

## ACOPLAMENTO DE MÉTODOS SEM MALHA PARA ANÁLISE DE MEIOS POROELÁSTICOS

Daniela Silva Santurio

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadores: José Cláudio de Faria Telles

José Antônio Fontes Santiago

Rio de Janeiro

Março de 2021

ACOPLAMENTO DE MÉTODOS SEM MALHA PARA ANÁLISE DE MEIOS  
POROELÁSTICOS

Daniela Silva Santurio

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Orientadores: José Claudio de Faria Telles

José Antônio Fontes Santiago

Aprovada por: Prof. José Claudio de Faria Telles

Prof. José Antônio Fontes Santiago

Prof. Carlos Friedrich Loeffler Neto

Dr. Edmundo Guimarães de Araújo Costa,

Prof. Luiz Carlos Wrobel

Profa. Raquel Jahara Lobosco

Prof. Webe João Mansur

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2021

Santurio, Daniela Silva

Acoplamento de métodos sem malha para análise de meios poroelásticos / Daniela Silva Santurio. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2021

XII, 134 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: José Cláudio de Faria Telles

José Antônio Fontes Santiago

Tese (doutorado)–UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2021

Referências Bibliográficas: p.107-117.

1. *Meshless*. 2. MLPG. 3. MSF. 4. DRM 5. Poroelasticidade. 6. Acoplamento iterativo I. Telles, José Claudio de Faria et al. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*“La utopia está en el horizonte.  
Camino dos pasos, ella se aleja dos pasos  
y el horizonte se corre diez passos más allá.  
¿Entonces para que sirve la utopia?  
Para eso, sirve para caminhar.”*

*Eduardo Galeano*

## AGRADECIMENTOS

Para que este momento chegasse diversas pessoas contribuíram de forma direta ou indireta no desenvolvimento deste trabalho, ao citar nomes corre-se o risco do esquecimento, a esses peço perdão antecipadamente.

Desde à infância fui ensinada que o conhecimento é o bem mais valioso que se pode ter e o legado mais importante que se pode deixar. Agradeço imensamente aos meus primeiros professores, que tudo me ensinaram sobre a vida, sobre valores e sobre amor, meus pais Daniel Raul Santurio Basile e minha mãe Diliege Blight Silva. Sou o que sou e cheguei até aqui porque o exemplo de vocês sempre foi minha luz, com palavras é difícil de expressar a minha gratidão pelo apoio de vocês

Apenas por estar sobre os ombros de gigantes que enxerguei onde nunca iria poder ter enxergado sozinha, assim agradeço aos meus orientadores José Cláudio de Faria Telles e José Antônio Fontes Santiago. Os senhores são meu espelho profissional e pessoal. Se um dia for como vocês, venci.

Dedico este parágrafo a agradecer meu irmão, Gustavo Silva Santurio. Desconheço um humano com a sua coragem, seu caráter e sua retidão. Em tempos difíceis estivemos juntos, estaremos agora também.

Ao meu amigo e parceiro de caminhada Kleber Gonçalves, deixo meu muito obrigada. Desde o início da jornada, lá no mestrado, estivemos nos apoiando e nos desafiando, com certeza divido esta vitória com você.

Tenho bons amigos, de escola, de faculdade ou da vida, que sempre foram compreensivos, amáveis e presentes quando precisei. O apoio de vocês na forma mais simples possível sempre esteve nos meus pensamentos. Muito obrigada Lilinha, Mari(s), Laura(s), Elisa, Laís, Pri, Livia, Silvia, Bruna, Tainã e aos queridos João Paulo, Vitor, Ramon e Renato.

Agradeço a Cidinha e a Marcinha, exemplos de mulheres fortes, honestas e que nunca me pouparam amor e atenção. Agradeço a Beth do LAMEC, por toda a disponibilidade e ajuda durante esses anos.

A CAPES/CNPq pelo auxílio financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## ACOPLAMENTO DE MÉTODOS SEM MALHA PARA ANÁLISE DE MEIOS POROELÁSTICOS

Daniela Silva Santurio

Março/2021

Orientadores: José Cláudio de Faria Telles

José Antônio Fontes Santiago

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho tem como objetivo realizar a modelagem do fenômeno do adensamento de meios proelásticos saturados, sob a luz da teoria de Biot, através do acoplamento de métodos sem malha. A abordagem proposta consiste em resolver cada fase do fenômeno de forma independente dentro de cada intervalo do tempo fazendo uso do Método Local de Petrov Galerkin (MLPG) para o meio elástico e do Método das Soluções Fundamentais (MSF) com o Método da Reciprocidade Dual (DRM) para o meio fluido incompressível. Numericamente, o acoplamento se dá de maneira iterativa através do intercâmbio das poropressões e da tensão volumétrica até que a convergência seja atingida e o processo possa continuar a ser desenvolvido ao longo do tempo. Para validar a técnica proposta quatro exemplos numéricos foram estudados, de tal sorte que particularidades advindas de cada metodologia puderam ser avaliadas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## COUPLING MESHLESS METHOD FOR POROELASTIC MEDIA ANALYSIS

Daniela Silva Santurio

March/2021

Advisors: José Claudio de Faria Telles

José Antonio Fontes Santiago

Department: Civil Engineering

This work aims to model the consolidation process of saturated poroelastic media, under the light of Biot's theory, through the coupling of meshless methods. The proposed approach consists of solving each phase of the phenomenon independently within each time interval, by using the Local Petrov Galerkin Method (MLPG) for the elastic medium and the Fundamental Solutions Method (MSF) with the Dual Reciprocity Method (DRM) for the incompressible fluid medium. Numerically, the coupling takes place in an iterative way through the exchange of poropressures and volumetric stress until the convergence is reached and the process can continue to be developed over time. To validate the proposed technique, four numerical examples were studied, in such a way that particularities arising from each methodology could be evaluated.

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>2. TEORIA DA POROELASTICIDADE.....</b>	<b>8</b>
2.1. Propriedades Do Fluido E Da Matriz Porosa.....	9
2.1.1. Porosidade .....	9
2.1.2. Permeabilidade .....	10
2.1.3. Compressibilidade de meios porosos .....	10
2.1.4. Viscosidade do fluido.....	11
2.2. Hipóteses Básicas Simplificadoras Dos Problemas .....	11
2.3. Modelo Geomecânico .....	12
2.3.1 Tensões Efetivas.....	13
2.3.2. Equações De Equilíbrio Para Elasticidade .....	13
2.4. Modelo De Reservatório .....	15
2.4.1 Lei De Darcy .....	15
2.4.2. Conservação De Massa .....	16
2.5. Equações Governantes Do Adensamento .....	18
2.5.1. Condições De Contorno .....	19
2.5.2. Condições Iniciais .....	19
<b>3. MÉTODOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>21</b>
3.1. Método Dos Resíduos Ponderados .....	24
3.2. Método Da Colocação Pontual .....	26
3.3. Método Dos Subdomínios .....	28
3.4. Aspectos Das Funções De Forma/Interpolação .....	31
3.4.1 Método Dos Mínimos Quadrados Móveis .....	34
<b>4. ABORDAGEM DO PROBLEMA .....</b>	<b>41</b>
<b>5. MODELAGEM FASE FLUIDA .....</b>	<b>45</b>



5.1. Discretização Temporal .....	45
5.2. Método Das Soluções Fundamentais .....	47
5.3. Método Da Reciprocidade Dual .....	50
5.3.1. Aproximação Polinomial Para $\varphi i(x)$ :.....	51
5.3.2. Aproximação através de <i>Thin Plate Splines (TPS)</i> para $\varphi i(x)$ :.....	53
<b>6. MODELAGEM FASE SÓLIDA – ELASTOSTÁTICA .....</b>	<b>56</b>
6.1. Metodo Local Petrov Galerkin Sem Malha (MLPG) .....	56
6.1.1 Formulação.....	57
<b>7. ACOPLAMENTO DAS FASES.....</b>	<b>62</b>
7.1. Formulação .....	62
7.2. Parâmetro De Relaxamento .....	63
<b>8. APLICAÇÕES NUMÉRICAS .....</b>	<b>65</b>
8.1. Problema De Terzaghi .....	66
A) ESTUDO DE CASO 1 .....	66
B) ESTUDO DE CASO 2 .....	77
C) ESTUDO DE CASO 3 .....	80
8.2. Problema De Mandel .....	65
8.3. Problema De Schiffman.....	91
8.4. Carregamento Em Geometria L Drenante .....	99

# LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Processo Simplificado do Adensamento.....	9
Figura 2.2 Representação gráfica para a conservação de massa para o fluido.....	16
Figura 3.1 Resumo esquemático para utilização de métodos numéricos .....	21
Figura 3.2 Representação gráfica domínio de influencia e domínio de suporte.....	31
Figura 3.3 Função spline de 3ª ordem: (a) $w(x,y)$ , (b) $\partial w/\partial x$ e (c) $\partial w/\partial y$ .....	38
Figura 3.4 Função spline de 4ª ordem: (a) $w(x,y)$ , (b) $\partial w/\partial x$ e (c) $\partial w/\partial y$ .....	39
Figura 3.5 Função Exponencial: (a) $w(x,y)$ , (b) $\partial w/\partial x$ e (c) $\partial w/\partial y$ .....	39
Figura 3.6 Função Gaussiana: (a) $w(x,y)$ , (b) $\partial w/\partial x$ e (c) $\partial w/\partial y$ .....	40
Figura 4.1 Ciclo simplificado do adensamento para meios incompressíveis .....	41
Figura 5.1 Posicionamento contorno virtual para MSF.....	48
Figura 5.2 Solução Fundamental para o operador de Helmholtz Modificado.....	49
Figura 5.3 Funções polinomiais : (a) $\phi_{ix} = 4 - r^2$ (b) $\psi_{ix}$ associada à (a); (c) $\phi_{ix} = 4 + 9r - (r^2 + r^3)$ , (d) $\psi_{ix}$ associada à (c) .....	52
Figura 5.4 Funções TPS : (a) $\phi_{ix} = r^2 \log r$ , (b) $\psi_{ix}$ associada à (a); (c) $\phi_{ix} = r^4 \log r$ , (d) $\psi_{ix}$ associada à (c).....	55
Figura 7.1 Fluxograma de resolução para poroelasticidade .....	62
Figura 8.1 Coluna poroelástica de Terzaghi .....	67
Figura 8.2 Erro Relativo Normalizado das Pressões para Alfa Variavel .....	70
Figura 8.3 Erro Relativo Normalizado das Pressões para Alfa Fixo.....	71
Figura 8.4 Erro Relativo Normalizado das Pressões comparativo entre Alfa Fixo e Alfa Variável da SP3-DRM2.....	72
Figura 8.5 Pressões ao longo do tempo para SP3-DRM2 .....	73
Figura 8.6 Pressões ao longo da profundidade para SP3-DRM2 .....	74
Figura 8.7 Pressões ao longo do tempo Geral – Estudo de Caso 1 .....	74
Figura 8.8 Erros Relativos para AF e AV (são iguais) e Campo de Deslocamentos Verticais nós C e B .....	75
Figura 8.9 Deslocamentos PROFUNDIDADE para SP3-DRM2 .....	76
Figura 8.10 Deslocamento ao longo do tempo Geral – Estudo de Caso 1 .....	76
Figura 8.11 Coluna Poroelástica Modificada de Terzaghi - Estudo de Caso 2.....	77
Figura 8.12 Pressões ao longo do tempo Geral – Estudo de Caso 2 .....	78
Figura 8.13 Pressões ao longo do tempo para SP4-DRM2 .....	78
Figura 8.14 Deslocamentos para coluna poroelástica de Terzaghi - Estudo de Caso 2...	79

Figura 8.15 Deslocamento ao longo do tempo Geral – Estudo de Caso 2 .....	79
Figura 8.16 Coluna Poroelástica Modificada de Terzaghi - Estudo de Caso 3 .....	80
Figura 8.17 Pressões ao longo do tempo Geral – Estudo de Caso 3 .....	81
Figura 8.18 Pressões ao longo do tempo para SP3-DRM2 .....	81
Figura 8.19 Deslocamentos para coluna poroelástica de Terzaghi - Estudo de Caso 3...	81
Figura 8.20 Deslocamento ao longo do tempo Geral – Estudo de Caso 3 .....	82
Figura 8.21 Modelo Esquemático para o problema de Mandel.....	83
Figura 8.22 Campo de pressões ao longo do eixo horizontal para o problema de Mandel .....	86
Figura 8.23 Pressões para nó com coordenadas <b>(0; 0.12)</b> para diferentes coeficientes de Poisson para o problema de Mandel.....	87
Figura 8.24 Erros Relativos Normalizados para diferentes coeficientes de Poisson no problema de Mandel .....	89
Figura 8.25 Módulo dos deslocamentos finais com malha deformada para o problema de Mandel.....	90
Figure 8.26 Campo de deslocamentos finais para $v=0.4$ para o problema de Mandel...	90
Figure 8.27 Modelo Esquemático utilizado para o problema de Schiffman. (a) Condições de Contorno 1 (M1). (b) Condições de Contorno 2 (M2).....	92
Figura 8.28 Pressões ao longo do eixo y para diferentes distâncias ente fontes virtuais e contorno real para o problema de Schiffman.....	94
Figura 8.29 Pontos de Inflexão nas funções utilizadas no DRM para o problema de Schiffman .....	95
Figura 8.30 Pressões ao longo do eixo y para o Modelo 2 em relação as funções utilizadas no DRM no problema de Schiffman .....	96
Figura 8.31 Respostas numéricas ótimas para M2 em relação ao DRM para o problema de Schiffman.....	97
Figura 8.32 Problema de Schiffman - Campo de Desocamentos .....	98
Figure 8.33 Modelo para corpo com geometria L drenante .....	99
Figura 8.34 Nós de análise para Geometria L Drenante.....	100
Figura 8.35 Estudo comparativo entre funções DRM para Geometria L Drenante .....	101
Figure 8.36 Estudo comparativo entre distâncias das fontes virtuais para Geometria L Drenante.....	103
Figura 8.37 Desenvolvimento do campo de pressões para a geometria L drenante.....	104

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 Métodos utilizados para cálculo das funções de aproximação .....	26
Tabela 3.2 Métodos utilizados para construção de funções de forma .....	34
Tabela 4.1 Análise de vantagens e desvantagens do MSF .....	43
Tabela 4.2 Análise de vantagens e desvantagens do MLPG .....	43
Tabela 6.1 Variações do Método de Petrov Galerkin Local.....	56
Tabela 8.1 Valores das grandezas derivadas para meios saturados incompressíveis .....	66
Tabela 8.2 Parametros físicos para a coluna poroelástica de Terzaghi .....	67
Tabela 8.3 Parametros físicos para o problema de Mandel .....	83
Tabela 8.4 Distâncias ente fontes virtuais e contorno real testadas para o problema de Mandel.....	84
Tabela 8.5 Parametros físicos para o problema de Shiffman .....	92
Tabela 8.6 Propriedades físicas para Geometria L Drenante .....	99

# 1 INTRODUÇÃO

Os problemas enfrentados pela engenharia, no geral, decorrem da interferência do homem no meio ambiente ou então, do inevitável comportamento dinâmico da natureza. Da diversidade de comportamentos encontrados, grande parte destes geram consequências nos diferentes sistemas físicos, que interagem entre si. Podem-se citar como exemplos problemas que envolvem solos com estruturas, fluidos com estruturas e até mesmo solos com fluidos, dentre outros.

Com o intuito de se realizar uma análise integrada dos sistemas compostos - como os citados - torna-se necessário o estudo do acoplamento dos distintos meios físicos com seus diferentes graus de intensidade. Essa relação de acoplamento torna impossível a solução individual de qualquer desses sistemas sem a consideração das influências geradas pelos demais sistemas componentes do todo. Nesse contexto, torna-se necessário que tais problemas sejam representados através de sua formulação matemática e resolvidos através da sua modelagem numérica.

A modelagem numérica de sistemas físicos utiliza-se de métodos que permitem resolver problemas governados por equações diferenciais através de soluções aproximadas, com um grau de precisão controlada, o que se torna muito importante uma vez que poucos problemas da engenharia possuem soluções analíticas conhecidas. A modelagem caracteriza-se por representar os mais diversos problemas existentes nos vários ramos da ciência e tecnologia, e de maneira especial, na engenharia tem avançado muito nos últimos anos.

O uso crescente dos computadores, aliado à sua excepcional evolução tecnológica, é o mais forte e principal fator que contribuiu para a ocorrência deste fato. As máquinas estão mais sofisticadas, potentes, velozes e com capacidade de memória crescente, havendo a cada dia um novo lançamento na área de informática, seja na área de hardware ou software.

O objetivo deste trabalho consiste em estudar e modelar a física destes sistemas comportos, em especial aqueles existentes em solos saturados, compostos por iterações do tipo sólido-fluido no domínio do tempo através de diferentes métodos computacionais. Neste sistema, as variáveis são inter-dependentes de tal sorte que, apesar de resolvidos

separadamente, a relação entre fases não pode ser desprezada e suas interdependências não podem ser eliminados em nível de equações diferenciais.

## 1.1. Revisão Bibliográfica

Após o estabelecimento das equações diferenciais que regem os sistemas desenvolvem-se métodos numéricos capazes de captar particularidades e nuances de problemas com características específicas de geometria, propriedades físicas e condições de contorno. Surgem inicialmente como técnicas de resolução de problemas complexos como o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Elementos de Contorno (MEC) ou até mesmo o Método dos Volumes Finitos (MVF). Uma característica em comum a tais métodos é a necessidade de conexão entre os nós que discretizam o problema, gerando assim uma malha de suporte. Como consequência de tal fato, a solução aproximada através destes métodos pode se tornar trabalhosa e computacionalmente cara.

Os Métodos Sem Malha (*Meshless*) vêm se sobressaindo para os mais diversos tipos de modelagem, não apenas por facilitar a discretização espacial do modelo, mas também por mostrar-se uma poderosa ferramenta de análise com características versáteis e de precisão controlada. Ressaltando sua característica de versatilidade, uma breve pesquisa sobre os Métodos *Meshless* revela as mais variadas abordagens decorrentes de diversas origens matemáticas, tornando-os utilizáveis em uma ampla gama de aplicações. Devido às várias origens matemáticas e a adaptabilidade necessária para cada conjunto físico, diversos Métodos *Meshless* foram e estão sendo desenvolvidos, e classificar tais métodos não é tarefa simples.

Sob uma luz geral pode-se dizer que grande parte destes ou é baseada nas formulações de MEF ou de MEC. Apesar das variadas abordagens, todos os esquemas sem malha não necessitam do conceito de conectividade e ignoram o uso convencional de malha em algum grau. Tais métodos podem ser considerados métodos recentes quando comparados ao MEC e ao MEF, as primeiras formulações aparecem em 1977 com o método SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics), mas apenas a partir de 1990 se firmaram no meio acadêmico.

Dentre os diversos métodos desenvolvidos destaca-se a contribuição de (NAYROLES, TOUZOT e VILLON, 1992) para o Método dos Elementos Difusos (MFD) e consequentemente redescoberta do Método dos Mínimos Quadrados (MQM), de (BELYTSCHKO, KRONGAUZ e ORGAN, 1996) no desenvolvimento do Método de Galerkin livre de malha – MGLM, de (BABUŠKA e MELENK, 1997) para Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade (MEFPU), de (KITIPORNCHAI, LIEW e CHENG, 2005) no desenvolvimento do Método de contorno livre de elementos – BEFM.

A partir das formulações *Meshless*, vários pesquisadores tiveram interesse em desenvolver métodos que não necessitem sequer de células de integração. Destes métodos denominados verdadeiramente sem malha (*truly-meshless*) destaca-se a contribuição de (KUPRADZE, 1964) no desenvolvimento do Método das Soluções Fundamentais (MSF), de (ATLURI e SHEN, 2002) no desenvolvimento do Método Local Petrov- Galerkin (MLPG) e (OÑATE, IDELSOHN, *et al.*, 1996), (ALURU, 2000) e (ATLURI e SHEN, 2002) para o Método da Colocação Pontual.

Neste trabalho, será realizada a análise e resolução do problema do tipo solo-fluido através do acoplamento de métodos sem malha, de maneira que, pretende-se modelar os diferentes meios físicos (sólido-fluido) através de diferentes métodos *meshless* selecionados de acordo com suas propriedades de adequabilidade para cada tipo de domínio.

Os problemas do tipo sólido-fluido podem ser formulados através da teoria da poroelasticidade acoplada ou do adensamento de Biot (BIOT, 1956), possibilitando que os princípios físicos envolvidos possam ser descritos em termos de equações diferenciais. O fenômeno de adensamento em solos foi estudado por diversos cientistas em todo o mundo, mas a teoria de Terzaghi (TERZAGHI, 1925) é considerada como a pioneira e mais importante. Alguns anos depois Biot apresentou a sua teoria de adensamento tridimensional de solos no seu trabalho de 1941. A primeira teoria de Biot (BIOT, 1941) foi o marco inicial e é básica nos estudos da poroelasticidade, tornando-se um trabalho clássico, onde o autor introduz as suas constantes poroelásticas e denomina o fenômeno estudado como adensamento quasi-estático. No texto do seu trabalho o próprio autor concluiu que a teoria de adensamento de Terzaghi é um caso particular da sua.

A teoria de Biot para o caso quasi-estático é mais estudada e conhecida do que a dinâmica e também mais aplicada a problemas do tipo solo-fluido, tendo em vista que as

equações são mais simples de serem tratadas numericamente. Como o fenômeno ocorre de maneira lenta e paulatina é razoável a simplificação do problema como quasi-estático. Para o estudo destes problemas, a teoria da poroelasticidade possibilita diversas maneiras de tratamento das suas variáveis, o sistema pode ser descrito a nível de deslocamentos, deformações, tensões, poropressões, etc.

O trabalho inicial de Biot considerou como variáveis independentes os deslocamentos e a poropressão. Outros autores preferem relacionar como variáveis independentes deslocamentos e variação no volume de água. O presente trabalho usa a linha inicialmente adotada por Biot e está focado principalmente nas tensões e deslocamentos da parte sólida (esqueleto ou grãos) e na poropressão da parte fluida (água). Na análise do comportamento poroelástico de um meio poroso é de fundamental importância o acoplamento que ocorre entre as fases sólida e líquida. O esqueleto é considerado elástico e linear, ocorrendo pequenas deformações, enquanto a fase líquida escoou segundo a lei de Darcy.

A partir do desenvolvimento da teoria de Biot e do desenvolvimento de computadores mais potentes a utilização de métodos numéricos se tornou alvo de grande pesquisa acadêmica. A utilização de métodos numéricos ditos clássicos como o Método dos Elementos Finitos na área de poroelasticidade teve início no trabalho de (SANDHU e WILSON, 1969). Eles consideraram o meio poroelástico sujeito a pequenas deformações e as fases (grãos de solo e água) foram estabelecidas como incompressíveis. (GHABOUSSI e WILSON, 1973) introduziram o conceito de compressibilidade na fase líquida. O estudo onde foram incluídas as deformações finitas foi elaborado por (CARTER, BOOKER e SMALL, 1979) que consideraram os efeitos da não linearidade geométrica e também a não-linearidade física, a qual foi analisada também por (PREVOST, 1981) e (ZIENKIEWICZ e SHIOMI, 1984).

A plasticidade no processo de adensamento foi estudada por (SMALL, BOOKER e DAVIS, 1976), entre outros. Os trabalhos iniciais em poroelasticidade usando o Método dos Elementos de Contorno devem-se a (CLEARY, 1977) que desenvolveu soluções fundamentais para meios saturados, (BANERJEE e BUTTERFIELD, 1981) resolveram o problema de maneira desacoplada dentro de cada intervalo de tempo através da utilização de integrais de domínio e solução fundamental transiente. O trabalho de (CHENG e LIGGETT, 1984) utiliza a transformada de Laplace para resolução acoplada



do sistema seguido de (NORRIS, 1985) que desenvolve uma função de Green harmônica para meios saturados. Citam-se como outras contribuições, (MANOLIS e BESKOS, 1989), (BONNET, 1987), (DOMINGUEZ, 1992), (CHOPRA e DARGUSH, 1995), (GHASSEMI, CHENG, *et al.*, 2001), (CAVALCANTI, 2002), dentre outros autores.

No que concerne a aplicação de métodos sem malha nos problemas poroelásticos destaca-se o trabalho de (WANG, LIU e WU, 2001) que utilizaram o Método de Interpolação Pontual (PIM) para simular a dissipação no processo de consolidação. Já para o Método de Interpolação Radial (RPIM) citam-se os trabalhos de (WANG, LIU e LIN, 2002), (WANG, ZHANG e NOGAMI, 2004) e (WANG, YAN e LIU, 2005) que sob a luz da teoria de Biot, estabelecem a análise numérica do processo de consolidação, modelam as ondas induzidas pelos solos marinhos e ainda estudam o processo de dissipação do excesso de poropressão, respectivamente.

Ainda utilizando o RPIM, (NOGAMI, WANG e WANG, 2004) abordam a interação entre as argilas e seus vazios através de um modelo de dupla porosidade com funções de interpolação de diferentes ordens. Através da utilização do RPIM de ordem desigual tem-se a contribuição de (WANG, WANG, *et al.*, 2007), para danos anisotrópicos o trabalho (WANG, WANG e SHEN, 2008) e (CHEN e LI, 2008) realiza simulação de ondas para meios porosos saturados.

Para os métodos sem malha baseados em formulações de contorno (WANG, XIE e LEUNG, 2009) fazem uso de uma formulação local (LBIE) para análise bidimensional do adensamento e (AUGUSTIN, 2015) utiliza o Método das Soluções Fundamentais (MFS) em reservatórios geotérmicos.

Já em relação as formulações baseadas em domínio destacam-se para formulação global o Método de Galerkin Livre (EFG) e para a formulação local o Método de Petrov-Galerkin (MLPG). Para o primeiro, (MODARESSI e AUBERT, 1998) consideram o estudo das deformações em meios porosos multifásicos, (MURAKAMI, SETSUYASU e ARIMOTO, 2005) descrevem uma formulação acoplada considerando o estado de deformações, (WANG e LI, 2006) and (WANG, KARIM e LIN, 2007) analisam fatores influenciadores na resposta ao processo de consolidação, (KARIM, NOGAMI e WANG, 2002) estudam as respostas em meios saturados para cargas cíclicas e (OLIAEI, 2009) apresenta alguns aspectos relevantes do EFG nas formulações acopladas de sistemas hidromecânicos.

Em relação ao MLPG ressalta-se a contribuição de (FERRONATO, MAZZIA, *et al.*, 2007) para problemas gerais, de (BERGAMASCHI, MARTINEZ e PINI, 2009) para problemas axi-simétricos, de (SOARES , 2010) que apresenta uma formulação independente para cada fase do sistema, (WEN, 2010) estuda a propagação de ondas em problemas tridimensionais através da transformada de Laplace e, também de (SOARES, SLADEK, *et al.*, 2012) que propõem uma formulação modificada do MLPG para análise do meio poroelástico.

## **1.2. Organização do trabalho**

A proposta para desenvolvimento deste trabalho foi segmentada em nove capítulos:

- ❖ Capítulo 2: Apresentação do fenômeno do adensamento, propriedades do meio e características fenomenológicas a partir da teoria da poroelasticidade desenvolvida por Biot.
- ❖ Capítulo 3: Apresentação de conceitos, formulações e propriedades acerca dos Métodos Sem Malha.
- ❖ Capítulo 4: Discussão da abordagem do problema relacionando características do fenômeno com os métodos numéricos.
- ❖ Capítulo 5: Dedução da formulação utilizada na modelagem da fase fluida através do Método das Soluções Fundamentais e do Método da Reciprocidade Dual.
- ❖ Capítulo 6: Dedução da formulação utilizada na modelagem da fase elástica através do Método de Petrov Galerkin Local
- ❖ Capítulo 7: Descrição e formulação da técnica de acoplamento entre os métodos envolvidos

- ❖ Capítulo 8: Avaliação dos resultados obtidos comparando tanto com resultados obtidos com solução analítica quando disponível ou através de análise de parâmetros dos modelos.
- ❖ Capítulo 9: Apresentação das conclusões e sugestões para o prosseguimento e ampliação da pesquisa realizada.

## 2 TEORIA DA POROELASTICIDADE

Solos saturados ou quaisquer outros meios poroelásticos saturados são considerados como meios compostos por duas diferentes fases: uma sólida e deformável - o “esqueleto sólido” como é denominada a fase composta pelos grãos do solo - e uma fase líquida, composta pelo fluido intersticial que permeia os vazios entre os grãos do meio.

A exemplo de solos como argilas ou areias argilosas completamente saturados, a deformação do meio é dependente tanto da rigidez do material como do comportamento do fluido nos poros (VERRUJIT, 2013). Aplicando-se um carregamento instantâneo nas fronteiras do meio, têm-se a geração de um campo de poro-pressão no fluido que, ao dissipar-se ao longo do tempo, transferirá carregamento para a parcela sólida, culminando na deformação do sistema.

A simultaneidade entre deformação no material poroso e o fluxo de fluido intersticial são componentes da teoria do adensamento. A teoria do adensamento unidimensional foi desenvolvida inicialmente por (TERZAGHI, 1923), no qual foi tomado como hipótese básica que a deformação do meio ocorria principalmente devido ao rearranjo das partículas sólidas devido ao fluxo de fluido, desconsiderando a compressibilidade inerente do fluido e do material sólido em questão. Para solos moles e areias tais considerações são válidas, uma vez que o sistema é altamente compressível, mas seus constituintes (partículas de sólido e fluido) são rígidos (VERRUJIT, 2013).

Generalizando a teoria do adensamento, (BIOT, 1941) expandiu o modelo para três dimensões e considerou também as compressibilidades individuais do fluido e das partículas. Nesta teoria foi incorporando o comportamento do esqueleto sólido ao processo, diferentemente da simplificação feita por Terzaghi. O sistema é constituído de duas fases que podem ser tratadas de maneira independentes, mas, se comporta de maneira geral sob a influencia mutua de ambas as parcelas: campo de pressões geram tensões no sólido e deformações nos sólidos geram poropressões no fluido, paulatinamente, até que todo o excesso de poropressão seja dissipado, conforme pode ser observado na figura 2.1.

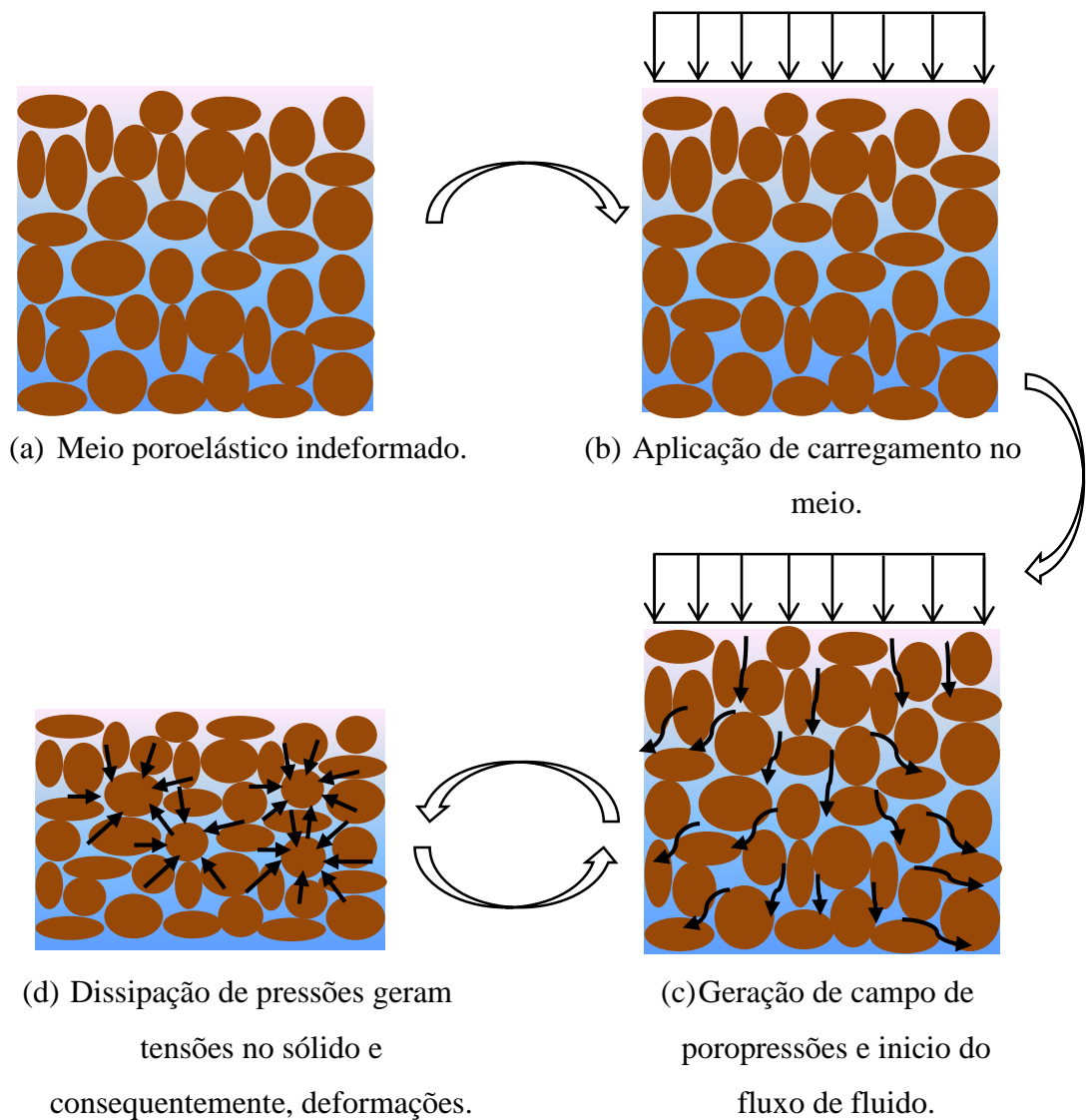


Figura 2.1: Processo Simplificado do Adensamento

No presente capítulo serão apresentadas propriedades dos meios em questão, hipóteses básicas simplificadoras do problema e estabelecimento das equações constituintes da teoria de meios poroelásticos proposta por Biot.

## 2.1 Propriedades Do Fluido E Da Matriz Porosa

### 2.1.1 Porosidade

Meios poroelásticos saturados são compostos por uma matriz sólida, a qual não existe fluxo de fluido e, uma parcela complementar de espaços livres interconectados (poros) por onde ocorre o fluxo de fluido.

A porosidade ( $n$ ) é relação existente entre o volume do vazios ( $V_p$ ) e o volume total ( $V$ ) do material em questão. Para a mecânica dos solos, torna-se mais interessante contabilizar a porosidade em relação ao volume de vazios onde realmente existe fluxo de fluido (desprezando vazios internos aos grãos da matriz). Assim, define-se a porosidade efetiva como:

$$n = \frac{\text{Volume de vazios}}{\text{Volume total}} = \frac{V_p}{V} \quad (2.1)$$

### 2.1.2 Permeabilidade

A permeabilidade ( $k$ ) é a capacidade do material poroso de impor resistência ou não à percolação de fluido. Solos do tipo arenoso, possuem grande porosidade e o fluxo de fluido é facilitado, em contrapartida, solos do tipo argiloso com baixa porosidade ocorre o inverso. Tal característica do material têm influência direta na determinação do fluxo de fluido em meios porosos, chamada Lei de Darcy.

### 2.1.3 Compressibilidade de meios porosos

A compressibilidade ( $C$ ) pode ser definida como a relação entre a mudança de volume de um corpo devido a variação hidrostática da pressão ( $dV/dp$ ) sobre este:

$$C = - \frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad (2.2)$$

Para descrever o comportamento do meio poroelástico saturado diferentes compressibilidades devem ser analisadas (GEERTSMA, 1957):

- (a) Compressibilidade do Fluido ( $C_f$ ): variação de volume fluido intersticial em relação à pressão exercida no meio;
- (b) Compressibilidade dos Grãos Sólidos ( $C_s$ ): variação de volume apenas dos grãos sólidos em relação à variação de tensão no meio;
- (c) Compressibilidade da Matriz Porosa ( $C_m$ ): variação de volume da matriz sólida em relação à variação de tensão no meio, pode ser aproximada por:

$$C_m = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \quad (2.3)$$

onde  $E$  é o Módulo de Elasticidade e  $\nu$  o coeficiente de Poisson do material. O meio poroso como um todo, chamado de matriz sólida, assume compressibilidade diferente dos

meios isolados, uma vez que, a mudança de volume total envolve também deformações devido ao contato (deslizamento e rolamento) das partículas (VERRUJIT, 2013).

- (d) Compressibilidade dos Poros ( $C_p$ ): variação de volume dos poros em relação á variação de tensão no meio. A compressibilidade dos poros ( $C_p$ ) pode assumir o valor da compressibilidade da matriz ( $C_m$ ) quando a fase sólida for constituída por apenas um constituinte (JUNCU, ÁRNADÓTTIR, *et al.*, 2019).

Podem ser definidos também as incompressibilidades do fluido ( $K_f$ ), dos grãos sólidos ( $K_s$ ), da matriz porosa ( $K$ ), dos poros ( $K_p$ ), como:

$$K_f = \frac{1}{c_f}; K_s = \frac{1}{c_s}; K = \frac{1}{c_m} \text{ e } K_p = \frac{1}{c_p} \quad (2.4)$$

Através da relação inversamente proporcional entre os parâmetros nota-se que a compressibilidade está ligada à facilidade/aumento na mudança de volume do material, enquanto a incompressibilidade se relaciona com a dificuldade/restrrição desta mudança de volume.

#### 2.1.4 Viscosidade do fluido

A viscosidade dinâmica ( $\mu_{din}$ ) de um fluido traduz a resistência deste ao escoamento, ou a resistência do fluido à tensão cisalhante ( $\tau$ ) quando este está em movimento. Define-se então para fluidos newtonianos:

$$\tau_{xy} = \mu_{din} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.5)$$

onde  $\tau_{xy}$  é a tensão cisalhante na horizontal (eixo – x) em um plano normal vertical (eixo – y) e  $\partial u / \partial y$  expressa o gradiente de velocidade ao longo deste mesmo eixo.

## 2.2 Hipóteses Básicas Simplificadoras Dos Problemas

Para o modelo geomecânico apresentado no presente trabalho seguem os princípios que:

- (a) Material isotrópico;
- (b) Matriz porosa formada por grãos incompressíveis;

- (c) Fluido incompressível;
- (d) São admitidas pequenas deformações;
- (e) Relação tensão x deformação é elástico linear;
- (f) Estado plano de deformações;
- (g) Material encontra-se saturado;
- (h) Fluxo obedece a Lei de Darcy;
- (i) Obedece-se ao princípio das tensões efetivas.
- (j) Carregamento instantâneo
- (k) Meio homogêneo

Para as hipóteses apresentadas pretende-se descrever o comportamento do meio poroso quando submetido a um carregamento externo instantâneo. Conforme hipótese (f) o processo ocorrerá em meios bidimensionais sob estado plano de deformações, implicando que, as deformações na direção  $z$  serão nulas (MALVERN, 1969).

Admitindo a hipótese (b), de uma matriz sólida composta por grãos indeformáveis, pode-se concluir que as deformações do meio ocorrerão a partir do rearranjo das partículas, caracterizando um regime plástico. A princípio pode-se questionar a aplicabilidade da Lei de Hooke (hipótese (e)) para o problema em questão, no entanto esta simplificação de comportamento para matriz sólida tem sido comumente utilizada como pode ser observado em (DETOURNAY e CHENG, 1993), (DE BOER, 2000), (WANG, 2000), (RUDNICKI, 2001), (COUSSY, 2014), (GAMBOLATI, TEATINI e FERRONATO, 2006), (VERRUJIT, 2008).

No fenômeno do adensamento propriedades inerentes ao fenômeno e que naturalmente não podem ser modificadas são aquelas que se referem à Lei de Darcy (hipótese (h)) para o fluido e o princípio das tensões efetivas (hipótese(i)) para o sólido.

## **2.3 Modelo Geomecânico**

Na modelagem do meio geomecânico será utilizada a notação de sinais utilizada por (LEWIS e SCHREFLER, 1998), onde é definido que, para tensões de compressão será adotado sinal negativo, mas, para as pressões, o meio comprimido será utilizado o sinal positivo.



### 2.3.1 Tensões Efetivas

Em meios porosos torna-se conveniente separar o tensor de tensões totais ( $\sigma$ ) em uma parcela composta pelas tensões efetivas ( $\sigma'$ ) e outra parcela relacionada com a pressão de poro exercida pelo fluido contido em seu interior ( $p$ ). Este princípio foi introduzido por (TERZAGHI, 1923), quando percebeu-se que a variação de tensão (seja de tração ou compressão) no solo gerava praticamente a mesma variação de pressão (seja diminuição ou aumento) no fluido (WANG, 2000). Assim têm-se:

$$\sigma = \sigma' - \alpha p I \quad (2.6)$$

onde  $I$  representa a matriz identidade e  $\alpha$  é o coeficiente de Biot, que pode variar de valores entre 0 e 1. Este coeficiente é expresso por:

$$\alpha = 1 - \frac{C_s}{C_m} \quad (2.7)$$

relacionando assim, a compressibilidade dos grãos sólidos ( $C_s$ ) e a compressibilidade da matriz porosa ( $C_m$ ). Quando  $C_m \gg C_s$  indicando que os grãos têm compressibilidade muito baixa ou incompressíveis (item 2.2 - hipótese (b)) em relação a matriz, o coeficiente de Biot assume  $\alpha = 1$ .

### 2.3.2 Equações De Equilíbrio Para Elasticidade

A partir da teoria da Mecânica do Contínuo, e tomando-se como base um corpo homogêneo e isotrópico no regime elástico linear representado por um domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ . A equação de equilíbrio de momento para uma secção  $\Omega_s$  do domínio  $\Omega$  de contorno  $\partial\Omega_s$  pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_s} (\rho \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_s} \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (2.8)$$

onde  $\mathbf{b}$  são as forças de volume atuantes na região,  $\mathbf{t}$  as forças de superfícies,  $\rho = n\rho_f + (1 - n)\rho_s$  é a densidade do meio poroso saturado, sendo  $n$  a porosidade,  $\rho_f$  a densidade do fluido,  $\rho_s$  a densidade do sólido,  $\mathbf{u}$  representa o deslocamento e  $\rho \ddot{\mathbf{u}}$  compõem as forças de inércia de D'Alembert devido a aceleração, as quais serão desprezadas neste trabalho devido o processo ser quasi-estático.

As forças de superfícies ( $\mathbf{t}$ ) podem ser reescritas através de:

$$\mathbf{t} = \sigma \cdot \mathbf{n} \quad (2.9)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões totais no meio e  $\mathbf{n}$  representa os cossenos diretores das normais externas ao contorno  $\Gamma$ . Utilizando o teorema da divergência:

$$\int_{\partial\Omega_s} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega_s} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (2.10)$$

juntamente com as equações (2.9) e equação (2.8), chega-se a:

$$\int_{\Omega_s} \rho \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Omega_s} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega = 0 \quad (2.11)$$

Extrapolando a equação (2.11) para qualquer região  $\Omega$  arbitrária e desprezando as forças inerciais, obtêm-se:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (2.12)$$

Utilizando o princípio das tensões efetivas, descrito na subseção 2.3.1, obtêm-se:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \alpha \nabla p \mathbf{I} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (2.13)$$

Após submetido a um carregamento externo o meio se deforma. Naturalmente, a maneira na qual o material se deforma depende das suas características constitutivas. A equação constitutiva apenas da matriz porosa é descrita considerando-se o comportamento elástico linear do corpo:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.14)$$

onde  $\mathbf{D}$  representa a matriz de propriedades físicas do corpo em questão e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  as deformações infinitesimais sofridas pelo mesmo.

As propriedades físicas do corpo podem ser definidas através das constantes de Lamé ( $\mu$  e  $\lambda$ ) ou pelo modulo de Young ( $E$ ) e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). As constantes de Lamé podem ser expressas por:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.15)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = K - \frac{2}{3}G \quad (2.16)$$

A matriz constitutiva é dada para o estado plano de deformação por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

As deformações podem ser escritas através do campo de deslocamentos, conforme:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.18)$$

Outra grandeza importante é a deformação volumétrica ( $\varepsilon_{vol}$ ) do corpo, esta expressa o quanto o volume do material contrai ou expande com a variação do estado de tensões. Segue:

$$\varepsilon_{vol} = Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = u_{i,i} + u_{j,j} \quad (2.19)$$

## 2.4 Modelo De Reservatório

Na parcela líquida do meio, será considerada neste trabalho, a descrição clássica macroscópica de escoamento em meios porosos, isto é, as grandezas físicas são definidas para toda a região porosa considerando médias volumétricas dos valores microscópicos na região circundante (PIZZOL, 2014).

No intuito de descrever as equações governantes para este modelo, serão descritas a lei de fluxo de Darcy e o princípio de conservação de massa.

### 2.4.1 Lei De Darcy

A lei de fluxo de Darcy para escoamento não turbulento com meio poroso de permeabilidade (  $k$  ) isotrópica pode ser escrita como:

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu_{din}} \nabla p \quad (2.20)$$

onde  $\mathbf{q}$  representa a velocidade do através dos poros do meio,  $\mu_{din}$  a viscosidade dinâmica e  $\nabla p$  o gradiente de pressões.

Alternativamente, é possível reescrever o fluxo de Darcy em função da porosidade (  $n$  ) com a velocidade relativa da fase sólida (  $\mathbf{w}$  ) com a fase fluida (  $\mathbf{v}$  ) (VERRUIT, 2013):

$$\mathbf{q} = n(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \quad (2.21)$$

### 2.4.2 Conservação De Massa

Considere um material poroso composto por uma matriz sólida de densidade ( $\rho_s$ ) e velocidade ( $\mathbf{w}$ ) e preenchido com fluido de densidade ( $\rho_f$ ) com velocidade ( $\mathbf{v}$ ). Para um volume elementar  $V = dxdydz$  representado na figura 2.2 sabe-se que a massa fluida será  $n\rho_f V$ .

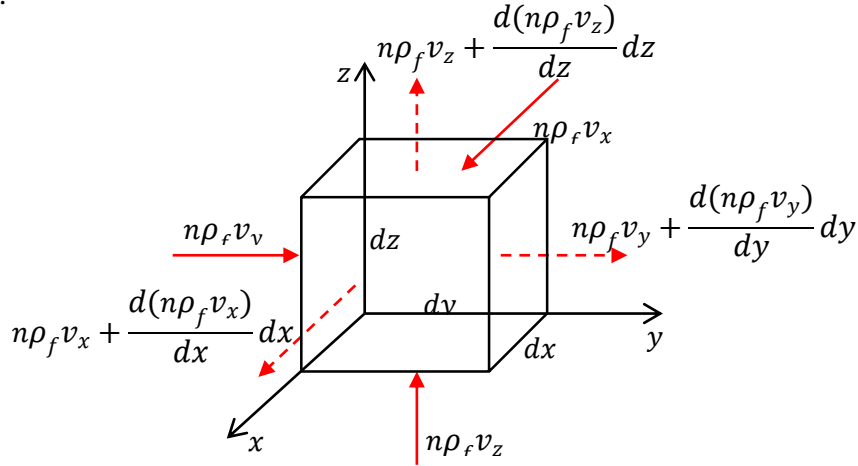


Figura 2.2 Representação gráfica para a conservação de massa para o fluido

O balanço de massa de fluido no interior do elemento pode ser dado como a soma das contribuições da massa que entra e da massa que sai do elemento em um determinado instante de tempo ( $t$ ). Escreve-se:

$$\begin{aligned}
 n\rho_f v_x dydz - n\rho_f v_x dydz + \frac{\partial(n\rho_f v_x)}{\partial x} dxdydz + n\rho_f v_y dxdz - n\rho_f v_y dxdz \\
 + \frac{\partial(n\rho_f v_y)}{\partial y} dxdydz + n\rho_f v_z dxdy - n\rho_f v_z dxdy \\
 + \frac{\partial(n\rho_f v_z)}{\partial z} dxdydz + \frac{\partial Volume}{\partial t} = 0
 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Simplificando os termos:

$$\frac{\partial(n\rho_f v_x)}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial(n\rho_f v_y)}{\partial y} dxdydz + \frac{\partial(n\rho_f v_z)}{\partial z} dxdydz + \frac{\partial Volume}{\partial t} = 0 \quad (2.23)$$

A variação no volume total em relação ao tempo pode ser escrita, como:

$$\frac{\partial Volume}{\partial t} = \frac{\partial(n\rho_f)}{\partial t} dxdydz \quad (2.24)$$

Aplicando a equação (2.24) na equação (2.23) chega-se:

$$\frac{\partial(n\rho_f v_z)}{\partial z} + \frac{\partial(n\rho_f v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(n\rho_f v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(n\rho_f)}{\partial t} = 0 \quad (2.25)$$

$$\nabla \cdot (n\rho_f \mathbf{v}) + \frac{\partial(n\rho_f)}{\partial t} = 0 \quad (2.26)$$

Desenvolvendo a equação (2.26):

$$\rho_f \nabla \cdot (n\mathbf{v}) + (n\mathbf{v}) \cdot \nabla (\rho_f) + \rho_f \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \quad (2.27)$$

Na equação (2.27), despreza-se o segundo termo (produto da velocidade pelo gradiente da densidade do fluido, ambos assumem pequenos valores) e o quarto termo pode ser reescrito em termos da compressibilidade do fluido (  $C_f$  ):

$$\nabla \cdot (n\mathbf{v}) + \frac{\partial n}{\partial t} + n C_f \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (2.28)$$

Analogamente as equações (2.26) e (2.27), para o sólido define-se respectivamente:

$$\nabla \cdot [(1-n)\rho_s \mathbf{w}] + \frac{d[(1-n)\rho_s]}{dt} = 0 \quad (2.29)$$

$$\rho_s \nabla \cdot [(1-n)\mathbf{w}] - \rho_s \frac{\partial n}{\partial t} + (1-n) \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0 \quad (2.30)$$

O último termo da equação (2.30) relativo a variação da massa específica em relação ao tempo, se relaciona com a compressibilidade do sólido (  $C_s$  ), com a tensão total volumétrica (  $\sigma_{vol}$  ) e a pressão (  $p$  ) através de (VERRUJIT, 2013):

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{\rho_s C_s}{1-n} \left( -\frac{\partial \sigma_{vol}}{\partial t} - n \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (2.31)$$

Substituindo a equação (2.31) na equação (2.30):

$$\nabla \cdot [(1-n)\mathbf{w}] - \frac{\partial n}{\partial t} + C_s \left( -\frac{\partial \sigma_{vol}}{\partial t} - n \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.32)$$

Somando-se as equações da parcela sólida (2.32) com a equação da parcela fluida (2.28), obtêm-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{w} + \nabla \cdot [n(\mathbf{v} - \mathbf{w})] + n(C_f - C_s) \frac{\partial p}{\partial t} - C_s \frac{\partial \sigma_{vol}}{\partial t} = 0 \quad (2.33)$$

Sabe-se a partir da equação (2.21) que o segundo termo da equação (2.33) é fluxo de Darcy (  $\mathbf{q}$  ) e, a velocidade da matriz sólida (  $\mathbf{w}$  ) equivale a derivada temporal do

deslocamento do meio  $(\partial \mathbf{u} / \partial t)$ . Utilizando-se da equação (2.19), o divergente do deslocamento no tempo pode ser reescrito como a deformação volumétrica no tempo:

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} \quad (2.34)$$

O último termo da equação (2.33), a tensão volumétrica total  $(\sigma_{vol})$  pode ser escrito em termos de tensões efetivas (princípio descrito no item 2.3.1) como  $\sigma_{vol} = \sigma_{vol}' - \alpha p$ . Já a tensão volumétrica efetiva  $(\sigma_{vol}')$  se relaciona com a deformação volumétrica  $(\varepsilon_{vol})$  através de:

$$\sigma_{vol}' = \frac{\varepsilon_{vol}}{C_m} \quad (2.35)$$

Assim para a equação (2.33) desenvolve-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + n(C_f - C_s) \frac{\partial p}{\partial t} - C_s \frac{\partial (\sigma_{vol}' - \alpha p)}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + n(C_f - C_s) \frac{\partial p}{\partial t} - C_s \frac{\partial \sigma_{vol}'}{\partial t} + \alpha C_s \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} - \frac{C_s}{C_m} \frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + n(C_f - C_s) \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha C_s \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 \\ \left( 1 - \frac{C_s}{C_m} \right) \frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + n C_f \frac{\partial p}{\partial t} + (\alpha - n) C_s \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 \\ \alpha \frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + n C_f \frac{\partial p}{\partial t} + (\alpha - n) C_s \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 \\ \alpha \frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde  $\alpha = \left( 1 - \frac{C_s}{C_m} \right)$  é o coeficiente de Biot e define-se  $1/Q = n C_f + (\alpha - n) C_s$ .

Relações entre os coeficientes, nomeclaturas utilizadas em diversas literaturas e definição de parâmetros podem ser encontrados no Anexo A.

## 2.5 Equações Governantes Do Adensamento

O fenômeno do adensamento é descrito pelo conjunto de equações (2.13) e (2.36) juntamente com a Lei de Hooke descrita na equação (2.14) e a Lei de Darcy apresentada na equação (2.20), logo:

$$\text{SÓLIDO} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \alpha \nabla p \mathbf{I} + \rho \mathbf{b} = 0 \text{ em } \Omega \quad (2.37.a)$$

$$\text{FLUIDO} \quad \alpha \frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} - \frac{k}{\mu_{din}} \nabla^2 p + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \text{ em } \Omega \quad (2.37.b)$$

A relação entre as fases do meio dá-se através da igualdade de deformações volumétricas. Partindo-se da equação (2.37.a) os deslocamentos podem ser calculados, posteriormente as deformações pela equação (2.18) e a deformação volumétrica pela equação (2.19). Já para a parcela fluida do meio, diretamente da equação (2.37.b) pode-se obter a mesma deformação volumétrica.

A partir do estabelecimento das equações que regem o meio e combinando-as com as condições iniciais e de contorno, forma-se um problema de valor inicial de contorno (PVIC).

#### 2.5.1 Condições De Contorno

A consideração das condições de contorno atuantes é necessária e essencial para a definição e análise do problema. Nesse trabalho as seguintes condições são consideradas:

$$\begin{aligned} \text{SÓLIDO} \quad & \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_u \\ & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \Gamma_t \\ \text{FLUIDO} \quad & p = \bar{p} \quad \text{em } \Gamma_p \\ & \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_q \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\bar{\mathbf{t}}$ ,  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$  são os deslocamentos, as forças de superfície, as pressões e os fluxos prescritos nos contornos  $\Gamma_u$  (condição essencial),  $\Gamma_t$  (condição natural),  $\Gamma_p$  (condição essencial),  $\Gamma_q$  (condição natural), respectivamente.

Para a parcela sólida do meio estão associadas condições de restrição de deslocamentos (essencial) ou aplicação de carregamento (natural). Para o fluido estão associadas condições de bordas impermeáveis ou drenadas com imposição de pressões (essencial) ou a bordas permeáveis com a presença de fluxo (natural).

#### 2.5.2 Condições Iniciais

As condições iniciais devem contemplar individualmente cada fase do problema em questão:

SÓLIDO

$$\sigma_{vol} = \sigma_{vol}^0 \text{ em } t = 0$$

FLUIDO

$$p = p_0 \text{ em } t = 0 \quad (2.39)$$

onde  $\sigma_{vol}^0$  e  $p_0$  são as tensoes volumétrica e poro pressões iniciais, respectivamente.

Para o estabelecimento das condições iniciais com carregamento aplicado instantâneamente no início do processo podem ser aplicados dois processos (KUROKI, ITO e ONISHI, 1982):

a) Método 1:

A pressão inicial ( $p_0$ ) é calculada a partir do problema estático de potencial, assumindo a geração de um campo de pressões a deformação constante ( $\varepsilon_{vol} = 0$ ):

$$\begin{aligned} \nabla^2 p_0 &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ p &= \bar{p} \quad \text{em } \Gamma_p \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_q \end{aligned} \quad (2.40)$$

b) Método 2:

Assume-se a pressão inicial nula ( $p_0 = 0$ ) e resolve-se o problema elástico linear:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{b} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \Gamma_t \end{aligned} \quad (2.41)$$

Uma vez calculada a deformação volumétrica torna-se possível calcular poro pressões que assumirão os valores iniciais. No presente trabalho utilizou-se o método 1 para aproximação das condições iniciais.



### 3 MÉTODOS NUMÉRICOS

Os fenômenos físicos que regem os mais diversos problemas de engenharia – mecânicos, biológicos, elétricos, químicos e etc. - em sua maioria, podem ser simulados/modelados por equações matemáticas, entretanto, a minoria possui solução exata. Tal fato ocorre em razão da complexidade de interação entre as variáveis dos fenômenos e, assim torna-se necessário a obtenção de soluções numéricas. A obtenção destas soluções é viabilizada através da utilização de métodos numéricos.

Os métodos sem malha apresentam diferentes origens e foram estudados para diversas aplicações, mas de maneira geral seguem o mesmo padrão de resolução de quaisquer métodos numéricos: o problema é geometricamente discretizado, as funções de forma são estabelecidas, o sistema de equações é formado e solucionado, conforme pode ser visto na Figura 3.1. O destaque dos métodos *meshless* reside na etapa de geração das funções de forma, uma vez que, como não existe informação de como os nós se conectam esta etapa se torna mais trabalhosa.

Apesar da similaridade com métodos tradicionais grande esforço vem sendo dispendido na elaboração de novos métodos sem malha. Devido à possibilidade de diferentes abordagens em cada etapa de formulação é interessante organizar os métodos *meshless* em categorias: a primeira de acordo com o tipo de representação do modelo, a segunda de acordo o tipo de aproximação utilizada e a terceira de acordo com a formulação do sistema de equações de origem.

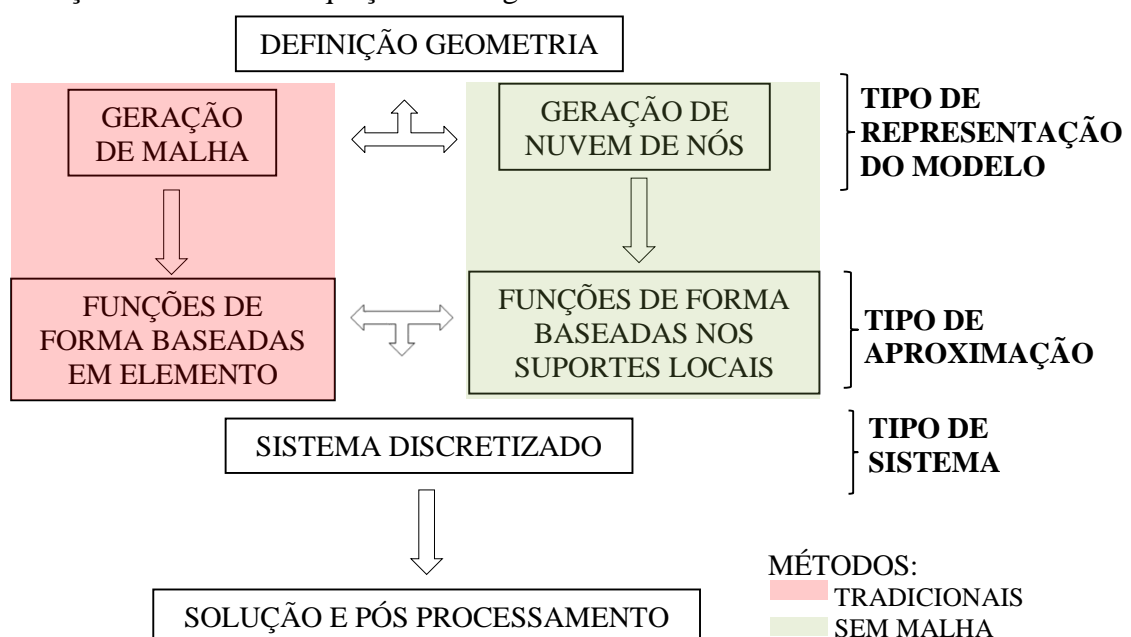


Figura 3.1 Resumo esquemático para utilização de métodos numéricos

Para classificar os métodos meshless de acordo com a representação do modelo torna-se necessário verificar como o problema será resolvido: se a aproximação da equação ocorre no domínio e as condições de contorno são totalmente ou parcialmente satisfeitas, têm-se os métodos de domínio (*domain-type methods*) como por exemplo o EFG, MLPG, LRPIM, *etc.*. Em contrapartida se as aproximações satisfazem as equações de governo e as condições de contorno são aproximadas têm-se os métodos de contorno (*boundary-type methods*) como por exemplo o BNM, LBIE, BPIM, MFS, *etc.*.

O tipo de aproximação está diretamente relacionado a técnica utilizada para construção das funções de aproximação. Diferentemente do MEF estas não são pré-definidas nem baseadas no conceito de elemento e, os métodos sem malha a criação e cálculo das funções de forma é um dos pontos centrais e mais importantes. O grande desafio consiste em como criá-las de forma eficiente e de boa qualidade para nós aleatórios resultantes da discretização do problema (LIU e GU, 2005). De maneira geral, os métodos variam de acordo com tipo de representação das funções de forma: pode ser utilizada a representação séries, como por exemplo MQM, RBF, RPIM, representação integral, como por exemplo SPH e RKPM ou ainda por derivadas, como por exemplo GFDM.

No que concerne a formulação do sistema de equações existem ainda outras semelhanças entre os métodos tradicionais e os *meshless*: os métodos podem ser diretos, ou seja, a aproximação do sistema é baseada na forma forte ou ainda métodos indiretos, onde a discretização é baseada na forma fraca do problema de valor de contorno (PVC) em questão. Um panorama geral dos métodos sem malha de acordo com as categorias citadas, bem como as siglas e nomenclaturas utilizadas pode ser visto no anexo B.

A solução do PVC dificilmente será obtida analiticamente, para tanto, assume-se que a solução é uma combinação linear finita de parametros desconhecidos com funções apropriadas (REDDY, 1986). Mas, ao representar um meio contínuo por finitas soluções, gera-se um residuo. Consequentemente, a solução encontrada é uma solução aproximada e não exata. Os métodos comumente empregados para solução de equações diferenciais através da utilização de soluções aproximadas são os métodos variacionais.

Nos métodos variacionais observam-se duas técnicas de resolução: a de minimização do funcional ou minimização do residuo gerado pela aproximação, a primeira pode ser realizada através do Método de Ritz utilizando princípios como o de

Hamilton e da Energia Potencial Mínima (abordagem física), já para a segunda técnica cita-se o Método dos Resíduos Ponderados (abordagem matemática), que pode ser ainda dividido em Método dos Mínimos Quadrados, Método de Galerkin, Método da Colocação, Método dos Subdomínios e Método dos Momentos, *etc.*

Os métodos variacionais são aplicados na forma integral equivalente da equação de governo e, isto se torna necessário devido ao fato da substituição da aproximação na equação governante nem sempre gerar o número de equações lineares independentes necessária ao cálculo dos coeficientes desconhecidos (REDDY, 1993). A forma integral equivalente é a forma forte do problema e, a função de aproximação da variável campo deve ter grau suficiente de consistência e ser diferenciável até a ordem da equação diferencial que descreve o problema. Geralmente baseados na técnica de colocação, esses métodos possuem como vantagens: serem de fácil implementação, computacionalmente baratos e verdadeiramente sem malha. Em contrapartida as desvantagens podem ser: instáveis, pouco robustos e de precisão sensível.

Como forma de “abrandar” os critérios de consistência e diferenciabilidade das funções utilizadas, pode-se utilizar a técnica de integração por partes da forma integral e formar, o que é conhecido, como forma fraca da equação. No geral, as formulações baseadas na forma fraca utilizam-se dos Métodos de Galerkin (funções de base iguais para função de forma e funções teste) ou Petrov-Galerkin (funções de base diferentes para função de forma e funções teste) e, além disso ainda podem ser aplicadas global ou localmente. Possuem como vantagens serem mais robustas, estáveis e produzirem resultados mais acurados, em contrapartida, muitas das vezes são necessárias células ou subdomínios de apoio para sua aplicação.

Nesta tese dois métodos numéricos serão utilizados para modelar o problema da poroelasticidade. Na fase fluida será utilizado o Método das Soluções Fundamentais, um método de contorno, com função de aproximação baseada nas soluções fundamentais através do método da colocação aplicado na forma forte do problema. Para a fase elástica será utilizado o Método de Petrov-Galerkin Local (MLPG) que é um método com formulação de domínio baseado na forma fraca e será utilizada apenas funções de forma construídas pelo Mínimo Quadrados Móveis (MQM).

A seguir serão apresentados a formulação genérica do problema através dos resíduos ponderados, formulação matemática dos métodos derivados e o processo de construção das funções de forma.

### 3.1 Método Dos Resíduos Ponderados

O método dos resíduos ponderados é considerado uma ferramenta genérica e poderosa de aproximação de equações diferenciais. Resumidamente, o método consiste na minimização dos resíduos gerados pela aproximação, de tal sorte que, considere um fenômeno modelado pela equação:

$$F[u_g(\mathbf{x})] + b(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{no domínio } \Omega \quad (3.1)$$

onde  $F$  é um operador diferencial que aplicado a função da variável campo  $u_g(\mathbf{x})$  produz uma função  $-b(\mathbf{x})$ . Para definição do PVC deve-se estabelecer as condições de contorno:

$$G[u_g(\mathbf{x})] = g(\mathbf{x}), \quad \text{no contorno } \Gamma \quad (3.2)$$

onde  $G$  é um operador diferencial que aplicado a função da variável campo  $u_g(\mathbf{x})$  produz uma função  $g(\mathbf{x})$ .

Métodos numéricos resolvem problemas de engenharia de maneira aproximada. Logo, a variável campo  $u$  será aproximada como:

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\boldsymbol{\alpha} \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{B}$  são as funções de base (*trial or basis functions*) e  $\boldsymbol{\alpha}$  os coeficientes indeterminados e  $n$  o número de funções a ser utilizado. As funções de base devem ser escolhidas de tal sorte que, cumpram as condições de continuidade e diferenciabilidade requeridas pelo sistema. Aproximando (3.1) e (3.2) através de (3.3):

$$F[u_h(\mathbf{x})] + b(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (3.4)$$

$$G[u_h(\mathbf{x})] \neq g(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

ou seja, existe um erro entre a solução exata e a solução aproximada, para o domínio tem-se o resíduo  $R_s(\mathbf{x})$  e para o contorno  $R_b(\mathbf{x})$ :

$$F[u_h(\mathbf{x})] + b(\mathbf{x}) = R_s(\mathbf{x}) = F[u_h(\mathbf{x})] - F[u_g(\mathbf{x})] \quad (3.6)$$

$$G[u_h(\mathbf{x})] - g(\mathbf{x}) = R_b(\mathbf{x}) = G[u_h(\mathbf{x})] - G[u_g(\mathbf{x})] \quad (3.7)$$

Nota-se a partir das equações (3.6) e (3.7) que a ordem de grandeza dos resíduos é dependente da função de aproximação ( $u_h$ ) escolhida, idealiza-se que, esta deve escolhida de tal maneira que minimize o resíduo em cada ponto do domínio  $\Omega$  e no contorno  $\Gamma$ . Entretanto, satisfazer esse requisito apresenta grande dificuldade. Logo, para contornar tal adversidade, os resíduos serão zerados em um sentido médio, a partir de uma ponderação das integrais:

$$\int_{\Omega} w_i R_s(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} v_i R_b(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.8)$$

onde  $w_i$  e  $v_i$  são as funções teste ou funções peso (*test functions or weight functions*) escolhidas para ponderar respectivamente os resíduos de domínio  $R_s(\mathbf{x})$  e de contorno  $R_b(\mathbf{x})$  e  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  o número de funções teste utilizado.

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.8), obtem-se:

$$\int_{\Omega} w_i [F[u_h(\mathbf{x})] + b(\mathbf{x})] + \int_{\Gamma} v_i [G[u_h(\mathbf{x})] - g(\mathbf{x})] = 0 \quad (3.9)$$

utilizando a função de aproximação definida em (3.3):

$$\int_{\Omega} w_i [F(\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}) + b(\mathbf{x})] + \int_{\Gamma} v_i [G(\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}) - g(\mathbf{x})] = 0 \quad (3.10)$$

define-se a forma geral dos métodos dos resíduos ponderados. A partir da resolução do sistema (3.10) com  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  equações, encontram-se os  $\alpha_i$  que farão zerar a média dos resíduos.

O tipo e a precisão do método numérico adotado para o cálculo dos coeficientes  $\alpha_i$  e, assim, estabelecer as funções de aproximação, estão diretamente relacionados com as funções teste escolhidas, apresenta-se na tabela 3.1 alguns métodos:

MÉTODO	FUNÇÃO TESTE	ZERA O RESÍDUO EM
<b>Colocação</b>	$w_i = \delta(x - x_i)$ $v_i = \delta(x - x_i)$ $\delta(x - x_i) = \begin{cases} 0, & \text{quando } x \neq x_i \\ 1, & \text{quando } x = x_i \end{cases}$	Pontos específicos $x_i$
<b>Subdomínios</b>	$w_i = v_i = \begin{cases} 1, & \text{dentro de } \Omega_s \\ 0, & \text{fora de } \Omega_s \end{cases}$	Subdomínios $\Omega_s$
<b>Momentos</b>	$w_i = v_i = x_i^{i-1}, i = 1, 2, 3, \dots, n$	Domínio $\Omega$ e contorno $\Gamma$
<b>Mínimos Quadrados</b>	$w_i = \frac{\partial R_s}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial F(u_h)}{\partial \alpha_i}$ $v_i = \frac{\partial R_b}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial G(u_h)}{\partial \alpha_i}$	Domínio $\Omega$ e contorno $\Gamma$
<b>Galerkin</b>	$w_i = B_i$ $v_i = -B_i$	Domínio $\Omega$ e contorno $\Gamma$

Tabela 3.1 Métodos utilizados para cálculo das funções de aproximação

A seguir será aplicado ao método dos resíduos ponderados o método da colocação para estabelecimento da técnica de resolução da forma forte do problema, bem como uma breve descrição do método dos subdomínios para estabelecimento da formulação local que foi utilizada neste trabalho.

### 3.2 Método Da Colocação Pontual

O método da colocação é um método interpolatório desenvolvido por (FRAZER , JONES e SYLVIA, 1937). No método, a função delta de Dirac é utilizada como função teste (função de ponderação) e requer que a equação diferencial seja exatamente satisfeita em alguns pontos específicos (pontos de colocação) e, através desta restrição os coeficientes possam ser determinados. Assim, a função teste é dada por:

$$w_i = v_i = \delta(x - x_i) = \begin{cases} 0, & \text{quando } x \neq x_i \\ 1, & \text{quando } x = x_i \end{cases}, i = 1, 2, \dots, N^c \quad (3.11)$$

onde  $N^c$  representam os pontos de colocação. Aplicando (3.11) na equação dos resíduos ponderados (3.8) resulta em:

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i) R_s(x) + \int_{\Gamma} \delta(x - x_i) R_b(x) = 0 \quad (3.12)$$

e, consequentemente, obtêm-se:

$$R_s(x_i) + R_b(x_i) = 0 \quad (3.13)$$

demonstrando que os resíduos são nulos para os  $N^c$  pontos de colocação escolhidos.

Assim, a partir de (3.9), conclui-se:

$$\begin{aligned} F \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i(x_i) \right] + b(x_i) &= 0, em \Omega \\ G \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i(x_i) \right] - g(x_i) &= 0, em \Gamma \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde  $B_i(x_i)$  são as funções de base, ou neste caso, assumem o papel de funções de forma e também, de interpolação, que devem ser escolhidas que tal sorte que atendam os critérios de diferenciabilidade do problema. Nota-se que o método da colocação pontual simplesmente substitui a incógnita do problema pela aproximação da mesma em  $N^c$  pontos no domínio e no contorno:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i F[B_i(x_i)] + b(x_i) &= 0, em \Omega \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i G[B_i(x_i)] - g(x_i) &= 0, em \Gamma \end{aligned} \quad (3.15)$$

A partir do sistema apresentado em (3.15), do reforço das condições de contorno e da escolha das funções de interpolação a serem utilizadas, pode-se calcular os coeficientes desconhecidos  $\alpha_i$  e finalmente aproximar a variável de interesse. Mais uma vez, destaca-se a importância da escolha adequada das funções de interpolação – que podem variar a depender do método meshless escolhido conforme mostra tabela 3.2 – na eficiência e acurácia do método.

Nesta tese serão utilizadas funções de interpolação de base radial, mais especificamente, as soluções fundamentais, de tal sorte que, o Método das Soluções Fundamentais possa ser implementado.

### 3.3 Método Dos Subdomínios

O método dos subdomínios consiste em dividir o domínio  $\Omega$  do problema analisado em diversos domínios locais (subdomínios)  $\Omega_s$  e contorno  $\partial\Omega_s$ , os quais devem cobrir todo domínio original. Esta técnica é interessante pois a depender da geometria do problema, estabelecer funções teste que anulem o resíduo gerado em todo o domínio pode ser complexo (formulação global) e, para tanto, pode-se utilizar os subdomínios e estabelecer funções teste locais (formulação local).

Assume-se que as funções teste satisfaçam a propriedade:

$$w_i = v_i = \begin{cases} 1, & \text{dentro de } \Omega_s \\ 0, & \text{fora de } \Omega_s \end{cases} \quad (3.16)$$

E a equação (3.10) resulta em:

$$\int_{\Omega_s} w_i [F(\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}) + b(\mathbf{x})] + \int_{\partial\Omega_s = L_s \cup \Gamma_s} v_i [G(\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}) - g(\mathbf{x})] = 0 \quad (3.17)$$

onde o contorno do subdomínio  $\partial\Omega_s$  possui uma parcela interna local denotada por  $L_s$  e a parcela do contorno original denotada por  $\Gamma_s$ .

Neste trabalho será utilizado o método de Petrov Galerkin para o cálculo dos coeficientes, significando que, as funções base e as funções teste pertencem a espaços diferentes. Para cada subdomínio definido ao problema deverá ser calculada uma função de aproximação compatível. A aproximação da variável a nível local é obtida a partir da escolha da função teste, cálculo dos coeficientes  $\alpha_i$  desconhecidos e juntamente com as funções de base formarão as funções de forma, que interpolarão/aproximarão a variável nos subdomínios.

Para uma variável campo  $\mathbf{u}$  em qualquer ponto  $\mathbf{x} = (x, y)$  utilizado na discretização do domínio  $\Omega$  a aproximação deve ser calculada a partir da definição de subdomínios ou suportes locais. São definidos:

➤ **Domínio de suporte local:** suponha que seja necessário a aproximação  $u_h$  de uma determinada função em um ponto  $\mathbf{x} = (x, y)$  do domínio do problema, e que a função tenha valor conhecido em certos pontos do domínio, denominado nós. A função será aproximada (interpolada) a partir da equação (3.3):



$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) u_i \quad (3.18)$$

onde  $n$  número de nós dentro de um domínio de suporte local,  $\phi_i(\mathbf{x})$  é a função de forma do  $i$ -enésimo nó dentro do domínio de suporte obtida através do MQM,  $u_i$  é o valor da função no  $i$ -enésimo nó de suporte. Assim, nota-se que para um ponto qualquer  $\mathbf{x}$  o domínio de suporte determina o número de nós utilizados para aproximar/interpolarmos a função neste mesmo ponto  $\mathbf{x}$ , ou seja, o tamanho do domínio de suporte, traduzido pelo número de nós contido no mesmo, influencia diretamente na acurácia da aproximação da função em questão.

O subdomínio de suporte é centrado no ponto de cálculo  $\mathbf{x}$  e pode ter diversas formas, sendo as mais utilizadas, o formato circular e retangular (Figura 3.2). Este pode ainda ser ponderado usando funções que se anulam em sua fronteira, de tal sorte, cada nó de suporte recebe um grau de importância na aproximação em  $\mathbf{x}$ .

O requisito exigido do suporte local é que os estes cubram todo o domínio do problema, ainda que haja superposição de um com o outro. Para determinar o tamanho  $d_s$  do mesmo (LIU e GU, 2005):

$$d_s = \alpha_c d_c \quad (3.19)$$

onde  $\alpha_c$  é um fator de escala que amplia ou reduz o número de pontos contido no subdomínio e  $d_c$  é o espaçamento nodal utilizado para discretizar o domínio. Caso o espaçamento seja não uniforme,  $d_c$  pode ser tomado como a média dos espaçamentos utilizados (LIU, 2009).

➤ **Domínio de influencia** ou **domínio de integração**: quando o domínio apresenta uma distribuição regular ou quando a densidade nodal não varia muito, o conceito de domínio de suporte funciona bem (LIU e GU, 2005). Entretanto, quando existem mudanças abruptas da densidade nodal ou ainda uma escolha ruim dos nós de suporte – como por exemplo, estarem concentrados em apenas uma região da malha – erros consideráveis na aproximação são gerados. A fim de evitar tais problemas o conceito de domínio de influencia deve ser inserido.

O domínio de influencia é definido pela região ou domínio no qual um nó exerce influencia. O centro do domínio de influencia é determinado por um nó enquanto no

domínio de suporte ele é, no geral, determinado por um ponto (por exemplo, um ponto de quadratura). Observe que domínio de influencia refere-se a um nó e está ligado à região local, enquanto domínio de suporte refere-se a um ponto e está ligado a nós locais (LIMA, 2011).

Para construir as funções de forma de ponto  $\mathbf{x}$ , um nó só será envolvido na construção da função de forma de um ponto  $\mathbf{x}$ , se este mesmo ponto estiver contido no domínio de influencia deste nó. Ou seja, se o domínio de influencia de um nó cobrir o ponto  $\mathbf{x}$ , logo, este nó fará parte da construção da função de forma do mesmo (LIU e GU, 2005).

Assim como o domínio de suporte, o domínio de influencia pode ser calculado de acordo com o espaçamento nodal:

$$d_i = \alpha_i d_c \quad (3.20)$$

onde  $d_i$  é o tamanho do domínio de influencia e  $\alpha_i$  o fator de escala que rege o tamanho do mesmo. Nesta metodologia, o tamanho do subdomínio é especificado e não o número de pontos contido no mesmo.

Em contrapartida, o número de pontos pode ser fixado para que posteriormente o tamanho do subdomínio seja calculado (FONTES, 2014):

$$d_i = \alpha_i d_{O(m)}^{MQM} \quad (3.21)$$

onde  $d_{O(m)}^{MQM}$  é a posição  $O(m)$  do vetor  $\mathbf{d}^{MQM}$  que contém em ordem crescente todas as distâncias entre o ponto de análise e demais pontos do domínio. A partir da escolha do número  $n$  de pontos do subdomínio, torna-se possível a escolha de quais posições do vetor  $\mathbf{d}^{MQM}$  serão utilizadas e, assim, saber o tamanho do domínio.

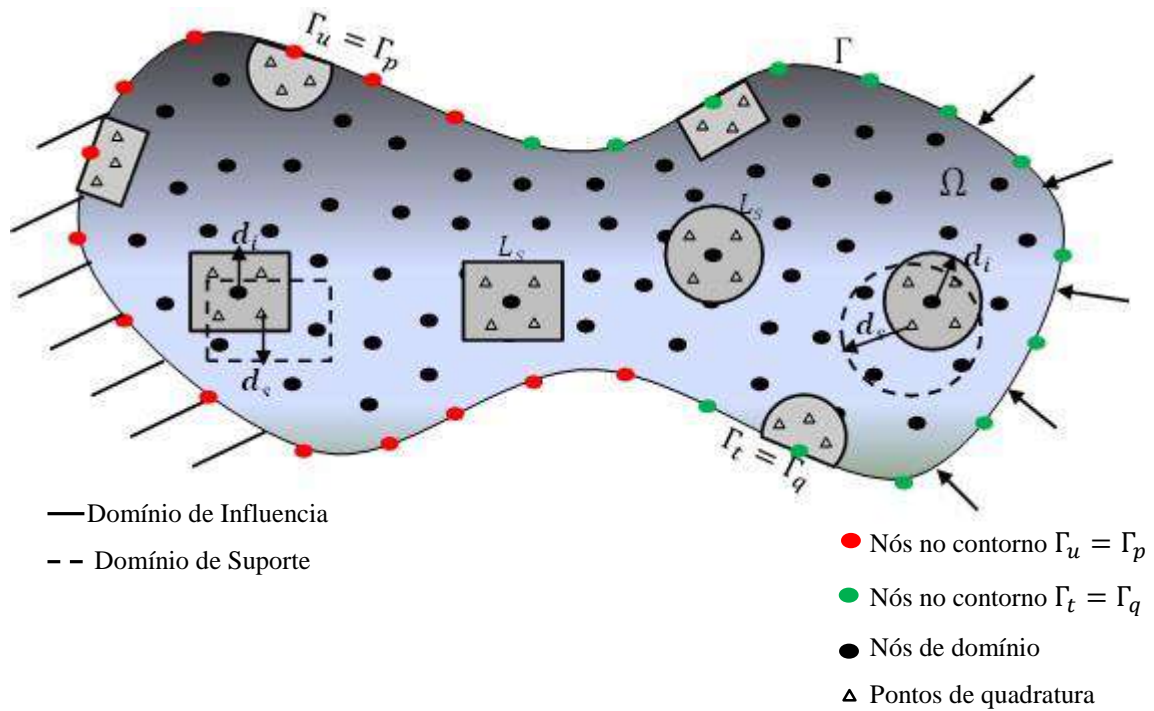


Figura 3.2 Representação gráfica domínio de influencia e domínio de suporte

### 3.4 Aspectos Das Funções De Forma/Interpolação

As funções de forma devem ser capazes de aproximar a variável campo de interesse através de uma combinação linear. No MEF ou no MEC, por exemplo, as funções de forma já são pré-definidas e por isto tem baixo custo computacional, mas nos métodos sem malha uma das etapas mais importantes é a construção destas, o que, naturalmente, aumenta o custo computacional.

Tendo em vista que existe apenas uma distribuição aleatória de nós e, a princípio, sem nenhum tipo de conectividade e/ou correlação estabelecido, o desafio consiste em apresentar métodos eficientes o suficiente para gerar funções de forma que atendam algumas das propriedades:

#### A) Distribuição Nodal Arbitrária:

De maneira a tornar o método mais flexível possível, deseja-se que a montagem das funções de forma não dependa de malhas/células/elementos, bem como não dependam do espaçamento regular ou irregular do nós

B) Estabilidade:

A característica da estabilidade das funções de aproximação está ligada a dois fatores: a instabilidade da interpolação e a instabilidade da solução. Na primeira, ainda que hajam pequenas perturbações no posicionamento dos nós dentro do suporte, a função deve ser estável e, conseqüentemente, as matrizes (utilizadas no processo de cálculo das funções de forma) devem ser bem condicionadas mesmo para nós distribuídos arbitrariamente (LIU e GU, 2005). Na segunda, dependendo da natureza do problema a resposta pode apresentar oscilações se, a função de interpolação não apresentar tais oscilações numéricas, a incompatibilidade entre as funções acarretará em uma aproximação precária.

C) Consistência:

A consistência das funções de forma está associada a ordem do polinômio que esta é capaz de reproduzir de forma exata. Para a convergência do método é necessário que as funções de forma atendam a um certo grau de consistência, por exemplo, se a função reproduz uma função linear diz-se que ela tem ordem de consistência um ou  $C^1$ , ou se reproduz uma função constante, sua ordem é zero ou  $C^0$ .

A depender do método adotado, as exigências quanto a diferenciação da função de forma é alterada, conseqüentemente o grau de consistência deve ser rigorosamente atendido para garantir a existência das derivadas necessárias.

D) Suporte Compacto:

O suporte é o espaço no qual a função de forma existe, fora deste espaço a função vale zero. É desejável que o suporte seja compacto – isto é, com pequeno número de nós – para que as matrizes geradas no sistema sejam esparsas e computacionalmente fáceis de serem resolvidas.

E) Compatibilidade:

A compatibilidade das funções de forma está associada à função de aproximação ser contínua em todo o domínio do problema. Caso não seja possível atender a condição, técnicas de tratamento adicionais devem ser adotadas gerando, assim, maior custo computacional.

F) Propriedade Delta de Kronecker:

A propriedade do delta de Kronecker é dada por:

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 0, & \text{quando } x \neq x_i \\ 1, & \text{quando } x = x_i \end{cases} \quad (3.22)$$

Ao atender a propriedade do delta de Kronecker as funções de forma podem ser chamadas de funções de interpolação, isto porque é garantido que a aproximação calculada passa exatamente nos pontos onde a função a ser aproximada é conhecida (LIMA, 2011).

Caso a propriedade não seja atendida, técnicas adicionais de tratamento das condições de contorno essenciais devem ser adotadas, como por exemplo os multiplicadores de Lagrange ou método das penalidades.

G) Partição da Unidade:

O critério da partição da unidade diz que:

$$\sum_{i \in S_n} \phi_i = 1 \quad (3.23)$$

A soma das funções de forma contidas no suporte compacto  $S_n$  deve ser igual a um. Este critério está diretamente ligado ao critério da consistência, uma vez que atender a partição de unidade garante que no mínimo as funções são de classe  $C^0$ . Tal fato, demonstra que as funções de forma são capazes de reproduzir funções constantes (modos de corpo rígido) e garantem a convergência monotônica do método utilizado (SANTANA, 2014).

Ressalta-se que existem várias maneiras de se construir funções de forma mas ainda não existe um procedimento que atenda simultaneamente todas as propriedades citadas anteriormente. As técnicas de construção das funções de forma podem ser classificadas de acordo com o tipo de teoria adotada para representação da função:

Representação em Séries	Representação Integral	Representação Diferencial
×Mínimos Quadrados (MLS, WLS) ×Funções de Base Radial (RBF) ×Interpolação Pontual (PIM, RPIM) ×Partição da Unidade (PUFEM, hp-clouds)	×Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas (SPH) ×Partículas Reprodutoras do Núcleo (RKPM)	×Diferenças Finitas Generalizadas (GDFM)

Tabela 3.2 Métodos utilizados para construção de funções de forma

Um dos métodos mais utilizados para o cálculo das funções de forma é o Método dos Mínimos Quadrados, isto se deve ao fato deste apresentar uma boa precisão e eficiência computacional (ATLURI e SHEN, 2002) e (LIU e GU, 2005). Neste trabalho o método será utilizado juntamente com a técnica de subdomínios para o cálculo das variáveis elásticas do meio. A seguir será apresentado com mais detalhes sua formulação.

#### 3.4.1 Método Dos Mínimos Quadrados Móveis

Seja  $u(\mathbf{x})$  a função que exprime a variável campo definida em todo domínio  $\Omega$ . A função aproximada  $u_h(\mathbf{x})$  da função  $u(\mathbf{x})$  em qualquer ponto  $\mathbf{x}$  pode ser escrita através dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM) por:

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (3.24)$$

onde  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}) \ p_2(\mathbf{x}) \ \dots \ p_m(\mathbf{x})]$  são os termos da base polinomial,  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}) \ a_2(\mathbf{x}) \ \dots \ a_m(\mathbf{x})]$  são os coeficientes desconhecidos e  $m$  é o número de termos da base polinomial. A base polinomial pode ser escrita para 1D:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, x^2, \dots, x^m], \text{ base linear } (t = 1) \quad (3.25)$$

para 2D:

$$\mathbf{p}^T(x, y) = [1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^m, y^m], \text{ base quadrática } (t = 2) \quad (3.26)$$

e, finalmente, para 3D:

$$\mathbf{p}^T(x, y, z) = [1, x, y, z, xy, yz, xz, x^2, y^2, \dots, x^m, y^m, z^m], \text{ base cúbica } (t = 3) \quad (3.27)$$

A relação entre o numero de termos da base polinomial  $m$  e a ordem da base  $t$ , pode ser estabelecido como:

$$\begin{aligned} m &= t + 1, \text{ para } 1D \\ m &= \frac{(t + 1)(t + 2)}{2}, \text{ para } 2D \\ m &= \frac{(t + 1)(t + 2)(t + 3)}{6}, \text{ para } 3D \end{aligned} \quad (3.28)$$

O objetivo do método é minimizar o funcional  $J$  do resíduo ponderado gerado da relação entre função aproximada  $u_h(\mathbf{x})$  e função exata  $u(\mathbf{x})$ . Define-se:

$$J = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) [u_h(\mathbf{x}_i) - u_i]^2 \quad (3.29)$$

substituindo (3.10) em (3.16):

$$J = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) \left[ \sum_{j=1}^m a_j(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}_i) - u_i \right]^2 \quad (3.30)$$

onde  $w_i(\mathbf{x})$  representa a função peso, centrada em  $\mathbf{x}$  e avaliada em todos os  $\mathbf{x}_i$  e  $n$  é o número de pontos dentro do domínio de suporte local definido em 3.3. A minimização do funcional exige que:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \left\{ \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) \left[ \sum_{j=1}^m a_j(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}_i) - u_i \right]^2 \right\} = 0 \quad (3.31)$$

Escrevendo (3.31) na forma matricial, encontra-se:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [J] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [(\mathbf{Pa} - \mathbf{u})^T \mathbf{W} (\mathbf{Pa} - \mathbf{u})] = 0 \quad (3.32)$$

Expandindo-se os produtos matriciais e aplicando a minimização obtêm-se:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [J] = 2\mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{Pa} - 2\mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{u} = 0 \quad (3.33.a)$$

$$\mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{Pa} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{u} \quad (3.33.b)$$

ou seja, um sistema linear da forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.34)$$

onde  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P}$  é uma matriz de ordem  $m \times m$  simétrica,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}$  é uma matriz de ordem  $m \times n$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  é um vetor de ordem  $m$  e  $\mathbf{u}$  um vetor de ordem  $n$ .  $\mathbf{P}^T$  e  $\mathbf{W}$  são expressos por:

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{x}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2(\mathbf{x}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (3.36)$$

Resolvendo o sistema definido em (3.34):

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.37)$$

a condição para que matriz de momento ponderada  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  não seja singular (inversível) é que o número  $n$  de pontos no domínio de suporte seja maior que o numero  $m$  de termos da base polinomial.

Substituindo a solução aproximada descrita em (3.24) pode ser reescrita em termos de (3.37) como:

$$u_h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}^T(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x})u_i \quad (3.38)$$

onde fica exposto que a solução  $u_h(\mathbf{x})$  será aproximada através da função de forma  $\phi_i(\mathbf{x})$  em relação aos parâmetros de todos os  $n$  nós dentro do suporte.

Assim, pode reescrever a função de forma gerada pelo MQM através de:

$$\mathbf{\Phi}^T(\mathbf{x}) = [\phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \phi_n(\mathbf{x})] = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (3.39)$$

As derivadas espaciais do vetor campo necessárias à discretização do sistema de equações só poderão ser obtidas se, as derivadas das funções de forma puderem ser calculadas. Para tanto, reescreve-se (3.39) como:

$$\mathbf{\Phi}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{\tau}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (3.40)$$



onde  $\boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x})$  pode ser calculado através da resolução de:

$$\boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (3.41.a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (3.41.b)$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \quad (3.41.c)$$

calculando assim,  $\boldsymbol{\tau}$ . Substituindo-o em (3.40) obtêm-se o cálculo do vetor  $\boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{x})$ . As derivadas parciais de  $\boldsymbol{\tau}$  são :

✓ Derivadas parciais de primeira ordem:

$$\mathbf{p}_{,i} = (\mathbf{A}\boldsymbol{\tau})_{,i} = \mathbf{A}\boldsymbol{\tau}_{,i} + \mathbf{A}_{,i}\boldsymbol{\tau} \quad (3.42.a)$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\tau}_{,i} = \mathbf{p}_{,i} - \mathbf{A}_{,i}\boldsymbol{\tau} \quad (3.42.b)$$

✓ Derivadas parciais de segunda ordem:

$$\mathbf{p}_{,ij} = (\mathbf{A}\boldsymbol{\tau})_{,ij} = \mathbf{A}\boldsymbol{\tau}_{,ij} + \mathbf{A}_{,i}\boldsymbol{\tau}_{,j} + \mathbf{A}_{,j}\boldsymbol{\tau}_{,i} + \mathbf{A}_{,ij}\boldsymbol{\tau} \quad (3.43.a)$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\tau}_{,ij} = \mathbf{p}_{,ij} - (\mathbf{A}_{,i}\boldsymbol{\tau}_{,j} + \mathbf{A}_{,j}\boldsymbol{\tau}_{,i} + \mathbf{A}_{,ij}\boldsymbol{\tau}) \quad (3.43.b)$$

onde a vírgula designa derivada parcial em relação as coordenadas espaciais. Para a função  $\boldsymbol{\Phi}$ , escreve-se:

✓ Derivadas parciais de primeira ordem:

$$\boldsymbol{\Phi}^T_{,i} = \boldsymbol{\tau}_{,i}^T \mathbf{B} + \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{B}_{,i} \quad (3.44)$$

✓ Derivadas parciais de segunda ordem:

$$\boldsymbol{\Phi}^T_{,ij} = \boldsymbol{\tau}_{,ij}^T \mathbf{B} + \boldsymbol{\tau}_{,i}^T \mathbf{B}_{,j} + \boldsymbol{\tau}_{,j}^T \mathbf{B}_{,i} + \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{B}_{,ij} \mathbf{A}\boldsymbol{\tau}_{,ij} \quad (3.45)$$

Há que se notar que as funções de forma calculadas pelo MQM não possuem a propriedade do Delta de Kronecker  $\phi_i(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij}$ , o que resulta em  $u_h(\mathbf{x}_i) \neq u_i$ . Logo, elas não são interpoladoras, mas uma aproximação da função. Esta propriedade faz com que as imposições das condições de contorno essenciais sejam mais complexas que aquelas utilizadas no MEF, por exemplo (LIU, 2009). Uma alternativa seria a utilização de funções de base radial ou do Método dos Mínimos Quadrados Ortogonais (FONTES, 2014).

As funções peso  $w_i(\mathbf{x})$  utilizadas no MQM possuem características como (LIU e GU, 2005):

- ✓  $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) > 0$ , dentro do domínio de suporte;
- ✓  $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 0$ , fora do domínio de suporte;
- ✓ São centradas no ponto  $\mathbf{x}$  e decresce monoliticamente até os extremos do domínio de suporte;
- ✓ Devem ser suficientemente suaves, especialmente nos contornos do subdomínio, de tal sorte que, garanta a inclusão e exclusão suave de nós quando o domínio do suporte se move.

As funções de ponderação podem ser escolhidas de maneira aleatória desde que cumpram os critérios citados acima, as funções mais comumente utilizadas são:

- ✓ Spline de 3ª ordem:

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4(\bar{r}_i)^2 + 4(\bar{r}_i)^3, & \bar{r}_i \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4(\bar{r}_i) + 4(\bar{r}_i)^2 - \frac{4}{3}(\bar{r}_i)^3, & 0.5 < \bar{r}_i \leq 1 \\ 0, & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (3.46)$$

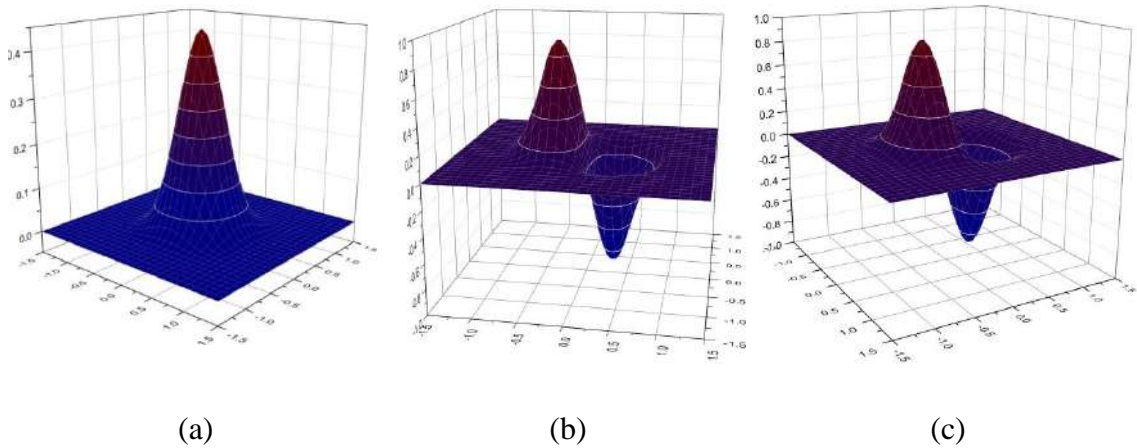


Figura 3.3 Função spline de 3ª ordem: (a)  $w(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , (b)  $\partial w / \partial x$  e (c)  $\partial w / \partial y$

✓ Spline de 4ª ordem:

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6(\bar{r}_i)^2 + 8(\bar{r}_i)^3 - 3(\bar{r}_i)^4, & \bar{r}_i \leq 1 \\ 0, & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (3.47)$$

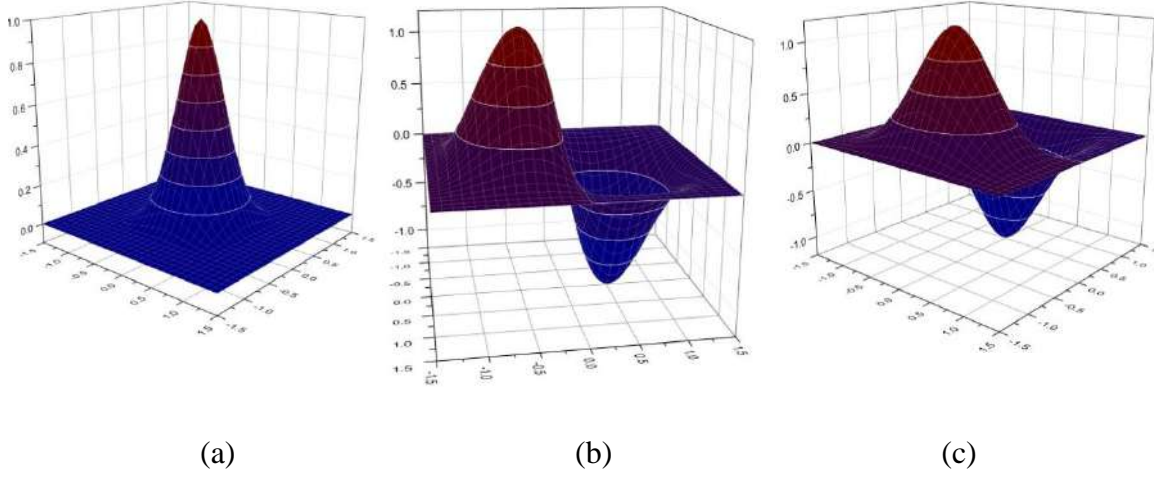


Figura 3.4 Função spline de 4ª ordem: (a)  $w(\mathbf{x},\mathbf{y})$ , (b)  $\partial w/\partial x$  e (c)  $\partial w/\partial y$

✓ Exponencial:

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-[\bar{r}_i/c_i]^2}, & \bar{r}_i \leq 1 \\ 0, & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (3.48)$$

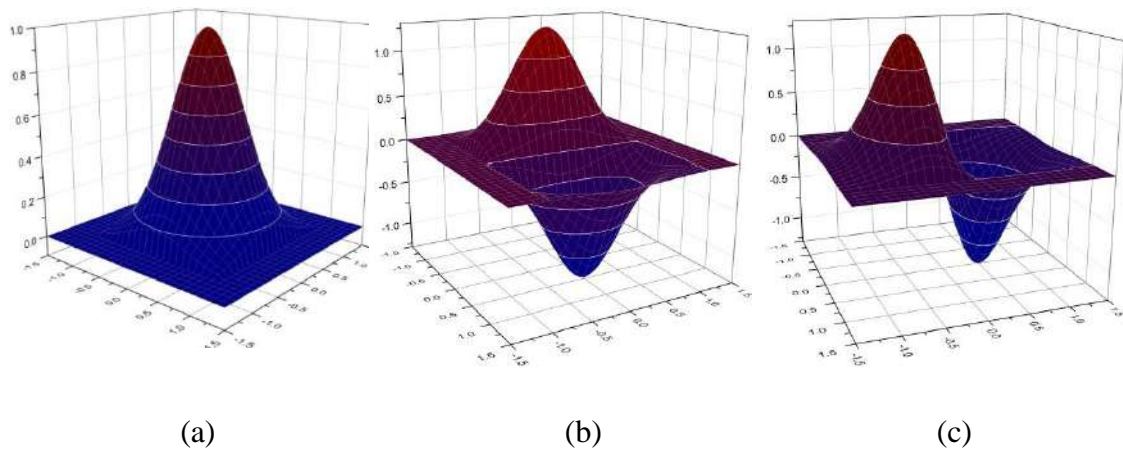


Figura 3.5 Função Exponencial: (a)  $w(\mathbf{x},\mathbf{y})$ , (b)  $\partial w/\partial x$  e (c)  $\partial w/\partial y$

✓ Gaussiana:

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{e^{-[\bar{r}_i]^{2k}} - e^{-[(d_s/c_i)]^{2k}}}{1 - e^{-[(d_s/c_i)]^{2k}}}, & \bar{r}_i \leq 1 \\ 0, & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (3.49)$$

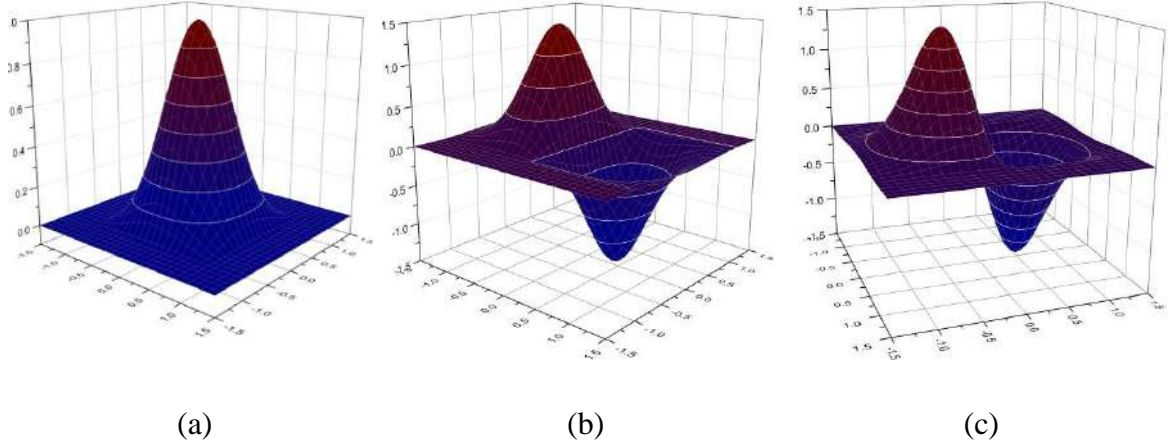


Figura 3.6 Função Gaussiana: (a)  $w(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , (b)  $\partial w / \partial x$  e (c)  $\partial w / \partial y$

onde  $c_i$  é uma constante, e  $\bar{r}_i$  é definido como:

$$\bar{r}_i = \frac{d_i}{d_s} = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}{d_s} \quad (3.50)$$

representando assim, a relação entre  $d_i$  a distância Euclidiana entre o ponto  $\mathbf{x}$  e o ponto  $\mathbf{x}_i$  e  $d_s$  o tamanho do domínio de suporte.

## 4 ABORDAGEM DO PROBLEMA

Na modelagem do fenômeno da poroelasticidade o problema deve ser resolvido a partir da solução dos domínios componentes ao sistema hidrogeomecânico que agem de forma iterativa. Esta iteração de sistemas com diferentes propriedades é comum e podem ocorrer com diferentes graus de intensidade, de tal sorte que, a solução individual de cada sistema sem a consideração das influências geradas pelos demais sistemas componentes do todo torna-se impossível.

No processo evolutivo do fenômeno do adensamento, quando completamente saturado e incompressível, o carregamento externo aplicado ao meio é transferido ao fluido que, além de ocupar os vazios gera também um campo de pressões. Este excesso de poro-pressão será vagarosamente dissipado ao longo do tempo, transferindo assim, carregamento as partículas sólidas e deformando o meio e, a partir desta o ciclo inicia-se novamente. Conclui-se que a dissipação da pressão ao longo do tempo gera uma deformação volumétrica no esqueleto sólido, definindo assim, as variáveis comuns necessárias ao acoplamento conforme pode ser visto na figura 4.1.

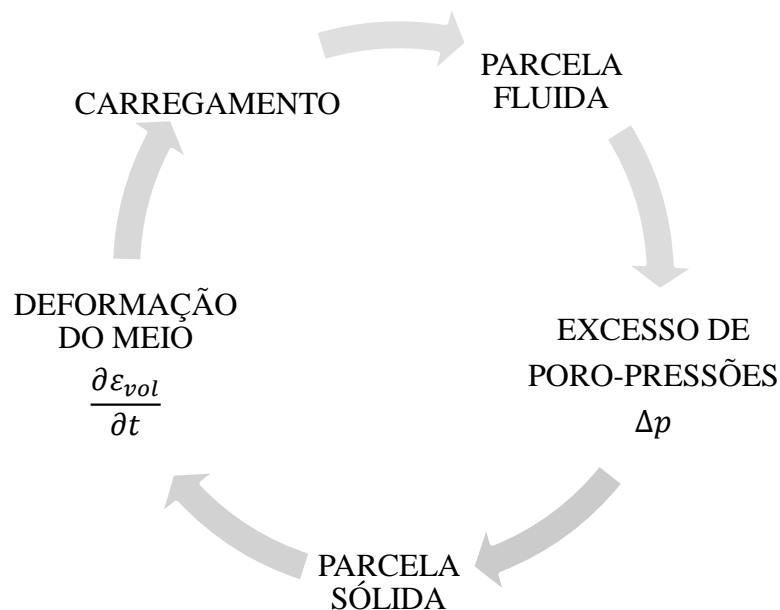


Figura 4.1 Ciclo simplificado do adensamento para meios incompressíveis

Para realizar o acoplamento do sistema definem-se quatro estratégias: desacoplado, totalmente acoplado, acoplamento parcial iterativo e acoplamento iterativo,

cada um com suas vantagens e desvantagens no que concerne à precisão, adaptabilidade e eficiência computacional (SETTARI e WALTERS, 2001).

O método desacoplado é um dos métodos mais utilizados em softwares comerciais de reservatórios convencionais devido seu baixo custo computacional (SETTARI e WALTERS, 2001). Isto se deve ao fato de que, o sistema geomecânico é desconsiderado ou computado através de leis empíricas e assim, apenas o sistema hidráulico é resolvido. Apesar de ser um modelo simples, a precisão e a modelagem de alguns efeitos geomecânicos são pobres.

Já em relação ao método totalmente acoplado, deformações e pressões são resolvidas de maneira simultânea, o sistema hidro-geomecânico é calculado de maneira conjunta o que, como consequência, gera um método preciso, porém caro.

Em relação aos acoplamentos iterativos, a idéia principal é resolver os sistemas separadamente, mas, de tal sorte que, as respostas do primeiro simulador alimentem o segundo simulador. A diferença entre o acoplamento parcial iterativo e o acoplamento iterativo, reside no fato de que, no primeiro as respostas do primeiro simulador afetam o segundo simulador apenas no passo de tempo seguinte, enquanto no acoplamento iterativo essa retroalimentação de dados acontece em um mesmo passo de tempo até que haja convergência e o resíduo das respostas seja pequeno.

Para os métodos iterativos, se o acoplamento for considerado forte, a convergência é dificilmente atingida e, dentre as metodologias, o acoplamento parcial é considerado um acoplamento fraco mas, o acoplamento total iterativo é considerado um método relativamente simples e de precisão similar ao método totalmente acoplado (AMBIEL, 2018). Outra vantagem importante deste último é a possibilidade de se utilizar métodos numéricos distintos para modelagem de cada fase do sistema, possibilitando assim, a escolha de um método eficiente para resolução de fluidos e de outro para resolução da fase elástica.

A partir da possibilidade de se utilizar diferentes métodos para cada fase do problema, esta tese propõe um procedimento que consiste em se fazer uso dos benefícios de distintos métodos meshless para resolução de cada fase do problema. O Método das Soluções Fundamentais (MSF) juntamente com o Método da Reciprocidade Dual (DRM) será utilizado para modelar a fase fluida, regida por uma equação não homogênea da difusão, já o Método de Petrov-Galerkin (MLPG) será utilizado para simular a fase sólida.

MSF	VANTAGENS	DESVANTAGENS
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• É um método genuinamente sem malha</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pode apresentar mal condicionamento ds matrizes</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Custo computacional reduzido</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Metodologia apresenta comportamento demasiado instável;</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Descrição compacta do problema (apenas contorno)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Muitas vezes limitado ao conhecimento prévio das soluções fundamentais</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Não apresenta nenhum tipo de integração numérica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Acurácia dependente do posicionamento dos pontos de colocação</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Usualmente utilizado para a análise de domínios infinitos ou semi-infinitos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Inexistência de relação matemática bem definida para o posicionamento dos pontos de colocação</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formulação matemática simples</li> </ul>	

Tabela 4.1 Análise de vantagens e desvantagens do MSF

MLPG	VANTAGENS	DESVANTAGENS
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• É um método genuinamente sem malha</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Precisão é muito dependente da técnica de integração numérica utilizada</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Existência de diversas variações baseados na escolha da função de ponderação, tornando-o versátil</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Muito sensível à escolha de parâmetros, como tamanho do domínio de influencia e domínio de suporte</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Inexistência de singularidades nas integrais</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Custo computacional elevado</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Para subdomínios com formas regulares, as integrais são de fácil avaliação</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pouco utilizado para meios infinitos e semi-infinitos</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Não há necessidade de técnica de suavização das grandezas derivadas, uma vez que o resultado original é suave o suficiente</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Necessidade de tratamentos mais elaborados para heterogeneidade e etc.</li> </ul>

Tabela 4.2 Análise de vantagens e desvantagens do MLPG

A partir do acoplamento iterativo e, conseqüentemente, a resolução de cada fase separadamente utilizando o método numérico mais adequado para o problema, pode-se fazer uso das vantagens individuais de cada método, acoplando o melhor de ambos e

superando as desvantagens. Os aspectos matemáticos dos métodos de maneira individual e da técnica de acoplamento utilizada serão abordados nos capítulos seguintes.



## 5 MODELAGEM FASE FLUIDA

No sistema poroelástico analisado, a partir de um carregamento instantâneo aplicado, o processo do adensamento será desencadeado a contar da mudança do campo hidrostático inicial. O excesso de poro-pressões gerará deformações volumétricas, que alterarão o campo de tensões e, como consequência, novas deformações e um novo campo hidrostático. Assim, nota-se que o processo se torna cíclico e, para a fase fluida a variável de interesse a ser calculada são as pressões, que no próximo passo será a variável de acoplamento prescrita.

A equação que descreve o comportamento da fase fluida (2.39.b) será modelada como uma equação da difusão não homogênea. Para o termo não homogêneo, a variação temporal da deformação volumétrica, será utilizado o Método da Reciprocidade Dual (DRM) e para a equação da difusão homogênea será utilizado o Método das Soluções Fundamentais (MFS). A descrição dos métodos, bem como as particularidades do acoplamento numérico MFS-DRM serão abordados a seguir.

### 5.1 Discretização Temporal

Considere um meio homogêneo, isotrópico delimitado pelo contorno  $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$  e de domínio  $\Omega$ , o sistema hidrodinâmico representativo do problema da poroelasticidade é escrito:

$$\begin{aligned}\alpha \frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} - \frac{k}{\mu_{din}} \nabla^2 p + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} &= 0 \text{ em } \Omega \\ p &= \bar{p} \text{ em } \Gamma_p \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= \bar{q} \text{ em } \Gamma_q\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$p = p_0 \text{ em } t = 0$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente de Biot,  $Q$  o módulo de Biot,  $k$  é a permeabilidade,  $\mu_{din}$  a viscosidade dinâmica,  $p(\mathbf{x}, t)$  o campo de pressões e  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  o fluxo com normal  $\mathbf{n}$ . Como opções para tratamento das derivadas temporais pode ser utilizado a transformada de Laplace ou a aproximação por diferenças finitas. Nesta tese será feito uso da técnica por diferenças finitas a fim de evitar o mal condicionamento geralmente gerado pela

transformada de Laplace. Assim, para obter o campo de pressões em qualquer tempo considerado, o tempo total do problema é dividido em passos de tempo  $\Delta t = t^n - t^{n-1}$  e aproxima-se as derivadas temporais por diferenças finitas regressivas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{p^n(\mathbf{x}) - p^{n-1}(\mathbf{x})}{\Delta t} \\ \frac{\partial \varepsilon_{vol}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{\varepsilon_{vol}^n(\mathbf{x}) - \varepsilon_{vol}^{n-1}(\mathbf{x})}{\Delta t}\end{aligned}\tag{5.2}$$

onde  $n$  indica o passo de tempo atual e  $n - 1$  indica o passo de tempo anterior. Aplicando-se a equação (5.2) em (5.1), obtém-se:

$$\alpha \left( \frac{\varepsilon_{vol}^n(\mathbf{x}) - \varepsilon_{vol}^{n-1}(\mathbf{x})}{\Delta t} \right) + \frac{1}{Q} \left( \frac{p^n(\mathbf{x}) - p^{n-1}(\mathbf{x})}{\Delta t} \right) = k \nabla^2 p^n(\mathbf{x})\tag{5.3}$$

se  $k = k/\mu_{din}$  e rearranjando a equação:

$$\alpha \left( \frac{\varepsilon_{vol}^n(\mathbf{x}) - \varepsilon_{vol}^{n-1}(\mathbf{x})}{k \Delta t} \right) - \frac{1}{Q k \Delta t} p^{n-1}(\mathbf{x}) = \nabla^2 p^n(\mathbf{x}) - \frac{1}{Q k \Delta t} p^n(\mathbf{x})\tag{5.4}$$

Com condições de contorno:

$$\begin{aligned}p^n(\mathbf{x}) &= \bar{p}^n \quad em \Gamma_p \\ q^n(\mathbf{x}) &= \bar{q}^n \quad em \Gamma_q\end{aligned}\tag{5.5}$$

No desenvolvimento do processo do adensamento, dentro de um mesmo passo de tempo o problema elástico é resolvido anteriormente ao problema hidrodinâmico. Observa-se que no lado esquerdo da equação (5.4) a existência da deformação volumétrica, que é o termo de acoplamento utilizado nesta fase, nota-se ainda, a necessidade da obtenção da mesma no passo de tempo atual e no anterior. Partindo-se do princípio que o problema elástico já foi calculado para o passo de tempo atual, a obtenção destes termos torna-se fácil já que em ambos os passos a variável pode ser considerada prescrita.

Ainda para a equação (5.4), conjuntamente a deformação volumétrica, o campo de pressões para o passo de tempo anterior também já foi obtido. Assim, a equação descrita será tratada como uma equação de Helmholtz Modificada utilizada para resolução de um problema de difusão não homogêneo. Logo, assumirá a forma:

$$(\nabla^2 - \lambda^2) p^n(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})\tag{5.6}$$

onde  $\lambda^2 = \frac{1}{Qk\Delta t}$  e o termo não homogêneo  $F(\mathbf{x})$  é dado por:

$$F(\mathbf{x}) = \alpha \left( \frac{\varepsilon_{vol}^n(\mathbf{x}) - \varepsilon_{vol}^{n-1}(\mathbf{x})}{k\Delta t} \right) - \lambda^2 p^{n-1}(\mathbf{x}) \quad (5.7)$$

Para a resolução do problema descrito em (5.4 – 5.7) será realizada uma abordagem totalmente sem malha e baseada na técnica da colocação pontual descrita em 3.2. De forma a evitar integrais de domínio, a solução do problema não homogêneo será composta pela solução particular e pela solução homogênea da equação de Helmholtz Modificada. De tal sorte que:

$$p(\mathbf{x}, t) = p_h(\mathbf{x}, t) + p_p(\mathbf{x}, t) \quad (5.8)$$

onde  $p_p(\mathbf{x}, t)$  satisfaz a equação não homogênea:

$$(\nabla^2 - \lambda^2)p_p(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (5.9)$$

mas não necessariamente satisfaz as condições de contorno (5.1). Já o termo homogêneo  $p_h(\mathbf{x}, t)$  satisfaz o sistema:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \lambda^2)p_h(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ p_h(\mathbf{x}, t) &= \bar{p}_h(\mathbf{x}, t) - p_p(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_p \\ q_h(\mathbf{x}) &= \bar{q}_h(\mathbf{x}, t) - q_p(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_q \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para a solução do problema homogêneo proposto em (5.10) será utilizado o Método das Soluções Fundamentais (MFS) e para a solução particular do problema (5.9) será utilizado o Método da Reciprocidade Dual (DRM). Destacando novamente de um método de contorno acoplado completamente livre de conectividades, células e/ou subdomínios para a aproximação da solução.

## 5.2 Método Das Soluções Fundamentais

O MFS foi originalmente proposto por (KUPRADZE, 1964) e é um método que se baseia no conceito dos pontos de colocação para aproximar a solução através da utilização das soluções fundamentais existentes para o problema. A aplicação do método para o problema homogêneo descrito em (5.10) resulta na seguinte aproximação para o campo de pressões e o cálculo do fluxo em cada ponto de colocação  $\mathbf{x}_i$ :

$$\begin{aligned}
p_h(\mathbf{x}_i) &= \sum_{j=1}^{N^f} \beta_j p_j^*(\xi_j, \mathbf{x}_i), i = 1, 2, \dots, N^c \\
q_h(\mathbf{x}_i) &= \sum_{j=1}^{N^f} \beta_j q_j^*(\xi_j, \mathbf{x}_i), i = 1, 2, \dots, N^c
\end{aligned} \tag{5.11}$$

onde  $p_h(\mathbf{x})$  é a solução aproximada para o campo de pressões,  $q_h(\mathbf{x})$  é a solução aproximada para o fluxo,  $N^f$  é o número de fontes virtuais,  $\beta_j$  são os coeficientes que representam os efeitos de fontes virtuais posicionados fora do domínio do problema e  $p_j^*(\xi, \mathbf{x}), q_j^*(\xi, \mathbf{x})$  são as soluções fundamentais propostas para o operador de Helmholtz Modificado. Estas podem ser calculadas através de:

$$\begin{aligned}
p_j^*(\xi_j, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} K_0(\lambda r) \\
q_j^*(\xi_j, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \lambda K_1(\lambda r) \frac{dr}{dn}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

onde  $\lambda = \sqrt{1/Qk\Delta t}$  é o parâmetro relacionado as características do problema,  $K_0$  e  $K_1$  são as funções Bessel modificadas de segunda espécie de ordem zero e primeira ordem, respectivamente,  $r = |\mathbf{x}_i - \xi_j|$  é a distância entre as fontes virtuais e os pontos de colocação no contorno do problema e  $dr/dn = \frac{(x-\xi_{xj})n_x + (y-\xi_{yj})n_y}{r}$  representa a derivada do raio em relação a normal.

No MFS o posicionamento das fontes virtuais ainda é tema de discussão, uma vez que, a princípio, não foi determinada maneira exata de posicioná-las fora do domínio em questão conforme apresentado na figura 5.1.

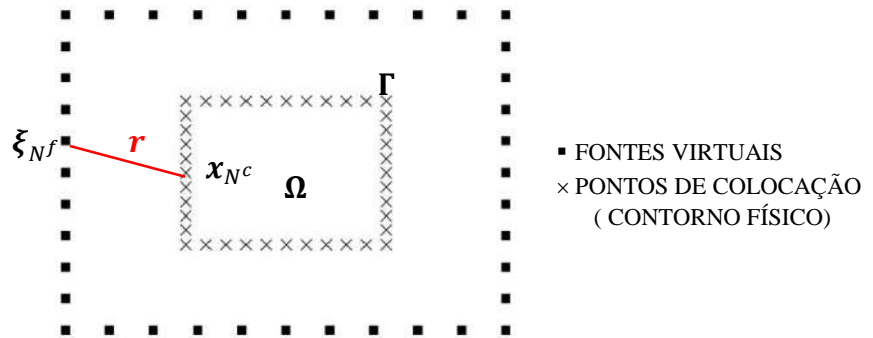


Figura 5.1 Posicionamento contorno virtual para MSF

A partir da figura 5.2, pode-se observar o comportamento da solução fundamental utilizada no problema em questão. Para qualquer frequência utilizada, os pontos de colocação não podem ter coordenadas geométricas coincidentes com as fontes virtuais, uma vez que a solução fundamental é singular para  $r = 0$ , característica da função Bessel modificada de segunda espécie de ordem zero. Nota-se que para quanto mais próximas forem as fontes virtuais dos pontos de colocação, mais sensível será a solução fundamental, entretanto observa-se que para frequências muito altas tal sensibilidade é perdida com o decaimento brusco da função. A consequência direta desta perda de sensibilidade é dificuldade na escolha da distância de posicionamento das fontes virtuais, reduzindo cada vez mais a faixa “trabalhável” de possíveis raios que captarão a resposta do problema.

Para o fenômeno da poroelasticidade o tratamento dado por esta tese é um tratamento quasi-estático, ou seja, com frequências baixas. Assim, existe uma faixa razoável de trabalho na escolha do posicionamento das fontes virtuais, lembrando sempre que, a resposta pode ser excitada de maneira excessiva para fontes muito próximas ou muito pouco excitada (resposta sem sensibilidade) para fontes muito distantes.

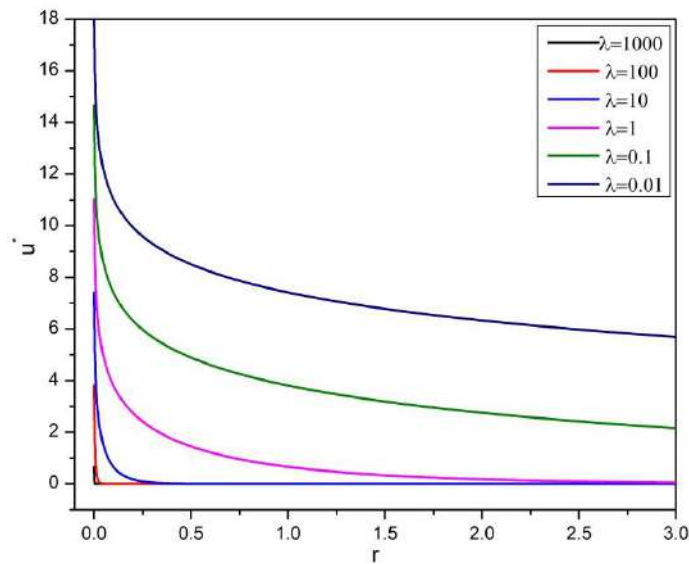


Figura 5.2 Solução Fundamental para o operador de Helmholtz Modificado

Realizando-se o posicionamento das fontes virtuais o coeficiente  $\beta_j$  apresentado em (5.11) é calculado de maneira indireta através do reforço das condições de contorno do problema, de tal sorte que:

$$\sum_{j=1}^{N^f} p_j^*(\xi_j, \mathbf{x}_i) \beta_j(\xi_j) = \bar{p}_h(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N^c \text{ para } \mathbf{x}_i \in \Gamma_p$$

$$\sum_{j=1}^{N^f} q_j^*(\xi_j, \mathbf{x}_i) \beta_j(\xi_j) = \bar{q}_h(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N^c \text{ para } \mathbf{x}_i \in \Gamma_q \quad (5.13)$$

ou monta-se ainda o sistema de equações lineares:

$$[A_{ij}]\{\beta_j\} = \{b_i\} \quad (5.14)$$

onde  $A_{ij}$  é a matriz de dimensão  $N^c \times N^f$  que contém as soluções fundamentais para os pontos escolhidos e  $b_i$  é o vetor de dimensão  $N^c$  que contém as condições de contorno prescritas. Finalmente, uma vez calculado  $\beta_j$  através de (5.14) retorna-se a (5.11) para o cálculo das respostas homogêneas aproximadas.

### 5.3 Método Da Reciprocidade Dual

O Método da Reciprocidade Dual (DRM) foi originalmente proposto por (NARDINI e BREBBIA, 1983) como estratégia de para resolução de integrais de domínio. Ao aplicar o Método dos Elementos de Contorno (MEC) em equações não homogêneas, notou-se a necessidade de manipular os termos de domínio para que fossem representados somente com termos de contorno, uma vez que o MEC já fazia utilização destes pontos de colocação e também para que a formulação mantivesse fiel a proposta.

O DRM realiza a aproximação do termo não homogêneo, lado direito da equação (5.9), através de funções coordenadas  $\varphi_i(\mathbf{x})$ , de maneira que (PARTRIDGE, BREBBIA e WROBEL, 1992):

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_I} \alpha_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (5.15)$$

onde  $N_I$  representa o número de pontos de interpolação, no geral  $N_I = N_C + N_D$ , ou seja, número de pontos no contorno  $N_C$  mais número de pontos no domínio  $N_D$ . Os coeficientes  $\alpha_i$  são coeficientes não determinados e, para problemas transientes, estes devem ser recalculados em cada passo de tempo.

A obtenção de uma solução particular única pode se tornar uma tarefa complexa e, para isso, o DRM a aproxima por uma série de funções  $\psi_i(\mathbf{x})$ , assim (PARTRIDGE, BREBBIA e WROBEL, 1992):

$$p_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_I} \alpha_i \psi_i(\mathbf{x}) \quad (5.16)$$

onde as funções de aproximação da solução particular  $\psi_i(\mathbf{x})$  devem satisfazer a seguinte equação diferencial:

$$(\nabla^2 - \lambda^2)\psi_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (5.17)$$

expressando assim, a relação entre as funções coordenadas  $\varphi_i(\mathbf{x})$  e as funções de aproximação da solução  $\psi_i(\mathbf{x})$ . Nota-se que, a partir da definição das funções  $\varphi_i(\mathbf{x})$  e aplicação da equação (5.15) os coeficientes  $\alpha_i$  podem ser determinados e aplicados na equação (5.16) para o cálculo da solução particular.

É importante ressaltar que a escolha da função  $\varphi_i(\mathbf{x})$  está diretamente ligada à eficiência e acurácia do método. Além destas serem determinantes para a modelagem correta do termo não homogêneo, o procedimento padrão é que ela determine analiticamente a correspondente função  $\psi_i(\mathbf{x})$  a partir da aplicação da equação (5.17). Para um operador de Laplace,  $\psi_i(\mathbf{x})$  pode ser obtida por sucessivas integrações, já para o operador de Helmholtz Modificado o processo torna-se mais complexo (CAO, QIN e ZHAO, 2010).

### 5.3.1 Aproximação Polinomial Para $\varphi_i(\mathbf{x})$ :

Partindo da expansão polinômios da solução aproximada  $\psi_i(\mathbf{x})$  em relação a distancia  $r(\mathbf{x})$ :

$$\psi_i(\mathbf{x}) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_m r^m \quad (5.18)$$

onde  $a_m$  são coeficientes, a função  $\psi_i(\mathbf{x})$  deve satisfazer (5.17), logo:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \lambda^2)\psi_i(\mathbf{x}) &= \frac{a_1}{r} + 4a_2 + 9a_3 r + \dots + m^2 a_m r^{m-2} - \lambda^2(a_0 + a_1 r + a_2 r^2 \\ &+ \dots + a_m r^m) \end{aligned} \quad (5.19)$$

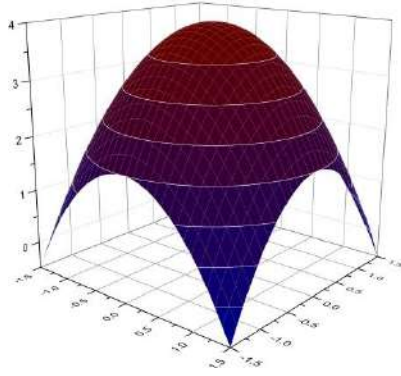
Tomando  $a_0 = 0$  e  $a_1 = 0$ , têm-se:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = 4a_2 + 9a_3r \dots + m^2a_mr^{m-2} - \lambda^2(a_2r^2 + \dots + a_mr^m) \quad (5.20.a)$$

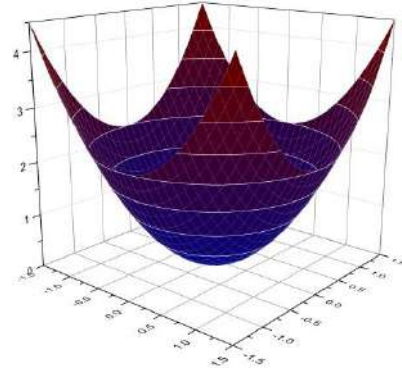
$$\psi_i(\mathbf{x}) = a_2r^2 + \dots + a_mr^m \quad (5.20.b)$$

$$\frac{\partial \psi_i(\mathbf{x})}{\partial n} = \frac{\partial \psi_i(\mathbf{x})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial \psi_i(\mathbf{x})}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \left( r_x \frac{\partial x}{\partial n} + r_y \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right], \text{ para } r^2 = r_x^2 + r_y^2 \quad (5.20.c)$$

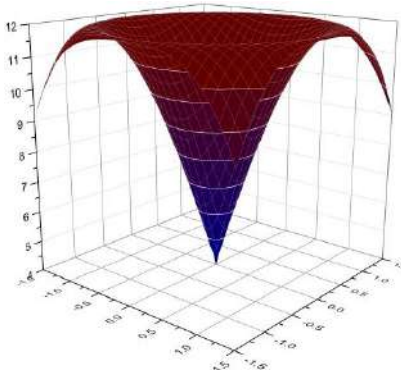
As representações gráficas para algumas funções polinomiais podem ser vistas na figura 5.3 e expressões completas para diversos coeficientes possíveis das funções de aproximação com diferentes ordens polinomiais podem ser encontradas no Anexo C.



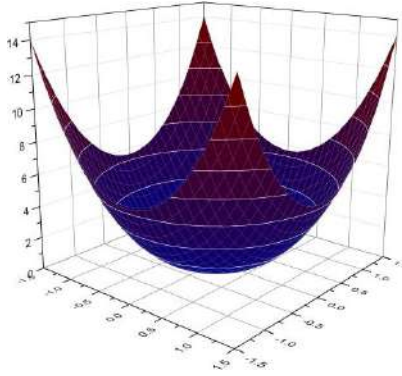
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.3 Funções polinomiais : (a)  $\varphi_i(\mathbf{x}) = 4 - r^2$  (b)  $\psi_i(\mathbf{x})$  associada à (a); (c)  $\varphi_i(\mathbf{x}) = 4 + 9r - (r^2 + r^3)$ , (d)  $\psi_i(\mathbf{x})$  associada à (c)



### 5.3.2 Aproximação através de *Thin Plate Splines (TPS)* para $\varphi_i(\mathbf{x})$ :

Além da representação polinomial comumente utilizada no DRM, (CHEN e RASHED, 1998) propuseram uma fórmula de aproximação através da combinação linear de funções do tipo Thin Plate Spline, posteriormente (MULESHKOV, GOLBERG e CHEN, 1999) generalizaram tais resultados através do método do polinômio aniquilador (*annihilator method*) que é utilizado para obter soluções particulares de equações diferenciais ordinárias.

Para o operador de Helmholtz Modificado, o método do polinômio aniquilador pode ser utilizado de tal sorte que:

$$(\nabla^2 - \lambda^2)\psi_i(x) = r_i^{2n} \log r_i, i = 1, \dots, N_I \quad (5.17)$$

onde  $n$  denota a ordem da spline escolhida. A equação (5.17) pode ser resolvida pelo método do polinômio aniquilador através da utilização de um operador diferencial  $M = (\nabla^2)^{n+1}$  que satisfaz:

$$(\nabla^2)^{(n+1)} r^{2n} \log r = 0, r > 0 \quad (5.18)$$

e  $\psi_i(x)$  pode ser obtida através de:

$$(\nabla^2)^{(n+1)} (\nabla^2 - \lambda^2)\psi_i(r) = 0 \quad (5.19)$$

A partir da escolha de um operador  $M$  que comuta com o operador de Helmholtz Modificado, escreve-se que:

$$\psi_i = v + w \quad (5.20)$$

onde:

$$(\nabla^2 - \lambda^2)v = 0 \quad (5.21.a)$$

$$(\nabla^2)^{(n+1)} w = 0 \quad (5.21.b)$$

Para a equação (5.21.a), têm-se a solução:

$$v(r) = AI_0(\lambda r) + BK_0(\lambda r) \quad (5.22)$$

onde os coeficientes  $A$  e  $B$  precisam ser determinados,  $I_0$  e  $K_0$  são as funções modificadas de Bessel de ordem zero do primeiro e segundo tipo, respectivamente.

Já para equação (5.21.b) a solução pode ser aproximada por:

$$w(r) = \sum_{k=1}^{n+1} c_k r^{2k-2} \log r + \sum_{k=1}^{n+1} d_k r^{2k-2} \quad (5.23)$$

onde  $c_k$  e  $d_k$  são coeficientes a serem determinados. Utilizando as equações (5.20) com (5.22) e (5.23), deduz-se:

$$\psi_i = AI_0(\lambda r) + BK_0(\lambda r) + \sum_{k=1}^{n+1} c_k r^{2k-2} \log r + \sum_{k=1}^{n+1} d_k r^{2k-2} \quad (5.24)$$

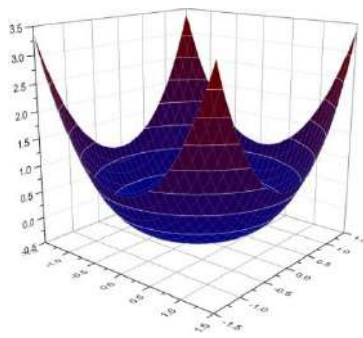
Utilizando conceitos de álgebra que podem ser vistos com detalhes em (AKGUN, 2013), os coeficientes podem ser determinados por:

$$A = 0; B = -\frac{2^{2n}(n!)^2}{\lambda^{2n+2}}$$

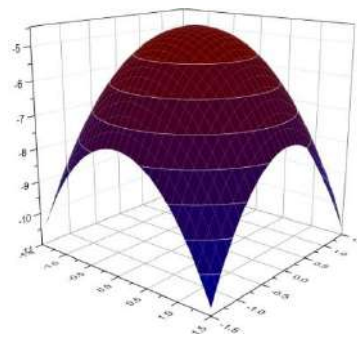
$$c_k = -\frac{2^{2n}(n!)^2}{2^{2k-2}[(k-1)!]^2} \lambda^{2k-2n-4}, \quad 1 \leq k \leq n+1$$

$$d_k = c_k \sum_{j=k}^n \left(\frac{1}{j}\right), \quad 1 \leq k \leq n \quad (5.25)$$

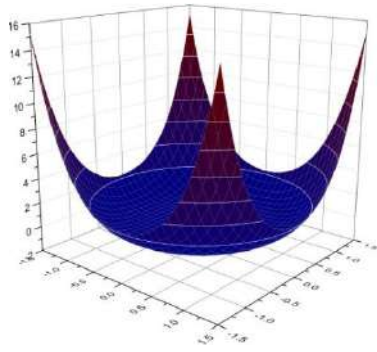
As representações gráficas para algumas funções splines podem ser vistas na figura 5.4 e algumas expressões completas para splines de diferentes ordens com suas respectivas funções de aproximação podem ser encontradas no Anexo C.



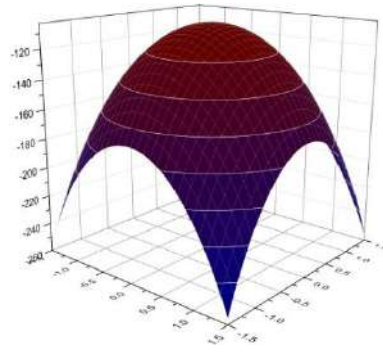
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.4 Funções TPS : (a)  $\varphi_i(x) = r^2 \log r$ , (b)  $\psi_i(x)$  associada à (a); (c)  $\varphi_i(x) = r^4 \log r$ , (d)  $\psi_i(x)$  associada à (c)

## 6 MODELAGEM FASE SÓLIDA

Inicialmente, para um carregamento instantaneamente aplicado, a presença de água preenchendo os poros do corpo resulta em uma mudança do campo hidrostático e não na transferência imediata de tensões ao esqueleto sólido. Entretanto, ao final do processo de adensamento, todo o carregamento será suportado pelo esqueleto sólido (CAVALCANTI, 2002).

A evolução do comportamento das tensões efetivas na parcela sólida, é considerado neste trabalho, como linear, elastostático e não é considerado o estado de tensões pré-existent no meio. Tais características são representadas na equação (2.39.a) e, para obtenção da resposta aproximada será utilizado o Método Local de Petrov-Galerkin Sem Malha (MLPG), um método verdadeiramente sem malha de domínio descrito a seguir.

### 6.1 Metodo Local Petrov Galerkin Sem Malha (MLPG)

O MLPG pode ser entendido como um procedimento para construção de métodos sem-malha, baseados na forma fraca local da equação diferencial de governo, para um subdomínio pontual utilizado para representar o domínio global do problema.

O MLPG apresenta diversas versões que diferem entre si no que concerne à escolha das suas funções de ponderação e de aproximação (ATLURI e SHEN, 2002). A seguir na tabela 6.1 é apresentado resumidamente algumas variações deste:

NOMECLATURA	FUNÇÃO TESTE
MLPG 1	É a mesma utilizada como função peso do MQM
MLPG 2	É a função Delta de Dirac (Método de Colocação Pontual)
MLPG 3	É o resíduo ou “erro” obtido na equação diferencial (mínimos quadrados discreto)
MLPG 4	É a solução fundamental modificada ( <i>Local Boundary Integral Equation-LBIE</i> )
MLPG 5	É a função de Heaviside (somente integrais de contorno)
MLPG 6	É a idêntica a função de base (Método de Galerkin)

Tabela 6.1 Variações do Método de Petrov Galerkin Local

Neste trabalho será utilizado o MLPG-1, com funções teste idênticas às utilizadas no Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MQM) apresentado em (3.2.1). Serão apresentados a seguir conceitos básicos do MLPG e posteriormente será realizado o desenvolvimento das equações utilizadas na discretização do problema elastostático proposto.

### 6.1.1 Formulação

Para as aproximações realizadas pelo MLPG, torna-se necessário escrever uma forma local fraca para o subdomínio qualquer  $\Omega_s$  de contorno  $\partial\Omega_s$  contendo o nó  $i$  de análise. Aplicando-se o conceito a equação (2.37.a) com a técnica dos resíduos ponderados definida em (3.17), tem-se:

$$\int_{\Omega_s} (\rho b_i + \sigma'_{ij,j} - \alpha \delta_{ij} p_{,j}) v_i d\Omega = 0 \quad (6.1)$$

onde  $v_i$  é a função teste ou peso (função peso dos MQM, no caso do MLPG 1),  $\delta_{ij}$  é o Delta de Kronecker. Aplicando o teorema da divergência:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_s} \sigma'_{ij} n_j v_i d\Gamma - \alpha \int_{\partial\Omega_s} p n_j v_i d\Gamma - \int_{\Omega_s} \sigma'_{ij} v_{i,j} d\Omega + \alpha \int_{\Omega_s} \delta_{ij} p v_{i,j} d\Omega \\ + \int_{\Omega_s} \rho b_i v_i d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Sabendo que o contorno  $\partial\Omega_s = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup L_s = \Gamma_p \cup \Gamma_q \cup L_s$  e utilizando a relação  $t_i = \sigma'_{ij} n_j$ , descreve-se:

$$\int_{\partial\Omega_s} \sigma'_{ij} n_j v_i d\Gamma = \int_{L_s + \Gamma_u} \sigma'_{ij} n_j v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i v_i d\Gamma \quad (6.3.a)$$

$$\int_{\partial\Omega_s} p n_j v_i d\Gamma = \int_{L_s + \Gamma_p} p n_j v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_q} p n_j v_i d\Gamma \quad (6.3.b)$$

$$\int_{\partial\Omega_s} p n_j v_i d\Gamma = \int_{L_s + \Gamma_p} p n_j v_i d\Gamma + 0$$

$$\int_{\partial\Omega_s} p n_j v_i d\Gamma = \int_{L_s + \Gamma_p} p n_j v_i d\Gamma$$

Substituindo (6.3) em (6.2), encontra-se:

$$\begin{aligned} \int_{L_s+\Gamma_u} \sigma_{ij}' n_j v_i d\Gamma - \int_{L_s+\Gamma_p} \alpha p n_j v_i d\Gamma - \int_{\Omega_s} \sigma_{ij}' v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega_s} \alpha \delta_{ij} p v_{i,j} d\Omega \\ = - \int_{\Omega_s} \rho b_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i v_i d\Gamma \end{aligned} \quad (6.4)$$

Re-arranjando a equação (6.4):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} \sigma_{ij}' v_{i,j} d\Omega - \int_{L_s+\Gamma_u} \sigma_{ij}' n_j v_i d\Gamma - \int_{\Omega_s} \alpha \delta_{ij} p v_{i,j} d\Omega + \int_{L_s+\Gamma_p} \alpha p n_j v_i d\Gamma \\ = \int_{\Omega_s} \rho b_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i v_i d\Gamma \end{aligned} \quad (6.5)$$

A equação (6.5) deve ser avaliada para cada ponto  $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma$  e pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} (\boldsymbol{\sigma}' \boldsymbol{\varepsilon}_w) d\Omega - \int_{L_s+\Gamma_u} \mathbf{w} \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}' d\Gamma - \alpha \int_{\Omega_s} (\boldsymbol{\varepsilon}_w \mathbf{m}) p d\Omega + \alpha \int_{L_s+\Gamma_p} (\mathbf{w} \mathbf{n}) p d\Gamma \\ = \rho \int_{\Omega_s} \mathbf{w} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{w} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde  $\mathbf{t} = [t_x \ t_y]^T$  são as *tractions*, o vetor  $\mathbf{m} = [1 \ 1 \ 0]^T$  é o vetor que assume o papel do Delta de Kronecker,  $\boldsymbol{\varepsilon}_w$  e  $\mathbf{w}$  têm seus coeficientes dados pelas derivadas parciais da função teste ou peso e pela própria função teste, respectivamente. Dados por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_w = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{bmatrix}; \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_x & 0 \\ 0 & v_y \end{bmatrix}; \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}; \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

As matrizes  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{n}$  contêm as normais utilizadas nos cálculos dos deslocamentos e pressões, respectivamente. Dadas:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}; \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Relacionando o campo de tensões  $\boldsymbol{\sigma}'$  com deslocamentos  $\mathbf{u} = [u_x \ u_y]^T$ :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (6.9)$$

onde  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva definida para o Estado Plano de Tensão (EPT):

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

e para o Estado Plano de Deformação (EPD), é definida por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Para o operador diferencial  $\mathbf{B}$ , define-se:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Utilizando a definição dada pela equação (6.9) na equação (6.5), reescreve-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} (\boldsymbol{\varepsilon}_w \mathbf{D} \mathbf{B}) \mathbf{u} d\Omega - \int_{L_s + \Gamma_u} (\mathbf{w} \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{B}) \mathbf{u} d\Gamma - \alpha \int_{\Omega_s} (\boldsymbol{\varepsilon}_w \mathbf{m}) p d\Omega \\ + \alpha \int_{L_s + \Gamma_p} (\mathbf{w} \mathbf{n}) p d\Gamma = \rho \int_{\Omega_s} \mathbf{w} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{w} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (6.13)$$

Utilizando a aproximação proposta na equação (3.18) o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}_h$  e de pressões  $p_h$  fica na forma:

$$\mathbf{u}_h = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\phi}_j^u \mathbf{u}_j \quad (6.14.a)$$

$$p_h = \sum_{j=1}^n \phi_j^p p_j \quad (6.14.b)$$

onde  $\phi_j^p = \phi_j^u$  são as funções de forma utilizadas na aproximação das pressões e deslocamentos, respectivamente. A pressão do  $j$ -ésimo nó do suporte é uma grandeza escalar e os vetores relativos aos deslocamentos são dados por:

$$\mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \end{bmatrix} e \boldsymbol{\phi}_j^u = \begin{bmatrix} \phi_j^u & 0 \\ 0 & \phi_j^u \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Utilizando a formulação MLPG 1 é definido que a função teste  $v_i$  será a mesma função daquela utilizada como peso  $\mathbf{w}_i(\mathbf{x})$  no MQM (Gaussiana ou Spline de 3ª ou 4ª ordem):

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_1} (\boldsymbol{\varepsilon}_w \mathbf{DB}) \boldsymbol{\phi}_j^u \mathbf{u}_j d\Omega - \sum_{j=1}^n \int_{L_s + \Gamma_u} (\mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \mathbf{NDSB}) \boldsymbol{\phi}_j^u \mathbf{u}_j d\Gamma \\
& - \alpha \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_s} (\boldsymbol{\varepsilon}_w \mathbf{m}) \boldsymbol{\phi}_j^p p_j d\Omega + \alpha \sum_{j=1}^n \int_{L_s + \Gamma_p} (\mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \mathbf{n}) \boldsymbol{\phi}_j^p p_j d\Gamma \quad (6.16) \\
& = \rho \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_s} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \mathbf{b} d\Omega + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_t} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{t}} d\Gamma
\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{S}$  é uma matriz utilizada para verificar se existe ou não uma condição de contorno de Dirichlet prescrita no ponto considerado. Assim:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$S_i = \begin{cases} 1, & \text{se existe deslocamento prescrito em } \Gamma_u \\ 0, & \text{se não existe deslocamento prescrito em } \Gamma_u \end{cases}$$

Matricialmente escreve-se:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{Q} \mathbf{p} = \mathbf{F} \quad (6.18)$$

onde  $\mathbf{K}$  é matriz de rigidez, definida:

✓ Para nós no contorno:

$$\mathbf{K}_{ij} = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_1} (\boldsymbol{\varepsilon}_w \mathbf{DB}) \boldsymbol{\phi}_j^u d\Omega - \sum_{j=1}^n \int_{L_s + \Gamma_u} (\mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \mathbf{NDSB}) \boldsymbol{\phi}_j^u d\Gamma \quad (6.19.a)$$

✓ Para nós no domínio:

$$\mathbf{K}_{ij} = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_1} (\boldsymbol{\varepsilon}_w \mathbf{DB}) \boldsymbol{\phi}_j^u d\Omega \quad (6.19.b)$$

e,  $\mathbf{Q}$  é a matriz de acoplamento das pressões, definida:

✓ Para nós no contorno:

$$\mathbf{Q}_{ij} = -\alpha \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_s} (\boldsymbol{\varepsilon}_w \mathbf{m}) \boldsymbol{\phi}_j^p p_j d\Omega + \alpha \sum_{j=1}^n \int_{L_s + \Gamma_p} (\mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \mathbf{n}) \boldsymbol{\phi}_j^p p_j d\Gamma \quad (6.20.a)$$

✓ Para nós no domínio:

$$\mathbf{Q}_{ij} = -\alpha \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_s} (\boldsymbol{\varepsilon}_w \mathbf{m}) \boldsymbol{\phi}_j^p p_j d\Omega \quad (6.20.b)$$



E o vetor de força  $\mathbf{F}$ :

✓ Para nós no contorno:

$$\mathbf{F}_i = \rho \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_s} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \mathbf{b} d\Omega + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_t} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6.21.a)$$

✓ Para nós no domínio:

$$\mathbf{F}_i = \rho \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_s} \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \mathbf{b} d\Omega \quad (6.21.b)$$

É interessante ressaltar que nas equações (6.19.a) e (6.20.a) o termo referente ao contorno do suporte  $L_s$  pode ser eliminado desde que seja feita a escolha de uma função teste que satisfaça numericamente tal condição. Para reforço das condições de contorno dois métodos são comumente utilizados: o método das penalidades ou o método da substituição direta, sem perda de precisão entre ambos (LIU, 2009).

O procedimento de solução exige que para cada nó utilizado na discretização do problema seja montado um domínio de quadratura (domínio de influencia) com diferentes pontos de integração localizados em seu interior. Em seguida, para cada ponto é montado um domínio de suporte local onde as funções de forma do MQM são montadas. Assim, cada linha relacionada ao nó índice  $i$  das equações (6.19) e (6.20) é associada a um domínio de quadratura, e cada coluna associada ao índice  $j$  é associada ao nó existente no suporte local utilizado para cada ponto de quadratura. Nota-se que, as linhas do sistema global podem ser construídas de forma aleatória e independente, sem necessitar de mecanismos de sincronização

Após a solução do sistema apresentado na equação (6.18) os parâmetros nodais  $\mathbf{u}_j$  são calculados, parâmetros os quais são fictícios. Ainda se torna necessário o cálculo da solução aproximada  $\mathbf{u}_h$ , que pode ser feito posteriormente com a aplicação da equação (6.14.a).

## 7 ACOPLAMENTO DAS FASES

### 7.1 Formulação

A idéia em acoplar iterativamente diferentes métodos numéricos para as diferentes fases do problema, fundamenta-se basicamente no conceito de aproveitar as vantagens de cada método para as fases individualmente. Na técnica utilizada nesta tese foi utilizada uma única malha (leia-se nuvem de nós aleatória) para discretizar ambas as fases, mas nada impede que fossem realizadas discretizações diferentes para cada fase (sólida e fluida) e com processos interpolação estabelecer as variáveis de acoplamento em pontos de interface.

O acoplamento proposto é realizado conforme figura 7.1: em todos os nós da malha é primeiramente resolvido o problema elástico através do MLPG com formulação proposta no capítulo 6, em seguida a deformação volumétrica é utilizada para cálculo da condição não homogênea através do DRM e em seguida é resolvida a equação do fluido homogênea utilizando o MFS, ambas as técnicas descritas no capítulo 5. Com o cálculo das pressões já realizado o MLPG é retroalimentado formando assim o processo iterativo.

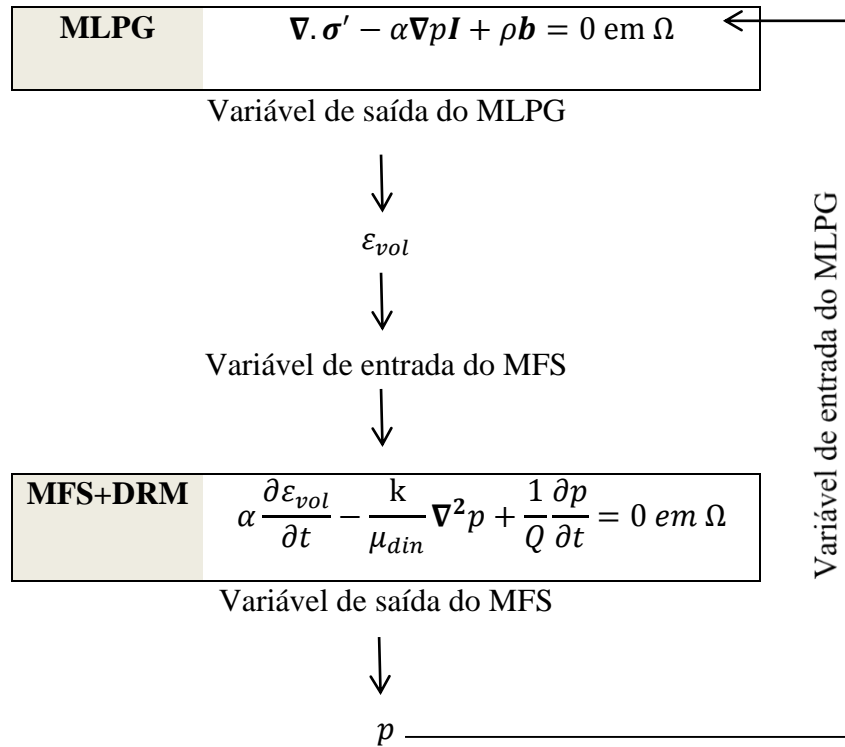


Figura 7.1 Fluxograma de resolução para poroelasticidade

O acoplamento pode ser realizado através da deformação volumétrica ou através das pressões (SETTARI e WALTERS, 2001). Neste trabalho a deformação volumétrica

é aplicada diretamente como entrada da fase fluida e para garantir e/ou acelerar o processo de convergência é adotado um parâmetro de relaxamento  $\alpha_{relax}$  para as pressões de saída do MFS utilizadas para realizar o acoplamento. A metodologia de acoplamento e de cálculo do parâmetro de relaxamento descrita a seguir baseia-se naquelas utilizadas por (GONÇALVES, 2013).

Para o fenômeno com tempo total  $T$  dividido em  $n$  passos de tempo, e a cada passo  $k$  iterações, a pressão  $p$  é atualizada por:

$$p^{k+1} = \alpha_{relax}(p^{k+\alpha_{relax}}) + (1 - \alpha_{relax})p^k \quad (7.1)$$

onde  $\alpha_{relax}$  é o parâmetro de relaxamento ótimo calculado na subseção posterior. Assim, o cálculo da pressão na iteração seguinte ( $p^{k+1}$ ) em todos os nós de interface (no caso, todos os nós da malha) pode ser realizado e, estas serão utilizadas como condições prescritas no novo ciclo iniciado pelo cálculo da fase elástica através do MLPG.

No fim de cada ciclo, ou cada passo iterativo, deve ser feita a checagem de convergência como critério de parada. Esse trabalho adota para o cálculo de erro o produto interno da diferença entre a pressão no atual passo de iteração com a pressão no passo anterior de iteração.

$$\frac{\|p^{k+1} - p^k\|^2}{\|p^{k+1}\|^2} \leq tol \quad (7.2)$$

onde  $tol$  é a tolerância adotada como critério de convergência. Evidenciando-se a convergência, atualizam-se as grandezas e parte-se para a análise da próxima passo de tempo ou finaliza-se o processo. Caso não haja convergência, continua-se processo iterativo.

## 7.2 Parâmetro De Relaxamento

O parâmetro de relaxamento será calculado através da minimização funcional do erro absoluto:

$$f(\alpha_{relax}) = \|p^{k+1}(\alpha_{relax}) - p^k(\alpha_{relax})\|^2 \quad (7.3)$$

Utilizando o conceito desenvolvido na equação (7.1) e nos termos da equação (7.3), definem-se:

$$p^{k+1} = \alpha_{relax}(p^{k+\alpha_{relax}}) + (1 - \alpha_{relax})p^k \quad (7.4.a)$$

$$p^k = \alpha_{relax}(p^{k+\alpha_{relax}-1}) + (1 - \alpha_{relax})p^{k-1} \quad (7.4.b)$$

Substituindo (7.4.a/b) em (7.3):

$$\begin{aligned} f(\alpha_{relax}) &= \|(\alpha_{relax})\mathbf{W}^{k+\alpha_{relax}} - (1 - \alpha_{relax})\mathbf{W}^k\|^2 \\ &= (\alpha_{relax})^2 \|\mathbf{W}^{k+\alpha_{relax}}\|^2 \\ &\quad + 2\alpha_{relax}(1 - \alpha_{relax})(\mathbf{W}^{k+\alpha_{relax}}, \mathbf{W}^k) + (1 - \alpha_{relax})^2 \|\mathbf{W}^k\|^2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

onde  $\mathbf{W}^{k+\alpha_{relax}} = [(p^{k+\alpha_{relax}}) - (p^{k+\alpha_{relax}-1})]$ ,  $\mathbf{W}^k = [(p^k) - (p^{k-1})]$  e a definição de produto interno foi utilizada:  $(\mathbf{W}, \mathbf{W}) = \|\mathbf{W}\|^2$ .

A minimização do funcional definido em (7.5) resultará no cálculo de  $\alpha_{relax}$  ótimo. Assim, igualando à zero a derivada de (7.5) em relação ao próprio parâmetro obtêm-se:

$$\begin{aligned} (\alpha_{relax})\|\mathbf{W}^{k+\alpha_{relax}}\|^2 + (1 - 2\alpha_{relax})(\mathbf{W}^{k+\alpha_{relax}}, \mathbf{W}^k) + (\alpha_{relax} - 1)\|\mathbf{W}^k\|^2 \\ = 0 \end{aligned} \quad (7.6)$$

Rearranjando (7.6):

$$\alpha_{relax} = \frac{(\mathbf{W}^k, \mathbf{W}^k - \mathbf{W}^{k+\alpha_{relax}})}{\|\mathbf{W}^k - \mathbf{W}^{k+\alpha_{relax}}\|^2} \quad (7.7)$$

A expressão (7.7) para cálculo do parâmetro de relaxamento ótimo é de simples implementação, baixo custo computacional e garante que, para cada passo iterativo a variável de acoplamento esteja sendo atualizada para acelerar a convergência

## 8 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Na intenção de verificar, ilustrar e averiguar a metodologia iterativa proposta nesta tese, serão abordados neste capítulo exemplos numéricos utilizando o acoplamento de métodos sem malha para o problema da poroelasticidade. A análise será realizada através de programas computacionais desenvolvidos ao longo da elaboração deste estudo.

Quatro exemplos numéricos foram considerados para validação do código implementado baseado na metodologia desenvolvida: o primeiro considera um problema de adensamento unidirecional, conhecido como problema de Terzaghi. O segundo exemplo trata-se do problema de Mandel, caracterizado por um adensamento bidimensional onde o efeito de Mandel-Cryer poderá ser observado. O terceiro exemplo foi proposto originalmente por Schiffman em 1969 (SCHIFFMAN, CHEN e JORDAN, 1969), no qual problema a ser avaliado simula a aplicação do carregamento gerado por uma sapata em um meio considerado infinito e, por fim, para avaliar a versatilidade dos métodos propostos, o quarto exemplo abordará um problema de geometria mais complexa com carregamento distribuído de compressão.

Os resultados obtidos são comparados (entre si), com soluções analíticas e/ou com resultados alcançados por outros métodos. Além disso, parâmetros particulares a cada metodologia e ao tipo de acoplamento serão analisados, verificando sua influência na precisão dos resultados obtidos. A avaliação destes parâmetros será realizada a partir de cada metodologia adotada: para o MLPG diferentes funções teste foram utilizadas para modelar a fase sólida, influenciando a característica mais relevante da metodologia, que é a montagem das funções de forma. Já para MFS, o problema central consiste no posicionamento das fontes de excitação virtuais em relação ao contorno original, afetando diretamente a matriz composta pelas soluções fundamentais e, por conseguinte, a solução final. Na modelagem dos termos não homogêneos do problema difusivo, é necessário cautela na escolha da função do DRM (conforme apresentado na seção 5.3) e por fim, também foi analisada a técnica de cálculo do parâmetro de relaxamento ótimo.

De maneira geral, foi adotado como critério de convergência a tolerância de  $10^{-5}$  e parâmetro de relaxamento ótimo inicial de  $\alpha_{relax} = 0.5$ . Ressalta-se que todos os problemas analisados seguem as premissas estabelecidas na subseção 2.2 e apresentam como grandezas derivadas:

COEFICIENTE DE POISSON NÃO DREANDO	$\nu_u = 0.5$
COMPRESSIBILIDADE DO FLUIDO	$C_f = 0$
COEFICIENTE DE BIOT	$\alpha = 1$
COEFICIENTE DE SKEMPTON	$B = 1$
MODULO DE BIOT	$M = Q = \infty$

Tabela 8.1 Valores das grandezas derivadas para meios saturados incompressíveis

## 8.1 Problema De Terzaghi

Considere uma camada de solo exposta a um carregamento de compressão em seu topo, parte desta carga será sustentada pelo esqueleto sólido e parte será sustentada pelo fluido nos poros. Na hipótese de partida, a pressão inicial é calculada a partir do problema estático de potencial, assumindo a geração de um campo de pressões a deformação constante. Uma vez que se considera o fluido incompressível, o aumento do campo de pressões refletirá no aumento de tensões na matriz sólida. O excesso de poro-pressões tende a ser dissipado com o tempo à medida que o fluido escoar pelas superfícies drenantes, destacando-se que quanto mais permeável o meio mais rapidamente ocorrerá tal dissipação. Todo o processo caracteriza o fenômeno do adensamento, relacionado diretamente aos estudos de Terzaghi (TERZAGHI, 1923).

O problema de Terzaghi é largamente utilizado para validação de códigos computacionais pois, as simplificações impostas aos modelos e a viabilidade de uma solução analítica tornam-se aspectos interessantes para análises iniciais. Apesar de tais simplificações o modelo proposto é rotineiramente utilizado quando há a necessidade de prever a ordem de grandeza da variável de interesse do comportamento de solos na medição de recalques.

### A) ESTUDO DE CASO 1

Para o primeiro estudo de caso do problema de Terzaghi foi considerado a aplicação de um carregamento instantâneo sobre uma coluna poroelástica homogênea e isotrópica, totalmente saturada por um fluido monofásico. A coluna possui capacidade drenante no seu topo e se mantém impermeável em sua base e nas faces laterais, que também permanecem fixas, ou seja, com deslocamentos nulos. Devido ao modelo proposto, as variáveis de pressão e deslocamentos do problema são relevantes apenas ao longo da direção vertical (*direção* –  $y$ ). Para discretização da coluna poroelástica foram utilizados

pontos espaçados de  $0.5m$  , fontes virtuais distantes de  $h$  e parâmetros físicos constantes e detalhados na tabela 8.2.

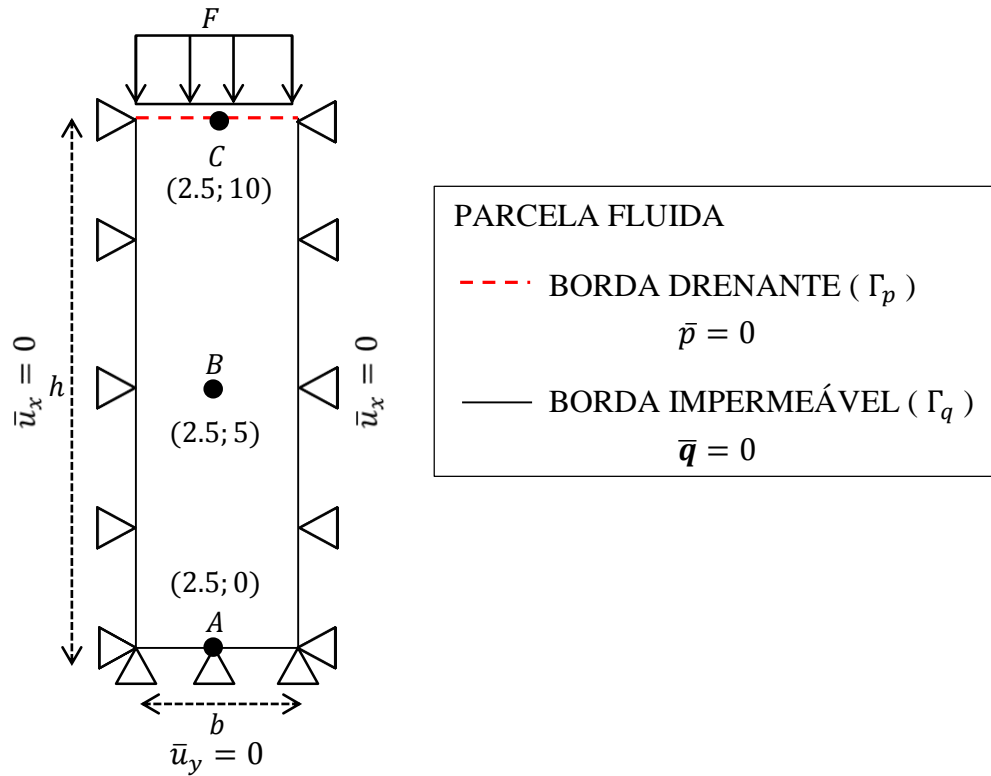


Figura 8.1 Coluna poroelástica de Terzaghi

MÓDULO DE ELASTICIDADE	$E = 14515880 \text{ N/m}^2$
COEFICIENTE DE POISSON (DRENADO)	$\nu = 0.3$
PERMEABILIDADE	$k = 0.000001 \text{ m}^4/\text{Ns}$
POROSIDADE	$n = 0.33$
GEOMETRIA	$5m \times 10m$
FORÇA	$F = 3000N/m$
COMPRESSIBILIDADE DA MATRIZ POROSA	$C_m = 1/K = 0,0003 \text{ m}^2/N$
PASSO DE TEMPO	$\Delta t = 0.05s$

Tabela 8.2 Parametros físicos para a coluna poroelástica de Terzaghi

Para este exemplo três parâmetros foram analisados e relacionados com a precisão da solução aproximada, são eles:

- Metodologia de cálculo do parâmetro de relaxamento:  
AF – Manutenção de  $\alpha_{relax} = 0.5$  fixo em todo o problema;  
AV –  $\alpha_{relax}$  é calculado para toda iteração, de acordo com subseção 7.2.
- Funções teste/forma:  
SP3 – *Spline* de 3ª ordem;  
SP4 – *Spline* de 4ª ordem;

GA – Gaussiana.

- Para o método da Reciprocidade Dual foram avaliadas as seguintes funções:

<b>DRM 1</b>	$\varphi_i(\mathbf{x}) = r^2 \log r$ $\psi_i(\mathbf{x}) = -\frac{4}{\lambda^4} [K_0(\lambda r) + \log r] - \frac{r^2 \log r}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda^2}, \text{ se } r > 0$ $\psi_i(\mathbf{x}) = \frac{4}{\lambda^2} \left[ \gamma + \log \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right] - \frac{4}{\lambda^2}, \text{ se } r = 0$
<b>DRM 2</b>	$\varphi_i(\mathbf{x}) = 1 + r - \lambda^2 \left( \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} \right)$ $\psi_i(\mathbf{x}) = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9}$

No intuito de verificar o código implementado, a resposta numérica foi comparada com as soluções analíticas propostas por (WANG, 2000). Tais soluções foram desenvolvidas considerando a origem do sistema de coordenadas no topo da coluna, com o eixo y posicionado em direção à base da mesma. Para o campo de pressões:

$$p(y, t) = \frac{4\gamma\sigma_0}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \exp \left[ \frac{-(2j+1)^2 \pi^2 c t}{4h^2} \right] \sin \left[ \frac{(2j+1)\pi y}{2h} \right] \quad (8.1)$$

onde  $\gamma$  é denominado coeficiente de eficiência do carregamento,  $\sigma_0$  a tensão inicial e  $c$  é o coeficiente de consolidação. Define-se:

$$\gamma = \frac{B(1 + \nu_u)}{3(1 - \nu_u)} \quad (8.2)$$

para fluidos incompressíveis ( $B = 1$  e  $\nu_u = 0.5$ ) obtêm-se um coeficiente de eficiência  $\gamma = 1$ . Para o coeficiente de consolidação, têm-se:

$$c = \frac{3k\gamma K(1 + \nu)}{\mu_{din}\alpha(1 - \nu)} \quad (8.3)$$

onde  $k$  é a permeabilidade,  $\mu_{din}$  é a viscosidade dinâmica,  $K = 1/C_m$  é o modulo de incompressibilidade da matriz porosa,  $\alpha = 1$  é o coeficiente de Biot e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson definido para o problema.

Considerando os deslocamentos iniciais nulos devido a incompressibilidade do modelo, os deslocamentos verticais são definidos por:

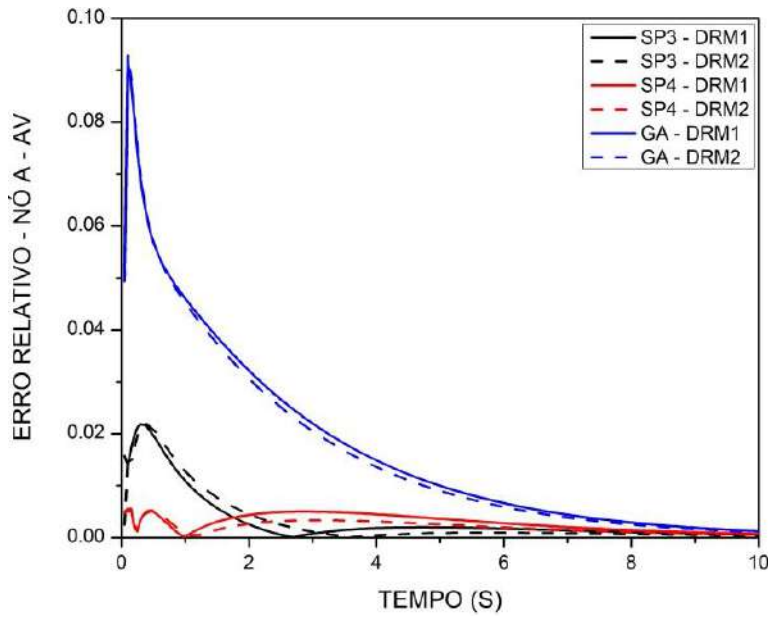


$$v(y, t) = \frac{\gamma\sigma_0\alpha(1 + \nu)}{3K(1 - \nu)} \left\{ (h - y) - \frac{8h}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j + 1)^2} \exp\left[\frac{-(2j + 1)^2\pi^2 ct}{4h^2}\right] \cos\left[\frac{(2j + 1)\pi y}{2h}\right] \right\} \quad (8.4)$$

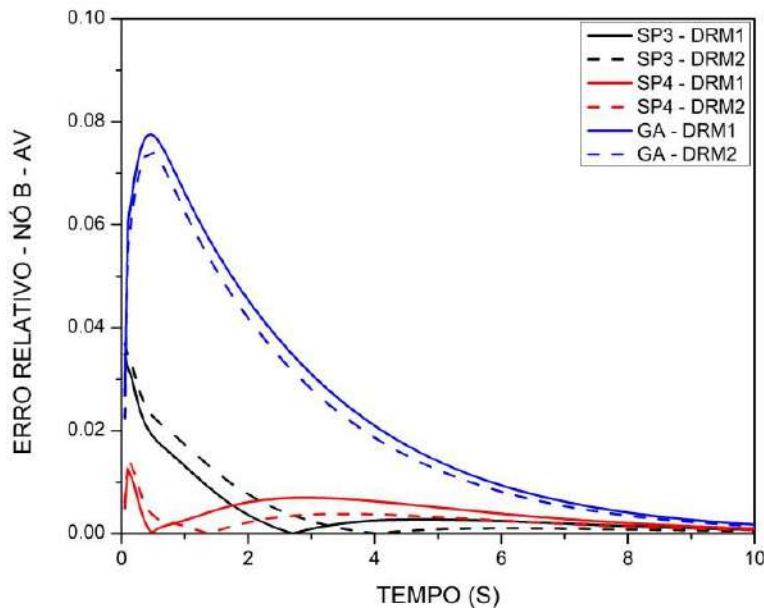
Primeiramente, optou-se por analisar a metodologia AV no parâmetro de relaxamento e avaliar cada função teste e função DRM. Nas figuras 8.2.a/b estão apresentados os erros relativos obtidos a partir da comparação da solução numérica com a solução analítica do campo de pressões nos pontos A e B. A escolha destes pontos justifica-se pelo comportamento do problema em análise: dentre os nós propostos para estudo (A, B ou C) apenas estes possuem variação de pressões. De maneira geral, com a evolução do fenômeno do adensamento, em ambos os nós se observa convergência para pequenos erros utilizando a metodologia AV.

Observa-se que, para ambos os nós a função teste (função de forma) que melhor se adequa ao problema durante os 2s iniciais é a *spline* de 4ª ordem, enquanto para os instantes posteriores as funções *splines* de 3ª e 4ª ordem demonstram precisões similares. Tal fato ocorre pois, devido a característica de permeabilidade do problema nos instantes iniciais observa-se um gradiente de pressões mais intenso e assim, as funções mais complexas modelam melhor o fenômeno. No mesmo raciocínio, nota-se que a função Gaussiana, em qualquer situação analisada, tem maior perda na precisão.

Já para o DRM, observa-se que a variação na utilização das funções (DRM1 e DRM2) gera pouca alteração na acurácia da análise. Destaca-se que, o termo não homogêneo apresenta comportamento similar a ordem de precisão das funções empregadas.



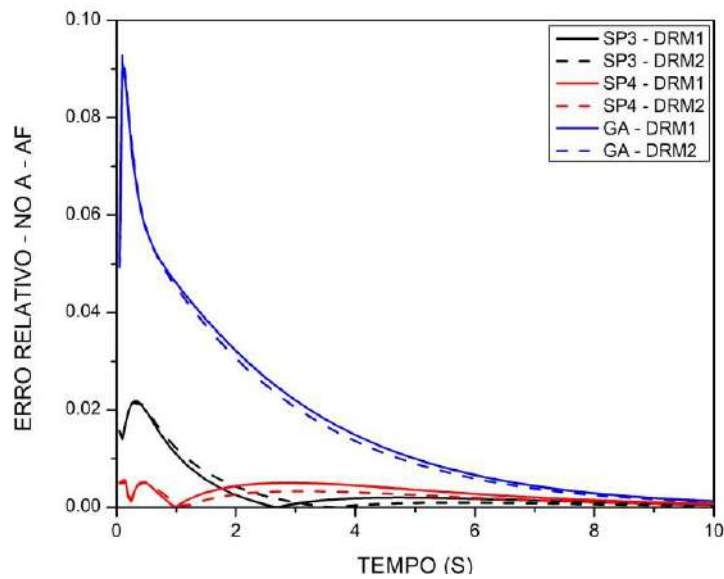
(a)N   A



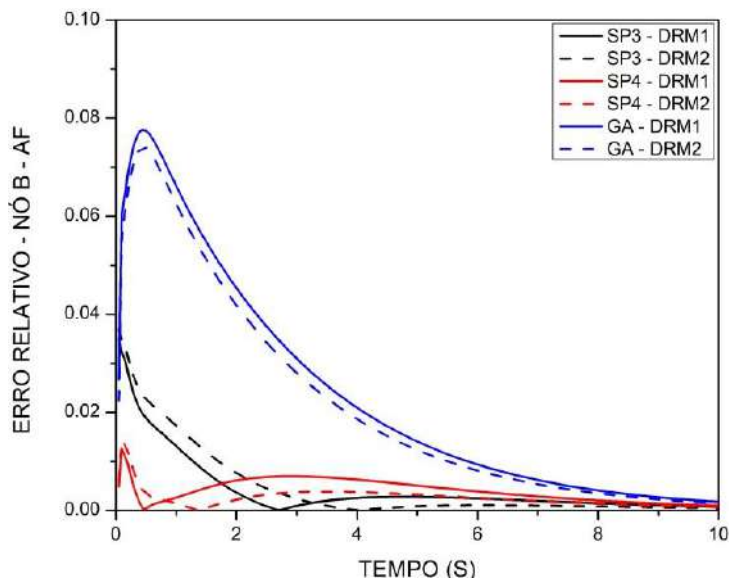
(b)Nó B

Figura 8.2 Erro Relativo Normalizado das Pressões para Alfa Variável

Nas figuras 8.3.a/b são apresentados os erros relativos da série histórica do campo pressões quando o parâmetro de relaxamento utilizado no acoplamento é mantido constante e no valor de  $\alpha_{relax} = 0.5$ . Pode-se se notar que o comportamento apresentado é similar àqueles apresentados nas figuras 8.2.a/b, uma vez que, sendo a evolu  o temporal do problema considerada paulatina ou quasi-est  tica, a frequência de onda gerada é muito baixa, fazendo com que não haja diferença significativa entre calcular o valor do parâmetro de relaxamento ótimo ou manter o mesmo constante conforme pode ser visto na figura 8.4.



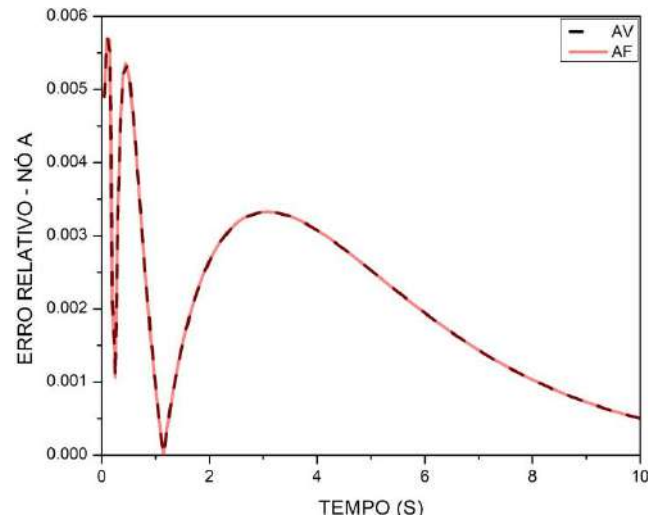
(a) N   A



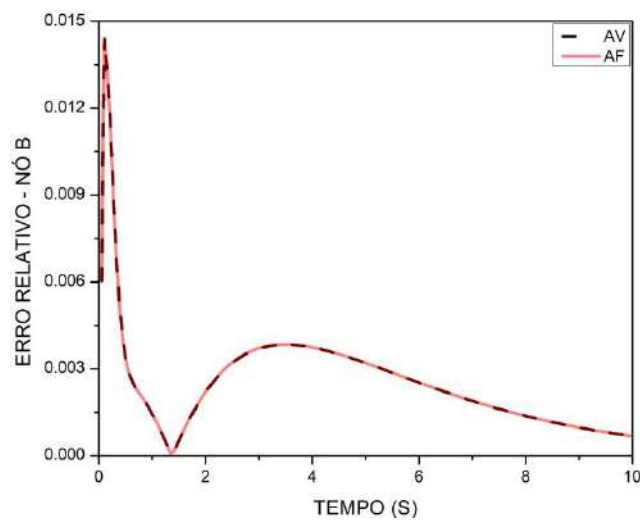
(b) Nó B

Figura 8.3 Erro Relativo Normalizado das Pressões para Alfa Fixo

Ainda na figura 8.4. evidencia-se que a partir da varia  o significativa do campo de pressões maior é o erro gerado. Para o nó B, os instantes iniciais são mais críticos para as oscila  es de pressão, uma vez que o nó fica exatamente no ponto central   possível que incompressibilidade do fluido pode gerar alguns desvios numéricos uma vez que, estando o fluido confinado em regiões não drenadas a amostra não pode se deformar e a varia  o das pressões na região gera suave altera  o entre respostas. Já para o nó A, ainda que menor o erro, este volta a sofrer um leve aumento mais tardiamente, justamente quando a drenagem do sistema começa a “chegar” no fundo da malha, para que ao fim do processo todos os nós estejam com pressão nula (figura 8.7). As peculiaridades observadas que divergem da soluço analítica já eram esperadas e foram obtidas dentro da normalidade.



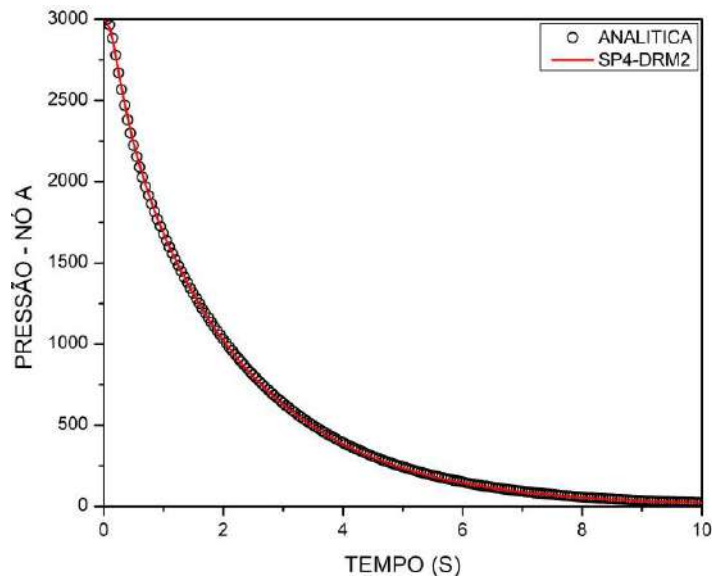
(a)Nó A



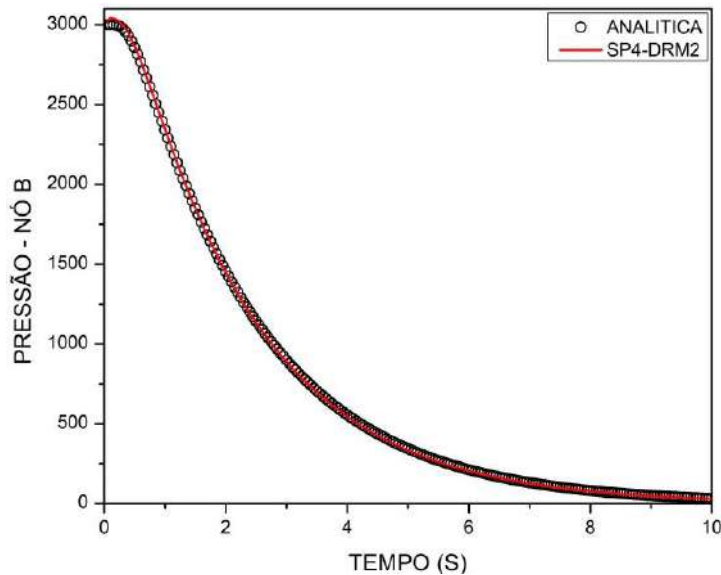
(b)Nó B

Figura 8.4 Erro Relativo Normalizado das Pressões comparativo entre Alfa Fixo e Alfa Variável da SP4-DRM2

A figura 8.5 mostra as curvas obtidas pela fórmula analítica e pela solução numérica da pressão ao longo do tempo para análises ótimas realizadas anteriormente. De maneira geral nota-se tanto para o nó A quanto para o nó B existe boa concordância entre a solução numérica e a solução analítica durante todo o processo do adensamento. Nota-se, novamente que, quanto maior a proximidade do nó de análise com a borda drenada maior a declividade (variação brusca) da função representativa do campo de pressões, podendo como consequência, gerar maiores erros para os instantes iniciais.



(a)Nó A



(b)Nó B

Figura 8.5 Pressões ao longo do tempo para SP4-DRM2

A figura 8.6 apresenta os resultados das pressões numéricas e analíticas ao longo do eixo  $y$  considerando todos os nós em  $x = 2.5$  em tempos específicos. O resultado obtido demonstra significativa concordância com a resposta analítica ao longo de todo o eixo considerado. Na figura 8.7 é apresentado a distribuição do campo de pressões em todos os nós da malha. Nesta pode observado o fenômeno do adensamento de maneira generalizada e sistemática, demonstrando que a metodologia se mostrou adequada para modelar o problema em questão.

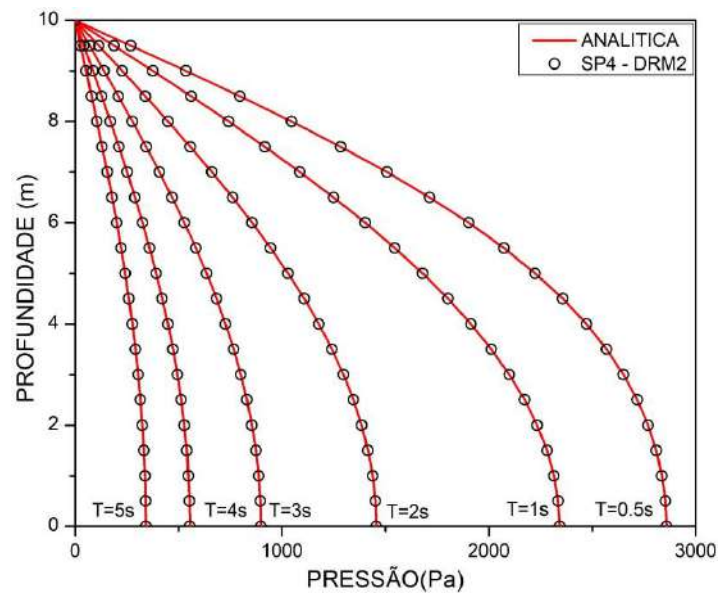
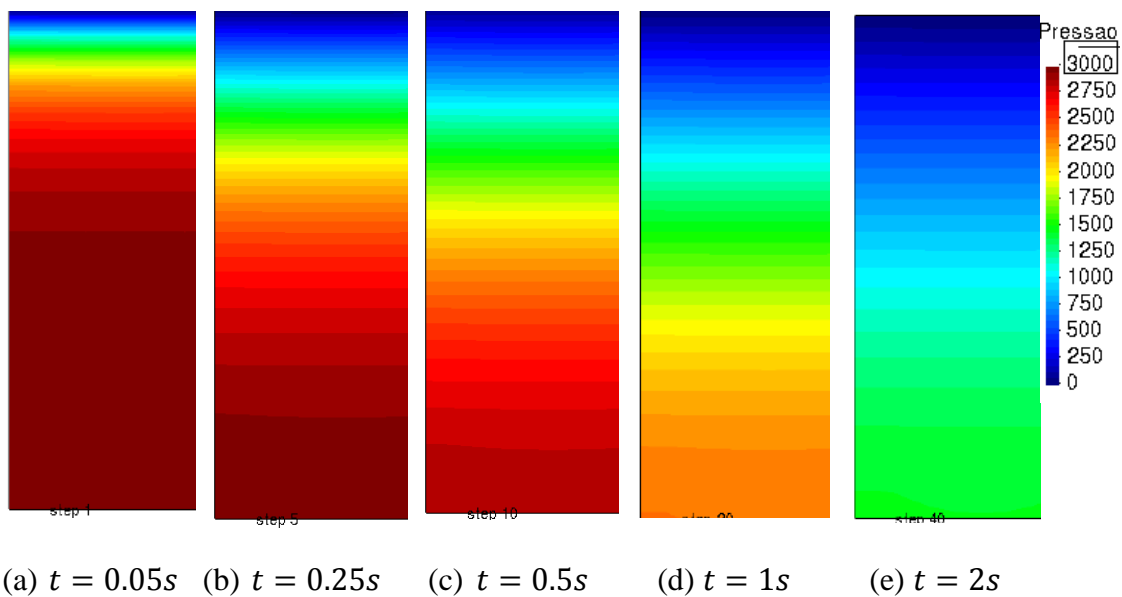


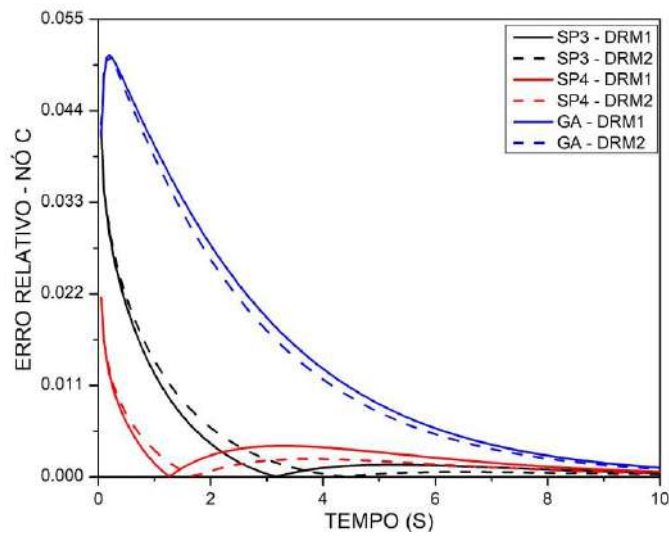
Figura 8.6 Pressões ao longo da profundidade para SP4-DRM2



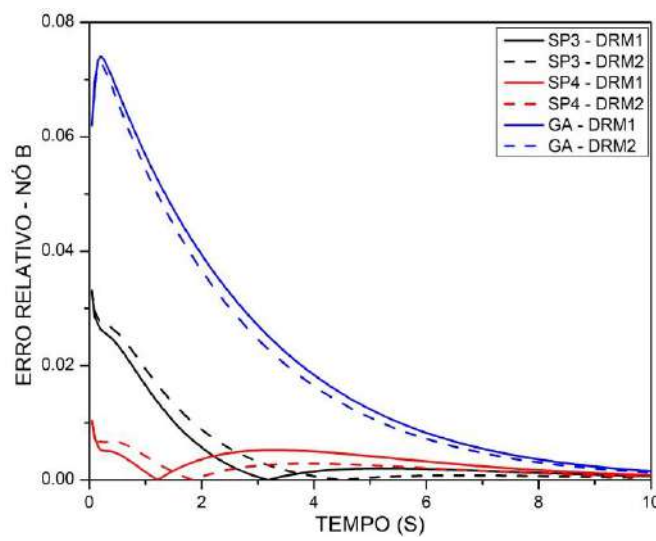
(a)  $t = 0.05s$  (b)  $t = 0.25s$  (c)  $t = 0.5s$  (d)  $t = 1s$  (e)  $t = 2s$

Figura 8.7 Pressões ao longo do tempo Geral – Estudo de Caso 1

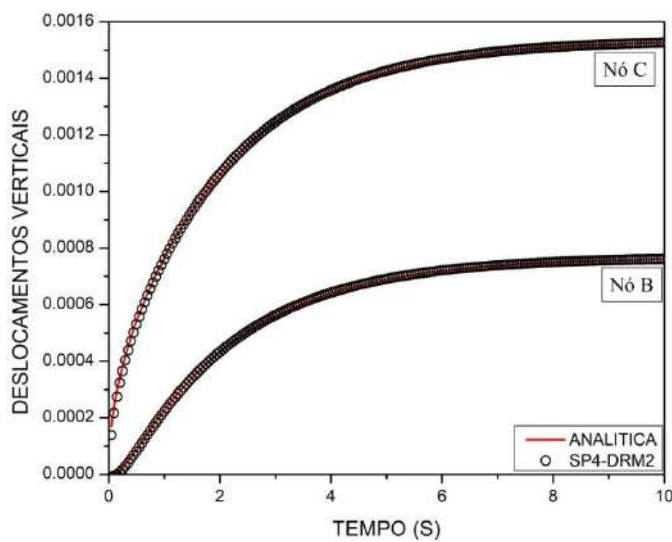
Na análise de deslocamentos verticais foi considerado para análise de erros o nó C – de topo da malha – e o nó B na região central, uma vez que nestas regiões ocorre a maior mudança do campo ao longo do tempo. A figura 8.8.a/b evidencia que, assim como o campo de pressões, os deslocamentos seguem os mesmos padrões discutidos anteriormente. A figura 8.8.c demonstra a boa concordância entre solução aproximada e analítica nos nós de análise e, ressalta-se ainda que, a metodologia de cálculo do parâmetro de relaxamento obedeceu ao mesmo critério observado no campo de pressões.



(a) Erro Relativo  
nó C



(b) Erro Relativo  
nó B



(c) Deslocamentos

Figura 8.8 Erros Relativos para AF e AV (são iguais) e Campo de Deslocamentos Verticais nós C e B

Na figura 8.9 é exposto a variação dos deslocamentos ao longo do eixo  $y$  da coluna de Terzaghi considerando todos os nós em  $x = 2.5$ . Nota-se que para os instantes iniciais os deslocamentos verticais não seguem um padrão linear ao longo da profundidade, porém, uma vez que a drenagem ocorre, o campo de pressões diminui, os deslocamentos e consequentemente, as tensões assumem seus valores máximos, concretizando assim, o fenômeno do adensamento.

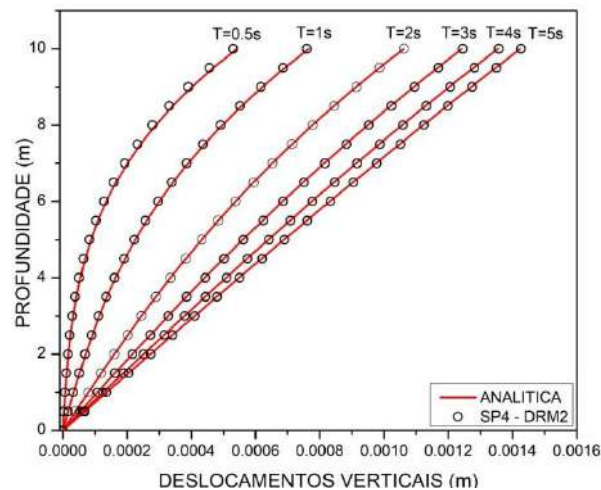


Figura 8.9 Deslocamentos em relação a profundidade para SP4-DRM2

Na figura 8.10 é apresentada a distribuição do campo de deslocamentos verticais em todos os nós da malha. Nesta, pode ser evidenciado o princípio das tensões efetivas, demonstrando que, a relação entre pressões e tensões no esqueleto sólido é inversa. Na figura 8.7 observa-se que no instante inicial – devido à incompressibilidade dos grãos sólidos – todo o carregamento é suportado pelo fluido e, a diminuição do campo de pressões ocorre ao longo do tempo. Em contrapartida, na figura 8.10 observa-se que, no decorrer do processo do adensamento, existe o aumento dos deslocamentos e, por conseguinte, das tensões no sólido.

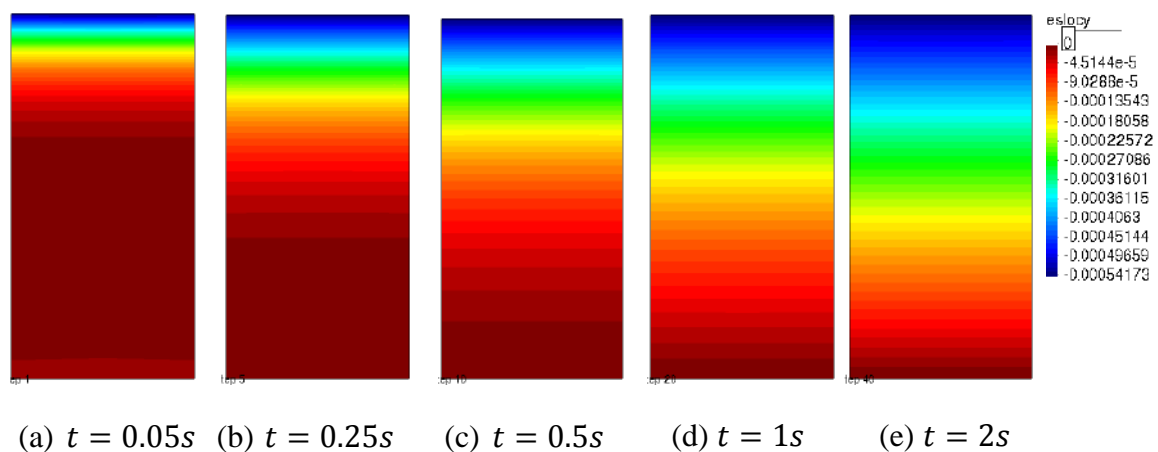


Figura 8.10 Deslocamento ao longo do tempo Geral – Estudo de Caso 1



## B) ESTUDO DE CASO 2

Para o segundo estudo de caso do problema de Terzaghi foi considerada uma coluna poroelástica com as mesmas propriedades descritas na Tabela 8.3, porém com condições de contorno distintas daquelas apresentadas anteriormente conforme pode ser visto na figura 8.11.

Partindo-se dos resultados obtidos no estudo de caso 1, optou-se por manter no modelo a utilização da função *spline* de 4ª ordem para o MLPG e, para o DRM, manteve-se a função polinomial denominada DRM2 (por apresentar ligeira melhora na precisão). Para este estudo de caso não foram apresentadas respostas analíticas mas torna-se interessante a visualização do comportamento do modelo quando acelera-se o tempo de dissipação das pressões.

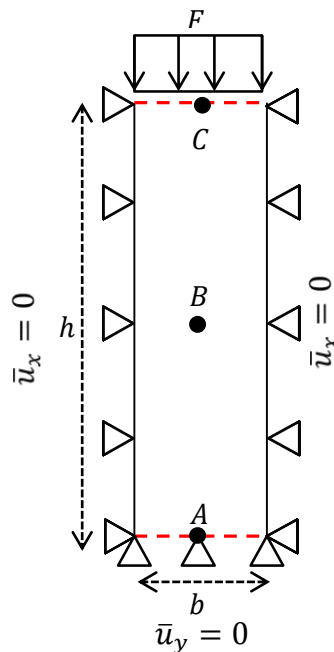


Figura 8.11 Coluna Poroelástica Modificada de Terzaghi - Estudo de Caso 2

Observa-se pelas figuras 8.12 que, na presença de bordas paralelas (superior e inferior) drenantes, as pressões dissipam-se em dois sentidos distintos: tanto de cima para baixo quanto de baixo para cima, ou seja, fluxo em ambas direções. Já na figura 8.13, tal comportamento é ressaltado e nota-se ainda que a dissipação das pressões ocorre mais lentamente no centro da amostra.

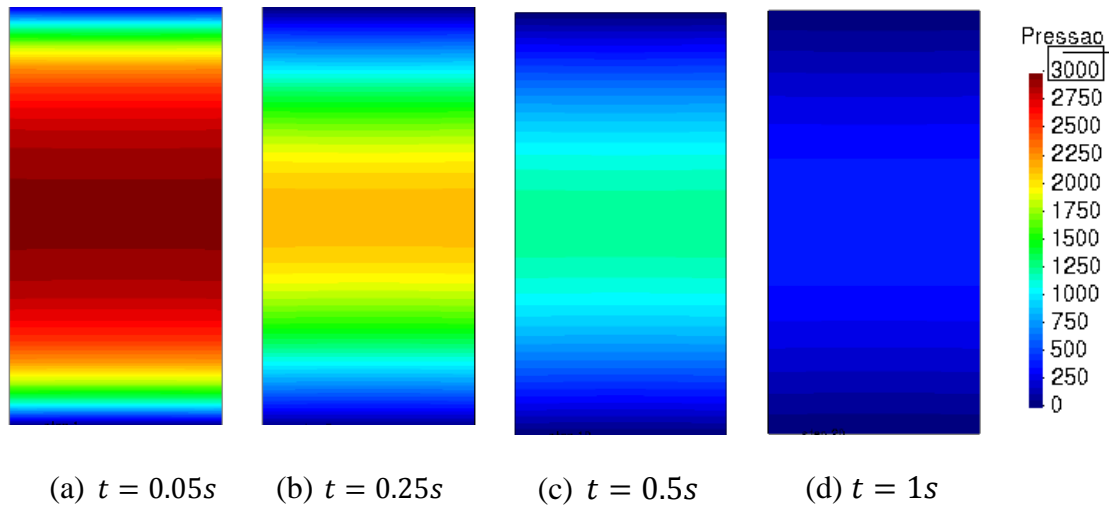


Figura 8.12 Pressões ao longo do tempo Geral – Estudo de Caso 2

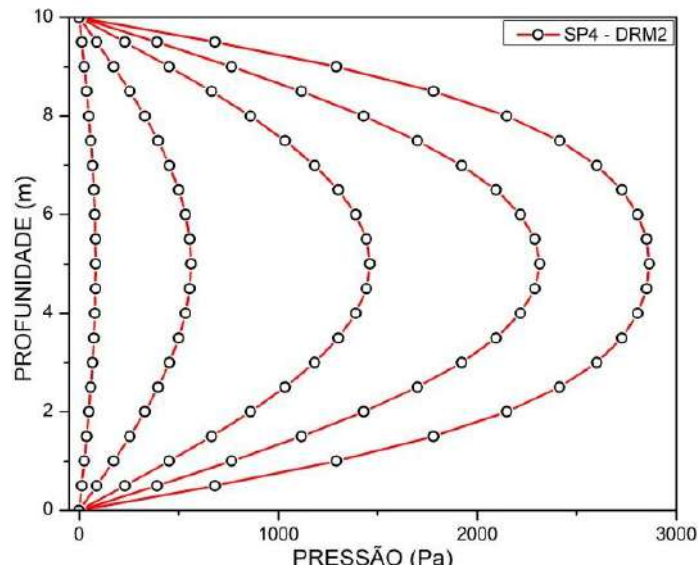


Figura 8.13 Pressões ao longo do tempo para SP4-DRM2

Na figura 8.14. pode ser analisado o deslocamento dos nós B e C, comparando o padrão de comportamento entre o estudo de caso 1 e 2. Nota-se que, com o aumento das regiões drenantes e, conseqüentemente, o aumento da velocidade de dissipação do campo de poro-pressões, a variação do deslocamento vertical torna-se muito mais acentuada do que aquela encontrada no estudo de caso 1.

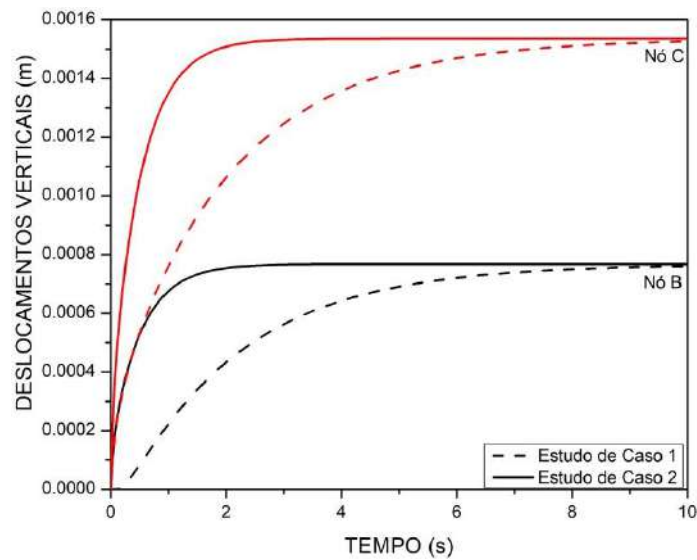


Figura 8.14 Deslocamentos para coluna poroelástica de Terzaghi - Estudo de Caso 2

Uma vez que o campo de pressões assume o comportamento representado na figura 8.12, o campo de tensões efetivas no esqueleto sólido se desenvolve primeiro na região das bordas drenantes e posteriormente na região central. Traduzindo o comportamento das tensões em termos de deslocamento pode-se observar que a figura 8.15 corrobora tal expectativa.

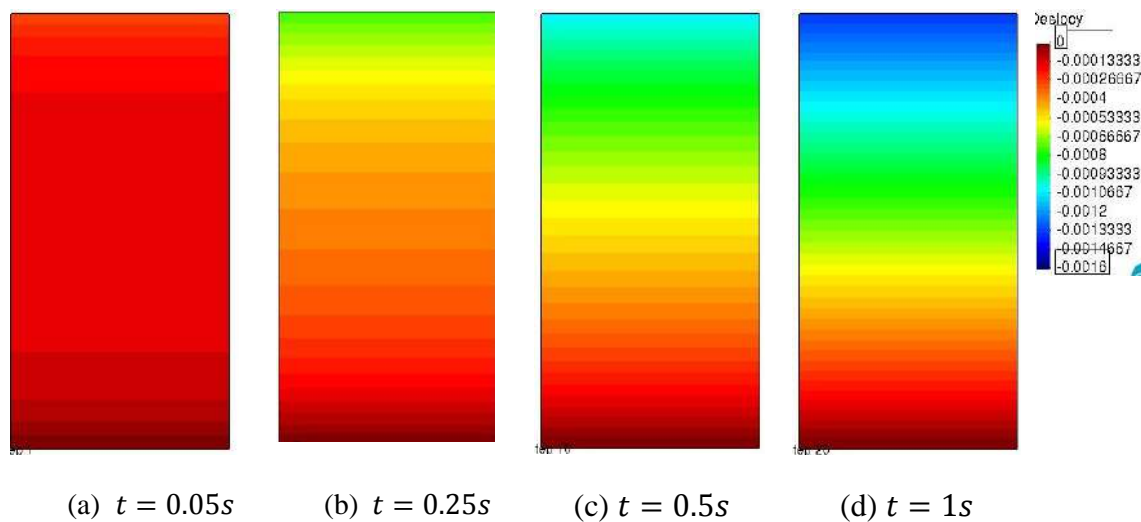


Figura 8.15 Deslocamento ao longo do tempo Geral – Estudo de Caso 2

### C) ESTUDO DE CASO 3

Para o terceiro estudo de caso do problema de Terzaghi foi considerada a mesma coluna poroelástica com propriedades descritas na Tabela 8.3 porém com borda superior horizontal e borda direita vertical drenantes e as demais impermeáveis, conforme observa-se na figura 8.16. Bem como no segundo estudo de caso, manteve-se no modelo a utilização da função *spline* de 4ª ordem para o MLPG e, para o DRM, a função polinomial denominada DRM2.

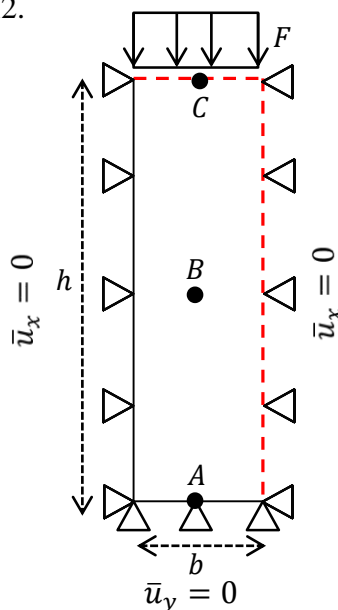


Figura 8.16 Coluna Poroelástica Modificada de Terzaghi - Estudo de Caso 3

Observa-se pelas figuras 8.17 e 8.18 que, na configuração apresentada as pressões dissipam-se de forma assimétrica e o processo se torna mais lento quão mais próximo a análise estiver da origem do modelo, uma vez que, esta região cercada de nós com configuração impermeável.

Na figura 8.19 nota-se que em relação aos estudos de caso anteriores, a dissipação de pressões no nó B ocorre ainda de maneira mais intensa e rápida, isto se deve ao fato da extensão das bordas drenantes serem superiores aos estudos testados anteriormente. A aceleração da dissipação entre o caso 2 e 3 é menos significativa, uma vez que a velocidade de escoamento se aproxima do limite relativo ao problema, sendo assim, pouco influenciaria outras regiões drenantes.

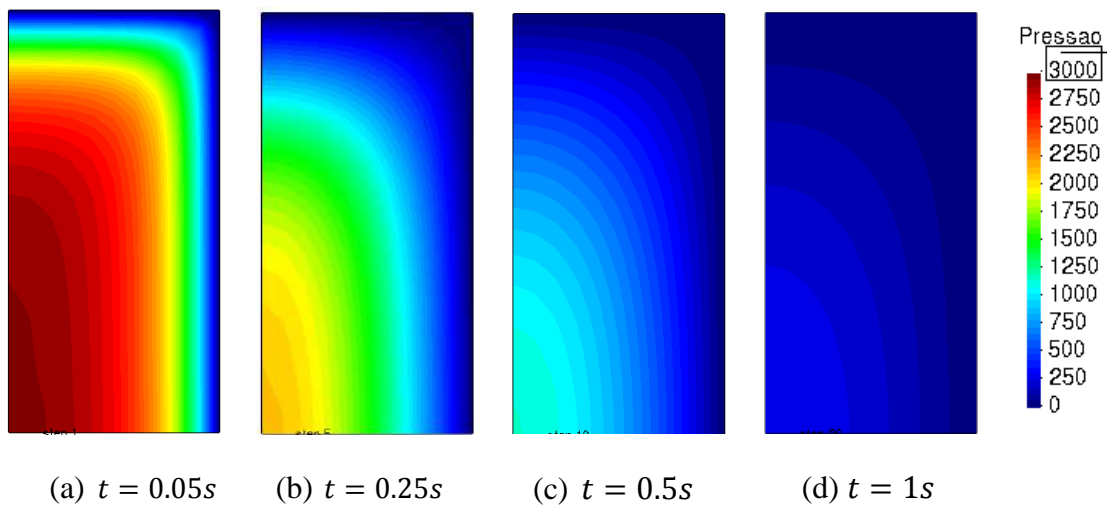


Figura 8.17 Pressões ao longo do tempo Geral – Estudo de Caso 3

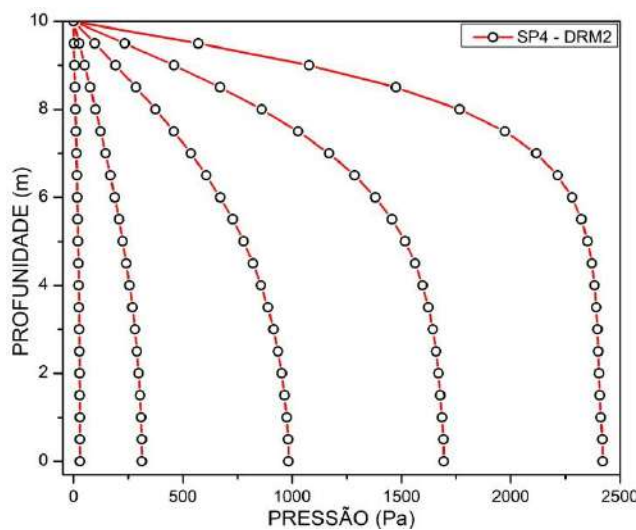


Figura 8.18 Pressões ao longo do tempo para SP3-DRM2

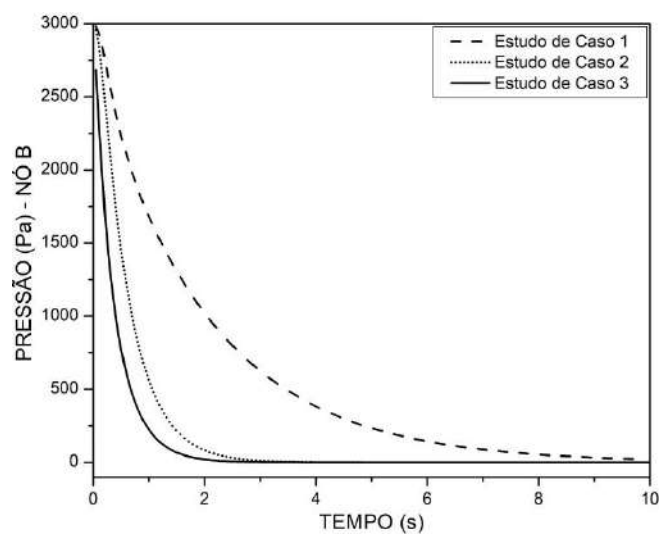


Figura 8.19 Pressões para coluna poroelástica de Terzaghi - Estudos de Caso

A figura 8.20 apresenta o campo de deslocamentos verticais em todos os nós do problema. Pode-se notar o comportamento antagônico em relação ao campo de pressões, nesta análise a assimetria dos deslocamentos é mais evidente nos nós próximos as regiões de maior drenagem.

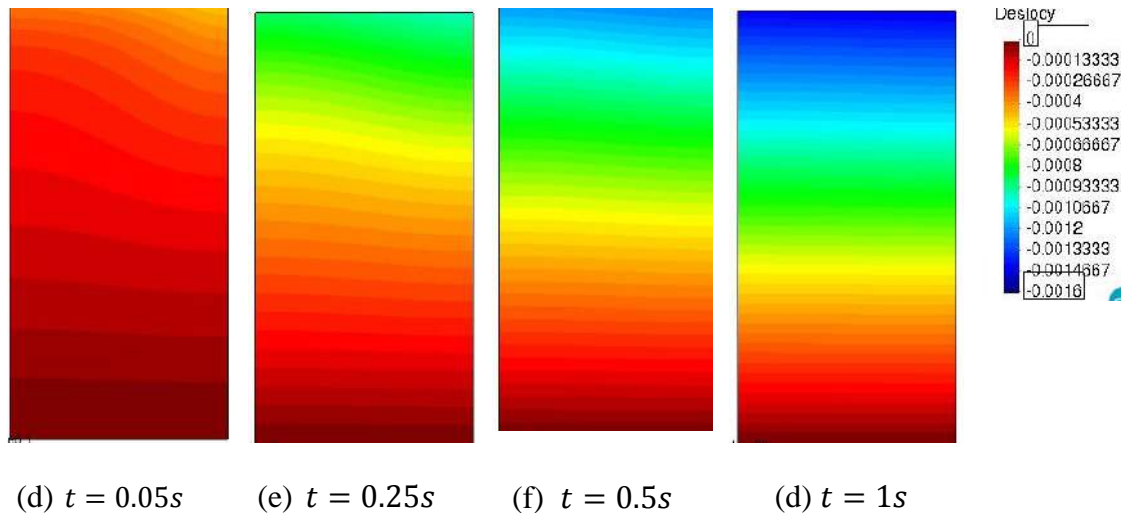


Figura 8.20 Deslocamento ao longo do tempo Geral – Estudo de Caso 3

## 8.2 Problema De Mandel

O segundo exemplo a ser avaliado é aquele proposto por Mandel (MANDEL, 1953) e, bem como o problema de Terzaghi, é um problema clássico amplamente utilizado para verificação e validação de códigos computacionais. Neste problema destacam-se algumas características interessantes a serem observadas: primeiramente, apesar do problema ser bidimensional, a resposta física é unidimensional. Segundo, a poropressão se comporta de maneira não- monótona (TONELLI, 2016) e, por fim, o problema ilustra como a interação sólido-fluido pode gerar comportamentos não esperados (PHILLIPS e WHEELER, 2007) .

A figura 8.21 exemplifica o modelo adotado para o problema que consiste em uma amostra de solo saturado de comprimento  $2a$  na direção  $x$ , altura  $2b$  na direção  $y$  e infinitamente longa na direção  $z$  sendo comprimida por duas placas rígidas nas faces superior e inferior. No início do processo ( $t = 0$ ) uma força vertical de compressão de magnitude  $2F$  é aplicada nas placas rígidas de modo a gerar um campo uniforme de pressões na amostra. O processo do adensamento ocorre na medida que o fluxo ocorre nas laterais da amostra, drenando e modificando o campo de tensões até total dissipação.

Nota-se a partir da definição da geometria do problema e de suas condições de contorno a presença de eixos de simetria tanto na direção  $x$  quanto na direção  $y$ . De forma a reduzir o custo computacional de uma malha completa foi utilizado o modelo reduzido gerado pela simetria, assim, as condições de contorno para as faces lateral esquerda e inferior são modificadas para estabelecimento de equivalência entre ambos.

As propriedades físicas do problema são apresentadas na tabela 8.4, a função teste considerada para o MLPG foi a *spline* 4ª ordem e para o termo não homogêneo modelado pelo DRM foi utilizado:

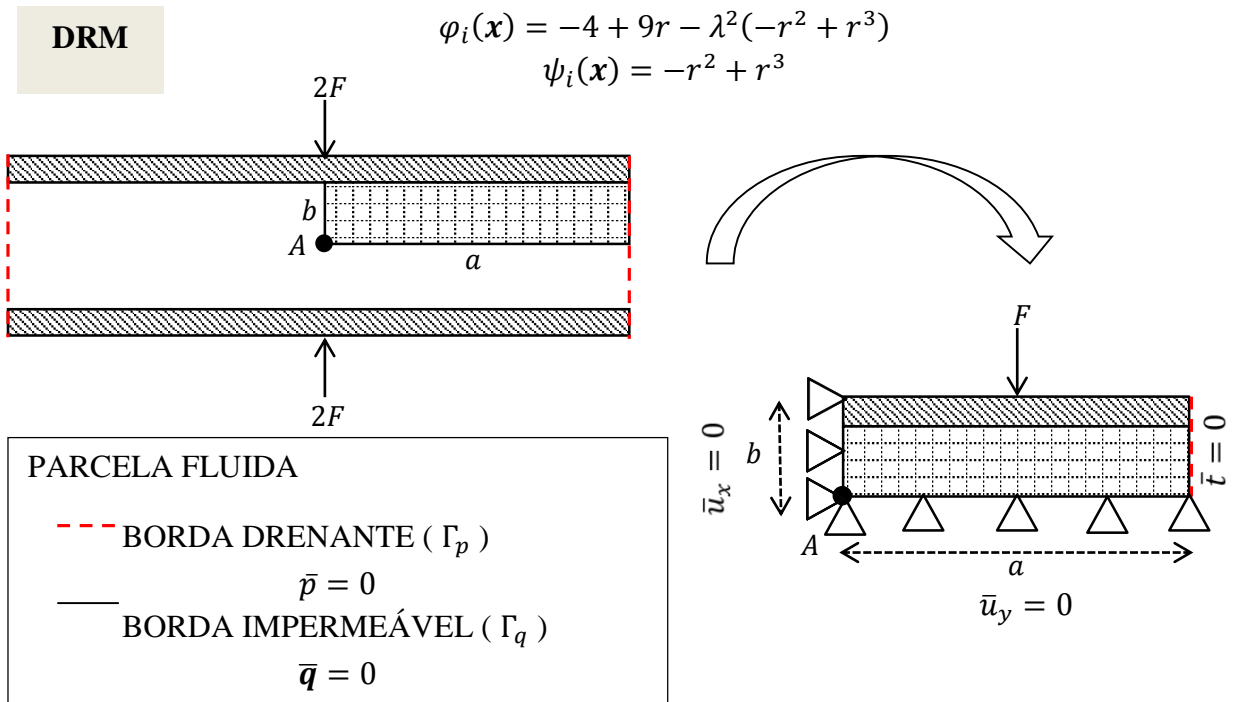


Figura 8.21 Modelo Esquemático para o problema de Mandel

MÓDULO DE ELASTICIDADE	$E = 1 \text{ N/m}^2$
COEFICIENTE DE POISSON (DRENADO)	$\nu = \text{varia}$
PERMEABILIDADE	$k = 1 \text{ m}^4/\text{Ns}$
POROSIDADE	$n = 0.33$
GEOMETRIA	$1\text{m} \times 0.2\text{m}$
FORÇA	$F = 1000\text{N/m}$
COMPRESSIBILIDADE DA MATRIZ POROSA	$C_m = \text{varia}$
PASSO DE TEMPO	$\Delta t = 0.001\text{s}$

Tabela 8.3 Parametros físicos para o problema de Mandel

No intuito de avaliar o método proposto para diferentes efeitos físicos, neste exemplo foram considerados diferentes coeficientes de Poisson variando  $\nu = 0$  até  $\nu = 0.4$ . À medida que aumenta a diferença entre os valores dos coeficientes de Poisson drenado e não drenado, mais evidenciado torna-se o efeito de Mandel- Cryer. A este efeito descreve-se: ao ser atingido a condição de equilíbrio após a aplicação do carregamento inicial, a amostra estará submetida a um campo de pressões e tensões efetivas que gradualmente se alterará devido ao fluxo de fluido para as laterais permeáveis. Estas laterais apresentam pressões relativas menores que aquelas no interior, gerando uma perda de sustentação ao carregamento nas extremidades. De forma a respeitar as condições de equilíbrio, ocorre uma transferência de carga de compressão para o centro da amostra. O aumento de tensões nesta região servirá como mecanismo de geração de poro-pressões, resultando assim um aumento inesperado no campo de pressões nos instantes iniciais do processo.

Para realizar análise dos parâmetros do método que influenciam a resposta numérica foram consideradas diferentes posições das fontes virtuais (P1, P2, P3) para cada coeficiente de Poisson proposto. Nota-se a partir da tabela 8.4 que o posicionamento das fontes virtuais deve ser alterado de acordo com a evolução do processo de adensamento. Destaca-se que a estratégia utilizada aplica fontes mais próximas até que a resposta atinja seu ponto de máximo e fontes mais distantes para captar o decrescimento da resposta, tal artifício é utilizado para que o comportamento não monotônico do campo de pressões possa ser captado, o chamado de efeito de Mandel Cryer.

<b>POISSON</b>	<b>P1</b>	<b>P2</b>	<b>P3</b>
<b><math>\nu = 0</math></b>	0.001475 e 0.2	0.001475 e 0.4	0.001475 e 0.6
<b><math>\nu = 0.1</math></b>	0.00225 e 0.0125	0.00225 e 0.0145	0.00225 e 0.0165
<b><math>\nu = 0.2</math></b>	0.004 e 0.008	0.004 e 0.01	0.004 e 0.012
<b><math>\nu = 0.3</math></b>	0.0065 e 0.007	0.0065 e 0.009	0.0065 e 0.011
<b><math>\nu = 0.4</math></b>	0.0125 e 0.008	0.0125 e 0.01	0.0125 e 0.012

Tabela 8.4 Distâncias entre fontes virtuais e contorno real testadas para o problema de Mandel

A resposta analítica proposta por Mandel em 1953 pode ser encontrada em (PHILLIPS e WHEELER, 2007) ou também fazendo uso de variáveis normalizadas em (COUSSY, 2004). As expressões para o campo de pressão são:



$$p(x, t) = \frac{2FB(1 + \nu_u)}{3a} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n - \sin \alpha_n \cos \alpha_n} \left( \frac{\cos \alpha_n x}{a} - \cos \alpha_n \right) \exp \left[ \frac{-(\alpha_n)^2 ct}{a^2} \right] \right\} \quad (8.5)$$

onde  $F$  é a força aplicada,  $a$  é a base do problema considerando a simetria,  $\nu_u$  é o coeficiente de Poisson não drenado ( $\nu_u = 0.5$ ),  $B = 1$  é o coeficiente de Skempton e  $c = kK + \frac{4}{3}G$  é o coeficiente de consolidação. Os termos  $\alpha_n$  são as raízes da expressão:

$$\frac{\tan \alpha_n}{\alpha_n} = \frac{1 - \nu}{\nu_u - \nu} \quad (8.6)$$

A figura 8.22 apresenta os resultados das pressões ao longo da reta  $y = 0$  para diferentes períodos de tempo considerando  $\nu = 0$ . Sabendo-se que a pressão inicial é  $p(x, 0) = (1/3) * BF(1 + \nu_u) = 500Pa$ , pode-se notar que na região impermeável do problema que o efeito de Mandel – Cryer é evidente e pode ser captado numericamente. Enquanto isso, quanto mais afastado da face esquerda (mais próximo à extremidade), mais intensa é a queda da pressão.

Assim como no problema de Terzaghi, a oscilação no campo de pressões próximo as faces drenantes é refletida nas respostas numéricas, existindo assim uma dificuldade em se modelar os efeitos da variação brusca da poropressão no terço final da malha. Entretanto, é interessante observar também que, nos instantes que posteriores a aplicação do carregamento, ou seja, em graus de adensamento mais altos, as respostas obtidas são satisfatórias mostrando que, as oscilações geradas nos instantes iniciais não se propagam de forma a afetar significativamente a resposta nos demais instantes.

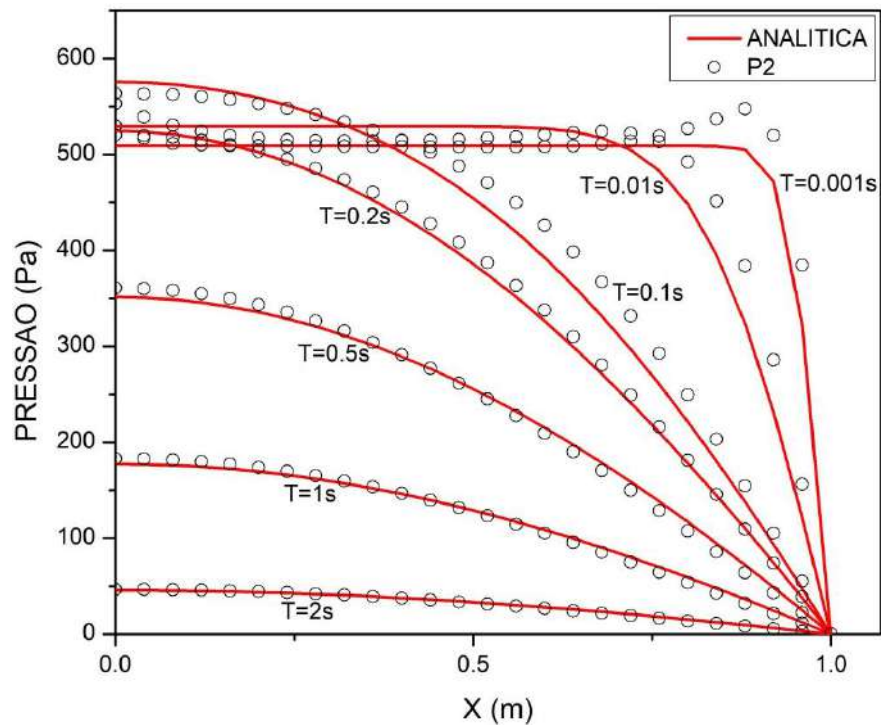


Figura 8.22 Campo de pressões ao longo do eixo horizontal para o problema de Mandel

Na figura 8.23 pode ser observado o comportamento do campo de pressões para diferentes coeficientes de Poisson analisando um nó de coordenadas (0; 0.12). Conforme esperado, o efeito de Mandel - Cryer é mais evidente quando  $\nu = 0$  e, conseqüentemente, mais complexo de ser numericamente captado. Ainda assim, pode-se observar que a modelagem proposta atende as expectativas e satisfaz o comportamento apresentado nas respostas analíticas.

Ainda sobre o comportamento observado na figura 8.23 juntamente com os dados da tabela 8.4 nota-se que a medida que deseja-se captar o crescimento mais intenso da resposta numérica (efeito de Mandel Cryer) mais excitado o problema deve estar, de tal sorte que, fontes virtuais devem estar posicionadas nas proximidades do contorno real. Conclui-se que, nesta fase do problema, quão menor o coeficiente de Poisson, mais próxima das fontes devem se localizar.

Já em relação a distância adotada após atingido o pico da resposta nota-se um comportamento oposto, quão menor o coeficiente de Poisson mais suave é o decaimento do campo de pressões e, por isso menos excitado o problema deve estar, optando-se assim, por fontes mais distantes.

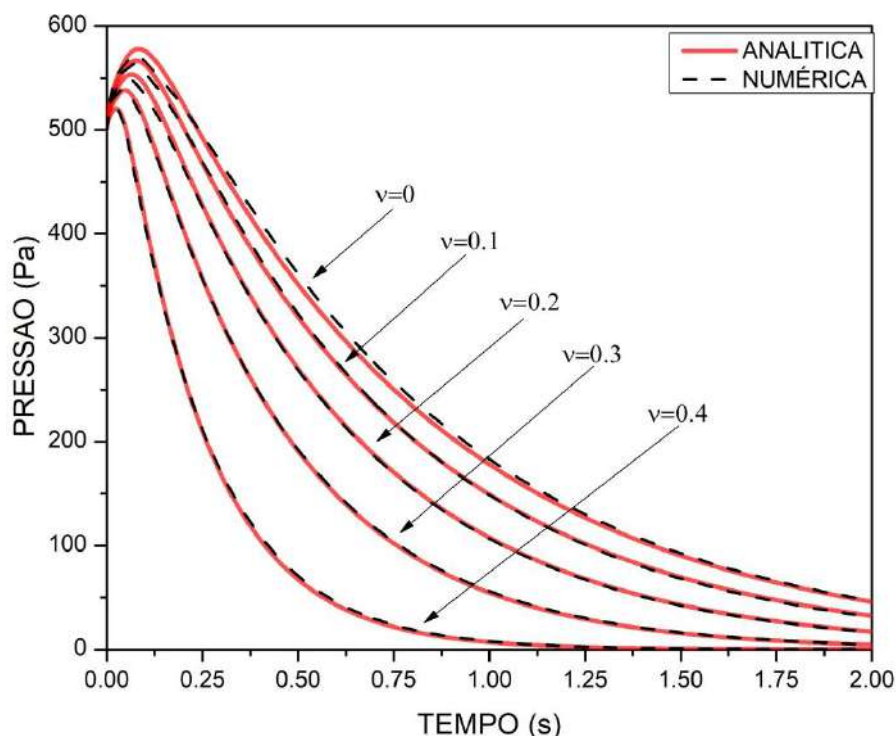


Figura 8.23 Pressões para nó com coordenadas **(0; 0.12)** para diferentes coeficientes de Poisson para o problema de Mandel

De forma a tornar possível a análise da influência do posicionamento das fontes virtuais no problema em diferentes níveis do efeito Mandel Cryer, os gráficos de erros para as posições apresentadas na tabela 8.5 são apresentados nas figuras 8.24. Ressalta-se que, para cada caso testado, a posição da fonte virtual até que o pico de pressão seja atingido foi fixada. Preocupando-se com o decrescimento (brusco ou não) das poropressões, a avaliação do posicionamento da fonte deu-se apenas a segunda fase do problema.

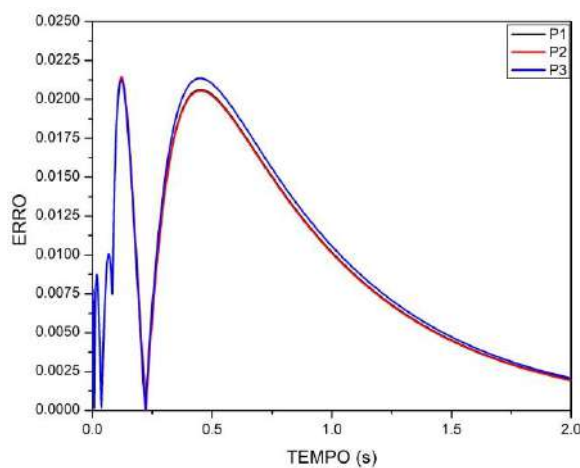
Ainda em relação as figuras 8.24, pode-se notar que todos os gráficos mostram que a posição indicada como P2 é a posição que apresenta menor erro. A partir da comparação dos erros relativos a cada posição analisada (P1, P2 e P3), nota-se a existência de uma posição ótima para as fontes virtuais, a qual não necessariamente é obtida a partir do aumento ou redução na distância entre fonte virtual e contorno real. A ocorrência de tal padrão já era esperada e corrobora um comportamento característico do método MFS.

Analisando, de maneira geral, os padrões de erros encontrados nas figuras 8.24 pode-se notar que para os instantes iniciais - quando ocorrem as maiores variações do campo de pressões - os erros atingem seus picos e, posteriormente, decrescem com o

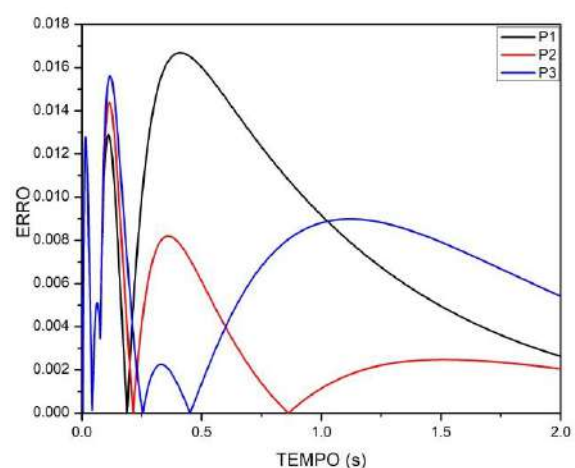
andamento do processo de adensamento. É possível perceber também que, em todos os casos, a precisão do problema é bastante sensível em relação ao posicionamento da fonte virtual, uma pequena alteração na distancia adotada para as excitações – sejam estas mais próximas ou distantes - geram padrões de resposta distintos para o mesmo fenômeno.

Avaliando individualmente cada gráfico, a figura 8.24.a mostra que o posicionamento das fontes pouco altera a ordem de grandeza dos erros gerados uma vez que se observa o decaimento suave da solução. Já para a figura 8.24.b, quando  $\nu = 0.1$ , os valores dos erros obtidos para os instantes iniciais mostram-se inferiores àqueles encontrados quando  $\nu = 0$  e, nota-se a sensível relação entre o posicionamento das fontes virtuais e a resposta numérica gerada.

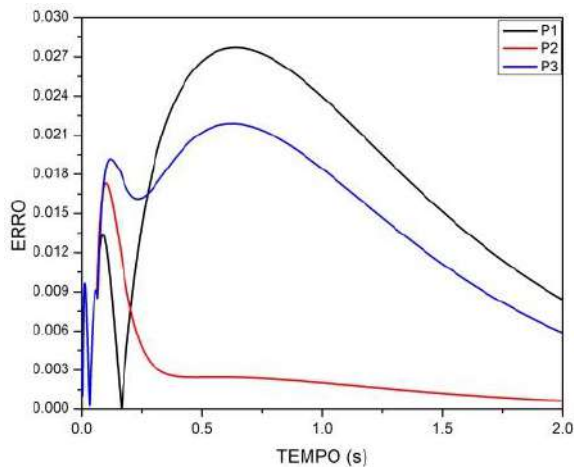
Mostra-se ainda que, quando  $\nu = 0.2, 0.3$  ou  $0.4$ , o efeito de Mandel Cryer é menos evidente, a solução analítica possui menor oscilação e o posicionamento das fontes virtuais estão no mesmo padrão de comportamento. Para todos estes casos, nota-se que a posição P1 é pior que a posição P3, isto é, quanto menor a distância, maiores erros serão gerados. Ao se observar o padrão de resposta na figura 8.23 é possível perceber que as soluções são modeladas por decaimento brusco no campo de pressões o qual, não consegue ser simulado enquanto o domínio se mantiver excitado com fontes nas proximidades.



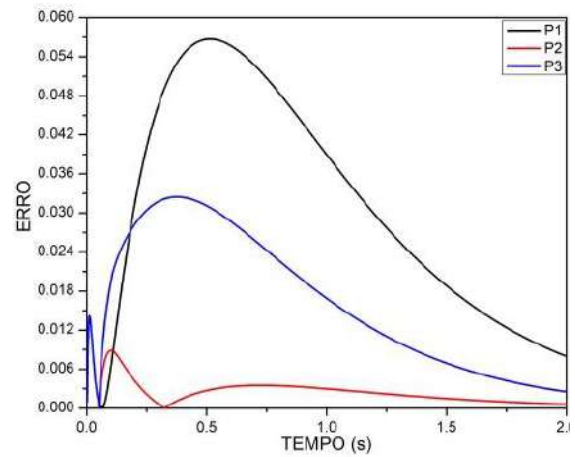
(a)  $\nu = 0$



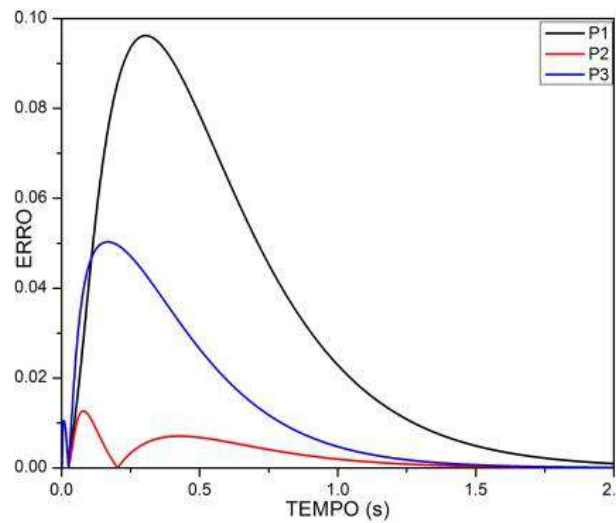
(b)  $\nu = 0.1$



(c)  $\nu = 0.3$



(d)  $\nu = 0.3$



(e)  $\nu = 0.4$

Figura 8.24 Erros Relativos Normalizados para diferentes coeficientes de Poisson no problema de Mandel

Na figura 8.25 está apresentado no instante finais do processo de adensamento o módulo dos deslocamentos juntamente com a malha deformada e a figura 8.26 demonstra o comportamento deste campo para cada direção confirmando o gradiente encontrado. Como primeira análise é possível observar que os resultados dos deslocamentos demonstram que a deformação vertical (direção y) é um estado plano de deformação em função apenas do tempo, enquanto na horizontal (direção x) varia tanto no tempo quanto no espaço.

No problema tratado aplicação da carga no instante inicial causa uma deformação elástica no material e, conseqüentemente uma compactação vertical, o efeito de Poisson gera uma expansão horizontal. Para os instantes  $t > 0$ , quando é imposta a condição drenada na amostra, observa-se que na direção y o material continua se compactando,

enquanto na direção  $x$  ocorre expansão. Esta expansão ocorre de maneira mais lenta devido a mudança do efetivo valor do coeficiente de Poisson, o qual alterou do valor não drenado para drenado (PIZZOL, 2014).

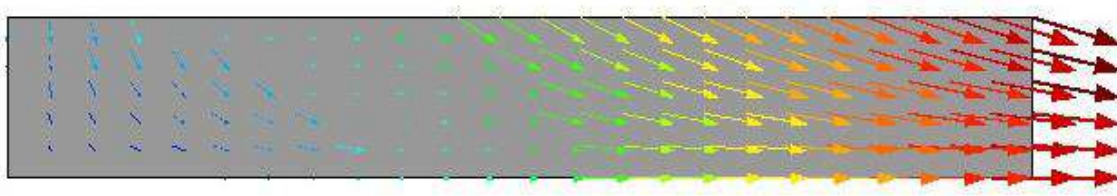
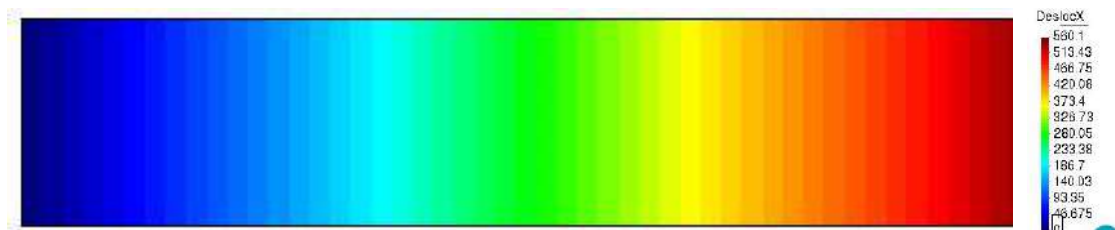
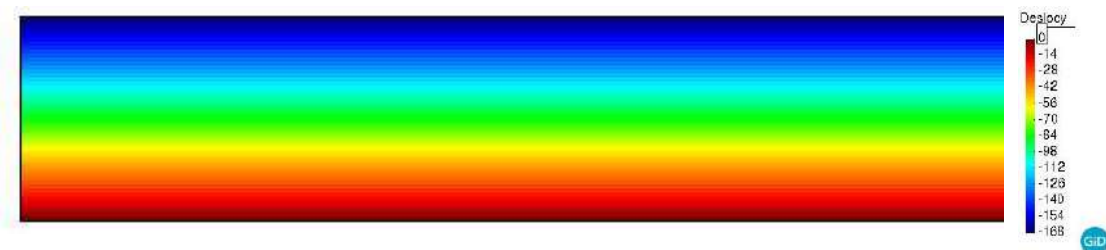


Figura 8.25 Módulo dos deslocamentos finais com malha deformada para o problema de Mandel



(a) Deslocamento na direção  $x$



(b) Deslocamento na direção  $y$

Figure 8.26 Campo de deslocamentos finais para  $\nu=0.4$  para o problema de Mandel

### 8.3 Problema De Schiffman

O terceiro exemplo a ser estudado foi originalmente proposto por Schiffman em 1969 (SCHIFFMAN, CHEN e JORDAN, 1969) e simula o comportamento do meio em relação ao adensamento para uma carga de uma fundação em viga contínua apoiada sobre uma camada de solo semi-infinita. Em termos de modelagem computacional, o estabelecimento de um meio infinito se dá de maneira que o domínio sofra interferência mínima das condições de contorno. A discretização adotada neste trabalho segue aquela proposta por (HWANG, MORGENSTERN e MURRAY, 1971), onde a geometria do problema consiste em uma região simétrica de tamanho  $6a \times 9a$ , considerando que na largura  $a$  é aplicada uma carga distribuída  $F$ .

Para simulação do meio semi-infinito duas condições de contorno foram estudadas. Conforme pode ser observado na figura 8.27.a inicialmente a borda lateral direita foi considerada impermeável e fixa para deslocamentos horizontais (Modelo 1 – M1) e, posteriormente, conforme figura 8.27.b a mesma borda foi considerada articulada e drenante (Modelo 2 – M2). As demais bordas mantêm o mesmo padrão em ambos os modelos: no topo uma superfície drenante com aplicação do carregamento, para a face inferior foi considerado uma superfície impermeável com deslocamento vertical restringido e por fim, sobre o eixo de simetria foi considerado superfície impermeável com deslocamento horizontal restrito. Destaca-se que, como forma de analisar os resultados em relação à modelos finitos, análises similares podem ser encontradas nos trabalhos de (CAVALCANTI, 2002) e (SILVA, 2018).

As propriedades físicas do solo estudado encontram-se na tabela 8.5 e, em relação aos métodos utilizados considerou-se para o MFS três posições distintas das fontes virtuais nomeando-se: P1 são as fontes à 0.1m de distância, P2 são as fontes à 2m de distância e P3 são as fontes à 5m de distância do contorno real. Em relação ao DRM foram consideradas:

<b>DRM 1</b>	$\varphi_i(x) = r^4 \log r$ $\psi_i(x) = -\frac{64}{\lambda^6} [K_0(\lambda r) + \log r] - \frac{r^2 \log r}{\lambda^2} \left( \frac{16}{\lambda^2} + r^2 \right) - \frac{8r^2}{\lambda^4} - \frac{96}{\lambda^6}, se \ r > 0$ $\psi_i(x) = \frac{64}{\lambda^6} \left[ \gamma + \log \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right] - \frac{96}{\lambda^6}, se \ r = 0$
<b>DRM 2</b>	$\varphi_i(x) = -4 + 9r - \lambda^2(-r^2 + r^3)$ $\psi_i(x) = -r^2 + r^3$

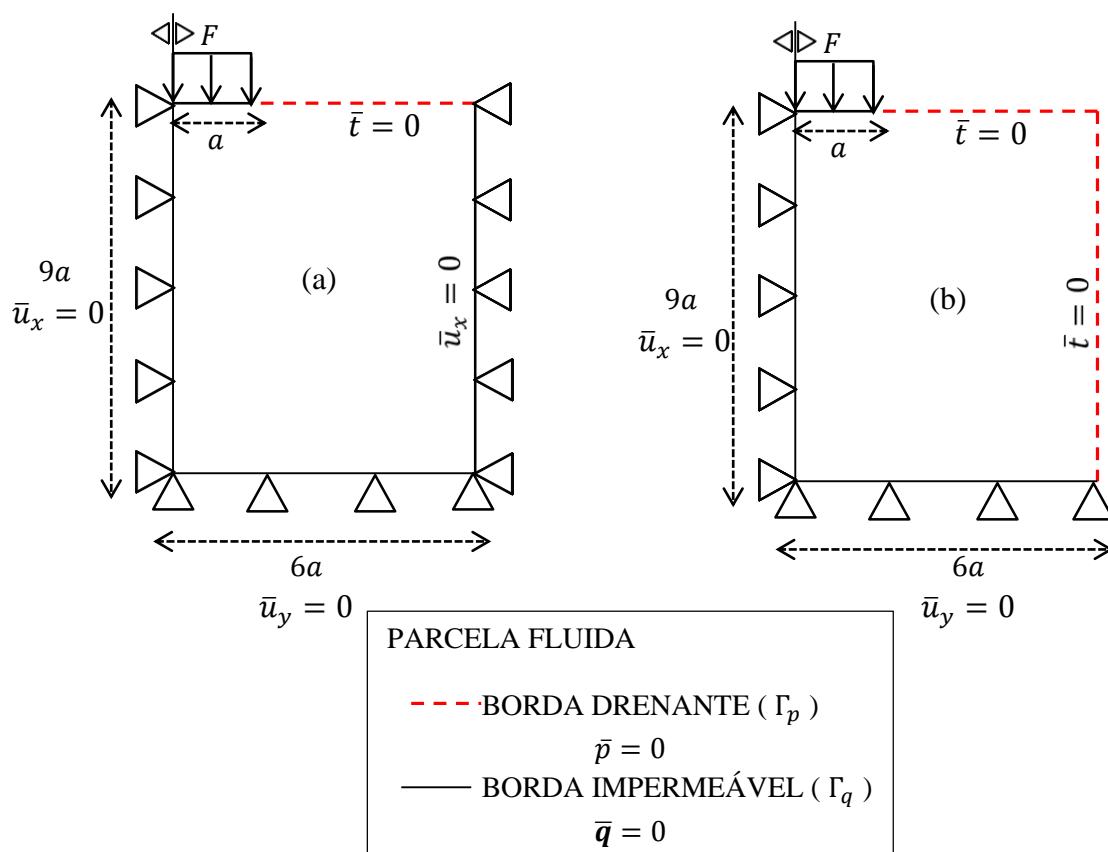


Figure 8.27 Modelo Esquemático utilizado para o problema de Schiffman. (a) Condições de Contorno 1 (M1). (b) Condições de Contorno 2 (M2)

MÓDULO DE ELASTICIDADE	$E = 1 \text{ N/m}^2$
COEFICIENTE DE POISSON (DRENADO)	$\nu = 0$
PERMEABILIDADE	$k = 1 \text{ m}^4/\text{Ns}$
POROSIDADE	$n = 0.33$
GEOMETRIA	$6m \times 9m \ (a = 1)$
FORÇA	$F = 1 \text{ N/m}$
COMPRESSIBILIDADE DA MATRIZ POROSA	$C_m = 1/K = 1/3$
PASSO DE TEMPO	$\Delta t = 0.001s$

Tabela 8.5 Parametros físicos para o problema de Schiffman

Os resultados obtidos foram comparados com os resultados apresentados no trabalho de (SILVA, 2018). Nomeia-se como REF1 de a solução analítica proposta por (SCHIFFMAN, CHEN e JORDAN, 1969) apresentados no trabalho de (CAVALCANTI, 2002) e REF2 as soluções numéricas apresentadas por (SILVA, 2018).

Nas figuras 8.28 podem ser observadas a distribuição das poro-pressões ao longo do eixo de simetria do carregamento, com profundidade normalizada em relação a altura total do modelo, em um fator tempo de 0,10, relacionando para cada posição da fonte virtual os modelos e as funções DRM utilizadas.

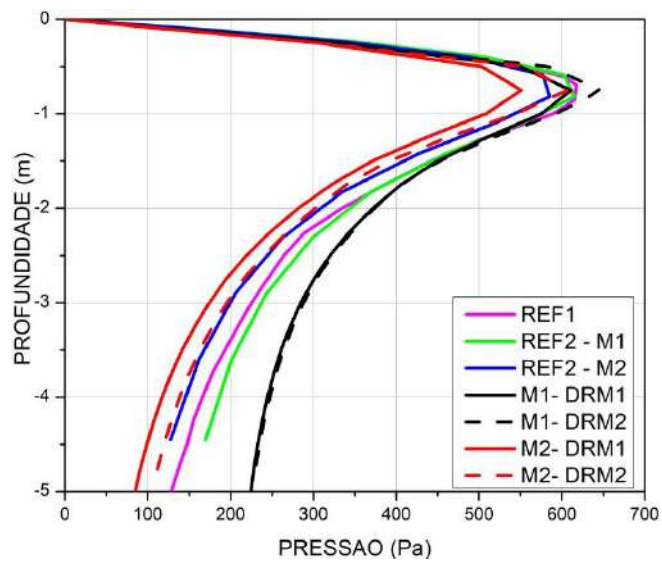


Na figura 8.28.a, observam-se os resultados obtidos para a posição mais próxima do contorno analisada. Nota-se que, para o modelo 1, independente da função DRM utilizada, à medida que a profundidade aumenta a resposta numérica representa o padrão de resposta esperado, porém com valores superiores às outras análises. Para este modelo a função DRM1 apresenta o pico de pressões próximo as análises de referência, porém quando relacionadas à profundidade da amostra nenhuma das funções DRM escolhidas são capazes de captar a mudança acentuada no campo de pressões.

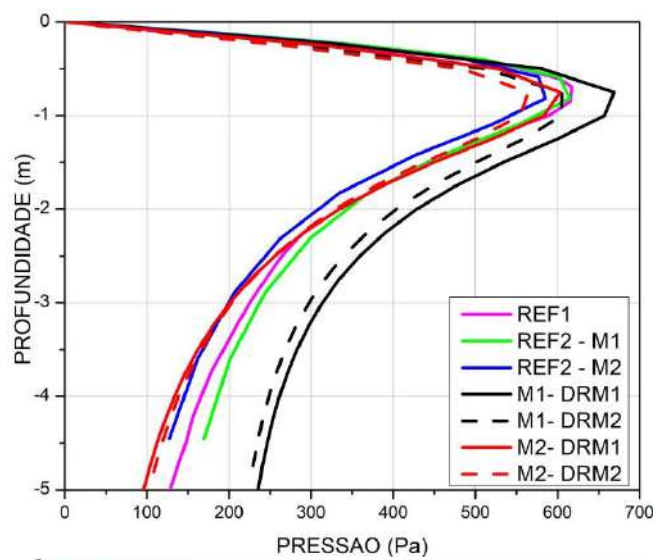
Observa-se ainda que, para modelo 1, conforme pode ser visto nas figuras 8.28. b e 8.28.c, à medida que as fontes virtuais se afastam do contorno real, tanto o pico de pressões quanto as pressões ao longo da profundidade se afastam da resposta analítica. Com a restrição de fluxo em grande parte do problema, a drenagem ocorre de forma mais lenta, gerando um excesso no campo de pressões apresentado.

Ressalta-se ainda que para M1, as posições P2 e P3 não há alteração no padrão de comportamento da resposta numérica calculada, mostrando que, após um valor de afastamento das fontes os resultados apresentam pouca variação. É interessante notar que nestes casos a função polinomial DRM2 apresenta uma melhor modelagem da resposta não homogênea, contrastando àqueles obtidos na posição P1, quando a função DRM1 apresenta-se mais adequada.

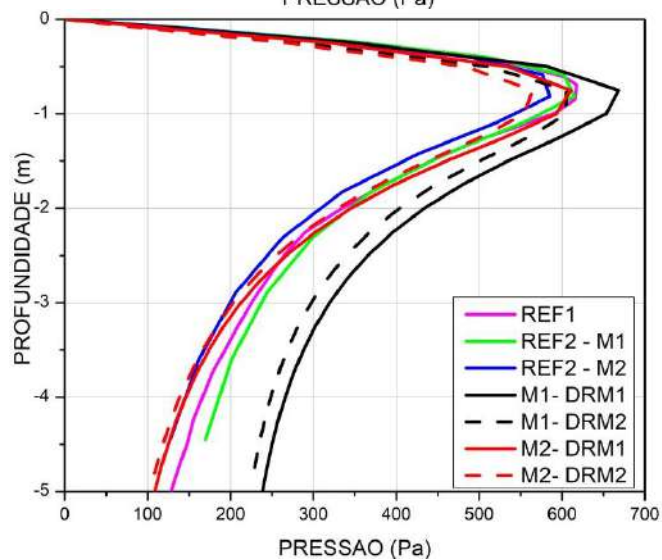
Relacionando a distancia das fontes virtuais com o modelo 2, pode ser observado nas figuras 8.28.a./b/c, que o padrão de resposta também é sensível a variação das distâncias das mesmas. No caso de menores distâncias (posição P1), a função DRM2 mostra-se mais adequada, enquanto nas posições P2 e P3 a função DRM1 modela melhor o problema estudado. Para M2 as respostas numéricas P1-DRM2, P2-DRM1 e P3-DRM1 apresentam padrão de comportamento adequado, com curvas similares e paralelas as referências apresentadas.



(a) P1



(b) P2



(c) P3

Figura 8.28 Pressões ao longo do eixo y para diferentes distâncias ente fontes virtuais e contorno real para o problema de Schiffman

Após as análises anteriores optou-se por realizar verificações acerca do comportamento do MFS-DRM apenas para o modelo 2, relacionando as distâncias adotadas com o comportamento das funções DRM. Na figura 8.29 estão apresentadas as funções em relação ao raio com destaque para os pontos de inflexão onde ocorre mudança no crescimento das mesmas. De forma a investigar a relação entre a distância adotada e raio das funções DRM adotou-se novas posições com valores inferiores ao ponto de máximo ou mínimo local ( $r = 0.1, r = 0.4$ ) e valores superiores ( $r = 1.2, r = 2$ ) captando assim, diferentes fases destas funções.

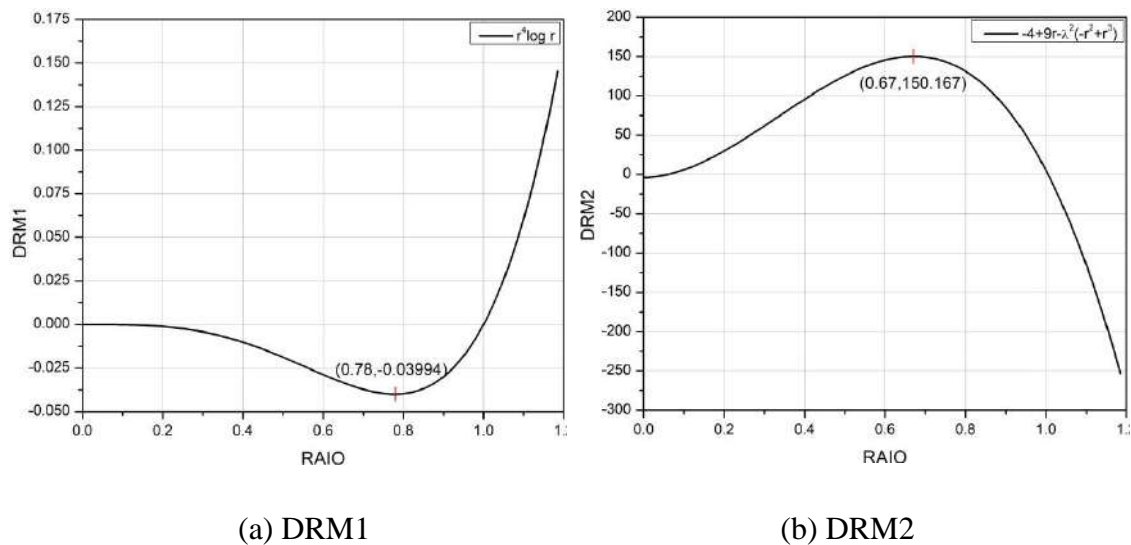
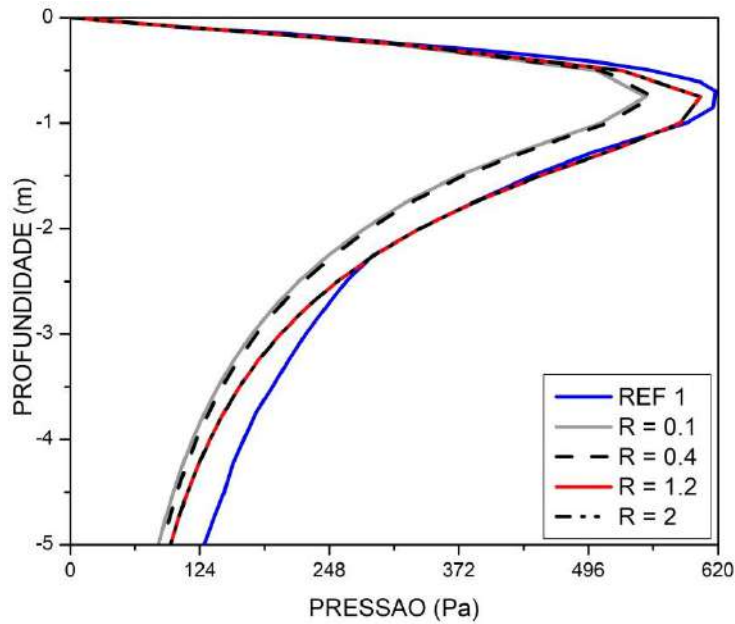


Figura 8.29 Pontos de Inflexão nas funções utilizadas no DRM para o problema de Schiffman

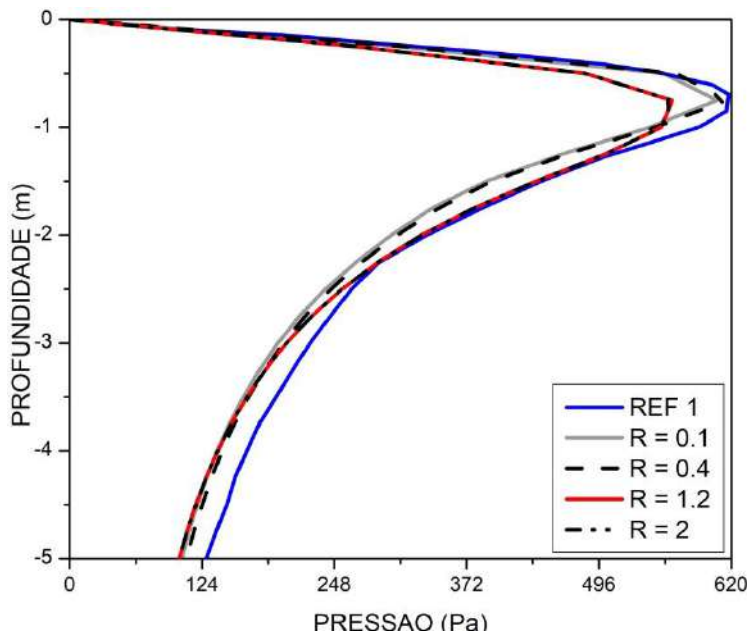
Para função DRM1, pode ser observado na figura 8.30.a que, fontes virtuais mais próximas ao contorno geram respostas numéricas inferiores àquelas quando as fontes se encontram afastadas. Interessantemente os resultados corroboram com o comportamento da função DRM1 apresentado na figura 8.29.a que mostra um decrescimento da função até ( $r = 0.78$ ) enquanto para valores superiores mostram um crescimento da função. Observa-se ainda que a sensibilidade da resposta numérica, para este estudo, reside apenas da escolha de raios inferiores ou superiores ao ponto de mínimo e não no valor do raio em si.

Já para a função DRM2 observa-se um comportamento distinto, fontes muito afastadas apresentam respostas numéricas inferiores à resposta de referência. Bem como no caso da função DRM1, parece existir um padrão que correlaciona resposta numérica com o crescimento da função DRM2. Conforme figura 8.29.b, para raios menores esperam-se respostas numéricas mais excitadas pois a função está em uma fase crescente

enquanto para raios superiores ao ponto de máximo ( $r = 0.65$ ) esperam-se resultados menos excitados já que a função está em decrescimento. Tais padrões podem ser observados na figura 8.30.b e, mais uma vez, o importante é utilizar distâncias com raios menores ou maiores que o ponto de máximo e, não necessariamente um valor específico, já que o padrão de comportamento é o mesmo para ( $r = 0.1$ ) ou ( $r = 0.4$ ) e também para ( $r = 1.2$ ) ou ( $r = 2$ ).



(a) DRM1



(b) DRM2

Figura 8.30 Pressões ao longo do eixo y para o Modelo 2 em relação as funções utilizadas no DRM no problema de Schiffman

Na figura 8.31 estão apresentados os melhores resultados obtidos para o modelo 2. No caso do DRM1 adotou-se fontes com distâncias superiores ao ponto de mínimo local e, no caso do DRM2 adotou-se fontes com valores de distâncias inferiores ao ponto de máximo local. Nota-se que ambas as respostas possuem comportamento satisfatório quando comparados aos valores de referência.

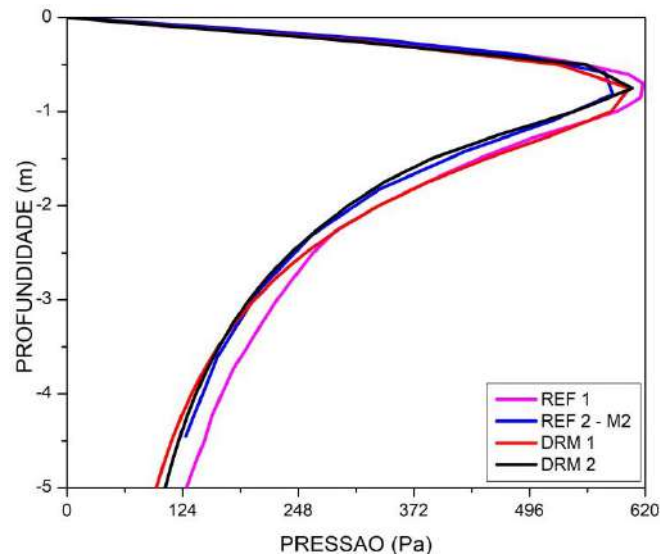
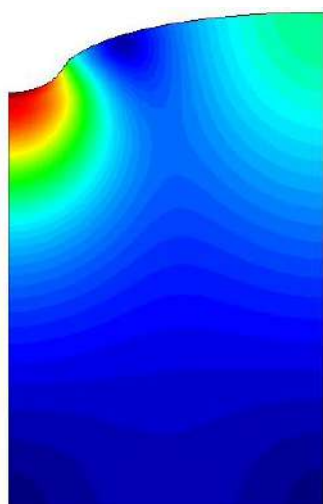
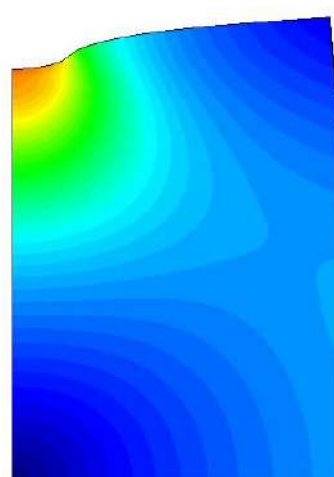


Figura 8.31 Respostas numéricas ótimas para M2 em relação ao DRM para o problema de Schiffman

Na análise do meio elástico é apresentado na figura 8.32 o campo de deslocamentos comparativo entre o modelo 1 (DRM1-P1) e o modelo 2 (DRM1 – P2). Nota-se a influencia da condição de contorno de cada modelo para o deslocamento na superfície. Para o modelo 1 os deslocamentos verticais são mais expressivos, destacando-se a bordo direito da face superior, fato que reflete a impossibilidade da amostra se deformar em todas as outras faces. Já para o modelo 2, em virtude das suas condições de contorno, notam-se deslocamentos horizontais e com isso deslocamentos verticais menos expressivos. A utilização dos modelos deve ser realizada de maneira cautelosa uma vez que, para o modelo 1 a impossibilidade de ocorrer deslocamentos horizontais despreza a possibilidade de uma massa de solo contínua com propriedades físicas semelhantes, enquanto o modelo 2 despreza a hipótese de haver uma massa de solo rígida que impediria o deslocamento da amostra.

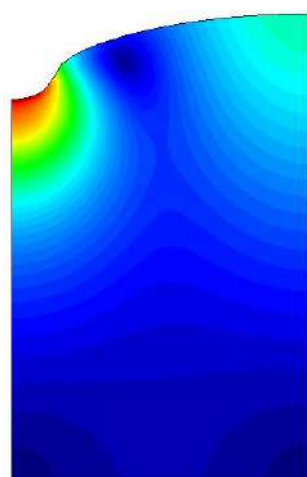


MODELO 1

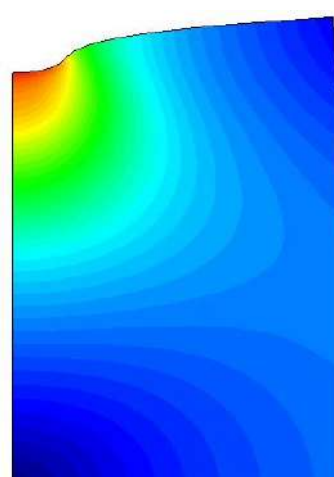


MODELO 2

(a)  $t = 0$

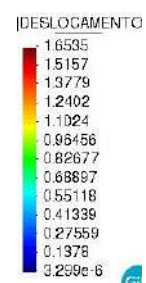


MODELO 1

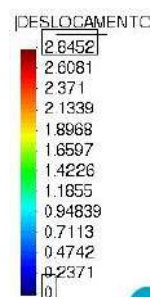


MODELO 2

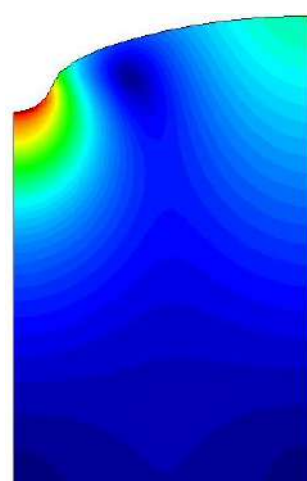
(b)  $t = 0.05s$



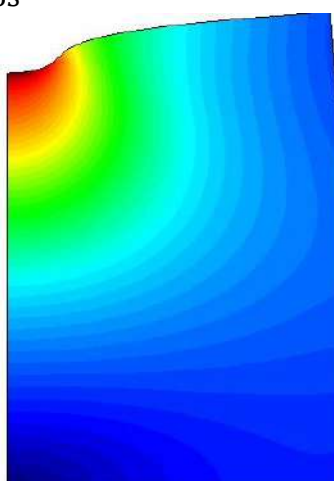
M1



M2



MODELO 1



MODELO 2

(c)  $t = 0.1s$

Figura 8.32 Problema de Schiffman - Campo de Desocamentos

## 8.4 Carregamento Em Geometria “L” Drenante

No quarto exemplo considera-se um corpo com geometria mais complexa conforme pode ser visto na figura 8.33. A amostra em forma de L está submetida a um carregamento distribuído constante  $F$  em sua face superior. Em todas as paredes verticais os deslocamentos horizontais estão impedidos, enquanto nas faces horizontais de comprimento  $3a$  e  $2a$  estão impedidos os deslocamentos verticais. Já para o fluido todas as bordas são impermeáveis exceto uma pequena parede horizontal de comprimento  $a$  possui um comportamento drenante. As propriedades físicas do problema são apresentadas na tabela 8.6.

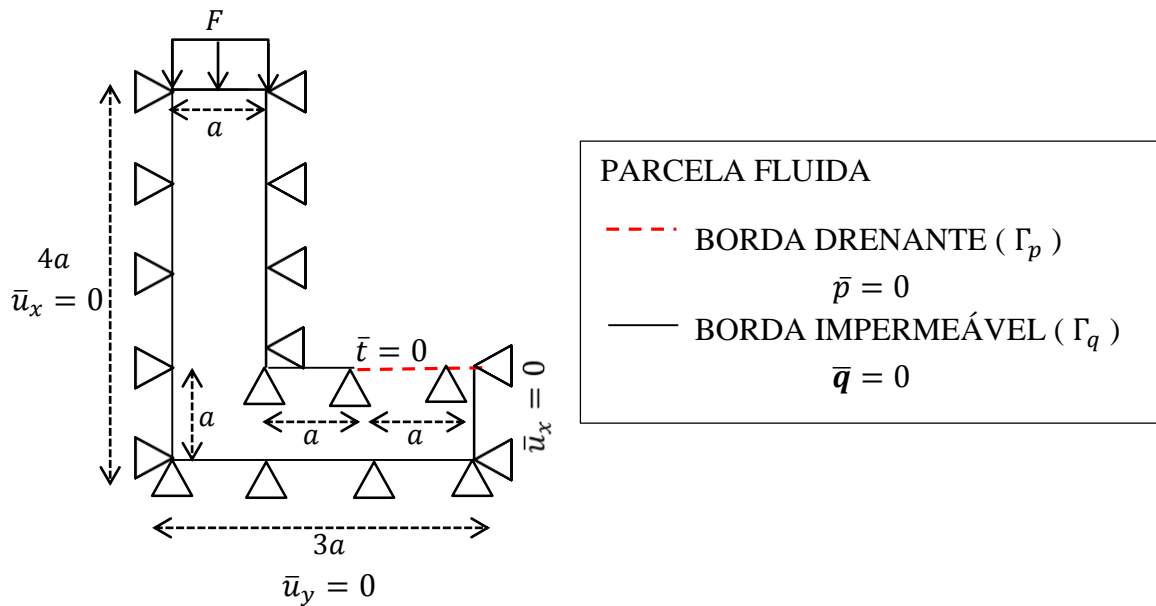


Figure 8.33 Modelo para corpo com geometria L drenante

MÓDULO DE ELASTICIDADE	$E = 1 \text{ N/m}^2$
COEFICIENTE DE POISSON (DRENADO)	$\nu = 0$
PERMEABILIDADE	$k = 1 \text{ m}^4/\text{Ns}$
POROSIDADE	$n = 0.33$
GEOMETRIA	$3\text{m} \times 4\text{m} \text{ (} a = 1 \text{)}$
FORÇA	$F = 1 \text{ N/m}$
COMPRESSIBILIDADE DA MATRIZ POROSA	$c_m = 1/K = 1/3$
PASSO DE TEMPO	$\Delta t = 0.01 \text{ s}$

Tabela 8.6 Propriedades físicas para Geometria L Drenante

De forma a analisar o comportamento da solução numérica para o problema em questão foram analisados dois nós, sendo o nó A localizado nas coordenadas (0.4, 0.4) e o nó B (0.8, 0.8) conforme pode ser observado na figura 8.34.

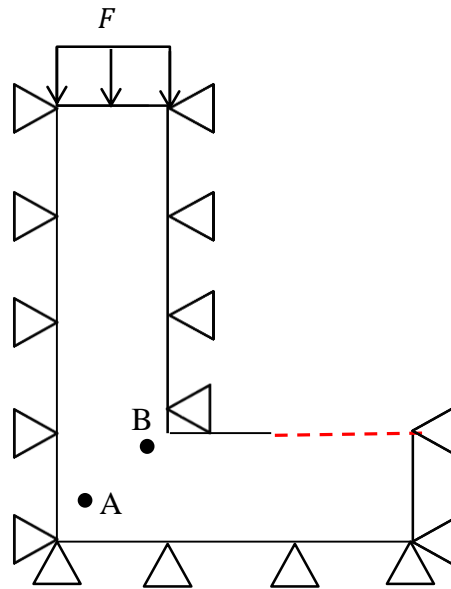


Figura 8.34 Nós de análise para Geometria L Drenante

O problema em questão não possui resposta analítica e de maneira a analisar o padrão de resposta ao longo do processo do adensamento foram considerados:

- Passo de tempo:  $\Delta t = 0.025s$ ,  $\Delta t = 0.05s$ ,  $\Delta t = 0.075s$  e  $\Delta t = 0.1s$
- Posições das fontes virtuais em relação ao contorno real:  
P1: são as fontes à 0.5m de distância;  
P2 são as fontes à 1m de distância.
- Funções DRM:

<b>DRM 1</b>	$\varphi_i(x) = r^2 \log r$ $\psi_i(x) = -\frac{4}{\lambda^4} [K_0(\lambda r) + \log r] - \frac{r^2 \log r}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda^2}, se\ r > 0$ $\psi_i(x) = \frac{4}{\lambda^2} \left[ \gamma + \log \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right] - \frac{4}{\lambda^2}, se\ r = 0$
<b>DRM 2</b>	$\varphi_i(x) = -4 + 9r - \lambda^2(-r^2 + r^3)$ $\psi_i(x) = -r^2 + r^3$

Na figura 8.35 pode ser observado para cada passo de tempo analisado um comparativo entre a variação das respostas numéricas do campo de pressões entre as funções DRM, calculada pela simples diferença entre os resultados encontrados para as duas situações. Além disso para cada nó em destaque na figura 8.34 estão apresentados os resultados considerando ora a posição P1 ora a posição P2.

Ainda nas figuras 8.35 é interessante notar que para qualquer passo de tempo a posição P2 apresenta menor variação na resposta obtida, corroborando a possibilidade de que fontes muito próximas, podem gerar uma excitação excessiva que deixa a resposta



numérica instável. Destaca-se também como padrão em todos os passos de tempo que a variação entre respostas é sempre mais significativa no nó A do que no nó B, demonstrando a influencia da posição geométrica dos nós em análise principalmente para maiores passos de tempo.

Nota-se que para uma mesma distancia (P1 ou P2), quão maior foi o  $\Delta t$  maior foi a variação observada entre os nós A e B. À medida que o processo do adensamento evolui, mais rápida e mais significativa é a alteração no campo de pressões, como consequencia a região em que está localizada o nó de análise pode ser crítica, gerando maiores variações dentre os modelos utilizados. Ainda em relação ao passo de tempo destaca-se a figura 8.35.a, tanto na posição P1 quanto na posição P2 observou-se instabilidade das soluções encontradas sugerindo que, a escolha do  $\Delta t$  deve ser feita de maneira cautelosa para que não haja instabilidade na resposta e a escolha da função DRM seja menos relevante.

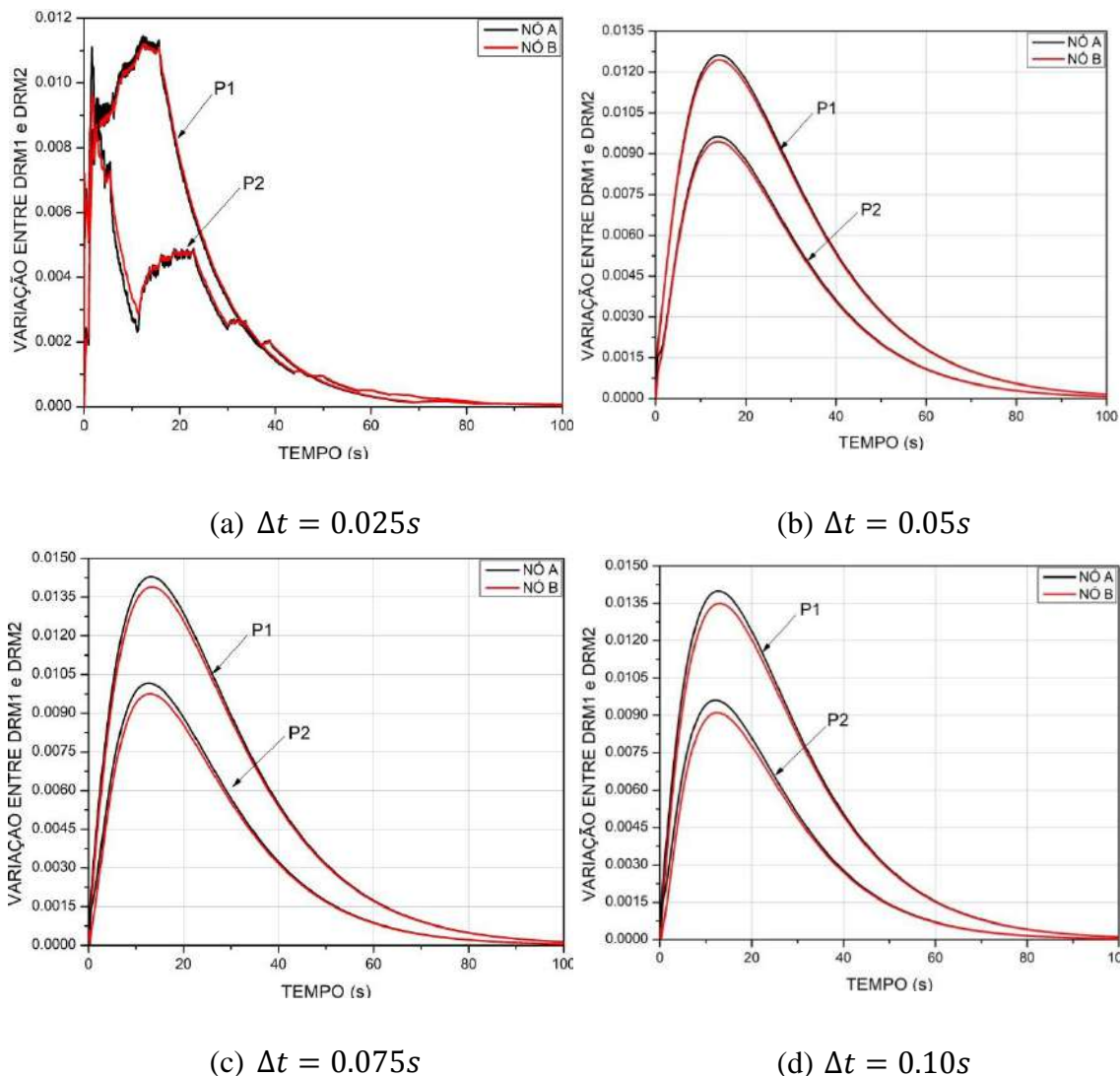
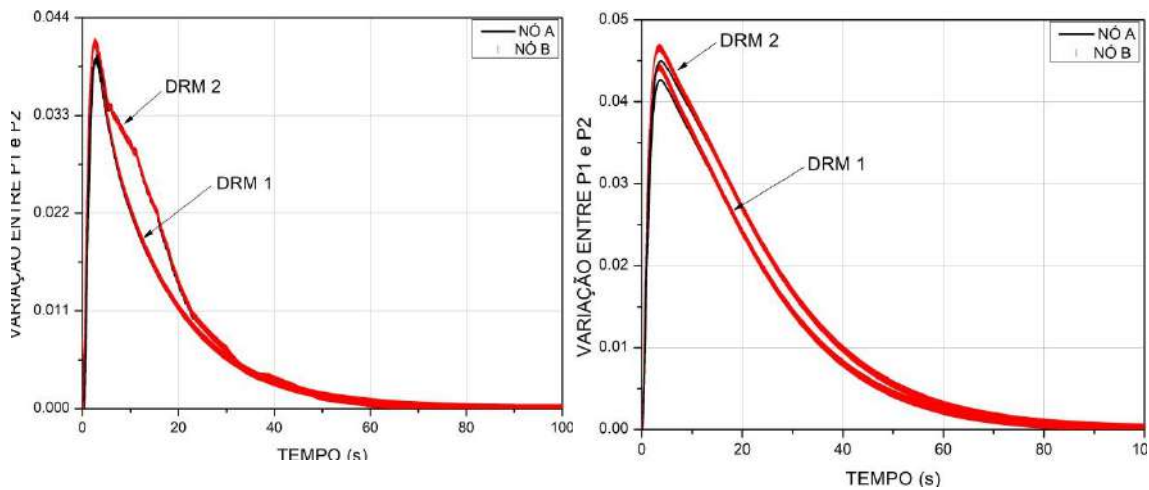


Figura 8.35 Estudo comparativo entre funções DRM para Geometria L Drenante

Para obtenção dos resultados apresentados na figura 8.36 outra abordagem foi sugerida: para uma mesma função DRM comparou-se os resultados obtidos entre as posições P1 e P2. Em termos gerais observa-se que a função DRM2 é mais dependente da posição escolhida, enquanto a função DRM1 apresenta menos sensibilidade. Nota-se também que o nó B apresenta maior variação em relação para o nó A em todos os casos.

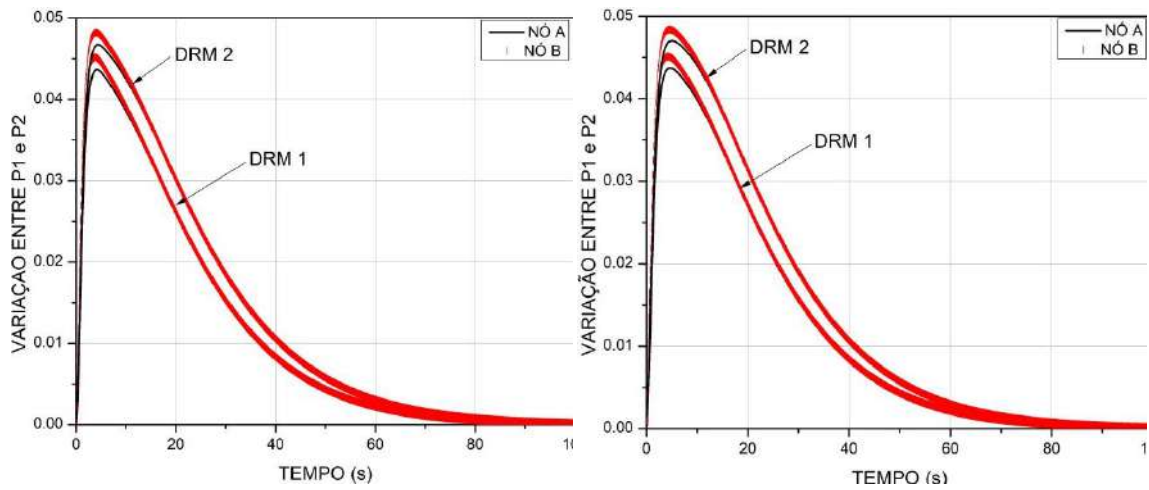
Anteriormente (figura 8.35) notou-se que fixando a posição da fonte virtual mas alterando a função DRM, o nó A apresentou maior sensibilidade. Em contrapartida, a figura 8.36 exibe que fixando a função DRM mas alterando a posição da fonte, o nó B é mais sensível. De maneira geral, a partir da observação de ambas as figuras, fontes mais distantes (P2) e funções de comportamento monotônico (DRM 1) apresentam as menores variações de reposta para o estudo em questão. A análise é interessante pois sugere parâmetros de testagem do modelo para que um padrão de resposta possa ser obtido em exemplos sem solução analítica.

A instabilidade da resposta para  $\Delta t = 0.025s$  que foi observada na figura 8.35.a pode ser observada na figura 8.36.a. Uma vez que a escolha do tamanho do passo de tempo influencia no cálculo das soluções fundamentais, faz sentido que menores  $\Delta t$  alterem a faixa trabalhável das mesmas, podendo se aproximar do pontos de singularidade, conforme analisado na subseção 5.2. A partir desta última é possível notar que a função DRM1 apresenta melhor comportamento quando relacionado com a variação das posições, enquanto a função DRM2 está sujeita as oscilações que foram apresentadas.



(a)  $\Delta t = 0.025s$

(b)  $\Delta t = 0.05s$

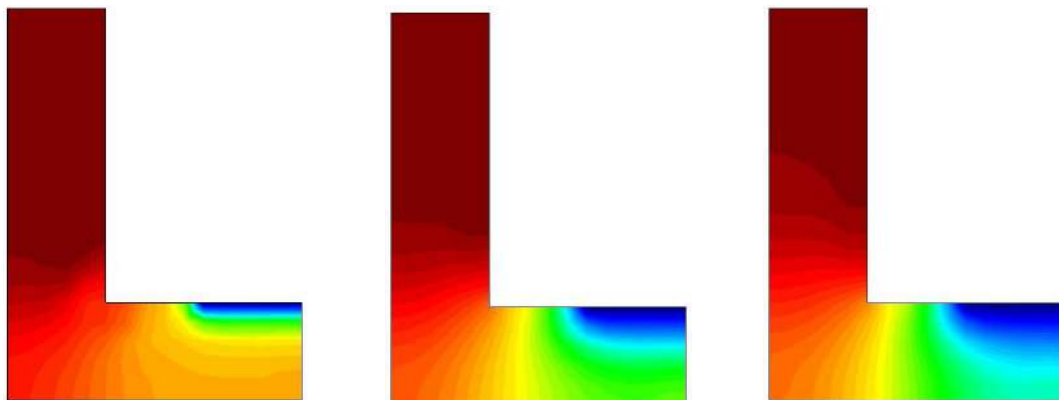


(c)  $\Delta t = 0.075s$

(d)  $\Delta t = 0.10s$

Figure 8.36 Estudo comparativo entre distâncias das fontes virtuais para Geometria L

Nas figuras 8.37 podem ser observados o processo evolutivo do campo de pressões em diversos instantes do problema. Nos instantes iniciais, entre cerca de  $t = 5s$  até  $t = 15s$  é possível observar a mudança mais intensa nos campos de pressões o que de fato corrobora a variação entre respostas numéricas observadas tanto na figura 8.35 quanto na figura 8.36.



(a)  $t = 0.025s$

(b)  $t = 0.125s$

(c)  $t = 0.25s$

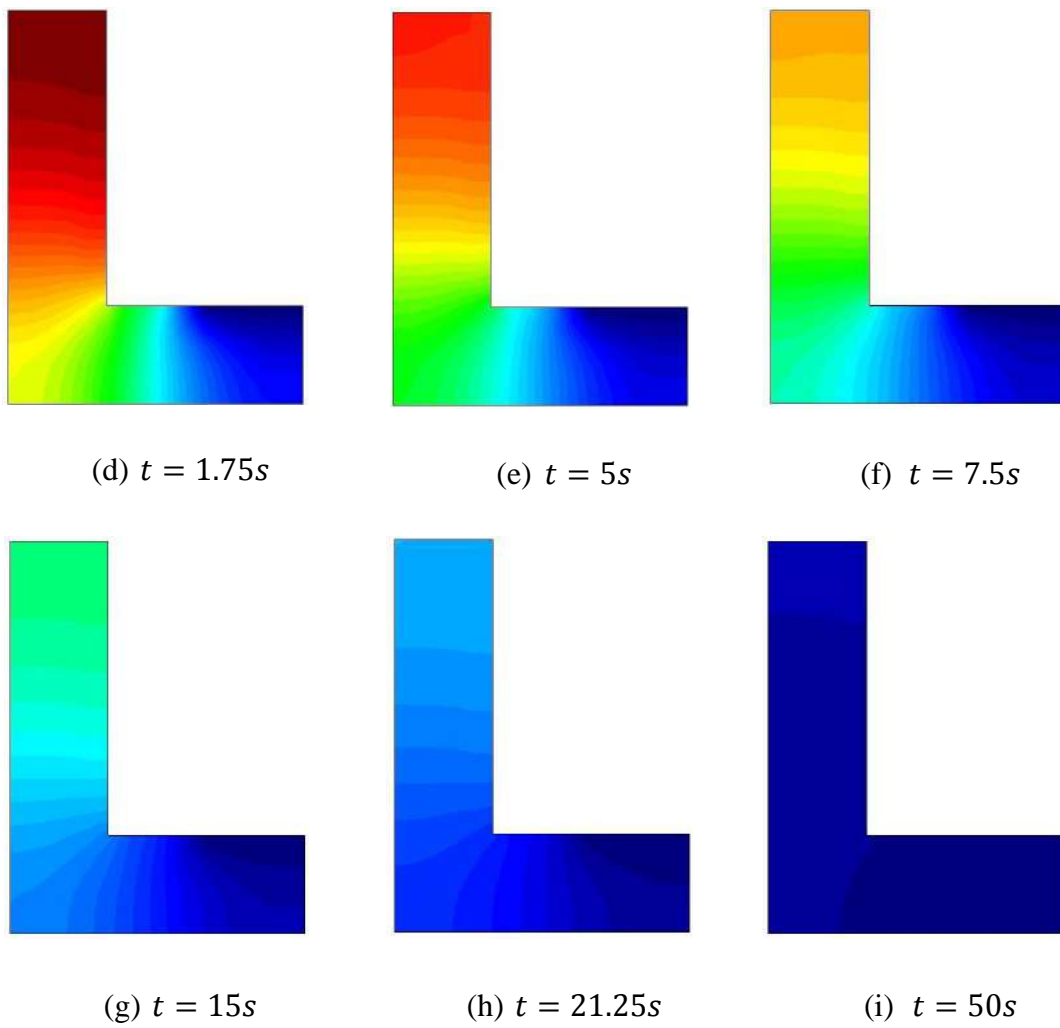


Figura 8.37 Desenvolvimento do campo de pressões para a geometria L drenante

## 9 CONCLUSÃO

A intenção deste trabalho foi solucionar o problema poroelástico através da utilização de diferentes métodos sem malha através de uma técnica de acoplamento iterativo. A implementação do código computacional utilizado para obtenção das respostas numéricas faz uso das vantagens advindas do MLPG, um método de domínio já amplamente utilizado para elasticidade e do MFS-DRM, método de contorno para modelagem da fase fluida, utilizando a equação não homogênea da difusão. Neste enfoque, a técnica apresentou ser inovadora uma vez que, os métodos utilizados não fazem uso de nenhum tipo de conectividade, gerando um ganho computacional significativo e, como a técnica de acoplamento utilizada permitiu que o processo pudesse ser fracionado em duas fases distintas, a escolha dos métodos numéricos a serem utilizados é bastante flexível.

Primeiramente conclui-se que, de maneira geral, foi possível obter respostas suficientemente precisas para os exemplos utilizados. Ressalta-se que realmente há uma oscilação espúria no campo de pressões em regiões de bordas drenadas, quando estas variam de maneira mais intensa. A princípio, quando utilizadas as mesmas funções de interpolação para pressão e velocidade (fluxo) tais oscilações podem ocorrer, entretanto, observou-se também que: ainda que nos tempos iniciais ocorra tal desvantagem os resultados para tempos mais avançados não são comprometidos.

Pode ser observado também que a implementação do código computacional bem como os métodos numéricos utilizados atendem as respostas geradas pelo meio físico. Para MLPG, destaca-se a necessidade de avaliação da função de forma utilizada, mas, nota-se que as funções *splines* já comumente empregadas atendem as necessidades. Em relação ao MFS, a avaliação da distância de posicionamento das fontes virtuais ainda é a maior dificuldade oriunda do método. Sabe-se que fontes mais próximas ao contorno real geram respostas mais excitadas, sendo aconselhável para captar efeitos físicos especiais, como por exemplo, o efeito de Mandel- Cryer. Em compensação, fontes mais distantes modelam mais adequadamente comportamentos monotonicos. E, por fim, em relação ao DRM, a escolha da função a modelar o termo não homogêneo também afeta a solução numérica final. Entretanto, apesar dos pontos de fragilidade, as análises mostraram-se convergentes, as curvas possuem formas similares às esperadas e o método proposto aponta boa precisão para os estudos realizados.

Finalmente, conclui-se que o modelo, suas condições de carregamento e condições de contorno devem ser avaliadas com bom senso. As restrições e considerações impostas afetam diretamente à formulação numérica que, conseqüentemente, afetarão a solução. A modelagem de meios infinitos, geometrias mais complexas, devem ser realizadas de maneira inteligente, devendo a discretização dos nós ser realizada de acordo com o problema analisado ainda que o método tenha se demonstrado de boa generalização para todos casos estudados.

O algoritmo proposto possui diversas maneiras de ser aperfeiçoado como por exemplo: a introdução de heterogeneidade e anisotropia, implementação de modelos não-lineares, utilização de carregamento dependente do tempo, adaptação para problemas de bombeamento e injeção, dentre outros.

## 10 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKGUN, N. A. *The Dual Reciprocity Boundary Element Solution Of Helmholtz-Type Equations In Fluid Dynamics*. Phd.Thesis. Ed. [S.L.]: The Graduate School Of Natural And Applied Science Of Middle East Technical University, 2013.

ALURU, N. R. "A Point Collocation Method Based On Reproducing Kernel Approximations". *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, V. 47, N. 6, P. 1083-1121, 2000.

AMBIEL, J. H. K. *Implementação Do Método Totalmente Acoplado Para A Resolução De Sistemas Hidromecânicos Em Um Programa De Elementos Finitos Em Matlab*. Dissertação De M.Sc. Ed. Bauru: Universidade Estadual Paulista, 2018.

ATLURI, S. N.; Shen, S. "The Meshless Local Petrov–Galerkin (Mlpg) Method: A Simple & Less–Costly Alternative To The Finite Element And Boundary Element Methods". *Computer Modelling In Engineering And Sciences*, V. 3, N. 1, P. 11-51, 2002.

ATLURI, S.; ZHU, T. "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (Mlpg) Approach In Computational Mechanics". *Computational Mechanics*, V. 22, N. 2, P. 117-127, 1998.

AUGUSTIN, M. A. *A Method Of Fundamental Solutions In Poroelasticity To Model The Stress Field In Geothermal Reservoirs*. [S.L.]: Springer International, 2015.

BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. "The Partition Of Unity Method". *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, V. 40, N. 4, P. 727-758, 1997.

BANERJEE, P. K.; Butterfield, R. *Boundary Element Methods In Engineering Science*. London: Mcgraw-Hill, 1981.

BELYTSCHKO, T.; KRONGAUZ, Y.; ORGAN, D. "Meshless Methods: An Overview And Recent Developments". *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, V. 139, N. 1-4, P. 3-47, 1996.

BELYTSCHKO, T.; ORGAN, D.; KRONGAUZ, Y. "A Coupled Finite Element-Element-Free Galerkin Method." *Computational Mechanics*, V. 17, N. 3, P. 186-195, 1995.

BERGAMASCHI, L. "An Efficient Parallel Mlpg Method For Poroelastic Models." *Computer Modeling In Engineering & Sciences*, V. 29, P. 191- 215, 2009.

BERGAMASCHI, L.; MARTINEZ, A.; PINI, G. "An Efficient Parallel Mlpg Method For Poroelastic Models." *Computer Modelling In Engineering And Sciences*, V. 49, N. 3, P. 191-216, 2009.

BIOT, M. "General Theory Of Three- Dimensional Consolidation." *Journal Of Applied Physics*, V. 12, N. 2, P. 155-164, 1941.

BIOT, M. "General Solutions Of The Equations Of Elasticity And Consolidation For A Porous Material." *Journal Of Applied Mechanics*, V. 23, N. 1, P. 91-96, 1956.

BONNET, G. "Basic Singular Solution For A Poroelastic Medium In The Dynamic Range." *The Journal Of The Acoustical Society Of America*, V. 82, N. 5, P. 1758-1762, 1987.

CAO, L.; QIN, Q.-H.; ZHAO, N. "Application Of Drm-Trefftz And Drm-Mfs To Transient Heat Conduction Analysis." *Recent Patents On Space Technology*, V. 2, P. 41-50, 2010.

CARTER, J. P.; BOOKER, J. R.; SMALL, J. C. "The Analysis Of Finite Elastoplastic Consolidation." *International Journal For Numerical And Analytical Methods In Geomechanics*, V. 3, N. 2, P. 107-129, 1979.

CAVALCANTI, M. C. R. *Análise Por Elementos De Contorno De Meios Poro-Elásticos Saturados Pela Teoria De Biot*. Tese De D.Sc. Ed. Rio De Janeiro: Universidade Federal Do Rio De Janeiro, 2002.

CHEN, C. S.; FAN, C. M.; WEN, P. H. "The Method Of Approximate Particular Solutions For Solving Certain Partial Differential Equations." *Numerical Methods For Partial Differential Equations*, V. 28, N. 2, P. 506-522, 2012.

CHEN, C. S.; RASHED, Y. F. "Evaluation Of Thin Plate Spline Based Particular Solutions For Helmholtz-Type Operators For The DRM." *Mechanics Research Communications*, V. 25, N. 2, P. 195-201, 1998.

CHEN, S. L.; LI, Y. X. "An Efficient RPIM For Simulating Wave Motions In Saturated Porous Media." *International Journal Of Solids And Structures*, V. 45, P. 6316-6332, 2008.

CHEN, W. "Meshfree Boundary Particle Method Applied To Helmholtz Problems." *Engineering Analysis With Boundary Elements*, V. 26, N. 7, P. 577-581, 2002.

CHEN, W. "New RBF Collocation Methods And Kernel RBF With Applications." *Meshfree Methods For Partial Differential Equations*. [S.L.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. P. 75-86.

CHENG, A. H.-D.; LIGGETT, J. A. "Boundary Integral Equation Method For Linear Porous Elasticity With Applications To Soil Consolidation." *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, V. 20, N. 2, P. 255-278, 1984.

CHENG, Y.; PENG, M. "Boundary Element-Free Method For Elastodynamics." *Science In China Series G: Physics And Astronomy*, V. 48, N. 6, P. 641-657, 2005.



- CHOPRA, M. B.; DARGUSH, G. F. "Boundary Element Analysis Of Stresses In An Axisymmetric Soil Mass Undergoing Consolidation." *International Journal For Numerical And Analytical Methods In Geomechanics*, V. 19, N. 3, P. 195-218, 1995.
- CLEARY, M. P. "Fundamental Solutions For A Fluid-Saturated Porous Solid." *International Journal Of Solids And Structures*, V. 13, N. 9, P. 785-806, 1977.
- COUSSY, O. *Poromechanics*. [S.L.]: John Wiley & Sons, 2004.
- COUSSY, O. *Poromechanics*. [S.L.]: John Wiley & Sons, 2014.
- DE BOER, R. *Theory Of Porous Media*. Berlin: Springer, 2000.
- DETOURNAY, E.; CHENG, H.-D. *Fundamentals Of Poroelasticity. In: Analysis And Design Methods*. [S.L.]: Pergamon, 1993. P. 113-171.
- DOMINGUEZ, J. "Boundary Element Approach For Dynamic Poroelastic Problems." *International Journal Of Numerical Methods In Engineering*, V. 35, N. 2, P. 307-324, 1992.
- DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. "An HP Adaptative Method Using Clouds." *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, V. 139, N. 1-4, P. 237-262, 1996.
- FAIRWEATHER, G.; KARAGEORGHIS, A. "The Method Of Fundamental Solutions For Elliptic Boundary Value Problems." *Advances In Computational Mathematics*, V. 9, N. 1, P. 69, 1998.
- FENG-XIN, S.; JU-FENG, W.; YU-MIN, C. "An Improved Interpolating Element-Free Galerkin Method For Elasticity." *Chin. Phys. B*, V. 22, N. 12, P. 120203-1 - 120203-8, 2013.
- FERRONATO, M. *et al.* "A Meshless Method For Axi-Symmetric Poroelastic Simulations: Numerical Study." *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, V. 70, P. 1346-1365, 2007.
- FONTES, E. F. *Técnicas Avançadas Em Métodos Verdadeiramente Sem Malha Com Aplicações Em Problemas De Elasticidade E Mecânica Da Fratura Via Superposição Da Função De Green Numérica*. Tese De D.Sc. Ed. Rio De Janeiro: Universidade Federal Do Rio De Janeiro, 2014.
- FRAZER, R. A.; JONES, W. P.; SYLVIA, W. S. *Approximations To Functions And To The Solutions Of Differential Equations*. [S.L.]: Hamso, 1937.
- GAMBOLATI, G.; TEATINI, P.; FERRONATO, M. *Anthropogenic Land Subsidence. Encyclopedia Of Hydrological Sciences*, 2006.
- GAVETE, L.; GAVETE, M. L.; BENITO, J. J.. "Improvements Of Generalized Finite Difference Method And Comparison With Other Meshless Method." *Applied Mathematical Modelling*, V. 27, N. 10, P. 831-847, 2003.

GEERTSMA, J. "The Effect Of Fluid Pressure Decline On Volumetric Changes Of Porous Rocks." *Petroleum Transactions*, Aime, V. 210, N. 01, P. 331-340, 1957.

GHABOUSSI, J.; WILSON, E. L. "Flow Of Compressible Fluid In Porous Elastic Media." *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, V. 5, P. 419-442, 1973.

GHASSEMI, A. *et al.* "Complete Plane Strain Fictitious Stress Boundary Element Method For Poroelastic Media." *Engineering Analysis With Boundary Elements*, V. 25, P. 41-48, 2001.

GHORBANI, M. "Diffuse Element Kansa Method." *Applied Mathematical Sciences*, V. 4, N. 12, P. 583-594, 2010.

GINGOLD, R.; MONAGHAN, J. "Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory And Application To Non-Spherical Stars." *Monthly Notices Of The Royal Astronomical Society*, V. 181, N. 3, P. 375-389, 1977.

GONÇALVES, K. A. *Análise De Problemas Elastodinâmicos Por Intermédio Do Acoplamento Do Método Dos Elementos Finitos E Do Método Dos Elementos De Contorno*. Dissertação De M.Sc. Ed. Rio De Janeiro: Universidade Federal Do Rio De Janeiro, 2013.

GU, Y.-T.; LIU, G.-R. "A Local Point Interpolation Method For Static And Dynamic Analysis Of Thin Beams." *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, V. 190, N. 42, P. 5515-5528, 2001.

GUO, Y. M. "An Overrange Collocation Method." *Computer Modeling In Engineering & Sciences*, V. 73, N. 1, P. 1-22, 2011.

HONG-PING, R.; YU-MIN, C.; WU, Z. "An Improved Boundary Element-Free Method (IBEFM) For Two-Dimensional Potential Problems." *Chinese Physics B*, V. 18, N. 10, P. 4065, 2009.

HWANG, C. T.; MORGENSTERN, N. R.; MURRAY, D. W. "On Solutions Of Plane Strain Consolidation Problems By Finite Element Methods." *Canadian Geotechnical Journal*, V. 8, P. 109-118, 1971.

JUMARHON, B.; AMINI, S.; CHEN, K. "The Hermite Collocation Method Using Radial Basis Functions." *Engineering Analysis With Boundary Elements*, V. 24, N. 7-8, P. 607-611, 2000.

JUNCU, D. *et al.* "The Effect Of Fluid Compressibility And Elastic Rock Properties On Deformation Of Geothermal Reservoirs." *Geophysical Journal International*, V. 217, N. 1, P. 122-134, 2019.

KANSA, E. J. "Multiquadrics—A Scattered Data Approximation Scheme With Applications To Computational Fluid-Dynamics—I Surface Approximations And Partial

Derivative Estimates." *Computers & Mathematics With Applications*, V. 18, N. 8-9, P. 127-145, 1990.A.

KANSA, E. J. "Multiquadrics—A Scattered Data Approximation Scheme With Applications To Computational Fluid-Dynamics—II Solutions To Parabolic, Hyperbolic And Elliptic Partial Differential Equations." *Computers & Mathematics With Applications*, V. 19, N. 8-9, P. 147-161, 1990.B.

KARIM, M. R.; NOGAMI, T.; WANG, J. G. "Analysis Of Transient Response Of Saturated Porous Elastic Soil Under Cyclic Loading Using Element-Free Galerkin Method." *International Journal Of Solids And Structures*, V. 39, P. 6011-6033, 2002.

KIM, D. W.; KIM, Y. "Point Collocation Methods Using The Fast Moving Least-Square Reproducing Kernel Approximation." *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, V. 56, N. 10, P. 1445-1464, 2003.

KITA, F.; KAMIYA, N. "Trefftz Method: An Overview." *Advances In Engineering Software*, V. 24, P. 3-12, 1995.

KITIPORNCHAI, S.; LIEW, K. M.; CHENG, Y. "A Boundary Element-Free Method (Befm) For Three-Dimensional Elasticity Problems." *Computational Mechanics*, V. 36, P. 13-20, 2005.

KOTHNUR, V. S.; MUKHERJEE, S.; MUKHERJEE, Y. X. "Two-Dimensional Linear Elasticity By The Boundary Node Method." *International Journal of Solids And Structures*, V. 36, N. 8, 1129-1147 1999.

KRONGAUZ, Y.; BELYTSCHKO, T. "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (Mlpg) Approach In Computational Mechanics." *Computational Mechanics*, V. 22, N. 2, P. 117-127, 1997.

KUPRADZE, V. D. "A Method For The Approximate Solution Of Limiting Problems In Mathematical Physics." *USSR Computational Mathematics And Mathematical Physics*, V. 3, N. 6, P. 199-205, 1964.

KUROKI, T.; ITO, T.; ONISHI, K. "Boundary Element Method In Biot's Linear Consolidation." *Applied Mathematical Modelling*, V. 6, N. 2, P. 105-110, 1982.

LEWIS, R. W.; SCHREFLER, B. A. *The Finite Element Method In Static And Dynamic Deformation And Consolidation Of Porous Media*. [S.L.]: John Wiley, 1998.

LI, S.; LIU, W. K. "Reproducing Kernel Hierarchical Partition Of Unity, Part II—Applications." *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, V. 45, N. 3, P. 289-317, 1999.

LIMA, N. Z. *Desenvolvimento De Um Framework Para Métodos Sem Malha*. Belo Horizonte: Dissertação De Mestrado, 2011.

- LISZKA, T. J.; DUARTE, C. A.; TWORZYDLO, W. W. "HP-Meshless Cloud Method." *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, V. 139, N. 1, P. 263-288, 1996.
- LIU, G. R. "A Point Assembly Method For Stress Analysis For Two-Dimensional Solids." *International Journal Of Solids And Structures*, V. 39, N. 1, P. 261-276, 2002.
- LIU, G. R.; GU, Y. "A Point Interpolation Method For Two- Dimensional Solids." *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, V. 50, N. 4, P. 937-951, 2001.
- LIU, G. R.; GU, Y. T. "A Local Radial Point Interpolation Method (LRPIM) For Free Vibration Analyses Of 2-D Solids." *Journal of Sound And Vibrations*, V. 246, N. 1, P. 29-46, 2001.
- LIU, G. R.; GU, Y. T. "Boundary Meshfree Methods Based On The Boundary Point Interpolation Methods." *Engineering Analysis With Boundary Elements*, V. 28, N. 5, P. 475-487, 2004.
- LIU, G.-R. *Meshfree Methods: Moving Beyond The Finite Element Method*. [S.L.]: Taylor & Francis, 2009.
- LIU, G.-R. *et al.* "A Meshfree Radial Point Interpolation Method (RPIM) For Three-Dimensional Solids." *Computational Mechanics*, V. 36, N. 6, P. 421-430, 2005.
- LIU, G.-R.; GU, Y.-T. *An Introduction To Meshfree Methods And Their Programming*. [S.L.]: Springer Science & Business Media, 2005.
- LIU, W. K.; JUN, S.; ZHANG, Y. F. "Reproducing kernel Particle Methods." *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, V. 20, N. 8-9, P. 1081-1106, 1995.
- LIU, W.-K. "Moving Least-Square Reproducing Kernel Methods (I) Methodology And Convergence." *Computer Methods In Applied Mechanicsand Engineering*, V. 143, N. 1, P. 113-154, 1997.
- LIU, X. *et al.* "Radial Point Interpolation Collocation Method (RPICM) For The Solution Of Nonlinear Poisson Problems." *Computational Mechanics*, V. 36, N. 4, P. 298-306, 2005.
- LIU, X.; TAI, K. "Point Interpolation Collocation Method For The Solution Of Partial Differential Equations." *Engineering Analysis With Boundary Elements*, V. 30, N. 7, P. 598-609, 2006.
- MALVERN, E. L. *Introduction To The Mechanics Of A Continuous Medium*. New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1969.
- MANDEL, J. "Consolidation Des Sols (Étude Mathématique)." *Géotechnique*, V. 3, P. 287-299, 1953.

- MANOLIS, G. D.; BESKOS, D. E. "Integral Formulation And Fundamental Solutions Of Dynamic Poro-Elasticity And Thermolasticity." *Acta Mechanica*, V. 76, P. 89-104, 1989.
- MELENK, J.; BABUSKA, I. "The Partition Of Unity Finite Element Method: Basic Theory And Applications." *Research Report/Seminar Für Angewandte Mathematik*. [S.L.]: [S.N.], 1996.
- MODARESSI, H.; AUBERT, P. "Element-Free Galerkin Method For Deforming Multiphase Porous Media." *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, V. 42, P. 313-340, 1998.
- MULESHKOV, A. S.; GOLBERG, M. A.; CHEN, C. S. "Particular Solutions Of Helmholtz-Type Operators Using Higher Order Polyharmonic Splines." *Computational Mechanics*, V. 23, N. 5-6, P. 411-419, 1999.
- MURAKAMI, A.; SETSUYASU, T.; ARIMOTO, S. "Mesh-Free Method For Soilwater Coupled Problem Within Finite Strain And Its Numerical Validity." *Soils And Foundations*, V. 45, P. 145-154, 2005.
- NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. "New Approach To Free Vibration Analysis Using Boundary Elements." *Applied Mathematical Modelling*, V. 7, N. 3, P. 157-162, 1983.
- NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. "Generalizing The Finite Element Method: Diffuse Approximation And Diffuse Elements." *Computational Mechanics*, V. 10, P. 307-318, 1992.
- NOGAMI, T.; WANG, W.; WANG, J. G. "Numerical Method For Consolidation Analysis Of Lumpy Clay Fillings With Meshless Method." *Soils And Foundations*, V. 44, N. 1, P. 125-142, 2004.
- NORRIS, A. N. "Radiation From A Point Source And Scattering Theory In A Fluidsaturated Porous Solid." *The Journal Of The Acoustical Society Of America*, V. 77, N. 6, P. 2012-2023, 1985.
- OLIAEI, M. N. "Some Numerical Issues Using Element-Free Galerkin Meshless Method For Coupled Hydro-Mechanical Problems." *International Journal For Numerical And Analytical Methods In Geomechanics*, V. 33, P. 915-938, 2009.
- OÑATE, E. *et al.* "A Finite Point Method In Computational Mechanics. Applications To Convective Transport And Fluid Flow." *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, V. 39, N. 22, P. 3839-3866, 1996.
- PARK, S. H.; YOUN, S. K. "The Least -Squares Meshfree Method." *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, V. 52, N. 9, P. 997-1012, 2001.

- PARTRIDGE, P. W.; BREBBIA, C. A.; WROBEL, L. C. "The Dual Reciprocity Boundary Element Method." *Southampton: Computational Mechanics Publications*, 1992.
- PHILLIPS, P. J.; WHEELER, M. F. "A Coupling Of Mixed And Continuous Galerkin Finite Element Methods For Poroelasticity I: The Continuous In Time Case." *Computational Geosciences*, V. 11, N. 2, P. 131, 2007.
- PIZZOL, A. D. *Uma Metodologia Unificada Empregando O Método Dos Volumes Finitos Para A Solução Acoplada Do Escoamento E Da Geomecânica Em Meios Porosos*. Florianópolis: Tese De Doutorado, 2014.
- PREVOST, J. H. "Consolidation Of Anelastic Porous Media." *Journal Of The Engineering Mechanics Division*, V. 107, N. 1, P. 169-186, 1981.
- RANBIR S. SANDHU, E. L. W. "Finite Element Analysis Of Flow In Saturated Porous Media." *Journal Of The Engineering Mechanics Division*, V. 95, N. 3, P. 641-652, 1969.
- REDDY, J. N. *Energy And Variational Methods In Engineering Mechanics*. New York: John Wiley, 1986.
- REDDY, J. N. *An Introduction To The Finite Element Method*. New York: [S.N.], V. 27, 1993.
- REN, H.; CHENG, Y. "The Interpolating Element-Freegalerkin (Iefg) Method For Two-Dimensional Potetial Problems." *Engineering Analysis With Boundary Elements*, V. 36, P. 873-880, 2012.
- RUDNICKI, J. W. *Linear Poroelasticity*. In: *Handbook Of Materials Behavior Models*. [S.L.]: Academic Press, 2001. P. 1118-1125.
- SANDHU, R. S.; WILSON, E. L. "Finite-Element Analysis Of Seepage In Elastic Media." *Journal Of The Engineering Mechanics Division*, V. 95, N. 3, P. 641-652, 1969.
- SANTANA, W. C. *Um Método Robusto De Elementos Finitos Generalizados Aplicado À Mecânica Da Fratura*. Tese De D.Sc. Ed. Rio De Janeiro: Pontifícia Universidade Católica Do Rio De Janeiro, 2014.
- SARLER, B.; VERTNIK, R. "Meshfree Local Radial Basis Function Collocation Method For Diffusion Problems." *Computers And Mathematics With Applications*, V. 51, P. 1269-1282, 2006.
- SCHIFFMAN, R. L.; CHEN, A. T.; JORDAN, J. C. "An Analysis Of Consolidation Theories." *Journal Of Soil Mechanics & Foundations Div*, 1969.
- SETTARI, A.; WALTERS, D. "Advances In Coupled Geomechanical And Reservoir Modeling With Applications To Reservoir Compaction." *SPE Journal*, V. 06, N. 03, P. 334-342, 2001.

SILVA, L. V. M. *Método Dos Elementos Finitos Aplicado À Solução De Problemas Poroelásticos*. Dissertação De M.Sc. Ed. Recife: Uniersidade Federal De Pernambuco, 2018.

SLADEK, J. *et al.* "Two- And Three Dimensional Transient Thermoelastic Analysis By The Mlpg Method." *Computer Modelling In Engineering And Sciences*, V. 47, N. 1, P. 61-95, 2009.

SMALL, J. C.; BOOKER, J. R.; DAVIS, E. H. "Elastoplastic Consolidation Of Soil." *International Journal Of Solids And Structures*, V. 12, N. 6, P. 431-448, 1976.

SOARES , D. "Dynamic Analysis Of Porous Media Considering Unequal Phase Discretization By Meshless Local Petrov-Galerkin Formulations." *Computer Modeling In Engineering & Sciences*, V. 61, N. 2, P. 177-200, 2010.

SOARES, D. *et al.* "Porous Media Analysis By Modified MLPG Formulations." *Computer Modeling In Engineering & Sciences*, V. 27, N. 2, P. 101-126, 2012.

SUKUMAR, N.; MORAN, B.; BELYTSCHKO, T. "The Natural Element Method In Solid Mechanics." *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, V. 43, N. 5, P. 839-887, 1998.

TERZAGHI, K. "Die Berechnung Der Durchlassigkeitsziffer Des Tones Aus Dem Verlauf Der Hidrodynamischen" Span-Nungserscheinungen Akademie Der Wissenschaften In Wien. Mathematisch-Naturwissen-Schaftliche Klasse, V. 132, N. 3, P. 125-138, 1923.

TERZAGHI, K. *Erdbaumechanik Auf Bodenphysikalischer Grundlage*. Vienna: [S.N.], 1925.

TONELLI, R. *Estratégias Para Tratamento Do Acoplamento Escoamento/Geomecânica Utilizando Volumes Finitos*. Dissertação De M.Sc. Ed. Florianópolis: Universidade Federal De Santa Catarina, 2016.

VERRUJIT, A. *Consolidation Of Soils*. Encyclopedia Of Hydrological Sciences, 2008.

VERRUJIT, A. *Theory And Problems Of Poroelasticity*. [S.L.]: Delft University Of Technology, V. 71, 2013.

WANG, H. F. *Theory Of Linear Poroelasticity*. Princeton: Princeton University Press, 2000.

WANG, H.; QIN, Q. H. *Methods Of Fundamental Solutions In Solid Mechanics*. [S.L.]: Elsevier, 2019.

WANG, J. G.; KARIM, M. R.; LIN, P. Z." Analysis Of Seabed Instability Using Element Free Galerkin Method." *Ocean Engineering*, V. 34, P. 247-260, 2007.

- WANG, J. G.; LIU, G. R.; LIN, P. "Numerical Analysis Of Biot's Consolidation Process By Radial Point Interpolation Method." *International Journal Of Solids And Structures*, V. 39, P. 1557-1573, 2002.
- WANG, J. G.; LIU, G. R.; WU, Y. G. "A Point Interpolation Method For Simulating Dissipation Process Of Consolidation." *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, V. 190, P. 5907-5922, 2001.
- WANG, J. G.; XIE, H.; LEUNG, C. F. "A Local Boundary Integral-Based Meshless Method For Biot's Consolidation Problem." *Engineering Analysis For Boundary Elements*, V. 33, P. 35-42, 2009.
- WANG, J. G.; YAN, L.; LIU, G. R. "A Local Radial Point Interpolation Method For Dissipation Process Of Excess Pore Water Pressure." *International Journal Of Numerical Methods For Heat & Fluid Flow*, V. 15, P. 567-587, 2005.
- WANG, J. G.; ZHANG, B. Y.; NOGAMI, T. "Wave-Induced Seabed Response Analysis By Radial Point Interpolation Meshless Method." *Ocean Engineering*, V. 31, P. 21-42, 2004.
- WANG, Q. X.; LI, H.; LAM, K. Y. "Development Of A New Meshless-Point Weighted Least-Squares (PWLS) Method For Computational Mechanics." *Computational Mechanics*, V. 35, N. 3, P. 170-181, 2005.
- WANG, W. D. *et al.* "An Unequal-Order Radial Interpolation Meshless Method For Biot's Consolidation Theory." *Computers And Geotechnics*, V. 34, P. 61-70, 2007.
- WANG, Z. L.; LI, Y. C. "Analysis Of Factors Influencing The Solution Of The Consolidation Problem By Using An Element-Free Galerkin Method." *Computers & Geosciences*, V. 32, P. 624-631, 2006.
- WANG, Z. L.; WANG, J. G.; SHEN, R. F. "The Application Of A Meshless Method To Consolidation Analysis Of Saturated Soils With Anisotropic Damage." *Computers & Geosciences*, V. 34, P. 849-859, 2008.
- WEN, P. H. "Meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) Method for wave propagation in 3D." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, V. 34, P. 315-323, 2010.
- WU, C. *et al.* "Lagrangian Meshfree Formulation For Analysis Of Geotechnical Materials." *Journal Of Engineering Mechanics*, V. 127, N. 5, P. 485-440-449, 2001.
- XIAOFEI, Z. X.; MINGWAN, L. "Meshless Weighted Least-Square Method." *Acta Mechanica Sinica*, V. 4, P. 005, 2003.
- ZHANG, X. *et al.* "Least- Squares Collocation Meshless Method." *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, V. 51, N. 9, P. 1089-1100, 2001.



ZHANG, X.; TIAN, H.; CHEN, W. "Local Method Of Approximate Particular Solutions For Two-Dimensional Unsteady Burgers' Equations." *Computer & Mathematics With Applications*, V. 66, N. 12, P. 2425-2432, 2014.

ZHU, T.; ZHANG, J. D.; ATLURI, S. N. "A Local Boundary Integral Equation (LBIE) Method In Computational Mechanics, And A Meshless Discretization Approach." *Computational Mechanics*, V. 21, N. 3, P. 223-235, 1998.

ZIENKIEWICZ, O. C.; SHIOMI, T. "Dynamic Behavior Of Saturated Porous Media: The Generalized Biot Formulation And Its Numerical Solution." *International Journal For Numerical And Analytical Methods In Geomechanics*, V. 8, N. 1, P. 71-96, 1984.

## ANEXO A

### GRANDEZAS FÍSICAS DE BIOT (1941)

Ao longo das décadas, com desenvolvimento de novas interpretações, complementações foram feitas a teoria original do adensamento porposta por Biot em 1940. Diversas publicações importantes como (Zienkiewicz,1984), (Detournay e Cheng,1993), (Wang,2000), (Verruijt, 2013) foram desenvolvidas com variáveis nomeadas diferentes à teoria original porém com mesma interpretação física.

No intuito de elucidar o entendimento das grandezas propostas por (Biot,1941), considera-se um volume elementar de um meio poroso completamente saturado sujeito a um estado isotrópico de tensões  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$ . Definem-se as constantes poroelásticas de Biot:

$$\alpha = \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} \frac{G}{H} \quad (\text{A.1})$$

$$1/Q = \frac{1}{R} + \frac{\alpha}{H} \quad (\text{A.2})$$

$$\zeta = \theta = \frac{1}{3H} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \frac{\sigma}{Q} = \alpha \varepsilon + \frac{\sigma}{R} \quad (\text{A.3})$$

Para interpretação das constantes definidas pelas equações (A.1-3) calcula-se a razão entre duas variáveis associadas ao problema enquanto uma terceira é mantida constante. De tal sorte que:

- a) Módulo de compressão volumétrica drenado ( $K = 1/c_m$ ) é calculado pela variação da deformação volumétrica em relação á tensão total submetido á pressão constante:

$$\left| \frac{\delta \varepsilon_{vol}}{\delta \sigma} \right|_{\delta p=0} = \frac{1}{K} \quad (\text{A.4})$$

- b) Coeficiente de expansão poroelástico ( $1/H$ ) é a variação volumetrica em relação a pressão submetido à uma tensão constante:

$$\left| \frac{\delta \varepsilon_{vol}}{\delta p} \right|_{\delta \sigma=0} = \frac{1}{H} \quad (\text{A.5})$$

- c) Coeficiente de armazenamento de fluido ( $1/R$ ) é a variação de fluido armazenado em relação a pressão submetido à uma tensão constante:

$$\left| \frac{\delta \zeta}{\delta p} \right|_{\delta \sigma=0} = \frac{1}{R} \quad (\text{A.6})$$

- d) Coeficiente de Biot ( $\alpha$ ) é a variação de volume de fluido injetado ou retirado da amostra em relação a variação volumétrica da amostra à pressão constante ( $p = 0, q \neq 0$ ):

$$\left| \frac{\delta \zeta}{\delta \varepsilon} \right|_{\delta p=0} = \alpha \quad (\text{A.7})$$

- e) Coeficiente de armazenamento específico sob condição de deformação volumétrica constante ( $1/Q$ ) é a variação de volume de fluido injetado ou retirado da amostra e relação a pressão mantendo-se a deformação volumétrica constante:

$$\left| \frac{\delta \zeta}{\delta p} \right|_{\delta \varepsilon=0} = 1/Q \quad (\text{A.8})$$

De forma a facilitar o entendimento entre as diversas nomenclaturas elaborou-se a tabela A.1 que contém as relações entre diversas propriedades físicas de ambas as fases envolvidas no processo do adensamento.

MODULO DE ELASTICIDADE	$E$
MODULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL	$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$
<i>BULK MODULI</i> DRENADO	$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$
<i>BULK MODULI</i> FLUIDO	$K_f$
<i>BULK MODULI</i> DOS GRÃOS	$K_s$
<i>BULK MODULI</i> NÃO DRENADO	$K_u = K \left[ 1 + \frac{\alpha^2 K_f}{(1 - \alpha)(\alpha - n)K_f + nK} \right]$
COEFICIENTE DE POISSON DRENADO	$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$
COEFICIENTE DE POISSON NÃO DRENADO	$\nu_u = \frac{3K_u - 2G}{2(3K_u + G)}$

COEFICIENTE DE SKEMPTON PARA PORO PRESSÃO	$B = \frac{3(v_u - v)}{\alpha(1 - 2v)(1 + v_u)}$ $= \frac{\alpha K_f}{[\alpha - n(1 - \alpha)]K_f + nK}$
MODULO DE BIOT	$M = Q = \frac{2G(v_u - v)}{\alpha^2(1 - 2v)(1 - 2v_u)}$ $1/M = 1/Q = \frac{n}{K_f} + \frac{(\alpha - n)}{K_s}$
COEFICIENTE POROELÁSTICO PARA TENSÃO	$\eta = \frac{\alpha(1 - 2v)}{2(1 - v)}$
<i>STORAGE COEFFICIENT</i>	$S = \frac{(1 - v_u)(1 - 2v)}{M(1 - v)(1 - 2v_u)}$
<i>FINAL COMPRESSIBILITY</i>	$a = \frac{(1 - 2v)}{2G(1 - v)}$
CONSTANTE DE CONSOLIDAÇÃO	$\frac{1}{c} = \alpha^2 \frac{a}{k} + \frac{1}{Qk}$
CONSTANTES DE LAMÉ	$\mu = G = \frac{E}{2(1 + v)}$
	$\lambda = \frac{Ev}{(1 + v)(1 - 2v)} = K - \frac{2}{3}G$

Tabela A.1 Relações entre propriedades físicas para o fenômeno do adensamento

## ANEXO B

DISCRETIZAÇÃO		DOMÍNIO				CONTORNO
INTERPOLAÇÃO/FORMULAÇÃO		FORTE	FRACA			
		COLOCAÇÃO	GALERKIN	PETROV-GALERKIN	LEAST SQUARES	
MÍNIMOS QUADRADOS	MLS	FPM LSCM ORCM	EFGM IEFG IIEFG DEM	MLPG PG DEM	LSMM	BEFM (MLS) IBEFM BNM LBIE
	WLS	PWLS			MWLSM	
BASE RADIAL	RBF	RBCFM KCM MKM HCM	DEKM	MLPG		BPM MAPS LMAPS
INTERPOLAÇÃO PONTUAL	PIM	PCM PICM	PIM	LPIM		BPIM
	RPIM	RPICM	RPIM	LRPIM		BRPIM
PARTIÇÃO DE UNIDADE	PUFEM		PUFEM	RKHPU		
	Hp-CLOUDS	Hp-CLOUDS	Hp-CLOUDS			
REPRESENTAÇÃO INTEGRAL	SPH	SPH				
	RKPM	RKPM	RKPM MLSRK	RKHPU		
REPRESENTAÇÃO DIFERENCIAL	GFDM	GFDM				
OUTROS			PAM NEM			MFS TBCM

Tabela A.2 Resumo Esquemático para os métodos *Meshless* de acordo com sua discretização, formulação e interpolação utilizadas

Para cada um dos métodos apresentados na tabela A.2 descreve-se sua nomenclatura e bibliografia de referência:

PWLS: *Point Weighted Least Squares* (WANG, LI e LAM, 2005)

GFDM: *Generalized Finite Difference Method* (GAVETE, GAVETE e BENITO, 2003)

RBFCM : *Radial Basis Function Collocation Method* (SARLER e VERTNIK, 2006)

FPM: *Finite Point Method* (OÑATE, IDELSOHN, *et al.*, 1996)

SPH: *Smoothed Particle Hydrodynamics* (GINGOLD e MONAGHAN, 1977)

PCM: *Point Collocation Method* (KIM e KIM, 2003)

PICM: *Point Interpolation Collocation Method* (LIU e TAI, 2006)

RPICM: *Radial Point Interpolation Collocation Method* (LIU, LIU, *et al.*, 2005)

KCM: *Kansa Collocation Method* (KANSA, 1990.a), (KANSA, 1990.b)

MKM: *Modified Kansa Method* (CHEN, 2003)

HCM: *Hermite Collocation Method* (JUMARHON, AMINI e CHEN, 2000)

*Hp-Clouds Method* (DUARTE e ODEN, 1996), (LISZKA, DUARTE e TWORZYDLO, 1996)

RKPM: *Reproducing Kernel Particle Method* (LIU, JUN e ZHANG, 1995)

LSCM: *Least Squares Collocation Method* (ZHANG, LIU, *et al.*, 2001)

ORCM: *Overrange Collocation Method* (GUO, 2011)

DEM: *Diffuse Element Method* (NAYROLES, TOUZOT e VILLON, 1992)

IIEFG: *Improved Interpolating Element-Free Galerkin Method* (FENG-XIN, JU-FENG e YU-MIN, 2013)

IEFG: *Interpolating Element-Free Galerkin* (REN e CHENG, 2012)

DEKM: *Diffuse Element Kansa Method* (GHORBANI, 2010)

EFGM: *Element Free Galerkin Method* (BELYTSCHKO, ORGAN e KRONGAUZ, 1995)

MLSRK: *Moving Least Squares Reproducing Kernel* (LIU, 1997)

PUFEM: *Partition Of Unity Finite Element Methods* (MELENK e BABUSKA, 1996)

PIM: *Point Interpolation Method* (LIU e GU, 2001)

RPIM: *Radial Point Interpolation Method* (LIU, ZHANG, *et al.*, 2005)

PG DEM: *Petrov-Galerkin Diffuse Element Method* (KRONGAUZ e BELYTSCHKO, 1997)

MLPG: *Meshless Local Petrov-Galerkin Method* (ATLURI e ZHU, 1998)

LPIM: *Local Point Interpolation Method* (GU e LIU, 2001)

LRPIM: *Local Radial Point Interpolation Method* (LIU e GU, 2001)

PAM : *Point Assembly Method* (LIU, 2002)

NEM: *Natural Element Method / Natural Neighbor Element Method* (SUKUMAR, MORAN e BELYTSCHKO, 1998)

RKHPU: *Reproducing Kernel Hierarchical Partition Of Unity* (LI e LIU, 1999)

LSMM: *Least Squares Meshfree Method* (PARK e YOUN, 2001)

MWLSM: *Meshless Weighted Least Squares Method* (XIAOFEI e MINGWAN, 2003)

IBEFM: *Interpolating Boundary Element-Free Method* (HONG-PING, YU-MIN e WU, 2009)

BEFM: *Boundary Element Free Method* (CHENG e PENG, 2005)

BNM: *Boundary Node Method* (KOTHNUR, MUKHERJEE e MUKHERJEE, 1999)

BPIM: *Boundary Point Interpolation Method* (LIU e GU, 2004)

BRPIM: *Boundary Radial Point Interpolation Method* (LIU e GU, 2004)

MFS: *Method of Fundamental Solutions* (FAIRWEATHER e KARAGEORGHIS, 1998) e (WANG e QIN, 2019)

BPM: *Boundary Particle Method* (CHEN, 2002)

TBCM: *Trefftz Boundary Collocation Method* (KITA e KAMIYA, 1995)

LBIE: *Local Boundary Integral Equation Method* (ZHU, ZHANG e ATLURI, 1998)

MAPS: *Method Of Approximated Particular Solutions* (CHEN, FAN e WEN, 2012)

LMAPS: *Local Method Of Approximated Particular Solutions* (ZHANG, TIAN e CHEN, 2014)

## ANEXO C

❖ Aproximação polinomial de ordem 2 :

$a_2$	$\varphi_i(x) = 4a_2 - \lambda^2(a_2r^2)$	$\psi_i(x) = a_2r^2$
$\pm 1$	$\pm 4 - \lambda^2(\pm r^2)$	$\pm r^2$
$\pm \frac{1}{2}$	$\pm 2 - \lambda^2(\pm \frac{r^2}{2})$	$\pm \frac{r^2}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

❖ Aproximação polinomial de ordem 3 :

$a_2$	$a_3$	$\varphi_i(x) = 4a_2 + 9a_3r - \lambda^2(a_2r^2 + a_3r^3)$	$\psi_i(x) = a_2r^2 + a_3r^3$
$\pm 1$	$\pm 1$	$\pm 4 \pm 9r - \lambda^2(\pm r^2 \pm r^3)$	$\pm r^2 \pm r^3$
$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{3}$	$\pm 2 \pm 3r - \lambda^2(\pm \frac{r^2}{2} \pm \frac{r^3}{3})$	$\pm \frac{r^2}{2} \pm \frac{r^3}{3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\pm \frac{1}{16}$	$\pm \frac{1}{3}$	$\pm 0.25 \pm 3r - \lambda^2(\pm \frac{r^2}{16} \pm \frac{r^3}{3})$	$\pm \frac{r^2}{16} \pm \frac{r^3}{3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{9}$	$\pm 2 \pm r - \lambda^2(\pm \frac{r^2}{2} \pm \frac{r^3}{9})$	$\pm \frac{r^2}{2} \pm \frac{r^3}{9}$
$\pm \frac{1}{4}$	$\pm \frac{1}{9}$	$\pm 1 \pm r - \lambda^2(\pm \frac{r^2}{4} \pm \frac{r^3}{9})$	$\pm \frac{r^2}{4} \pm \frac{r^3}{9}$
$\pm \frac{1}{8}$	$\pm \frac{1}{9}$	$\pm 0.5 \pm r - \lambda^2(\pm \frac{r^2}{8} \pm \frac{r^3}{9})$	$\pm \frac{r^2}{8} \pm \frac{r^3}{9}$
$\pm \frac{1}{16}$	$\pm \frac{1}{9}$	$\pm 0.25 \pm r - \lambda^2(\pm \frac{r^2}{16} \pm \frac{r^3}{9})$	$\pm \frac{r^2}{16} \pm \frac{r^3}{9}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{18}$	$\pm 2 \pm 0.5r - \lambda^2(\pm \frac{r^2}{2} \pm \frac{r^3}{18})$	$\pm \frac{r^2}{2} \pm \frac{r^3}{18}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\pm \frac{1}{16}$	$\pm \frac{1}{18}$	$\pm 0.25 \pm 0.5r - \lambda^2(\pm \frac{r^2}{16} \pm \frac{r^3}{18})$	$\pm \frac{r^2}{16} \pm \frac{r^3}{18}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



❖ Aproximação polinomial de ordens superiores :

ordem	$\varphi_i(x)$	$\psi_i(x)$
4	$4a_2 + 9a_3r + 16a_4r^2 - \lambda^2(a_2r^2 + a_3r^3 + a_4r^4)$	$a_2r^2 + a_3r^3 + a_4r^4$
5	$4a_2 + 9a_3r + 16a_4r^2 + 25a_5r^3 - \lambda^2(a_2r^2 + a_3r^3 + a_4r^4 + a_5r^5)$	$a_2r^2 + a_3r^3 + a_4r^4 + a_5r^5$
6	$4a_2 + 9a_3r + 16a_4r^2 + 25a_5r^3 + 36a_6r^4 - \lambda^2(a_2r^2 + a_3r^3 + a_4r^4 + a_5r^5 + a_6r^6)$	$a_2r^2 + a_3r^3 + a_4r^4 + a_5r^5 + a_6r^6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

❖ Aproximação por TPS :

$\varphi_i(x)$	$\psi_i(x)$	
$r^2 \log r$	$-\frac{4}{\lambda^4} [K_0(\lambda r) + \log r] - \frac{r^2 \log r}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda^2}$	$r > 0$
	$\frac{4}{\lambda^2} \left[ \gamma + \log \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right] - \frac{4}{\lambda^2}$	$r = 0$
$r^4 \log r$	$-\frac{64}{\lambda^6} [K_0(\lambda r) + \log r] - \frac{r^2 \log r}{\lambda^2} \left( \frac{16}{\lambda^2} + r^2 \right) - \frac{8r^2}{\lambda^4} - \frac{96}{\lambda^6}$	$r > 0$
	$\frac{64}{\lambda^6} \left[ \gamma + \log \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right] - \frac{96}{\lambda^6}$	$r = 0$
$r^6 \log r$	$-\frac{2304}{\lambda^8} [K_0(\lambda r) + \log r] - \frac{r^2 \log r}{\lambda^2} \left( \frac{576}{\lambda^4} + \frac{36r^2}{\lambda^2} + r^4 \right) - \frac{12r^2}{\lambda^4} \left( \frac{40}{\lambda^2} + r^2 \right) - \frac{4224}{\lambda^8}$	$r > 0$
	$\frac{2304}{\lambda^8} \left[ \gamma + \log \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right] - \frac{4224}{\lambda^8}$	$r = 0$
$r^8 \log r$	$-\frac{147456}{\lambda^{10}} [K_0(\lambda r) + \log r] - \frac{r^2 \log r}{\lambda^2} \left( \frac{36864}{\lambda^6} + \frac{2304r^2}{\lambda^4} + \frac{64r^4}{\lambda^2} + r^6 \right) - \frac{r^2}{\lambda^4} \left( \frac{39936}{\lambda^4} + \frac{1344r^2}{\lambda^2} + 16r^4 \right) - \frac{307200}{\lambda^{10}}$	$r > 0$

	$\frac{147456}{\lambda^{10}} \left[ \gamma + \log \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right] - \frac{307200}{\lambda^{10}}$	$r = 0$
$r^{10} \log r$	$ \begin{aligned} & - \frac{14745600}{\lambda^{12}} [K_0(\lambda r) + \log r] \\ & - \frac{r^2 \log r}{\lambda^2} \left( \frac{3686400}{\lambda^8} + \frac{230400r^2}{\lambda^6} + \frac{6400r^4}{\lambda^4} \right. \\ & \quad \left. + \frac{100r^6}{\lambda^2} + r^8 \right) \\ & - \frac{r^2}{\lambda^4} \left( \frac{4730880}{\lambda^6} + \frac{180480r^2}{\lambda^4} + \frac{2880r^4}{\lambda^2} + 20r^6 \right) \\ & - \frac{33669120}{\lambda^{12}} \end{aligned} $	$r > 0$
	$\frac{14745600}{\lambda^{12}} \left[ \gamma + \log \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right] - \frac{33669120}{\lambda^{12}}$	$r = 0$

## ANEXO D

Utilizando um domínio de suporte quadrado podem ser estabelecidas definições comuns a serem utilizadas para qualquer função peso:

Raio Normalizado	$\overline{r_{ix}} = \frac{d_{ix}}{d_{sx}} = \frac{ \mathbf{x} - \mathbf{x}_i }{d_{sx}}$ $\overline{r_{iy}} = \frac{d_{iy}}{d_{sy}} = \frac{ \mathbf{y} - \mathbf{y}_i }{d_{sy}}$	(A.9)
Derivadas do raio em relação ao sistema coordenado	$\frac{dr}{dx} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)/ \mathbf{x} - \mathbf{x}_i }{d_{sx}}$ $\frac{dr}{dy} = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{y}_i)/ \mathbf{y} - \mathbf{y}_i }{d_{sy}}$	(A.10)
Função Peso	$w_i(\mathbf{x}) = w_{ix}(\mathbf{x}) * w_{iy}(\mathbf{x})$	(A.11)
Primeira derivada da função peso	$\frac{\partial w_i(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{\partial w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x} * w_{iy}(\mathbf{x})$ $\frac{\partial w_i(\mathbf{x})}{\partial y} = w_{ix}(\mathbf{x}) * \frac{\partial w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y}$	(A.12)
Segunda derivada da função peso	$\frac{\partial^2 w_i(\mathbf{x})}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x^2} * w_{iy}(\mathbf{x})$ $\frac{\partial^2 w_i(\mathbf{x})}{\partial y^2} = w_{ix}(\mathbf{x}) * \frac{\partial^2 w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y^2}$ $\frac{\partial^2 w_i(\mathbf{x})}{\partial x \partial y} = \frac{\partial w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x} * \frac{\partial w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y}$	(A.13)
Terceira derivada da função peso	$\frac{\partial^3 w_i(\mathbf{x})}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x^3} * w_{iy}(\mathbf{x})$ $\frac{\partial^3 w_i(\mathbf{x})}{\partial y^3} = w_{ix}(\mathbf{x}) * \frac{\partial^3 w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y^3}$ $\frac{\partial^3 w_i(\mathbf{x})}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x^2} * \frac{\partial w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y}$ $\frac{\partial^3 w_i(\mathbf{x})}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x} * \frac{\partial^2 w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y^2}$	(A.14)

❖ Spline de 3ª ordem:

Direção x	$w_{ix}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4(\overline{r_{ix}})^2 + 4(\overline{r_{ix}})^3, & \overline{r_{ix}} \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4(\overline{r_{ix}}) + 4(\overline{r_{ix}})^2 - \frac{4}{3}(\overline{r_{ix}})^3, & 0.5 < \overline{r_{ix}} \leq 1 \\ 0, & \overline{r_{ix}} > 1 \end{cases}$ $\frac{\partial w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x} = \begin{cases} [-4 + 8(\overline{r_{ix}}) - 4(\overline{r_{ix}})^2] \frac{dr}{dx}, & \overline{r_{ix}} > 0.5 \\ [-8(\overline{r_{ix}}) + 12(\overline{r_{ix}})^2] \frac{dr}{dx}, & \overline{r_{ix}} \leq 0.5 \end{cases}$ $\frac{\partial^2 w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x^2} = \begin{cases} [8 - 8(\overline{r_{ix}})] \frac{d^2 r}{dx^2}, & \overline{r_{ix}} > 0.5 \\ [-8 + 24(\overline{r_{ix}})] \frac{d^2 r}{dx^2}, & \overline{r_{ix}} \leq 0.5 \end{cases}$ $\frac{\partial^3 w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x^3} = \begin{cases} [-8] \frac{d^3 r}{dx^3}, & \overline{r_{ix}} > 0.5 \\ [24] \frac{d^3 r}{dx^3}, & \overline{r_{ix}} \leq 0.5 \end{cases}$	(A.15)
Direção y	$w_{iy}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4(\overline{r_{iy}})^2 + 4(\overline{r_{iy}})^3, & \overline{r_{iy}} \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4(\overline{r_{iy}}) + 4(\overline{r_{iy}})^2 - \frac{4}{3}(\overline{r_{iy}})^3, & 0.5 < \overline{r_{iy}} \leq 1 \\ 0, & \overline{r_{iy}} > 1 \end{cases}$ $\frac{\partial w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y} = \begin{cases} [-4 + 8(\overline{r_{iy}}) - 4(\overline{r_{iy}})^2] \frac{dr}{dy}, & \overline{r_{iy}} > 0.5 \\ [-8(\overline{r_{iy}}) + 12(\overline{r_{iy}})^2] \frac{dr}{dy}, & \overline{r_{iy}} \leq 0.5 \end{cases}$ $\frac{\partial^2 w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y^2} = \begin{cases} [8 - 8(\overline{r_{iy}})] \frac{d^2 r}{dy^2}, & \overline{r_{iy}} > 0.5 \\ [-8 + 24(\overline{r_{iy}})] \frac{d^2 r}{dy^2}, & \overline{r_{iy}} \leq 0.5 \end{cases}$ $\frac{\partial^3 w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y^3} = \begin{cases} [-8] \frac{d^3 r}{dy^3}, & \overline{r_{iy}} > 0.5 \\ [24] \frac{d^3 r}{dy^3}, & \overline{r_{iy}} \leq 0.5 \end{cases}$	(A.16)

❖ Spline de 4ª ordem:

Direção x	$w_{ix}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6(\overline{r_{ix}})^2 + 8(\overline{r_{ix}})^3 - 3(\overline{r_{ix}})^4, & \overline{r_{ix}} \leq 1 \\ 0, & \overline{r_{ix}} > 1 \end{cases}$ $\frac{\partial w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x} = \left\{ [-12(\overline{r_{ix}}) + 24(\overline{r_{ix}})^2 - 12(\overline{r_{ix}})^3] \frac{dr}{dx} \right\}$ $\frac{\partial^2 w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x^2} = \left\{ [-12 + 48(\overline{r_{ix}}) - 36(\overline{r_{ix}})^2] \frac{d^2 r}{dx^2} \right\}$ $\frac{\partial^3 w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x^3} = \left\{ [48 - 72(\overline{r_{ix}})] \frac{d^3 r}{dx^3} \right\}$	(A.17)
Direção y	$w_{iy}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6(\overline{r_{iy}})^2 + 8(\overline{r_{iy}})^3 - 3(\overline{r_{iy}})^4, & \overline{r_{iy}} \leq 1 \\ 0, & \overline{r_{iy}} > 1 \end{cases}$ $\frac{\partial w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y} = \left\{ [-12(\overline{r_{iy}}) + 24(\overline{r_{iy}})^2 - 12(\overline{r_{iy}})^3] \frac{dr}{dy} \right\}$ $\frac{\partial^2 w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y^2} = \left\{ [-12 + 48(\overline{r_{iy}}) - 36(\overline{r_{iy}})^2] \frac{d^2 r}{dy^2} \right\}$ $\frac{\partial^3 w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y^3} = \left\{ [48 - 72(\overline{r_{iy}})] \frac{d^3 r}{dy^3} \right\}$	(A.18)

❖ Exponencial:

Direção x	$w_{ix}(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-[\overline{r_{ix}}/c_i]^2}, & \overline{r_{ix}} \leq 1 \\ 0, & \overline{r_{ix}} > 1 \end{cases}$ $\frac{\partial w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x} = \left\{ \left[ \left( -\frac{2(\overline{r_{ix}})}{c_i^2} \right) e^{-[\overline{r_{ix}}/c_i]^2} \right] \frac{dr}{dx} \right\}$ $\frac{\partial^2 w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x^2} = \left\{ \left[ -2 \left( \frac{c_i^2 - 2(\overline{r_{ix}})^2}{c_i^4} \right) e^{-[\overline{r_{ix}}/c_i]^2} \right] \frac{d^2 r}{dx^2} \right\}$ $\frac{\partial^3 w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x^3} = \left\{ \left[ -2(\overline{r_{ix}}) \left( \frac{c_i^6 + 2c_i^2 - 2(\overline{r_{ix}})^2}{c_i^6} \right) e^{-[\overline{r_{ix}}/c_i]^2} \right] \frac{d^3 r}{dx^3} \right\}$	(A.19)
Direção y	$w_{iy}(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-[\overline{r_{iy}}/c_i]^2}, & \overline{r_{iy}} \leq 1 \\ 0, & \overline{r_{iy}} > 1 \end{cases}$ $\frac{\partial w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y} = \left\{ \left[ \left( -\frac{2(\overline{r_{iy}})}{c_i^2} \right) e^{-[\overline{r_{iy}}/c_i]^2} \right] \frac{dr}{dy} \right\}$ $\frac{\partial^2 w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y^2} = \left\{ \left[ -2 \left( \frac{c_i^2 - 2(\overline{r_{iy}})^2}{c_i^4} \right) e^{-[\overline{r_{iy}}/c_i]^2} \right] \frac{d^2 r}{dy^2} \right\}$ $\frac{\partial^3 w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y^3} = \left\{ \left[ -2(\overline{r_{iy}}) \left( \frac{c_i^6 + 2c_i^2 - 2(\overline{r_{iy}})^2}{c_i^6} \right) e^{-[\overline{r_{iy}}/c_i]^2} \right] \frac{d^3 r}{dy^3} \right\}$	(A.20)

❖ Gaussiana:

Direção x	$w_{ix}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{\bar{r}_{ix} * d_{sx}}{c}\right)^2} - e^{-\left[\left(\frac{d_{sx}}{c}\right)^2\right]}}{1 - e^{-\left[\left(\frac{d_{sx}}{c}\right)^2\right]}}, & \bar{r}_{ix} \leq 1 \\ 0, & \bar{r}_{ix} > 1 \end{cases}$ $\frac{\partial w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x} = \left\{ \left[ -\frac{2(\bar{r}_{ix})(d_{sx})^2}{c^2} \left( \frac{e^{-\left[\frac{d_{sx}^2(\bar{r}_{ix}^2-1)}{c^2}\right]}}{e^{\left[\left(\frac{d_{sx}}{c}\right)^2\right]} - 1} \right) \right] \frac{dr}{dx} \right\}$ $\frac{\partial^2 w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x^2} = \left\{ \left[ -\frac{2(d_{sx})^2 [c^2 - 2d_{sx}^2(\bar{r}_{ix})^2]}{c^4} \left( \frac{e^{-\left[\frac{d_{sx}^2(\bar{r}_{ix}^2-1)}{c^2}\right]}}{e^{\left[\left(\frac{d_{sx}}{c}\right)^2\right]} - 1} \right) \right] \frac{d^2 r}{dx^2} \right\}$ $\frac{\partial^3 w_{ix}(\mathbf{x})}{\partial x^3} = \left\{ \left[ \frac{4(\bar{r}_{ix})(d_{sx})^4 [3c^2 - 2d_{sx}^2(\bar{r}_{ix})^2]}{c^6} \left( \frac{e^{-\left[\frac{d_{sx}^2(\bar{r}_{ix}^2-1)}{c^2}\right]}}{e^{\left[\left(\frac{d_{sx}}{c}\right)^2\right]} - 1} \right) \right] \frac{d^3 r}{dx^3} \right\}$	(A.21)
Direção y	$w_{iy}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{\bar{r}_{iy} * d_{sy}}{c}\right)^2} - e^{-\left[\left(\frac{d_{sy}}{c}\right)^2\right]}}{1 - e^{-\left[\left(\frac{d_{sy}}{c}\right)^2\right]}}, & \bar{r}_{iy} \leq 1 \\ 0, & \bar{r}_{iy} > 1 \end{cases}$ $\frac{\partial w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y} = \left\{ \left[ -\frac{2(\bar{r}_{iy})(d_{sy})^2}{c^2} \left( \frac{e^{-\left[\frac{d_{sy}^2(\bar{r}_{iy}^2-1)}{c^2}\right]}}{e^{\left[\left(\frac{d_{sy}}{c}\right)^2\right]} - 1} \right) \right] \frac{dr}{dy} \right\}$ $\frac{\partial^2 w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y^2} = \left\{ \left[ -\frac{2(d_{sy})^2 [c^2 - 2d_{sy}^2(\bar{r}_{iy})^2]}{c^4} \left( \frac{e^{-\left[\frac{d_{sy}^2(\bar{r}_{iy}^2-1)}{c^2}\right]}}{e^{\left[\left(\frac{d_{sy}}{c}\right)^2\right]} - 1} \right) \right] \frac{d^2 r}{dy^2} \right\}$ $\frac{\partial^3 w_{iy}(\mathbf{x})}{\partial y^3} = \left\{ \left[ \frac{4(\bar{r}_{iy})(d_{sy})^4 [3c^2 - 2d_{sy}^2(\bar{r}_{iy})^2]}{c^6} \left( \frac{e^{-\left[\frac{d_{sy}^2(\bar{r}_{iy}^2-1)}{c^2}\right]}}{e^{\left[\left(\frac{d_{sy}}{c}\right)^2\right]} - 1} \right) \right] \frac{d^3 r}{dy^3} \right\}$	(A.22)

## ANEXO D - MLPG

1. Leitura parâmetros iniciais do problema
  - Coordenadas para os  $x_i = 1, 2, \dots, n$  nós utilizados na discretização da geometria;
  - Propriedades físicas do material;
  - Condições de Contorno associadas ao problema;
  - Definição da ordem da base polinomial (linear, quadrática ou cúbica – equações (3.25 – 3.28);
  - Definição do número de pontos de integração a serem utilizados;
  - Escolha da função peso utilizada no MQM (Splines, Exponenciais ou Gaussianas, equações (3.26 – 3.49);
2. Para cada nó  $x_i$ 
  - a. Definição e montagem do subdomínio de influencia (leia-se subdomínio de quadratura) definidos pelas técnicas apresentadas nas equações (3.20) ou (3.21);
  - b. Cálculo das coordenadas dos  $x_q$  pontos de quadratura no domínio real, seu peso e Jacobiano;
  - c. Para cada ponto  $x_q$  de quadratura
    - i. Definição e montagem do domínio de suporte definido pela equação (3.19); (número de nós dentro dele depende do número de termos da base polinomial)
    - ii. Cálculo da função peso (ponderação dos resíduos ponderados) nos nós  $x_i$  pertencentes ao domínio de suporte;
    - iii. Cálculo das funções de forma do MQM e suas derivadas com o processo definido no item 3.4.1 (para cada ponto  $x_q$ );
    - iv. Cálculo das equações locais e assembler das matrizes  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{Q}$  e vetor  $\mathbf{F}$  global através das equações (6.19 – 6.21)
  - d. Fim pontos de quadratura
3. Fim nós
4. Resolução do sistema linear definido em (6.18)
5. Obtenção da solução aproximada
  - a. Montar domínio de suporte (número de nós dentro dele depende do número de termos da base polinomial);
  - b. Cálculo das funções de forma do MQM e suas derivadas em cada nó  $x_i$  do problema.
  - c. Aproximação da solução pela equação (6.14)
6. Fim programa



## ANEXO E – MFS + DRM

1. Leitura parâmetros iniciais do problema
  - Coordenadas para os  $x_i = 1, 2, \dots, n$  nós utilizados na discretização da geometria;
  - Propriedades físicas do material;
  - Condições de Contorno associadas ao problema;
2. Estabelecimento das condições iniciais
3. Cálculo da solução particular :
  - a. Estabelecimento do termo não homogêneo
  - b. Para cada ponto de interpolação
    - i. Cálculo da distância em relação ao contorno real
    - ii. Cálculo da função  $\varphi_i(\mathbf{x})$
    - iii. Montagem do sistema definido em (5.15)
  - c. Fim pontos de interpolação
  - d. Resolução do Sistema linear
  - e. Para cada ponto de interpolação
    - i. Cálculo da função  $\psi_i(\mathbf{x})$
    - ii. Cálculo da solução particular através de (5.16)
  - f. Fim pontos de interpolação
4. Estabelecimento das condições de contorno corrigidas definidas em (5.10)
5. Cálculo da solução homogênea:
  - a. Para cada nó de contorno
    - i. Cálculo das distâncias em relação as fontes virtuais
    - ii. Cálculo das soluções fundamentais definidas em (5.12)
    - iii. Montagem do sistema definido em (5.11)
  - b. Fim nós de contorno
  - c. Resolução do sistema linear
  - d. Para cada nó de contorno
    - i. Cálculo da solução homogênea
  - e. Fim nós de contorno
6. Cálculo solução aproximada final através de (5.8)
7. Atualização das condições de contorno
8. Fim programa

## ANEXO F - ACOPLAMENTO

1. Leitura dos parâmetros essenciais ao modelo
2. Estabelecimento das condições iniciais
3. Loop do passo de tempo
  - a. Inicialização variáveis do método de acoplamento:  $\alpha_{relax} = 0.5$
  - b. Loop até a obtenção da convergência  $tol$ 
    - i. Cálculos relativos ao MLPG
    - ii. Transferência de  $\sigma_{vol}$  calculada pelo MLPG como condição não homogênea para MFS-DRM
    - iii. Cálculos relativos ao MFS-DRM
    - iv. Atualização da pressão através do parâmetro de relaxamento  $\alpha_{relax}$  definida pela equação (7.4.a)
    - v. Cálculo do parâmetro de relaxamento através de (7.7)
    - vi. Cálculo da convergência através de (7.2)
  - c. Fim loop de convergencia
  - d. Atualização das variáveis comuns aos modelos
4. Fim passo tempo
5. Fim programa