão 1 - Título (até a coluna 72)

Cartão 2 - Col. 1 - 10 Resistência característica do concreto - f_{ck}

Col. 11 - 20 Coeficiente de minoração do concreto - γ_c

Col. 21 - 30 Resistência característica do aço - f_{yk}

Col. 31 - 40 Tipo de aço - A perfurar -1.
- B perfurar 1.

Col. 41 - 50 Coeficiente de minoração do aço - γ_s

Cartão 3 - Col. 1 - 10 Número de seções a dimensionar

Cartão 4 - Col. 1 - 10 Tipo de seção - Cheia perfurar 1.
Vazada perfurar 2.

a) Para seção cheia

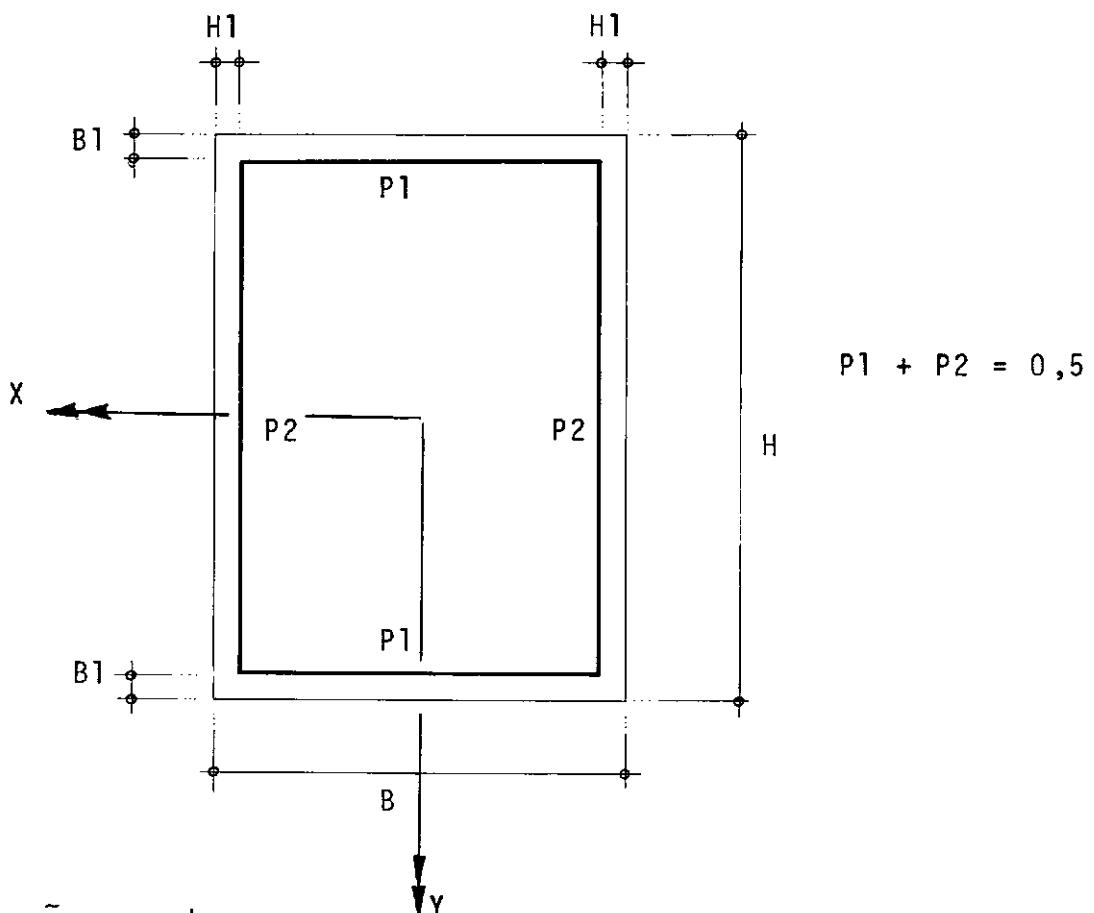
Cartão 5 - Col. 1 - 10 Largura da peça (B)
Col. 11 - 20 Altura da peça (H)

Col. 21 - 30 Recobrimento inferior/superior (B1)

Col. 31 - 40 Recobrimento lateral (H1)

Col. 41 - 50 Percentagem de armadura horizontal por face (P1)

Col. 51 - 60 Percentagem de armadura vertical por face (P2)



b) Para seção vazada

Cartão 5A - Col. 1 - 10 Largura da peça (B)

Col. 11 - 20 Altura da peça (H)

Col. 21 - 30 Recobrimento inferior/superior externo (B1)

Col. 31 - 40 Recobrimento lateral externo (H1)

Col. 41 - 50 Percentagem de armadura horizontal por face externa (P1)

Col. 51 - 60 Percentagem de armadura vertical por face externa (P2)

Cartão 5B - Col. 1 - 10 Dimensão interna horizontal (C)

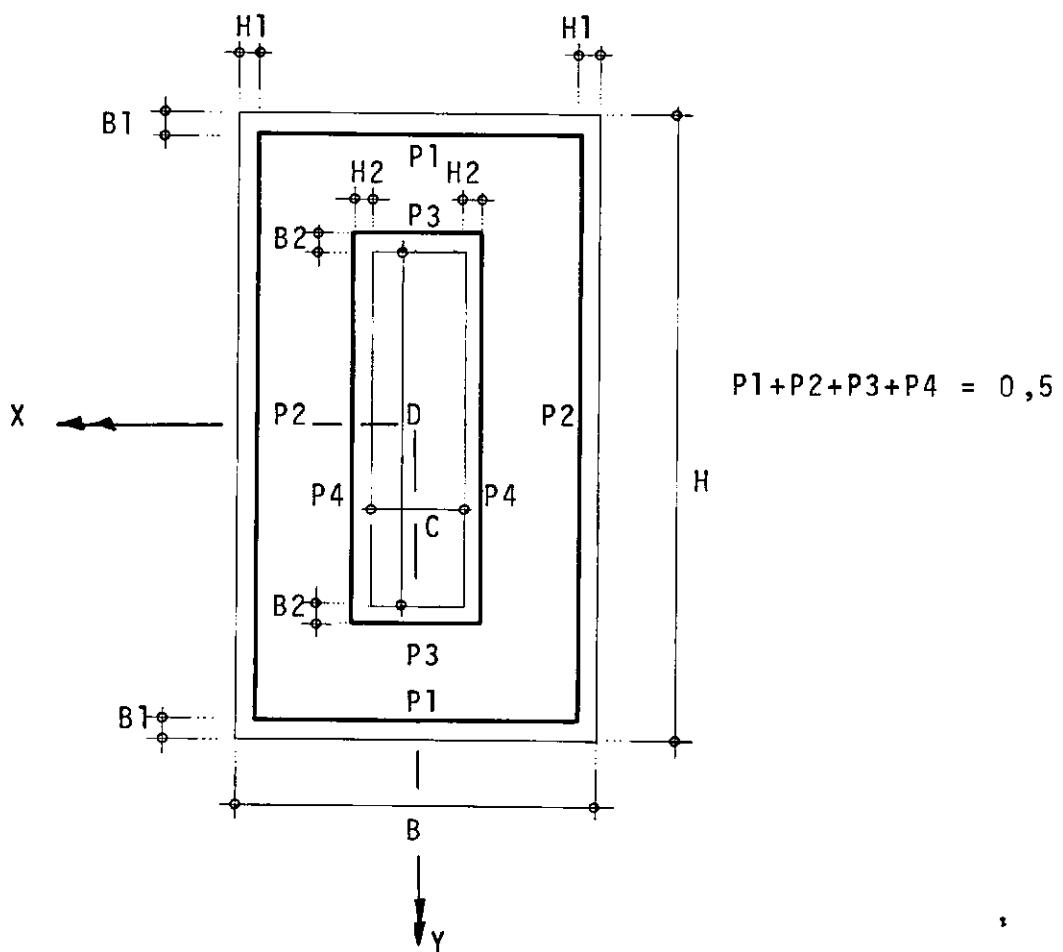
Col. 11 - 20 Dimensão interna vertical (D)

Col. 21 - 30 Recobrimento inferior/superior interno (B2)

Col. 31 - 40 Recobrimento lateral interno (H2)

Col. 41 - 50 Percentagem de armadura horizontal por face interna (P3)

Col. 51 - 60 Percentagem de armadura vertical por face interna (P4)



Cartão 6 - Número de combinações de esforços

Cartão 7 - Col. 1 - 10 Esforço normal relativo ao CG da peça
(Compressão é negativa)

Col. 11 - 20 Momento x

Col. 21 - 30 Momento y

Serão fornecidos tantos cartões do tipo 7 quantos indicados no cartão 6.

Retornar ao cartão 4 para fornecer dados da seção seguinte ou quando não houver ao cartão 1 para iniciar novo problema.

As solicitações dadas nos cartões tipo "7" deverão ser esforços de cálculo pois o programa não fará qualquer incremento.

6-2

Listagem de Computador

```
REAL NU,ND,MXU,MYU
DIMENSION X(108),Y(108),S(108),TIT(18)
COMMON X,Y,S,FCD,FYD,NHIP,N,FAC,IN,ND,ALFA,BETA,NU,EMAXC,EM
1INS,H,B,H1,B1,ITYP,C,D,MXU,MYU,BETON,UN,UXM,UYM,IVEZ
199 WRITE(5,200)
200 FORMAT(1H1//1X,65('=')/1X,'DIMENSIONAMENTO DE SECOES RETAN'
1,'GULARES A FLEXAO COMPOSTA OBLIQUA'/1X,65('='))
READ(8,205)TIT
205 FORMAT(18A4)
WRITE(5,210)TIT
210 FORMAT(//1X,18A4)
READ(8,215)FCK,GC,FYK,IPO,GY
215 FORMAT(3F10.0,I10,F10.0)
IF(IPO)216,218,218
216 WRITE(5,217)FCK,GC,FYK,GY
217 FORMAT(/1X,'PROPRIEDADES DO CONCRETO E ACO (TF/M2)'/5X,'FC'
1,'CK',7X,'GB',6X,'FYK',5X,'TIPO',7X,'GA'/F9.0,F9.2,F9.0,8X,
2'A',F9.2)
GO TO 220
218 WRITE(5,219)FCK,GC,FYK,GY
219 FORMAT(/1X,'PROPRIEDADES DO CONCRETO E ACO (TF/M2)'/5X,'FC'
1,'CK',7X,'GB',6X,'FYK',5X,'TIPO',7X,'GA'/F9.0,F9.2,F9.0,8X,
2'B',F9.2)
220 FCD=FCK/GC
FYD=FYK/GY
BINF=0.
BSUP=90.
PK=10.
KP=0
N=108
READ(8,225)NSE
225 FORMAT(I10)
WRITE(5,230)NSE
230 FORMAT(/1X,'SERAO(S) ESTUDADA(S)',I3,' SECAO(OES)')
DO 5 KK=1,NSE
READ(8,300)ITYP
300 FORMAT(I10)
IF(ITYP)400,400,310
400 STOP
310 GO TO (320,350),ITYP
320 READ(8,330)B,H,H1,B1,P2,P1
330 FORMAT(6F10.0)
WRITE(5,340)B,H,H1,B1,P2,P1
340 FORMAT(//1X,'SECAO RETANGULAR CHEIA (DIMENSOES EM METROS)'/
1/5X,'BASE ALTURA RECOB-BE RECOB-HE ARM-BE ARM-HE'/6F9
2.2)
CALL MONT1 (B,H,B1,H1,P1,P2,S,X,Y,KP,PK)
BETON=B*H
GO TO 380
350 READ(8,360)B,H,H1,B1,P2,P1,C,D,H2,B2,P4,P3
360 FORMAT(6F10.0/6F10.0)
```

```
      WRITE(5,370)B,H,H1,B1,P2,P1,C,D,H2,B2,P4,P3
370  FORMAT(//1X,'SECAO RETANGULAR VAZADA (DIMENSOES EM METROS)')
      1//5X,'BASE ALTURA RECOB-BE RECOB-HE ARM-BE ARM-HE'//6F
      29*2//4X,'VAZ-B VAZ-H RECOB-BI RECOB-HI ARM-BI ARM-HI
      3*6F9.2)
      CALL MONT2 (S,X,Y,B,H,C,D,B1,B2,H1,H2,P1,P2,P3,P4,KP,PK)
      BETON=B*H-C*D
380  READ(8,300)NHIP
      WRITE(5,390)NHIP
390  FORMAT(1X,'SERAO ESTUDADA(S)',I3,' COMBINACAO(OES) DE E'
      1,'SFORCOS (UNID. TF E M)')
      FAC=180./3.141593
      ALFA=2.
      BETA=0.
      IVEZ=1
      CALL INTRA (IPO)
      EN=UN/2.
      DO 5 IN=1,NHIP
      READ(8,103)ND,XM,YM
103  FORMAT(3F10.0)
      IF(ND)1105,1104,1104
1104  IVEZ=2
      GO TO 104
1105  IF(ND+2.*EN)1104,104,104
104  CONTINUE
      DALFA=0.3
      DB=18.
      ND==ND
      XXM=ABS(XM)
      YYM=ABS(YM)
      IF(XXM+YYM)6211,6211,6210
6211  IF(ND)6213,6214,6214
6213  ALFA=-1.
      GO TO 6215
6214  ALFA=2.
6215  BETA=0.
      CALL INTRA(IPO)
      BETA=1.E10
      CALL CADIS (UN,UXM,UYM,NU,MXU,MYU,ND,XXM,YYM,DIST,EXT,U)
      GO TO 42
6210  IF(XXM)6216,6216,6217
6216  BETA=0.
      GO TO 6218
6217  IF(YYM)6219,6219,6212
6219  BETA=90.
6218  RO=SQRT(ND*ND+XM*XM+YM*YM)
      ALFA=0.5
      ALFA1=ALFA
      CALL INTRA(IPO)
      CALL CADIS (UN,UXM,UYM,NU,MXU,MYU,ND,XXM,YYM,DIST,EXT,U)
      CALL CADIS (EN,0.,0.,UN,UXM,UYM,ND,XXM,YYM,TISC,TXE,Z)
      D1=DIST
```

D2=TISD
6220 KIK=0
DO 6000 JI=1,2
GO TO (6001,6002),JI
6001 ALFA=ALFA1-DALFA
GO TO 6003
6002 ALFA=ALFA1+DALFA
6003 IF(ALFA-2.)6005,6005,6004
6004 ALFA=2.
6005 IF(ALFA+1.)6006,6006,6007
6006 ALFA=-1.
6007 CALL INTRA(IPO)
CALL CADIS (UN,UXM,UYM,NU,MXU,MYU,ND,XXM,YYM,DIST,EXT,U)
CALL CADIS (EN,0.,0.,UN,UXM,UYM,ND,XXM,YYM,TISD,TXE,Z)
GO TO (7000,6400),IVEZ
6400 IF(D1=DIST)6000,6000,6008
6008 D1=DIST
T1=EXT
KIK=1
ALFA2=ALFA
IF(DIST-0.01*RO)42,42,6000
7000 IF(D2-TISD)6000,6000,7001
7001 IF(TXE)6000,6000,7701
7701 D2=TISD
KIK=1
ALFA3=ALFA
IF(TISD-0.01*RO)9003,9003,6000
6000 CONTINUE
IF(KIK)6009,6010,6009
6009 GO TO (6013,6011),IVEZ
6013 ALFA1=ALFA3
GO TO 6220
6011 ALFA1=ALFA2
GO TO 6220
6010 DALFA=DALFA/2.
GO TO 6220
6212 RO=SORT(ND*ND+XM*XM+YM*YM)
IF(YYM)2,2,1
1 FI=FAC*ATAN(XXM/YYM)
GO TO 3
2 FI=90.
3 ALFA=0.5
BETA=FI
ALFA1=ALFA
BETA1=BETA
CALL INTRA (IPO)
CALL CADIS (UN,UXM,UYM,NU,MXU,MYU,ND,XXM,YYM,DIST,EXT,U)
CALL CADIS (EN,0.,0.,UN,UXM,UYM,ND,XXM,YYM,TISD,TXE,Z)
D1=DIST
D2=TISD
00013 KIK=0
DO 549 JI=1,8

GO TO(529,530,531,532,533,534,535,536),JI

00529 ALFA=ALFA1+DALFA
BETA=BETA1+DB
GO TO 537

00530 ALFA=ALFA1+DALFA
BETA=BETA1
GO TO 537

00531 ALFA=ALFA1+DALFA
BETA=BETA1-DB
GO TO 537

00532 ALFA=ALFA1
BETA=BETA1+DB
GO TO 537

00533 ALFA=ALFA1
BETA=BETA1-DB
GO TO 537

00534 ALFA=ALFA1-DALFA
BETA=BETA1+DB
GO TO 537

00535 ALFA=ALFA1-DALFA
BETA=BETA1
GO TO 537

00536 ALFA=ALFA1-DALFA
BETA=BETA1-DB

00537 IF(ALFA-2.)539,539,538

00538 ALFA=2.

00539 IF(ALFA+1.)540,541,541

00540 ALFA=-1.

00541 IF(BETA=BSUP)543,543,542

00542 BETA=BSUP

00543 IF(BETA=BINF)544,545,545

00544 BETA=BINF

545 CALL INTRA (IPO)
CALL CADIS (UN,UXM,UYM,NU,MXU,MYU,ND,XXM,YYM,DIST,EXT,U)
CALL CADIS (EN,0.,0.,UN,UXM,UYM,ND,XXM,YYM,TISD,TXE,Z)
GO TO (550,9546),IVEZ

9546 IF(D1=DIST)549,549,547

00547 D1=DIST
T1=EXT
KIK=1
ALFA2=ALFA
BETA2=BETA
IF(DIST=0.01*R0)142,42,549

550 IF(D2=TISD)549,549,551

551 IF(TXE)549,549,5510

5510 D2=TISD
KIK=1
ALFA3=ALFA
BETA3=BETA
IF(TISD=0.01*R0)9003,9003,549

00549 CONTINUE
IF(KIK)23,14,23

```
23      GO TO (24,25),IVEZ
24      ALFA1=ALFA3
      BETA1=BETA3
      GO TO 13
25      ALFA1=ALFA2
      BETA1=BETA2
      GO TO 13
00014  DALFA=DALFA/2.
      DB=DB/2.
      GO TO 13
9003   IF(TXE-Z)975,975,9004
9004   IVEZ=2
      GO TO 104
42      IF(EXT)975,980,980
975    PK=0.
      EMAXC=1.E10
      EMINs=1.E10
      BETA=1.E10
      GO TO 470
980    IF(EXT-U)985,985,990
985    PK=10.*EXT/U
      GO TO 470
990    PK=1.E12
470    SF=PK*BETON*100.
      ND==ND
      IF(XM)1001,1002,1002
1001   EINF==EMAXC/10000.
      ESUP==EMINS/10000.
      GO TO 1004
1002   ESUP==EMAXC/10000.
      EINF==EMINS/10000.
1004   IF(YM)1003,1003,1005
1005   BETA==BETA
1003   WRITE(5,475)ND,XM,YM,SF,ESUP,EINF,BETA
475    FORMAT(1X,'ND',5X,'MD-X',5X,'MD-Y AS(CM2) EPS,SUP EPS.',1,
      'INF INCL.LN',3F9.2,1X,F8.2,2(1X,F8.5),3X,F6.2)
      PK=10.
5      CONTINUE
      GO TO 199
      END
```

SUBROUTINE MONT1 (B,H,B1,H1,P1,P2,S,X,Y,KP,PK)
DIMENSION X(108),Y(108),S(108)

C
C SECAO CHEIA
C
C SUBROTINA QUE GERA A DISTRIBUICAO DE ARMADURA
C

```

1 IF(KP)5,5,45
5 KP=1
  X(1)=B/2.
  Y(1)=H/2.
  X(2)=-B/2.
  Y(2)=H/2.
  X(3)=B/2.
  Y(3)=-H/2.
  X(4)=-B/2.
  Y(4)=-H/2.
  DO 10 I=5,8
  X(I)=0.
10 Y(I)=0.
45 T1=(B-2.*B1)/24.
  T2=(H-2.*H1)/26.
  P=PK*B*H/100.
  DO 40 I=1,50
  K=8+I
  S(K)=P2*P/25.
  IF(I=25)125,25,30
25 X(K)=B1-B/2.+(I-1)*T1
  Y(K)=H1-H/2
  GO TO 40
30 J=I-25
  X(K)=B1-B/2.+(J-1)*T1
  Y(K)=H/2-H1
40 CONTINUE
  DO 50 I=1,2
  DO 50 J=1,25
  K=58+(I-1)*25+J
  S(K)=P1*P/25.
  X(K)=(-1)**I*(B/2-B1)
50 Y(K)=J*T2-H/2.+H1
  RETURN
  END

```

```
SUBROUTINE MONT2 (S,X,Y,B,H,C,D,B1,B2,H1,H2,P1,P2,P3,P4,KP,  
1PK)  
DIMENSION X(108),Y(108),S(108)  
  
SECAO VAZADA  
  
SUBROTINA QUE GERA A DISTRIBUICAO DE ARMADURA  
  
IF(KP)5,5,42  
KP=1  
X(1)=B/2.  
Y(1)=H/2.
```

```
X(2)=-B/2.
Y(2)=H/2.
X(3)=B/2.
Y(3)=-H/2.
X(4)=-B/2.
Y(4)=-H/2.
X(5)=C/2.
Y(5)=D/2.
X(6)=-C/2.
Y(6)=D/2.
X(7)=C/2.
Y(7)=-D/2.
X(8)=-C/2.
Y(8)=-D/2.
42 T1=(B-2.*B1)/12.
T2=(H-2.*H1)/14.
T3=(C+2.*B2)/11.
T4=(D+2.*H2)/13.
P=PK*(B*H-C*D)/100.
DO 60 I=1,26
K=8+I
S(K)=P2*P/13.
IF(I=13)45,45,50
45 X(K)=B1-B/2.+(I-1)*T1
Y(K)=H1-H/2.
GO TO 60
50 J=I-13
X(K)=B1-B/2.+(J-1)*T1
Y(K)=H/2.-H1
60 CONTINUE
DO 80 I=1,2
DO 80 J=1,13
K=34+(I-1)*13+J
S(K)=P1*P/13.
X(K)=(-1)**I*(B/2-B1)
80 Y(K)=J*T2-H/2.+H1
DO 100 I=1,24
K=60+I
S(K)=P4*P/12.
IF(I=12)85,85,90
85 X(K)=-B2-C/2.+(I-1)*T3
Y(K)=-(H2+D/2)
GO TO 100
90 J=I-12
X(K)=-B2-C/2.+(J-1)*T3
Y(K)=H2+D/2.
100 CONTINUE
DO 120 I=1,2
DO 120 J=1,12
K=84+(I-1)*12+J
S(K)=P3*P/12.
X(K)=(-1)**I*(C/2+B2)
```

```
120 Y(K)=J*T4-(D/2.+H2)
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
SUBROUTINE ERRO (I,J,K)
```

```
WRITE(5,1)I,J,K
```

```
1 FORMAT(8(/),1X,'FOI CONSTATADO ERRO NO PROGR. NUM. ',I3,  
1' DO TIPO ',I4,' NA DECLARACAO NUM. ',I5,8(/))
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
SUBROUTINE CADIS(F,FX,FY,G,GX,GY,XN,X,Y,DIST,EXT,U)
```

```
C  
C SUBROTINA QUE CALCULA A DISTANCIA DE UM PONTO A UMA RETA  
C
```

```
A1=G-F
```

```
B1=GX-FX
```

```
C1=GY-FY
```

```
A2=XN-F
```

```
B2=X-FX
```

```
C2=Y-FY
```

```
U=SQRT(A1*A1+B1*B1+C1*C1)
```

```
V=SQRT(A2*A2+B2*B2+C2*C2)
```

```
UV=A1*A2+B1*B2+C1*C2
```

```
COSA=UV/(U*V)
```

```
SINA=SQRT(1.-COSA*COSA)
```

```
DIST=V*SINA
```

```
EXT=V*COSA
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
SUBROUTINE INTRA(IP0)
```

```
REAL NU,ND,MXU,MYU
```

```
DIMENSION X(108),Y(108),S(108),R(6),XX(6),YY(6)
```

```
COMMON X,Y,S,FCD,FYD,NHIP,N,FAC,IN,ND,ALFA,BETA,NU,EMAXC,EM  
1INS,H,B,H1,B1,ITYP,C,DD,MXU,MYU,BETON,UN,UXM,UYM,IVEZ
```

```
C  
C SUBROTINA QUE GERA OS ESFORCOS DE ESTADO LIMITE ULTIMO  
C
```

```
SENB=SIN(BETA/FAC)
```

```
COSB=COS(BETA/FAC)
```

```
SENA=COSB
COSA=SENB
XMAXC=B/2.*COSB+H/2.*SENB
XMINC=-XMAXC
XMIN=-B/2.-B1)*COSB-(H/2.-H1)*SENB
A=XMAXC-XMINC
D=XMAXC-XMIN
DELTA=D/A
IF(ALFA)17,17,18
17 EMAXC=100.*ALFA
EMINS=-100.
GO TO 23
18 IF(ALFA=.259*DELTA)19,19,20
19 EMAXC=100.*ALFA/(DELTA-ALFA)
EMINS=-100.
GO TO 23
20 IF(ALFA=1.)21,21,22
21 EMAXC=35.
EMINS=35.*(ALFA-DELTA)/ALFA
GO TO 23
22 EMAXC=50.-15.*ALFA
EMINS=35.*(1.-DELTA)+(ALFA-1.)*(20.-35.*(1.-DELTA))
23 NU=0.
MXU=0.
MYU=0.
IF(ALFA)26,26,27
27 IF(ABS(ALFA-2.)=1.E-4)127,127,227
127 NU=0.85*FCD*BETON
GO TO 26
227 DO 10 KJ=1,8
XN=X(KJ)*COSB+Y(KJ)*SENB
00010 S(KJ)=EMAXC*(XN-XMIN)/D+EMINS*(XMAXC-XN)/D
U=B
V=H
KKK=1
I=0
K=0
DO 14 J=1,6
00014 R(J)=0.
00011 ARC=ATAN(U/V)*FAC
IF(BETA-ARC)13,12,12
00012 U1=U*SENA
U2=U/COSA
IF(S(I+1))9,9,111
111 IF(SENA)16,16,112
112 CALL ESFOR(S(I+1),S(I+2),0.,U2,U1,R(K+1),YO,FCD,KKK)
YO=YO/(2.*SENA*COSA)
XX(K+1)=YO*COSA
YY(K+1)=V/2.+((YO-U2)/2.)*SENA
IF(S(I+2))15,15,16
00016 U3=(X(I+1)-X(I+4))*COSB+(Y(I+1)-Y(I+4))*SENB-2.*U1
CALL ESFOR (S(I+2),S(I+3),U2,U2,U3,R(K+2),YO,FCD,KKK)
```

```
XX(K+2)=0.
YY(K+2)=(YO-U3/2.)/SENB
IF(S(I+3))15,15,116
116 IF(SFNA)15,15,7
7 CALL ESFOR (S(I+3),S(I+4),U2,0.,U1,R(K+3),YO,FCD,KKK)
YO=(U1-YO)/(2.*SENA*COSA)
XX(K+3)==YO*COSA
YY(K+3)==V/2.+ (U2/2.-YO)*SENA
GO TO 15
00013 U1=V*SENB
U2=V/COSB
IF(S(I+1))9,9,120
120 IF(SENB)8,8,121
121 CALL ESFOR (S(I+1),S(I+3),0.,U2,U1,R(K+1),YO,FCD,KKK)
YO=YO/(2.*SENB*COSB)
XX(K+1)=U/2.+ (YO-U2/2.)*SENB
YY(K+1)=YO*COSB
IF(S(I+3))15,15,8
00008 U3=(X(I+1)-X(I+4))*COSB+(Y(I+1)-Y(I+4))*SENB-2.*U1
CALL ESFOR (S(I+3),S(I+2),U2,U2,U3,R(K+2),YO,FCD,KKK)
XX(K+2)=(YO-U3/2.)/COSB
YY(K+2)=0.
IF(S(I+2))15,15,199
199 IF(SENB)15,15,99
99 CALL ESFOR (S(I+2),S(I+4),U2,0.,U1,R(K+3),YO,FCD,KKK)
YO=(U1-YO)/(2.*SENB*COSB)
XX(K+3)==U/2.+ (U2/2.-YO)*SENB
YY(K+3)==YO*COSB
00015 GO TO (9,5),ITYP
00005 KKK=KKK-2
IF(KKK+119,6,9
6 U=C
V=DD
I=4
K=3
GO TO 11
00009 DO 25 K=1,6
NU=NU+R(K)
MXU=MXU+R(K)*YY(K)
00025 MYU=MYU+R(K)*XX(K)
26 UN=NU
UXM=MXU
UYM=MYU
GO TO (2222,2223)+IVEZ
2223 DO 24 I=9,N
XN=X(I)*COSB+Y(I)*SENB
EPS=EMAXC*(XN-XMINS)/D+EMINS*(XMAXC-XN)/D
CALL ACO (FYD,EPS,SIG,IPO)
NU=NU+SIG*S(I)
MXU=MXU+SIG*S(I)*Y(I)
MYU=MYU+SIG*S(I)*X(I)
24 CONTINUE
```

2222 RETURN
END

SUBROUTINE ESFOR (ES,EI,BS,BI,H,R,YO,FCD,KKK)
C
C SUBROTINA QUE CALCULO ESFORCOS GERADOS PELO CONCRETO
C
X1=0.
Y1=0.
HR=0.
IF(H-1.E-6)30,30,40
30 YO=0.
RETURN
40 F=-(BI-BS)/H
IF(EI-20.)129,25,25
25 BR=BI
HR=H
C=0.
D=0.
E=1.
K=3
GO TO 20
26 R=XN
YO=ABS(XM/R)
RETURN
29 IF(ES-20.)10,50,1
50 HR=H
GO TO 55
00001 HR=H*(ES-20.)/(ES-EI)
55 BR=F*(H-HR)+BI
C=0.
D=0.
E=1.
K=1
GO TO 20
00002 Y1=XM/XN-HR+H
X1=XN
00010 HP=(ES*H)/(ES-EI)
IF(HP-H)4,3,3
00003 HP=H
C=-((ES-EI)/(20.*H))**2
D=2.*(ES-EI)*(20.-EI)/(400.*H)
E=1.-((20.-EI)/20.)**2
GO TO 5
4 C=-(ES/(20.*HP))**2
D=ES/(10.*HP)
E=0.
00005 BR=F*(H-HP)+BI

```
HR=HP=HR
K=2
GO TO 20
6 Y2=XM/XN-HP+H
X2=XN
R=X1+X2
YO=ABS((X1*Y1+X2*Y2)/R)
RETURN
20 XN=0.85*FCD*(C*F*HR**4/4.+ (C*BR+D*F)*HR**3/3.+ (D*BR+E*F)*HR
1*HR/2.+E*BR*HR)*KKK
XM=0.85*FCD*(C*F*HR**5/5.+ (C*BR+D*F)*HR**4/4.+ (D*BR+E*F)*HR
1**3/3.+E*BR*HR*HR/2.)
GO TO (2,6,26),K
END
```

SUBROUTINE ACO (RAC,ESA,S,IPO)

```
C
C SUBROTINA QUE CALCULA A TENSAO NO ACO PARA DEFORMACAO DADA
C
EAA=ESA/10000.
IYP=IPO+2
GO TO (50,41,1),IYP
1 TOL=RAC/100.
FE=0.002+RAC/21.E6
IF(FE-ABS(EAA))70,70,2
2 T=0.7*RAC
U=T
IF(ABS(EAA)-T/21.E6)10,10,20
10 S=EAA*21.E6
GO TO 80
20 DO 30 M=1,100
T=U
EA1=T/21.E6+0.823*(T/RAC-0.7)**5
DEA1=1./21.E6+4.115/RAC*(T/RAC-0.7)**4
U=T+(ABS(EAA)-EA1)/DEA1
IF(ABS(T-U)-TOL)40,40,30
30 CONTINUE
IF(ABS(T-U)-TOL)40,40,41
41 CALL ERRO (41,41,41)
40 S=SIGN(U,EAA)
GO TO 60
50 S=21.E6*EAA
60 IF(RAC-ABS(S))70,80,80
70 S=SIGN(RAC,EAA)
80 CONTINUE
RETURN
END
```

=====
DIMENSIONAMENTO DE SECOES RETANGULARES A FLEXAO COMPOSTA OBLIQUE
=====

EXEMPLOS PARA A TABELA DA FIGURA 28

PROPRIEDADES DO CONCRETO E ACO (TF/M2)

FCCK	GB	FYK	TIPO	GA
1800.	1.50	42000.	A	1.15

SERA(O) ESTUDADA(S) 1 SECAO(OES)

SECAO RETANGULAR CHEIA (DIMENSOES EM METROS)

BASE	ALTURA	RECOR-BE	RECOR-HE	ARM-BE	ARM-HE
1.00	1.50	0.15	0.10	0.25	0.25

SERA(O) ESTUDADA(S) 1 COMBINACAO(OES) DE ESFORCOS (UNID. TF E M)

ND	MD-X	MD-Y	AS(CM2)	EPS.SUP	EPS.INF	INCL.LN
-500.00	375.00	250.00	216.83	-0.00350	0.00285	-34.65
ND	MD-X	MD-Y	AS(CM2)	EPS.SUP	EPS.INF	INCL.LN
-1000.00	600.00	150.00	299.74	-0.00350	0.00172	-58.50
ND	MD-X	MD-Y	AS(CM2)	EPS.SUP	EPS.INF	INCL.LN
-300.00	500.00	150.00	230.37	-0.00350	0.00379	-54.31
ND	MD-X	MD-Y	AS(CM2)	EPS.SUP	EPS.INF	INCL.LN
-1000.00	300.00	200.00	167.53	-0.00350	0.00149	-33.80
ND	MD-X	MD-Y	AS(CM2)	EPS.SUP	EPS.INF	INCL.LN
-500.00	500.00	200.00	249.18	-0.00350	0.00292	-46.26

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Recommandations Internationales pour le Calcul et l'Execution des Ouvrages en Béton, Principes et Recommandations, Juin 1970, CEB, Fédération Internationale de la Pré-contrainte.
- 2.- Recommandations Internationales CEB-FIP-1970 pour le Calcul et l'Execution des Ouvrages en Béton, Version Française Définitive, avec Introduction des Notations Nouvelles, Mai 1972, Bulletin d'Information nº 84, CEB, Paris.
- 3.- Leonhardt, Fritz, Mönnig, E. - Vorlessungen über Massivbau, Ester Teil, Springer Verlag, 1973, Berlim.
- 4.- Rüsch, Hubert - Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete, Journal of the American Concrete Institute, July 1960.
- 5.- Rüsch, H., Grasser, E. Rao, P. - Principes de Calcul du Béton Armé sous des Etats de Contraintes Monoaxiaux, Bulletin d'Information nº 36, CEB, Paris, Juin 1962.
- 6.- DIN 1045, Beton Kalender 1973, Wilhelm, Ernst & Sohn, Berlim.
- 7.- Moran, F. - Design of Reinforced Concrete Section Under Normal Loads and Stresses in the Ultimate Limite State, Avril 1972, Bulletin d'Information nº 83, CEB-FIP, Madrid.
- 8.- Montoya, J. Meseguer, G., Moran, F. - Hormigón Armado, Gustavo Gilli, 1973, Barcelona.
- 9.- Manual of Bending and Compression - Bulletin d'Information nº 82, CEB-FIP, March 1972.
- 10.- Grasser, E., Linse, D. - Bemessungstafeln für Stahlbetonquerschnitte auf der Grundlage der neuen DIN 1045, 1972 - Werner - Verlag, Düsseldorf.
- 11.- Diaz, B., E. - Flexão Simples e Composta, Seminário de Estruturas de Concreto, 1973 - Rio de Janeiro.

- 12.- Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI-318-71), 1971, Detroit.
- 13.- Proposition de Compléments aux Principes et Recommandations Internationales CEB-FIP-1970, Janvier 1971, CEB, Paris.
- 14.- Yamagata, N. - Um Programa Dimensionamento de Seções de Peças de Concreto Armado Submetidas a Flexão Composta Normal, Anais da III Jornada Luso-Brasileira de Engenharia Civil, Angola, Moçambique, 1971.
- 15.- Commentary on Building Code Requirements for Reinforced Concrete(ACI 318-71), American Concrete Institute,Detroit, 1971.
- 16.- F. L. L. Carneiro - Flexão Obliqua (Seção Retangular) - Estrutura 61 - Rio de Janeiro - 1967.
- 17.- Normas para Cálculo de Estructuras NyTU 123-55 Inter Ciencia - Traducion de la 2a. Edición Rusa-Montevideo, 1960.

NOTAÇÃO

h	- altura total de uma seção
d	- altura útil de uma seção
γ_s, γ_c	- coeficientes de segurança para os materiais
γ_f	- coeficiente de segurança para as cargas
S_d	- solicitação de cálculo
M_d, N_d	- esforços de momento e normal, de cálculo
f_{cck}, f_{yk}	- resistências características do concreto e do aço
f_{ccd}, f_{yd}	- resistência de cálculo do concreto e do aço
A_c, A_s	- áreas de concreto e aço
ϵ_{cc}	- encurtamento à compressão do concreto
ϵ_s	- alongamento do aço
σ_{cc}	- tensões no concreto à compressão
σ_s	- tensões de tração no aço
σ_{sc}	- tensões de compressão no aço

F I G U R A S

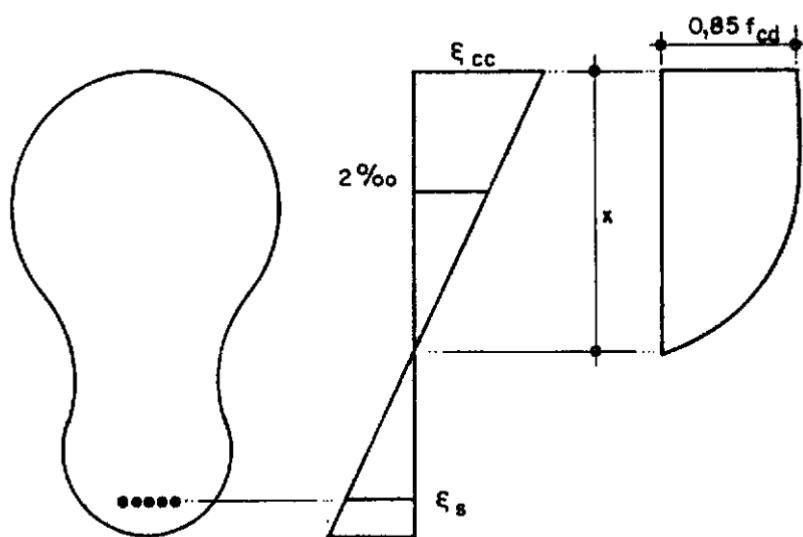
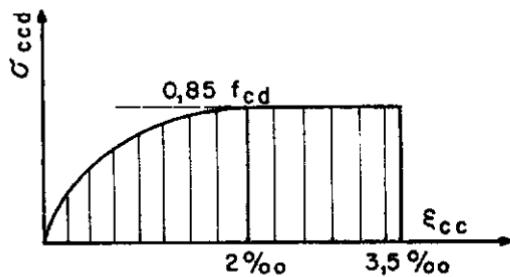


FIGURA 1
Diagrama parabólico retangular valido para qualquer seção

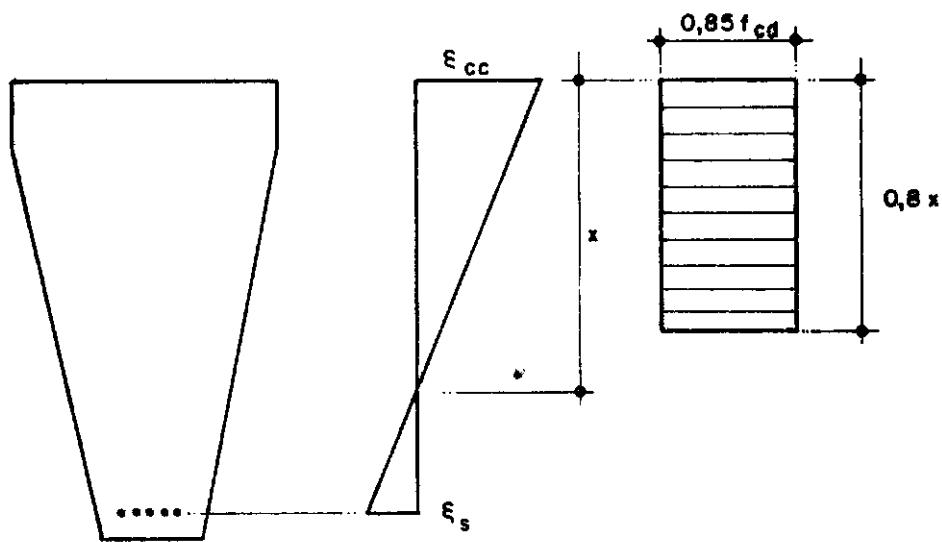
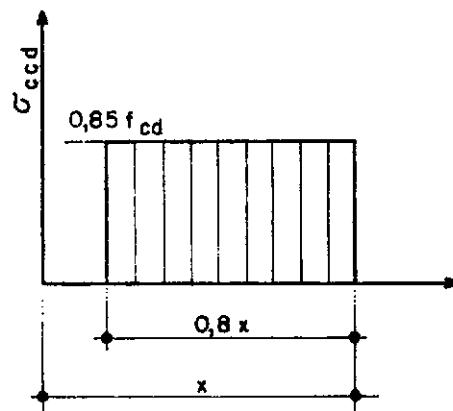


FIGURA 2
Diagrama Retangular (1)

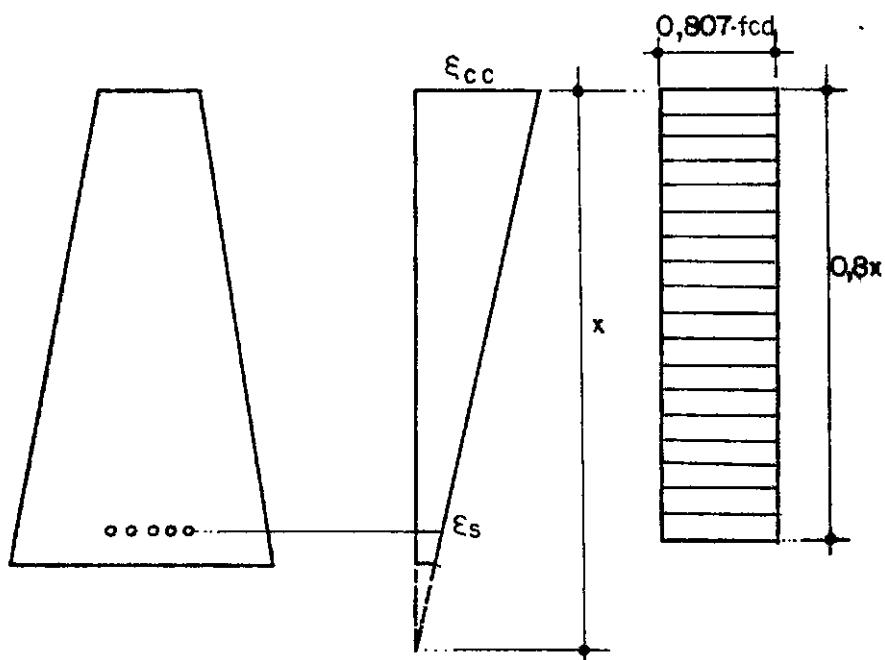
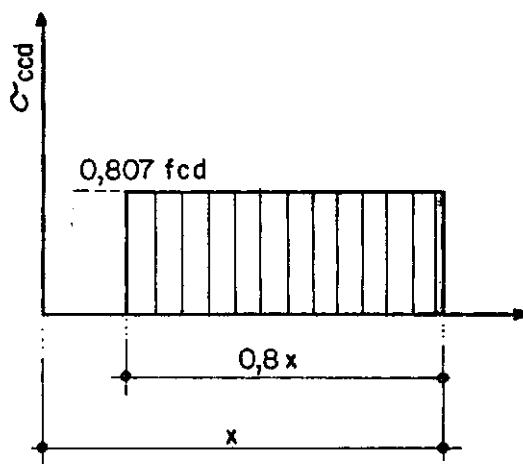


FIGURA 3
Diagrama rectangular (2)

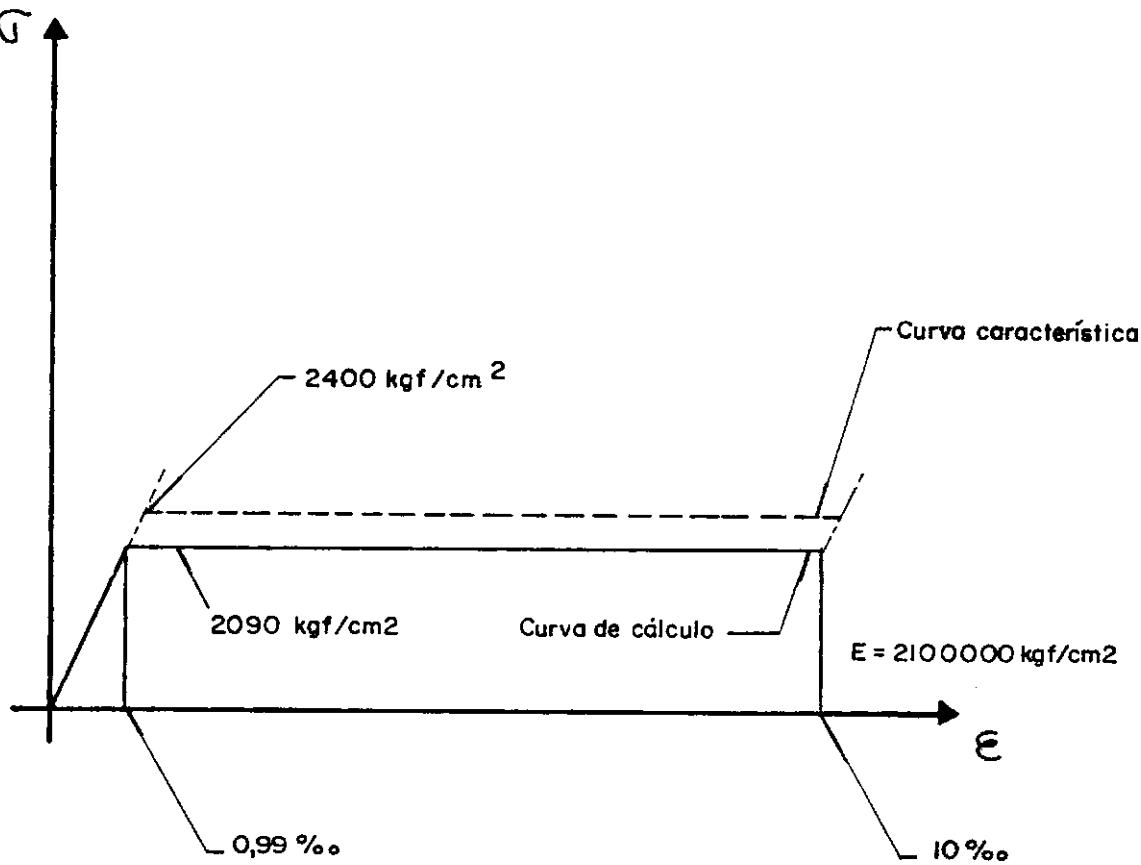


FIGURA 4
Aço CA - 24 A

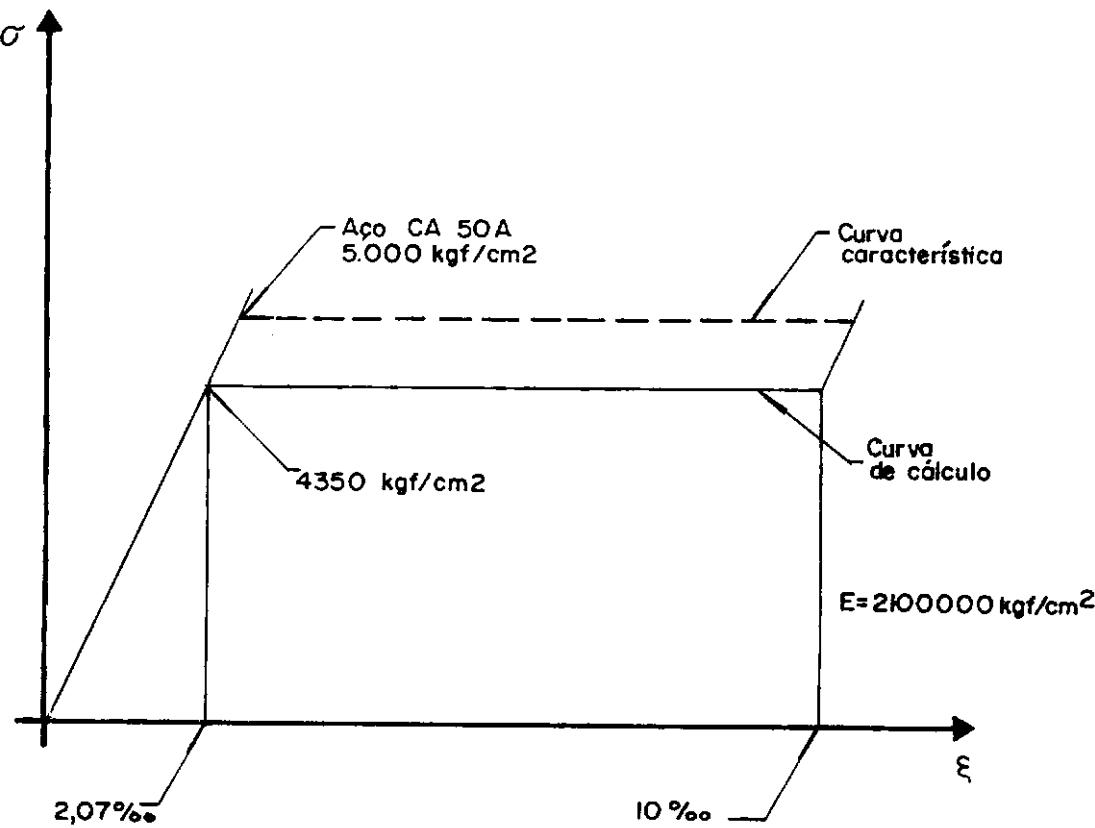


FIGURA 5

Aço CA - 50 A

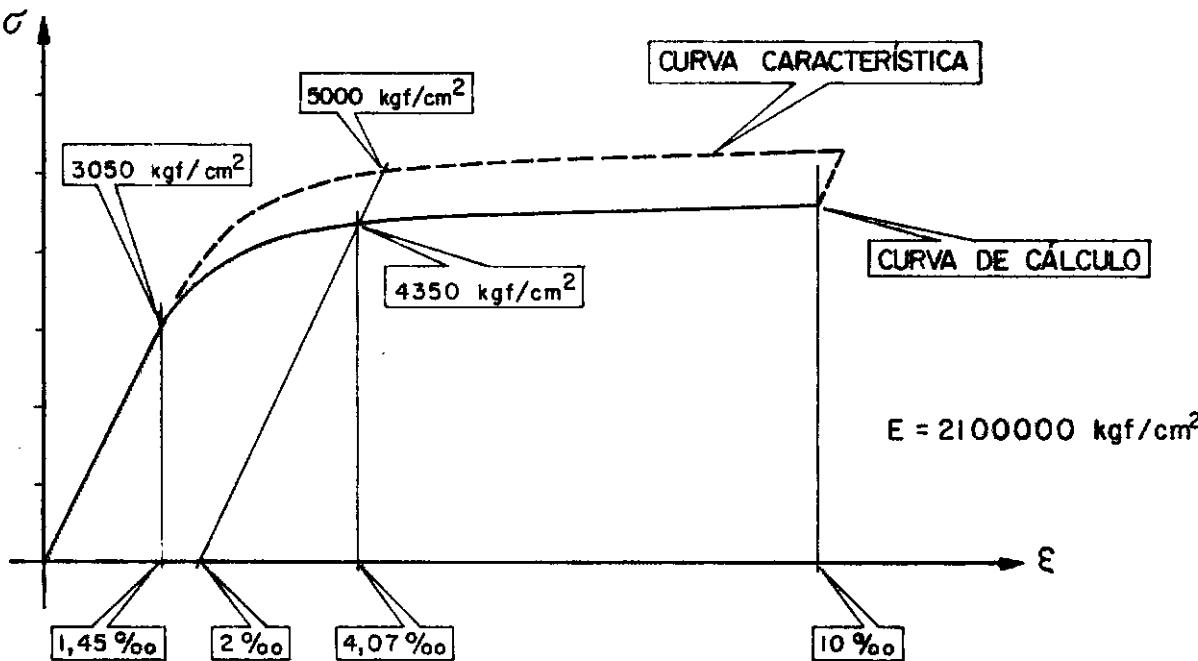


FIGURA - 6

Aço CA - 50 B

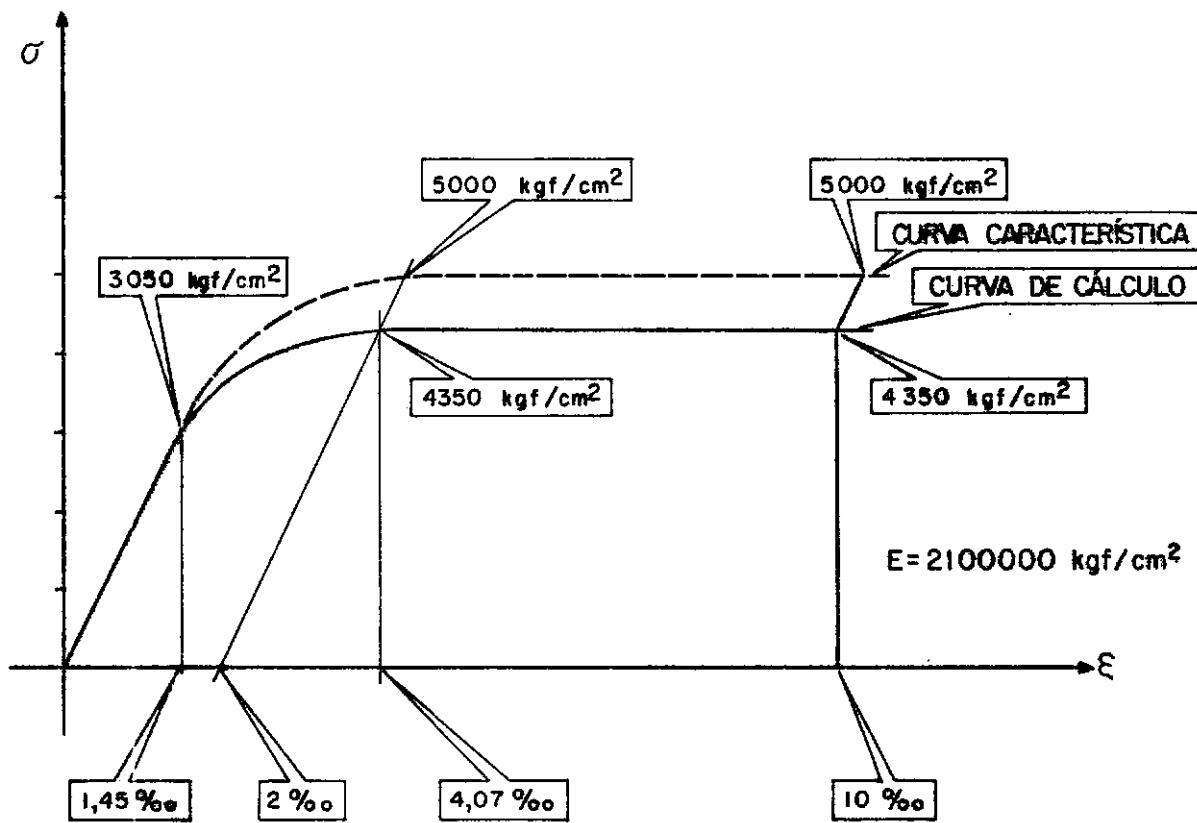


FIGURA 7

Aço CA - 50 (Curva aconselhável para dimensionamento).

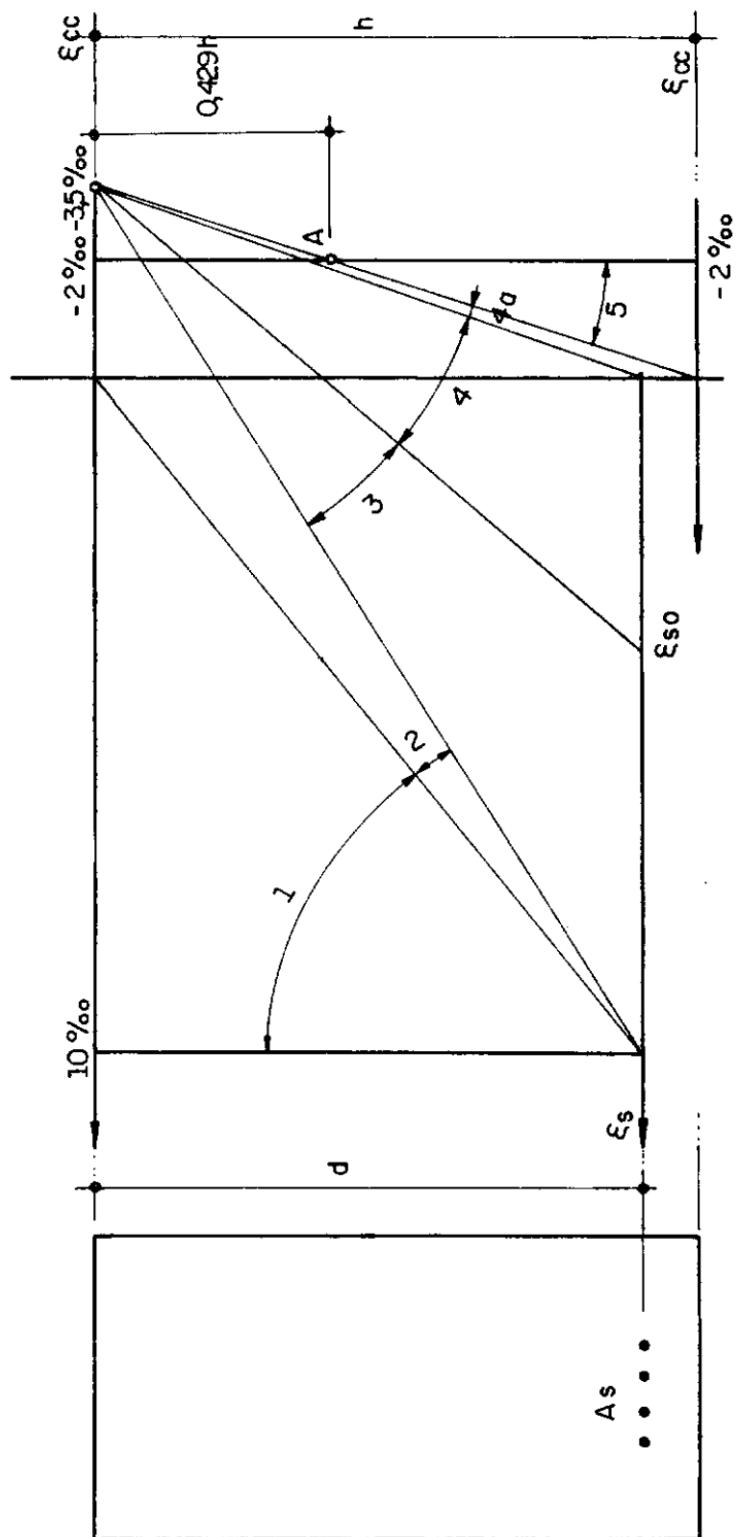
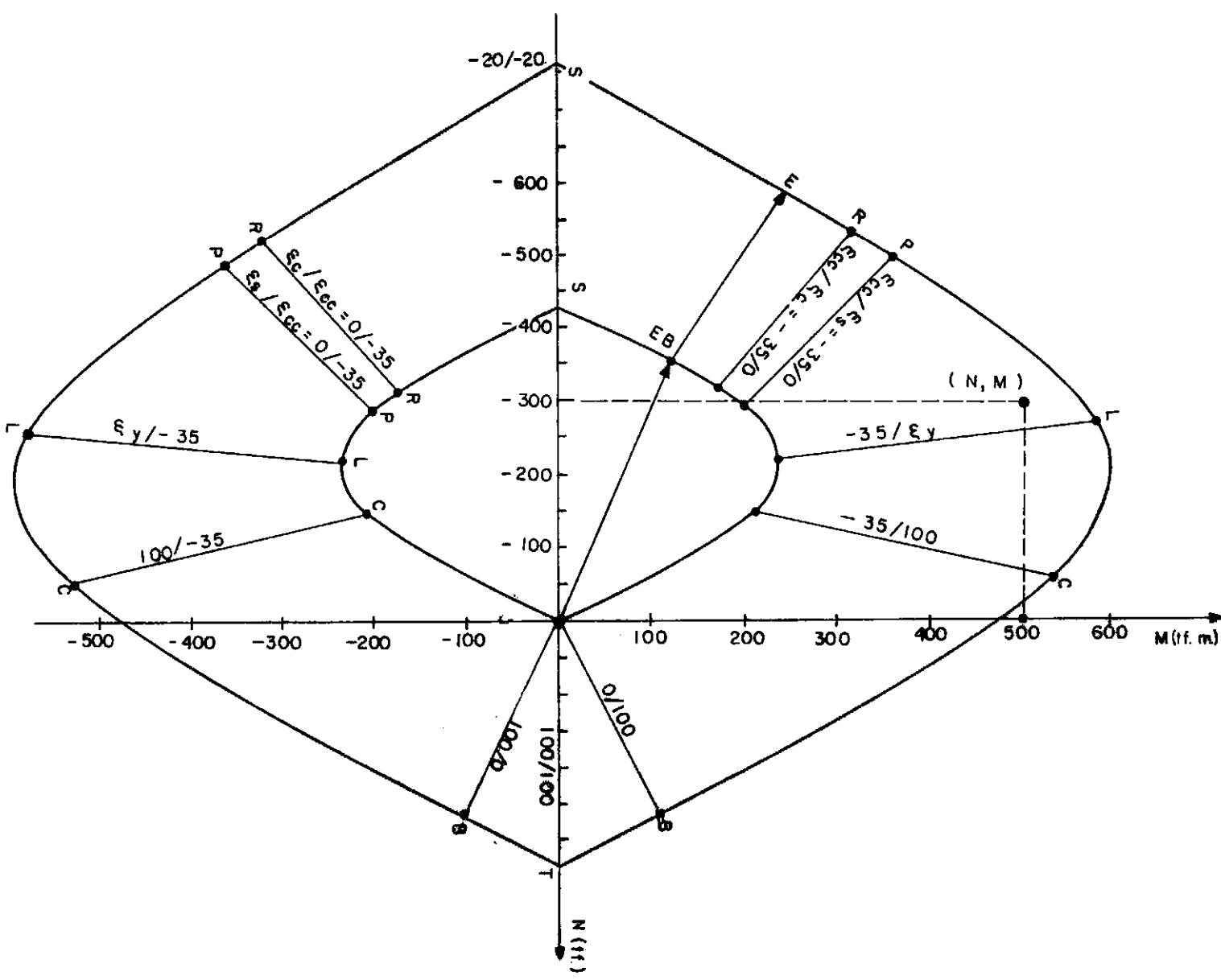


FIGURA 8
Diagrama de deformações de ruptura do CEB

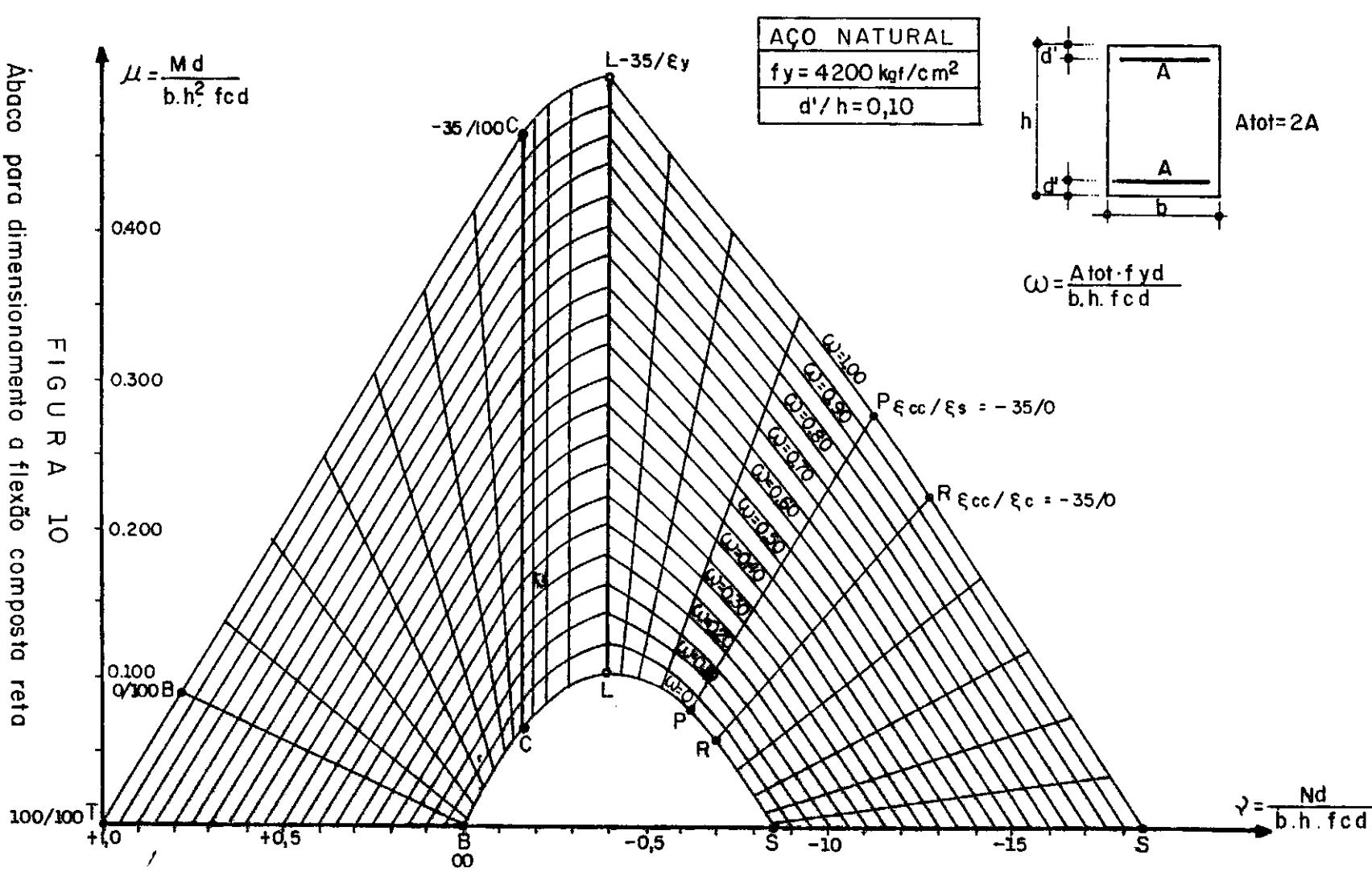
FIGURA 9
Diagrama de interação para flexão composta reta.



Ábaco para dimensionamento a flexão composta reta

FIGURA 10

$$\mu = \frac{M d}{b \cdot h^2 \cdot fcd}$$



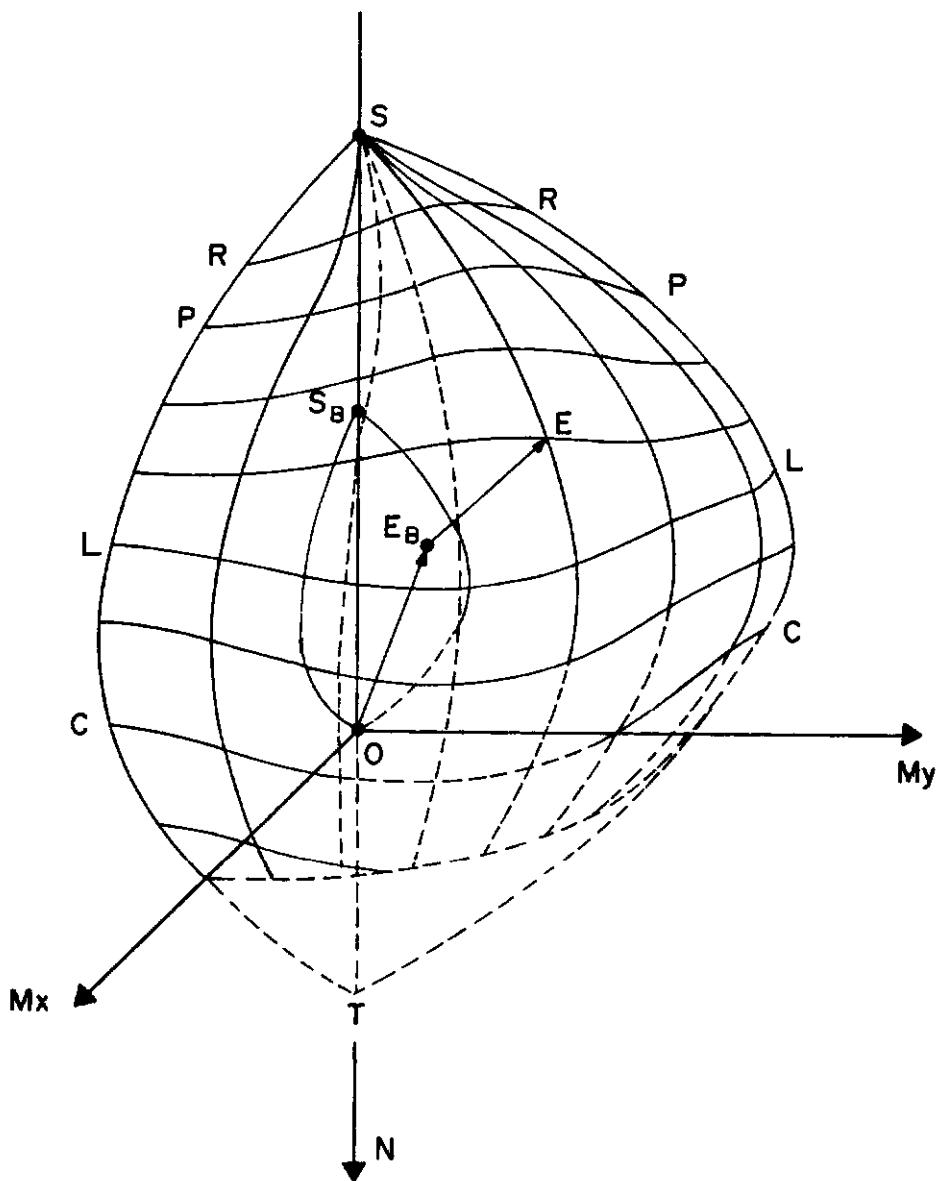


FIGURA 11

Superfície de Interação para Flexão Desviada

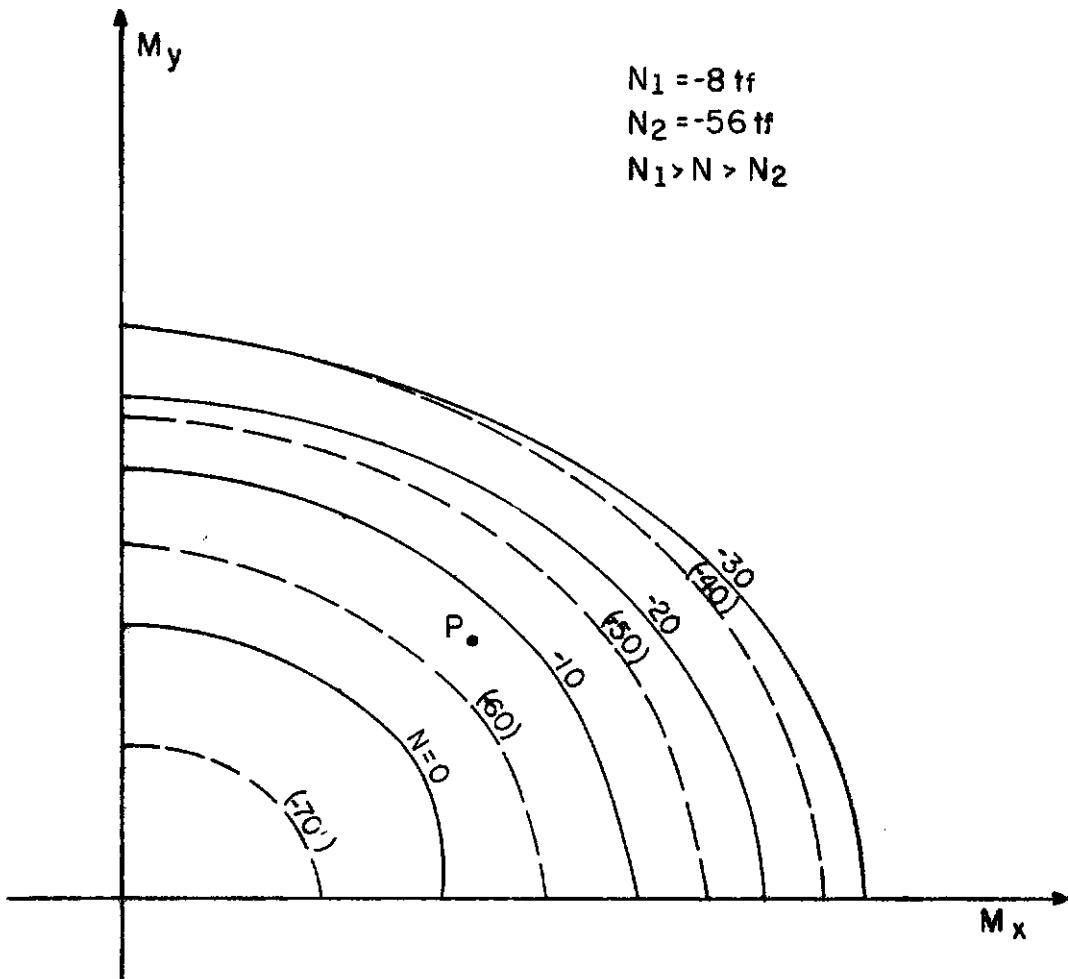


FIGURA 12

Diagrama de verificação $M_x - M_y$ para determinada seção submetida a flexão composta oblíqua.

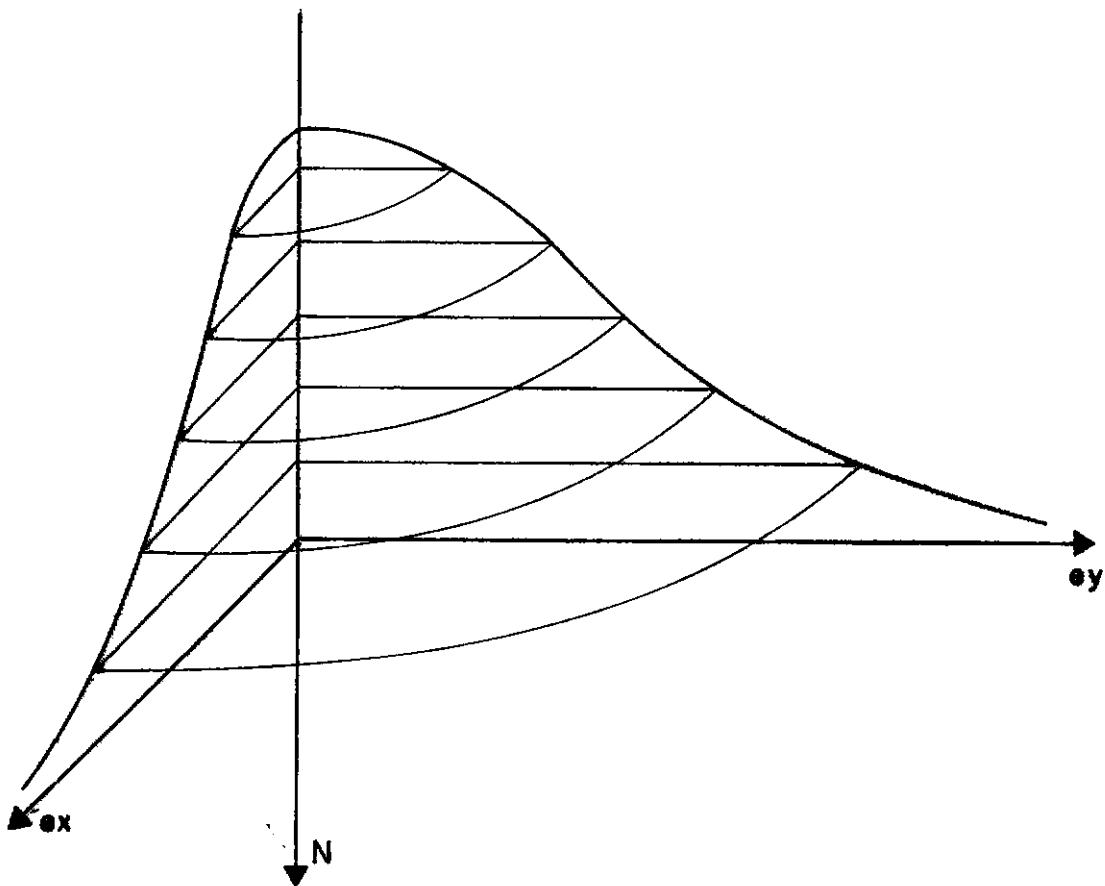


FIGURA 13
Superficie $N-ex-ey$

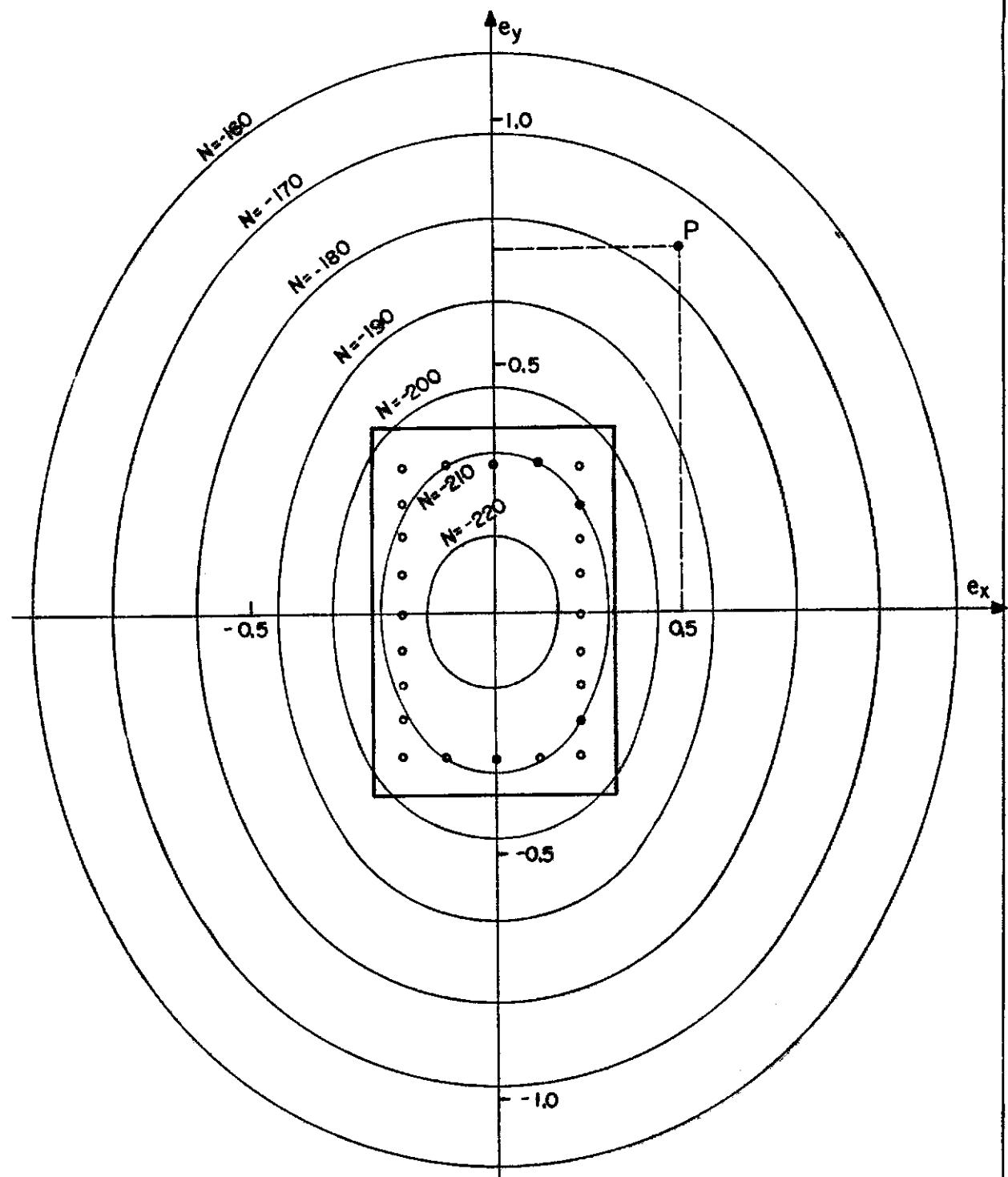
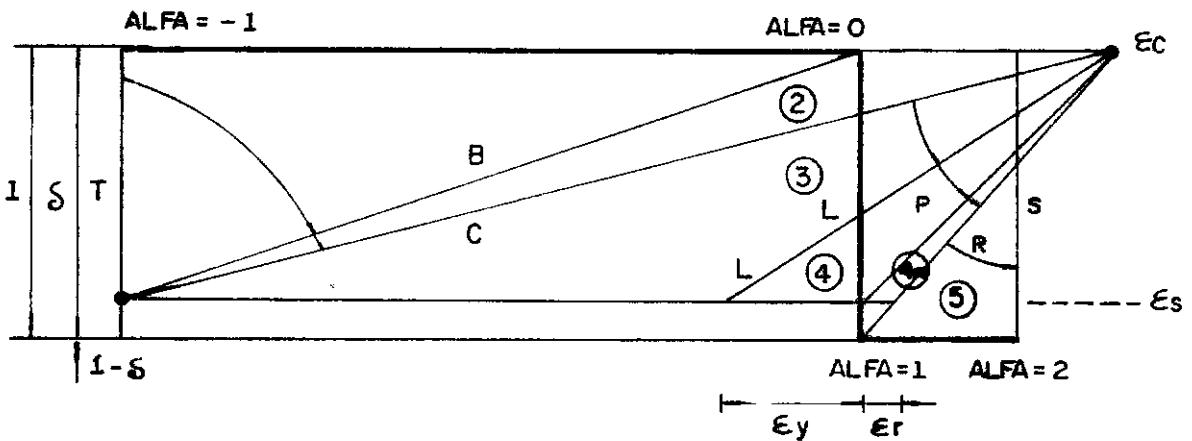
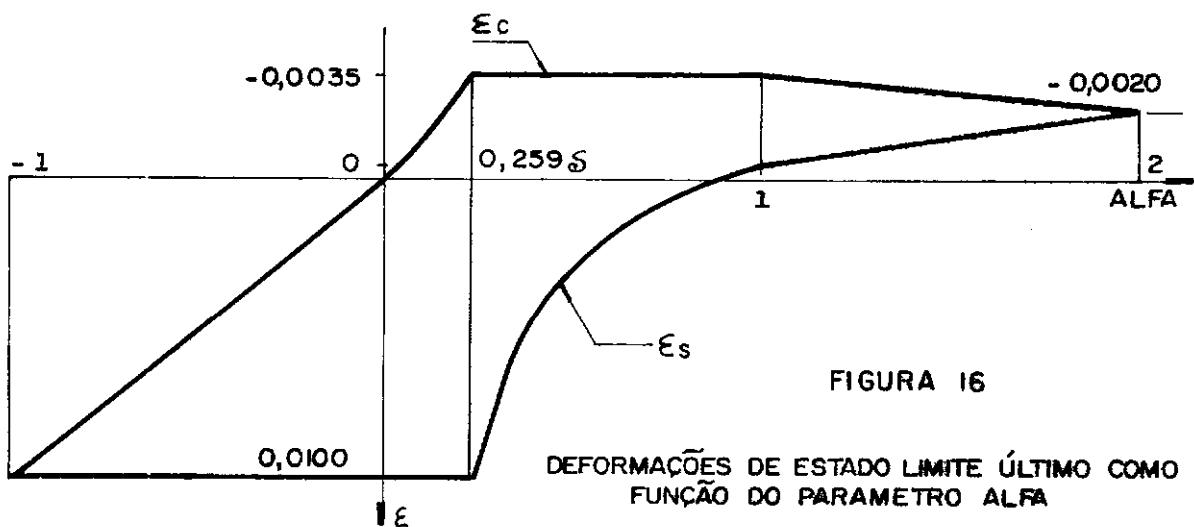


FIGURA 14

Representação de curvas de esforço normal constante no plano $ex - ey$



ESTADO	REGIÃO	ALFA	ϵ_c	ϵ_s
TRAÇÃO AXIAL T		- 1	0,0100	0,0100
FLEXO TRAÇÃO	(1)		$-0,0100 \cdot ALFA$	0,0100
B		0	0	0,0100
FLEXÃO COMPOSTA	(2)		$\frac{0,0100 \cdot ALFA}{ALFA - S}$	0,0100
C		$0,259S$	$-0,0035$	0,0100
FLEXÃO COMPOSTA	(3) (4) (4a)		$-0,0035$	$\frac{ALFA - S}{ALFA}$
R		1	$-0,0035$	$\epsilon_r = -0,0035 \cdot (1 - S)$
FLEXO COMPRESSÃO	(5)		$0,0015 \cdot ALFA - 0,0050$	$\epsilon_r - (0,0020 - \epsilon_r) \cdot (ALFA - 1)$
COMPRESSÃO AXIAL S		2	$-0,0020$	$-0,0020$



VERIFICACAO UTILIZANDO O METODO DOS OITO PONTOS
 PROPRIEDADES DO CONCRETO E ACO (TF/M21)

FCCK	GB	FYK	TIPO	GA
1800.	1.00	42000.	A	1.00

SECAO RETANGULAR CHEIA (DIMENSOES EM METROS)

BASE	ALTURA	RECOB-BE	RECOB-HE	ARM-BE	ARM-HE
1.00	1.70	0.09	0.05	0.25	0.25

ESFORCO NORMAL APLICADO E EXCENTRICIDADES (UNID. TF E M)

ND	EX	EY
-1000.	0.400	0.300

SERAO IMPRESSOS DADOS PARCIAIS DE CONVERGENCIA

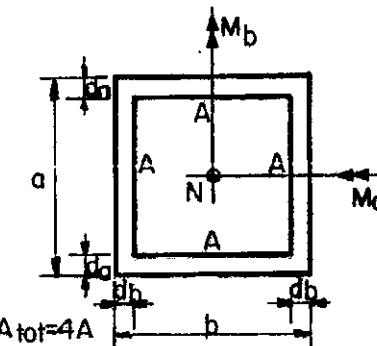
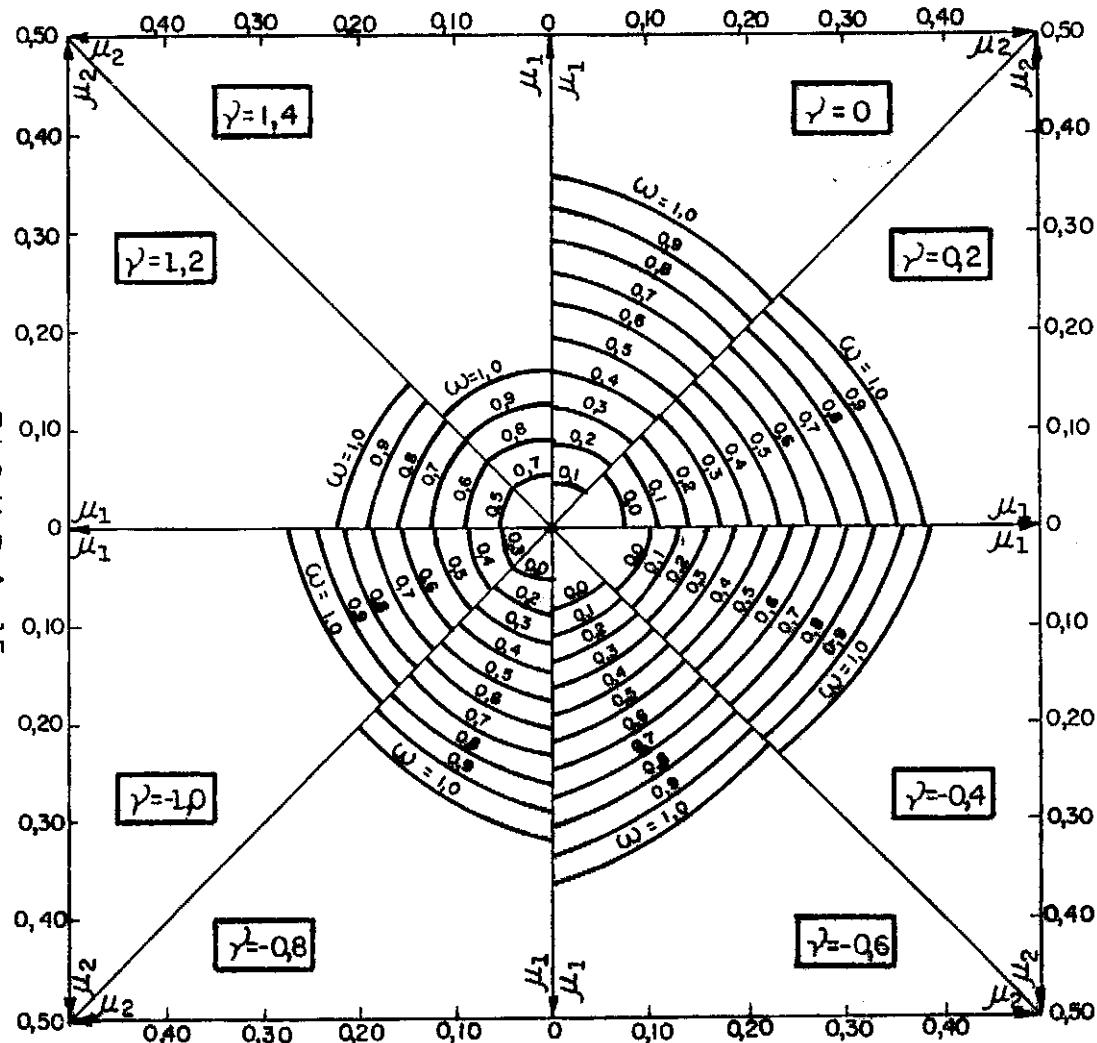
ITERACAO	ALFA	BETA	DALFA	DBETA	ERRO
1	0.50000	38.869	0.30000	9.000	0.8317
2	0.50000	27.869	0.30000	9.000	0.5752
3	0.50000	18.869	0.30000	9.000	0.2479
4	0.50000	18.869	0.15000	4.500	0.2479
5	0.50000	14.369	0.15000	4.500	0.1936
6	0.50000	14.369	0.07500	2.250	0.1936
7	0.57500	16.619	0.07500	2.250	0.1363
8	0.57500	18.869	0.07500	2.250	0.1250
9	0.57500	18.869	0.03750	1.125	0.1250
10	0.53750	17.744	0.03750	1.125	0.0321
11	0.53750	16.619	0.03750	1.125	0.0277
12	0.53750	16.619	0.01875	0.562	0.0277
13	0.53750	17.182	0.01875	0.562	0.0209
14	0.53750	17.182	0.00937	0.281	0.0209
15	0.54687	17.463	0.00937	0.281	0.0174
16	0.54687	17.463	0.00468	0.140	0.0174
17	0.54219	17.463	0.00468	0.140	0.0003

ESFORCO NORMAL OBTIDO (UNID. TF)

-1128. A SECAO RESISTE AOS ESFORCOS APLICADOS

Figura 17 - Resultados Obtidos Utilizando o Método Iterativo dos Oito Pontos

Ábaco para dimensionamento a flexão composta oblíqua



$$f_y = 4.200 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b = 0,10$$

$$\varepsilon_a = \frac{da}{a} : \mu_a = \frac{M_{ad}}{a^2 b f_{cd}}$$

$$\varepsilon_b = \frac{db}{b} : \mu_b = \frac{M_{bd}}{ab^2 f_{cd}}$$

$$\gamma = \frac{N_d}{ab f_{cd}}$$

se $\mu_a > \mu_b$: $\mu_1 = \mu_a$: $\mu_2 = \mu_b$
 se $\mu_a < \mu_b$: $\mu_1 = \mu_b$: $\mu_2 = \mu_a$

$$\omega = \frac{A_{tot} f_{yd}}{ab f_{cd}}$$

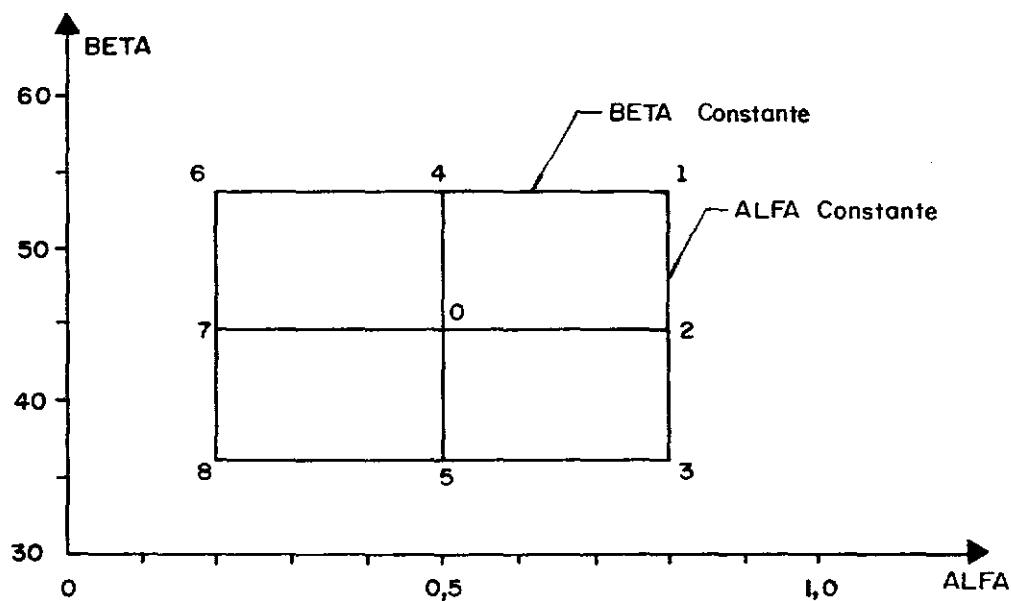


FIGURA 18A

Representação dos Pontos de uma Iteração no Plano ALFA - BETA

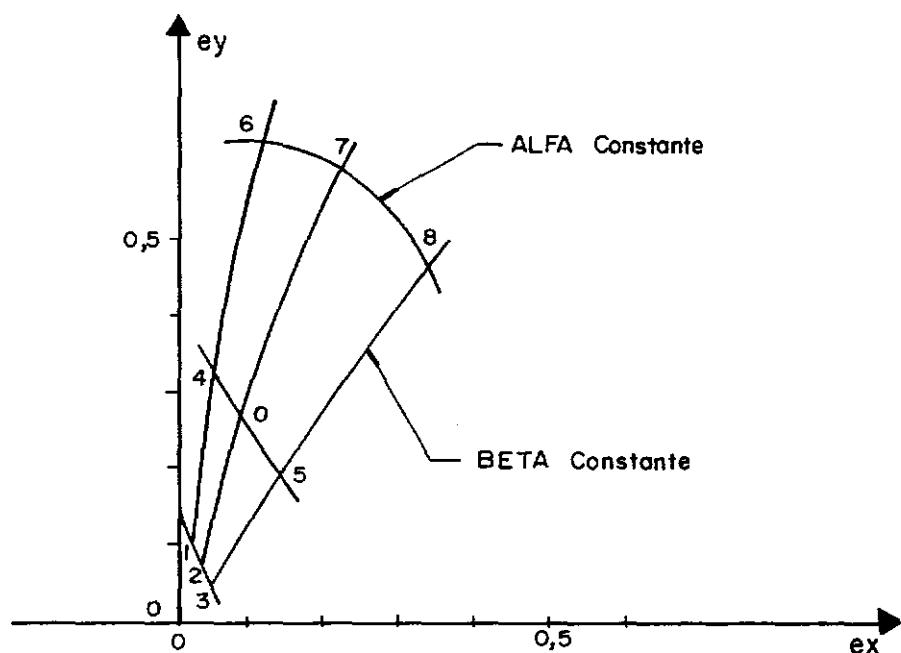


FIGURA 18B

Representação dos Pontos de uma Iteração no Plano ex - ey

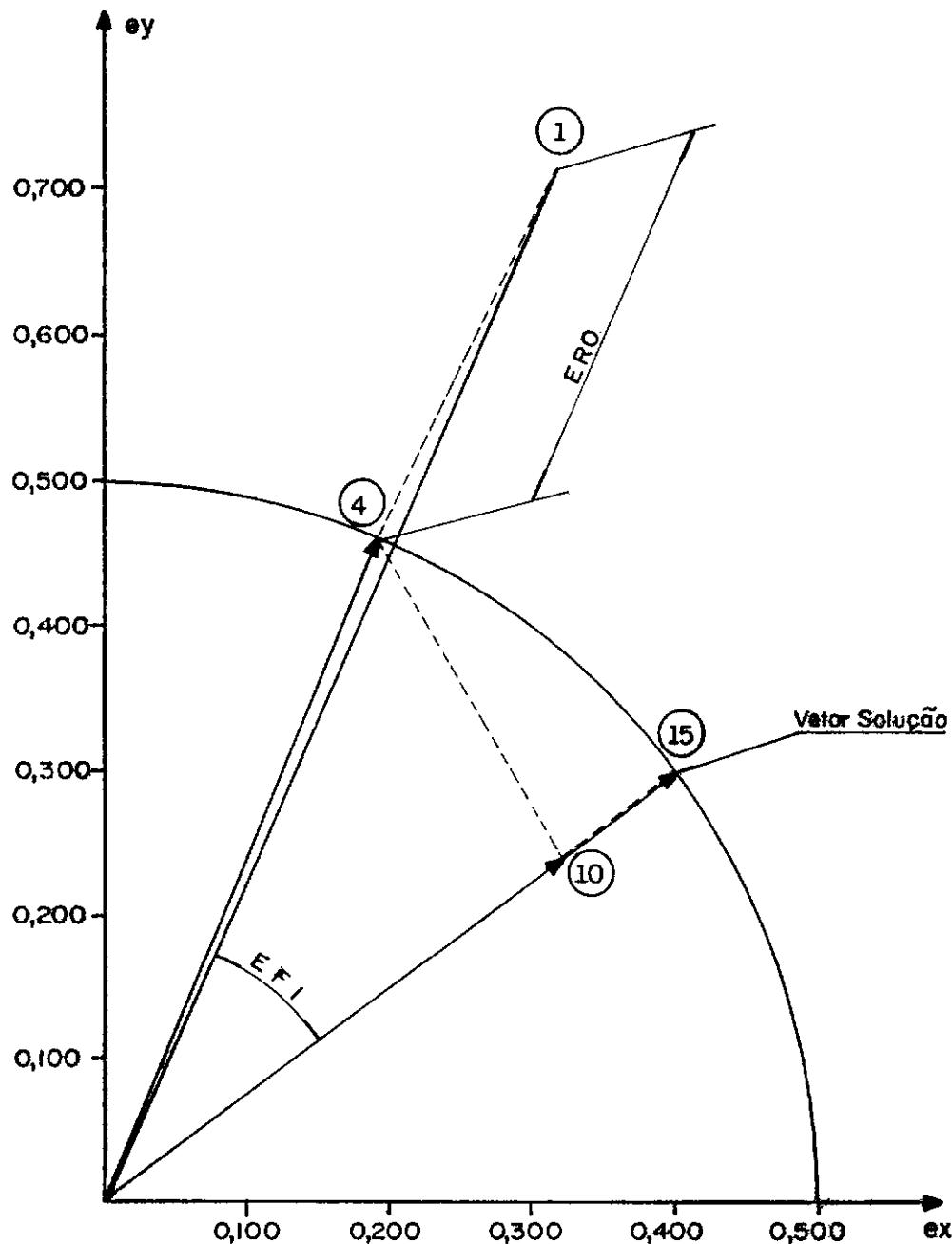


FIGURA 19
Método Iterativo de Erros Sucessivos

VERIFICACAO UTILIZANDO O METODO DOS ERROS SUCESSIVOS
PROPRIEDADES DO CONCRETO E ACO (TF/M2)

FCCK	GB	FYK	TIPO	GA
1800.	1.00	42000.	A	1.00

SECAO RETANGULAR CHEIA (DIMENSOES EM METROS)

BASE	ALTURA	RECOB-BE	RECOB-HE	ARM-BE	ARM-HE
1.00	1.70	0.09	0.05	0.25	0.25

ESFORCO NORMAL APLICADO E EXCENTRICIDADES (UNID. TF E M)

ND	EX	EY
-1000.	0.400	0.300

SERAO IMPRESSOS DADOS PARCIAIS DE CONVERGENCIA

ITERACAO	ALFA	BETA	ERO	EFI
1	0.50000	36.869	0.27218	29.310
2	0.60000	36.869	0.00626	29.666
3	0.60235	36.869	0.00147	29.683
4	0.60308	36.869	0.00001	29.688
5	0.60308	45.869	0.04478	36.965
6	0.60308	36.869	0.00001	29.688
7	0.60308	27.869	-0.05306	18.407
8	0.60308	18.869	-0.09613	2.412
9	0.60308	17.512	-0.10041	-0.315
10	0.60308	17.669	-0.09995	-0.005
11	0.70308	17.669	-0.22378	1.061
12	0.60308	17.669	-0.09995	-0.005
13	0.52236	17.669	0.04382	0.053
14	0.54696	17.669	-0.00532	0.015
15	0.54430	17.669	-0.00027	0.025

ESFORCO NORMAL OBTIDO (UNID. TF)

-1131. A SECAO RESISTE AOS ESFORCOS APLICADOS

Figura 20 - Resultados Obtidos Utilizando o Método Iterativo de Erros Sucessivos

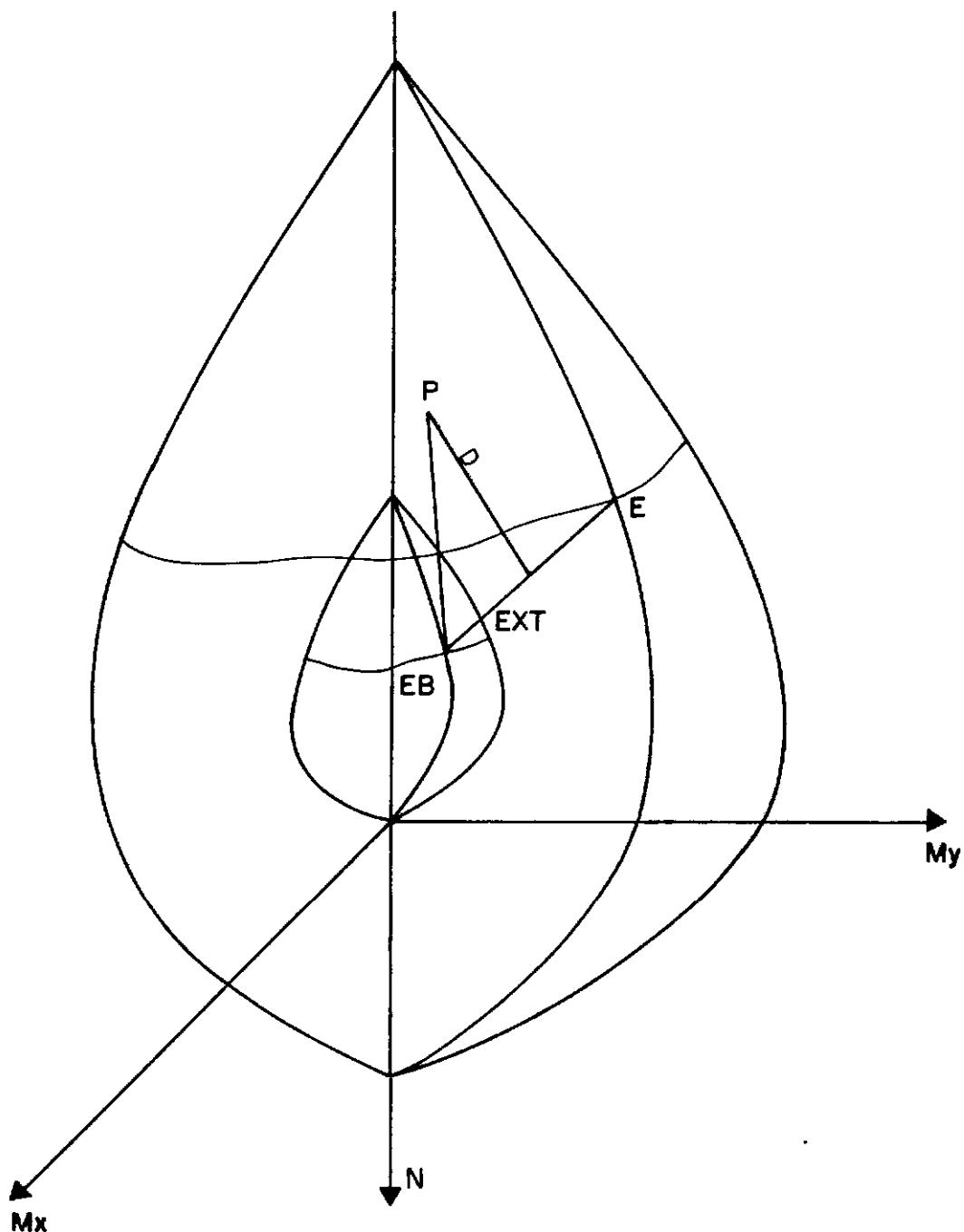


FIGURA 21
Método Iterativo Para Dimensionamento

=====
 DIMENSIONAMENTO DE SECOES RETANGULARES A FLEXAO COMPOSTA OBLIQUA
 =====

EXEMPLO DE CONVERGENCIA DO PROGRAMA BIAXI

PROPRIEDADES DO CONCRETO E ACO (TF/M2)

FCCK	GB	FYK	TIPO	GA
1800.	1.00	42000.	A	1.15

SERA(O) ESTUDADA(S) 1 SECAO(OES)

SECAO RETANGULAR CHEIA (DIMENSOES EM METROS)

BASE	ALTURA	RECOB-BE	RECOB-HE	ARM-BE	ARM-HE
1.00	1.70	0.09	0.05	0.25	0.25

SERA(O) ESTUDADA(S) 1 COMBINACAO(OES) DE ESFORCOS (UNID. TF E M)

SERAO FORNECIDOS DADOS PARCIAIS DE CONVERGENCIA

ITERACAO	ALFA	BETA	DALFA	DBETA	DIST	ERRO
1	0.50000	36.869	0.30000	18.000	208.48	0.1663
2	0.50000	18.869	0.30000	18.000	208.48	0.1663
3	0.50000	18.869	0.15000	9.000	208.48	0.1663
4	0.50000	18.869	0.07500	4.500	137.97	0.1101
5	0.57500	18.869	0.07500	4.500	137.97	0.1101
6	0.57500	18.869	0.03750	2.250	22.42	0.0179
7	0.53750	16.619	0.03750	2.250	22.42	0.0179
8	0.53750	16.619	0.01875	1.125	22.42	0.0179
9	0.53750	16.619	0.00937	0.562	19.96	0.0159
10	0.53750	17.182	0.00937	0.562	19.96	0.0159
11	0.54218	17.463	0.00468	0.281	1.79	0.0014
ND	MD-X	MD-Y	AS(CM2)	EPS.SUP	EPS.INF	INCL.LN
-1131.0	339.3	452.4	169.84	-0.00350	0.00262	-17.46

Figura 22 - Resultados Obtidos com Iterações do Programa BIAXI

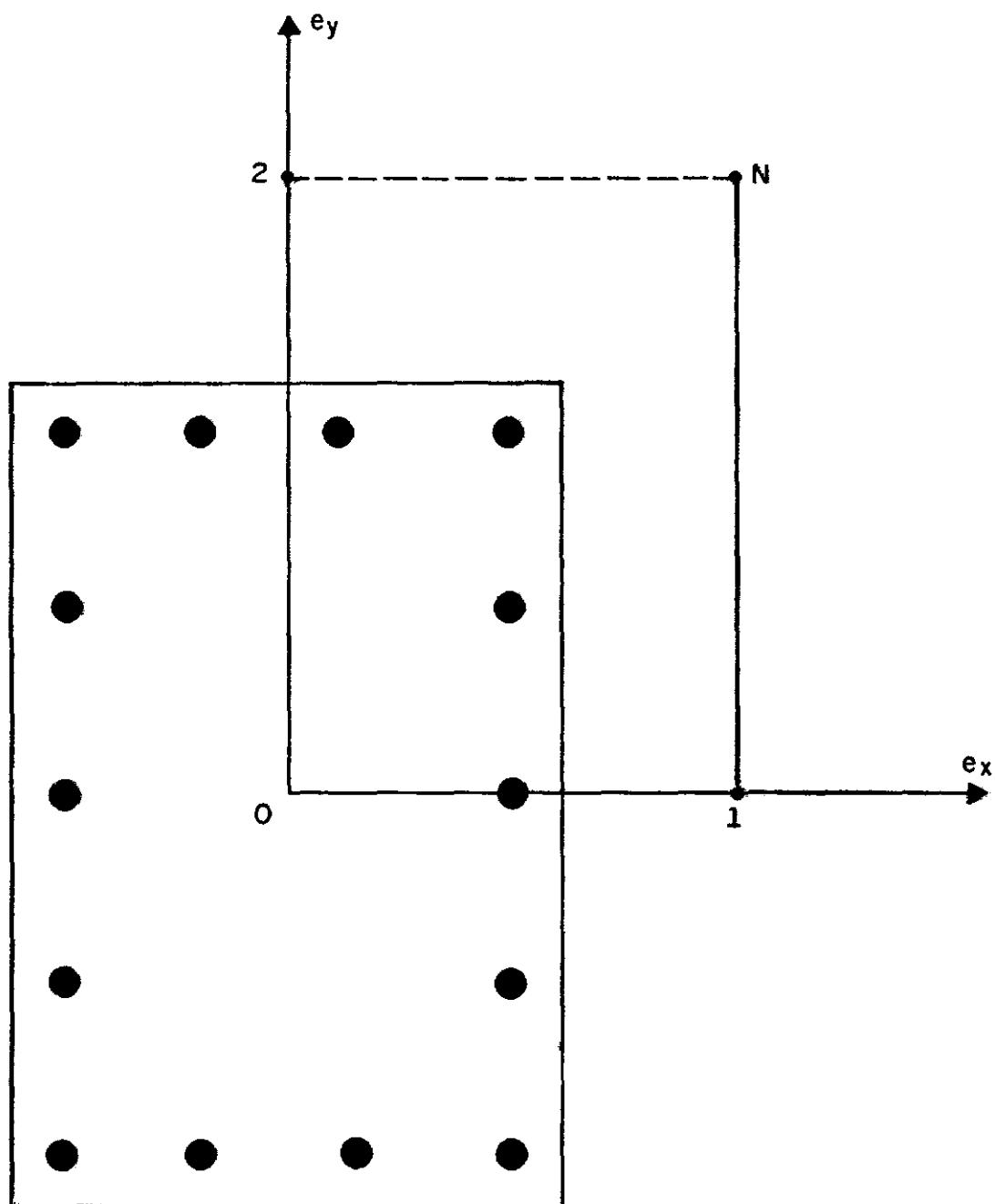


FIGURA 23
Método da Superposição

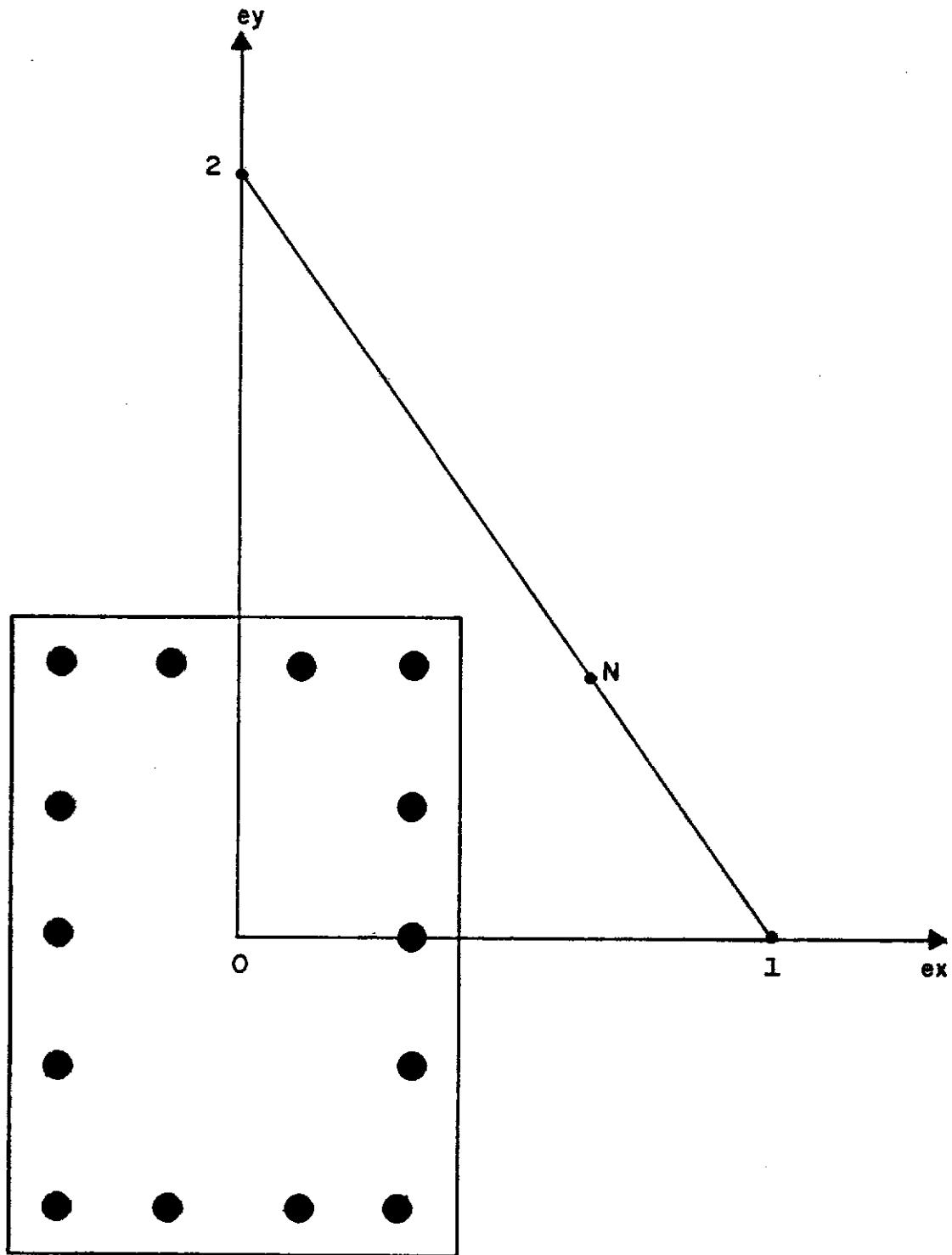


FIGURA 24

Método de Dimensionamento Baseado na Norma Venezuelana

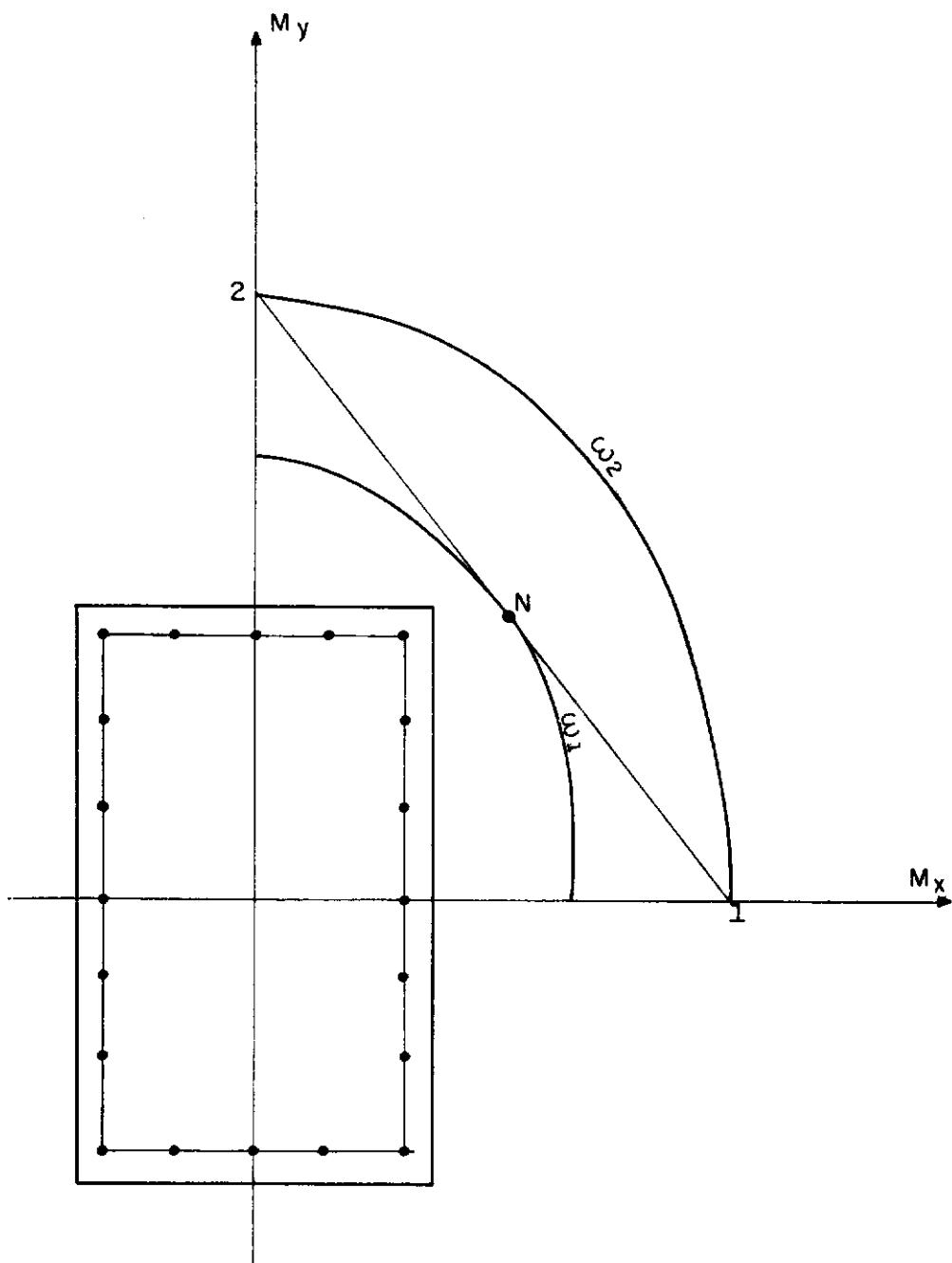


FIGURA 25
Método da Corda

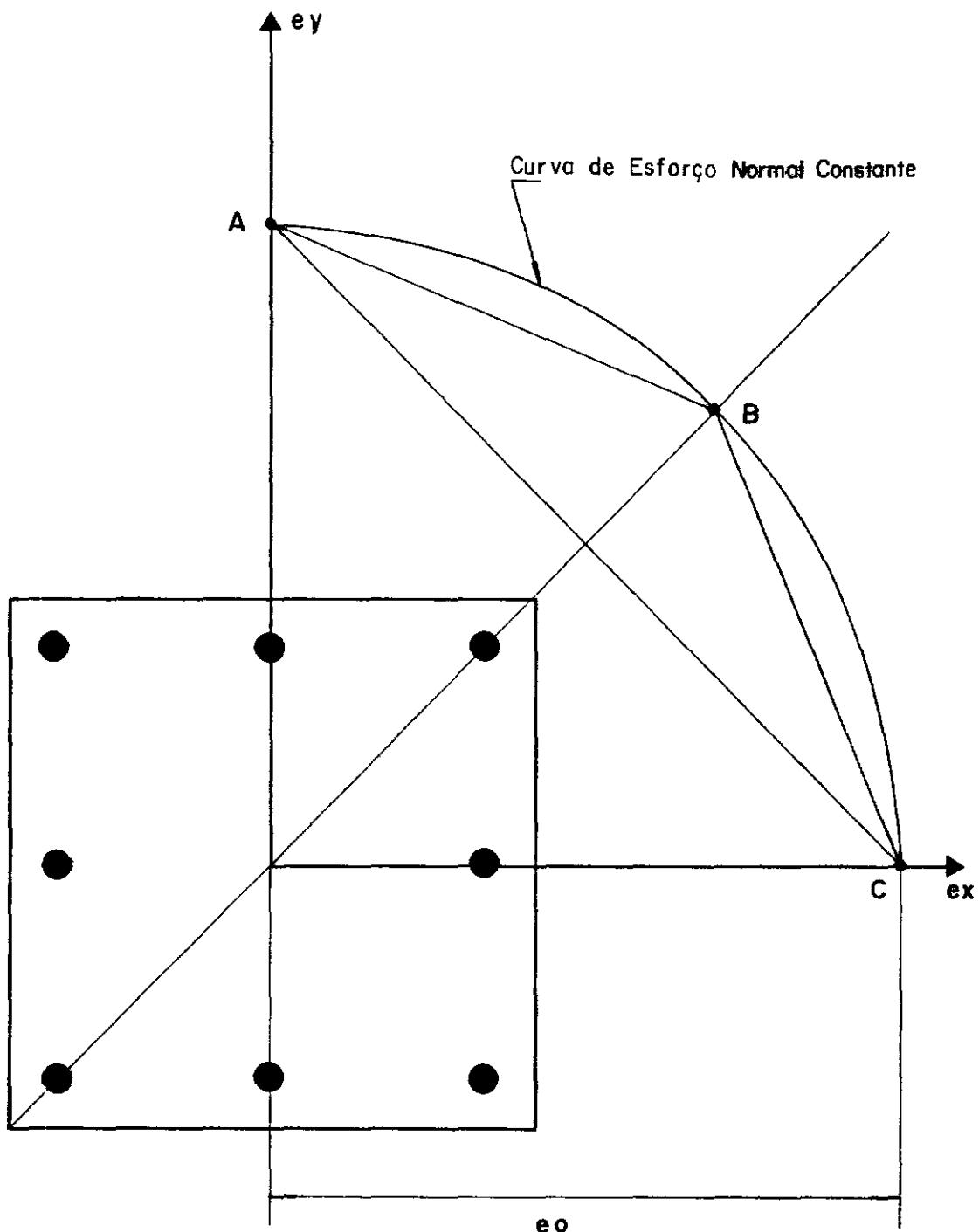


FIGURA 26
Redução a Esforços Uniaxiais

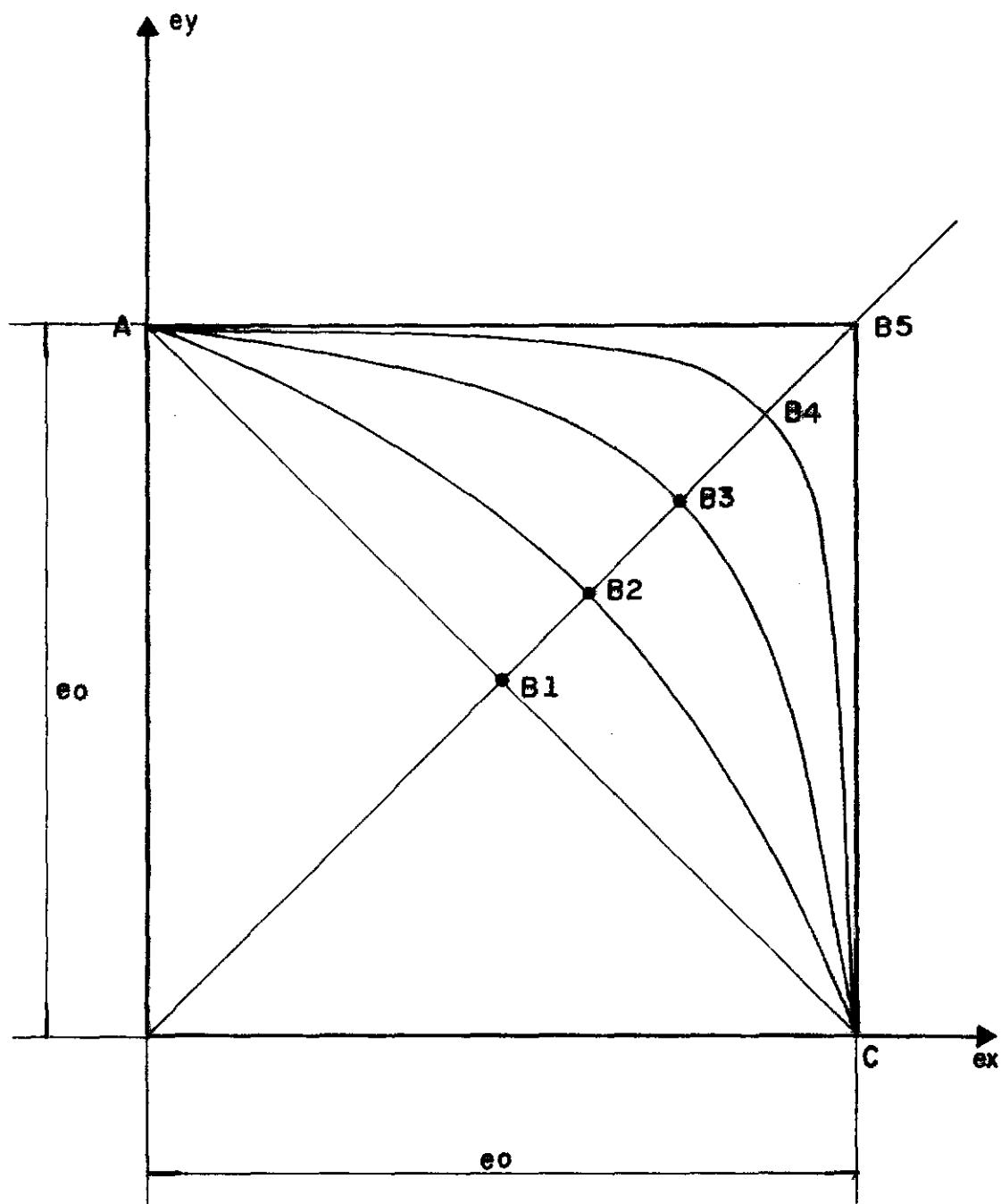


FIGURA 27
Curvas de Esforço Normal Constante

Solicitações			Norma Venezuelana	Método da Corda	Método da Decomposição	CEB Montoya	Programa BIA X 1
N d (t)	M x d (t m)	M y d (t m)	As (cm ²)	As (cm ²)	As (cm ²)	As (cm ²)	As (cm ²)
			Erro (%)	Erro (%)	Erro (%)	Erro (%)	—
- 500	375	250	453	270	226	273	216
			109,7	25,0	4,6	26,4	—
- 1000	600	150	598	373	299	347	299
			100,0	24,7	0,0	16,0	—
- 300	500	150	500	309	250	280	230
			117,4	34,3	8,7	21,7	—
- 1000	300	200	374	241	187	187	167
			123,9	44,3	11,9	11,9	—
- 500	500	200	560	344	280	320	249
			124,9	38,1	12,4	28,5	—

FIGURA 28

Quadro comparativo de armaduras obtidas por diversos métodos