MÉTODO DAS EQUIVALÊNCIAS APLICADO A PLACAS ESCONSAS

Sonia Ribeiro Almeida Bispo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

Presidente

RIO DE JANEIRO
ESTADO DO RIO DE JANEIRO - BRASIL
JULHO DE 1976

A meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor SERGIO F. VILLAÇA, pela orientação dada a este trabalho.

Ao Professor FERNANDO LUIZ LÔBO CARNEIRO, pelo apoio concedido.

Ao Professor PAULO ALCÂNTARA GOMES, pelas sugestões.

Aos componentes do Núcleo de Computação Eletrônica (NCE) pela colaboração dispensada.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

No presente trabalho é feito um estudo comparativo dos métodos numéricos das equivalências, das diferenças finitas e dos elementos finitos, aplicados ao cálculo de placas esconsas totalmente engastadas no contorno.

O objetivo deste trabalho é fazer uma análise dos resultados obtidos quando se aplica o Método das Equivalências ao estudo de placas. Para isso será feita uma comparação com outros métodos usados com maior frequência.

A convergência do processo para a solução analítica é pesquisada para vários casos, fazendo-se variar o ângulo de esconsidade das placas. Pesquisa-se ainda o aumento progressivo do tempo de execução, quando a malha é refinada.

Para aplicação do método das diferenças finitas e do método das equivalências foram elaborados dois programas automáticos distintos.

Foi utilizado também um programa de elementos finitos, o ICES STRUDL II, desenvolvido no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (versão 1969) e implantado no Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Para utilização do método das equivalências usaram-se modelos equivalentes triangulares e, para o método dos elementos finitos, elementos triangulares não conformes, com três pontos nodais e nove deslocamentos.

ABSTRACT

The purpose of this work is to obtain comparative results by the numerical methods of equivalences, finite differences and finite elements, applied to several cases of skew plates with built in edges.

Convergence towards the analytic solution has been examinated for different skew angles, and a study of time increasing with the number of joints has been performed for the methods of equivalences and finite differences.

An automatic program was elaborated using the equivalence method, and another using the finite difference method. For the finite element method the ICES STRUDL II program was used.

Results given by equivalence method had good accuracy when compared to analytical and other numerical solutions.

ÍNDICE

Capítulos:		Páginas:
	INTRODUÇÃO	1
I	TENSÕES NO SISTEMA RETANGULAR DE COORDENADAS	4
	1. Considerações Gerais	4
	2. Deslocamentos, Deformações, Deformação Numa Direção Qualquer.....	4
	3. Tensões - Convenção Adotada - Notações	7
	4. Tensões num Plano Inclinado	9
	5. Lei de Hooke	11
II	TENSÕES NO SISTEMA DE COORDENADAS OBLÍQUAS	12
	1. Considerações Gerais	12
	2. Observações Quanto a Notação Usada ..	12
	3. Relações Geométricas	13
	4. Deslocamentos e Deformações	16
	5. Forças - Tensões	22
	6. Lei de Hooke	26

Capítulos: Páginas:

III FLEXÃO DE PLACAS EM COORDENADAS OBLÍQUAS.. 28

1. Considerações Gerais 28
2. Definição - Hipóteses 28
3. Relação Entre Deflexões e Deformações 29
4. Equações dos Momentos 30
5. Equação Diferencial das Placas 34
6. Relação Entre Momentos nos Sistemas Retangular e Oblíquo 37
7. Momentos Fletores e Momentos de Torção Verdadeiros no Sistema Oblíquo 38
8. Condições de Contorno Para Bordo Engastado 39

IV MÉTODO DAS EQUIVALÊNCIAS 40

1. Considerações Gerais 40
2. Conceituação - Princípios Fundamentais. 40
3. Teoria das Placas 45

3.1 *Conceitos Básicos - Considerações* .. 45

3.2 *Condição de Bordo Engastado* 46

3.3 *Energia de Flexão e Torção de uma Barra* 48

3.4 *Modelos Equivalentes* 50

3.5 *Modelo Equivalente Triangular - Determinação de Esforços* 53

Capítulos: Páginas:

V MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS 61

1. Considerações Gerais 61

2. Conceituação - Diferenças Finitas Ordinárias 61

3. Diferenças Finitas Parciais 66

4. Diferenças Finitas em Coordenadas Oblíquas - Operadores Dispostos em Moléculas 70

5. Esforços na Placa em Diferenças Finitas 78

VI MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS 81

1. Considerações Gerais 81

2. Conceituação - Elemento Utilizado - Hipóteses Assumidas 81

VII PROGRAMAÇÃO AUTOMÁTICA 84

1. Considerações Gerais 84

2. Estruturação da Programação 85

2.1 *Equivalências* 85

2.2 *Diferenças Finitas* 89

2.3 *Geração Automática Para o ICES STRUDL II* 93

3. Fluxograma Simplificado - Diferenças Finitas 95

Capítulos: Páginas:

4. Explicações Referentes ao Fluxograma. 104

VIII APLICAÇÕES 109

1. Considerações Gerais 109

2. Placas Analisadas 109

2.1 *Carregamento Uniforme* 112

2.2 *Carregamento Concentrado no Centro*.. 121

2.3 *Tabela Para Relações Entre Lados a/b = 1.5 e a/b = 2.0, α = 45°* - *Carregamento Uniforme Distribuído, de 1tf/m²* 124

3. Tempo de Execução 124

4. Gráficos Para Carregamento Uniforme.. 126

IX ANÁLISE DOS RESULTADOS 139

1. Considerações Gerais 139

2. Placas Analisadas 139

2.1 *Placa I* - $\alpha = 90^o$ 139

2.2 *Placa II* - $\alpha = 75^o$ 141

2.3 *Placa III* - $\alpha = 60^o$ 143

2.4 *Placa IV* - $\alpha = 45^o$ 144

2.5 *Placa V* - $\alpha = 30^o$ 146

3. Análise dos Resultados Para Carga Concentrada 147

Capítulos: Páginas:

4. Relações Entre Lados a/b = 1.5 e a/b = = 2.0 148

5. Conclusões 149

6. Importância do Fator Tempo 151

7. Aplicabilidade da Teoria das Equivalências 151

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 154

NOTAÇÕES 157

LISTAGENS:

1 Listagem do Programa Diferenças Finitas .. 163

2 Listagem do Programa Equivalências 177

INTRODUÇÃO

Há alguns anos, o engenheiro defrontava-se com grandes problemas de cálculo estrutural devido, principalmente, à falta de meios adequados para solucioná-los. Com o advento dos computadores, a teoria das estruturas, como tantas outras coisas, sofreu grandes modificações, implicando num progresso considerável.

Os métodos numéricos outrora limitados e trabalhosos cresceram em importância.

O método numérico das diferenças finitas é usado para solucionar alguns problemas específicos com certa eficácia, porém, para problemas mais complexos torna-se inadequado.

O método numérico dos elementos finitos constitui o processo de discretização mais poderoso da Teoria das Estruturas.

Modernamente, na França, está se desenvolvendo um outro método numérico de cálculo estrutural baseado na Teoria das Equivalências.

Esse novo método foi apresentado na COPPE por E. Absi e surgiu então meu interesse em desenvolver um trabalho sobre tal teoria, comparando-a com o método dos elementos finitos e com o método das diferenças finitas.

Foi sugerido pelo Programa de Engenharia Civil da COPPE, um estudo do método das equivalências aplicado, particularmente, ao problema de placas esconsas engastadas no contorno, comparando-o aos dois outros métodos numéricos já citados.

Foram analisadas placas com diferentes ângulos de esconsidade, variou-se a relação entre lados da placa, verificando para os três métodos usados a convergência para a solução analítica, o efeito da esconsidade na convergência e o aumento do tempo de execução com o refinamento da malha.

Primeiramente, foi elaborado um programa automático para aplicação do método das diferenças finitas ao problema particular já mencionado, utilizando malhas oblíquas, isto é, paralelogramos. Devido à condição de bordo engastado, no problema em estudo, não se tem a matriz dos coeficientes das incógnitas em forma de banda e como no contorno existe momento, nesse caso, tem-se que resolver um sistema de equações de quarto grau e o problema não pode ser simplificado como no caso de placas apoiadas. Tentou-se fazer um programa automático que resolvesse placas com qualquer condição de bordo, mas verificou-se serem efici

entes e econômicos programas distintos para cada caso particular.

Para elementos finitos utilizou-se o ICES-STRUDL II, implantado no IBM/360.

Para o método das equivalências elaborou-se um programa automático onde é suficiente fornecer as características geométricas e elásticas da placa e o carregamento. Aproveitou-se aqui a disposição em banda da matriz de rigidez.

O presente trabalho consta de fundamentos das teorias usadas, considerações gerais das técnicas utilizadas na programação automática, diagramas de blocos, apresentação e comentário de resultados.

CAPÍTULO I

TENSÕES NO SISTEMA RETANGULAR DE COORDENADAS

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Os conceitos básicos de tensões em coordenadas retangulares, referidas principalmente ao estado plano, serão relembrados neste capítulo.

2. DESLOCAMENTOS, DEFORMAÇÕES, DEFORMAÇÃO NUMA DIREÇÃO QUALQUER

No estudo da deformação de um corpo elástico, supõe-se que existem vínculos suficientes que impeçam o movimento como corpo rígido. Assim, não é possível haver deslocamentos das partículas do corpo sem que haja deformação.

Seja o deslocamento de um ponto genérico P(x,y) dado pelas componentes u e v paralelas, respectivamente, aos eixos x e y (Figura 1.1).

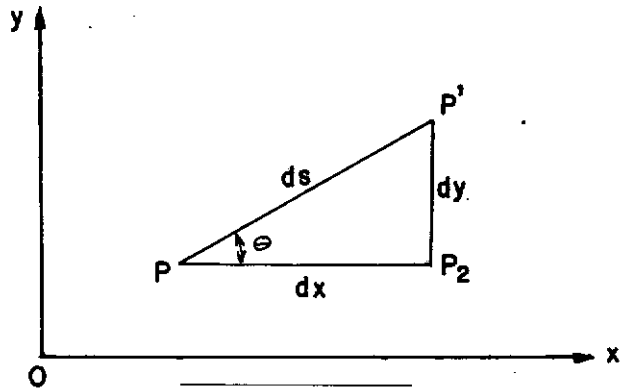


FIGURA 1.1

Considere, ainda, o ponto P' infinitamente próximo de P, o qual numa posição antes do deslocamento tem coordenadas (x + dx, y + dy).

Os co-senos diretores da direção $\overline{PP'}$ serão representados por ℓ e m, sendo:

$$\ell = \frac{dx}{ds} = \cos\theta \quad ; \quad m = \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\theta \qquad (1.1)$$

Considerando que o corpo sofra uma pequena deformação o ponto P' desloca-se de:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \qquad \text{segundo a direção } x$$

$$(1.2)$$

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \qquad \text{segundo a direção } y$$

Sendo ε a deformação unitária na direção $\overline{PP'}$ e ds a distância original entre $\overline{PP'}$, após a deformação tem-se:

$$\overline{PP'} = (1 + \varepsilon)ds$$

$$\overline{PP}_2 = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \qquad (1.3)$$

$$\overline{P_2P'} = dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

Além disso:

$$\overline{PP'}^2 = \overline{PP}_2^2 + \overline{P_2P'}^2 \qquad (1.4)$$

Substituindo (1.3), convenientemente, em (1.4) e fazendo as devidas simplificações chega-se a:

$$(1+\varepsilon)^2 = \left[\ell(1 + \frac{\partial u}{\partial x}) + m \frac{\partial u}{\partial y}\right]^2 + \left[m(1 + \frac{\partial v}{\partial y}) + \ell \frac{\partial v}{\partial x}\right]^2$$

(1.5)

Desenvolvendo a equação (1.5) e desprezando os termos de ordem superior, tem-se a expressão que define a deformação numa direção qualquer:

$$\varepsilon = \varepsilon_x \ell^2 + \varepsilon_y m^2 + \gamma_{xy} \ell m \qquad (1.6)$$

onde as seguintes notações são introduzidas:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1.7)$$

As três quantidades ε_x, ε_y e γ_{xy} são denominadas componentes da deformação. Essas quantidades estão relacionadas pela equação abaixo que é denominada equação de compatibilidade de deformações:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \, \partial y} \quad . \qquad (1.8)$$

3. TENSÕES - CONVENÇÃO ADOTADA - NOTAÇÕES

Considere um elemento infinitesimal de área dA submetido a um sistema de forças cuja resultante é dP (Figura 1.2).

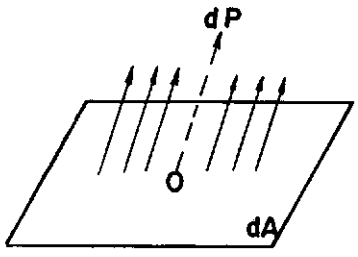


FIGURA 1.2

Se a área do elemento diminui continuamente, o valor limite do quociente $\frac{dP}{dA}$ representa a tensão que atua no ponto O. Esta tensão pode ser decomposta numa componente normal e noutra tangencial à superfície.

Considerando, agora, um paralelepípedo infinitesimal em torno do ponto genérico O e com suas faces normais aos eixos coordenados x, y, z, para cada um dos planos xy, xz e yz tem-se uma tensão normal ao plano considerado e duas componentes da tensão tangencial paralelas aos eixos que definem esse plano. Assim, para o ponto O tem-se nove componentes da tensão. Calculando, porém, o momento em relação aos eixos coordenados a condição de equilíbrio, exige que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

de modo que apenas seis componentes das tensões, independentes, permanecem. Essas componentes definem completamente o estado de tensão no ponto e são:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$$

Para as tensões normais, o sub-índice indica que a tensão atua num plano normal ao eixo referido no sub-índice.

Para as tensões cisalhantes dois sub-índices são usados: o primeiro sub-índice indica a direção normal ao plano em questão e o segundo a direção da componente da tensão sobre o mesmo.

A tensão normal será considerada positiva quando de tração e negativa quando de compressão.

As componentes da tensão tangencial que atuam sobre uma face tomam o sentido positivo dos eixos coordenados se uma tração aplicada sobre a mesma face atua no sentido do eixo; se a tração atua no sentido contrário ao eixo correspondente, então, o sentido positivo da tensão tangencial será oposto ao dos eixos coordenados.

4. TENSÕES NUM PLANO INCLINADO

Definidas completamente as componentes da tensão, pode-se obter as tensões que atuam em qualquer plano inclinado, usando simplesmente as equações da Estática.

Considere-se o plano AB inclinado em relação aos eixos coordenados (Figura 1.3). Se o ângulo entre a normal n e o eixo Ox é θ, os co-senos diretores da direção normal são:

$\ell = \cos\theta$ e $m = \operatorname{sen}\theta$

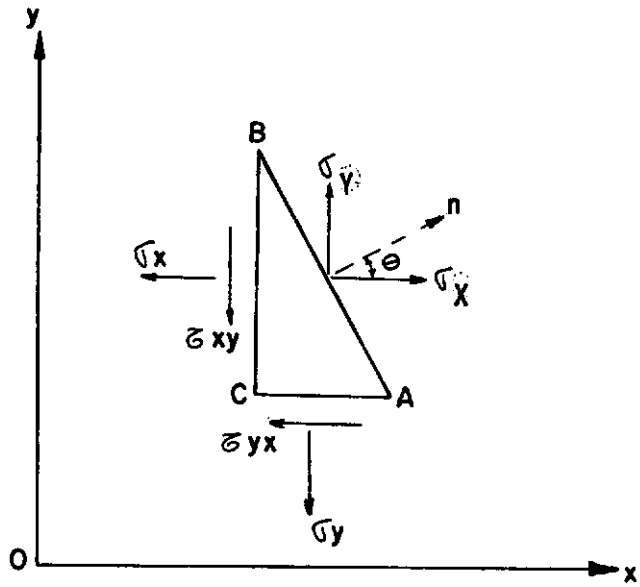


FIGURA 1.3

Sendo σ_X e σ_Y componentes de tensão, paralelas aos eixos coordenados e atuando neste lado AB então as equações de equilíbrio do elemento considerado são:

$$\sigma_X = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m$$

$$\sigma_Y = \tau_{xy} \ell + \sigma_y m \qquad (1.9)$$

As componentes normal e tangencial das tensões atuando no lado AB são, respectivamente:

$$\sigma_n = \sigma_X \ell + \sigma_Y m = \sigma_x \ell^2 + \sigma_y m^2 + 2 \tau_{xy} \ell m$$

$$\tau_n = \sigma_Y \ell - \sigma_X m = - (\sigma_x - \sigma_y)\ell m + \tau_{xy}(\ell^2 - m^2) \qquad (1.10)$$

5. LEI DE HOOKE

A relação entre componentes da tensão e deformações foi estabelecida experimentalmente e é denominada lei de Hooke.

Para corpos isótropos bi-dimensionais a lei de Hooke, para o caso de estado plano de tensão e estado plano de deformação é expressa por:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad ; \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \qquad (1.11)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy}$$

onde:

E é o módulo de elasticidade longitudinal

ν é o coeficiente de Poisson.

CAPÍTULO II

TENSÕES NO SISTEMA DE COORDENADAS OBLÍQUAS

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

A solução de problemas de estruturas, onde o contorno apresenta forma de paralelogramo, requer o conhecimento de tensões e deformações nos sistemas de coordenadas retangulares, oblíquas e, às vezes, polares.

Neste capítulo, far-se-á um estudo sucinto de tensões e deformações no sistema oblíquo de coordenadas.

2. OBSERVAÇÕES QUANTO A NOTAÇÃO USADA

É prática frequente usar a mesma notação para as grandezas, no sistema de coordenadas oblíquas e no sistema de coordenadas retangulares.

Entretanto, quando os dois referidos sistemas de coordenadas são usados simultaneamente, tem-se necessidade de in

troduzir uma certa notação para diferençar as respectivas grandezas.

Muitos autores usam caracteres grifados para representar o sistema oblíquo e caracteres não grifados para o sistema retangular. Porém, esta convenção não é muito adequada devido à dificuldade que apresenta na sua impressão, muitas vezes causando dúvidas ao leitor.

Como, nesse trabalho, serão usados ambos os sistemas de referência retangular e oblíquo, será adotada a seguinte convenção:

As grandezas referidas ao sistema oblíquo de coordenadas serão acrescidas do índice 1 (unidade). Por exemplo:

$x1$, $y1$ - são coordenadas de um ponto referidas ao sistema oblíquo.

σ_{x1}, τ_{x1y1}, σ_{y1} - são componentes de tensão no sistema oblíquo, etc.

3. RELAÇÕES GEOMÉTRICAS

Ambos os sistemas de coordenadas, o retangular x e y e o oblíquo x1 e y1 estão representados na Figura 2.1.

O ângulo formado entre os eixos xl e yl será denominado α (alfa).

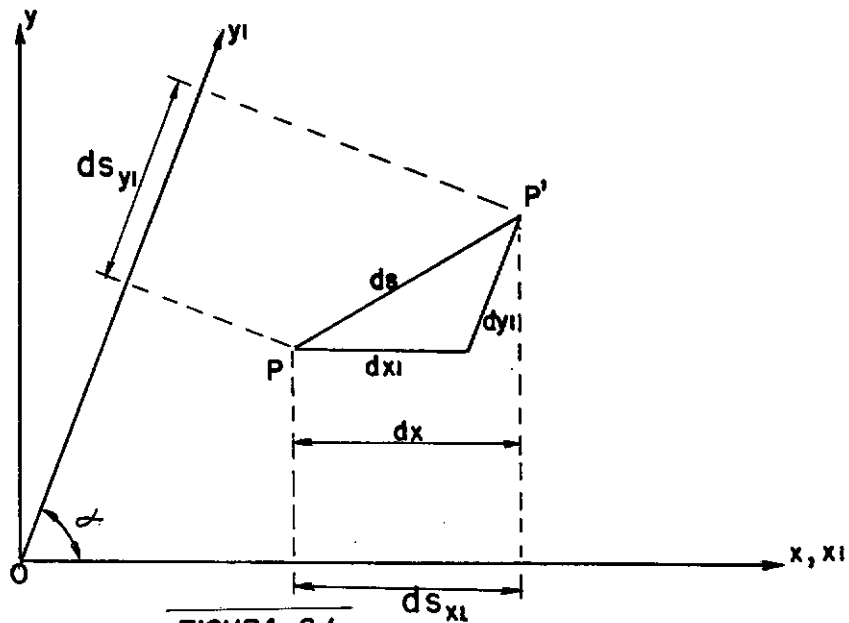


FIGURA 2.1

Os dois sistemas estão relacionados entre si por:

$$x = xl + yl \cos\alpha \quad ; \quad xl = x - y \cot\alpha$$
$$y = yl \operatorname{sen}\alpha \quad ; \quad yl = y \operatorname{cosec}\alpha \qquad (2.1)$$

Seja ds a distância entre os pontos P(x,y) e P'(x+ +dx, y+dy).

Os co-senos diretores ℓ e m da reta que une esses dois pontos, são definidos no limite como:

$$\ell = \frac{dx}{ds} \quad ; \quad m = \frac{dy}{ds} \tag{2.2}$$

Analogamente, para o sistema de coordenadas oblíquas, os pontos P e P' são caracterizados por P(x1, y1) e P'(x1 + dx1, y1 + dy1) e convém introduzir quantidades $\ell 1$ e m1, que também definem a posição da reta PP'.

$$\ell 1 = \frac{dx1}{ds} \quad ; \quad m1 = \frac{dy1}{ds} \tag{2.3}$$

De (2.1), (2.2) e (2.3) tem-se:

$$\begin{aligned}
\ell &= \frac{d}{ds}(x1 + y1 \cos\alpha) = \ell 1 + m1 \cos\alpha \\
\ell 1 &= \frac{d}{ds}(x - y \cot\alpha) = \ell - m \cot\alpha \\
m &= \frac{d}{ds}(y1 \operatorname{sen}\alpha) = m1 \operatorname{sen}\alpha \\
m1 &= \frac{d}{ds}(y \operatorname{cosec}\alpha) = m \operatorname{cosec}\alpha
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Por outro lado, considerando a distância entre os pontos P e P' como:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx1^2 + dy1^2 + 2\ dx1\ dy1\ \cos\alpha \qquad (2.5)$$

tem-se a relação:

$$\ell^2 + m^2 = \ell 1^2 + m1^2 + 2\ \ell 1\ m1\ \cos\alpha = 1$$

Finalmente, as projeções de ds sobre os eixos Ox1 e Oy1 são mostradas na Figura 2.1 e são, respectivamente:

$$ds_{x1} = dx1 + dy1\ \cos\alpha = dx$$

$$ds_{y1} = dx1\ \cos\alpha + dy1$$

4. DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES

As componentes u, v do deslocamento do ponto P podem ser consideradas paralelas aos eixos Ox1 e Oy1 em suas componentes oblíquas u1 e v1. Então, se o ponto P estava originalmente em (x1, y1) e moveu-se para (x1 + u1, y1 + v1) as relações entre as componentes oblíquas e retangulares dos deslocamentos são:

$$u = u1 + v1\ \cos\alpha \quad ; \quad u1 = u - v\ \cot\alpha$$

$$v = v1\ \operatorname{sen}\alpha \quad ; \quad v1 = v\ \operatorname{cosec}\alpha$$

Estas relações são análogas às relações (2.1), dadas anteriormente.

As projeções ul_{x1} e vl_{y1} dessas componentes de deslocamentos (Figura 2.2), respectivamente nos eixos Oxl e Oyl, são dadas por:

$$ul_{x1} = ul + vl \cos\alpha$$
$$vl_{y1} = ul \cos\alpha + vl \qquad (2.6)$$

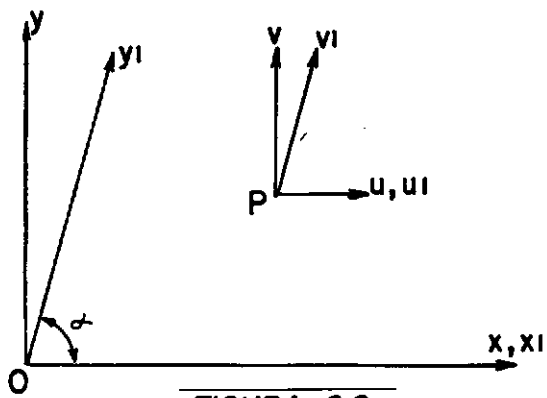


FIGURA 2.2

Para definir a deformação no ponto P, considere quanto a sua posição relativa aos pontos adjacentes foi modificada.

Quando o ponto sofre um deslocamento ul(xl, yl), vl(xl, yl), o ponto P move-se para (xl + ul, yl + vl) e o ponto P' move-se para (xl + dxl + ul+dul, yl + dyl + vl + dvl).

Se a distância entre P e P' era originalmente ds, torna-se após o deslocamento, $(1+\varepsilon)ds$ e de (2.5) vem:

$$(1+\varepsilon)^2\, ds^2 = (dx1 + du1)^2 + (dy1 + dv1)^2$$

$$+ 2(dx1 + du1)(dy1 + dv1)\cos\alpha$$

$$(1+\varepsilon)^2\, ds^2 = ds^2 + 2\, du1\, dx1 + 2\, dv1\, dy1$$

$$+ 2(dv1\, dx1 + du1\, dy1)\cos\alpha$$

Onde se desprezou os quadrados e produtos dos pequenos deslocamentos du1 e dv1.

$$(1+\varepsilon)^2\, ds^2 = ds^2 + 2\, dx1(du1 + dv1\, \cos\alpha)$$

$$+ 2\, dy1(dv1 + du1\, \cos\alpha) \qquad (2.7)$$

Fazendo uso das equações (2.6), a equação (2.7) pode ser escrita de forma mais simples:

$$(1+\varepsilon)^2\, ds^2 = ds^2 + 2\, du1_{x1}\, dx1 + 2\, dy1\, dv1_{y1} \qquad (2.8)$$

Quando as quantidades dx1 e dy1 são suficientemente pequenas tem-se:

$$du1_{x1} = \frac{\partial u1_{x1}}{\partial x1} dx1 + \frac{\partial u1_{x1}}{\partial y1} dy1$$

$$dv1_{y1} = \frac{\partial v1_{y1}}{\partial x1} dx1 + \frac{\partial v1_{y1}}{\partial y1} dy1 \qquad (2.9)$$

De modo que, levando (2.9) em (2.8), a pequena deformação ε da linha que une os pontos P e P' é dada por:

$$(1+\varepsilon)^2 = 1 + 2 \frac{\partial u1_{x1}}{\partial x1} \left(\frac{dx1}{ds}\right)^2 + 2 \frac{\partial v1_{y1}}{\partial y1} \left(\frac{dy1}{ds}\right)^2$$

$$+ 2 \left(\frac{\partial u1_{x1}}{\partial y1} + \frac{\partial v1_{y1}}{\partial x1}\right) \frac{dx1}{ds} \frac{dy1}{ds}$$

As derivadas $\frac{\partial u1_{x1}}{\partial x1}$, $\frac{\partial v1_{y1}}{\partial y1}$ etc, são pequenas quantidades onde os quadrados e produtos podem ser desprezados comparando-os à unidade.

Logo:

$$\varepsilon = \varepsilon_{x1}\, \ell 1^2 + \varepsilon_{y1}\, m1^2 + \gamma_{x1y1}\, \ell 1\, m1 \qquad (2.10)$$

onde:

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\partial u1_{x1}}{\partial x1} \quad ; \quad \varepsilon_{y1} = \frac{\partial v1_{y1}}{\partial y1}$$

$$\gamma_{x1y1} = \frac{\partial u1_{x1}}{\partial y1} + \frac{\partial v1_{y1}}{\partial x1} \qquad (2.11)$$

As expressões (2.11) caracterizam completamente a deformação, de modo que podem ser chamadas componentes de deformação no sistema oblíquo.

Deve-se observar, no entanto, que $u1_{x1}$ e $v1_{y1}$ não são componentes verdadeiras de deslocamentos, mas sim as projeções sobre os eixos oblíquos.

Comparando as expressões (2.10) e (1.6) tem-se:

$$\varepsilon = \varepsilon_{x1}\, \ell 1^2 + \varepsilon_{y1}\, m1^2 + \gamma_{x1y1}\, \ell 1\, m1 =$$

$$= \varepsilon_x\, \ell^2 + \varepsilon_y\, m^2 + \gamma_{xy}\, \ell\, m \qquad (2.12)$$

Substituindo as equações (2.4) em (2.12) chega-se às relações entre deformações nos dois sistemas de coordenadas:

$$\varepsilon_{x1} = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{y1} = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2\alpha + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \qquad (2.13)$$

$$\gamma_{x1y1} = 2\,\varepsilon_x \cos\alpha + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\alpha$$

ou:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x1}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{x1} \cot^2\alpha + \varepsilon_{y1} \operatorname{cosec}^2\alpha - \gamma_{x1y1} \cot\alpha \operatorname{cosec}\alpha$$

$$\gamma_{xy} = -\,2\,\varepsilon_{x1} \cot\alpha + \gamma_{x1y1} \operatorname{cosec}\alpha$$

Analogamente à equação (1.8) tem-se a equação de compatibilidade de deformações, referida aos eixos oblíquos:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{x1}}{\partial y1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{y1}}{\partial x1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{x1y1}}{\partial x1\, \partial y1}$$

5. FORÇAS - TENSÕES

Considere o ponto P, submetido à força de componentes X, Y no sistema retangular de coordenadas, que pode ser substituída por outro par de forças X1, Y1, no sistema oblíquo de coordenadas (Figura 2.3).

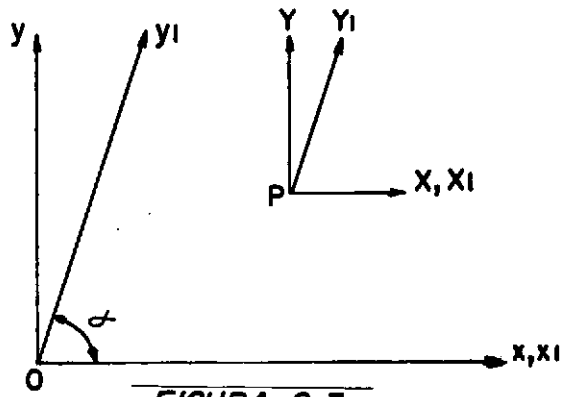


FIGURA 2.3

Analogamente à equação (2.1):

$$X = X1 + Y1 \cos\alpha \quad ; \quad X1 = X - Y \cot\alpha$$

$$Y = Y1 \operatorname{sen}\alpha \quad ; \quad Y1 = Y \operatorname{cosec}\alpha \qquad (2.14)$$

As três componentes de tensão σ_x, σ_y e τ_{xy} ou qualquer combinação delas, define completamente o estado de tensão em um ponto P qualquer da placa. Sendo P um ponto da placa tensionada, suponha que as componentes de tensões σ_x, σ_y e τ_{xy} são

conhecidas e atuam nos lados de um elemento triangular PAB, tendo um vértice no ponto P, como na Figura 2.4.

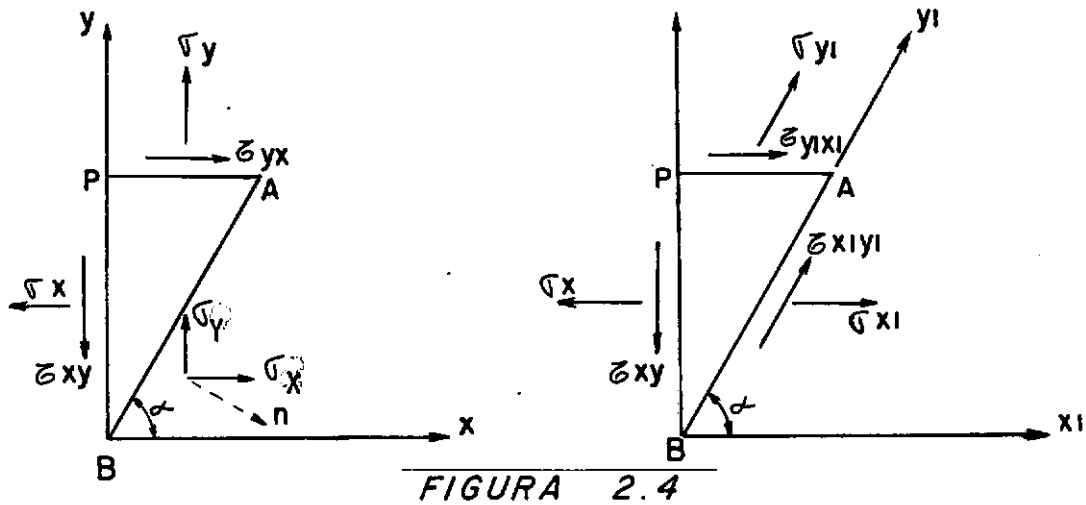


FIGURA 2.4

O par de tensões σ_y e τ_{yx} atuando no lado $\overline{PA}$ pode ser substituído por outro par de tensões σ_{y1} e τ_{y1x1} como indica a Figura 2.4.

Para o lado $\overline{PA}$, de acordo com as equações (2.14) tem-se:

$$\tau_{yx} = \tau_{y1x1} + \sigma_{y1} \cos\alpha \quad ; \quad \tau_{y1x1} = \tau_{yx} - \sigma_y \cot\alpha$$

(2.15)

$$\sigma_y = \sigma_{y1} \operatorname{sen}\alpha \quad ; \quad \sigma_{y1} = \sigma_y \operatorname{cosec}\alpha$$

Os co-senos diretores da normal n ao lado $\overline{AB}$, dirigida de dentro para fora do triângulo são:

$$\ell = \text{sen}\alpha \quad ; \quad m = -\cos\alpha$$

Sendo σ_X e σ_Y as componentes das tensões paralelas aos eixos de coordenadas retangulares, atuando no lado $\overline{AB}$, então a equação (1.9) fornece:

$$\begin{aligned} \sigma_X &= \sigma_x \,\text{sen}\alpha - \tau_{xy} \cos\alpha \\ \sigma_Y &= \tau_{xy} \,\text{sen}\alpha - \sigma_y \cos\alpha \end{aligned} \qquad (2.16)$$

Este par de tensões pode ser substituído por outro par $\tau_{y_1x_1}$ e σ_{x_1}, como na Figura 2.4 e com auxílio da equação (2.14):

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= \sigma_X - \sigma_Y \cot\alpha \\ \tau_{x_1y_1} &= \sigma_Y \,\text{cosec}\alpha \end{aligned} \qquad (2.17)$$

Substituindo, agora (2.16) em (2.17):

$$\sigma_{x1} = \sigma_x \operatorname{sen}\alpha + \sigma_y \cos\alpha \cot\alpha - 2\,\tau_{xy} \cos\alpha$$

$$\tau_{x1y1} = \tau_{xy} - \sigma_y \cot\alpha \qquad (2.18)$$

Comparando (2.15) e (2.18) conclui-se:

$$\tau_{x1y1} = \tau_{y1x1}$$

As quantidades σ_{x1}, σ_{y1}, $\tau_{x1y1} = \tau_{y1x1}$ são denominadas componentes de tensões para o sistema oblíquo de coordenadas e definem completamente o estado de tensões em P, desde que $\alpha \neq \neq 0,\pi$.

As relações entre tensões, nos sistemas de coordenadas oblíquo e retangular, são pois:

$$\sigma_x = \sigma_{x1} \operatorname{cosec}\alpha + \sigma_{y1} \cos\alpha \cot\alpha + 2\,\tau_{x1y1} \cot\alpha$$

$$\sigma_y = \sigma_{y1} \operatorname{sen}\alpha$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{x1y1} + \sigma_{y1} \cos\alpha$$

e,

$$\sigma_{x1} = \sigma_x \operatorname{sen}\alpha + \sigma_y \cos\alpha \cot\alpha - 2\,\tau_{xy} \cos\alpha$$

$$\sigma_{y1} = \sigma_y \operatorname{cosec}\alpha \tag{2.19}$$

$$\tau_{x1y1} = \tau_{y1x1} = \tau_{xy} - \sigma_y \cot\alpha$$

6. LEI DE HOOKE

A lei de Hooke expressa em coordenadas oblíquas pode ser obtida substituindo a equação (2.13) na equação (1.11).

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{x1} + \nu(\varepsilon_{x1} \cot^2\alpha + \varepsilon_{y1} \operatorname{cosec}^2\alpha - \gamma_{x1y1} \cot\alpha \operatorname{cosec}\alpha)\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{x1} \cot^2\alpha + \varepsilon_{y1} \operatorname{cosec}^2\alpha - \gamma_{x1y1} \cot\alpha \operatorname{cosec}\alpha + \nu\,\varepsilon_{x1}\right] \tag{2.20}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[-2\,\varepsilon_{x1} \cot\alpha + \gamma_{x1y1} \operatorname{cosec}\alpha\right]$$

Agora, substituindo (2.19) em (2.20) vem:

$$\sigma_{x1} = \frac{E \operatorname{cosec}^3 \alpha}{1 - \nu^2} \left[\varepsilon_{x1} + (\cos^2 \alpha + \nu \operatorname{sen}^2 \alpha)\varepsilon_{y1} - \cos\alpha \, \gamma_{x1y1} \right]$$

$$\sigma_{y1} = \frac{E \operatorname{cosec}^3 \alpha}{1 - \nu^2} \left[\varepsilon_{y1} + (\cos^2 \alpha + \nu \operatorname{sen}^2 \alpha)\varepsilon_{x1} - \cos\alpha \, \gamma_{x1y1} \right]$$

$$\tau_{x1y1} = \frac{E \operatorname{cosec}^3 \alpha}{1 - \nu^2} \left[\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \alpha - \nu \operatorname{sen}^2 \alpha) \times \right.$$

$$\left. \gamma_{x1y1} - \cos\alpha(\varepsilon_{x1} + \varepsilon_{y1}) \right].$$

CAPÍTULO III

FLEXÃO DE PLACAS EM COORDENADAS OBLÍQUAS

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Neste capítulo, serão apresentadas apenas noções gerais sobre o assunto.

2. DEFINIÇÃO - HIPÓTESES

Placa é um elemento estrutural bi-dimensional ou laminar de superfície média plana, sujeita a solicitações predominantemente normais à superfície.

Uma placa é dita esconsa quando o ângulo β, denominado ângulo de esconsidade, é diferente de zero, ou seja, a placa apresenta contorno em forma de paralelogramo. (Figura 3.1).

No estudo que se segue, admite-se que as placas são delgadas, de material homogêneo e perfeitamente elástico, isótropas, com carregamentos normais à superfície média e sofrem peque

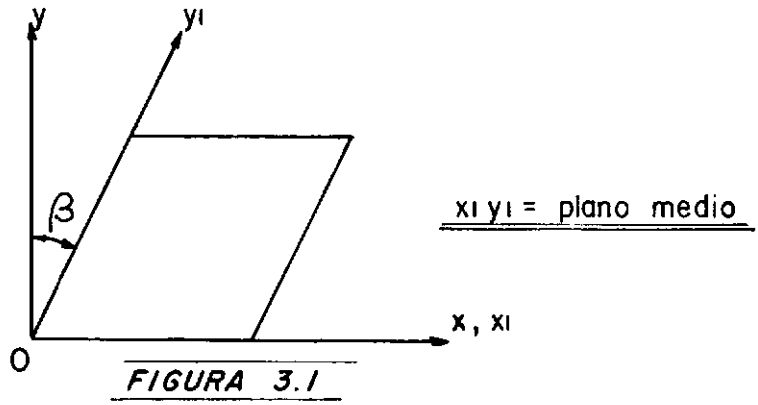


FIGURA 3.1

nas deflexões. Nesse caso, são válidas as seguintes hipóteses:

a) não há tração ou compressão na superfície média que será, portanto, uma superfície neutra. Deformações no plano médio da placa são desprezadas;

b) os pontos situados numa normal ao plano médio permanecem, após a deflexão, numa normal à superfície média. Isso equivale a desprezar as deformações sob efeito do esforço cortante;

c) desprezam-se as tensões na direção normal à placa.

3. RELAÇÃO ENTRE DEFLEXÕES E DEFORMAÇÕES

As hipóteses consideradas anteriormente em que se supõe desprezível o efeito da força cortante nas deflexões e o da

tensão de compressão produzida pela carga aplicada q, ocasionam erro desprezível nos deslocamentos transversais, desde que, a espessura da placa seja pequena comparada às outras dimensões. Nesse caso, através considerações geométricas, chega-se às seguintes relações:

$$u1_{x1} = - z \frac{\partial \omega}{\partial x1} \quad ; \quad v1_{y1} = - z \frac{\partial \omega}{\partial y1} \tag{3.1}$$

Substituindo (3.1) em (2.11):

$$\varepsilon_{x1} = - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 x1} \quad ; \quad \varepsilon_{y1} = - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 y1}$$

$$\gamma_{x1y1} = - 2 z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1 y1} \tag{3.2}$$

4. EQUAÇÕES DOS MOMENTOS

Considere os eixos oblíquos Ox1 e Oy1 passando pelo plano médio da placa e Oz normal a esse mesmo plano. Um elemento de placa é então atuado por momentos fletores M_{x1} e M_{y1}, momentos de torção M_{x1y1} e M_{y1x1} e esforços cortantes Q_{x1} e Q_{y1} (Figura 3.2). Os referidos momentos são relacionados às tensões pelas equações:

$$M_{x1} = \int_{-h/2}^{h/2} z\,\sigma_{x1}\,dz \quad ; \quad M_{x1y1} = -\int_{-h/2}^{h/2} z\,\tau_{x1y1}\,dz$$

$$(3.3)$$

$$M_{y1} = \int_{-h/2}^{h/2} z\,\sigma_{y1}\,dz \quad ; \quad M_{y1x1} = \int_{-h/2}^{h/2} z\,\tau_{y1x1}\,dz$$

onde **h** é a espessura da placa.

As direções positivas dos esforços são mostradas na Figura 3.2.

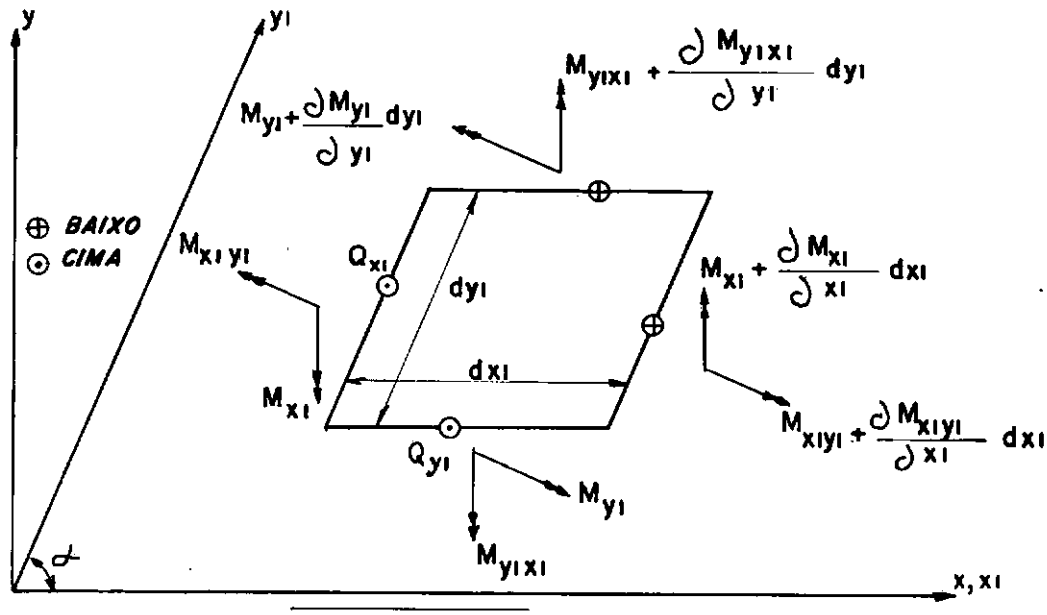


FIGURA 3.2

Substituindo as equações (3.2) nas equações (2.21), tem-se:

$$\sigma_{x1} = - z \frac{E \operatorname{cosec}^2 \alpha}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x1^2} + (\cos^2 \alpha + \nu \operatorname{sen}^2 \alpha) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y1^2} - 2 \cos\alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1 \, \partial y1} \right]$$

$$\sigma_{y1} = - z \frac{E \operatorname{cosec}^2 \alpha}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y1^2} + (\cos^2 \alpha + \nu \operatorname{sen}^2 \alpha) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1^2} - 2 \cos\alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1 \, \partial y1} \right] \qquad (3.4)$$

$$\tau_{x1y1} = - z \frac{E \operatorname{cosec}^2 \alpha}{1 - \nu^2} \left[(1 + \cos^2 \alpha - \nu \operatorname{sen}^2 \alpha) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1 \, \partial y1} - \cos\alpha \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y1^2} \right) \right]$$

Sabe-se que o operador ∇^2 em coordenadas oblíquas é representado por:

$$\nabla_1^2 = \operatorname{cosec}^2\alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial x1^2} - 2\cos\alpha\,\frac{\partial^2}{\partial x1\,\partial y1} + \frac{\partial^2}{\partial y1^2}\right) \qquad (3.5)$$

Substituindo a equação (3.5) em (3.4) tem-se as tensões escritas sob forma mais simples:

$$\sigma_{x1} = -z\,\frac{E\operatorname{cosec}\alpha}{1-\nu^2}\left[\nabla_1^2\omega - (1-\nu)\,\frac{\partial^2\omega}{\partial y1^2}\right]$$

$$\sigma_{y1} = -z\,\frac{E\operatorname{cosec}\alpha}{1-\nu^2}\left[\nabla_1^2\omega - (1-\nu)\,\frac{\partial^2\omega}{\partial x1^2}\right] \qquad (3.6)$$

$$\tau_{x1y1} = -z\,\frac{E\operatorname{cosec}\alpha}{1-\nu^2}\left[\nabla_1^2\omega\cos\alpha - (1-\nu)\,\frac{\partial^2\omega}{\partial x1\,\partial y1}\right]$$

Levando (3.6) em (3.3):

$$M_{x1} = -D\operatorname{cosec}\alpha\left[\nabla_1^2\omega - (1-\nu)\,\frac{\partial^2\omega}{\partial y1^2}\right]$$

$$M_{y1} = -D\operatorname{cosec}\alpha\left[\nabla_1^2\omega - (1-\nu)\,\frac{\partial^2\omega}{\partial x1^2}\right] \qquad (3.7)$$

$$M_{x1y1} = - M_{y1x1} = - D \operatorname{cosec}\alpha \left[\nabla_1^2 \omega \cos\alpha - (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1 \, \partial y1} \right]$$

onde D é a rigidez à flexão da placa, dada pela expressão:

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

5. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DAS PLACAS

Na teoria elementar da flexão de placas carregadas por forças normais à superfície, considera-se que os deslocamentos são pequenos comparados à espessura e que os bordos são livres para moverem-se no plano da placa.

A Figura 3.3 mostra os esforços cortantes. Os eixos coordenados x1, y1 e y estão no plano médio da placa e o eixo z normal ao referido plano.

O equilíbrio do elemento de placa (Figura 3.2) será estabelecido através da aplicação das equações da Estática. Os infinitésimos de ordem superior à segunda serão desprezados.

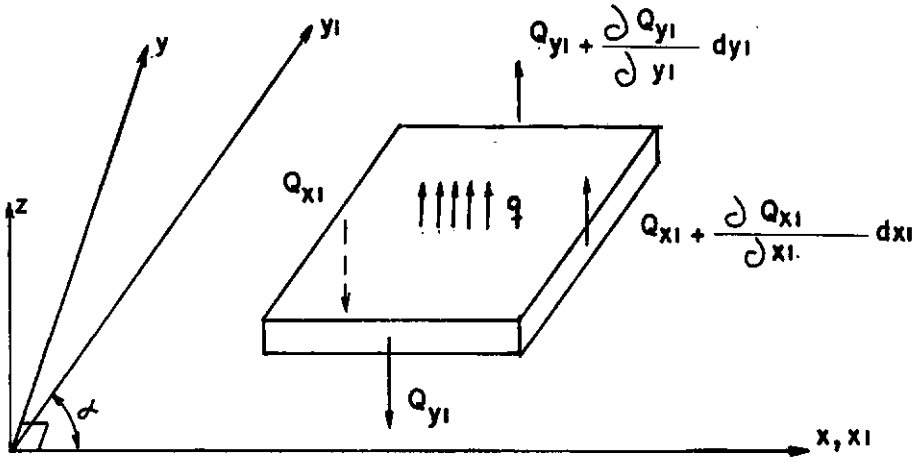


FIGURA 3.3

Dessa forma, do equilíbrio das forças na direção z, tem-se:

$$\frac{\partial Q_{y1}}{\partial y1} dy1\ dx1 + \frac{\partial Q_{x1}}{\partial x1} dx1\ dy1 + q\ \text{sen}\alpha\ dx1\ dy1 = 0$$

$$\frac{\partial Q_{y1}}{\partial y1} + \frac{\partial Q_{x1}}{\partial x1} + q\ \text{sen}\alpha = 0 \qquad (3.8)$$

Equilíbrio dos momentos na direção normal a y1:

$$\frac{\partial M_{x1y1}}{\partial x1} dx1\ dy1 - \frac{\partial M_{y1}}{\partial y1} dy1\ dx1 + Q_{y1}\ dy1\ dx1 = 0$$

$$\frac{\partial M_{x1y1}}{\partial x1} - \frac{\partial M_{y1}}{\partial y1} + Q_{y1} = 0 \qquad (3.9)$$

Equilíbrio dos Momentos na direção normal a x1:

$$\frac{\partial M_{y1x1}}{\partial y1} dy1\ dx1 + \frac{\partial M_{x1}}{\partial x1} dx1\ dy1 - Q_{x1}\ dx1\ dy1 = 0$$

$$\frac{\partial M_{y1x1}}{\partial y1} + \frac{\partial M_{x1}}{\partial x1} - Q_{x1} = 0 \qquad (3.10)$$

Da equação (3.3) tem-se:

$$M_{x1y1} = - M_{y1x1}$$

Explicitando os esforços cortantes nas equações (3. .9) e (3.10), derivando convenientemente e substituindo na equação (3.8) vem:

$$\frac{\partial^2 M_{x1}}{\partial x1^2} + \frac{\partial^2 M_{y1}}{\partial y1^2} - 2\ \frac{\partial^2 M_{x1y1}}{\partial x1\ \partial y1} + q\ \text{sen}\alpha = 0 \qquad (3.11)$$

Usando as expressões (3.7) chega-se à equação diferencial das placas, expressa em coordenadas oblíquas:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x1^4} - 4 \cos\alpha \frac{\partial^4 \omega}{\partial x1^3 \, \partial y1} + 2 \, (1 + 2 \cos^2\alpha) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1^2 \, \partial y1^2}$$

$$- 4 \cos\alpha \frac{\partial^4 \omega}{\partial x1 \, \partial y1^3} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y1^4} = q \frac{\operatorname{sen}^4\alpha}{D} \qquad (3.12)$$

6. RELAÇÃO ENTRE MOMENTOS NOS SISTEMAS RETANGULAR E OBLÍQUO

Analogamente às expressões (3.3) tem-se:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \, \sigma_x \, dz \quad ; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \, \sigma_y \, dz$$

$$(3.13)$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} z \, \tau_{xy} \, dz \quad ; \quad M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} z \, \tau_{yx} \, dz$$

Substituindo adequadamente (2.19) em (3.13) e considerando ainda as equações (3.3), chega-se às seguintes relações entre momentos nos dois sistemas de coordenadas retangular e oblíquo.

$$M_x = M_{x1} \operatorname{cosec}\alpha + M_{y1} \cos\alpha \cot\alpha - 2 M_{x1y1} \cot\alpha$$

$$M_y = M_{y1} \operatorname{sen}\alpha$$

$$M_{xy} = - M_{yx} = M_{x1y1} - M_{y1} \cos\alpha$$

ou:

$$M_{x1} = M_x \operatorname{sen}\alpha + M_y \cos\alpha \cot\alpha + 2 M_{xy} \cos\alpha \qquad (3.14)$$

$$M_{y1} = M_y \operatorname{cosec}\alpha$$

$$M_{x1y1} = - M_{y1x1} = M_{xy} + M_y \cot\alpha.$$

7. MOMENTOS FLETORES E MOMENTOS DE TORÇÃO VERDADEIROS NO SISTEMA OBLÍQUO

Esses momentos verdadeiros que atuam em qualquer bordo paralelo aos eixos oblíquos podem ser obtidos facilmente da Figura 3.2.

Considere-se por exemplo, $M_{\overline{x1}}$ e $M_{\overline{y1}}$ como momentos fletores verdadeiros atuando nos bordos paralelos aos eixos Oy1 e Ox1, respectivamente.

Logo:

$$M_{\overline{x1}} = M_{x1} \operatorname{sen}\alpha$$

$$M_{\overline{y1}} = M_{y1} \operatorname{sen}\alpha \qquad (3.15)$$

8. CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA BORDO ENGASTADO

Se um bordo da placa é perfeitamente engastado, o deslocamento ao longo desse bordo é nulo e o plano tangente à superfície média deslocada, ao longo desse lado, coincide com a posição inicial do plano médio da placa.

Logo, se os bordos $x1 = a$ e $y1 = b$ são engastados tem-se que:

$$\left[\omega\right]_{x1=a} = \left[\frac{\partial\omega}{\partial x1}\right]_{x1=a} = 0$$

e,

$$\left[\omega\right]_{y1=b} = \left[\frac{\partial\omega}{\partial y1}\right]_{y1=b} = 0 .$$

CAPÍTULO IV

MÉTODO DAS EQUIVALÊNCIAS

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

No presente capítulo serão apresentados os conceitos básicos da Teoria das Equivalências, bem como aplicação da teoria ao estudo de placas.

2. CONCEITUAÇÃO - PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS

Todos os métodos numéricos de resolução de problemas de elasticidade procedem a uma discretização do meio contínuo a estudar. O meio discreto obtido representa, de maneira aproximada, o meio contínuo sob certas condições.

O método de resolução pela Teoria das Equivalências, sendo um método numérico, não foge a esta regra. O meio discreto utilizado é constituído de um sistema de barras e a condição fundamental de equivalência entre os meios contínuo e discreto é a identidade das respectivas energias.

Considerando-se um corpo elástico em equilíbrio estático, sob a ação de forças de volume e de superfície dadas, derivadas de um potencial, demonstra-se que;

- de todos os campos de deslocamentos *admissíveis*, o campo real, isto é, aquele que verifica as equações de equilíbrio e é compatível com as ligações impostas, é o que minimiza a energia potencial total;

- reciprocamente, se existe um campo de deslocamento admissível, que torna mínima a energia potencial, este campo é o campo real.

Logo, a integração de equações de equilíbrio que é, em geral, um problema difícil é substituído aqui pela aplicação do método variacional.

Considere-se um corpo deformável, de volume v, submetido a um carregamento derivado de um potencial ϕ.

Sendo U_0 a energia potencial de deformação por unidade de volume, o potencial total será:

$$\pi = \int_v U_0 \, dv + \phi$$

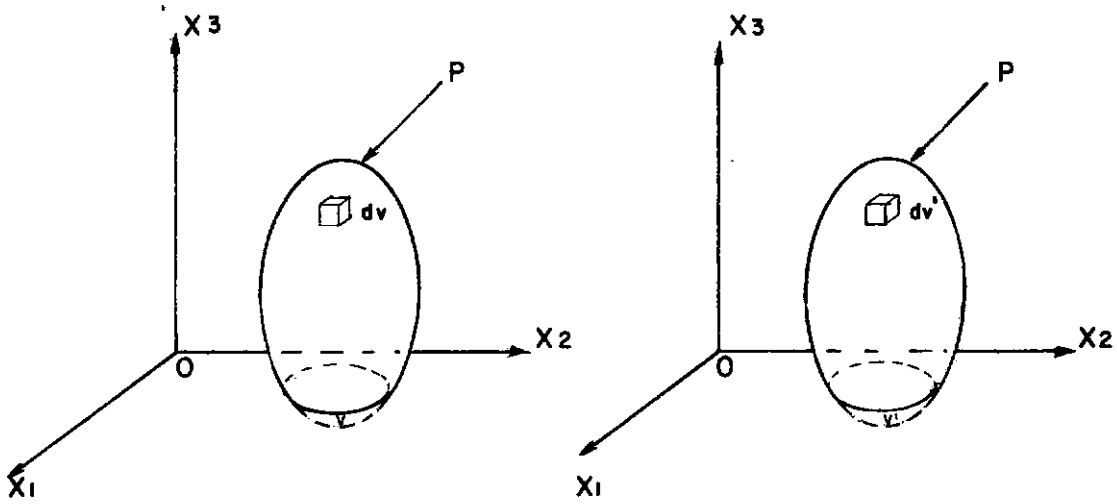


FIGURA 4.1

No caso representado na Figura 4.1, tem-se:

$$\phi = - \vec{P}\,\vec{u}$$

onde:

$\vec{u}$ é o deslocamento do ponto de aplicação da carga considerada.

$\vec{P}$ é a carga concentrada aplicada.

Logo:

$$\pi = \int_v U_0 \, dv - \vec{P}\vec{u}$$

Observa-se que este problema implica em pesquisar um campo de deslocamento compatível com as ligações do corpo e que

torne mínimo o potencial total π. $(\delta\pi = 0)$.

Seja um segundo corpo v' ocupando o mesmo domínio espacial e submetido ao mesmo carregamento que o corpo anteriormente considerado (Figura 4.1).

Designando por U_0' sua energia potencial de deformação por unidade de volume, o potencial total do sistema se escreve:

$$\pi' = \int_v U_0' \, dv' + \phi$$

Analogamente, a resolução desse problema implica num campo de deslocamento que torne mínimo o funcional π' $(\delta\pi' = 0)$.

Como essas variações são arbitrárias deve-se ter:

$$\delta\pi = \delta\pi'$$

$$\pi = \pi' = \int_v U_0' \, dv + \phi$$

Resulta, pois, que os dois corpos admitem o mesmo potencial total e, portanto, são ditos equivalentes.

Pode-se, então, comparar o problema do corpo carrega

do ao de um corpo equivalente, no qual o estudo é mais acessível, tendo esse meio equivalente leis de comportamento diferentes.

Resumindo, a teoria das equivalências permite:

a) Substituir o meio contínuo por um conjunto de elementos constituídos por barras.

b) Calcular as características das barras, identificando o potencial total do elemento contínuo e do elemento discreto, considerando o fato de que o campo de deslocamento é o mesmo nos dois elementos equivalentes.

c) Calcular a estrutura constituída por essas barras com auxílio de computador.

d) Utilizar os resultados obtidos para determinar o campo de tensões e de deslocamentos dentro do corpo contínuo inicial.

3. TEORIA DAS PLACAS

3.1 CONCEITOS BÁSICOS - CONSIDERAÇÕES

Considerando-se uma placa de superfície média (x,y) e espessura variável $h(x,y)$, a energia de deformação por unidade de área é dada pela relação:

$$U_0 = \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \, \partial y}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \, \partial y}\right)^2 + 2\nu \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \, \partial y}\right)^2 \right] \right\} \qquad (4.1)$$

onde D é a rigidez à flexão da placa.

Para o caso de grandes deformações, os esforços de membrana no plano médio da placa são obtidos por derivação da função de tensão F, regida pela relação: [12]

$$\Delta\Delta F = E\left[\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right]$$

Considerando, no entanto, pequenas deformações, a teoria clássica das placas despreza esses esforços de membrana. Logo:

$$\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \cong 0 \qquad (4.2)$$

Consequentemente, a expressão (4.1) fica:

$$U_0 \cong \frac{1}{2}\,D\left[\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] \qquad (4.3)$$

3.2 CONDIÇÃO DE BORDO ENGASTADO

Seja o termo da expressão (4.1):

$$u_0 = \nu D\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] \qquad (4.4)$$

Quando o bordo da placa é engastado pode-se demonstrar que:[6]

$$\int_S u_0 \, dS = 0 \tag{4.5}$$

onde S é a área da placa.

Em consequência, pode-se tomar como densidade de energia de deformação para o corpo equivalente a quantidade:

$$U'_0 = \frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] \tag{4.6}$$

Com efeito, devido a (4.5):

$$\delta \int_S U_0 \, dS = \delta \int_S U'_0 \, dS \tag{4.7}$$

Observa-se ainda que, no caso em que o coeficiente de Poisson é nulo, a equação (4.1) se reduz a (4.6).

Resumindo:

A expressão (4.6) é válida no caso em que a placa é perfeitamente engastada no contorno ou ainda quando $\nu = 0$.

Os diversos resultados obtidos quando se considera a teoria clássica mostram que a aproximação é bastante suficiente.

3.3 ENERGIA DE FLEXÃO E TORÇÃO DE UMA BARRA

Seja a barra ij (Figura 4.2), de pequeno comprimento ℓ, associada a um sistema de referência local (x,y).

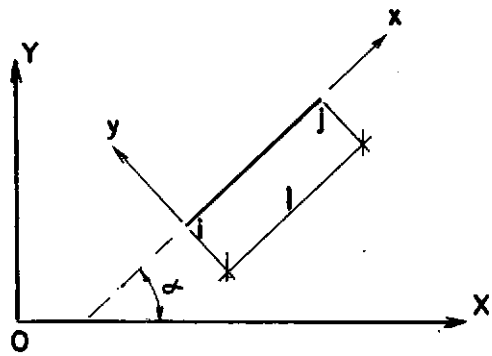


FIGURA 4.2

Designando por M_f o momento de flexão da barra, vem:

$$M_f = EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \tag{4.8}$$

Por outro lado, tem-se que:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial X}\cos\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial Y}\operatorname{sen}\alpha$$

e,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} \cos^2\alpha + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \operatorname{sen}^2\alpha + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial X\, \partial Y} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \tag{4.9}$$

Usando (4.8) e (4.9) a energia de flexão da barra se escreve:

$$W_f = \frac{1}{2} M_f \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \ell = \frac{1}{2} EI\ell \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)^2$$

$$W_f = \frac{1}{2} \rho'_{ij} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} \cos^2\alpha + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial X\, \partial Y} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \operatorname{sen}^2\alpha \right]^2 \tag{4.10}$$

onde $\rho'_{ij} = (EI\ell)_{ij}$

Analogamente, para o momento de torção da barra, tem-se:

$$M_t = \mu J \frac{\partial^2 \omega}{\partial x\, \partial y}$$

onde μJ é a rigidez à torção da barra.

Sendo:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\ \partial y} = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2}\right) \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X\ \partial Y} (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)$$

a energia de torção da barra será:

$$W_t = \frac{1}{2} \quad M_t \frac{\partial^2 \omega}{\partial x\ \partial y} \ell = \frac{1}{2} \mu J \ell \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\ \partial y}\right)^2$$

$$W_t = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2}\right) \operatorname{sen} 2\alpha + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X\ \partial Y} \cos 2\alpha\right]^2 \tag{4.11}$$

onde $\gamma_{ij} = (\mu J \ell)_{ij}$.

3.4 MODELOS EQUIVALENTES - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Seja um sistema de eixos coordenados retangulares x, y, z.

Designando por $e_{ij}(i,j = 1,2,3)$ as componentes do tensor de deformação, a energia de deformação W é dada por:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \left[(\lambda + 2\mu)(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + 2\lambda(e_{11}\, e_{22} + e_{11}\, e_{33} + e_{22}\, e_{33}) + 4\mu(e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2)\right] dV \tag{4.12}$$

Onde λ e μ são os coeficientes de Lamé.

O alongamento unitário e_ψ segundo uma direção ψ definida pelos seus co-senos diretores ψ_1, ψ_2, ψ_3 é:

$$e_\psi = e_{11}\, \psi_1^2 + e_{22}\, \psi_2^2 + e_{33}\, \psi_3^2 + 2(e_{12}\, \psi_1\, \psi_2 + e_{13}\, \psi_1\, \psi_3 + e_{23}\, \psi_2\, \psi_3) \tag{4.13}$$

A energia de deformação de uma barra submetida a uma força axial é:

$$W = \frac{1}{2}\, ES\ell\, e^2$$

onde:

ℓ comprimento

S seção transversal da barra

e deformação unitária.

Associando-se à barra o parâmetro $\rho = ES\ell$ a sua e

nergia de deformação é dada por:

$$W = \frac{1}{2} \rho \, e^2 \tag{4.14}$$

Substituindo (4.13) em (4.14), vem:

$$W = \frac{1}{2} \rho \left[e_{11} \psi_1^2 + e_{22} \psi_2^2 + e_{33} \psi_3^2 + 2(e_{12} \psi_1 \psi_2 + e_{13} \psi_1 \psi_3 + e_{23} \psi_2 \psi_3) \right]^2 \tag{4.15}$$

Se se considera um sistema constituído por n barras articuladas e se W_i é a energia de deformação da barra i, a energia de deformação total do sistema será:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \tag{4.16}$$

Observa-se que para realizar a equivalência entre o elemento contínuo (cuja energia de deformação é dada por 4.12) e o elemento discreto constituído de barras (onde a energia é dada por 4.16), segundo (4.15) é necessário fazer desaparecer os termos da forma $e_{ii} \; e_{jk}$ (sendo $j \neq k$), que não figuram na relação (4.12).

Diversos modelos equivalentes são possíveis. A utilização de cada um deles vai depender do tipo de problema que se tem a resolver.

Nesse trabalho não será mencionado nenhum modelo equivalente exceto o triangular que mais se adaptou ao estudo em questão.

3.5 MODELO EQUIVALENTE TRIANGULAR - DETERMINAÇÃO DE ESFORÇOS

Considere os elementos ij, jk e kℓ formando um triângulo qualquer (Figura 4.3).

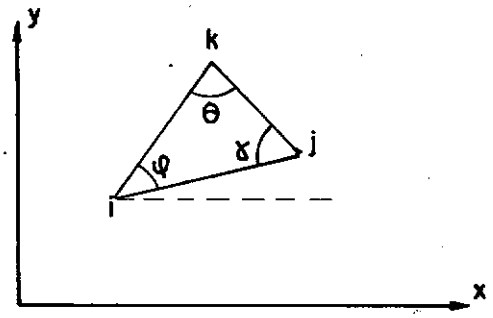


FIGURA 4.3

Sendo W a energia de deformação armazenada pelo elemento triangular ijk de área A, tem-se:

$$W = AU_0 = (W_f + W_t)_{ij} + (W_f + W_t)_{jk} + (W_f + W_t)_{ki} \tag{4.17}$$

Substituindo, em (4.17), cada termo por seu valor (equações 4.10 e 4.11); e ainda fazendo-se uma identificação de termos semelhantes chega-se a um sistema de seis equações diferenciais que resolvido fornece para cada barra os valores dos parâmetros ρ' e γ. Logo, para a barra ij, por exemplo, tem-se:

$$\rho'_{ij} = \gamma_{ij} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\gamma} AD \qquad (4.18)$$

onde:

$$\rho'_{ij} = (EI\ell)_{ij} \quad ; \quad \gamma_{ij} = (\mu J\ell)_{ij}$$

Para o caso de placas esconsas poder-se-ia ter usado diversos tipos de malhas.

Porém, no presente trabalho, optou-se pelo tipo de malha apresentado na Figura 4.4, composto apenas por elementos triangulares.

Essa escolha deve-se, principalmente, a dois fatores:

a) para que a malha aqui usada coincida com a usada no método dos elementos finitos, e assim se tenha maior facilidade na comparação de resultados;

b) para que todos os ângulos do elemento triangular que compõe a malha sejam agudos pois assim as inércias equivalentes das barras (lados do elemento) não são negativas.

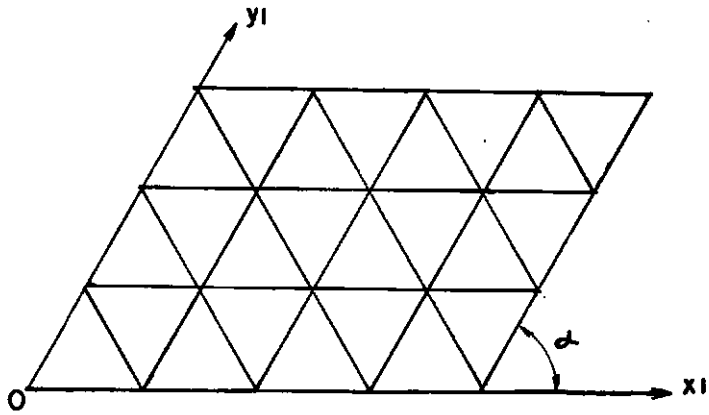


FIGURA 4.4

A teoria das equivalências estabelece uma identidade entre o campo de deformação do corpo real e o do corpo equivalente e não uma identidade entre os esforços ou solicitações nos dois corpos.

A determinação do campo de deformação no corpo equivalente se faz com base em suas próprias leis de comportamento, mas sem que tenha necessariamente um sentido físico. Isso acontece, por exemplo, para o caso de elemento triangular de placa, quando um dos ângulos é obtuso. Nesse caso, o momento de inércia obtido da equação (4.18) será negativo, o que fisicamente não faz sentido mas que dentro da Teoria das Equivalências é perfeitamente válido.

A determinação dos esforços no corpo real é conseguida a partir do campo de deformação do corpo equivalente.

Designando por M o momento de flexão ao longo da barra, da equação (4.8) tem-se: (Figura 4.5)

- *para a barra ij:*

$$\left(\frac{M}{EI}\right)_{ij} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1^2} \tag{4.19}$$

- *para a barra ik:*

$$\left(\frac{M}{EI}\right)_{ik} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y1^2} \tag{4.20}$$

- *para a barra jk:*

$$\left(\frac{M}{EI}\right)_{jk} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y2^2} \tag{4.21}$$

Considere um ponto P definido nos três sistemas de coordenadas da Figura 4.5 por:

P(x,y) ; P(x1, y1) ; P(x2, y2).

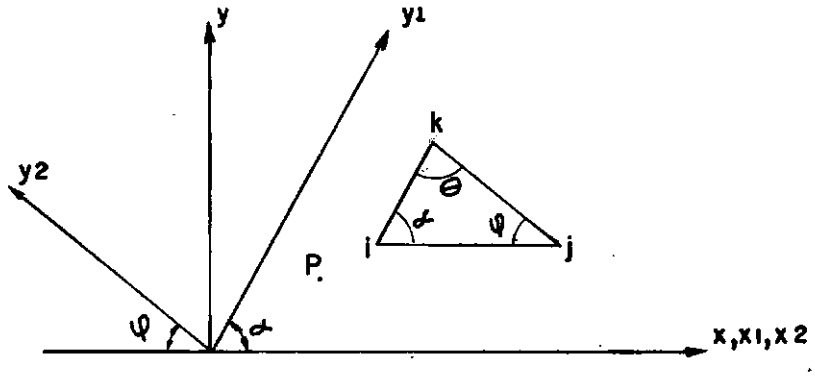


FIGURA 4.5

Essas coordenadas podem ser relacionadas entre si pelas equações:

$$x = x1 + y1 \cos\alpha \qquad \text{ou} \qquad x = x2 - y2 \cos\psi$$

$$y = y1 \operatorname{sen}\alpha \qquad \text{ou} \qquad y = y2 \operatorname{sen}\psi$$

Quando tem-se ainda:

$$x1 = x - y \cot\alpha \quad ; \quad x2 = x + y \cot\psi$$

$$y1 = y \operatorname{cosec}\alpha \quad ; \quad y2 = y \operatorname{cosec}\psi$$

Usando essas relações tem-se:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y1^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \operatorname{sen}^2\alpha \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y2^2} = \operatorname{sen}^2 \psi \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x1^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x2^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \tag{4.24}$$

Comparando (4.19), (4.20) e (4.21) respectivamente com (4.24), (4.22) e (4.23):

$$\left(\frac{M}{EI}\right)_{ij} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

$$\left(\frac{M}{EI}\right)_{jk} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \operatorname{sen}^2 \psi \tag{4.25}$$

$$\left(\frac{M}{EI}\right)_{ik} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Da teoria das placas tem-se:

$$M_x = - D \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right] \tag{4.26}$$

$$M_y = -D\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right] \tag{4.27}$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\,\partial y} \tag{4.28}$$

Por outro lado, da equação (4.18), vem:

$$(EI)_{ij} = \frac{\cos\theta\ \ell_{ik}}{2\ \mathrm{sen}\psi} D \quad \therefore \quad D = \frac{2(EI)_{ij}\ \mathrm{sen}\psi}{\cos\theta\ \ell_{ik}} \tag{4.29}$$

$$(EI)_{ik} = \frac{\cos\psi\ \ell_{ij}}{2\ \mathrm{sen}\theta} D \quad \therefore \quad D = \frac{2(EI)_{ik}\ \mathrm{sen}\theta}{\cos\psi\ \ell_{ij}} \tag{4.30}$$

Substituindo, convenientemente (4.25), (4.29) e (4.30) na equação (4.26) e fazendo as devidas simplificações, chega-se a:

$$M_x = -2\left[\frac{\sin\psi}{\cos\theta\ \ell_{ik}} M_{ij} + \nu \frac{\sin\theta}{\cos\psi\ \sin^2\alpha\ \ell_{ij}} M_{ik}\right] \qquad (4.31)$$

Analogamente:

$$M_y = -2\left[\frac{\sin\theta}{\cos\psi\ \mathrm{sen}^2\alpha} M_{ik} + \nu \frac{\sin\psi}{\cos\theta\ \ell_{ik}} M_{ij}\right] \qquad (4.32)$$

$$M_{xy} = -2\,\frac{\sin\psi(1-\nu)M_{t_{ij}}}{\cos\theta\ \ell_{ik}} \qquad (4.33)$$

CAPÍTULO V

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Apenas conceitos básicos do método das diferenças finitas serão, neste capítulo, apresentados, bem como a disposição dos operadores usados na programação, em forma de moléculas.

2. CONCEITUAÇÃO - DIFERENÇAS FINITAS ORDINÁRIAS

O método das diferenças finitas é um método numérico que consiste na substituição das equações diferenciais, que definem o problema, em diferenças finitas. Assim, as derivadas de uma função contínua $y(x)$ são explicitadas em termos do valor da função em determinados pontos.

Seja a função contínua $y(x)$, como na Figura 5.1.

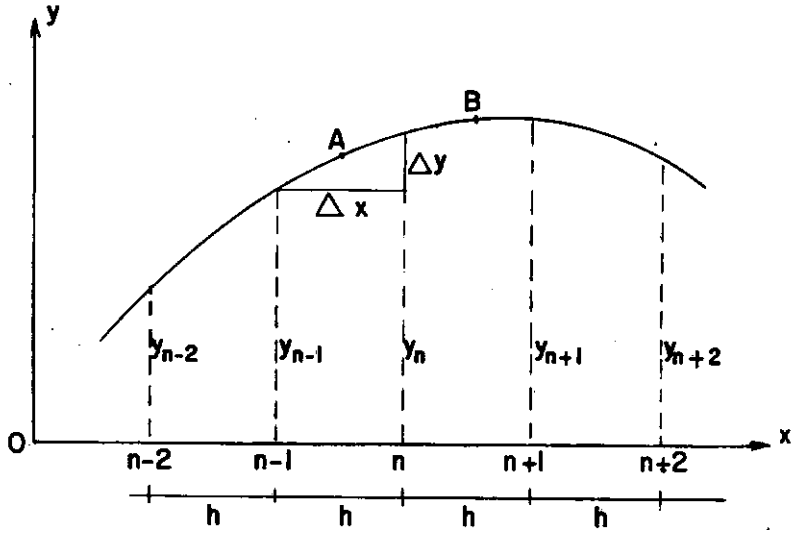


FIGURA 5.1

As diferenças primeiras podem ser expressas como:

$$(\Delta y)_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

$$(\Delta y)_n = y_{n+1} - y_n \qquad (5.1)$$

$$(\Delta y)_{n+1} = y_{n+2} - y_{n+1}$$

Essas diferenças divididas pelo intervalo h considerado, dão os valores aproximados das derivadas primeiras de y(x), nos correspondentes pontos.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \quad ; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \quad , \text{ etc}$$

(5.2)

Partindo-se das diferenças primeiras, pode-se calcular as diferenças de segunda ordem, como:

$$(\Delta^2 y)_n = (\Delta y)_{n+1} - (\Delta y)_n \qquad (5.3)$$

A partir das diferenças de segunda ordem obtem-se valores aproximados das derivadas segundas:

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_n = \frac{(\Delta^2 y)_n}{h^2} = \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n}{h^2} \qquad (5.4)$$

Seja, agora, uma função contínua de duas variáveis $\omega(x,y)$. Pode-se utilizar para o cálculo aproximado de suas derivadas parciais, equações análogas às expressões (5.2) e (5.4).

Existem, entretanto, para um determinado ponto, três tipos de diferenças finitas.

As expressões que fornecem as diferenças primeiras no ponto n (Figura 5.1), considerando intervalos iguais h no eixo x, podem ser escritas como:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \qquad (5.5)$$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \tag{5.6}$$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} \tag{5.7}$$

A expressão (5.5) é denominada diferença em avanço, a (5.6) é dita diferença em atraso e a (5.7) diferença central. Na diferença em avanço são usados termos à direita do ponto considerado; na diferença em atraso, termos à esquerda e na diferença central, termos em torno do ponto considerado.

No presente trabalho, empregou-se diferenças finitas centrais, pois resultados mais precisos são obtidos quando comparados aos dois outros tipos de diferenças.

As diferenças finitas centrais de 2a. ordem são:

$$\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_n = \frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n = \frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{n+1} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{n-1}}{2h} =$$

$$= \frac{y_{n+2} - 2y_n + y_{n-2}}{4h^2} \tag{5.8}$$

Observa-se que a equação (5.8) é função de ordenadas dos pontos n+2 e n-2 que distam 2h do ponto n considerado.

Para se obter um valor para a diferença de segunda ordem em função de pontos mais próximos, toma-se dois pontos auxiliares A e B que distam h/2 de n e que têm ordenadas yA e yB, respectivamente. (Figura 5.1)

Dessa forma:

$$\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_n = \frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_B - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_A}{h} = \frac{1}{h^2}\left(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}\right) \tag{5.9}$$

A equação (5.9) representa a diferença segunda central em função de pontos mais próximos de n.

Processo análogo ao utilizado para calcular as diferenças finitas de primeira e segunda ordem é empregado no cálculo de diferenças de ordem superior. Neste trabalho, interessam ainda as de terceira e quarta ordem. Assim:

$$\left(\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}\right)_n = \frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_n = \frac{1}{8h^3}\left[y_{n+3} + 3(y_{n-1} - y_{n+1}) - y_{n-3}\right] \tag{5.10}$$

$$\left(\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}\right)_n = \frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}\right)_n = \frac{1}{16h^4}\Big[y_{n+4} - y_{n+2}$$

$$+ 3(y_n - y_{n-2} - y_{n+2} + y_n) - y_{n-2} + y_{n-4}\Big]$$

(5.11)

A expressão (5.11) das diferenças finitas de quarta ordem pode ser escrita em função de pontos mais próximos (intermediários).

$$\left(\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}\right)_n = \frac{1}{h^4}(y_{n+2} - 4y_{n+1} + 6y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2})$$

(5.12)

3. DIFERENÇAS FINITAS PARCIAIS

Como já foi dito, o cálculo das diferenças finitas parciais de uma função contínua de duas variáveis $\omega = f(x,y)$ é feito de maneira análoga ao cálculo de diferenças finitas ordinárias, visto no item anterior.

Considere-se a malha da Figura 5.2, com intervalos iguais em cada uma das direções x e y, respectivamente h e k.

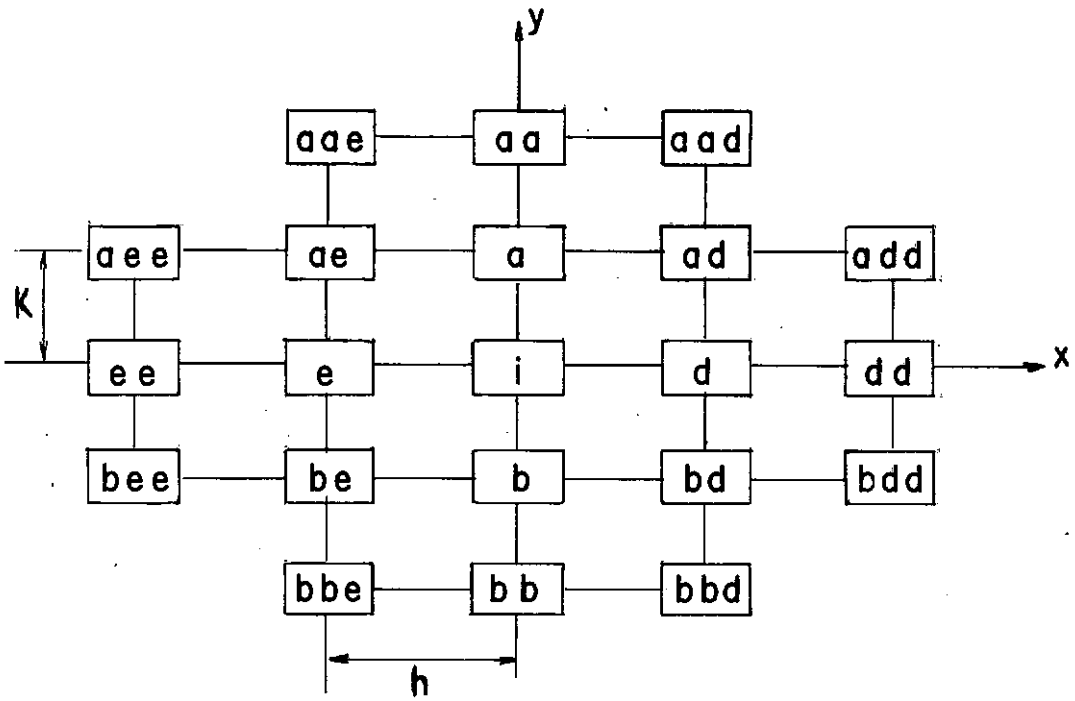


FIGURA 5.2

Das equações (5.7) e (5.9) tem-se as diferenças finitas parciais de primeira e segunda ordem, em relação a cada uma das direções x e y.

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta x}\right)_i = \frac{\omega_d - \omega_e}{2h}$$

$$\left(\frac{\Delta^2\omega}{\Delta x^2}\right)_i = \frac{\omega_d - 2\omega_i + \omega_e}{h^2} \qquad (5.13)$$

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta y}\right)_i = \frac{\omega_a - \omega_b}{2k}$$

$$\left(\frac{\Delta^2\omega}{\Delta y^2}\right)_i = \frac{\omega_a - 2\omega_i + \omega_b}{k^2} \qquad (5.14)$$

A diferença finita mista de 2a. ordem, em relação a x e y, é obtida calculando, inicialmente, a diferença em uma das direções e depois, a diferença dessa primeira diferença, na outra direção:

$$\left(\frac{\Delta^2\omega}{\Delta x\ \Delta y}\right)_i = \frac{\Delta}{\Delta y}\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta x}\right)_i = \frac{1}{4\,h\,k}\left(\omega_{ad} - \omega_{bd} - \omega_{ae} + \omega_{be}\right)$$

De maneira análoga são calculadas diferenças finitas parciais mistas de ordem superior.

As diferenças finitas parciais de quarta ordem, como terão utilização posterior, serão aqui apresentadas:

$$\left(\frac{\Delta^4\omega}{\Delta x^4}\right)_i = \frac{1}{h^4}\left(\omega_{dd} - 4\omega_d + 6\omega_i - 4\omega_e + \omega_{ee}\right) \qquad (5.16)$$

$$\left(\frac{\Delta^4 \omega}{\Delta y^4}\right)_i = \frac{1}{k^4}\left(\omega_{bb} - 4\omega_b + 6\omega_i - 4\omega_a + \omega_{aa}\right) \qquad (5.17)$$

$$\left(\frac{\Delta^4 \omega}{\Delta x^2 \, \Delta y^2}\right)_i = \frac{1}{h^2 \, k^2}\left(\omega_{ad} - 2\omega_a + \omega_{ae} - 2\omega_d\right.$$

$$\left. + \; 4\omega_i - 2\omega_e + \omega_{bd} - 2\omega_b + \omega_{be}\right) \qquad (5.18)$$

$$\left(\frac{\Delta^4 \omega}{\Delta x^3 \, \Delta y}\right)_i = \frac{1}{4h^3 k}\left(\omega_{add} - 2\omega_{ad} - \omega_{bdd} + 2\omega_{bd}\right.$$

$$\left. + \; 2\omega_{ae} - \omega_{aee} - 2\omega_{be} + \omega_{bee}\right) \qquad (5.19)$$

$$\left(\frac{\Delta^4 \omega}{\Delta x \, \Delta y^3}\right)_i = \frac{1}{4h k^3}\left(\omega_{aad} - 2\omega_{ad} + 2\omega_{bd} - \omega_{bbd}\right.$$

$$\left. - \; \omega_{aae} + 2\omega_{ae} - 2\omega_{be} + \omega_{bbe}\right) \qquad (5.20)$$

Quando a malha é em forma de parelelogramo o procedimento é idêntico ao exposto acima.

4. DIFERENÇAS FINITAS EM COORDENADAS OBLÍQUAS - OPERADORES DISPOSTOS EM MOLÉCULAS

Coordenadas oblíquas podem ser algumas vezes, usadas com vantagem. Um ponto (x,y) em coordenadas cartesianas é representado em coordenadas oblíquas por (xl, yl) como indica a Figura 5.3.

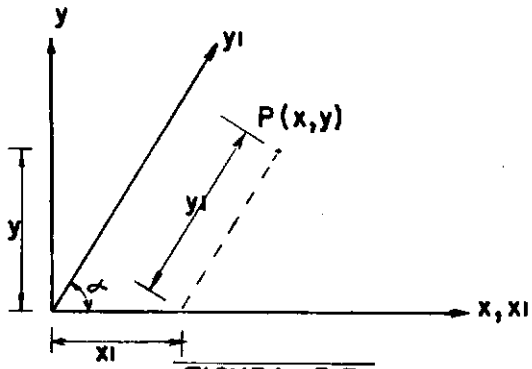


FIGURA 5.3

Tem-se que:

$x = xl + yl \cos\alpha$; $xl = x - y \cot\alpha$

$y = yl \operatorname{sen}\alpha$; $yl = y \sec\alpha$

Considere uma função $\omega(xl, yl)$ em que xl e yl são funções de x e y.

As derivadas parciais de ω podem ser calculadas e

chega-se a:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x1} \tag{5.21}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = - \cot\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x1} + \operatorname{cosec}\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x1} \tag{5.22}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1^2} \tag{5.23}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \operatorname{cosec}^2\alpha \left(\cos^2\alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1^2} - 2 \cos\alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1\, \partial y1} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y1^2}\right) \tag{5.24}$$

O operador ∇^2 em coordenadas retangulares é:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Substituindo (5.23) e (5.24) na expressão acima e operando tem-se:

$$(\nabla^2 \omega)_i = \operatorname{cosec}^2 \alpha \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x1^2} - 2 \cos\alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1 \, \partial y1} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y1^2} \right) \tag{5.25}$$

Usando (5.25) pode-se calcular o operador ∇^4 em coordenadas oblíquas:

$$\nabla^4 \omega = \nabla^2 \nabla^2 \omega$$

$$(\nabla^4 \omega)_i = \operatorname{cosec}^4 \alpha \left[\frac{\partial^4 \omega}{\partial x1^4} - 4 \cos\alpha \frac{\partial^4 \omega}{\partial x1^3 \, \partial y1} + 2(1 + 2 \cos^2 \alpha) \frac{\partial^4 \omega}{\partial x1^2 \, \partial y1^2} - 4 \cos\alpha \frac{\partial^4 \omega}{\partial x1 \, \partial y1^3} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y1^4} \right] \tag{5.26}$$

A Figura 5.4 representa uma malha esconsa onde seus pontos nodais são caracterizados por letras e espaçados igualmente em cada uma das direções.

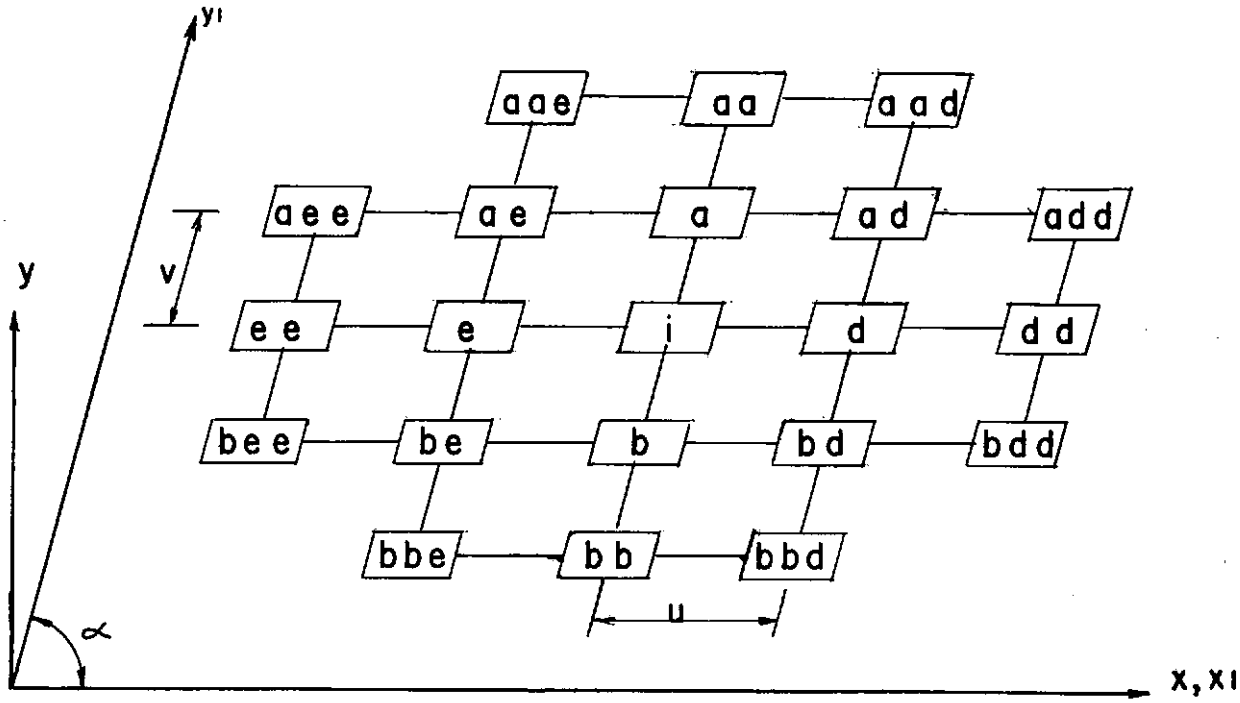


FIGURA 5.4

As expressões de diferenças finitas para coordenadas retangulares são nesse caso igualmente válidas.

Assim, das equações (5.13) a (5.20) conclui-se:

$$\frac{\Delta^2 \omega}{\Delta x1^2} = \frac{1}{u^2} (\omega_d - 2\omega_i + \omega_e) \qquad (5.27)$$

$$\frac{\Delta^2 \omega}{\Delta y1^2} = \frac{1}{v^2} (\omega_a - 2\omega_i + \omega_b) \qquad (5.28)$$

$$\frac{\Delta^2 \omega}{\Delta x1 \; \Delta y1} = \frac{4}{uv} (\omega_{ad} - \omega_{bd} - \omega_{ae} + \omega_{be}) \tag{5.29}$$

$$\frac{\Delta^4 \omega}{\Delta x1^4} = \frac{1}{u^4} (\omega_{dd} - 4\omega_d + 6\omega_i - 4\omega_e + \omega_{ee}) \tag{5.30}$$

$$\frac{\Delta^4 \omega}{\Delta y1^4} = \frac{1}{v^4} (\omega_{bb} - 4\omega_b + 6\omega_i - 4\omega_a + \omega_{aa}) \tag{5.31}$$

$$\frac{\Delta^4 \omega}{\Delta x1^2 \; \Delta y1^2} = \frac{1}{u^2 \; v^2} (\omega_{ad} - 2\omega_a + \omega_{ae} - 2\omega_d + 4\omega_i$$

$$- 2\omega_e + \omega_{bd} - 2\omega_b + \omega_{be}) \tag{5.32}$$

$$\frac{\Delta^4 \omega}{\Delta x1^3 \Delta y1} = \frac{1}{4u^3 v} (\omega_{add} - 2\omega_{ad} - \omega_{bdd} + 2\omega_{bd}$$

$$+ 2\omega_{ae} - \omega_{aee} - 2\omega_{be} + \omega_{bee}) \tag{5.33}$$

$$\frac{\Delta^4 \omega}{\Delta x1\ \Delta y1^3} = \frac{1}{4\,u\,v^3}\,(\omega_{aad} - 2\omega_{ad} - \omega_{bbd} + 2\omega_{bd}$$

$$+ 2\omega_{ae} - \omega_{aae} - 2\omega_{be} + \omega_{bbe}) \qquad (5.34)$$

Substituindo as expressões acima nas expressões (5. .25) e (5.26) tem-se os operadores ∇^2 e ∇^4, respectivamente, em coordenadas oblíquas e aplicados ao ponto i.

$$(\nabla 1^2 \omega)_i = \operatorname{cosec}^2\alpha\,\frac{1}{u}\,(\omega_e - 2\omega_i + \omega_d)$$

$$- \frac{1}{2uv}\,(\omega_{ad} - \omega_{bd} - \omega_{ae})\cos\alpha$$

$$+ \frac{1}{v^2}\,(\omega_a - 2\omega_i + \omega_b) \qquad (5.35)$$

$$(\nabla 1^4 \omega)_i = \operatorname{cosec}^4\alpha\,(\frac{1}{u^4}\,(\omega_{dd} - 4\omega_d + 6\omega_i - 4\omega_e + \omega_{ee})$$

$$- \frac{\cos\alpha}{u^3 v}\,(\omega_{add} - 2\omega_{ad} - \omega_{bdd} + 2\omega_{bd} + 2\omega_{ae} -$$

$$- \omega_{aee} - 2\omega_{be} + \omega_{bee}) + \frac{2(1 + 2\cos^2\alpha)}{u^2 v^2}$$

$$(\omega_{ad} - 2\omega_a + \omega_{ae} - 2\omega_d + 4\omega_i - 2\omega_e + \omega_{bd}$$

$$- 2\omega_b + \omega_{be}) - \frac{\cos\alpha}{u\, v^3} (\omega_{aad} - 2\omega_{ad} + 2\omega_{bd}$$

$$- \omega_{bbd} - \omega_{aae} + 2\omega_{ae} - 2\omega_{be} + \omega_{bbe})$$

$$+ \frac{1}{v^4} (\omega_{bb} - 4\omega_b + 6\omega_i - 4\omega_a + \omega_{aa}) \qquad (5.36)$$

Para facilitar a utilização dessa expressão ela pode ser escrita em forma de molécula como está apresentada na Figura 5.5.

$\nabla^4 = \text{cosec}^4\alpha$

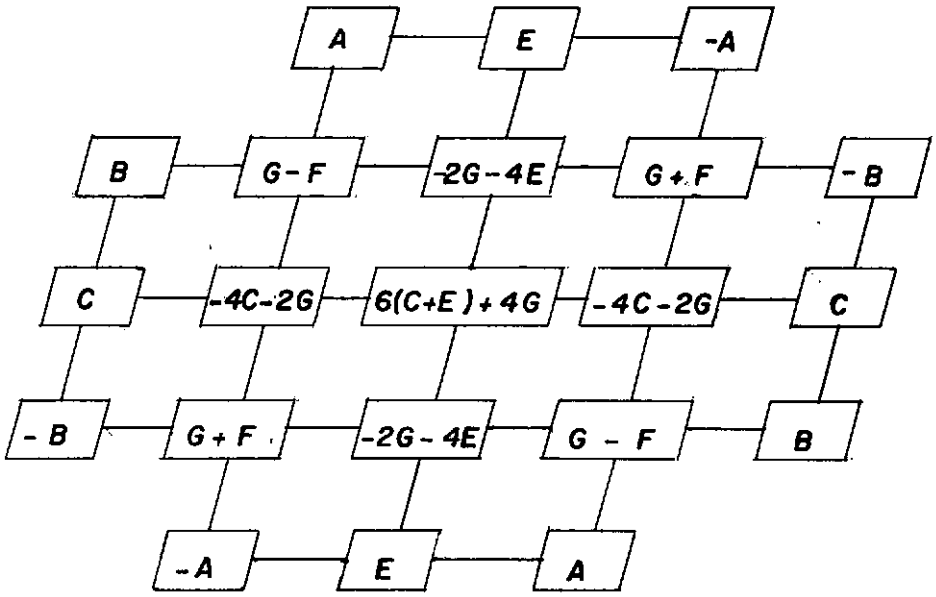


FIGURA 5.5

Onde:

$$A = \frac{\cos\alpha}{u\,v^3} \quad ; \quad B = \frac{\cos\alpha}{u^3 v}$$

$$C = \frac{1}{u^4} \quad ; \quad E = \frac{1}{v^4}$$

$$F = 2\cos\alpha\left(\frac{1}{u^3 v} + \frac{1}{v^3 u}\right) \quad ; \quad G = \frac{2(1 + 2\cos^2\alpha)}{u^2\,v^2}$$

5. ESFORÇOS NA PLACA EM DIFERENÇAS FINITAS

a. *Momento Fletor* M_{x1}

Já foi visto que:

$$M_{x1} = - D \operatorname{cosec}\alpha \left[\nabla 1^2 \omega - (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y1^2} \right] \qquad (5.37)$$

Substituindo (5.28) e (5.35) na expressão acima, dispondo em forma de molécula e considerando $t = v/u$, tem-se:

$$M_{x1} = \frac{-D}{2 \operatorname{sen}^3\alpha\, t^2 u^2} \begin{array}{ccccc} & A & & B & & -A \\ & & & & & \\ C & & F & & C \\ & & & & & \\ -A & & B & & A \end{array}$$

Sendo:

$$A = t \cos\alpha \quad ; \quad B = 2 - (1-\nu) 2 \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$C = 2 t^2 \quad ; \quad F = 4\left[(1-\nu)\operatorname{sen}^2\alpha - (1 + t^2)\right]$$

b. *Momento Fletor* M_{y1}

$$M_{y1} = - D \operatorname{cosec}\alpha \left[\nabla 1^2 \omega - (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x 1^2} \right]$$

Substituindo (5.27) e (5.35) na expressão acima e dispondo em forma de molécula:

$$M_{y1} = \frac{-D}{2 \operatorname{sen}^3\alpha \, t^2 \, u^2}$$

A	2	-A
B	C	B
-A	2	A

Sendo:

$$A = t \cos\alpha$$

$$B = 2 t^2 - (1-\nu) 2 t^2 \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$C = 4(1-\nu) t^2 \operatorname{sen}^2\alpha - 4(1 + t^2)$$

c. *Momento de Torção* M_{x1y1}

$$M_{x1y1} = - D \operatorname{cosec}\alpha \left[\cos\alpha \, \nabla 1^2 \omega - (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x1 \, \partial y1} \right]$$

Substituindo (4.29) e (4.35) na expressão acima e dispondo em forma de molécula:

$$M_{x1y1} = \frac{-D}{4 \operatorname{sen}^3\alpha \, t^2 u^2} \begin{bmatrix} A & B & -A \\ C & F & C \\ -A & B & A \end{bmatrix}$$

Sendo:

$$A = 2 t \cos^2\alpha + t \operatorname{sen}^2\alpha (1-\nu) \; ; \qquad B = 4 \cos\alpha$$

$$C = 4 t^2 \cos\alpha \; ; \qquad F = - 8(1 + t^2)\cos\alpha$$

CAPÍTULO VI

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Serão aqui apresentados, apenas, aspectos gerais do método dos elementos finitos e particularidades do programa ICES STRUDL II.

2. CONCEITUAÇÃO - ELEMENTO UTILIZADO - HIPÓTESES ASSUMIDAS

O método dos elementos finitos consiste, fundamentalmente, na substituição da estrutura contínua por um modelo formado de elementos estruturais. Esses elementos estruturais estão interligados por um número infinito de pontos. A simples divisão da estrutura contínua não é suficiente para discretizar o problema, por isso, supõem-se os elementos unidos por um número finito de pontos denominados pontos nodais.

É possível, então, conhecer o comportamento do elemento estrutural a partir dos deslocamentos dos nós do elemento

ou através as forças que atuam nos nós. Os referidos deslocamentos são denominados deslocamentos nodais e as forças, forças nodais.

Dependendo do tipo de problema, o elemento estrutural poderá ter uma, duas ou três dimensões, com formas geométricas variadas de maneira que o conjunto de elementos estruturais seja equivalente à estrutura contínua.

Um elemento finito é caracterizado por sua forma geométrica, pelo número e tipo de deslocamentos nodais, pelo grau da expressão polinomial que representa a lei de variação do campo dos deslocamentos e, ainda, pela técnica utilizada na obtenção da matriz de rigidez. Por outro lado, cada elemento estrutural deve representar, satisfatoriamente, as deformações que ocorrem na região correspondente do contínuo. Normalmente, isso é feito estabelecendo-se a lei de variação do campo de deslocamentos. Esta é a operação mais delicada do método dos elementos finitos e também a mais difícil.

A análise do problema de placas esconsas pelo método dos elementos finitos foi feita utilizando-se o programa ICES STRUDL II. Há dois tipos de elementos que se adaptam à resolução do problema:

a) elemento em forma de paralelogramo, com quatro pontos

nodais nos vértices e três deslocamentos nodais por nó;

b) elemento triangular, com três pontos nodais nos vértices e três deslocamentos por nó.

O problema foi resolvido usando-se elementos triangulares não conformes ("CPT"), no qual a lei de variação do campo de deslocamentos linear ω é um polinômio do 3º grau e os deslocamentos angulares são obtidos por diferenciação de ω.

O programa ICES STRUDL fornece as solicitações em cada nó, para cada elemento. A solicitação em um determinado ponto nodal será obtida tomando-se a média das solicitações nos nós coincidentes com o referido ponto nodal, para que se possa, então, comparar os resultados com os fornecidos pelos dois outros métodos.

CAPÍTULO VII

PROGRAMAÇÃO AUTOMÁTICA

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

O problema de placa esconsa, engastada, foi analisado segundo três métodos distintos: método das equivalências, método das diferenças finitas e método dos elementos finitos. Os dois primeiros exigiram a execução de programas específicos, e para análise pelo método dos elementos finitos usou-se o programa ICES STRUDL-II.

Neste capítulo, será exposta a técnica adotada na programação automática, bem como algumas observações quanto ao programa de geração automática de dados para o ICES STRUDL-II.

Apresenta-se também o fluxograma do programa de diferenças finitas.

2. ESTRUTURAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO

2.1 EQUIVALÊNCIAS

A Teoria das Equivalências permite substituir o meio contínuo por um conjunto constituído de barras, considerando que o potencial total do elemento discreto seja idêntico ao potencial total do elemento contínuo e ainda que o estado de deformação seja o mesmo nos dois elementos equivalentes.

Assim, no caso de uma placa, ela será substituída por uma grelha onde as barras deverão ter características tais que as condições acima descritas se verifiquem.

De posse das características elásticas e geométricas das barras que constituem o modelo equivalente é fácil resolver o problema. Qualquer programa que resolva estruturas reticuladas poderá ser utilizado.

Para o cálculo de placa esconsa com os bordos engastados, usando a Teoria das Equivalências, elaborou-se um programa onde apenas são fornecidas as características elásticas e geométricas da placa e o carregamento a que está submetida. Obtém-se, então, as deflexões nos vários pontos nodais, bem como os momentos de flexão e de torção nesses pontos da placa.

Devido à geometria da placa tornou-se possível uma geração automática das coordenadas dos nós, dos comprimentos e co-senos diretores de cada barra da grelha, das inércias equivalentes e das incidências de cada barra. A condição de bordo engastado é também gerada pelo próprio programa, igualando-se o índice de restrição (RL) à unidade, nos pontos do contorno.

O programa utiliza a técnica da reordenação da matriz de rigidez e aproveita a característica da matriz banda, armazenando na memória apenas a semi-banda superior, em forma de matriz retangular. Para isso usou-se o processo de áreas de influência.

Uma vez obtida a matriz de rigidez da estrutura é fornecido o carregamento. Qualquer carregamento é transformado em cargas aplicadas diretamente aos nós pois os resultados obtidos são satisfatórios. Para isso usou-se o processo de áreas de influência.

Logo, qualquer carregamento deve ser transformado, convenientemente, em cargas concentradas nos nós e para o caso particular de carregamento uniforme, o programa já faz automaticamente essa transformação. Quando vários nós estão submetidos à mesma carga, é suficiente dar o valor da ordenada de carga e a numeração dos referidos nós. Isso simplifica consideravelmente a entrada de dados.

Formada a matriz de rigidez e o vetor carregamento

o sistema de equações é resolvido segundo o método de eliminação, de Gauss. Optou-se por esse processo devido ao fato de que, algumas vezes, dependendo das características da placa, as inércias equivalentes das barras indicadas na Figura 7.1 são negativas, acarretando que a matriz de rigidez não é positivamente definida. Isso se verifica quando um dos ângulos do elemento triangular é maior que $\pi/2$.

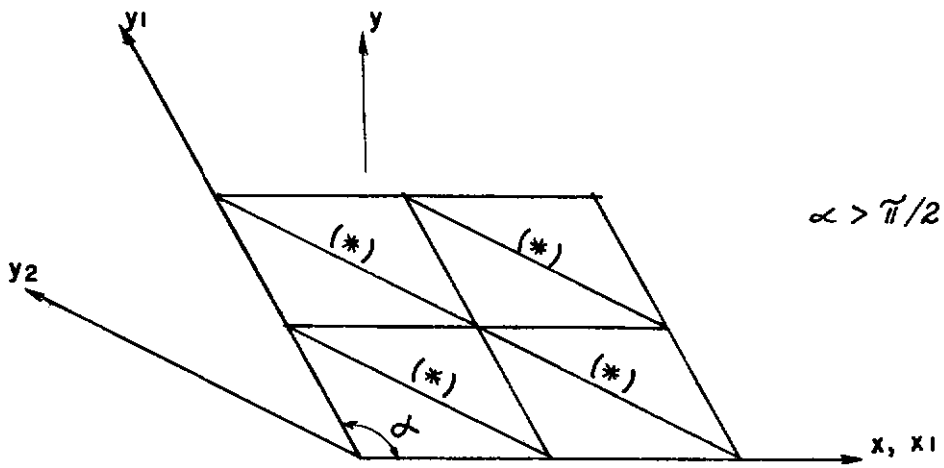


FIGURA 7.1

Nesse caso, o processo de Cholesky não é adequado.

A resolução do sistema de equações fornece os deslocamentos dos nós da estrutura e, a partir deles, calculam-se as ações nas extremidades de cada barra. Com as ações nas extremidades das barras, usando-se as expressões (4.31), (4.32) e (4.33) da Teoria das Equivalências, deduzidas para o caso de elemento triangular de placa, tem-se os esforços na placa, em cada nó, segundo as direções ortogonais x e y.

Deve-se ainda observar o fato de que a numeração dos nós e barras é feita de baixo para cima e da esquerda para a direita. Quanto às barras, numeram-se primeiramente as na direção x1, depois as segundo y1 e, finalmente, as dirigidas segundo a direção y2. (Figura 7.2)

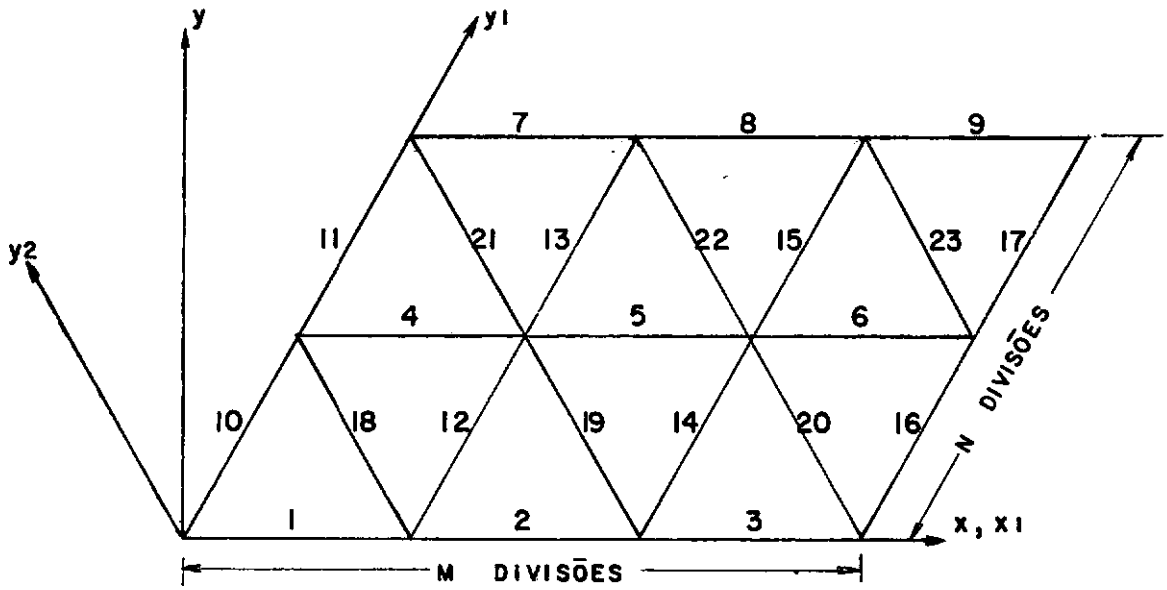


FIGURA 7.2

O programa consta de um programa principal e duas sub-rotinas:

SYMSO - sub-rotina que resolve o sistema de equações pelo método de eliminação de Gauss.

RIGRE - sub-rotina para geração da matriz de rigidez de ele

mentos retos de grelha com seção constante.

A sub-rotina SYMSO executa tarefa específica, já a sub-rotina RIGRE executa operações que se repetem durante a análise.

O programa, em linguagem FORTRAN, foi desenvolvido em computador BURROUGHS e procurou-se aproveitar o máximo da memória interna do computador. Algumas variáveis que ocupam grande área da memória foram colocadas em COMMON.

Uma das vantagens desse programa específico para resolução de placas esconsas é que apenas cerca de dez cartões de dados são necessários.

2.2 DIFERENÇAS FINITAS

Trabalho semelhante foi desenvolvido por Francisco S. Nóbrega que elaborou um programa para cálculo de placas esconsas apoiadas, usando o método das diferenças finitas.

Aqui, porém, devido ao fato de se ter os quatro bordos engastados, o problema não pode ser resolvido pelo processo de Marcus, onde a equação diferencial de quarta ordem é substituída por um sistema de duas equações diferenciais de segunda or

dem. Isso não é possível pois, no caso de bordo engastado, já não se tem momentos nulos no bordo, o que dificulta um pouco o problema.

Dessa forma, a equação diferencial das placas

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \, \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

foi escrita em função das coordenadas oblíquas e representada em forma de molécula.

Aplicou-se essa molécula, convenientemente a cada um dos pontos nodais, exceto os do bordo, obtendo-se a matriz dos coeficientes das incógnitas. Observou-se que essa matriz não é simétrica e não apresenta a característica de matriz banda.

Sendo conhecida a ordenada de carga em cada ponto nodal tem-se caracterizado o sistema de equações, que resolvido fornece as deflexões ω nos diversos pontos nodais da placa.

De posse dessas deflexões, são obtidos os esforços M_x, M_y e M_{xy} na placa.

As expressões dos esforços também foram postas em forma de molécula.

Neste programa os nós são numerados de baixo para cima e da esquerda para a direita. (Figura 7.3)

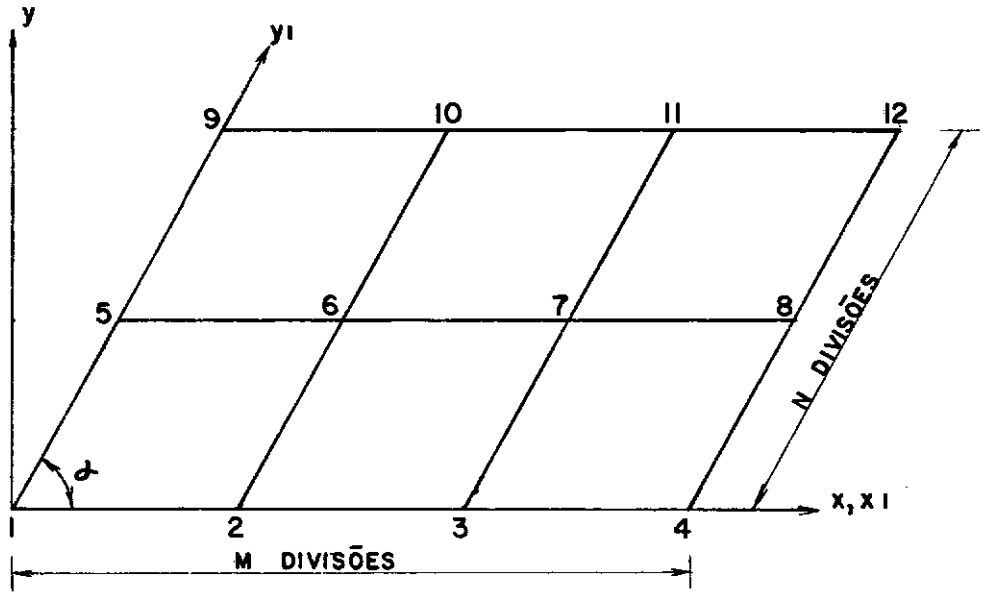


FIGURA 7.3

M número de divisões na direção x1.

N número de divisões na direção y1.

Pela técnica adotada na programação, deve-se ter sempre M > N.

O programa em linguagem FORTRAN, desenvolvido em computador BURROUGHS-6700, consta de um programa principal e seis

sub-rotinas.

INV — Inverte a matriz dos coeficientes das incógnitas para posterior resolução do sistema de equações.

MX1 — Define o operador para cálculo do momento de flexão M_{x1}.

MY1 — Define o operador para cálculo do momento de flexão M_{y1}.

MXY — Define o operador para cálculo do momento de torção M_{x1y1}.

MOMEN — Calcula os momentos M_x, M_y ou M_{xy} em relação aos eixos oblíquos.

PRINC — Calcula, em relação aos eixos retangulares, os momentos fletores M_x e M_y, o momento de torção M_{xy}.

Inicialmente, usando o método das diferenças finitas, tentou-se elaborar um programa que resolvesse placas esconsas com quaisquer condições de bordo. Mas verificou-se não ser prático, nem econômico, além de que a programação tornava-se bem complicada.

O programa elaborado calcula placas esconsas, engastadas nos quatro bordos, submetidas a qualquer tipo de carregamento transversal à placa, tendo cada placa espessura constante.

2.3 GERAÇÃO AUTOMÁTICA PARA O ICES STRUDL-II

Uma das dificuldades apresentadas pelo programa STRUDL consiste na entrada de dados muito trabalhosa. Deverão ser fornecidas, dentre outras coisas, a numeração de cada nó, as respectivas coordenadas, as incidências de cada elemento, etc. Para o problema estudado verificou-se que essas características poderiam ser geradas automaticamente por um programa a parte.

Francisco S. Nóbrega, já havia feito um programa para gerar esses dados, para o tipo de malha indicado na Figura 7. .4. Este programa foi aqui utilizado, embora com pequenas modificações.

O sistema de numeração para as coordenadas e elementos deve ser sempre da esquerda para a direita e de baixo para cima, conforme na Figura 7.4. As incidências de cada elemento são geradas no sentido anti-horário. Para pontos nodais do contorno o programa gera também a letra S (SUPPORTS) depois da coordenada y.

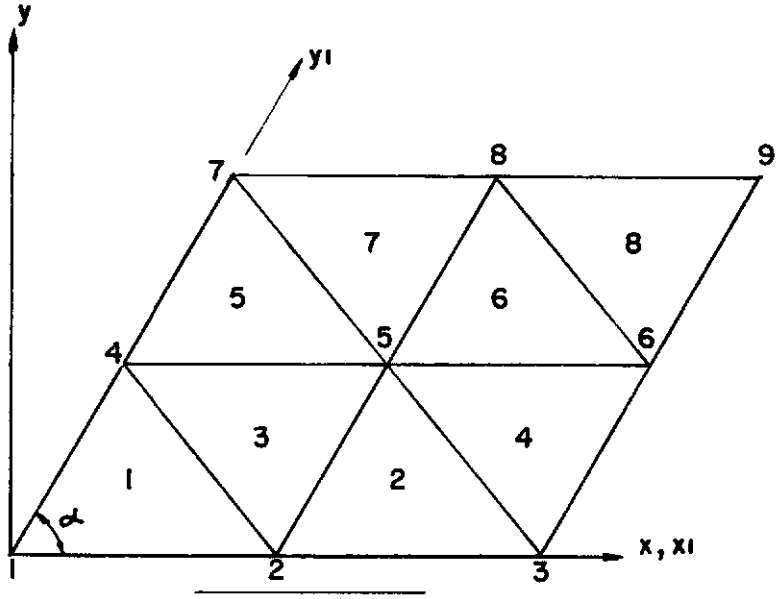
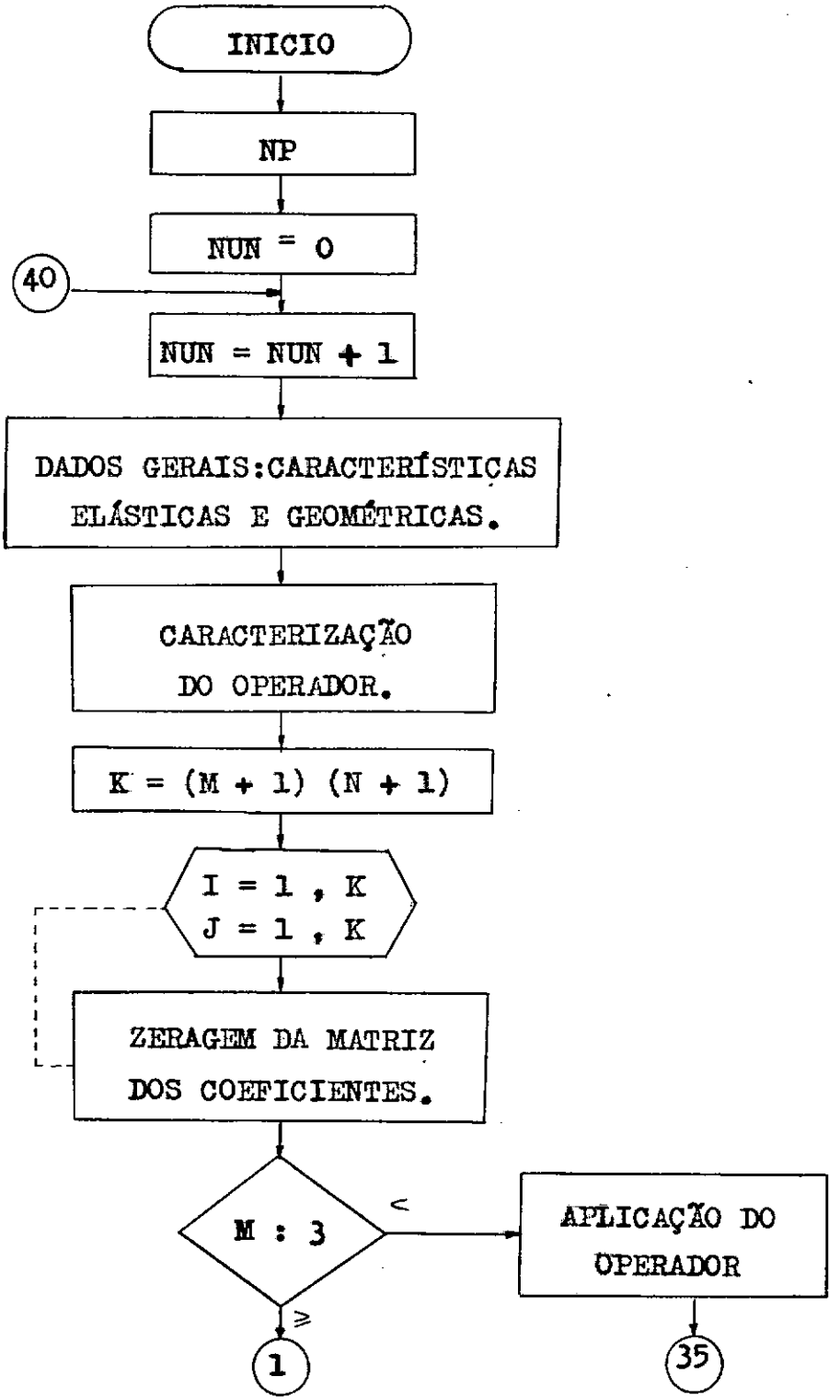
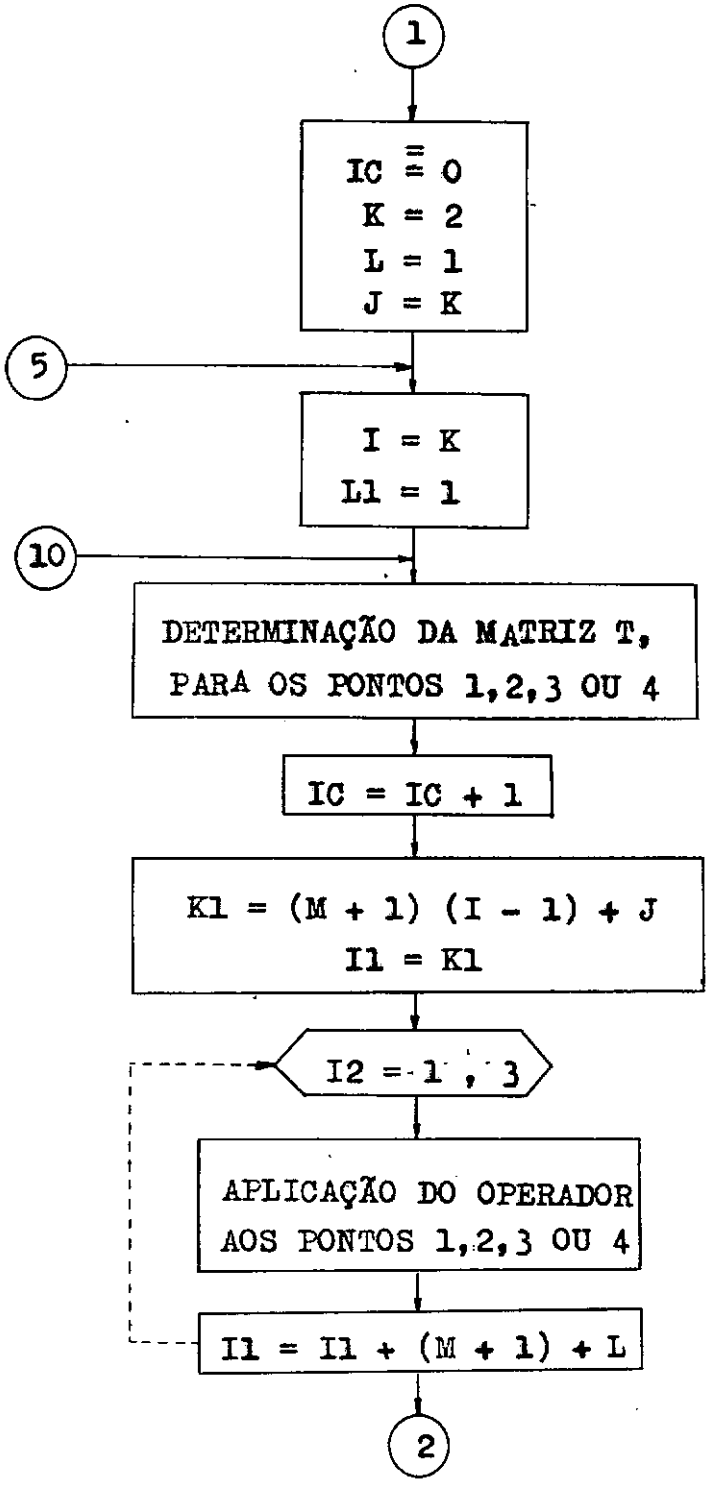
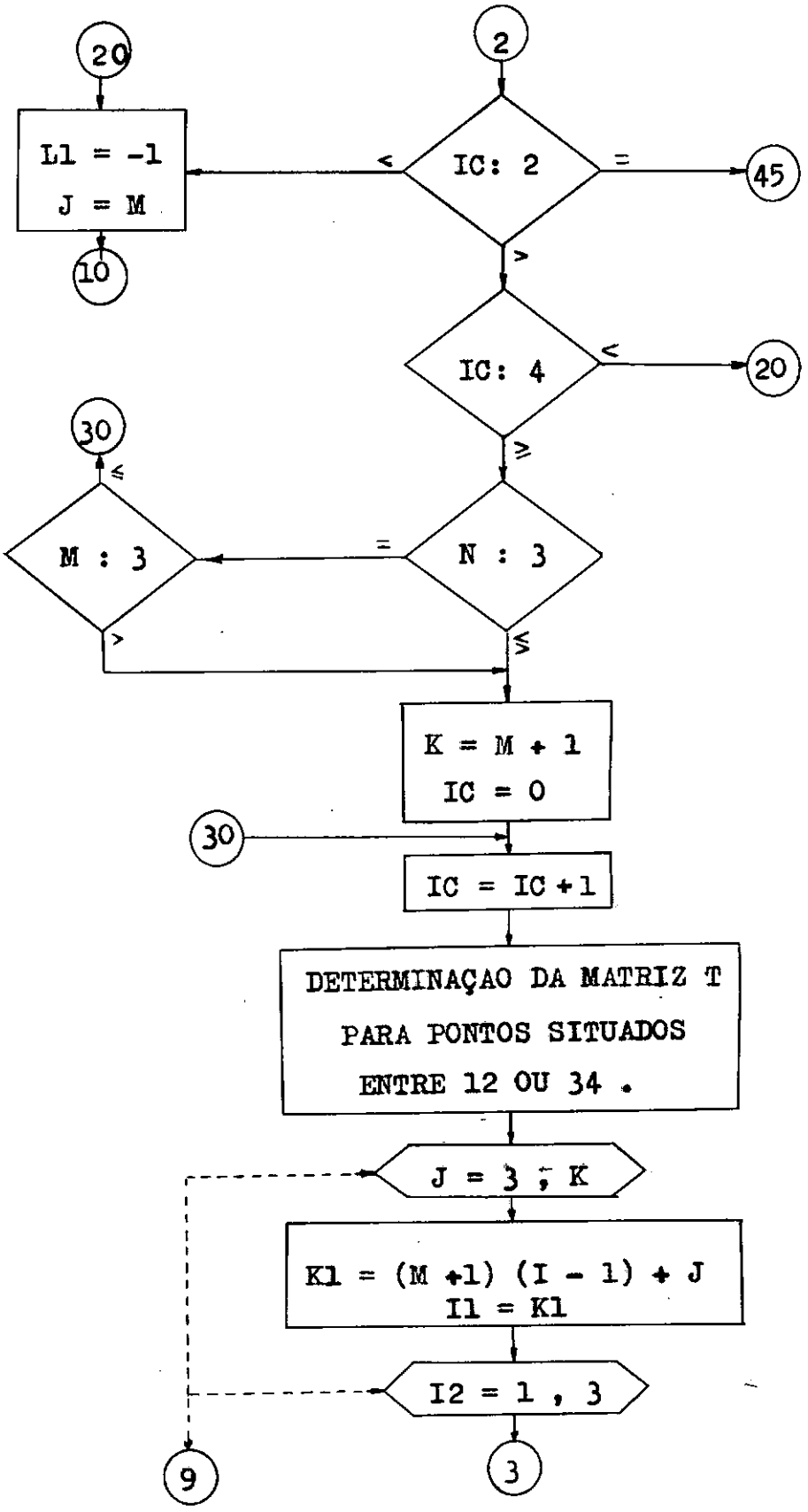


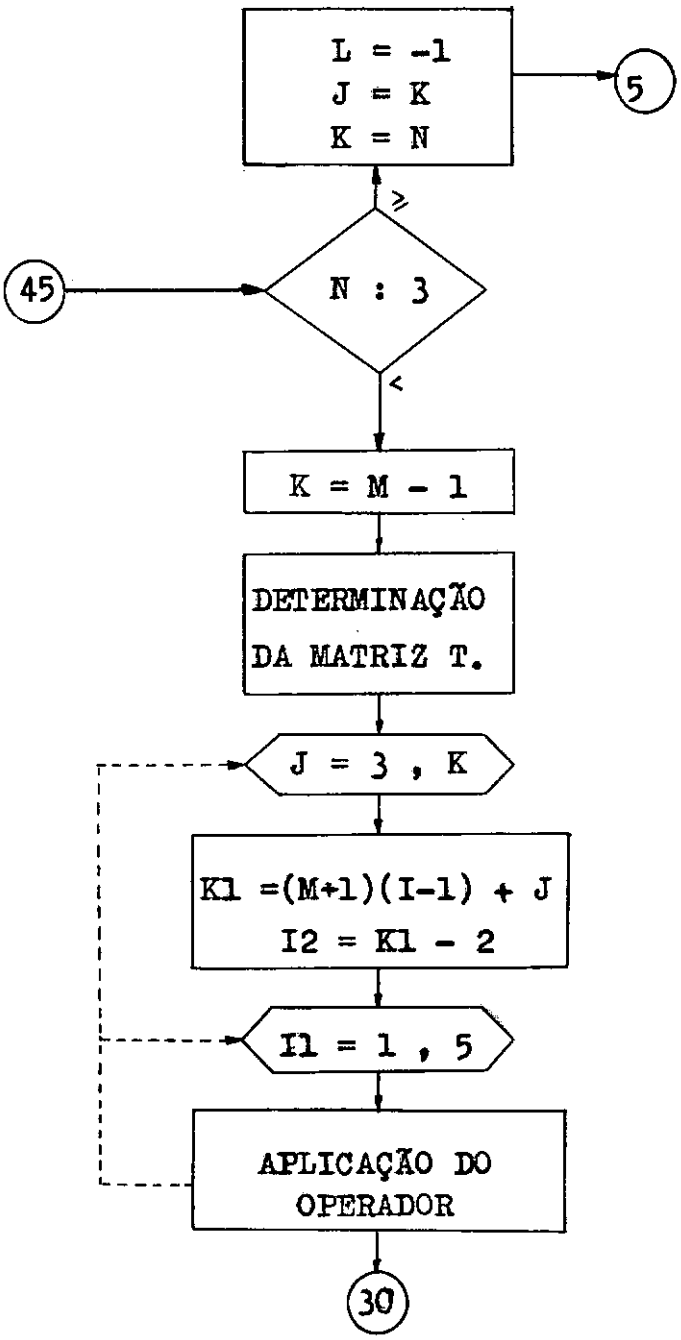
FIGURA 7.4

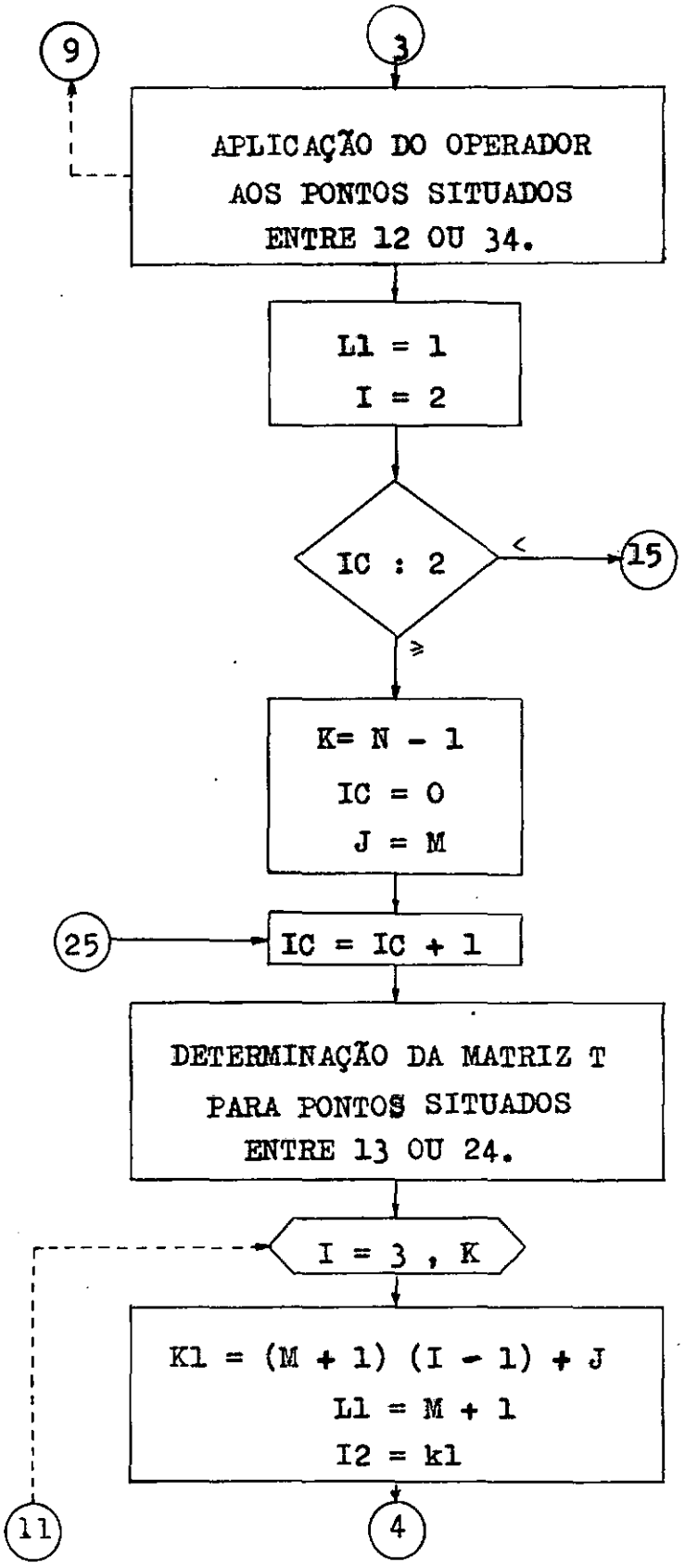
3. FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO - DIFERENÇAS FINITAS

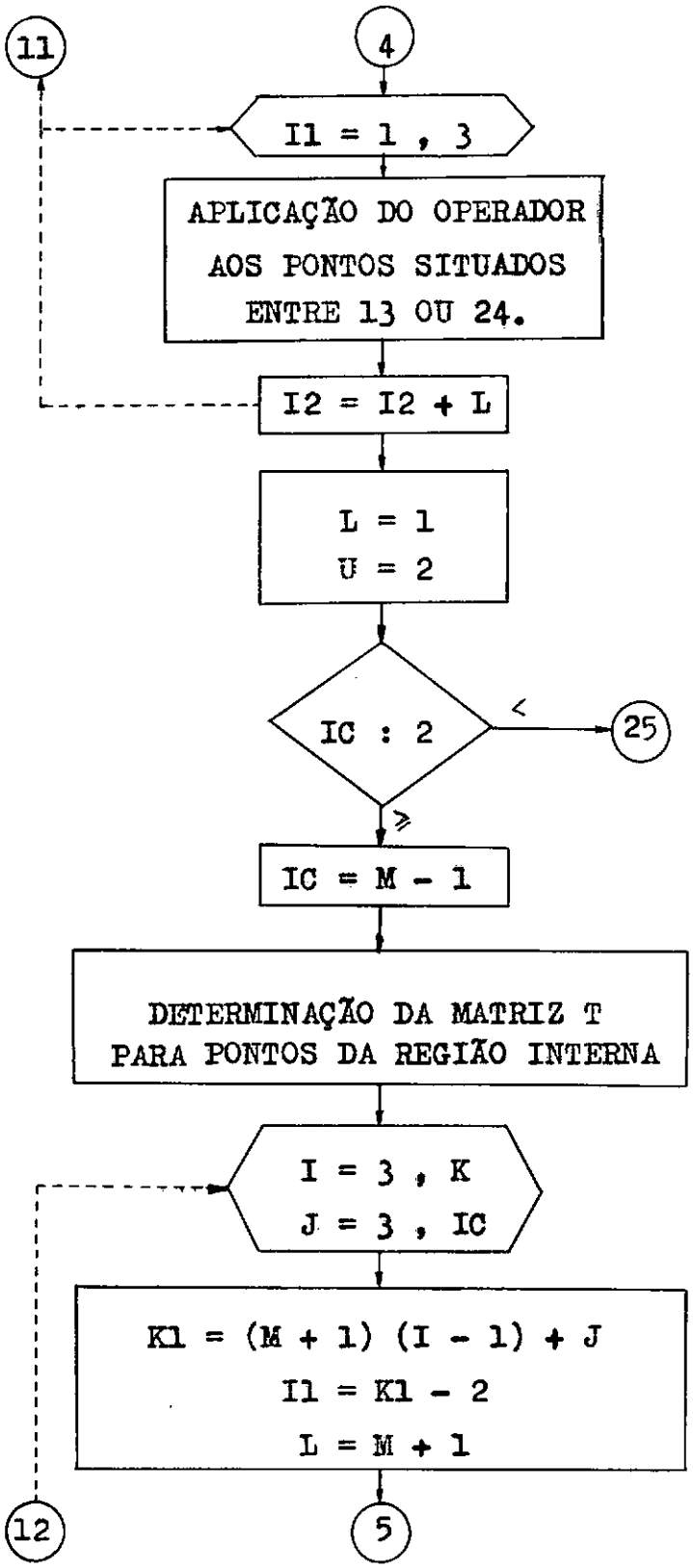


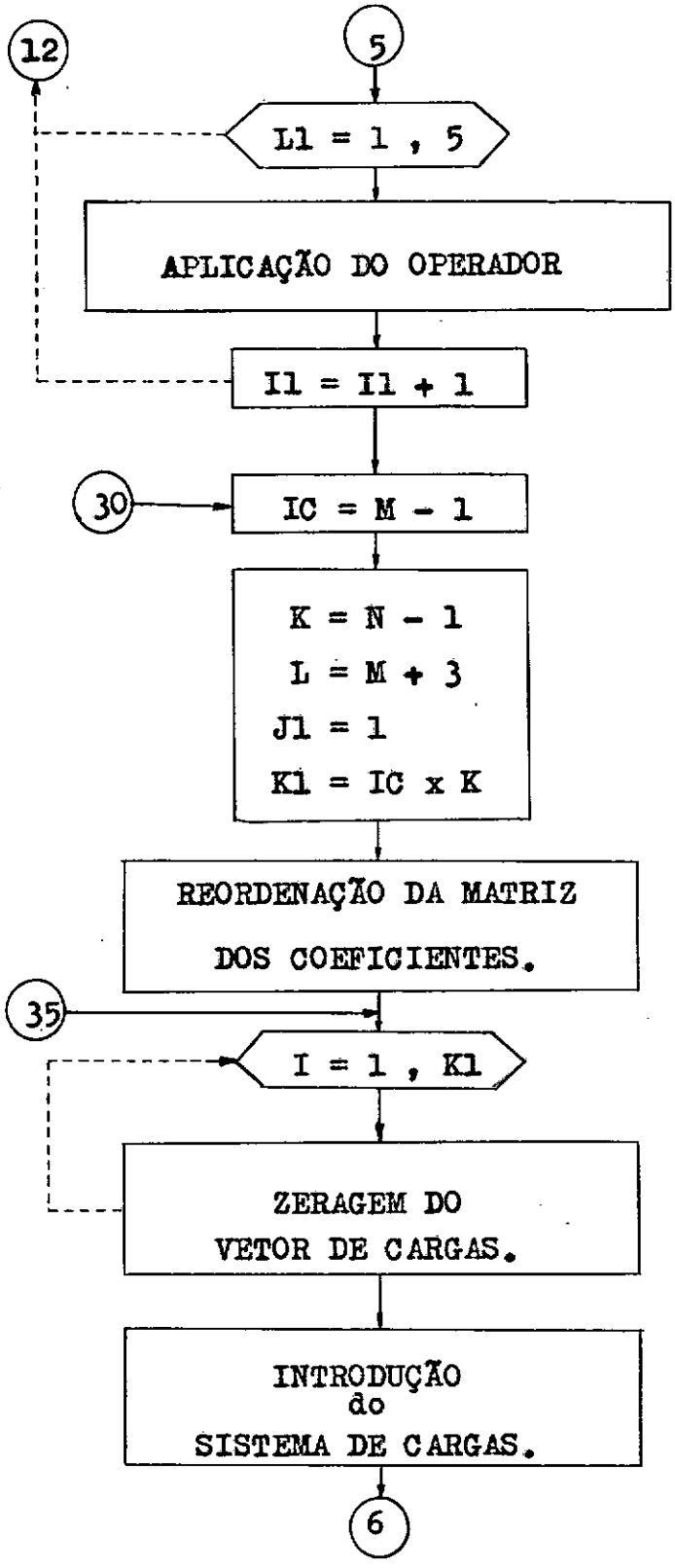

1
IC = 0
K = 2
L = 1
J = K
5
I = K
L1 = 1
10
DETERMINAÇÃO DA MATRIZ T,
PARA OS PONTOS 1,2,3 OU 4
IC = IC + 1
K1 = (M + 1) (I - 1) + J
I1 = K1
I2 = 1 , 3
APLICAÇÃO DO OPERADOR
AOS PONTOS 1,2,3 OU 4
I1 = I1 + (M + 1) + L
2

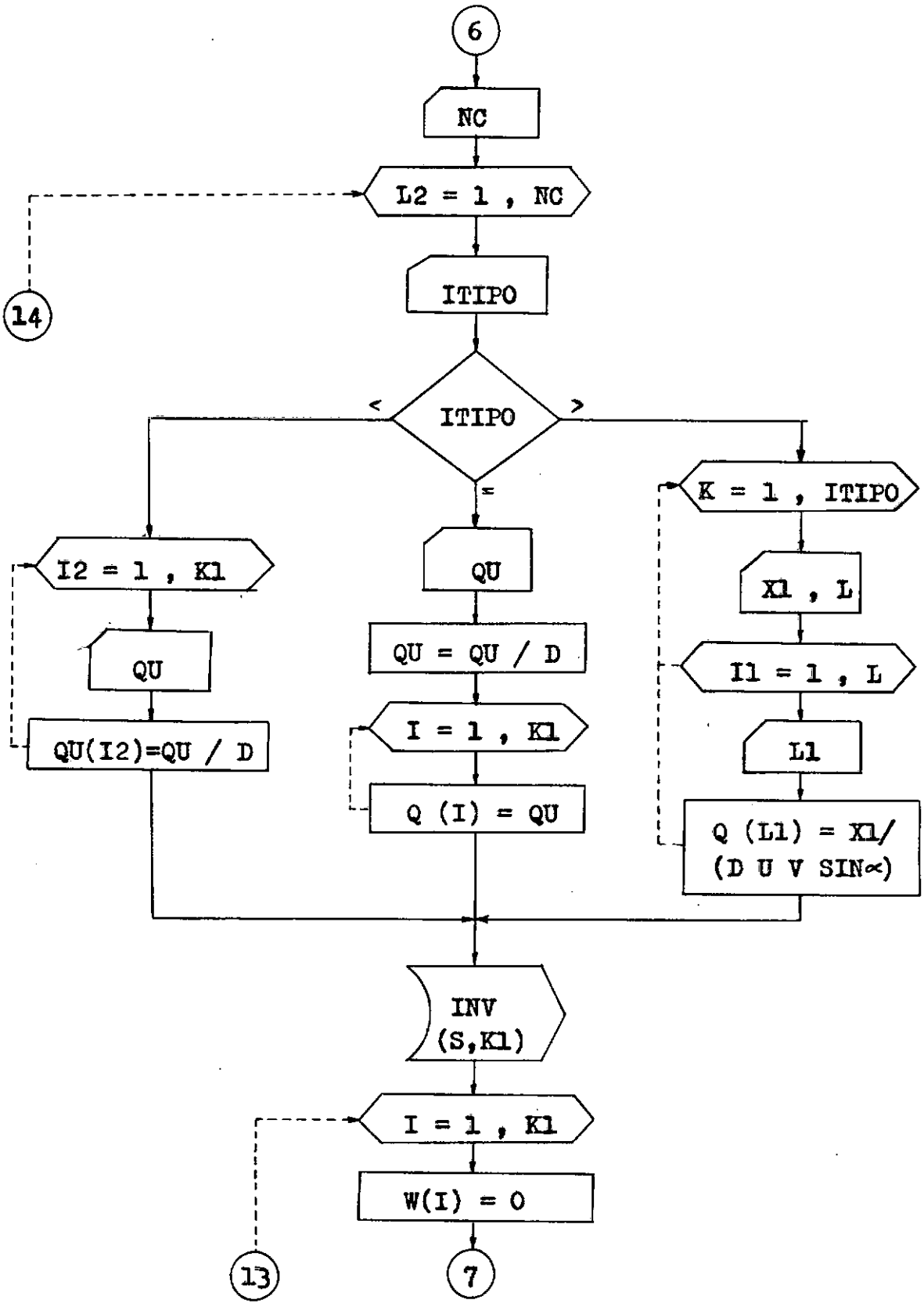

20
L1 = -1
J = M
10
2
IC: 2
<
=
45
>
IC: 4
<
20
≥
30
≤
M : 3
=
N : 3
>
≤
K = M + 1
IC = 0
30
IC = IC + 1
DETERMINAÇAO DA MATRIZ T
PARA PONTOS SITUADOS
ENTRE 12 OU 34 .
J = 3 ; K
K1 = (M +1) (I - 1) + J
I1 = K1
I2 = 1 , 3
9
3

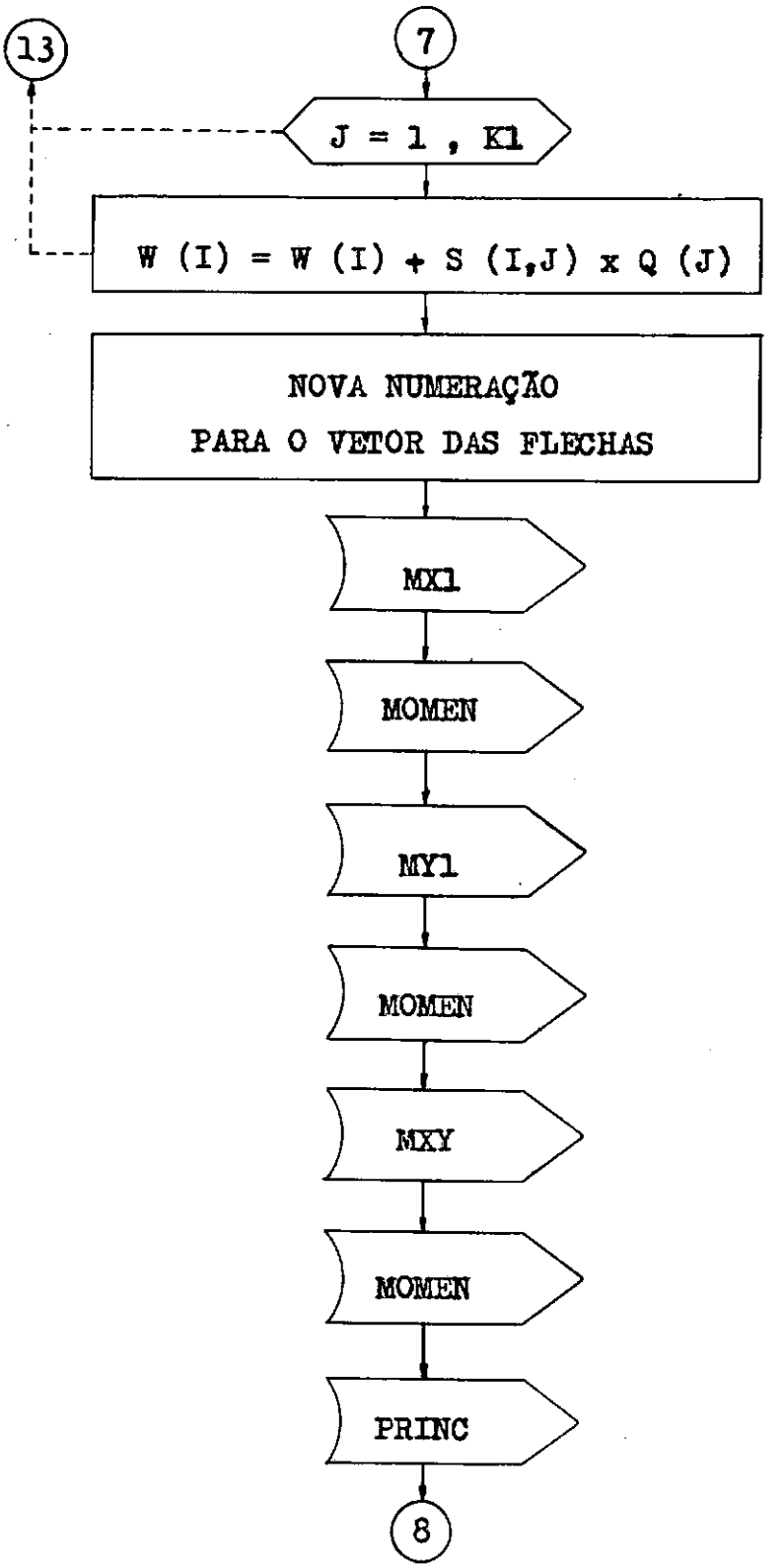

L = -1
J = K
K = N
5
≥
45
N : 3
<
K = M - 1
DETERMINAÇÃO
DA MATRIZ T.
J = 3 , K
K1 =(M+1)(I-1) + J
I2 = K1 - 2
I1 = 1 , 5
APLICAÇÃO DO
OPERADOR
30

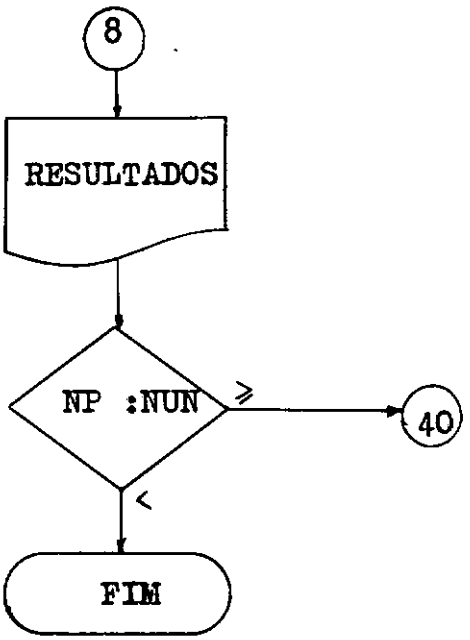

9
3
APLICAÇÃO DO OPERADOR
AOS PONTOS SITUADOS
ENTRE 12 OU 34.
L1 = 1
I = 2
IC : 2
<
15
≥
K= N - 1
IC = 0
J = M
25
IC = IC + 1
DETERMINAÇÃO DA MATRIZ T
PARA PONTOS SITUADOS
ENTRE 13 OU 24.
I = 3 , K
K1 = (M + 1) (I - 1) + J
L1 = M + 1
I2 = k1
11
4


11
4
I1 = 1 , 3
APLICAÇÃO DO OPERADOR
AOS PONTOS SITUADOS
ENTRE 13 OU 24.
I2 = I2 + L
L = 1
U = 2
IC : 2
<
25
≥
IC = M - 1
DETERMINAÇÃO DA MATRIZ T
PARA PONTOS DA REGIÃO INTERNA
I = 3 , K
J = 3 , IC
K1 = (M + 1) (I - 1) + J
I1 = K1 - 2
L = M + 1
12
5


12
5
L1 = 1 , 5
APLICAÇÃO DO OPERADOR
I1 = I1 + 1
30
IC = M - 1
K = N - 1
L = M + 3
J1 = 1
K1 = IC x K
REORDENAÇÃO DA MATRIZ
DOS COEFICIENTES.
35
I = 1 , K1
ZERAGEM DO
VETOR DE CARGAS.
INTRODUÇÃO
do
SISTEMA DE CARGAS.
6


6
NC
L2 = 1 , NC
14
ITIPO
ITIPO
<
=
>
I2 = 1 , K1
QU
QU(I2)=QU / D
QU
QU = QU / D
I = 1 , K1
Q (I) = QU
K = 1 , ITIPO
X1 , L
I1 = 1 , L
L1
Q (L1) = X1/
(D U V SINα)
INV
(S,K1)
I = 1 , K1
W(I) = 0
13
7


13
7
J = 1 , K1
W (I) = W (I) + S (I,J) x Q (J)
NOVA NUMERAÇÃO
PARA O VETOR DAS FLECHAS
MX1
MOMEN
MY1
MOMEN
MXY
MOMEN
PRINC
8



4. EXPLICAÇÕES REFERENTES AO FLUXOGRAMA

O programa, por diferenças finitas, consta basicamente das seguintes etapas:

1a.) Leitura dos dados gerais da estrutura.

2a.) Aplicação do operador ∇^4 a todos os pontos internos da placa, segundo numeração mostrada na Figura 7.3.

3a.) Reordenação da matriz dos coeficientes assim obtida, considerando agora nova numeração com apenas os pontos internos. (Figura 7.5).

4a.) Leitura do tipo de carregamento e do valor desse carregamento. Deve-se aqui ter atenção pois a numeração é feita também considerando somente os pontos internos. (Figura 7.5).

5a.) Resolução do sistema de equações, obtendo-se as deflexões.

6a.) Renumeração das flechas, considerando os pontos do bordo. (Figura 7.3).

7a.) Cálculo dos esforços M_x, M_y e M_{xy}.

No fluxograma, nos trechos correspondentes à segunda etapa faz-se referência a pontos 1, 2, 3 e 4, que devem ser observados na Figura (7.6). Essa numeração tem efeito, apenas, para o fluxograma, a fim de facilitar a sua compreensão.

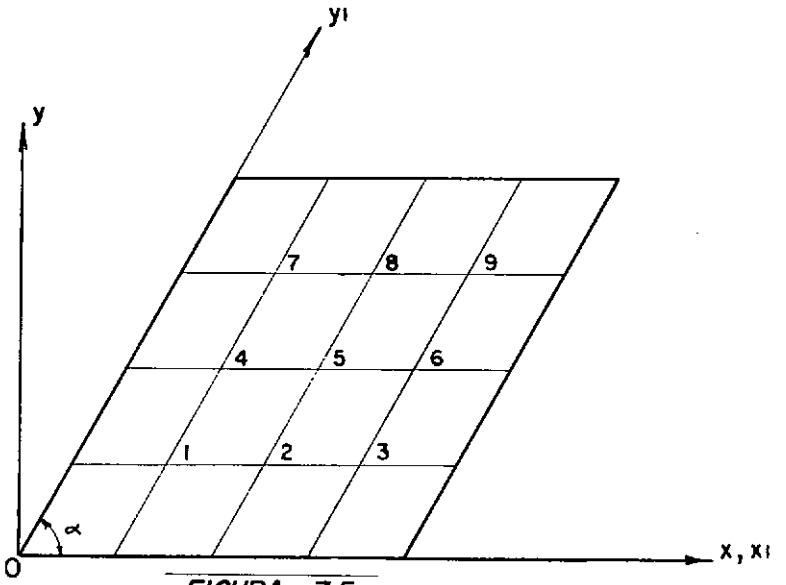


FIGURA 7.5

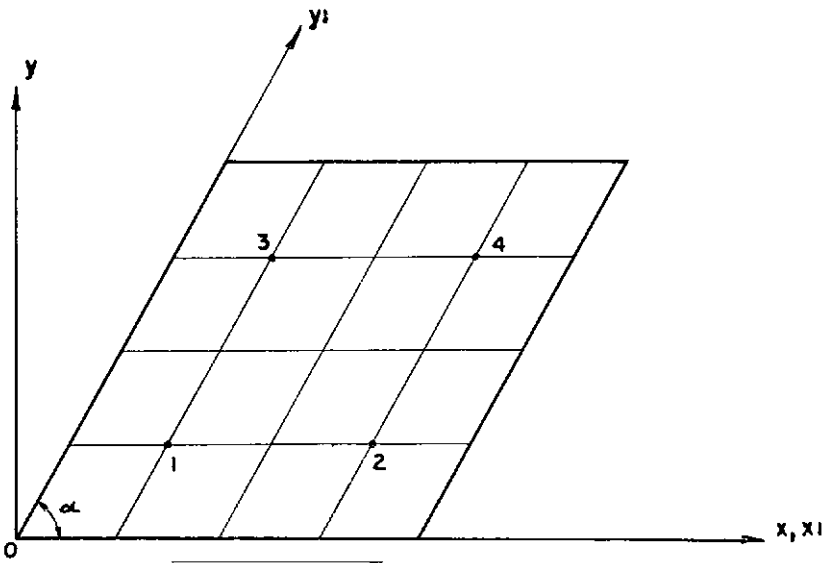


FIGURA 7.6

Principais variáveis usadas:

NP	número de placas a serem analisadas.
M, N	número de divisões da placa nas direções xl e yl, respectivamente, onde xl coincide com o lado da placa de maior número de divisões.
U, V	comprimento da placa nas direções xl e yl, respectivamente.
ALFA	ângulo formado entre xl e yl.
ESP	espessura da placa.
XNI	coeficiente de Poisson.
E	módulo de elasticidade longitudinal.
D	rigidez à flexão da placa.
S	matriz dos coeficientes das incógnitas.
T	matriz auxiliar para aplicação do operador ∇^4 aos diversos pontos da placa.
D1, D2,...,D9	caracterizam o operador ∇^4.

Q vetor de cargas.

NC número de carregamentos considerados.

ITIPO variável que especifica o tipo do carregamento:

ITIPO < 0 → carregamento qualquer;

ITIPO = 0 → carregamento uniforme;

ITIPO > 0 → carregamento concentrado nos nós e o valor de ITIPO, nesse último caso, indica o número de grupos de pontos nodais com mesma ordenada de carga.

QU valor da carga uniforme aplicada.

X1 valor da ordenada de carga quando se trata de cargas concentradas nos nós (ITIPO > 0).

L quantidade de nós que possuem a mesma ordenada de carga (ITIPO > 0).

L1 numeração do nó que possui determinada ordenada de carga (ITIPO > 0).

W vetor das deflexões.

CAPÍTULO VIII

APLICAÇÕES

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Neste capítulo, serão apresentados alguns casos de placas estudadas utilizando-se os programas pelos três métodos anteriormente mencionados, tabelas e gráficos de resultados obtidos.

2. PLACAS ANALISADAS

Foram analisadas cinco placas esconsas, engastadas nos quatro bordos, todas com as mesmas características elásticas e geométricas, variando-se apenas o ângulo α (Figura 7.2) e ainda o tipo de carregamento.

PLACA I - $\alpha = 90^o$

PLACA II - $\alpha = 75^o$

PLACA III - $\alpha = 60^o$

PLACA IV - $\alpha = 45^o$

PLACA V - $\alpha = 30^o$

Características elásticas e geométricas:

Dimensões da placa: 4m x 4m

Espessura: 0,25m

Coeficiente de Poisson: 0,30

Módulo de elasticidade longitudinal: 3144960 . tf/m^2

Módulo de elasticidade transversal: 1234560 . tf/m^2

Os valores acima especificados foram escolhidos de maneira a reproduzir o exemplo que consta na referência (2).

Cada uma das placas foi submetida a dois tipos de carregamentos:

a) Carregamento uniformemente distribuído, de 1 tf/m^2.

b) Carregamento concentrado no centro da placa, de 0,5 tf.

Para verificar a convergência dos métodos, compararam-se as flechas, os momentos fletores e os momentos de torção, no centro da placa. Porém, para o caso de placa engastada, não

se dispunha da solução analítica para todos os casos estudados.

Os tipos de malhas usados na análise por Equivalências, Diferenças Finitas e Elementos Finitos podem ser vistos nas Figuras (7.2), (7.3) e (7.4), respectivamente.

Primeiramente, serão apresentadas tabelas com resultados obtidos para carregamento uniformemente distribuído, depois para alguns casos de carga concentrada no centro da placa. Além disso, apenas os gráficos relativos ao carregamento uniforme serão mostrados.

Para completar o estudo do Método das Equivalências, fez-se variar a relação entre lados das placas, pois, para relações a/b = 1.5 e a/b = 2.0 algumas soluções foram encontradas na referência 12.

Esse estudo foi feito para uma placa em que $\alpha = 45^{o}$ e os resultados obtidos para as deflexões podem ser observados no quadro 8.25.

Nas tabelas e gráficos apresentados a seguir, as flechas são expressas em metros e os momentos em toneladas - força metro.

2.1 CARREGAMENTO UNIFORME

QUADRO 8.1

$\alpha = 90^o$		DEFLEXÃO $W \times 10^4$		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.718	-1.024	-0.764
6 x 6	25	-0.720	-0.873	-0.743
8 x 8	41	-0.720	-0.810	-0.733
10 x 10	61	-0.720	-0.779	-0.729
12 x 12	85	-0.720	-0.762	-0.726
SOLUÇÃO ANALÍTICA [12]: -0.716				

QUADRO 8.2

$\alpha = 90^o$		MOMENTO FLETOR M_x		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.3994	-0.3944	-0.2929
6 x 6	25	-0.3788	-0.3808	-0.3357
8 x 8	41	-0.3731	-0.3750	-0.3495
10 x 10	61	-0.3707	-0.3721	-0.3570
12 x 12	85	-0.3694	-0.3705	-0.3590
SOLUÇÃO ANALÍTICA [12]: -0.3696				

QUADRO 8.3

$\alpha = 75^o$		DEFLEXÃO $W \times 10^4$		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.599	-0.876	-0692
6 x 6	25	-0.623	-0.758	-0.662
8 x 8	41	-0.630	-0.709	-0.652
10 x 10	61	-0.634	-0.685	-0.647
12 x 12	85	-0.636	-0.671	-0.645
SOLUÇÃO ANALÍTICA [5]: -0.640				

QUADRO 8.4

$\alpha = 75^o$		MOMENTO FLETOR M_x		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.3366	-0.3500	-0.2666
6 x 6	25	-0.3415	-0.3437	-0.3089
8 x 8	41	-0.3402	-0.3414	-0.3229
10 x 10	61	-0.3398	-0.3404	-0.3290
12 x 12	85	-0.3397	-0.3398	-0.3323
SOLUÇÃO ANALÍTICA [5]: -0.3232				

QUADRO 8.5

$\alpha = 75^o$		MOMENTO FLETOR M_y		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.3512	-0.3689	-0.2562
6 x 6	25	-0.3546	-0.3584	-0.3090
8 x 8	41	-0.3524	-0.3543	-0.3280
10 x 10	61	-0.3515	-0.3525	-0.3369
12 x 12	85	-0.3511	-0.3515	-0.3417
SOLUÇÃO ANALÍTICA [5]: -0.3648				

QUADRO 8.6

$\alpha = 75^o$		MOMENTO DE TORÇÃO M_{xy}		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.0273	-0.0353	-0.0187
6 x 6	25	-0.0246	-0.0274	-0.0202
8 x 8	41	-0.0228	-0.0241	-0.0202
10 x 10	61	-0.0218	-0.0226	-0.0201
12 x 12	85	-0.0213	-0.0218	-0.0201

QUADRO 8.7

$\alpha = 60^o$		DEFLEXÃO $W \times 10^4$		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.419	-0.537	-0.479
6 x 6	25	-0.424	-0.481	-0.454
8 x 8	41	-0.434	-0.460	-0.446
10 x 10	61	-0.434	-0.450	-0.443
12 x 12	85	-0.435	-0.445	-0.441
SOLUÇÃO ANALÍTICA [5]: -0.439				

QUADRO 8.8

$\alpha = 60^o$		MOMENTO FLETOR M_x		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.3067	-0.2392	-0.1974
6 x 6	25	-0.2596	-0.2443	-0.2380
8 x 8	41	-0.2731	-0.2489	-0.2517
10 x 10	61	-0.2693	-0.2524	-0.2579
12 x 12	85	-0.2643	-0.2550	-0.2613
SOLUÇÃO ANALÍTICA [5]: -0.2480				

QUADRO 8.9

$\alpha = 60^o$		MOMENTO FLETOR M_y		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.3303	-0.2973	-0.2173
6 x 6	25	-0.2932	-0.2930	-0.2707
8 x 8	41	-0.3057	-0.2930	-0.2895
10 x 10	61	-0.3041	-0.2939	-0.2981
12 x 12	85	-0.3007	-0.2948	-0.3029
SOLUÇÃO ANALÍTICA [5]: -0.3168				

QUADRO 8.10

$\alpha = 60^o$		MOMENTO DE TORÇÃO M_{xy}		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.0407	-0.0503	-0.0298
6 x 6	25	-0.0336	-0.0422	-0.0310
8 x 8	41	-0.0333	-0.0382	-0.0309
10 x 10	61	-0.0321	-0.0359	-0.0307
12 x 12	85	-0.0311	-0.0345	-0.0305

QUADRO 8.11

$\alpha = 45^o$		DEFLEXÃO $W \times 10^4$		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.219	-0.221	-0.240
6 x 6	25	-0.215	-0.205	-0.223
8 x 8	41	-0.215	-0.201	-0.219
10 x 10	61	-0.215	-0.201	-0.217
12 x 12	85	-0.215	-0.202	-0.216
SOLUÇÃO ANALÍTICA [5]: -0.224				

QUADRO 8.12

$\alpha = 45^o$		MOMENTO FLETOR M_x		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.2116	-0.1217	-0.1143
6 x 6	25	-0.1705	-0.1278	-0.1488
8 x 8	41	-0.1685	-0.1337	-0.1612
10 x 10	61	-0.1700	-0.1387	-0.1670
12 x 12	85	-0.1674	-0.1427	-0.1701
SOLUÇÃO ANALÍTICA [5]: -0.1616				

QUADRO 8.13

$\alpha = 45^o$		MOMENTO FLETOR M_y		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.2540	-0.1977	-0.1573
6 x 6	25	-0.2282	-0.1974	-0.2103
8 x 8	41	-0.2259	-0.1999	-0.2297
10 x 10	61	-0.2261	-0.2028	-0.2387
12 x 12	85	-0.2230	-0.2055	-0.2436
SOLUÇÃO ANALÍTICA [5]: -0.2320				

QUADRO 8.14

$\alpha = 45^o$		MOMENTO DE TORÇÃO M_{xy}		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.0307	-0.0380	-0.0284
6 x 6	25	-0.0300	-0.0348	-0.0278
8 x 8	41	-0.0294	-0.0331	-0.0274
10 x 10	61	-0.0272	-0.0321	-0.0272
12 x 12	85	-0.0275	-0.0314	-0.0271

QUADRO 8.15

$\alpha = 30^o$		DEFLEXÃO $W \times 10^4$		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.070	-0.051	-0.074
6 x 6	25	-0.065	-0.049	-0.065
8 x 8	41	-0.063	-0.048	-0.063
10 x 10	61	-0.062	-0.049	-0.062
12 x 12	85	-0.062	-0.050	-0.062
SOLUÇÃO ANALÍTICA [5]: -0.068				

QUADRO 8.16

$\alpha = 30^o$		MOMENTO FLETOR M_x		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.1159	-0.0439	-0.0436
6 x 6	25	-0.0825	-0.0460	-0.0682
8 x 8	41	-0.0845	-0.0483	-0.0792
10 x 10	61	-0.0754	-0.0505	-0.0843
12 x 12	85	-0.0771	-0.0525	-0.0872
SOLUÇÃO ANALÍTICA [5]: -0.0784				

QUADRO 8.17

$\alpha = 30^o$		MOMENTO FLETOR M_y		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.1153	-0.0984	-0.0847
6 x 6	25	-0.1349	-0.0987	-0.1321
8 x 8	41	-0.1324	-0.1007	-0.1540
10 x 10	61	-0.1275	-0.1030	-0.1644
12 x 12	85	-0.1274	-0.1052	-0.1701
SOLUÇÃO ANALÍTICA [5]: -0.1312				

QUADRO 8.18

$\alpha = 30^o$		MOMENTO DE TORÇÃO M_{xy}		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.0142	-0.0157	-0.0138
6 x 6	25	-0.0160	-0.0152	-0.0149
8 x 8	41	-0.0152	-0.0151	-0.0146
10 x 10	61	-0.0149	-0.0152	-0.0143
12 x 12	85	-0.0144	-0.0152	-0.0142

2.2 CARREGAMENTO CONCENTRADO NO CENTRO

QUADRO 8.19

$\alpha = 90^o$		DEFLEXÃO $W \times 10^4$		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.098	-0.144	-0.104
6 x 6	25	-0.099	-0.125	-0.103
8 x 8	41	-0.099	-0.116	-0.102
10 x 10	61	-0.100	-0.111	-0.101
12 x 12	85	-0.100	-0.108	-0.100

QUADRO 8.20

$\alpha = 90^o$		MOMENTO FLETOR M_x		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.1117	-0.0949	-0.0383
6 x 6	25	-0.1330	-0.1170	-0.0588
8 x 8	41	-0.1481	0.1322	-0.0735
10 x 10	61	-0.1597	-0.1438	-0.0849
12 x 12	85	-0.1692	-0.1533	-0.0942

QUADRO 8.21

$\alpha = 30^o$		DEFLEXÃO $W \times 10^4$		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.026	-0.014	-0.031
6 x 6	25	-0.026	-0.014	-0.029
8 x 8	41	-0.027	-0.014	-0.029
10 x 10	61	-0.027	-0.015	-0.028
12 x 12	85	-0.027	-0.016	-0.028

QUADRO 8.22

$\alpha = 30^o$		MOMENTO FLETOR M_x		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.0701	-0.0204	-0.0168
6 x 6	25	-0.0836	-0.0273	-0.0396
8 x 8	41	-0.1023	-0.0328	-0.0607
10 x 10	61	-0.1105	-0.0376	-0.0784
12 x 12	85	-0.1176	-0.0419	-0.0933

QUADRO 8.23

$\alpha = 30^o$		MOMENTO FLETOR M_y		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.0815	-0.0466	-0.0356
6 x 6	25	-0.1000	-0.0606	-0.0800
8 x 8	41	-0.1165	-0.0712	-0.1214
10 x 10	61	-0.1278	-0.0798	-0.1561
12 x 12	85	-0.1347	-0.0871	-0.1854

QUADRO 8.24

$\alpha = 30^o$		MOMENTO DE TORÇÃO M_{xy}		
MALHA	NÓ	STRUDL	DIF. FINITAS	EQUIVALÊNCIA
4 x 4	13	-0.0044	-0.0076	-0.0011
6 x 6	25	-0.0043	-0.0096	-0.0021
8 x 8	41	-0.0047	-0.0111	-0.0023
10 x 10	61	-0.0045	-0.0122	-0.0024
12 x 12	85	-0.0051	-0.0131	-0.0024

2.3 TABELA PARA RELAÇÕES ENTRE LADOS a/b = 1.5 E a/b = 2.0, $\alpha = 45^o$ - CARREGAMENTO UNIFORME DISTRIBUÍDO, DE $1tf/m^2$

QUADRO 8.25 DEFLEXÃO W x 10^4

EQUIVALÊNCIAS $\alpha = 45^o$ $q = 1tf/m^2$		
Malha	a/b = 1.5	a/b = 2.0
4 x 4	0.4275	0.5330
6 x 6	0.3818	0.4449
8 x 8	0.3661	0.4132
10 x 10	0.3588	0.3982
12 x 12	0.3549	0.3900
Giangreco	0.3658	0.3914
Morley	0.3546	0.3709

3. TEMPO DE EXECUÇÃO

Não houve muito interesse em se fazer uma análise comparativa do tempo de execução dos três programas, devido ao fato de que eles foram executados por máquinas diferentes.

No quadro (8.26) computou-se o tempo de execução para placas de 90°, carregamento uniforme, pelos programas por diferenças finitas e por equivalências, ambos processados no BURROUGHS-6700 do Núcleo de Computação Eletrônica (NCE) da UFRJ.

QUADRO 8.26

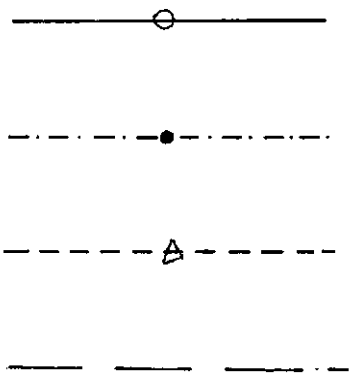
$\alpha = 90^o$ TEMPO DE EXECUÇÃO EM SEGUNDOS		
Malha	Dif. Finitas	Equivalências
4 x 4	1.29	3.53
6 x 6	3.32	7.18
8 x 8	15.11	14.23
10 x 10	58.93	28.14
12 x 12	203.66	49.19

Na análise do tempo de execução, verificou-se que para malhas iguais e mesmo método houve pouca variação no tempo, quando se fez variar o ângulo de esconsidade. Isso se observou para qualquer dos três métodos.

Porém, quando se compara o tempo para mesma malha por diferenças finitas e equivalências, nota-se que há diferença e, ainda, que à medida que a malha é refinada o tempo do programa por diferenças finitas cresce mais rapidamente que o de equivalências.

4. GRÁFICOS PARA CARREGAMENTO UNIFORME

Convenções:



Equivalência

STRUDL

Diferenças Finitas.

Solução Analítica.[12]

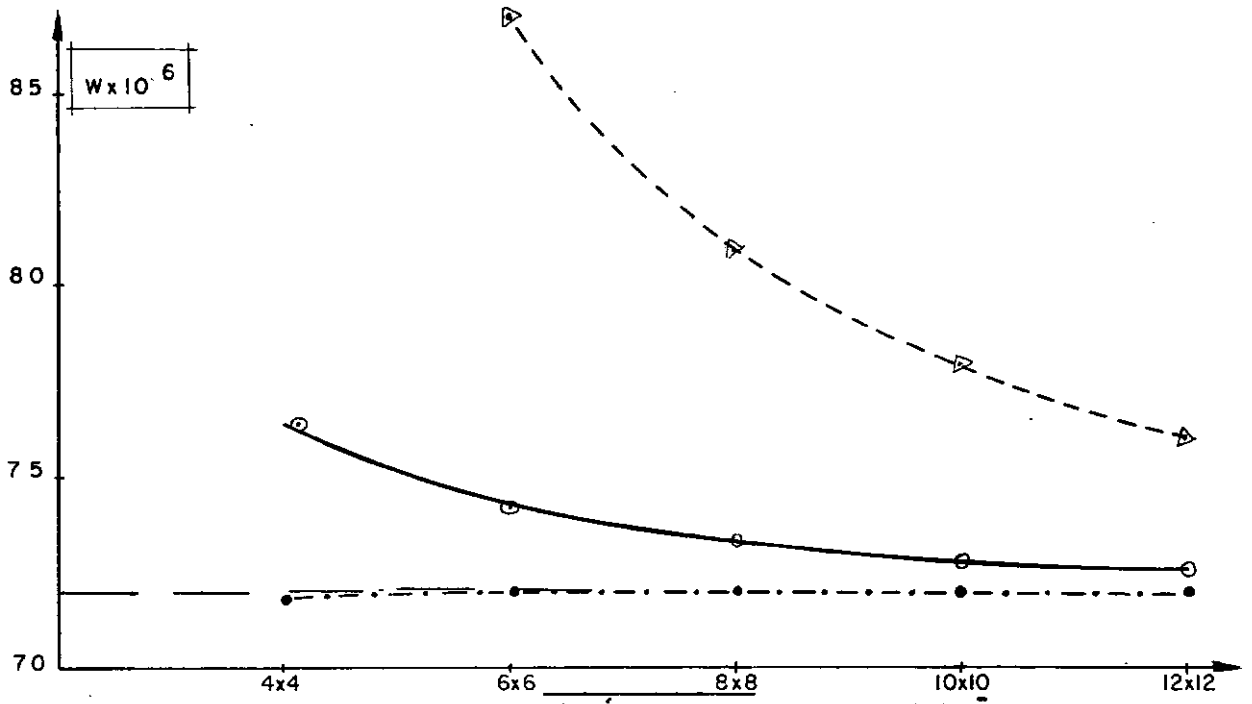


GRÁFICO 8.1 DEFLEXÃO $\alpha = 90°$

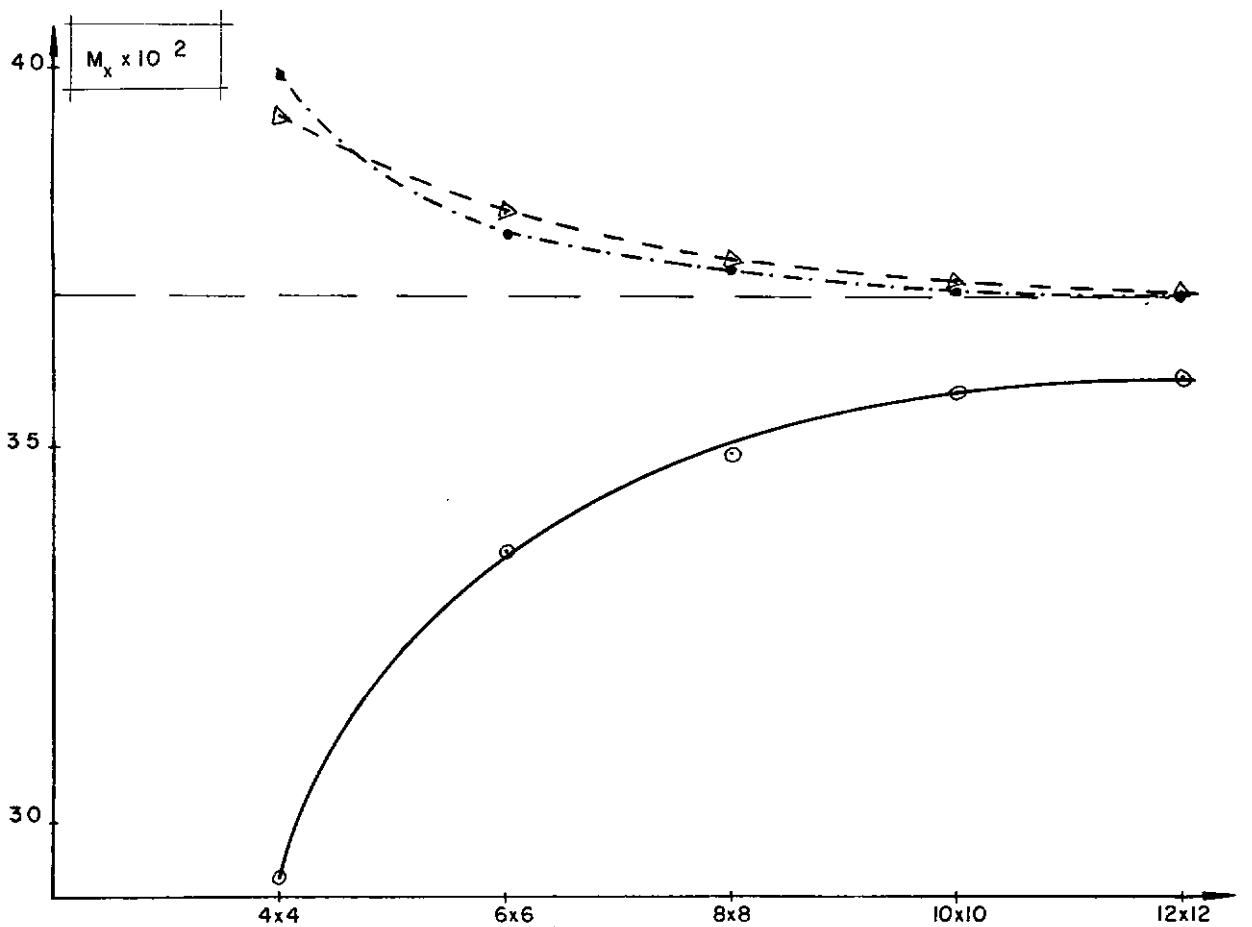


GRÁFICO 8.2 MOMENTO FLETOR $\alpha = 90°$

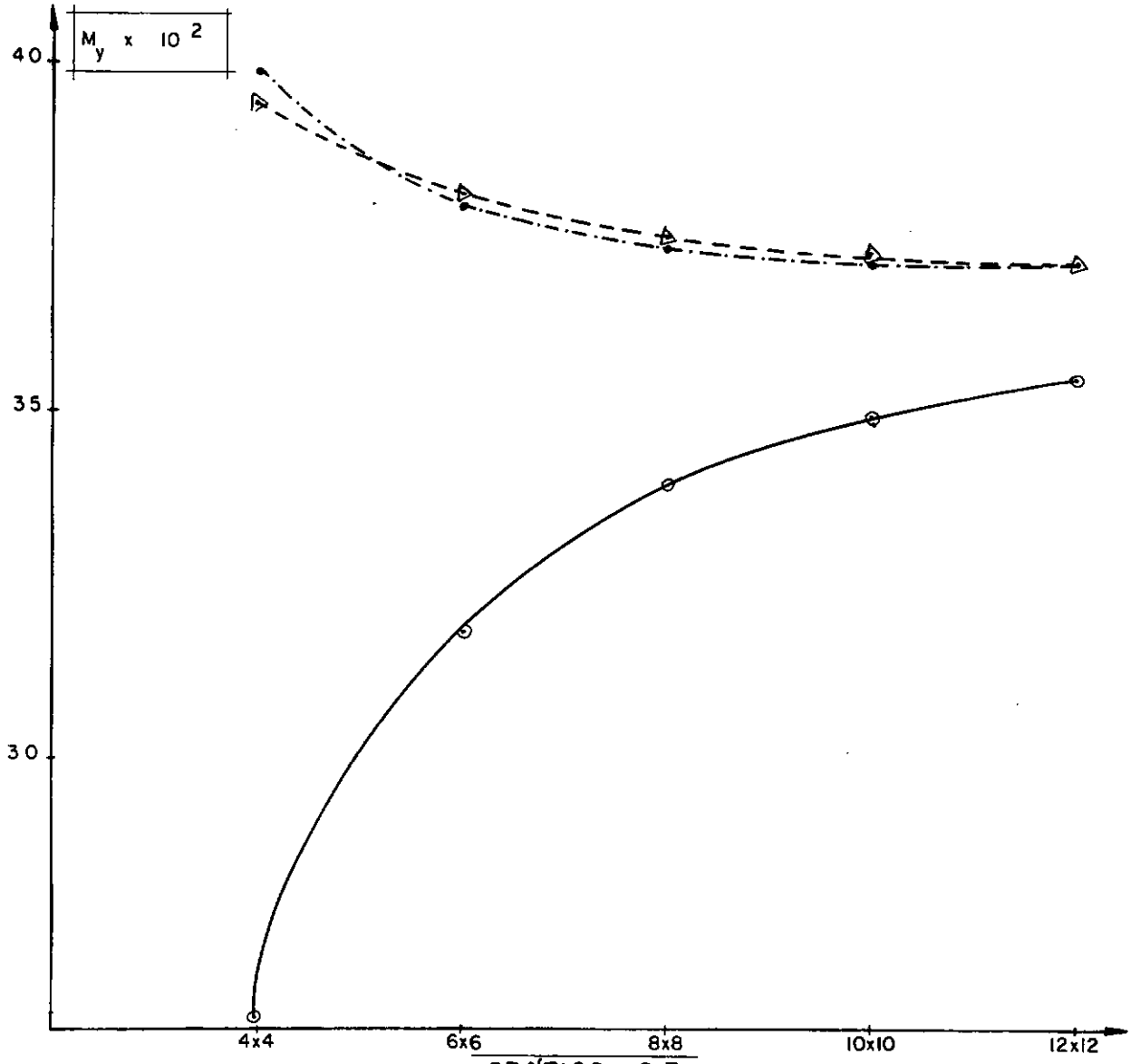


GRÁFICO 8.3 MOMENTO FLETOR α=90°

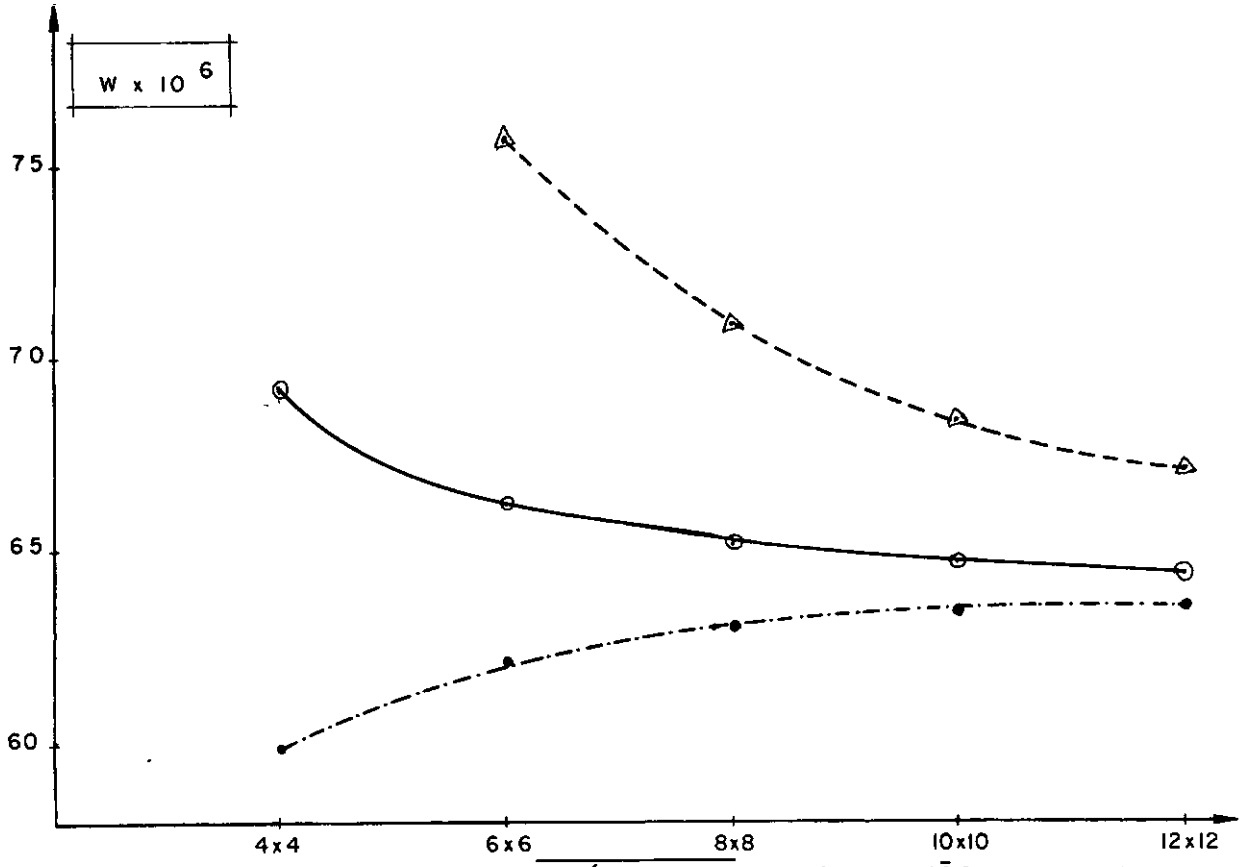


GRÁFICO 8.4 DEFLEXÃO $\alpha = 75°$

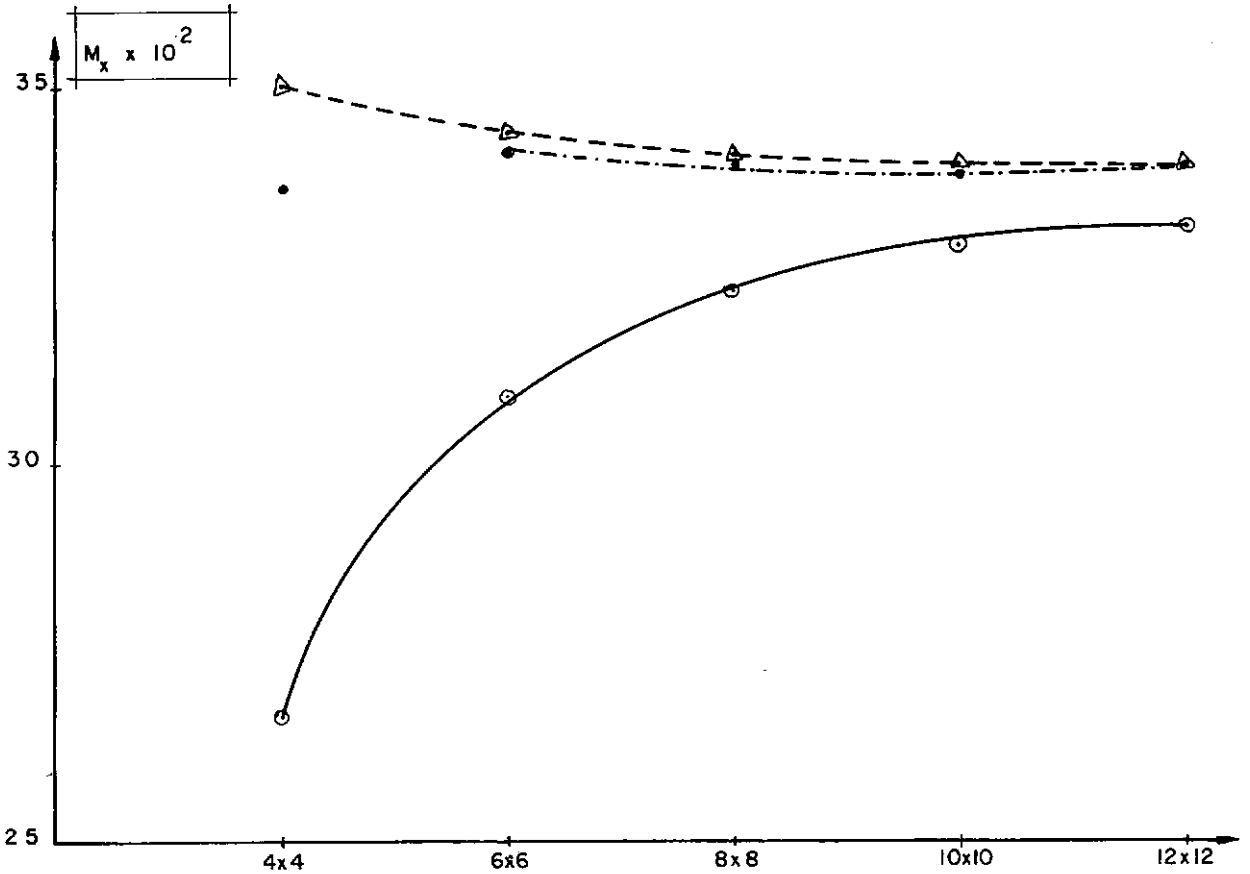


GRÁFICO 8.5 MOMENTO FLETOR $\alpha = 75°$

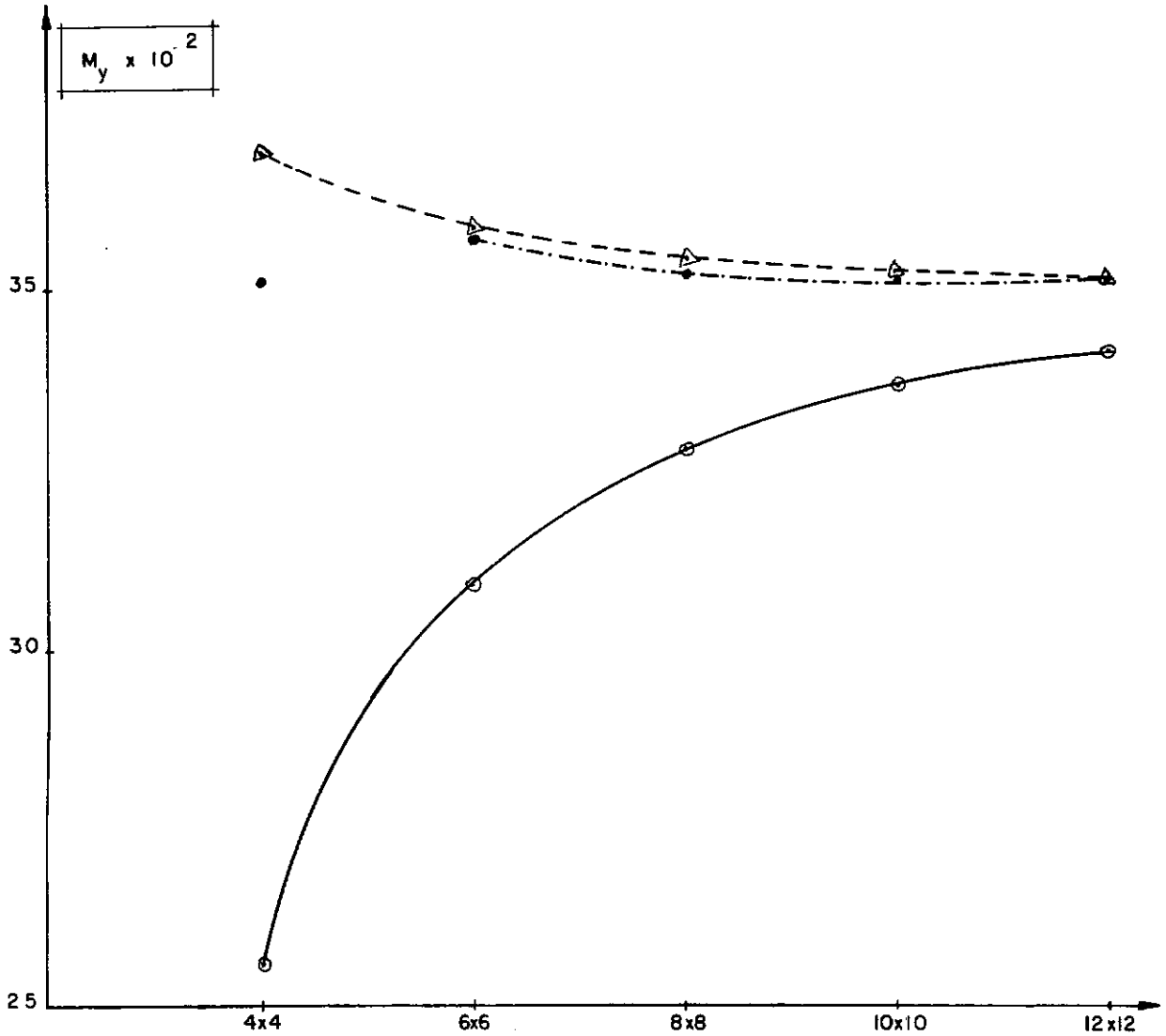


GRÁFICO 8.6 MOMENTO FLETOR $\alpha = 75°$

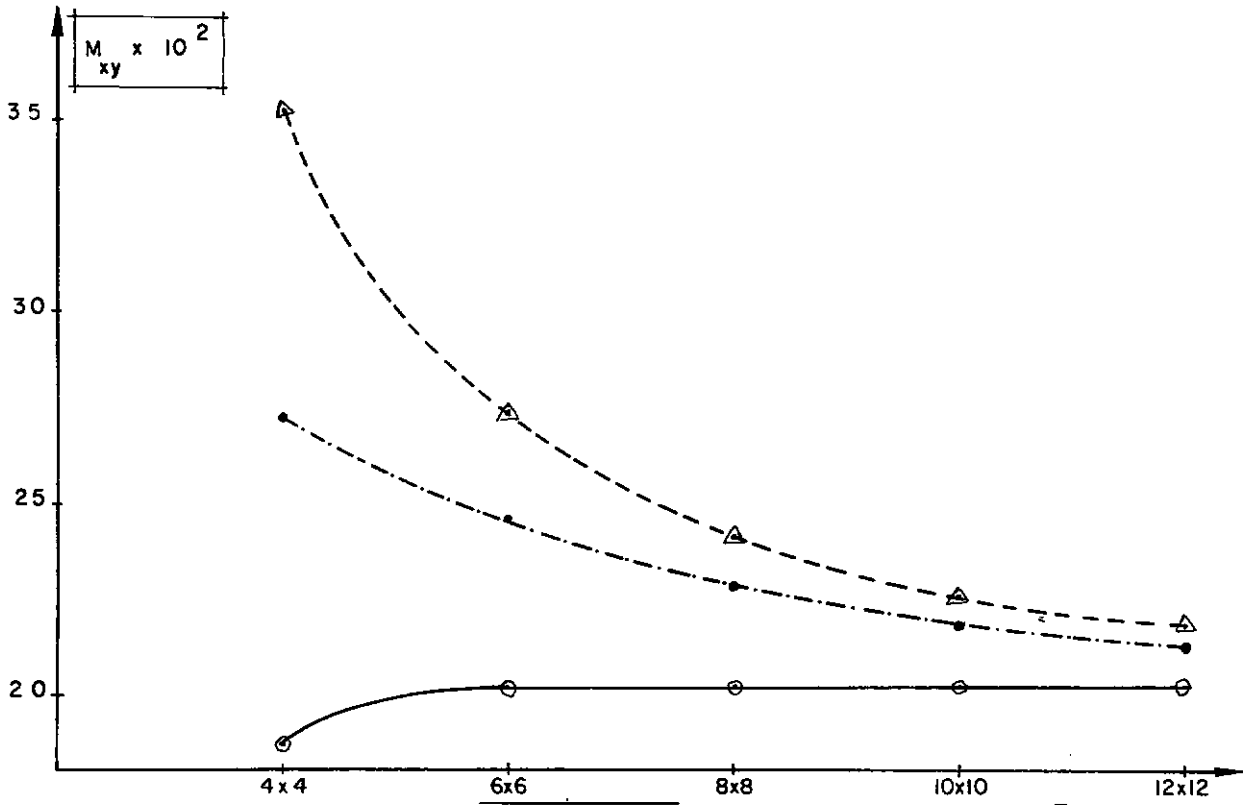


GRÁFICO 8.7 MOMENTO DE TORÇÃO $\alpha = 75°$

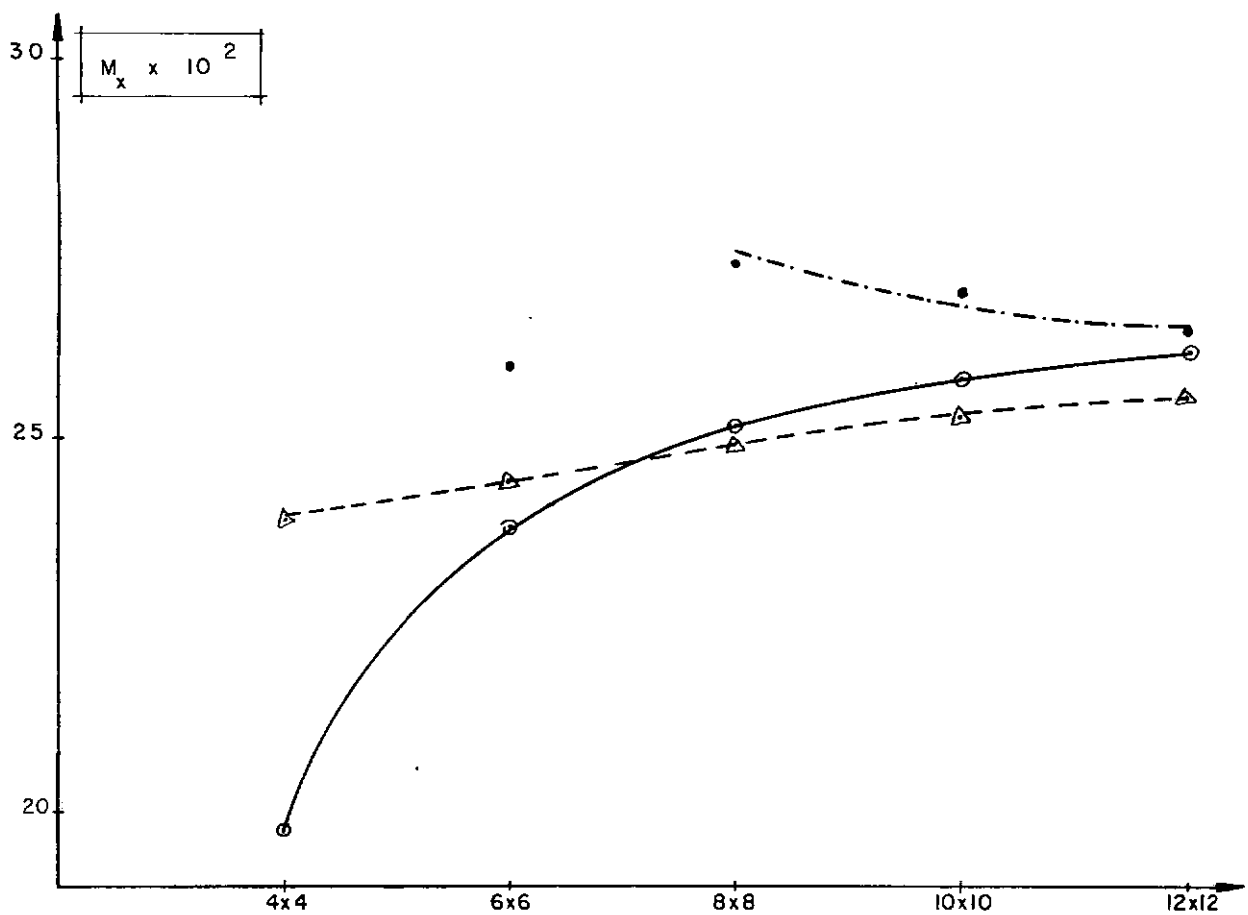


GRÁFICO 8.9 MOMENTO FLETOR $\alpha = 60°$

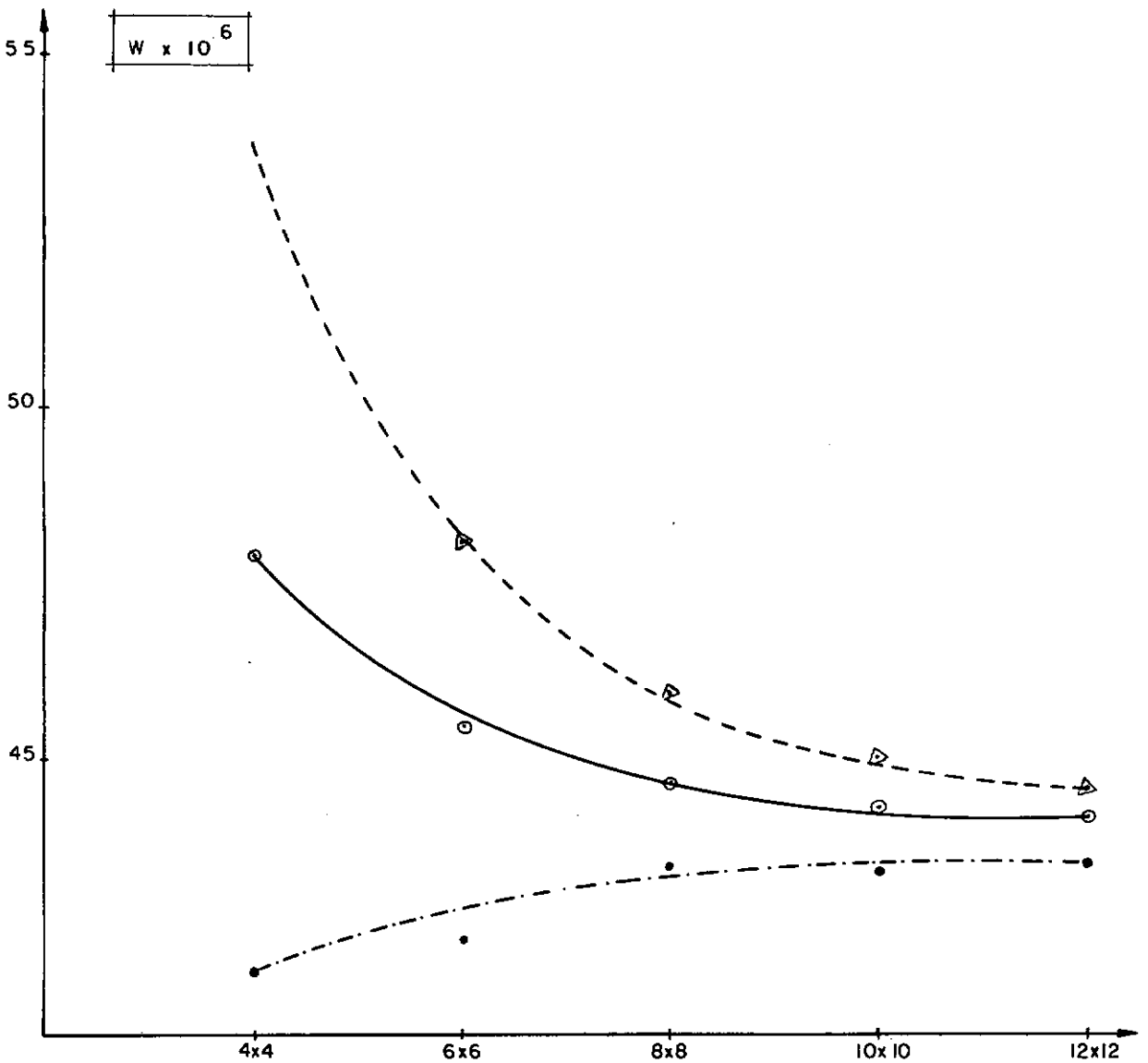


GRÁFICO 8.8 DEFLEXÃO $\alpha = 60°$

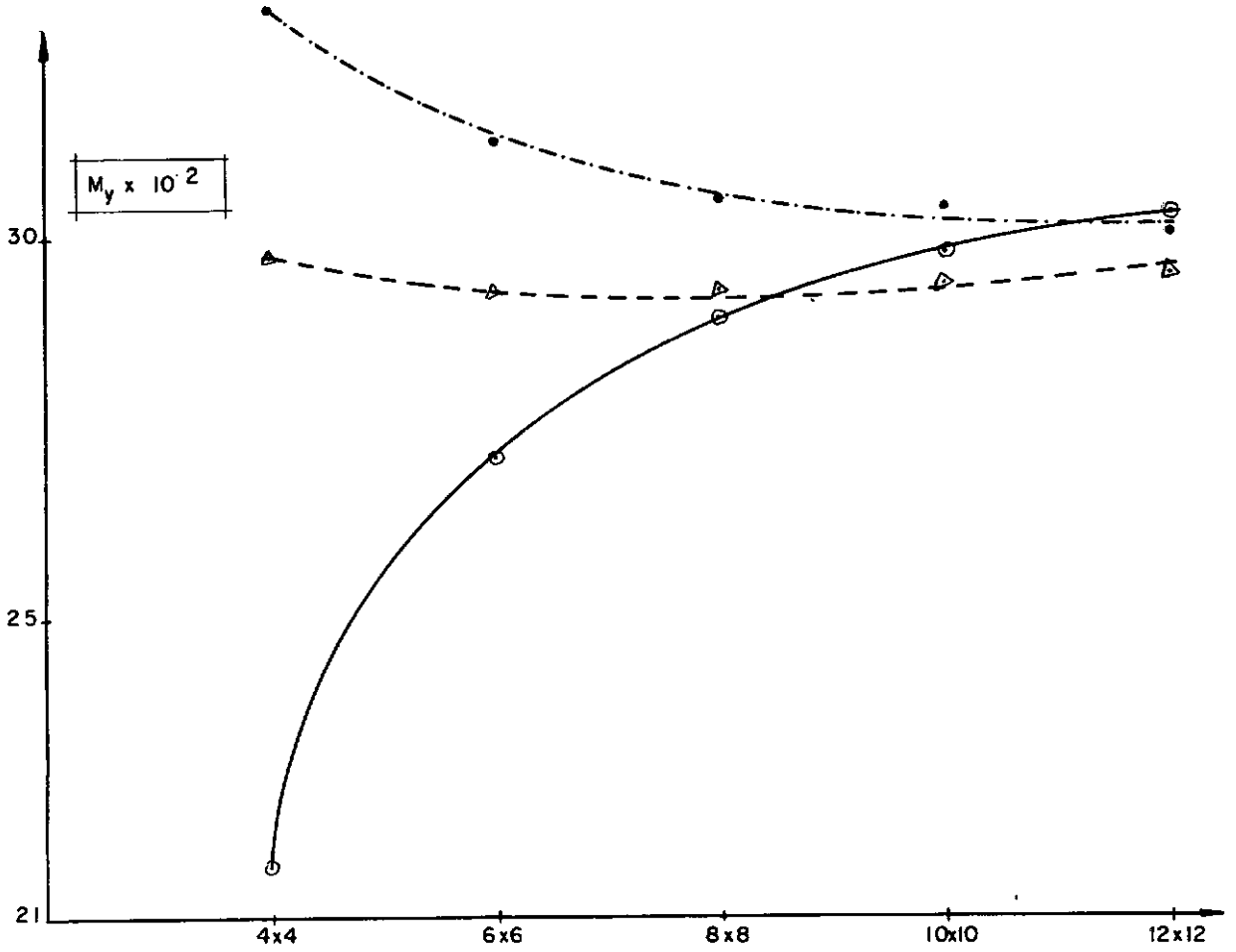


GRÁFICO 8.10 MOMENTO FLETOR $\alpha = 60°$

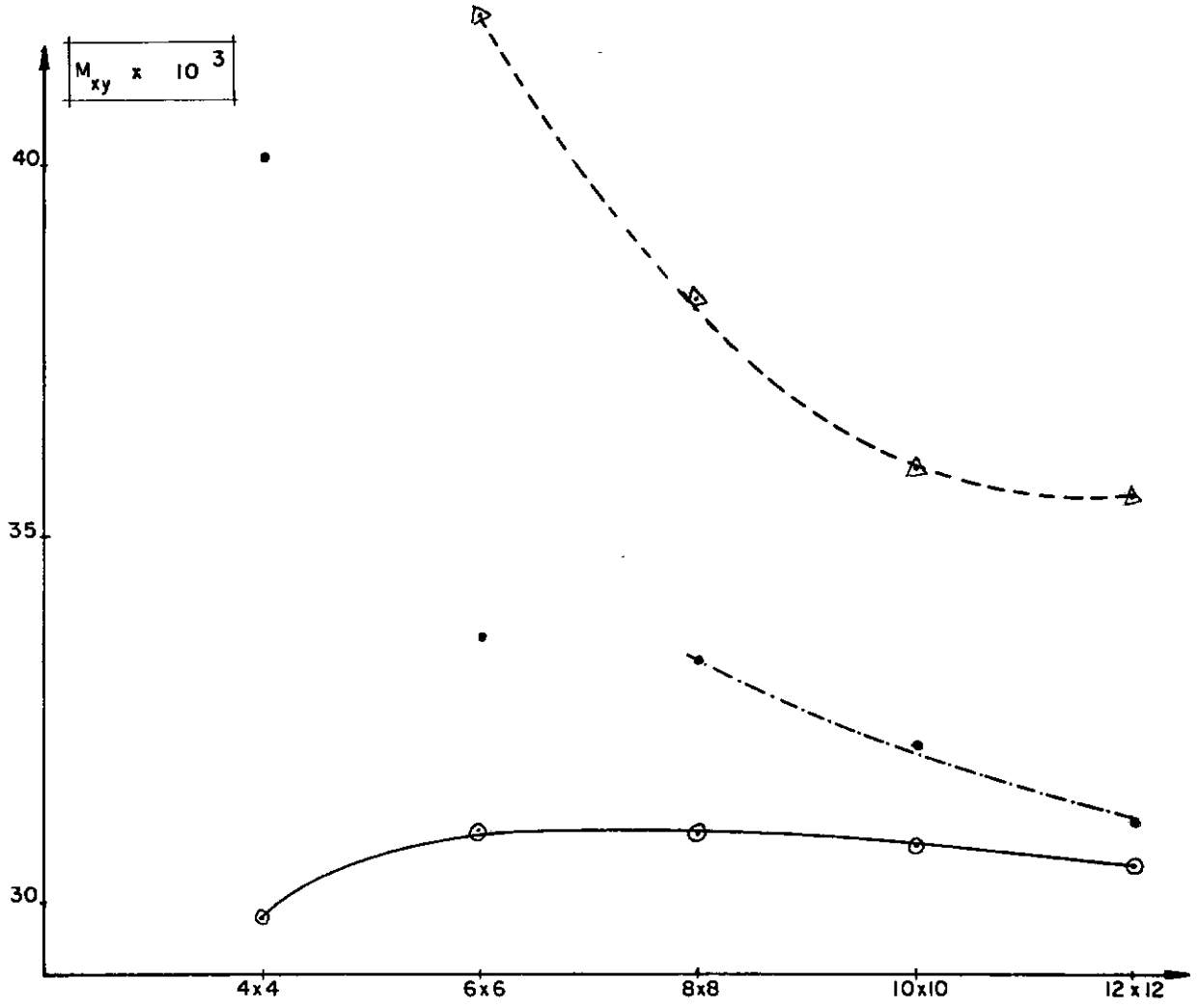


GRÁFICO 8.11 MOMENTO DE TORÇÃO $\alpha = 60°$

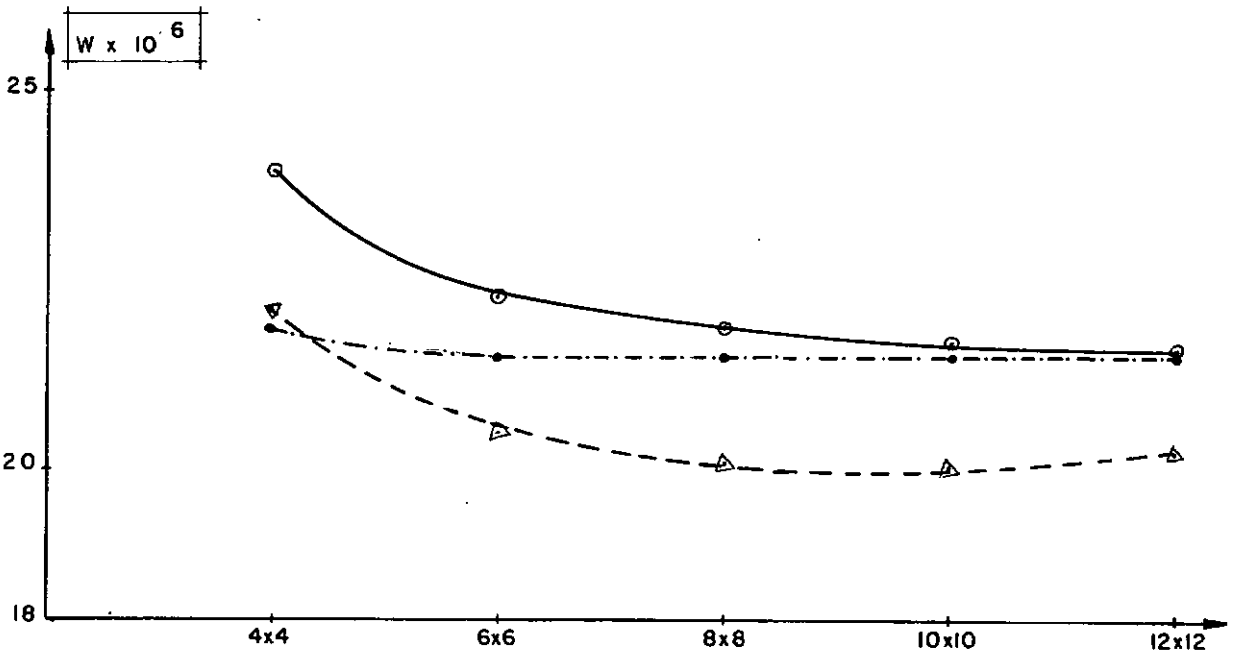


GRÁFICO 8.12 DEFLEXÃO $\alpha = 45°$

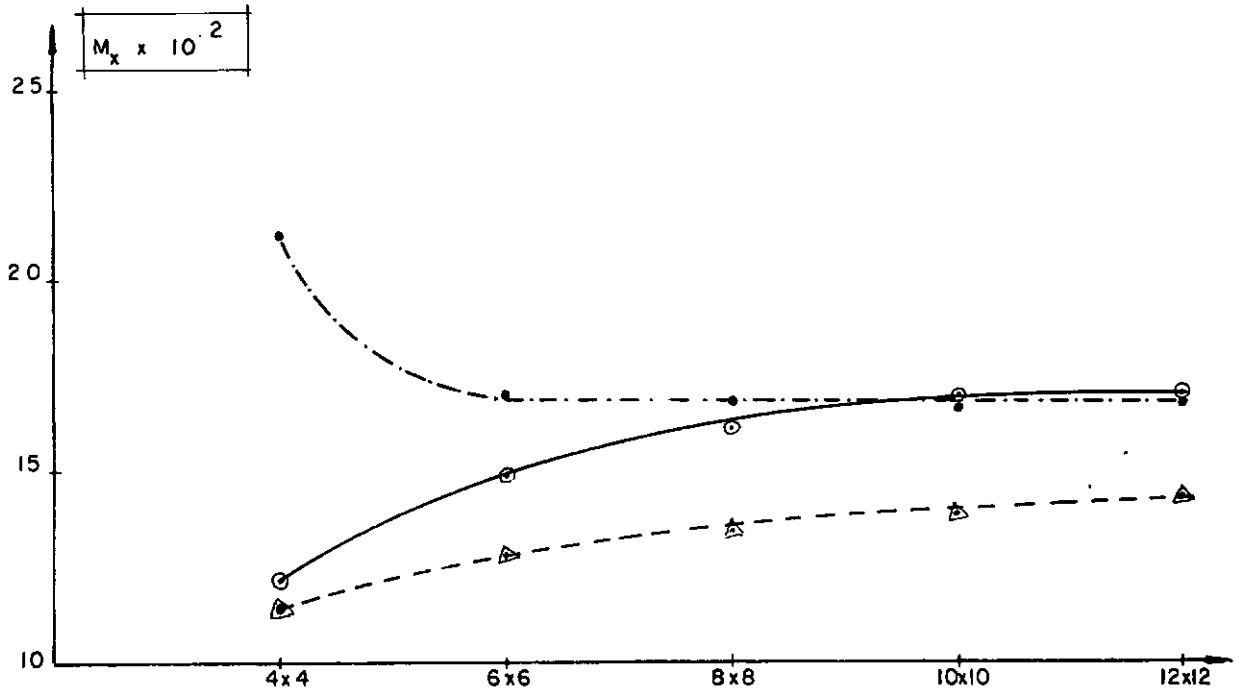


GRÁFICO 8.13 MOMENTO FLETOR α=45°

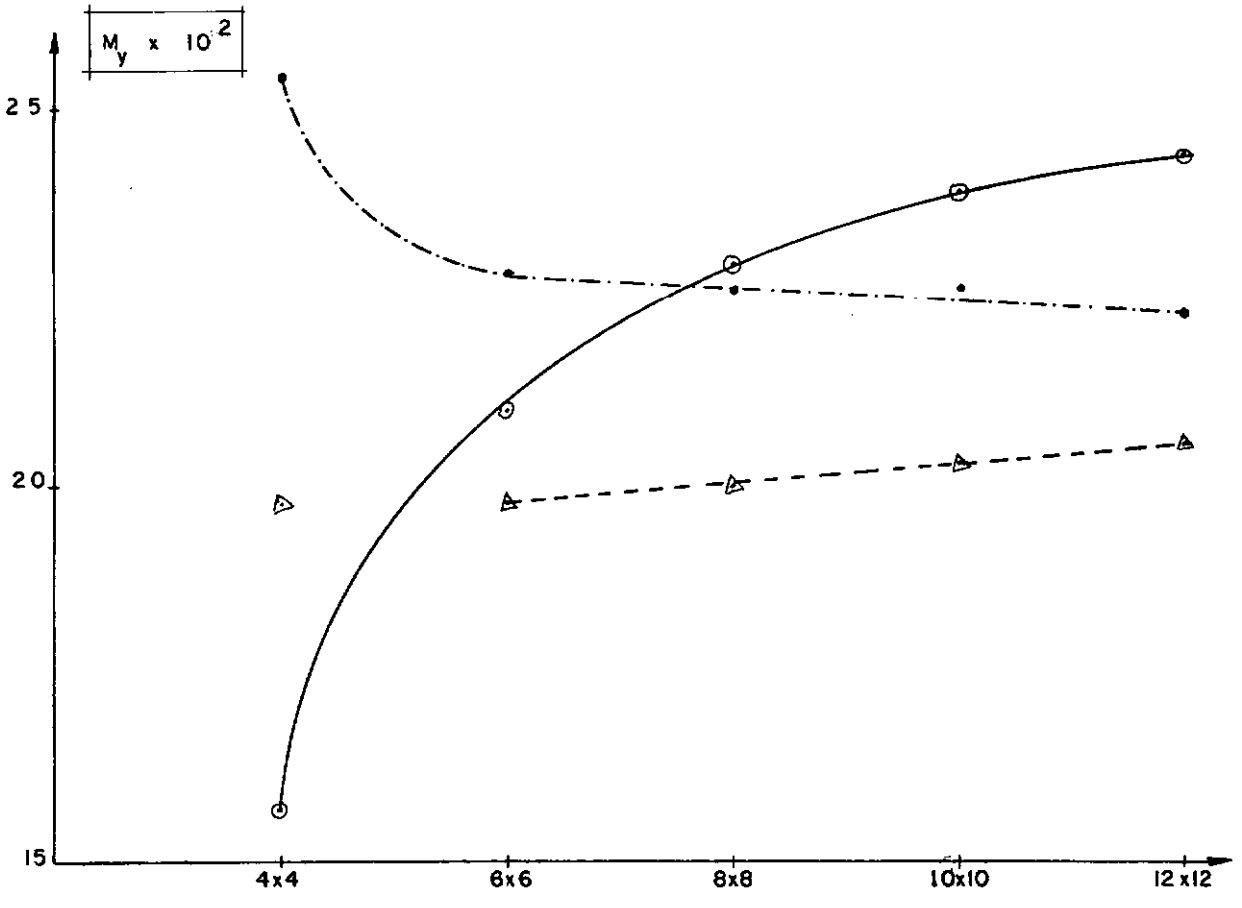


GRÁFICO 8.14 MOMENTO FLETOR α=45°

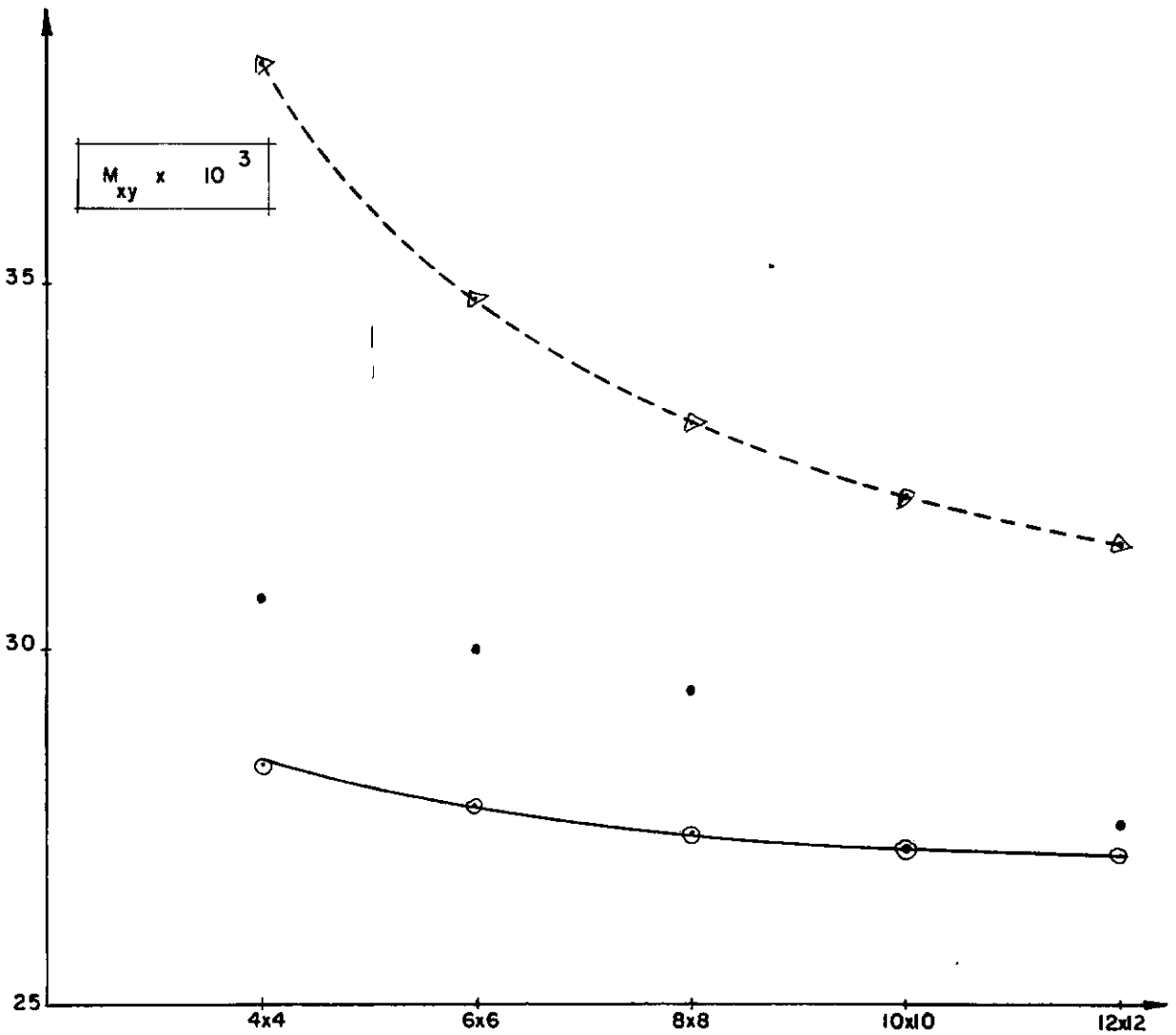


GRÁFICO 8.15 MOMENTO DE TORÇÃO $\alpha = 45°$

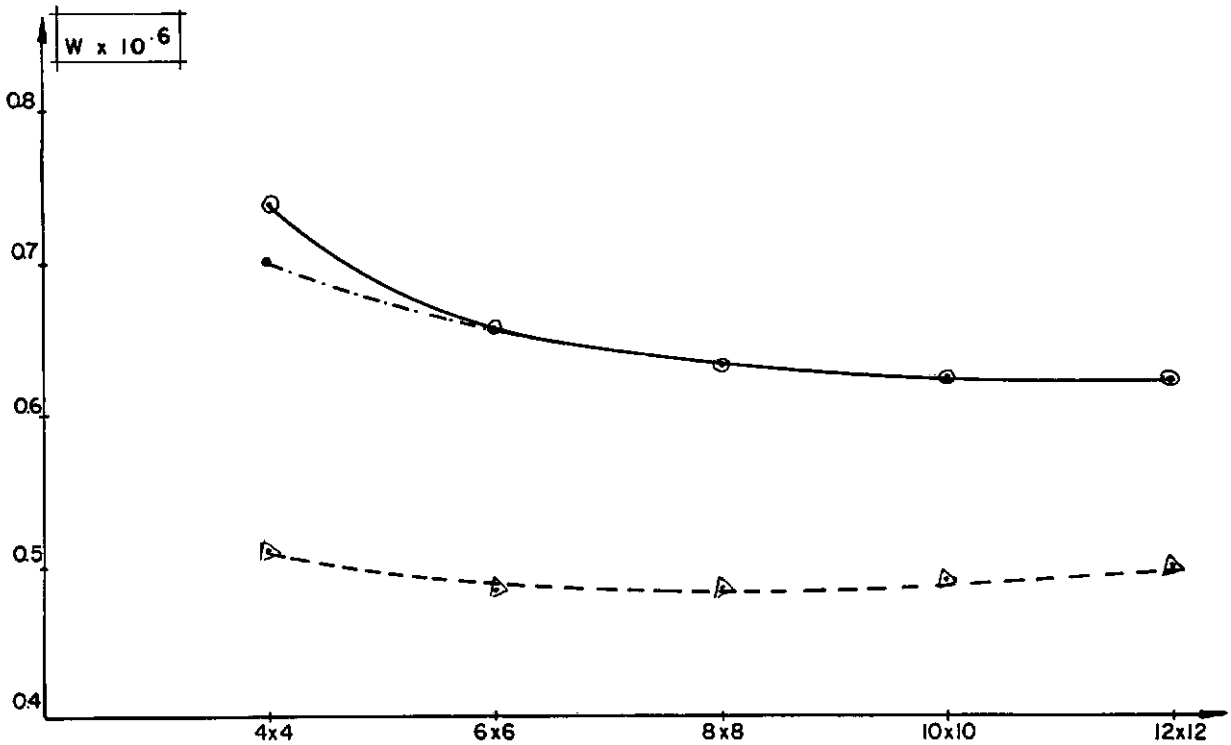


GRÁFICO 8.16 DEFLEXÃO α=30°

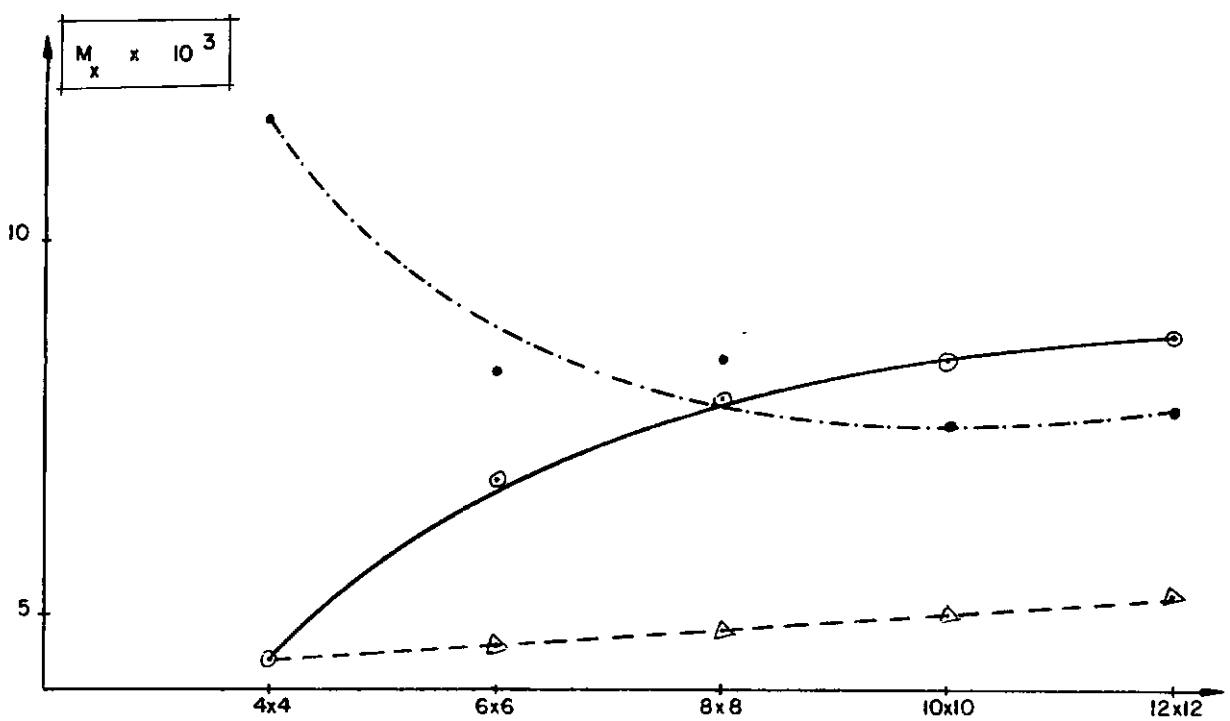


GRÁFICO 8.17 MOMENTO FLETOR α=30°

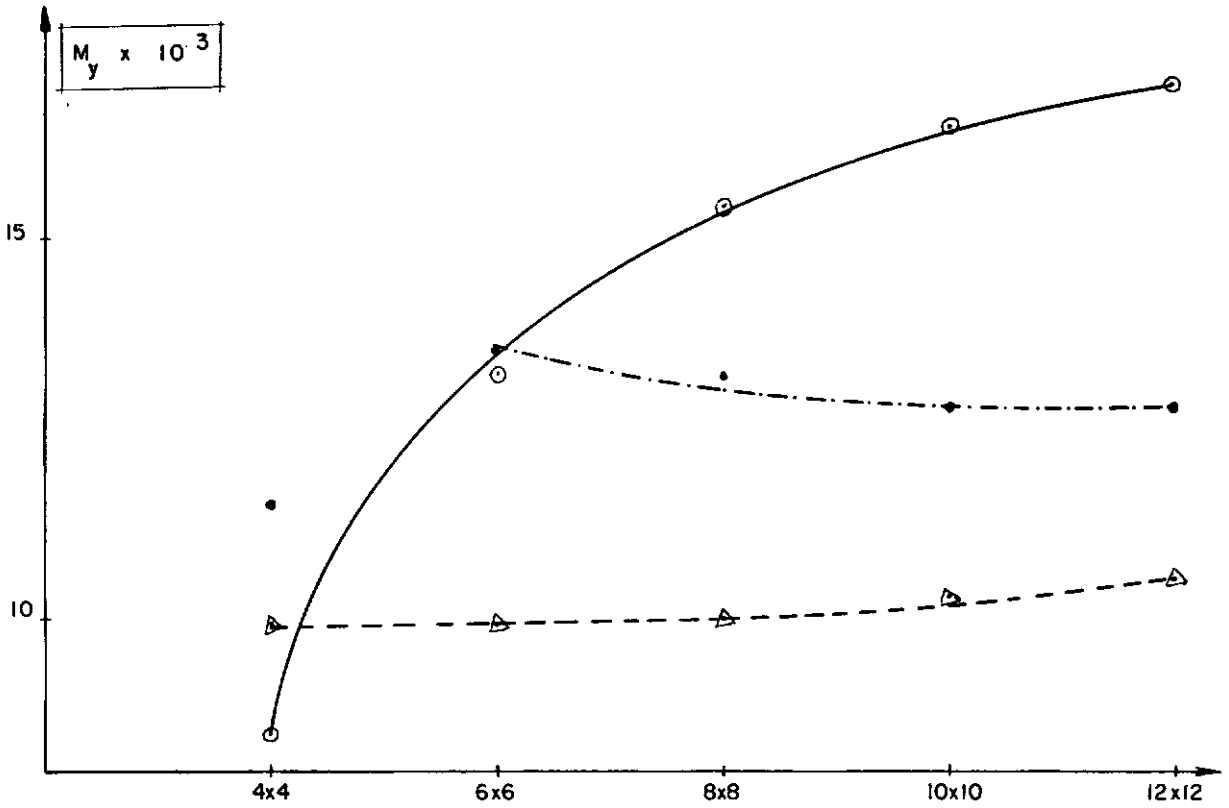


GRÁFICO 8.18 MOMENTO FLETOR $\alpha = 30°$

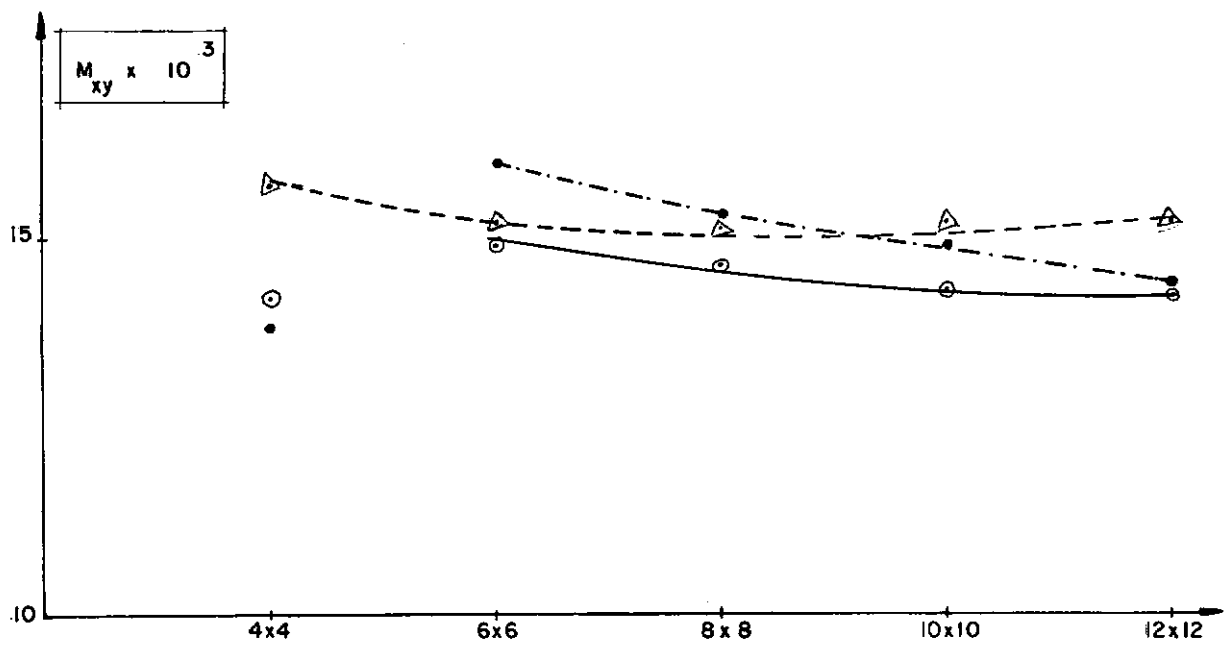


GRÁFICO 8.19 MOMENTO DE TORÇÃO $\alpha = 30°$

CAPÍTULO IX

ANÁLISE DOS RESULTADOS

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Serão aqui apresentadas observações e conclusões sobre as placas analisadas, comentários referentes aos métodos e programas utilizados.

2. PLACAS ANALISADAS

Neste item, cada placa será analisada separadamente.

2.1 PLACA I - $\alpha = 90^{o}$

a) ω

Observando-se o gráfico 8.1, vê-se que o programa STRUDL, para a malha (4 x 4), converge para a solução analítica[12] e a partir da malha (6 x 6) coincide com a solução. Também o programa de equivalências apresenta boa convergência a partir da malha (8 x 8). Observa-se ainda que o programa de diferenças finitas converge muito lentamente.

b) M_x e M_y

No que se refere a momentos fletores (gráficos 8.2 e 8.3), os programas diferenças finitas e STRUDL convergem rapidamente para a solução analítica[12] e ambos, a partir da malha (10 x 10), coincidem com a referida solução.

O programa equivalências apresenta uma pequena diferença nos valores de M_x e M_y, e a convergência só se nota a partir da malha (10 x 10).

c) M_{xy}

O gráfico não foi traçado, mas verificou-se que os valores por diferenças finitas e equivalências permaneceram sempre nulos. O ICES-STRUDL não forneceu resultados tão bons.

d) Sentido da Convergência.

Pelos gráficos 8.1, 8.2 e 8.3 constata-se que nas equivalências e no método dos elementos finitos o sentido de convergência para os momentos fletores é diferente do apresentado pelas deflexões.

2.2 PLACA II - $\alpha = 75^{o}$

a) ω

No gráfico (8.4), observa-se que os programas equivalências e STRUDL, a partir da malha (6 x 6), apresentam boa convergência para a solução fornecida por Giangreco [5] e Morley [7], apesar do sentido da convergência não ser o mesmo para os dois programas: um converge por valores superiores, o outro, por valores inferiores.

O programa de diferenças finitas também converge, mas muito lentamente.

b) M_x e M_y

Os gráficos (8.5) e (8.6) indicam melhores resultados para diferenças finitas e elementos finitos. Para malha (10 x 10) ambos apresentam, praticamente, o mesmo resultado.

Nas equivalências, a convergência para momentos é sempre mais lenta e só a partir da malha (8 x 8) ela fica bem definida.

c) M_{xy}

O gráfico (8.7) mostra que os programas STRUDL e equivalências parecem convergir para o mesmo valor, embora com sentidos diferentes. O programa diferenças finitas também converge, porém, mais lentamente.

d) Sentido da Convergência

O sentido da convergência, tanto para as deflexões como para os momentos, não foi alterado quando se variou o ângulo α de 90° para 75°.

Observa-se que para os programas STRUDL e equivalências o sentido da convergência das deflexões é sempre diferente do sentido da convergência dos momentos. Os momentos fletores convergem no mesmo sentido que os momentos de torção.

2.3 PLACA III - $\alpha = 60^o$

a) ω, M_x e M_y

Nos gráficos (8.8), (8.9) e (8.10) nota-se que os resultados do STRUDL e das equivalências parecem convergir para o mesmo valor, embora com sentidos de convergência diferentes. Observa-se, ainda, que a partir da malha (8 x 8) a convergência é bem mais rápida para ambos os programas. O STRUDL começa, então, a não fornecer resultados tão bons como para o caso de $\alpha = 90^o$ e $\alpha = 75^o$. Aqui os pontos da curva foram interpolados e, para o caso de M_x, dois dos cinco pontos foram desprezados.

O programa de diferenças finitas parece convergir para os mesmos valores dos outros dois programas, porém, para as deflexões, mais lentamente.

Deve-se, ainda, observar que o sentido de convergência dos momentos fletores, por diferenças finitas, passou a ser por valores inferiores.

b) M_{xy}

A partir da malha (10 x 10) (gráfico 8.11), o programa STRUDL converge mais rapidamente, tendendo para o mesmo valor

fornecido pelas equivalências, embora a curva tenha sido interpolada.

Para as equivalências, a partir da malha (10 x 10) os valores são semelhantes aos apresentados pelo STRUDL, mas a curva não é tão bem definida como nos casos anteriores.

c) Sentido da convergência.

Essa placa apresenta, para todos os casos, o mesmo sentido de convergência da de 75°, exceto para o valor de M_x. Nesse caso, o programa de diferenças finitas converge por valores inferiores. (Ver gráfico 8.11).

2.4 PLACA IV - $\alpha = 45^{o}$

a) ω, M_x e M_y

Para as deflexões o STRUDL começa a convergir por valores superiores, isto é, mudou seu sentido de convergência. Apresenta, porém, uma convergência muito rápida e a partir da malha (6 x 6) até (12 x 12) foram encontrados pontos alinhados. (Gráfico 8.12).

O programa de equivalências, para as deflexões, também mostra boa convergência e para malha (12 x 12) fornece, praticamente, o mesmo resultado que o STRUDL.

As curvas das deflexões e momentos fletores, para diferenças finitas, não parecem convergir para os mesmos valores que as curvas pelos outros dois métodos.

No que se refere ao momento M_x (gráfico 8.13), tanto as equivalências como o STRUDL parecem convergir para o mesmo valor. O programa de diferenças finitas, neste caso, apresenta convergência para um valor inferior aos dos outros dois programas.

No gráfico (8.14) observa-se que cada um dos programas converge para um valor diferente, embora sejam valores próximos. O STRUDL é o que apresenta convergência mais rápida.

b) M_{xy}

Não foi traçada a curva para o STRUDL pois os pontos fornecidos não permitiram traçá-la com boa aproximação. Mas, o valor para a malha (10 x 10) coincide com o encontrado, na mesma malha, pelas equivalências. Os valores dos dois referidos programas, para malha (12 x 12), são praticamente iguais. (Gráfico 8.15).

O programa de diferenças finitas parece convergir para um valor diferente do das equivalências e mais lentamente.

c) Sentido da convergência.

É interessante notar que para os momentos fletores, por diferenças finitas, a convergência se faz por valores inferiores.

2.5 PLACA V - $\alpha = 30^{o}$

a) ω

No gráfico (8.16) pode-se observar que os programas equivalências e STRUDL convergem para o mesmo valor e a partir da malha (6 x 6) os valores calculados pelos dois programas são idênticos.

O programa de diferenças finitas não apresenta resultados tão bons para as deflexões. Os valores decrescem até a malha (6 x 6) e, a partir daí, tornam a aumentar. Não se tem uma convergência precisa.

b) M_x e M_y

Para M_x (gráfico 8.17) as equivalências e o STRUDL convergem para valores diferentes, porém próximos.

O programa diferenças finitas converge para outro valor, embora mais rapidamente.

Para M_y, cada programa converge para determinado valor (gráfico 8.18). A convergência do programa das equivalências é bem mais lenta que a dos outros dois programas.

c) M_{xy}

No gráfico (8.19), equivalências e STRUDL convergem para o mesmo valor.

3. ANÁLISE DOS RESULTADOS PARA CARGA CONCENTRADA

Da observação das tabelas apresentadas no Capítulo VIII, nota-se que os resultados são bons.

a) ω

Para as deflexões e malha (12 x 12) os programas equivalências e STRUDL apresentam sempre valores praticamente iguais.

O programa de diferenças finitas, quando a esconsidade da placa aumenta, apresenta valores diferentes dos outros dois programas.

b) M_x, M_y e M_{xy}

Para ângulo $\alpha \geqslant 60^o$ os valores dos momentos fletores por diferenças finitas e STRUDL são bem semelhantes, o que não acontece com as equivalências que parecem convergir para outro valor.

Para $\alpha = 45^o$ e $\alpha = 30^o$, tendo como referência os valores fornecidos pelo STRUDL, as equivalências dão valores mais próximos que as diferenças finitas.

4. RELAÇÕES ENTRE LADOS a/b = 1.5 e a/b = 2.0

Uma vez que um dos objetivos do presente trabalho é

verificar até que ponto a Teoria das Equivalências é válida para o estudo de placas esconsas, fez-se, ainda, um estudo com placas em que a relação entre lados da placa era a/b = 1.5 e a/b = = 2.0.

Esse estudo foi feito para uma placa de 45°, e apenas para as deflexões pois, nesse caso, dispunha-se de valores fornecidos por Morley [7] e Giangreco [5].

Observa-se, no quadro (8.25), que os valores fornecidos por Morley são inferiores aos fornecidos por Giangreco.

Para o caso a/b = 1.5, a malha (12 x 12) fornece, praticamente, o resultado de Morley. E, para a/b = 2.0, o resultado é praticamente igual ao fornecido por Giangreco.

5. CONCLUSÕES

Após a observação dos gráficos e tabelas, apesar de na maioria dos casos não se ter a solução analítica do problema, pode-se estabelecer certas conclusões para o estudo da flexão de placas esconsas:

a) À medida que o ângulo α diminui, o STRUDL, para o elemento não conforme utilizado, começa a apresentar uma

convergência mais lenta. Nesse caso, os pontos da curva já não definem tão bem a sua forma e ainda alguns pontos são desprezados.

b) Os resultados para momentos fletores, por diferenças finitas, são sempre melhores que os das deflexões. Isso pode ser justificado pelo fato de que as deflexões são expressas por uma equação diferencial de quarta ordem e os momentos por equações de segunda ordem.

c) Coordenadas oblíquas, para diferenças finitas, têm sua precisão diminuída no tratamento de placas esconsas engastadas, para ângulos α pequenos ($< 45^{o}$).

d) Para $\alpha > 60^{o}$, diferenças finitas e elementos finitos apresentam boa convergência para momentos fletores; já para $\alpha \leqslant 60^{o}$ as equivalências mais se aproximam dos elementos finitos.

e) Para qualquer α, os melhores resultados para momento de torção são fornecidos por elementos finitos e equivalências.

f) No estudo das deflexões os melhores resultados são fornecidos por elementos finitos e equivalências. Embora esse último método, em alguns casos, tenha uma convergência mais lenta, apresenta também bons resultados.

6. IMPORTÂNCIA DO FATOR TEMPO

Apesar do fator tempo ser preponderante em estudos desse tipo, aqui não se pode levar muito em consideração, em virtude de terem sido usadas máquinas diferentes.

Mas, para que se tenha uma idéia, apresentou-se no Capítulo VIII um quadro em que se pode fazer comparação do tempo de execução para os programas de diferenças finitas e equivalências ou ainda fazer comparações dentro do mesmo programa.

Observa-se que no programa de equivalências, para malhas mais refinadas, o tempo de execução torna-se muito menor que o do programa de diferenças finitas (aproximadamente 25%), além de apresentar, de modo geral, resultados melhores.

7. APLICABILIDADE DA TEORIA DAS EQUIVALÊNCIAS

A grande vantagem da Teoria das Equivalências reside no fato de que não é necessário um programa específico para sua utilização, além da facilidade que apresenta na sua aplicação.

Desde que exista um estudo, dirigido no sentido de

automatizar o método, eficientes programas podem ser elaborados, sem grandes dificuldades.

Alguns fatos podem ser aqui citados para caracterizar a aplicabilidade do Método das Equivalências ao caso de flexão de placas. Estes fatos não devem ser considerados como vantagens sobre os outros métodos.

a) Para um mesmo número de pontos nodais, o sistema de equações que se tem a resolver, nas equivalências, é menor ou igual ao sistema de equações no método dos elementos finitos, porém, é maior que no programa de diferenças finitas.

b) As fases da análise do problema, ao contrário do método dos elementos finitos, não são trabalhosas, desde que se conheça a expressão da energia de deformação do corpo em estudo. O programa de diferenças finitas, no caso de placa esgastada é mais trabalhoso.

c) Programas que resolvam estruturas reticuladas poderão aqui ser utilizados.

d) A entrada de dados é muito simples, o que não ocorre com o método dos elementos finitos.

e) As condições de bordo são facilmente caracterizadas. Já

no programa de diferenças finitas isso não ocorre e pontos nodais fictícios, fora do contorno, são necessários.

f) Um mesmo programa pode resolver placas com condições de bordo diversas. Com diferenças finitas seria impraticável fazer um programa geral para várias condições de bordo.

g) O tempo de execução é mínimo, quando comparado com outros programas. Os resultados, por sua vez, são satisfatórios.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ABSI, E.: "La théorie des équivalences et son application a l'étude des ouvrages d'art". Annales de L'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, Supplément au nº 298, Octobre 1972.

2. CEBIP: "La théorie des équivalences - Application au Génie Civil".

3. DHELLO, Camille: "La théorie des équivalences et les problemes d'elasticité tridimensionnels et extension aux problemes d'ecoulement en milieux poreux". Theses de Docteur-Ingenieur, Paris, 1972.

4. GERE, J.M. y WEAVER, William: "Análisis de Estruturas Reticulares". Compañia Editorial Continental S.A., México, 3a. impresion, 1972.

5. GIANGRECO, Elio: "Teoria e Técnica Delle Costruzioni. Vol. Terzo, Liguori Editore, Napoli, 1970.

6. LANGHAAR, Henry L.: "Energy Methods in Applied Mechanics". John Wiley and Sons, Inc., N.Y., 1962.

7. MORLEY, L.S.D.: "Skew Plates and Structures". The MacMillan Co., New York, 1963.

8. PACITTI, Tércio: "Fortran-Monitor, Princípios". Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1968.

9. NÓBREGA, F. Seraphico: "Estudo Comparativo de Análise Numérica Aplicada a Placas Esconsas". Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1972.

10. STRUDL II, ICES: "The Structural Design Language Engineering User's Manual". Co., by Massachusetts Institute of Technology, 1969.

11. TIMOSHENKO, S. y GOODIER, J.N.: "Teoria de la Elasticidad". Ediciones Urmo. Bilbao, 1968.

12. TIMOSHENKO, S. and KRIEGER, Woinowsky: "Theory of Plates and Shells". McGraw-Hill, 2nd, ed., 1959.

13. VASCONCELLOS, A.F.: "O Método dos Elementos Finitos. Fundamentos Teóricos. Automatização. Aplicações a Pro

blemas de Placas e de Elasticidade Plana". COPPE/UFRJ, 1970.

14. WANG, P.C.: "Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics". John Wiley & Sons, Inc., USA, 1966.

15. WEAVER, W.: "Computer Programs for Structural Analysis". D.Van Nostrand Co., Inc., N.J., 1967.

16. ZIENKIEWICZ, O.C.: "The Finite Element Method in Engineering Science". McGraw-Hill, 1971.

NOTAÇÕES

ℓ, m	cosenos diretores.
x, y, z	coordenadas retangulares.
u, v	componentes do deslocamento paralelas aos eixos x e y, respectivamente.
ε	alongamento unitário.
ε_x, ε_y	projeções do alongamento unitário sobre os eixos x e y, respectivamente.
γ_{xy}	componente da deformação tangencial no sistema retangular.
τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}	componentes da tensão tangencial em coordenadas retangulares.
σ_x, σ_y, σ_z	componentes da tensão normal paralela aos eixos coordenados x, y e z, respectivamente.

θ ângulo que define a direção da normal a uma face ta inclinada.

E módulo de elasticidade longitudinal.

ν coeficiente de Poisson.

X, Y componentes de força no sistema retangular.

σ_n, τ_n tensão normal e tangencial atuando numa face per pendicular a uma direção n.

x1, y1 coordenadas oblíquas.

ℓ1, m1 coeficientes que definem uma determinada direção em relação ao sistema oblíquo.

α ângulo formado entre os eixos x1 e y1.

β ângulo de esconsidade da placa.

u1, v1 componentes do deslocamento paralelas aos eixos x1 e y1, respectivamente.

$u1_{x1}$, $v1_{y1}$ projeções dos deslocamentos sobre os eixos x1 e y1, respectivamente.

ε_{x1}, ε_{y1} projeção do alongamento unitário sobre os eixos x1 e y1, respectivamente.

$\gamma_{x_1y_1}$ componente da deformação tangencial, no sistema oblíquo.

X_1, Y_1 componentes de força, no sistema oblíquo.

σ_{x_1}, σ_{y_1} componentes de tensão normal paralelas aos eixos coordenados x_1 e y_1, respectivamente.

$\tau_{x_1y_1}$, $\tau_{y_1x_1}$ componente da tensão tangencial em coordenadas oblíquas.

M_x, M_y momento fletor, por unidade de comprimento de uma seção da placa, perpendicular aos eixos x e y, respectivamente.

M_{xy} momento de torção, por unidade de comprimento de uma seção da placa, perpendicular ao eixo x.

M_{x_1}, M_{y_1} momento fletor, por unidade de comprimento de uma seção da placa, perpendicular aos eixos x_1 e y_1, respectivamente.

$M_{x_1y_1}$ momento de torção, por unidade de comprimento de uma seção da placa, perpendicular ao eixo x_1.

Q_{x_1}, Q_{y_1} esforço cortante, por unidade de comprimento de uma seção da placa, paralelo ao eixo z.

h espessura da placa.

∇^2 laplaciano.

∇_1^2 laplaciano em coordenadas oblíquas.

D rigidez à flexão da placa.

q carga uniformemente distribuída.

M_{x1}, M_{y1} momento fletor verdadeiro atuando no bordo paralelo aos eixos x1 e y1, respectivamente.

ω deflexão.

U_0 energia potencial de deformação, por undiade de volume ou por unidade de área.

π potencial total de um sistema.

v volume de um corpo.

ϕ potencial de cargas.

v' volume de um corpo equivalente.

P carga concentrada aplicada.

M_f momento de flexão de uma barra.

I momento de inércia.

μJ	rigidez à torção da barra.
ℓ	comprimento da barra.
W_f	energia de deformação à flexão da barra.
W_t	energia de deformação à torção da barra.
W	energia de deformação de um modelo equivalente.
γ	parâmetro característico da torção ($\gamma = \mu J \ell$)
ρ'	parâmetro característico ($\rho' = EI\ell$)
e_{ij}	componente do tensor de deformação.
ρ	parâmetro característico ($\rho = ES\ell$).
$(\Delta_y^n)_i$	diferença central de ordem n para um determinado ponto i.
y_n	coordenada de um determinado ponto n.
h	espaçamento da malha na direção x.
k	espaçamento da malha na direção y.
u	espaçamento da malha na direção x1.

v espaçamento da malha na direção y1.

t relação entre os espaçamentos das malhas nas direções x1 e y1.

1. LISTAGEM DO PROGRAMA DIFERENÇAS FINITAS.

```
      SUBROUTINE INV(A,N)

      ESTA SUBROTINA INVERTE A MATRIZ DE RIGIDEZ,
      PARA POSTERIOR RESOLUCAO DO SITEMA DE EQUACOES.

      DIMENSION A(250,250),G(250),H(250)
      A(1,1)=1./A(1,1)
      N1=N-1
      DO 60 M=1,N1
      K=M+1
      DO 35 I=1,M
      G(I)=0.
      DO 35 J=1,M
   35 G(I)=G(I)+A(I,J)*A(J,K)
      D=0.
      DO 40 J=1,M
   40 D=D+A(K,J)*G(J)
      E=A(K,K)-D
      A(K,K)=1./E
      DO 45 I=1,M
   45 A(I,K)=-G(I)*A(K,K)
      DO 50 I=1,M
      H(I)=0.
      DO 50 J=1,M
   50 H(I)=H(I)+A(K,J)*A(J,I)
      DO 110 J=1,M
  110 A(K,J)=-H(J)*A(K,K)
      DO 55 I=1,M
      DO 55 J=1,M
   55 A(I,J)=A(I,J)-G(I)*A(K,J)
   60 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
SUBROUTINE MX1(A,B,C,F)

SUBROTINA QUE DEFINE O OPERADOR PARA CALCULO DO MOMENTO MX1

DIMENSION T(25,25),Q(250)
COMMON ALFA,M,N,U,Q,D,X,XNI,T
R=-D/(SIN(ALFA)**3*2.*X**2*U**2)
A=X*COS(ALFA)*R
B=2.*(1.-(1.-XNI)*SIN(ALFA)**2)*R
C=2.*X**2*R
F=4.*(1.-XNI)*SIN(ALFA)**2-(1.+X**2))*R
RETURN
END
SUBROUTINE MY1(A,B,C,F)

SUBROTINA QUE DEFINE O OPERADOR PARA CALCULO DO MOMENTO MY1

DIMENSION T(25,25),Q(250)
COMMON ALFA,M,N,U,Q,D,X,XNI,T
R=-D/(2.*SIN(ALFA)**3*X**2*U**2)
A=X*COS(ALFA)*R
B=2.*R
C=2.*(X**2-(1.-XNI)*X**2*SIN(ALFA)**2)*R
F=4.*(1.-XNI)*X**2*SIN(ALFA)**2-(1.+X**2))*R
RETURN
END
SUBROUTINE MXY(A,B,C,F)

SUBROTINA QUE DEFINE O OPERADOR PARA CALCULO DO MOMENTO MXY

DIMENSION T(25,25),Q(250)
COMMON ALFA,M,N,U,Q,D,X,XNI,T
R=-D/(4.*SIN(ALFA)**3*U**2*X**2)
A=X*(2.*COS(ALFA)**2+SIN(ALFA)**2*(1.-XNI))*R
B=4.*COS(ALFA)*R
C=4.*X**2*COS(ALFA)*R
F=-8.*(1.+X**2)*COS(ALFA)*R
RETURN
END
```

```
      SUBROUTINE MOMEN(A,B,C,F,XM)

      ESTA SUBROTINA CALCULA OS MOMENTOS MX,MY OU MXY,
      EM RELACAO AOS EIXOS OBLIQUOS.

      DIMENSION XM(250),W(250),T(25,25)
      COMMON ALFA,M,N,U,W,D,X,XNI,T
      IC=0
      I=2
      L=1
      T(1,1)=2.*B
   10 DO 15 J=2,M
      L=L+1
      K1=(M+1)*(I-1)+J
   15 XM(L)=T(1,1)*W(K1)
      I=N
      L=((M+1)*N)+1
      IC=IC+1
      GO TO(10,20),IC
   20 IC=0
      J=2
      L=1
      T(1,1)=2.*C
   30 DO 35 I=2,N
      K1=(M+1)*(I-1)+J
      L=L+M+1
   35 XM(L)=T(1,1)*W(K1)
      J=M
      L=M+1
      IC=IC+1
      GO TO(30,40),IC
   40 T(1,1)=-A
      T(1,2)=B
      T(1,3)=A
      T(2,1)=C
      T(2,2)=F
      T(2,3)=C
      T(3,1)=A
      T(3,2)=B
      T(3,3)=-A
      DO 50 I=2,N
      DO 50 J=2,M
      L=(M+1)*(I-1)+J
      XM(L)=0.
      I2=I-1
```

```
      I3=I+1
      J2=J-1
      J3=J+1
      IC=0
      DO 55 I1=I2,I3
      IC=IC+1
      I2=0
      DO 55 J1=J2,J3
      K1=(M+1)*(I1-1)+J1
      I2=I2+1
   55 XM(L)=XM(L)+T(IC,I2)*W(K1)
   50 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE PRINC(XMU,XMV,XMUV)

      ESTA SUBROTINA CALCULA OS MOMENTOS FLETORES MX E MY,
      E AINDA O MOMENTO DE TORCAO MXY.

      DIMENSION XMU(250),XMV(250),XMUV(250),T(25,25),Q(250)
      COMMON ALFA,M,N,U,Q,D,X,XNI,T
      IC=0
      L=1
      I1=1
      I2=1
      J1=2
      J2=M
      WRITE(5,367)
      WRITE(5,364)
    5 WRITE(5,8)L,Q(L)
      IC=IC+1
      DO 90 I=I1,I2
      DO 90 J=J1,J2
      L=(M+1)*(I-1)+J
      XMX=XMU(L)/SIN(ALFA)+XMV(L)*COS(ALFA)**2/SIN(ALFA)
     1-2.*XMUV(L)*COS(ALFA)/SIN(ALFA)
-----------------------------------------------------------------------
      XMY=XMV(L)*SIN(ALFA)

      XMXY=XMUV(L)-XMV(L)*COS(ALFA)
      WRITE(5,365)L,Q(L),XMX,XMY,XMXY
   90 CONTINUE
      GO TO(51,52,53),IC
   51 L=M+1
      I1=2
      I2=N
      J1=1
      J2=M+1
      GO TO 5
   52 L=J2*N+1
      I1=N+1
      I2=I1
      J1=2
      J2=M
      GO TO 5
   53 L=(M+1)*(N+1)
      WRITE(5,8)L,Q(L)
    8 FORMAT(/,T20,I3,T30,F10.8,T52,'----',T74,'----',T95,'----',
     1//)
```

```
364 FORMAT(T21,'NO',8X,'DEFLEXAO',8X,'MOMENTO FLETOR',8X,
   1'MOMENTO FLETOR',5X,'MOMENTO DE TORCAO',/,T34,'W',T53,'MX',
   2T75,'MY',T98,'MXY')
365 FORMAT(T20,I3,T30,F10.8,T49,F10.8,T71,F10.8,T92,F10.8,/)
367 FORMAT(///,T11,98('-'),/,T45,'DEFLEXOES E ESFORCOS NA PLA'
   1'CA',/,T11,98('-'),/)
    RETURN
    END
```

```
  PROGRAMA PARA CALCULO DE PLACAS ESCONSAS ,
  ENGASTADAS NOS QUATRO BORDOS,PELO METODO
  DAS DIFERENCAS FINITAS.

  DIMENSION S(250,250),W(250),Q(250),XMU(250),
 *XMV(250),XMUV(250),T(25,25)
  COMMON ALFA,M,N,U,Q,D,X,XNI,T

  LEITURA DO NUMERO DE PLACAS A ANALISAR.
  IMPRESSAO DOS TITULOS GERAIS DO PROGRAMA

  WRITE(5,11)
  READ(5,5)NP
  WRITE(5,6)NP
  NUN=0
1 NUN=NUN+1
  WRITE(5,7)NUN

  CARACTERISTICAS DA PLACA.

  READ(5,10)M,N,U,V,ALFA,ESP,XNI,E
  D=E*ESP**3/(12.*(1.-XNI**2))
  WRITE(5,15)
  WRITE(5,16)U,V,ESP,ALFA,M,N,XNI,E,D
  PI=3.14159
  ALFA=PI*ALFA/180.

  CARACTERIZACAO DO OPERADOR NABLA QUATRO .

  U=U/M
  V=V/N
  X=1./SIN(ALFA)**4
  D9=COS(ALFA)
  D1=D9/(U*V**3)*X
  D2=1./V**4*X
  D3=D9/(U**3*V)*X
  D4=(1.+2.*D9**2)/(U*V)**2*X
  D5=1./U**4*X
  D6=-4.*(D4+D2)
  D7=-4.*(D5+D4)
  D8=6.*(D5+D2)+8.*D4
  D9=2.*(D3+D1)
  X=V/U
  K=(M+1)*(N+1)
  DO 20 I=1,K
```

```
      DO 20 J=1,K
   20 S(I,J)=0.
      IF(M-2)21,22,22
   21 S(1,1)=8.*(D5+D2+D4)
      GO TO 81
   22 K=2
      IC=0
      L=1
      J=K
   25 I=K
      L1=1
   30 T(1,1)=D8+D5+D2
      T(1,2)=D7+D1*L*L1
      T(1,3)=D5
      T(2,1)=D6+D3*L*L1
      T(2,2)=D9*L*L1+2.*D4
      T(2,3)=-D3*L*L1
      T(3,1)=D2
      T(3,2)=-D1*L*L1
      T(3,3)=0.
      IC=IC+1
      K1=(M+1)*(I-1)+J
      I1=K1
      DO 34 I2=1,3
      S(K1,I1)=T(I2,1)
      S(K1,I1+L1)=T(I2,2)
      S(K1,I1+2*L1)=T(I2,3)
   34 I1=I1+(M+1)*L
      GO TO (31,32,31,35),IC
   31 J=M
      L1=-1
      GO TO 30
   32 IF(N-2)36,33,33
   36 IF(M-2)66,66,38
   33 J=K
      K=N
      L=-1
      GO TO 25
   38 K=M-1
      T(1,1)=D5
      T(1,2)=D7
      T(1,3)=D8
      T(1,4)=D7
      T(1,5)=D5
      DO 39 J=3,K
```

```
      K1=(M+1)*(I-1)+J
      I2=K1-2
      DO 39 I1=1,5
      S(K1,I2)=T(1,I1)
   39 I2=I2+1
      GO TO 66
   35 IF(N-3)42,43,42
   43 IF(M-3)66,66,49
   49 IC=0
      K=M-1
   47 IC=IC+1
      T(1,1)=D5
      T(1,2)=D7-D1*L1
      T(1,3)=D8+D2
      T(1,4)=D7+D1*L1
      T(1,5)=D5
      T(2,1)=D3*L1
      T(2,2)=-D9*L1+2.*D4
      T(2,3)=D6
      T(2,4)=D9*L1+2.*D4
      T(2,5)=-D3*L1
      T(3,1)=0.
      T(3,2)=D1*L1
      T(3,3)=D2
      T(3,4)=-D1*L1
      T(3,5)=0.
      DO 44 J=3,K
      K1=(M+1)*(I-1)+J
      I1=K1
      DO 44 I2=1,3
      S(K1,I1-2)=T(I2,1)
      S(K1,I1-1)=T(I2,2)
      S(K1,I1)=T(I2,3)
      S(K1,I1+1)=T(I2,4)
      S(K1,I1+2)=T(I2,5)
   44 I1=I1+(M+1)*L1
      L1=1
      I=2
      GO TO(47,66),IC
   42 IC=0
      K=M-1
   37 IC=IC+1
      DO 40 J=3,K
      T(1,1)=D5
      T(1,2)=D7-D1*L1
```

```
      T(1,3)=D8+D2
      T(1,4)=D7+D1*L1
      T(1,5)=D5
      T(2,1)=D3*L1
      T(2,2)=-D9*L1+2.*D4
      T(2,3)=D6
      T(2,4)=D9*L1+2.*D4
      T(2,5)=-D3*L1
      T(3,1)=0.
      T(3,2)=D1*L1
      T(3,3)=D2
      T(3,4)=-D1*L1
      T(3,5)=0.
      K1=(M+1)*(I-1)+J
      I1=K1
      DO 40 I2=1,3
      S(K1,I1-2)=T(I2,1)
      S(K1,I1-1)=T(I2,2)
      S(K1,I1)=T(I2,3)
      S(K1,I1+1)=T(I2,4)
      S(K1,I1+2)=T(I2,5)
   40 I1=I1+(M+1)*L1
      L1=1
      I=2
      GO TO (37,41),IC
   41 IC=0
      J=M
      K=N-1
   50 IC=IC+1
      DO 55 I=3,K
      T(1,1)=D2
      T(1,2)=D1*L
      T(1,3)=0.
      T(2,1)=D6-D3*L
      T(2,2)=-D9*L+2.*D4
      T(2,3)=D3*L
      T(3,1)=D8+D5
      T(3,2)=D7
      T(3,3)=D5
      T(4,1)=D6+D3*L
      T(4,2)=D9*L+2.*D4
      T(4,3)=-D3*L
      T(5,1)=D2
      T(5,2)=-D1*L
      T(5,3)=0.
```

```
      K1=(M+1)*(I-1)+J
      I2=K1
      L1=M+1
      DO 55 I1=1,3
      S(K1,I2-2*L1)=T(1,I1)
      S(K1,I2-L1)=T(2,I1)
      S(K1,I2)=T(3,I1)
      S(K1,I2+L1)=T(4,I1)
      S(K1,I2+2*L1)=T(5,I1)
   55 I2=I2+L
      L=1
      J=2
      GO TO(50,60),IC
   60 IC=M-1
      T(1,1)=0.
      T(1,2)=-D1
      T(1,3)=D2
      T(1,4)=D1
      T(1,5)=0.
      T(2,1)=-D3
      T(2,2)=D9+2.*D4
      T(2,3)=D6
      T(2,4)=-D9+2.*D4
      T(2,5)=D3
      T(3,1)=D5
      T(3,2)=D7
      T(3,3)=D8
      T(3,4)=D7
      T(3,5)=D5
      T(4,1)=D3
      T(4,2)=-D9+2.*D4
      T(4,3)=D6
      T(4,4)=D9+2.*D4
      T(4,5)=-D3
      T(5,1)=0.
      T(5,2)=D1
      T(5,3)=D2
      T(5,4)=-D1
      T(5,5)=0.
      DO 65 I=3,K
      DO 65 J=3,IC
      K1=(M+1)*(I-1)+J
      L=M+1
      I1=K1-2
      DO 64 L1=1,5
```

```
      S(K1,T1-2*L)=T(L1,1)
      S(K1,T1-L)=T(L1,2)
      S(K1,T1)=T(L1,3)
      S(K1,T1+L)=T(L1,4)
      S(K1,T1+2*L)=T(L1,5)
   64 I1=I1+1
   65 CONTINUE

      REORDENACAO DA MATRIZ S
      CONSIDERACAO DE FLECHA NULA NO CONTORNO

   66 IC =M-1
      K=N-1
      K1=IC*K
      L=M+3
      J1=1
      DO 70 I1=1,K
      DO 71 I5=1,IC
      I=1
      J=M+3
      DO 69 I2=1,K
      DO 68 L1=1,IC
      S(J1,I)=S(L,J)
      I=I+1
   68 J=J+1
   69 J=J+2
      J1=J1+1
   71 L=L+1
   70 L=L+2

      INTRODUCAO DO SISTEMA DE CARGAS.

   81 DO 90 I=1,K1
   90 Q(I)=0.
      READ(9,91)NC
      IF(NC-1)82,82,83
   82 WRITE(5,303)NC
      GO TO 85
   83 WRITE(5,301)NC
   85 DO 107 L2=1,NC
      WRITE(5,302)L2
      READ(9,13)
      WRITE(5,13)
      READ(9,89)ITIPO
      IF(ITIPO-0)93,94,95
```

```
 93 DO 100 I2=1,K1
    READ(8,96)QU
100 Q(I2)=QU/D
    GO TO 121
 94 READ(8,97)QU
    QU=QU/D
    DO 98 I=1,K1
 98 Q(I)=QU
    GO TO 121
 95 DO 99 K=1,ITIPO
    READ(8,105)X1,L
    DO 102 I=1,L
    READ(8,103)L1
102 Q(L1)=X1/(U*V*SIN(ALFA)*D)
 99 CONTINUE

    RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES.

121 CALL INV(S,K1)
    DO 110 I=1,K1
    W(I)=0.
    DO 110 J=1,K1
110 W(I)=W(I)+S(I,J)*Q(J)
    J1=M+2
    J2=M+1
    I1=N-1
    I2=M-1
    L=0
    J=J1
    K1=(M+1)*(N+1)
    DO 116 I=1,K1
116 Q(I)=0.
    DO 115 I=1,I1
    DO 114 IC=1,I2
    L=L+1
    J=J+1
114 Q(J)=W(L)
115 J=J+2
    CALCULO DOS MOMENTOS FLETORES E TORSOR.

112 CALL MX1(A,B1,C,F)
    CALL MOMEN(A,B1,C,F,XMU)
    CALL MY1(A,B1,C,F)
    CALL MOMEN(A,B1,C,F,XMV)
    CALL MXY(A,B1,C,F)
```

```
      CALL MOMEN(A,B1,C,F,XMUV)
      CALL PRINC(XMU,XMV,XMUV)
  101 CONTINUE
      IF(NP-NUN)150,150,1
    5 FORMAT(I5)
    6 FORMAT(//////,T45,'UNIDADES USADAS NESTE PROGRAMA',//,T42,
     1'COMPRIMENTO... M',10X,'FORCA...TF',//,T45,'NUMERO DE PLAC'
     2'AS A ANALISAR-',I2,///)
    7 FORMAT(T52,15('-'),/,T52,'I',T66,'I',/,T52,'I',2X,'PLACA -'
     1,2X,I2,T66,'I',/,T52,'I',T66,'I',/,T52,15('-'),////)
   10 FORMAT(2I5,5F8.0,F12.0)
   11 FORMAT(1H1,T11,98('*'),/,T11,98('*'),/,T11,'**',T107,'**',
     1/,T11,'**',T107,'**',/,T11,'**',T36,'COPPE/UFRJ  -  PROGRA'
     2'MA DE ENGENHARIA CIVIL/1976',T107,'**',/,T11,'**',T107,'*'
     3'*',/,T11,'**',T107,'**',/,T11,'**',T24,'PROGRAMA PARA ANA'
     4'LISE DE PLACAS ESCONSAS PELO METODO DAS DIFERENCAS FINITA'
     5'S',T107,'**',/,T11,'**',T107,'**',/,T11,'**',T107,'**',/,
     6T11,98('*'),/,T11,98('*'))
   13 FORMAT(25X,'                                                  ')
   15 FORMAT(////,T11,98('-'),//,T45,'DADOS GERAIS SOBRE A ESTRU'
     1'TURA',//,T11,98('-'))
   16 FORMAT(///,T28,'DIMENSOES DA PLACA',31('.'),F5.2,2X,'X',2X,
     1F5.2,//,T28,'ESPESSURA DA PLACA',31('.'),10X,F5.2,//,T28,
     2'ANGULO ENTRE OS EIXOS X1 E Y1',20('.'),F9.2,' GRAUS',//,
     3T28,'NUMERO DE DIVISOES NA DIRECAO X1',17('.'),13X,I2,//,
     4T28,'NUMERO DE DIVISOES NA DIRECAO Y1',17('.'),13X,I2,//,
     5T28,'COEFICIENTE DE POISSON ADOTADO',19('.'),T88,F4.2,//,
     6T28,'MODULO DE ELASTICIDADE ADOTADO',19('.'),T82,F10.1,//,
     7T28,'RIGIDEZ DA PLACA',33('.'),5X,F10.2,//)
   89 FORMAT (I5)
   91 FORMAT(I5)
   96 FORMAT(F10.0)
   97 FORMAT(F10.0)
  103 FORMAT(I5)
  105 FORMAT(F10.0,I5)
  301 FORMAT(///,T31,'FORAM CONSIDERADOS',I3,'CARREGAMENTOS ABAI'
     2'XO DISCRIMINADOS',//)
  302 FORMAT(T50,20('-'),/,T50,'I',T69,'I',/,T50,'I',1X,'CARREGA'
     2'MENTO -',I2,1X,'I',/,T50,'I',T69,'I',/,T50,20('-'),//)
  303 FORMAT(///,T33,'FOI CONSIDERADO',I3,'CARREGAMENTO ABAIXO '
     2'DISCRIMINADO',//)
  150 CALL EXIT
      END
```

2. LISTAGEM DO PROGRAMA EQUIVALÊNCIA.

```
      SUBROUTINE SYMSO (NN,MM)


      DIMENSION C(50)
      COMMON /AA/ L,IX,IY,CX,CY
      COMMON /BB/ A(1090,50),B(1090)

      N=0
  100 N=N+1
      B(N)=B(N)/A(N,1)
      IF(N-NN)150,300,300
  150 DO 200 K=2,MM
      C(K)=A(N,K)
  200 A(N,K)=A(N,K)/A(N,1)
      DO 260 L1=2,MM
      I=N+L1-1
      IF(NN-I)260,240,240
  240 J=0
      DO 250 K=L1,MM
      J=J+1
  250 A(I,J)=A(I,J)-C(L1)*A(N,K)
      B(I)=B(I)-C(L1)*B(N)
  260 CONTINUE
      GO TO 100
  300 N=N-1
      IF(N)350,500,350
  350 DO 400 K=2,MM
      L1=N+K-1
      IF(NN-L1)400,370,370
  370 B(N)=B(N)-A(N,K)*B(L1)
  400 CONTINUE
      GO TO 300
  500 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE RIGRE (I,E,G,SMR,SMD)
      REAL L(1010),IX(1010),IY(1010)
      DIMENSION CX(1010),CY(1010),SMR(6,6),SMD(6,6)
      COMMON /AA/ L,IX,IY,CX,CY
      COMMON /BB/ S(1090,50),AC(1090)

      SUBROTINA PARA GERACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS
      RETOS COM SECAO CONSTANTE DE GRELHA.

      CALCULO DIRETO DA MATRIZ SMR PARA MAIOR ECONOMIA DE
      MEMORIA.

      ZERAGEM PREVIA DA MATRIZ SMR

      DO 10 J=1,6
      DO 10 K=1,6
   10 SMR(J,K)=0.

      CALCULO DOS TERMOS DA DIAGONAL PRINCIPAL E DE TODOS OS TERMOS NAO
      NULOS ABAIXO DESTA .

      SMR(1,1)=G*IX(I)/L(I)
      SMR(2,2)=4.*E*IY(I)/L(I)
      SMR(3,2)=-6.*E*IY(I)/L(I)**2
      SMR(3,3)=12.*E*IY(I)/L(I)**3
      SMR(4,1)=-SMR(1,1)
      SMR(4,4)=SMR(1,1)
      SMR(5,2)=SMR(2,2)/2.
      SMR(5,3)=SMR(3,2)
      SMR(5,5)=SMR(2,2)
      SMR(6,2)=-SMR(3,2)
      SMR(6,3)=-SMR(3,3)
      SMR(6,5)=-SMR(3,2)
      SMR(6,6)=SMR(3,3)

      CONSIDERACAO DE SIMETRIA

      DO 20 J=1,6
      DO 20 K=1,J
   20 SMR(K,J)=SMR(J,K)

      POSMULTIPLICACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO
      (ARMAZENADA NA AREA DE SMR)PELA MATRIZ DE ROTACAO,
      PARA GERAR SMR.
```

```
PREMULTIPLICACAO DA MATRIZ SMR PELA TRANSPOSTA DA MATRIZ
DE ROTACAO , PARA GERAR SMD.


DE ROTACAO , PARA GERAR SMD.
PREMULTIPLICACAO DA MATRIZ SMR PELA TRANSPOSTA DA MATRIZ

      DO 40 K=1,2
DE ROTACAO , PARA GERAR SMD.

      DO 40 K=1,2

      DO 40 J=1,6
      A=SMR(J,3*K-2)
      SMR(J,3*K-2)=SMR(J,3*K-2)*CX(I)-SMR(J,3*K-1)*CY(I)
   40 SMR(J,3*K-1)=A*CY(I)+SMR(J,3*K-1)*CX(I)
      DO 30 K=1,2
      DO 30 J=1,6
      SMD(3*K-2,J)=SMR(3*K-2,J)*CX(I)-SMR(3*K-1,J)*CY(I)
      SMD(3*K-1,J)=SMR(3*K-2,J)*CY(I)+SMR(3*K-1,J)*CX(I)
   30 SMD(3*K,J)=SMR(3*K,J)
      RETURN
      END
```

```
COPPE/UFRJ  PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL.
SONIA MORAES RIBEIRO
TESE DE MESTRADO.
PROGRAMA PARA ANALISE DE PLACAS ESCONSAS.
METODO DAS EQUIVALENCIAS.

INICIO DO PROGRAMA.

REAL I(1010),IX(1010),IY(1010),L1
INTEGER RL(1090),CRL(1090),ROW,COL,UBW
DIMENSION X(370),Y(370),JJ(1010),JK(1010),CX(1010),CY(1010)
1,A(1090),AR(20),AM(6),SMR(6,6),SMD(6,6)
COMMON /AA/ L,IX,IY,CX,CY
COMMON /BB/ S(1090,50),AC(1090)

IMPRESSAO DOS TITULOS GERAIS DO PROGRAMA.
WRITE(5,11)

LEITURA DOS DADOS GERAIS SOBRE A ESTRUTURA.
NP=0
1 READ(5,10)XL,YL,H,I1,I2,ALFA,XNI,E,G
IF(XL)1000,1000,2
NP=NP+1
WRITE(5,7)NP


XL  Y1 - DIMENSOES DA PLACA NAS DIRECOES X1 E Y1
I1  I2 - NUMERO DE DIVISOES NAS DIRECOES X1 E Y1,RESPECTIVAMENTE.
ALFA   - ANGULO DE ESCONSIDADE DA PLACA.
FI     - ANGULO FORMADO ENTRE A DIAGONAL MENOR DA PLACA
         E O EIXO X.
E      - MODULO DE ELASTICIDADE.
G      - MODULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL.
XNI    - COEFICIENTE DE POISSON
H      - ESPESSURA DA PLACA.

INDICACAO DAS UNIDADES ADOTADAS.
2 WRITE(5,5)


CALCULO DA RIGIDEZ DA PLACA E DA CONSTANTE DE LAME

R=(E*H**3)/(12.*(1.-XNI**2))

OBSERVACAO - A NUMERACAO DOS MEMBROS E SEMPRE DA ESQUERDA
```

```
PARA A DIREITA E DE BAIXO PARA CIMA.

GERACAO DAS COORDENADAS DOS NOS.
PI=3.14159
MI=I1+1
NI=I2+1
DX=XL/I1
DY=YL/I2
NJ=MI*NI
M=3*I1*I2+I1+I2
ND=3*NJ
WRITE(5,15)
WRITE(5,16)XL,YL,H,ALFA,I1,I2,XNI,E,G,R
ALFA=PI*ALFA/180.
K=0
X1=0.
Y1=0.
DO 9 J=1,NI
DO 8 I=1,MI
K=K+1
X(K)=X1
Y(K)=Y1
8 X1=X1+DX
X1=J*COS(ALFA)*DY
9 Y1=J*SIN(ALFA)*DY
FI=ATAN(Y(I1+2)/(ABS(DX- X(I1+2))))
TETA=PI-(ALFA+FI)

CALCULO DOS COMPRIMENTOS E DOS COSSENOS DIRETORES.

K=I1*MI
DO 42 I=1,K
L(I)=DX
CX(I)=1.
42 CY(I)=0.
IC=K+MI*I2
K=K+1
DO 43 I=K,IC
L(I)=DY
CX(I)=COS(ALFA)
43 CY(I)=SIN(ALFA)
K=IC+1
IC=IC+I1*I2
L1=SQRT((DX-X(I1+2))**2+Y(I1+2)**2)
DO 44 I=K,IC
```

```
      L(I)=I1
      CX(I)=-COS(FI)
   44 CY(I)=SIN(FI)

       INCIDNECIA DOS MEMBROS E PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS.

      XIX=(COS(PI-(ALFA+FI))*DY*R)/(E*SIN(FI))
      XIY=(COS(PI-(ALFA+FI))*DY*R)/(SIN(FI)*G)
      IC=1
      NE=0
      DO 51 J=1,NI
      DO 50 I=1,I1
      NE=NE+1
      JJ(NE)=IC
      JK(NE)=JJ(NE)+1
      IC=JK(NE)
      IX(NE)=XIY
   50 IY(NE)=XIX
   51 IC=IC+1

      XIX=(COS(FI)*DX*R)/(E*SIN(PI-(ALFA+FI)))
      XIY=(COS(FI)*DX*R)/(G*SIN(PI-(ALFA+FI)))
      NE=NE+1
      DO 38 J=1,MI
      JJ(NE)=J
      DO 39 I=1,I2
      JK(NE)=JJ(NE)+I1+1
      IX(NE)=XIY
      IY(NE)=XIX
      NE=NE+1
   39 JJ(NE)=JK(NE-1)
   38 CONTINUE

      XIX=(COS(ALFA)*DX*DY*SIN(ALFA)*R)/(SIN(FI)*SIN(PI-(ALFA+FI)
     1)*E*L)
      XIY=(COS(ALFA)*DX*DY*SIN(ALFA)*R)/(SIN(FI)*SIN(PI-(ALFA+FI)
     1)*G*L)
      JJ(NE)=2
      JK(NE)=I1+2
      DO 59 J=1,I2
      DO 58 I=1,I1
      IX(NE)=XIY
      IY(NE)=XIX
      NE=NE+1
      JJ(NE)=JJ(NE-1)+1
```

```
58 JK(NE)=JK(NE-1)+1
   JJ(NE)=JJ(NE)+1
59 JK(NE)=JK(NE)+1

   ZERAGEM DAS LISTAS DE RESTRICOES E DE RESTRICOES ACUMULADAS

   DO 55 K=1,ND
   RL(K)=0
55 CRL(K)=0


   GERACAO DAS LISTAS DE RESTRICOES E DE RESTRICOES ACUMULADAS

   NE=1
   IC=0
61 DO 65 I=NE,MI
   RL(I*3-2)=1.
   RL(I*3-1)=1.
65 RL(I*3)=1.
   IC=IC+1
   GO TO(60,63),IC
60 NE=MI+I2+1
   MI=NJ
   GO TO 61
63 J=I1+3
   K=(I1+I)*2
   IC=I2-1
   DO 66 I=1,IC
   RL(3*J-2)=1.
   RL(3*J-1)=1.
   RL(3*J)=1.
   RL(3*K-2)=1.
   RL(3*K-1)=1.
   RL(3*K)=1.
   J=K+1
66 K=J+I1
   CRL(1)=RL(1)
   DO 67 K=2,ND
67 CRL(K)=CRL(K-1)+RL(K)

   CALCULO DO GRAU DE INDETERMINACAO CINEMATICA DA ESTRUTURA .

   NR=CRL(ND)
   N=ND-NR
```

```
C     ZERAGEM INICIAL DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO INDICE DE CONTROLE DA
C     LARGURA DE BANDA (UBW) .
C
      DO 70 I=1,N
      DO 70 J=1,50.
   70 S(I,J)=0.
      UBW=0
      COL=0
C
C     TECNICA DA REORDENACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ 'OVER-ALL' .
C
      DO 190 I=1,M
C
C     NUMERACAO INICIAL (ANTES DA REORDENACAO) ,NA ESTRUTURA , DOS SEIS
C     DESLOCAMENTOS DAS EXTREMIDADES DO ELEMENTO DE INDICE I .
C
      J1A=3*JJ(I)-2
      J2A=3*JJ(I)-1
      J3A=3*JJ(I)
      K1A=3*JK(I)-2
      K2A=3*JK(I)-1
      K3A=3*JK(I)
C-----------------------------------------------------------------------
C     CHAMADA DA SUBROTINA PARA GERAR SMR E SMD .
C
      CALL DIGRE (I,E,G,SMR,SMD)
C
C     ARMAZENAMENTO NO DISCO DA MATRIZ SMR E DA NUMERACAO ORIGINAL DOS
C     DESLOCAMENTOS DOS NOS .
C
      ID=I
      WRITE(1'ID)SMR,J1A,J2A,J3A,K1A,K2A,K3A
C
C     MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA,
C     ARMAZENADA A SEMI-BANDA SUPERIOR COMO MATRIZ RETANGULAR.
C     ESTA OPERACAO SERA CONSTITUIDA DE TRES FASES
C     ESPALHAMENTO DAS LINHAS,REORDENACAO,DECALAGEM PARA A
C     ESQUERDA DOS ELEMENTOS DA SEMI BANDA SUPERIOR DA MATRIZ.
C
      IF(RL'J1A))1777,2000,2350
 1777 WRITE'5,1778)
      GO TO 1000
 2000 ROW=J'A-CRL(J1A)
      COL=J'A-CRL(J1A)-ROW+1
      S(ROW.COL)=S(ROW,COL)+SMD(1,1)
```

```
      IF(RL(J2A))1777,2050,2070
 2050 COL=J2A-CRL(J2A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(1,2)
 2070 IF(RL(J3A))1777,2100,2120
 2100 COL=J3A-CRL(J3A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(1,3)
 2120 IF(RL(K1A))1777,2150,2170
 2150 COL=K1A-CRL(K1A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(1,4)
 2170 IF(RL(K2A))1777,2200,2220
 2200 COL=K2A-CRL(K2A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(1,5)
 2220 IF(RL(K3A))1777,2250,2270
 2250 COL=K3A-CRL(K3A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(1,6)
 2270 IF(COL-UBW)2350,2350,2300
 2300 UBW=COL
 2350 IF(RL(J2A))1777,2400,2700
 2400 ROW=J2A-CRL(J2A)
      COL=J2A-CRL(J2A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(2,2)
      IF(RL(J3A))1777,2450,2470
 2450 COL=J3A-CRL(J3A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(2,3)
 2470 IF(RL(K1A))1777,2500,2550
 2500 COL=K1A-CRL(K1A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(2,4)
 2550 IF(RL(K2A))1777,2570,2600
 2570 COL=K2A-CRL(K2A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(2,5)
 2600 IF(RL(K3A))1777,2620,2650
 2620 COL=K3A-CRL(K3A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(2,6)
 2650 IF(COL-UBW)2700,2700,2670
 2670 UBW=COL
 2700 IF(RL(J3A))1777,2720,2920
 2720 ROW=J3A-CRL(J3A)
      COL=J3A-CRL(J3A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(3,3)
      IF(RL(K1A))1777,2750,2770
 2750 COL=K1A-CRL(K1A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(3,4)
 2770 IF(RL(K2A))1777,2800,2820
 2800 COL=K2A-CRL(K2A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(3,5)
```

```
 2820 IF(RL(K3A))1777,2850,2870
 2850 COL=K2A-CRL(K3A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(3,6)
 2870 IF(COL-UBW)2920,2920,2900
 2900 UBW=COL
 2920 IF(RL(K1A))1777,2950,3100
 2950 ROW=K1A-CRL(K1A)
      COL=K1A-CRL(K1A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(4,4)
      IF(RL(K2A))1777,2970,3000
 2970 COL=K2A-CRL(K2A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(4,5)
 3000 IF(RL(K3A))1777,3020,3050
 3020 COL=K2A-CRL(K3A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(4,6)
 3050 IF(COL-UBW)3100,3100,3080
 3080 UBW=COL
 3100 IF(RL(K2A))1777,3120,3210
 3120 ROW=K2A-CRL(K2A)
      COL=K2A-CRL(K2A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(5,5)
      IF(RL(K3A))1777,3150,3170
 3150 COL=K2A-CRL(K3A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(5,6)
 3170 IF(COL-UBW)3210,3210,3190
 3190 UBW=COL
 3210 IF(RL(K3A))1777,3240,3300
 3240 ROW=K2A-CRL(K3A)
      COL=K2A-CRL(K3A)-ROW+1
      S(ROW,COL)=S(ROW,COL)+SMD(6,6)
      IF(COL-UBW)3300,3300,3260
 3260 UBW=COL
 3300 IF(UBW-50)199,199,126
  126 WRITE(5,127)
      GO TO 1000
  199 CONTINUE
C
C
C     SEGUNDA PARTE DO PROGRAMA - INTRODUCAO DOS VETORES DE CARGA
C     PARA CADA UM DOS CARREGAMENTOS CONSIDERADOS E RESOLUCAO DO
C     SISTEMA DE EQUACOES   OBTENCAO DOS ESFORCOS NAS BARRAS
C
C     LEITURA E IMPRESSAO DO NUMERO DE CARREGAMENTOS CONSIDERADOS.
C
      READ(8,300)NLS
```

```
      NLS1=NLS-1
      IF(NLS1)692,693,692
692   WRITE(5,301)NLS
      GO TO 6
693   WRITE(5,303)NLS
  6   NL=0
      GO TO 6

      IMPRESSAO DO NUMERO DE CARREGAMENTO BEM COMO DE SUA IDENTIFICACAO.
      (RESERVADO UM CARTAO COM 56 ESPACOS PARA O TITULO DO CARREGAMENTO)

602   NL=NL+1
      IF(NL-NLS)600,600,1
600   WRITE(5,302)NL
      READ(8,13)
      WRITE(5,13)

      LEITURA E IMPRESSAO DO NUMERO DE NOS CARREGADOS.

      NLJ   - NUMERO DE NOS EM QUE HA PELO MENOS UMA CARGA
      ITIPO- VARIAVEL QUE ESPECIFICA O TIPO DE CARREGAMENTO

      READ(8,304)NLJ,ITIPO
      DO 306 J=1,ND
306   A(J)=0.

      LEITURA E IMPRESSAO DAS CARGAS DIRETAMENTE APLICADAS AOS NOS,

      IF(ITIPO)308,308,309

      IF(ITIPO)308,308,309
308   WRITE(5,310)
      REORDENACAO DO VETOR DE CARGAS.
      READ(8,312)K,A(3*K-2),A(3*K-1),A(3*K)
311   WRITE(5,313)K,A(3*K-2),A(3*K-1),A(3*K)
      GO TO 353

      GERACAO DO VETOR DE CARGAS PARA O CASO DE CARREGAMENTO UNIFORME.

309   READ(8,315)Q
      Q=DX*DY*SIN(ALFA)*Q
      K=I1
      L1=I2-1
      K1=I1-1
      DO 317 J=1,L1
```

```
      K=K+2
      DO 317 IC=1,K1
      K=K+1
  317 A(3*K)=Q

  353 DO 350 J=1,ND
      IF(RL(J))351,351,352
  351 K=J-CPL(J)
      GO TO 350
  352 K=N+CPL(J)
  350 AC(K)=A(J)

      CHAMADA DA SUBROTINA RESOLVEDORA DO SISTEMA DE  EQUACOES,
      PELO METODO DE ELIMINACAO DE GAUSS.

      CALL SYMSO(N,UBW)

      RETORNO DO VETOR DOS DESLOCAMENTOS A NUMERACAO ORIGINAL,

      J=N+1
      DO 360 JE=1,ND
      I=ND-JE+1
      IF(RL(I))361,361,362
  361 J=J-1
      AC(I)=AC(J)
      GO TO 360
  362 AC(I)=0.
  360 CONTINUE


      CALCULO DAS ACOES NAS EXTREMIDADES DOS MEMBROS.

      DO 370 I=1,M
      ID=I
      READ(11'ID)SMR,J1A,J2A,J3A,K1A,K2A,K3A
      DO 371 J=1,6
      AM(J)=SMR(J,1)*AC(J1A)+SMR(J,2)*AC(J2A)+SMR(J,3)*AC(J3A)
      AM(J)=AM(J)+SMR(J,4)*AC(K1A)+SMR(J,5)*AC(K2A)+SMR(J,6)*AC(K3A)
  371 CONTINUE
      IY(I)=(-AM(2)+AM(5))/2.
      IX(I)=(-AM(1)+AM(4))/2.

  370 CONTINUE
      K=0
      DO 500 IC=1,I2
```

```
    1,2X,I7,T66,'I',/,T52,'I',T66,'I',/,T52,15('-'),////)
 10 FORMAT(3F10.3,2I5,2F5.2,2F10.0)
 11 FORMAT(1H1,T11,98('*'),/,T11,98('*'),/,T11,'**',T107,'**',
    1/,T11,'**',T107,'**',/,T11,'**',T36,'COPPE/UFRJ  -  PROGRA'
    2'MA DE ENGENHARIA CIVIL/1976',T107,'**',/,T11,'**',T107,'*'
    3'*',/,T11,'**',T107,'**',/,T11,'**',T27,'PROGRAMA PARA ANA'
    4'LISE DE PLACAS ESCONSAS PELA TEORIA DAS EQUIVALENCIAS',
    5T107,'**',/,T11,'**',T107,'**',/,T11,'**',T107,'**',/,T11,
    698('*'),/,T11,98('*'))
 13 FORMAT(25X,'                                                  ')
 15 FORMAT(////,T11,98('-'),/,T45,'DADOS GERAIS SOBRE A ESTRJ'
    1'TURA',/,T11,98('-'))
 16 FORMAT(///,T28,'DIMENSOES DA PLACA',31('.'),F5.2,2X,'X',2X,
    1F5.2,//,T28,'ESPESSURA DA PLACA',31('.'),10X,F5.2,//,T28,
    2'ANGULO ENTRE OS EIXOS X1 E Y1',20('.'),F9.2,' GRAUS',//,
    3T28,'NUMERO DE DIVISOES NA DIRECAO X1',17('.'),13X,I2,//,
    4T28,'NUMERO DE DIVISOES NA DIRECAO Y1',17('.'),13X,I2,//,
    5T28,'COEFICIENTE DE POISSON ADOTADO',19('.'),T88,F4.2,//,
    6T28,'MODULO DE ELASTICIDADE ADOTADO',19('.'),T82,F10.1,//,
    7T28,'MODULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL ADOTADO',7('.'),
    8T82,F10.1,//,T28,'RIGIDEZ DA PLACA',33('.'),5X,F10.2,//)
127 FORMAT(////,14X,'O PROGRAMA FOI INTERROMPIDO PORQUE A LARG'
    1'URA DE BANDA E MAIOR QUE 21,/)
    2PARA OS NOS')
300 FORMAT(I5)
301 FORMAT(///,T31,'FORAM CONSIDERADOS',I3,'CARREGAMENTOS ABAI'
    2'XO DISCRIMINADOS',//)
302 FORMAT(T50,20('-'),/,T50,'I',T69,'I',/,T50,'I',1X,'CARREGA'
    2'MENTO -',I2,1X,'I',/,T50,'I',T69,'I',/,T50,20('-'),//)
303 FORMAT(///,T33,'FOI CONSIDERADO',I3,'CARREGAMENTO ABAIXO '
    2'DISCRIMINADO',//)
304 FORMAT(2I5)
310 FORMAT(///,T15,100('-'),/,T36,'LISTAGEM DAS ACOES APLICAD'
    1'ADAS DIRETAMENTE AOS NOS',/,T15,100('-'),//,T33,'NO',9X,
    2'MOMENTO (X)',9X,'MOMENTO (Y)',9X,'FORCA (Z)',//)
312 FORMAT(I5,3F10.0)
313 FORMAT(T26,I4,10X,F10.2,10X,F10.2,10X,F10.2,/)
315 FORMAT(F10.0)
1778 FORMAT(////,T25,'O PROGRAMA FOI INTERROMPIDO PORQUE FOI EN'
    1'CONTRADO UM INDICE DE RESTRICAO NEGATIVO.')
329 FORMAT(2F10.0)
364 FORMAT(T21,'NO',8X,'DEFLEXAO',8X,'MOMENTO FLETOR',8X,
    1'MOMENTO FLETOR',5X,'MOMENTO DE TORCAO',/,T34,'W',T53,'MX',
    2T75,'MY',T98,'MXY')
365 FORMAT(T49,F10.8,T71,F10.8,T92,F10.8,//,T20,I3,
```

```
    1T30,F10.8,T49,F10.8,T71,F10.8,T92,F10.8,/)
 366 FORMAT(/,T20,I3,T30,F10.8,T52,'----',T74,'----',T95,'----',
    1//)
 367 FORMAT(///,T11,98('-'),/,T45,'DEFLEXOES E ESFORCOS NA PLA'
    1'CA',/,T11,98('-'),/)
1000 CALL EXIT
     END
```