

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS A PROBLEMAS PLANOS  
DA MECÂNICA DA FRATURA

João Augusto de Lima Rocha

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO  
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO  
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTEN-  
ÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.)

Aprovada por:

Prof. Luiz Bevilacqua, Presidente

Prof. Fernando Venancio Filho

Prof. Raúl Antonino Feijão

RIO DE JANEIRO-RJ-BRASIL  
DEZEMBRO DE 1976

"A verdade é filha do tempo e não da autoridade"

(B. Brecht)

"Uma sociedade que aceita cegamente as decisões dos peritos é uma sociedade doente a caminho da morte. Estã em tempo de produzirmos, ao lado dos especialistas, outra espécie de intelectuais e cidadãos que tenham amplo conhecimento dos fatos, dos objetivos e dos métodos da ciência, sendo, portanto, capazes de emitir julgamento sobre a orientação científica. Pessoas que trabalham na fronteira entre a ciência e a sociedade se tornaram essenciais apenas porque quase tudo que acontece na sociedade é influenciado pela ciência".

(René Dubos)

AGRADECIMENTOS

A todos os colegas, pelas discussões que tivemos, e ainda vamos ter;

Aos funcionários da COPPE e da Biblioteca, pela solicitude;

Ao orientador Professor Luiz Bevilacqua, por ter permitido e incentivado a iniciativa do orientado;

Ao colega Abimael Loula, pelo apoio em todos os momentos;

Ao colega Cid Gesteira, que enviou valiosas publicações;

Aos amigos Virgílio e Emília Bandeira, pela força que deram na fase final;

À Maria de Lourdes de Almeida, que datilografou com cuidado;

À CAPES e Fundação Politécnica da Bahia, por terem apoiado parte desse trabalho.

À Maria José Sobreira, que fez as figuras.

RESUMO

Pretende-se nesta tese, discutir o problema da fratura em materiais frágeis e obter os fatores de intensidade de tensões através do método dos elementos finitos - modelo híbrido de deslocamentos.

Inicialmente são apresentados conceitos fundamentais e teorias da Mecânica da Fratura.

Em seguida é estudado o funcional híbrido, no qual os deslocamentos são assumidos independentemente, no interior e no contorno dos elementos.

São desenvolvidos dois elementos - um regular, outro singular - adequados à discretização de domínios planos contendo fissuras retilíneas.

Finalmente são apresentadas explicitamente, as matrizes auxiliares na montagem do sistema de equações lineares obtido via extremização do funcional híbrido.

ABSTRACT

In this work the problem of brittle fracture is discussed, attempting to obtain the stress intensity factors. In doing so a hybrid displacement finite element model is used.

The fundamental concepts and theories of Fracture Mechanics are presented, firstly. Then, a hybrid functional, in which the displacements in the interior and on the boundary of the elements are assumed independently, is studied.

Two different elements - a regular and a singular one - that can be used to the discretization of plain domains containing rectilinear cracks, are developed.

Finally, the matrices employed in the assembling of the linear system of equations, obtained from the stationary value of the hybrid functional are explicitly derived.

ÍNDICE

	pg.
CAPÍTULO I - Fundamentos da Mecânica da Fratura	1
I.1 - Origem e Finalidade	1
I.2 - Teoria de Griffith	4
I.3 - Teoria de Barenblatt	6
I.4 - Modelos Planos com Fissura Retilínea	8
I.5 - Formas dos Campos de Tensões e Deslo- camentos na Vizinhança de Extremida- de de Fissura Retilínea	12
CAPÍTULO II - Método dos Elementos Finitos na Mecâ- nica da Fratura	20
II.1 - Considerações Gerais	20
II.2 - Funcional Híbrido - Deslocamentos Relaxados entre Elementos	22
II.3 - Modelo Híbrido de Deslocamentos Par- ticularizado para Problemas Planos de Fratura	28
CAPÍTULO III - Modelos de Elementos Finitos Propos- tos	37
III.1 - Elemento Regular	37
III.2 - Elemento Singular	42

	pg.
III.3 - Matrizes Auxiliares	46
APÊNDICE - Consideração dos Deslocamentos de Corpo Rígido no Interior dos Elementos	59
BIBLIOGRAFIA	62

SÍMBOLOS

Somente os símbolos que aparecem com frequência e têm sempre o mesmo significado, constam desta lista. Os outros são definidos no local, podendo ter significados diferentes, de um lugar para outro.

$x_i$	coordenadas cartesianas ortogonais ( $i=1$ a $3$ )
$r; \theta$ ou $\varphi$	coordenadas polares
$s$	coordenada de linha
$\sigma_{ij}$	componentes do tensor das tensões ( $i, j=1$ a $3$ )
$\epsilon_{ij}$	componentes do tensor das deformações ( $i, j=1$ a $3$ )
$u_i$	deslocamentos nas respectivas direções $x_i$ ( $i=1$ a $3$ )
$E_{ijkl}$	componentes da matriz que relaciona tensões com deformações no regime elástico ( $i, j, k, l = 1$ a $3$ )
$E$	módulo de Young
$\nu$	coeficiente de Poisson
$G$	módulo de elasticidade transversal; $G=E/2(1+\nu)$
$z$	número complexo; $z = x_1 + ix_2$
$\bar{z}$	número complexo conjugado de $z$ ; $\bar{z} = x_1 - ix_2$
$\text{Re}[f(z)]$	parte real da função a variável complexa $f(z)$
$\text{Im}[f(z)]$	parte imaginária de $f(z)$

$$F_{k,i} = \frac{\partial F_k}{\partial x_i} ; \quad F_{k,ij} = \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_i \partial x_j} , \text{ e assim por diante.}$$

Matrizes são representadas por letras maiúsculas e vetores por letras minúsculas, com um til embaixo; a exceção dos vetores:  $\underline{F}$  (forças de massa) e  $\underline{T}$  (tensões prescritas no contorno).

INTRODUÇÃO

A despeito de ter aparecido no começo do século, a Mecânica da Fratura trata de assuntos que já preocupavam o Homem pré-histórico (mais precisamente, o da Idade da pedra lascada).

O fato é que, mesmo o trabalho pioneiro de Griffith (em torno de 1920) foi esquecido, até ser ressuscitado com grande força em plena Segunda Guerra Mundial. Nessa época ocorreram sérios acidentes em navios de guerra e grandes cascas metálicas, que se "desintegravam" sem causa explicável à luz das teorias correntes da Mecânica.

Daí em diante as pesquisas começaram com grande intensidade, abrangendo muitas direções, dificultando uma visão unificada da Mecânica da Fratura. Muito do que está sendo feito é ainda em caráter exploratório, particularmente no campo da Metalurgia.

O fenômeno da fissuração é bastante complexo, praticamente irreproduzível em duas peças de mesmas dimensões, sob as mesmas solicitações.

No âmbito da avaliação quantitativa, cuja base é a formulação de modelos matemáticos do fenômeno, as dificuldades são tantas que só configurações bem regulares de fissuras, em meios infinitos, podem ser tratadas exatamente.

Não se pretende neste trabalho solucionar um problema que nem bem colocado está ainda, mas contribuir para seu esclarecimento, analisando-o por um método aproximado, de grande utilidade quando a solução exata é difícil de ser obtida.

Inicialmente apresenta-se um capítulo destinado a fornecer o suporte conceitual da Mecânica da Fratura. São apresentadas as teorias mais significativas, e obtidas formalmente através do uso de funções a variável complexa, as distribuições de tensões e deslocamentos em torno da extremidade de fissura retilínea no plano.

No segundo capítulo analisa-se um funcional híbrido desenvolvido por Atluri, no qual os deslocamentos são relaxados no contorno dos elementos finitos do domínio discretizado.

No terceiro capítulo apresentam-se dois modelos de elementos finitos híbridos planos: um singular, colocado na vizinhança de extremidades de fissuras. E outro regular, completando o restante do domínio.

Aí é também discutida a questão das funções de interpolação, mostrando-se como são introduzidas as incôgnitas adicionais, os fatores de intensidade de tensões, cuja obtenção é o objetivo principal.

Em Apêndice, é mostrada a maneira de introzudir no funcional as parcelas correspondentes a deslocamentos rígid<sup>o</sup>s no interior dos elementos, antes exclu<sup>í</sup>das por conveniência.

Vale observar que o método desenvolvido pode ser aplicado a problemas variados de singularidades ou concentraçã<sup>o</sup> de tensões, desde que se conheça "a priori", a natureza da singu<sup>lar</sup>idade da solução em casos mais simples.

## CAPÍTULO I

### FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DA FRATURA

#### I.1 - Origem e Finalidade

A preocupação central da Mecânica da Fratura é a previsão do comportamento dos materiais, considerando a presença de vazios, impurezas na microestrutura, inclusões, fissuras etc.

De origem recente e com grande campo de aplicação, a Mecânica da Fratura se desenvolve em várias direções, tendo todas como referência básica o trabalho de A. A. GRIFFITH [3], publicado em 1920, no qual é proposto um critério de estabilidade de fratura, válido para materiais ditos frágeis, isto é, materiais que se rompem sem que haja escoamento. O critério é estabelecido para o problema de placa plana infinita com uma fissura retilínea, submetida a tração constante no infinito.

O material usado nas pesquisas experimentais de Griffith foi o vidro, que é um material essencialmente frágil, apresentando plastificação mínima na extremidade da fissura. Mais tarde foi feita a extensão para materiais apresentando plastificação na extremidade da fissura, independentemente por OROWAN [5]

em 1955 e IRWIN [6] em 1957, ambos baseados em evidências experimentais.

Entre 1959 e 1961, BARENBLATT [12, 13, 14] apresentou um princípio geral (válido para uma série de fenômenos no campo da Mecânica do Contínuo), acompanhado da particularização para o caso de fratura em materiais frágeis. O princípio baseia-se na formulação de hipóteses físicas, fundadas em observações experimentais, que conduzem à garantia da unicidade da solução de problemas dependentes de parâmetros. No caso da Mecânica da Fratura a busca de tais hipóteses físicas tem a finalidade de assegurar a finitude das tensões nas extremidades das fissuras.

Muito importante nos trabalhos de Barenblatt é a formulação variacional dos problemas de fratura. O funcional obtido engloba parâmetros característicos das fissuras, além de tensões e/ou deslocamentos; e através de um princípio de extremo determinam-se os comprimentos das fissuras em "equilíbrio" com as condições de contorno externas. A obtenção do funcional envolve dificuldades matemáticas quando o sólido não é infinito e as fissuras apresentam distribuições pouco regulares.

Paralelamente ao desenvolvimento teórico, tem-se procurado descobrir parâmetros que caracterizem mecanicamente materiais fissurados. Atualmente os mais usados são os fatores de intensidade de tensões (stress intensity factors), introduzidos

por Irwin para o caso de estados planos (Seção I.4). A comparação entre os valores críticos destes fatores, obtidos experimentalmente, com valores obtidos teoricamente, fornecem bom critério de projeto.

A confiança nos resultados experimentais ainda não é grande, porque os valores críticos determinados nos ensaios sofrem influência da escala e geometria da peça, da distribuição das cargas, da forma e dimensão da fissura imposta, das condições ambientais etc. A justificativa para seu largo uso está em caracterizarem bem a singularidade de tensões nas extremidades das fissuras, em regime elástico.

O objetivo deste trabalho é determinar os fatores de intensidade de tensões através de um método numérico. Este capítulo cumpre a finalidade de mostrar sumariamente a evolução da Mecânica da Fratura (Seções I.2 e I.3); conceituar os fatores de intensidade de tensões (Seção I.4); e examinar as formas das funções que determinam tensões e deslocamentos, na vizinhança da extremidade de uma fissura (Seção I.5); a fim de incorporar partes singulares de tais funções, nas funções de interpolação do Método dos Elementos Finitos aplicado à fratura de materiais frágeis.

## I.2 - Teoria de Griffith

O trabalho original de GRIFFITH [3] está baseado na solução obtida por INGLIS [8], para o problema de uma placa plana infinita, em estado plano de tensão ou de deformação, contendo um furo elíptico, e sob as condições:

$$\sigma_{11} \rightarrow T \quad \sigma_{22} \rightarrow T \quad \sigma_{12} \rightarrow 0,$$

quando  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$  e (I.1)

$$\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, \quad \text{para } -c < x_1 < c$$

onde  $T$  é um valor constante de tensão. O eixo maior do furo elíptico está sobre o eixo  $x_1$ , e o eixo menor sobre  $x_2$ .  $c$  é o semi-comprimento do eixo maior do furo, que se degenera em comprimento da fissura quando o eixo menor tende a zero.

Griffith obteve o incremento da energia de deformação para uma placa plana sujeita a tensões no infinito, quando um acréscimo é dado no comprimento de uma fissura retilínea contida na placa. Mostrou que tal incremento é positivo quando são prescritas tensões no contorno. No caso de serem prescritos deslocamentos, a expressão do incremento é a mesma, porém negativa. Mais tarde descobriu um equívoco em suas considerações, e apresentou novas expressões para o incremento da energia de deformação, sem mostrar, porém, a maneira como chegou aos novos resultados [23]. No entanto provou que, se as condi

ções (I.1) fossem alteradas para  $\sigma_{11} \rightarrow 0$  (quando  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$ ), mantidas as demais, não haveria acréscimo na energia de deformação.

Usando estes resultados, estabeleceu um critério de estabilidade que fornece o valor crítico do comprimento da fissura para dado valor de tração  $T$  no infinito, ou vice-versa, o valor crítico de  $T$  para dado comprimento de fissura  $2c$ .

A fim de estabelecer tal critério, introduziu a noção de "energia superficial"  $\gamma$ , por unidade de comprimento da fissura, e usou o princípio da conservação de energia como segue:

$$\delta U - \delta W = 0 \quad (I.2)$$

onde  $\delta U$  é a diferença: entre as energias de deformação da placa com fissura  $2c$ , e com fissura  $2c + 2\delta c$ .  $\delta W$  é a energia dissipada nas superfícies da fissura, quando estas variam de  $2c$  para  $2c + 2\delta c$ . Em termos da "energia superficial"  $\gamma$ ,  $\delta W$  é dado por:

$$\delta W = 4\gamma\delta c$$

em que  $\gamma$  é característico de cada material.

Sendo  $U$  e  $W$ , funções de  $c$ , o critério (I.2) pode ser colocado na forma:

$$\frac{\partial U}{\partial c} = 4\gamma \quad (I.3)$$

Embora seja esta, a idéia que abriu o caminho da Mecânica da Fratura, e que ainda hoje muito lhe auxilia, apresenta limitações de ordem prática, devido à dificuldade de obtenção de  $\delta U$ . Outra crítica está ligada à passagem ao limite, que conduz à simulação da fissura a partir da degeneração de um furo elíptico: nas extremidades do eixo maior do furo, as tensões  $\sigma_{22}$  são máximas, e dadas por:

$$(\sigma_{22})_{\text{máx}} = 2T (c/\rho)^{1/2} \quad (I.4)$$

onde  $\rho$  é o raio de curvatura nas extremidades do eixo maior [22]. Quando a elipse se degenera na fissura,  $\rho \rightarrow 0$  e então  $\sigma_{22} \rightarrow \infty$ ; o que não é coerente com a hipótese de manutenção do regime elástico durante o processo de fissuração (hipótese implícita na determinação de  $\delta U$ ).

### I.3 - Teoria de Barenblatt

A teoria de Griffith fornece tensões infinitas nas extremidades da fissura, como foi visto há pouco. Mas o pressuposto de que o regime elástico se mantém é falso, e isto é evidenciado pela experiência, mesmo para os materiais mais frágeis.

Barenblatt procurou contornar o problema teórico das tensões infinitas nas extremidades da fissura, seguindo a sequência aqui esboçada, contida bem amplamente em seus traba-

hos [12] e [13].

Supõe uma fissura com faces simétricas em relação a dado plano, num meio elástico linear tridimensional e infinito, carregado simetricamente em relação aquele plano. Na fissura, duas regiões foram consideradas: 1) região interna, com uma sub-região carregada e outra livre; 2) região das extremidades, onde surgem forças coesivas decorrentes da aproximação entre as faces opostas.

Formulou 3 hipóteses coerentes com a experiência, que corresponderiam às exigências de finitude das tensões e de simplificação matemática na resolução do problema.

A finitude das tensões nas extremidades é garantida pela hipótese:

a) as faces de uma fissura sobrepoem-se nos extremos, sem descontinuidade angular, isto é, os planos tangentes às faces superior e inferior nesses pontos, são coincidentes.

As outras duas hipóteses introduzem simplificações matemáticas, e possibilitam a definição de uma constante do material denominada módulo de coesão, que cumpre papel análogo ao da energia superficial específica  $\gamma$ , da teoria de Griffith;

b) a extensão das zonas extremas onde atuam forças

coesivas, é pequena em relação ao diâmetro da fissura;

c) o campo de deslocamentos no entorno das extremidades não depende da carga mas, do material, da temperatura e das condições ambientais em geral.

Posteriormente procurou obter um princípio geral baseado na idéia de finitude de parâmetros, válido para grande variedade de problemas da Mecânica. Por este caminho concluiu por exemplo, que a hipótese (a) decorreria do fato de serem válidos o princípio dos trabalhos virtuais e o teorema de Clapeyron, na Elasticidade Linear. Assim, instituiu um funcional, no qual aparecem parâmetros característicos das fissuras, cuja minimização equivale a um critério de estabilidade de fissuras.

#### I.4 - Modelos Planos com Fissura Retilínea

Na Mecânica da Fratura são usados 3 modelos básicos, idealizados por Irwin, evidenciando o tipo de solicitação externa. Estes modelos admitem implicitamente, singularidades no campo das tensões, decorrentes das descontinuidades assumidas para os deslocamentos.

São os seguintes (vide figura I.1):

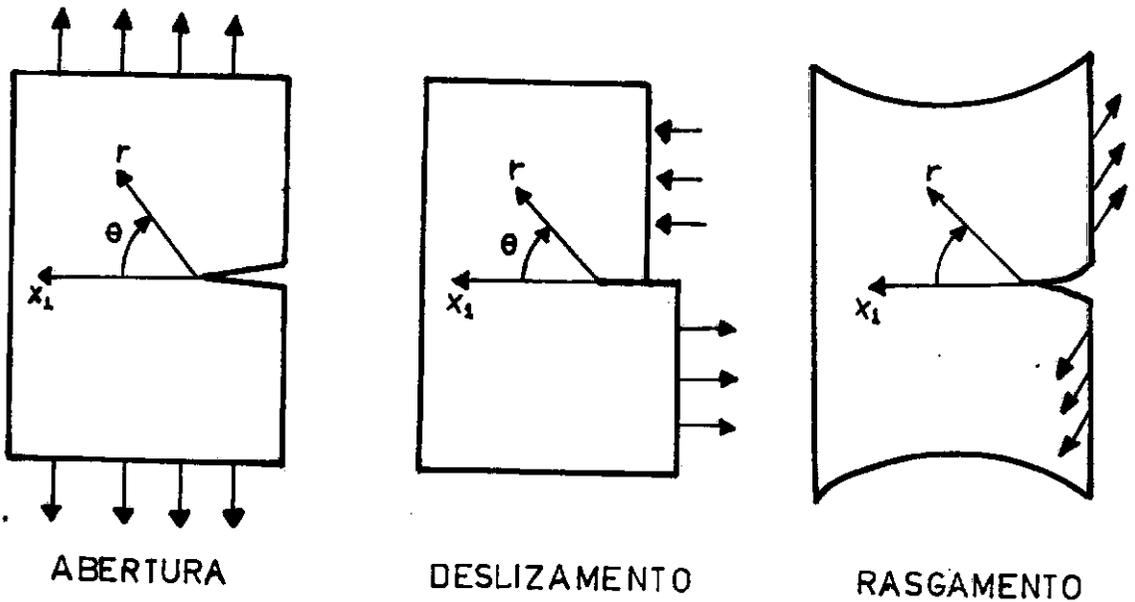


Fig. I.1 - Modelos de Irwin

1. Modelo de Abertura - A fissura tende a se abrir simetricamente em relação à linha onde se situa.
2. Modelo de Deslizamento - as duas faces da fissura tendem a deslizar, uma sobre a outra, em direções opostas mas, sem saírem do plano.
3. Modelo de Rasgamento - as duas faces tendem a sair lateralmente, para fora do plano.

A cada um dos modelos, Irwin associou um fator de intensidade de tensões. Relacionados com a energia dissipada no crescimento da fissura, e derivados do conhecimento da ordem de singularidade das tensões, na vizinhança da extremidade das fis

suras, são assim definidos:

$$K_I = \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} \sigma_{22}(x_1)(2\pi x_1)^{1/2} \quad (\text{modo de abertura})$$

$$K_{II} = \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} \sigma_{12}(x_1)(2\pi x_1)^{1/2} \quad (\text{modo de deslizamento})$$

$$K_{III} = \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} \sigma_{13}(x_1)(2\pi x_1)^{1/2} \quad (\text{modo de rasgamento})$$

( $x_1$  está indicado na figura I.1)

$K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  servem para caracterizar o estado de tensões na vizinhança da extremidade da fissura no plano. Os valores críticos  $K_{IC}$ ,  $K_{IIc}$  e  $K_{IIIc}$  correspondem ao estado em que ocorre brusco crescimento da fissura.

A determinação experimental desses valores críticos pode ser feita por ensaios destrutivos. A segurança da peça fissurada será tanto maior quanto menores forem  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  comparados respectivamente com  $K_{IC}$ ,  $K_{IIc}$  e  $K_{IIIc}$ .

Estudando os modelos IRWIN, SIH e PARIS [20] obtiveram as tensões e deslocamentos, para o caso de placa infinita contendo uma fissura retilínea. As partes singulares destas soluções são as seguintes:

## MODELO 1

Tensões:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos(\theta/2) \begin{Bmatrix} 1 - \text{sen}(\theta/2)\text{sen}(3\theta/2) \\ 1 + \text{sen}(\theta/2)\text{sen}(3\theta/2) \\ \text{sen}(\theta/2)\text{cos}(3\theta/2) \end{Bmatrix} \quad (\text{I.5})$$

Deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2G} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \begin{Bmatrix} \text{cos}(\theta/2) [c - 1 + 2\text{sen}^2(\theta/2)] \\ \text{sen}(\theta/2) [c + 1 - 2\text{cos}^2(\theta/2)] \end{Bmatrix} \quad (\text{I.6})$$

## MODELO 2

Tensões:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \begin{Bmatrix} -\text{sen}(\theta/2) [2 + \text{cos}(\theta/2)\text{cos}(3\theta/2)] \\ \text{sen}(\theta/2)\text{cos}(\theta/2)\text{cos}(3\theta/2) \\ \text{cos}(\theta/2) [1 - \text{sen}(\theta/2)\text{sen}(3\theta/2)] \end{Bmatrix} \quad (\text{I.7})$$

Deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2G} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \begin{Bmatrix} \text{sen}(\theta/2) [c + 1 + 2\text{cos}^2(\theta/2)] \\ -\text{cos}(\theta/2) [c - 1 - 2\text{sen}^2(\theta/2)] \end{Bmatrix} \quad (\text{I.8})$$

## MODELO 3

Tensões:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta/2) \\ \text{cos}(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Deslocamentos:

$$u_3 = \frac{2K_{III}}{G} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \text{sen}(\theta/2) \quad (1.10)$$

onde:

$$\underline{c} = 3-4\nu \quad \text{no caso de estado plano de deformação}$$

$$\underline{c} = (3-\nu)/(1+\nu) \quad \text{no caso de estado plano de tensão}$$

### I.5 - Formas dos Campos de Tensões e Deslocamentos na Vizinhança de Extremidade de Fissura Retilínea

A resolução de problemas da Elasticidade Plana por meio de funções de variável complexa, baseia-se na existência de 2 funções analíticas (potenciais complexos), através das quais as tensões e deslocamentos no domínio podem ser obtidas a partir dos valores prescritos no contorno.

Quando no plano há uma fissura, as faces são consideradas partes do contorno. No caso de ser retilínea, fica a fissura assimilada no modelo matemático plano do problema, a um

corde, onde os deslocamentos sofrem descontinuidade e as tensões são prescritas.

A figura I.2 esquematiza a idealização da fissura cujas faces, superior ( $\theta=+\pi$ ) e inferior ( $\theta=-\pi$ ) estão livres de tensões, isto é,  $\sigma_{22}^+ = \sigma_{22}^- = \sigma_{12}^+ = \sigma_{12}^- = 0$ .

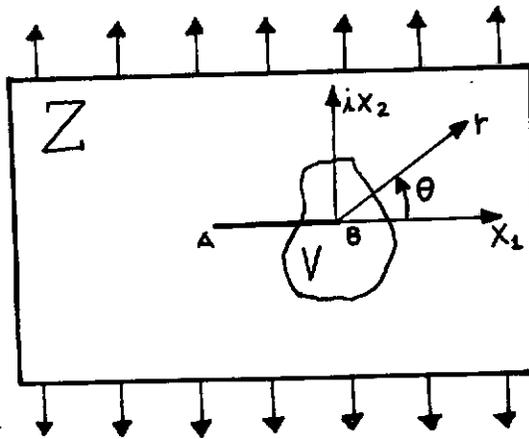


Fig. I.2 - Modelo Matemático Plano

Os pontos do corte AB são indicados pela coordenada real  $t$ , negativa por corresponder a valores negativos de  $x_1$ .

A questão chave é a obtenção dos potenciais complexos, considerando a presença do "corte matemático" AB, da fig. I.2.

De acordo com a teoria desenvolvida por MUSKHELISHVILI em [1]:

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12} = \varphi'(z) + \overline{\Omega'(z)} + (z-\bar{z}) \overline{\varphi'(z)} \quad (I.11)$$

onde

$$\Omega(z) = z \varphi'(z) + \psi(z), \text{ sendo } (.)' = \frac{d}{dz}. \quad (I.12)$$

$\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  são funções analíticas denominadas potenciais complexos, no plano  $z$ .

Como  $\varphi(z)$  e  $\psi(z)$  são analíticas,  $\Omega(z)$  de (I.12), também é analítica.

A condição de anulação das tensões  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{12}$  na fissura, levada em (I.11), conduz a:

$$\varphi'(t)^+ + \overline{\Omega'(t)}^- = 0 \quad (I.13a)$$

$$\varphi'(t)^- + \overline{\Omega'(t)}^+ = 0 \quad (I.13b)$$

Subtraindo (I.13b) de (I.13a), obtem-se:

$$[\varphi'(t) - \overline{\Omega'(t)}]^+ = [\varphi'(t) - \overline{\Omega'(t)}]^- \quad (I.14)$$

Os sinais (+) e (-) caracterizam os limites das funções analíticas quando a aproximação ao "corte" ocorre a partir de  $x_2 > 0$  e  $x_2 < 0$ , respectivamente.

A igualdade (I.14) mostra que em toda vizinhança  $V$  (incluindo pontos de  $AB$ ) da fig. I.2, vale a relação:

$$\varphi'(z) - \overline{\Omega'(z)} = 2g(z) \quad (I.15)$$

onde  $g(z)$  é analítica arbitrária em  $V$ .

Somando (I.13a) a (I.13b), obtem-se a denominada equação de Hilbert:

$$[\varphi'(t) + \bar{\omega}'(t)]^+ + [\varphi'(t) + \bar{\omega}'(t)]^- = 0 \quad (I.16)$$

(observe-se que  $\varphi'(z) + \bar{\omega}'(z) = z^{-1/2}$  é uma solução de I.16, pois  $(t^{-1/2})^+ + (t^{-1/2})^- = 0$ ).

Segundo MUSHELISHVILI [19], a solução de (I.16), para o caso presente, onde é imposta a condição de descontinuidade finita dos deslocamentos, tem a seguinte forma:

$$\varphi'(z) + \bar{\omega}'(z) = 2z^{-1/2} f(z) \quad (I.17)$$

(A notação  $\bar{\omega}(z)$  representa o conjugado de  $\omega(\bar{z})$ , isto é,  $\bar{\omega}(z) = \overline{\omega(\bar{z})}$ .  $f(z)$  é analítica no plano  $z$ ).

Usando (I.12), (I.15) e (I.17), obtem-se  $\varphi'(z)$  e  $\psi'(z)$  em termos das funções analíticas  $f(z)$  e  $g(z)$ . Com isso encontram-se os potenciais complexos  $\varphi(z)$  e  $\psi(z)$  que, substituídos nas combinações fundamentais de tensões e deslocamentos, obtidas por MUSKHELISHVILI [1], resolvem formalmente, o problema fornecendo tensões e deslocamentos:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4\text{Re} [z^{-1/2} f(z) + \overline{g(z)}] \quad (I.18a)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = -4iz^{-1/2}\text{Im}[f(z)] - 4\text{Re}[g(z)] - 4ix_2 \frac{d}{dz} [z^{-1/2} f(z) + g(z)] \quad (\text{I.18b})$$

e

$$G(u_1 + iu_2) = \frac{k+3}{k+1} \int [z^{-1/2} f(z) + g(z)] dz - 2x_1 [z^{-1/2} + g(z)] - \int [\bar{z}^{-1/2} f(\bar{z}) - g(\bar{z})] d\bar{z} + F_1(\bar{z}) + F_2(\bar{z}) \quad (\text{I.18c})$$

onde  $F_1(\bar{z})$  e  $F_2(z)$  são funções analíticas arbitrárias.

$$K = \begin{cases} 2\nu/(1-2\nu) & \text{para estado plano de deformação} \\ 2\nu/(1-\nu) & \text{para estado plano de tensão} \end{cases}$$

Pelo fato de  $f(z)$  e  $g(z)$  serem analíticas em  $Z$ , podendo ser desenvolvidas em séries de potências convergentes, na vizinhança  $V$  da fig. I.2, as equações (I.18a, b) fornecem então as ordens das singularidades de tensões. Verifica-se que  $\bar{e}$  da ordem de  $r^{-1/2}$  (origem dos  $r$  em B). A equação (I.18c) mostra que os deslocamentos que geram tais singularidades, apresentam parcelas do tipo  $r^{1/2}$ .

As equações (I.18 a, b, c) respondem à pergunta sobre singularidade, relativa aos dois primeiros modelos de IRWIN (fig. I.1). Um desenvolvimento mais simples e menos rigoroso pode ser feito para o terceiro modelo, correspondente a deslocamento para fora do plano.

Supõe-se o "corte matemático" feito na seção transversal de um cilindro infinito sujeito a tensões cisalhantes no sentido da geratriz. Tomando o eixo dos  $x_3$  paralelo às geratrizes, somente não se anulam  $u_3$ ,  $\sigma_{13}$  e  $\sigma_{23}$ . Supondo nulas as forças de massa (o que não afeta a generalidade do problema), as equações de equilíbrio são satisfeitas identicamente, a menos da seguinte:

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = 0 \quad (I.19)$$

Como:

$$\sigma_{13} = G u_{3,1} \quad e \quad \sigma_{23} = G u_{3,2} \quad (I.20)$$

então:

$$u_{3,11} + u_{3,22} = 0 \quad (I.21)$$

Desde que  $u_3(x_1, x_2)$  real, é harmônica, há uma função complexa  $f(z) = u_3 + iw$ , onde  $w$  também é harmônica e dita conjugada de  $u_3$ .

A solução de (I.21) pode ser obtida de modo mais amplo, no plano complexo, em termos de  $f(z)$ , que por ser analítica pode ser desenvolvida em séries de potências com coeficientes a determinar.

Aqui só interessa a ordem de singularidade da parte real de  $f(z)$ , isto é,  $u_3$  - deslocamento para fora do plano.

Será usado um método do tipo semi-inverso, para pesquisar a natureza da parcela de  $f(z)$ , responsável pela descontinuidade do deslocamento  $u_3$ . Seja:

$$f_p(z) = -i A z^p = A r^p (\cos p\theta + i \operatorname{sen} p\theta) \quad (I.22)$$

onde  $A$  é constante real,  $p$  racional; e  $f_p$ , termo do desenvolvimento de  $f(z)$ . Supõe-se que os demais termos sejam funções analíticas em todo o domínio. Para simular a descontinuidade de deslocamento,  $p$  não pode ser inteiro. Também não pode ser fração negativa porque isto leva a deslocamentos infinitos quando  $r$  for nulo. Por outro lado, para garantir a condição de descontinuidade de  $u_3$  no "corte", tem que ocorrer a condição:

$$u_3(r, \pi) = -u_3(r, -\pi) \quad (I.23)$$

que só ocorre quando  $p = \frac{1}{2}$ . Segue que:

$$f(z) = -i A z^{1/2} \quad (I.24)$$

e em consequência:

$$u_3 = \operatorname{Re}[f(z)] = A r^{1/2} \operatorname{sen}(\theta/2) \quad (I.25)$$

Usando (I.20), e as condições de Cauchy-Riemann\* para  $f(z)$ , tem-se:

---

\* As condições de Cauchy-Riemann são atendidas pelas funções analíticas. No caso de  $f(z) = u_3 + iw$ , são elas:

$$u_{3,1} = w_{,2} \quad \text{e} \quad u_{3,2} = -w_{,1}$$

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= u_{3,1} + iw_{,1} = u_{3,1} - iu_{3,2} = \\
 &= [\sigma_{13} - i\sigma_{23}]/G
 \end{aligned}
 \tag{I.27}$$

Substituindo  $f(z)$  de (I.22) em (I.27), são obtidas as tensões:

$$\sigma_{13} = -[A G r^{-1/2} \text{sen}(\theta/2)]/2
 \tag{I.28}$$

$$\sigma_{23} = [A G r^{-1/2} \text{cos}(\theta/2)]/2
 \tag{I.29}$$

Vê-se pois que, para o modelo de rasgamento, a singularidade das tensões é da ordem de  $r^{-1/2}$ , e os deslocamentos apresentam-se com um termo da ordem  $r^{1/2}$ , como ocorre nos dois outros modelos de Irwin (ver Seção I.4).

No modelo de elementos finitos híbridos, desenvolvido nos outros capítulos, as funções de interpolação das tensões e dos deslocamentos apresentam parcelas com as singularidades obtidas em (I.18 a, b, c), (I.27), (I.28) e (I.29).

CAPÍTULO IIMÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA MECÂNICA DA  
FRATURAII.1 - Considerações Gerais

As vantagens do Método dos Elementos Finitos (MEF) aplicado à Mecânica da Fratura, decorrem da grande dificuldade no tratamento matemático de problemas que envolvem distribuições pouco regulares das fissuras.

O primeiro recurso do MEF explorado, é o refinamento da malha próximo às extremidades das fissuras. Assim, calcula-se a abertura a uma distância regulamentar das extremidades.

Expressões empíricas dão a relação entre dada abertura (denominada CRACK OPENING DISPLACEMENT - COD), e os valores críticos dos fatores de intensidade de tensões. A precisão dos resultados não é boa, mesmo para o caso simples de uma só fissura no domínio.

Outro recurso do MEF começa a ser explorado. Tra-

ta-se da construção de funções de interpolação com parcelas características do problema mais simples de Mecânica da Fratura. Assim, o tipo de comportamento dos deslocamentos e tensões conhecidos para o problema mais simples é "a priori", admitido nos elementos que tem como vértice comum, uma extremidade de fissura.

BISKOV [23] desenvolveu um modelo não-conforme de deslocamentos usando funções de interpolação a variável complexa. Obteve bom resultado só para o caso simples de uma fissura retilínea numa placa em estado plano.

PIAN [24] solucionou a questão implícita da não-compatibilidade entre elementos, usando o modelo híbrido de tensões, por ele mesmo já desenvolvido para problemas de cascas. ATLURI [25], inspirado em Pian, desenvolveu o modelo híbrido de deslocamentos, aplicando-o também com sucesso à Mecânica da Fratura. Mas a idéia de Atluri já constitui certa evolução, por facilitar a prescrição de tensões e deslocamentos nos contornos dos elementos.

Neste capítulo discute-se o modelo híbrido de deslocamentos de uma maneira bem geral (Seção II.2), partindo-se daí para a elaboração do modelo plano geral adequado à resolução de problemas da Mecânica da Fratura (Seção II.3).

## II.2 - Funcional Híbrido - Deslocamentos Relaxados entre Elementos

Consta da energia potencial total mais certas parcelas responsáveis pela relaxação dos deslocamentos no contorno, através da introdução de multiplicadores de Lagrange.

A extremização desse funcional, como será visto, conduz a uma solução que atende às equações de equilíbrio dentro de cada elemento; e garante a continuidade de deslocamentos entre elementos vizinhos, mesmo que tenham sido interpolados independentemente no interior e no contorno de cada elemento.

No caso geral, para meios elásticos, o funcional do modelo híbrido de deslocamentos é o seguinte:

$$\begin{aligned} \pi_{HD}(\underline{u}, \underline{v}, \underline{t}_L) = \sum_m \left\{ \int_{V_m} \left( \frac{1}{2} E_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - \bar{F}_i u_i \right) dV + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_m^*} t_{L_i} (v_i - u_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma_m}} \bar{T}_i v_i d\Gamma \right\} \quad (II.1) \end{aligned}$$

(Vale a somação nos índices  $i, j, k, \ell = 1, 2, 3$ ; de (II.1), inclusive, em diante).

O somatório indica que foi feita uma sub-divisão anterior do domínio, sendo o funcional  $\pi_{HD}$  a soma das contribuições de todos os elementos. O  $m$ -ésimo elemento ocupa a região

$V_m$ , limitada pelo contorno  $\Gamma_m$ . A parte do contorno do elemento onde hã tensões prescritas é  $\Gamma_{\sigma_m}$ . Em  $\Gamma_{u_m}$  são prescritos deslocamentos.  $\Gamma_m^* = \Gamma_m - \Gamma_{\sigma_m} - \Gamma_{u_m}$ ,  $u_i$  são deslocamentos diferenciáveis no interior mas não necessariamente contínuos na fronteira do elemento.  $v_i$  são deslocamentos de contorno, contínuos em  $\Gamma_m^*$ .  $v_i = u_i$  em  $\Gamma_{u_m} + \Gamma_{\sigma_m}$  por imposição.  $\bar{T}_i$  são tensões prescritas no contorno e  $t_{L_i}$ , multiplicadores de Lagrange.  $\bar{F}_i$  são forças de massa.  $\epsilon_{ij}$  são as deformações em  $v_m$  derivadas de  $u_i$ , e dadas por:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{II.2})$$

Fazendo a variação de (II.1) com relação as variações independentes  $\delta u_i$ ,  $\delta v_i$  e  $\delta t_{L_i}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \delta \pi_{HD} = & \sum_m \left\{ \int_{V_m} \left[ \frac{1}{2} (E_{ijkl} \epsilon_{kl} \delta \epsilon_{ij} + E_{ijkl} \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{kl}) - \right. \right. \\ & - \bar{F}_i \delta u_i \left. \right] dV + \int_{\Gamma_m^*} t_{L_i} (\delta v_i - \delta u_i) d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_m^*} (v_i - u_i) \delta t_{L_i} d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma_m}} \bar{T}_i \delta v_i d\Gamma \left. \right\} \quad (\text{II.3}) \end{aligned}$$

Levando-se em conta, primeiro que  $E_{ijkl} = E_{klij}$ , e depois que  $\delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [(\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i}]$ , substituindo em (II.3):

$$\begin{aligned}
\delta\pi_{HD} = & \sum_m \left\{ \int_{V_m} \left( \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \left[ (\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i} \right] - \right. \right. \\
& - \bar{F}_i \delta u_i \Big) dV + \int_{\Gamma_m^*} t_{L_i} (\delta v_i - \delta u_i) d\Gamma + \\
& \left. + \int_{\Gamma_m^*} \delta t_{L_i} (v_i - u_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma_m}} \bar{T}_i \delta v_i d\Gamma \right\} \quad (II.4)
\end{aligned}$$

Levando-se em conta em (II.4) que:

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

e aplicando o teorema da divergência à primeira parcela da primeira integral do segundo membro, então:

$$\begin{aligned}
& \int_{V_m} \left( \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \left[ (\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i} \right] - \bar{F}_i \delta u_i \right) dV = \\
& = - \int_{V_m} \left[ \sigma_{ij,j} + \bar{F}_i \right] \delta u_i dV + \int_{\Gamma_m} T_i \delta u_i d\Gamma \quad (II.5)
\end{aligned}$$

onde  $T_i$  são tensões derivadas de deslocamentos, no contorno  $\Gamma_m$ , dadas por:

$$T_i = \sigma_{ij} v_j = \frac{1}{2} E_{ijkl} (u_{i,j} + u_{j,i}) v_j$$

( $v_j$  - co-senos diretores da normal externa em  $\Gamma_m$ )

Substituindo (II.5) em (II.4) e rearrumando adequadamente, tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta\pi_{HD} = & \sum_m \{ - [ (\sigma_{ij,j} + F_i) \delta u_i dV + \int_{\Gamma_m^*} (\bar{T}_i - t_{L_i}) \delta u_i d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_m^*} (v_i - u_i) \delta t_{L_i} d\Gamma + \int_{\Gamma_{u_m}} (T_i \delta u_i - t_{L_i} \delta v_i) d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_{\sigma_m}} (T_i \delta u_i - \bar{T}_i \delta v_i) d\Gamma \} \quad (II.6)
\end{aligned}$$

O princípio de extremo  $\delta\pi_{HD} = 0$ , garante que:

a) sendo os  $\delta u_i$  arbitrários em  $V_m$ :

$$\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i = 0 \quad \text{em } V_m \quad (II.7)$$

$$t_{L_i} = T_i \quad \text{em } \Gamma_m^* \quad (II.8)$$

b) Sendo os  $\delta t_{L_i}$ , arbitrário em  $\Gamma_{\sigma_m}$ :

$$u_i = v_i \quad \text{em } \Gamma_m^* \quad (II.9)$$

c) Sendo  $u_i = v_i$  em  $\Gamma_{u_m} + \Gamma_{\sigma_m}$ , logo  $\delta u_i = \delta v_i$ . Daí:

$$T_i = \bar{T}_i \quad \text{em } \Gamma_{\sigma_m} \quad (II.10)$$

$$T_i \delta u_i = t_{L_i} \delta v_i = 0, \quad \text{em } \Gamma_{u_m}$$

As relações (II.7), (II.8), (II.9) e (II.10) são pois, condições necessárias para o cumprimento do princípio de

extremo  $\delta\pi_{HD} = 0$ , daí derivando as seguintes observações sobre o modelo híbrido de deslocamentos:

1) Os deslocamentos  $u_i$  em  $V_m$ , geram tensões  $\sigma_{ij} = \frac{1}{2} E_{ijkl}(u_{i,j} + u_{j,i})$ , equilibradas no interior do elemento;

2) Os multiplicadores de Lagrange  $t_{L_i}$  se identificam com as tensões  $T_i = \frac{1}{2} E_{ijkl}(u_{i,j} + u_{j,i})v_j$ , geradas por  $u_i$  em  $\Gamma_m^*$ ;

3) Os  $t_{L_i}$  não necessitam ser prescritos em qualquer parte do contorno.

4) Embora independentemente assumidos,  $u_i$  e  $v_i$  coincidem em  $\Gamma_m$  desde que, em  $\Gamma_{u_m} + \Gamma_{\sigma_m}$ ,  $u_i$  e  $v_i$  assumam os mesmos valores. Isto equivale a garantir a conformidade do modelo, pois  $u_i = v_i$  na fronteira comum de dois elementos implica na continuidade de  $u_i$  no domínio total discretizado.

O modelo híbrido de deslocamentos, é adequado aos problemas de fratura porque dá grande liberdade na interpolação: dos deslocamentos no interior e contorno; e dos multiplicadores de Lagrange no contorno. É possível pois, a adoção de elementos especiais, sã colocados na vizinhança de extremidades de fissuras,

sem qualquer problema de compatibilidade nas fronteiras com os demais elementos.

Os passos para a resolução do problema plano de fratura com auxílio do modelo híbrido de deslocamentos, são os seguintes:

1) O domínio é discretizado em elementos regulares e singulares, situando-se cada extremidade de fissura, num vértice comum de elementos singulares;

2) Para os  $u_i$ ,  $v_i$  e  $t_{L_i}$ , nos elementos regulares, as funções de interpolação são regulares, tais como polinômios. Os  $u_i$  são interpolados no interior de cada elemento. Os  $v_i$  e  $t_{L_i}$  são interpolados no contorno;

3) No caso de elementos singulares, as funções de interpolação dos  $u_i$  devem conter parcelas tipo  $r^{1/2}$ , característica do problema mais simples da Mecânica da Fratura (ver Seção I.5), sendo  $r$  a distância à extremidade da fissura;

4) Os  $v_i$ , no contorno de elementos singulares, devem ser interpolados por funções com parcelas tipo  $s^{1/2}$ , onde  $s$  é a coordenada do contorno com origem na extremidade da fissura;

5) Os  $t_{L_i}$ , por serem assimilados a tensões no contorno, são também interpolados por funções contendo parcelas tipo

$s^{-1/2}$ , conforme as conclusões da Seção I.5;

6) A prescrição de deslocamentos em  $\Gamma_{u_m}$ , para elementos regulares ou singulares, tem que ser feita, tanto para os  $u_i$  quanto para os  $v_i$ , com  $u_i = v_i$  obrigatoriamente. Os  $t_{L_i}$  não são prescritos em qualquer ponto.

### II.3 - Modelo Híbrido de Deslocamentos Particularizado para Problemas Planos de Fratura

No caso de problemas planos, o funcional (II.1) fica:

$$\begin{aligned} \pi_{HD} = \sum_m e \left\{ \int_{S_m} \left( \frac{1}{2} E_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - \bar{F}_i u_i \right) dS + \right. \\ \left. + \int_{\partial S_m^*} t_{L_i} (v_i - u_i) ds - \int_{s_{\sigma_m}} \bar{T}_i v_i ds \right\} \quad (II.11) \end{aligned}$$

em que:

$e$  - espessura constante da placa plana;

$S_m$  - região da superfície média da placa correspondente ao elemento  $m$ ;

$\partial S_m^*$  - contorno de  $S_m^*$  sem deslocamentos prescritos;

$s_{\sigma_m}$  - parte de  $\partial S_m^*$  onde as tensões são prescritas

(Vale sempre a somação em  $i, j = 1, 2$ )

As parcelas da forma  $E_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}$ , para o caso de

material elástico linear isotrópico, podem ser colocadas em forma mais simples, levando-se em conta as simetrias de  $E_{ijkl}$ ,  $\epsilon_{ij}$  e  $\sigma_{ij}$ . Fica então:

$$E_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} = \underline{\epsilon}^T \underline{E} \underline{\epsilon} \quad (\text{II.12})$$

onde  $\underline{\epsilon}$  é o vetor das deformações no plano, dado por:

$$\underline{\epsilon}^T = [\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{12}] \quad (\text{II.13})$$

Para o estado plano de deformações:

$$\underline{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

(No caso de estado plano de tensões basta substituir  $\nu$  por  $\nu/(1+\nu)$  e  $E$  por  $E(1+2\nu)/(1+\nu)^2$ ).

Fazendo:

$$\underline{u}^T = [u_1 \quad u_2] \quad - \text{deslocamentos em } S_m \quad (\text{II.15a})$$

$$\underline{v}^T = [v_1 \quad v_2] \quad - \text{deslocamentos em } \partial S_m \quad (\text{II.15b})$$

$$\underline{t}_L^T = [t_{L1} \quad t_{L2}] \quad - \text{multiplicadores de Lagrange} \\ \text{em } \partial S_m \quad (\text{II.15c})$$

e substituindo em (II.11), tem-se:

$$\begin{aligned} \pi_{HD} = & \sum_{m=1}^q e \left\{ \int_{S_m} \left( \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{E} \underline{\varepsilon} - \underline{u}^T \underline{F} \right) dS + \right. \\ & \left. + \int_{\partial S_m} (\underline{v}^T - \underline{u}^T) \underline{t}_L ds - \int \underline{v}^T \underline{T} ds \right\} \quad (II.16) \end{aligned}$$

onde  $\underline{F}^T = \begin{bmatrix} \underline{F}_1 & \underline{F}_2 \end{bmatrix}$  - forças de massa (II.17a)

e  $\underline{T}^T = \begin{bmatrix} \underline{T}_1 & \underline{T}_2 \end{bmatrix}$  - tensões prescritas em  $s\sigma_m$  (II.17b)

Para melhor evidenciar os dois tipos de elementos - regular e singular - a serem considerados, o somatório em (II.16) será quebrado em duas partes: uma correspondente a elementos regulares ( $\underline{m}$  de  $\underline{l}$  a  $\underline{p}$ ), e outra correspondente a elementos singulares ( $\underline{m}$  de  $\underline{p}+1$  a  $\underline{q}$ ).

O vetor  $\underline{\varepsilon}$ , definido em (II.13), equivale a:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{u} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \frac{1}{2} \partial/\partial x_2 & \frac{1}{2} \partial/\partial x_1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} \quad (II.18)$$

No caso dos elementos regulares, os deslocamentos são interpolados por:

$$\underline{u} = \underline{A} \underline{a} + \underline{A}_0 \underline{a}_0 \quad (II.19)$$

$$\underline{v} = \underline{B} \underline{v}_N \quad (\text{II.20})$$

E os multiplicadores de Lagrange por:

$$\underline{t}_L = \underline{C} \underline{t}_N \quad (\text{II.21})$$

As matrizes  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  e  $\underline{C}$  são constituídas de termos regulares, funções polinomiais das coordenadas locais do elemento.  $\underline{A}_0$  corresponde aos deslocamentos de corpo rígido (ver Apêndice).

No caso dos elementos singulares, os deslocamentos são interpolados por:

$$\underline{u} = \underline{U} \underline{\alpha} + \underline{U}_0 \underline{\alpha}_0 \quad (\text{II.22})$$

$$\underline{v} = \underline{V} \underline{v}_N \quad (\text{II.23})$$

$$\underline{t}_L = \underline{C}_R \underline{t}_N + \underline{C}_s \underline{\gamma}_s \quad (\text{II.24})$$

A matriz  $\underline{U}$  envolve alguns termos do tipo  $r^{1/2}$ . A matriz  $\underline{V}$  envolve alguns do tipo  $s^{1/2}$ .  $\underline{C}_R$  é constituída de termos regulares. E  $\underline{C}_s$  envolve termos do tipo  $s^{-1/2}$ .  $\underline{U}_0$  corresponde aos deslocamentos de corpo rígido (ver Apêndice).

Os vetores  $\underline{a}$  e  $\underline{\alpha}$  são constituídos de parâmetros livres, sem significado físico definido.  $\underline{v}_N$  representa deslocamentos nodais no contorno do elemento.  $\underline{t}_N$  são valores nodais dos multi-

plicadores de Lagrange, no contorno. E  $\underline{\gamma}_s$  é dado por:

$$\underline{\gamma}_s = \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix}$$

onde  $K_I$  e  $K_{II}$  são os fatores de intensidade de tensões dos modelos de abertura e deslizamento, respectivamente (ver Seção I.4).

Introduzindo as relações (II.15a,b) até (II.24) no funcional (II.16), e subdividindo o somatório:

$$\begin{aligned} \pi_{HD} = & \sum_{m=1}^p e \left\{ \frac{1}{2} \underline{a}^T \underline{K}_1 \underline{a} - \underline{a}^T \underline{f}_1 + (\underline{v}_N^T \underline{H} - \underline{a}^T \underline{G}) \underline{t}_N - \right. \\ & \left. \underline{v}_N^T \underline{g}_1 \right\} + \sum_{m=p+1}^q e \left\{ \frac{1}{2} \underline{\alpha}^T \underline{K}_2 \underline{\alpha} - \underline{\alpha}^T \underline{f}_2 + \right. \\ & \left. + (\underline{v}_N^T \underline{H}_R - \underline{\alpha}^T \underline{G}_R) \underline{t}_N + (\underline{v}_N^T \underline{H}_s - \underline{\alpha}^T \underline{G}_s) \underline{\gamma}_s - \right. \\ & \left. - \underline{v}_N^T \underline{g}_2 \right\} \end{aligned} \quad (II.25)$$

onde:

$$\underline{K}_1 = \int_{S_m} (\underline{D} \underline{A})^T \underline{E} \underline{D} \underline{A} \, ds$$

$$\underline{K}_2 = \int_{S_m} (\underline{D} \underline{U})^T \underline{E} \underline{D} \underline{U} \, ds$$

$$\underline{G} = \int_{\partial S_m} \underline{A}^T \underline{C} \, ds \quad \underline{G}_R = \int_{\partial S_m} \underline{U}^T \underline{C}_R \, ds$$

$$\underline{G}_s = \int_{\partial S_m} \underline{U}^T \underline{C}_s \, ds$$

$$\underline{H} = \int_{\partial S_m} \underline{B}^T \underline{C} \, ds \qquad \underline{H}_R = \int_{\partial S_m} \underline{V}^T \underline{C}_R \, ds$$

$$\underline{H}_s = \int_{\partial S_m} \underline{V}^T \underline{C}_s \, ds$$

$$\underline{f}_1 = \int_{S_m} \underline{B}^T \underline{\bar{F}} \, dS \qquad \underline{f}_2 = \int_{S_m} \underline{V}^T \underline{\bar{F}} \, dS$$

$$\underline{g}_1 = \int_{s\sigma_m} \underline{B}^T \underline{\bar{T}} \, ds \qquad \text{e} \qquad \underline{g}_2 = \int_{s\sigma_m} \underline{V}^T \underline{\bar{T}} \, ds$$

Tendo em conta que  $\underline{a}$  é restrito somente ao interior de cada elemento do mesmo modo, que os  $\underline{\alpha}$ ; então podem ser explicitados via extremização do funcional (II.25), resultando em:

$$\underline{K}_1 \underline{a} - \underline{f}_1 - \underline{G} \underline{t}_N = \underline{0} \quad \implies$$

$$\implies \underline{a} = \underline{K}_1^{-1} (\underline{f}_1 + \underline{G} \underline{t}_N), \quad (\text{II.26})$$

para cada elemento regular ( $m = \underline{1}$  até  $\underline{p}$ ). E:

$$\underline{K}_2 \underline{\alpha} - \underline{f}_2 - \underline{G}_R \underline{t}_N - \underline{G}_s \underline{\gamma}_s = \underline{0} \quad \implies$$

$$\implies \underline{\alpha} = \underline{K}_2^{-1} (\underline{f}_2 + \underline{G}_R \underline{t}_N + \underline{G}_s \underline{\gamma}_s), \quad (\text{II.27})$$

para cada elemento singular ( $m = \underline{p+1}$  até  $\underline{q}$ ).

Substituindo  $\underline{a}$  e  $\underline{\alpha}$  em (II.25):

$$\begin{aligned}
 \pi_{HD} = & \sum_{m=1}^p e\left\{-\frac{1}{2}\left[\underline{d}_1 + \underline{t}_N^T(2\underline{p}_1 + \underline{Q}^T \underline{t}_N)\right] + \right. \\
 & + \underline{v}_N^T(\underline{H} \underline{t}_N - \underline{g}_1)\left.\right\} + \sum_{m=p+1}^q e\left\{-\frac{1}{2}\left[\underline{d}_2 + \right. \right. \\
 & + \underline{t}_N^T(2\underline{p}_2 + \underline{Q}_R \underline{t}_N + \underline{Q}_{RS} \underline{y}_s)\left.\right] + \\
 & + \underline{v}_N^T(\underline{H}_R \underline{t}_N + \underline{H}_s \underline{y}_s - \underline{g}_2) - \frac{1}{2} \underline{y}_s^T(2\underline{p}_3 + \\
 & + \underline{Q}_{RS}^T + \underline{Q}_{SS} \underline{y}_s)\left.\right\} \quad (II.28)
 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \underline{d}_1 &= \underline{f}_1^T \underline{K}_1^{-1} \underline{f}_1 & \underline{d}_2 &= \underline{f}_2^T \underline{K}_2^{-1} \underline{f}_2 \\
 \underline{p}_1 &= \underline{G}^T \underline{K}_1^{-1} \underline{f}_1 & \underline{p}_2 &= \underline{G}_R^T \underline{K}_2^{-1} \underline{f}_2 \\
 \underline{p}_3 &= \underline{G}_s^T \underline{K}_2^{-1} \underline{f}_2 \\
 \underline{Q} &= \underline{G} \underline{K}_1^{-1} \underline{G}^T & \underline{Q}_R &= \underline{G}_R^T \underline{K}_2^{-1} \underline{G}_R \\
 \underline{Q}_{RS} &= \underline{G}_R^T \underline{K}_2^{-1} \underline{G}_s & \underline{Q}_{SS} &= \underline{G}_s^T \underline{K}_2^{-1} \underline{G}_s
 \end{aligned}$$

Somando as contribuições de todos os elementos, em nível de sistema global (II.28) fica:

$$\begin{aligned}
\pi_{HD} = e\{ & -\frac{1}{2} \underline{t}_N^{*T} [2\underline{p}_1^* + \underline{Q}^{*T} \underline{t}_N^* + 2\underline{p}_2^* + \underline{Q}_R^* \underline{t}_N^* + \\
& + \underline{Q}_{Rs}^* \underline{\gamma}_s^*] + \underline{v}_N^{*T} [\underline{H}_N^* \underline{t}_N^* - \underline{q}_1^* + \underline{H}_R^* \underline{t}_N^* + \underline{H}_s^* \underline{\gamma}_s^* - \\
& - \underline{q}_2^*] - \frac{1}{2} \underline{\gamma}_s^{*T} [2\underline{p}_3^* + \underline{Q}_{Rs}^* \underline{t}_N^* + \underline{Q}_{ss}^* \underline{\gamma}_s^*] - \frac{1}{2} (d_1^* + d_2^*) \}
\end{aligned}$$

(II.28)

onde  $-(*)$ - refere-se a sistema global.

Adicionando a  $\pi_{HD}$ , em (II.28), a contribuição  $\pi_{HD_0}$  devida aos deslocamentos rígidos, obtida no Apêndice A; e aplicando o princípio de extremo expresso por:

$$\delta(\pi_{HD} + \pi_{HD_0}) = 0,$$

tem-se afinal o sistema de equações lineares:

$$2(\underline{H}_N^* + \underline{H}_R^*) \underline{t}_N^* + 2\underline{H}_s^* \underline{\gamma}_s^* = 2(\underline{q}_1^* + \underline{q}_2^*)$$

$$2(\underline{H}_N^* + \underline{H}_R^*)^T \underline{v}_N^* - (\underline{Q}^* + \underline{Q}_R^*)^T \underline{t}_N^* - \underline{Q}_{Rs}^* \underline{\gamma}_s^* = \underline{p}_1^* + \underline{p}_2^*$$

$$2\underline{H}_s^{*T} \underline{v}_N^* - \underline{Q}_{Rs}^{*T} \underline{t}_N^* - \underline{Q}_{ss}^* \underline{\gamma}_s^* = \underline{p}_3^*$$

ou melhor:

$$\begin{bmatrix}
 \underline{Q} & 2(\underline{H}^* + \underline{H}_R^*) & 2\underline{H}_S^* \\
 2(\underline{H}^* + \underline{H}_R^*)^T & -(\underline{Q}^* + \underline{Q}_R^*)^T & -\underline{Q}_{RS}^* \\
 2\underline{H}_S^{*T} & -\underline{Q}_{RS}^{*T} & -\underline{Q}_{SS}^*
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \underline{v}_N^* \\
 \underline{t}_N^* \\
 \underline{\gamma}_S^*
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 2(\underline{g}_1^* + \underline{g}_2^*) \\
 \underline{p}_1^* + \underline{p}_2^* \\
 \underline{p}_3^*
 \end{Bmatrix}
 \quad (\text{II.29})$$

A resolução de (II.29) fornece os valores nodais de deslocamento ( $\underline{v}_N^*$ ), tensões ( $\underline{t}_N^*$ ), e fatores de intensidade de tensões ( $\underline{\gamma}_S^*$ ) correspondentes às fissuras colocadas no domínio.

CAPÍTULO IIIMODELOS DE ELEMENTOS FINITOS PROPOSTOS

Serã feita a particularização do desenvolvimento do capítulo anterior, para dois tipos de elementos - regular e singular - de forma retangular com três nós por lado (fig. III. 1). Uma questão, referente às componentes de deslocamento rígi do dos  $u_i$ , será discutida em Apêndice.

III.1 - Elemento Regular

Os deslocamentos no interior do elemento são interpolados por meio de polinômios completos em  $x_1$  e  $x_2$ :

$$u_1 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_1 + (a_{01} x_2 + a_{02})$$

$$u_2 = a_5 x_1^2 + a_6 x_2^2 + a_7 x_1 x_2 + a_8 x_2 + (-a_{01} x_1 + a_{03})$$

(III.1)

onde as partes entre parênteses correspondem a componentes rígi das de rotação e translação, que não serão consideradas por con veniência, para efeito de organização das matrizes. Esse proble ma é discutido no Apêndice.

Em forma matricial (III.1) fica:

$$\underline{u} = \underline{A} \underline{a} + \underline{A}_0 \underline{a}_0 \quad (\text{III.2})$$

onde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_1 x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_1 x_2 & x_2 \end{bmatrix}$$

e

$$\underline{A}_0 = \begin{bmatrix} x_2 & 1 & 0 \\ -x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sõ a matriz  $\underline{A}$  serã considerada inicialmente.

Os deslocamentos no contorno sã interpolados, em cada lado do elemento, com o auxílio das seguintes funções quadráticas:

$$\psi_1(s, L) = 2\left(\frac{s}{L}\right)^2 - 3\left(\frac{s}{L}\right) + 1$$

$$\psi_2(s, L) = -4\left(\frac{s}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{s}{L}\right) \quad (\text{III.3})$$

$$\psi_3(s, L) = 2\left(\frac{s}{L}\right)^2 - \frac{s}{L}$$

onde  $L$  ẽ o comprimento do lado no qual a interpolação estã sendo feita, e  $0 \leq s \leq L$ .

Tem-se entãõ:

Lado ABC (origem dos  $s$  em A):

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(s,a) & 0 & \psi_2(s,a) & 0 & \psi_3(s,a) & 0 \\ 0 & \psi_1(s,a) & 0 & \psi_2(s,a) & 0 & \psi_3(s,a) \end{bmatrix} \{ \underline{v}_N \}$$

(III.4)

onde  $\underline{v}_N$  são os deslocamentos nodais em ABC, isto é:

$$\underline{v}_N^T = [v_{N1} \quad v_{N2} \quad v_{N3} \quad v_{N4} \quad v_{N5} \quad v_{N6}]$$

Lado CEH (origem dos  $s$  em C):

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \psi_1(s,b) & 0 & \psi_2(s,b) & 0 & \psi_3(s,b) \\ -\psi_1(s,b) & 0 & -\psi_2(s,b) & 0 & -\psi_3(s,b) & 0 \end{bmatrix} \{ \underline{v}_N \}$$

(III.5)

onde  $\underline{v}_N$  são os deslocamentos nodais em CEH, isto é:

$$\underline{v}_N^T = [v_{N5} \quad v_{N6} \quad v_{N9} \quad v_{N10} \quad v_{N15} \quad v_{N16}]$$

Lado HGF (origem dos  $s$  em H):

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi_1(s,a) & 0 & -\psi_2(s,a) & 0 & -\psi_3(s,a) & 0 \\ 0 & -\psi_1(s,a) & 0 & -\psi_2(s,a) & 0 & -\psi_3(s,a) \end{bmatrix} \{ \underline{v}_N \}$$

(III.6)

onde  $\underline{v}_N^T = \begin{bmatrix} v_{N15} & v_{N16} & v_{N13} & v_{N14} & v_{N11} & v_{N12} \end{bmatrix}$

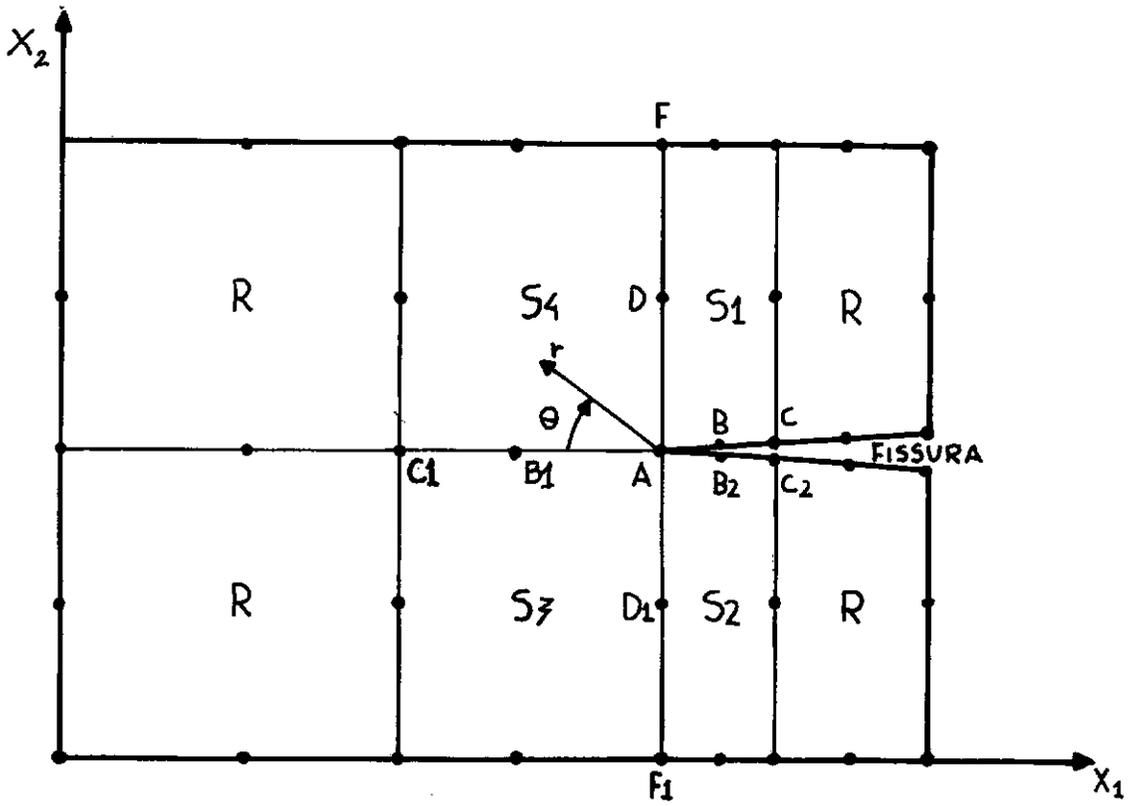
Lado FDA (origem dos s em F):

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\psi_1(s,b) & 0 & -\psi_2(s,b) & 0 & -\psi_3(s,b) \\ \psi_1(s,b) & 0 & \psi_2(s,b) & 0 & \psi_3(s,b) & 0 \end{bmatrix} \{ \underline{v}_N \}$$

(III.7)

onde  $\underline{v}_N^T = \begin{bmatrix} v_{N11} & v_{N12} & v_{N7} & v_{N8} & v_{N1} & v_{N2} \end{bmatrix}$

Os multiplicadores de Lagrange  $t_{L_i}$  são interpolados também com auxílio das funções (III.3), em termos dos valores nodais  $\underline{t}_N$ . Tanto quanto os  $\underline{v}_N$ , os  $\underline{t}_N$  seguem a mesma convenção da fig. III.1b. Portanto suas interpolações nos lados, são análogos às de (III.4), (III.5), (III.6) e (III.7).



a-DISTRIBUIÇÃO DE ELEMENTOS REGULARES E SINGULARES

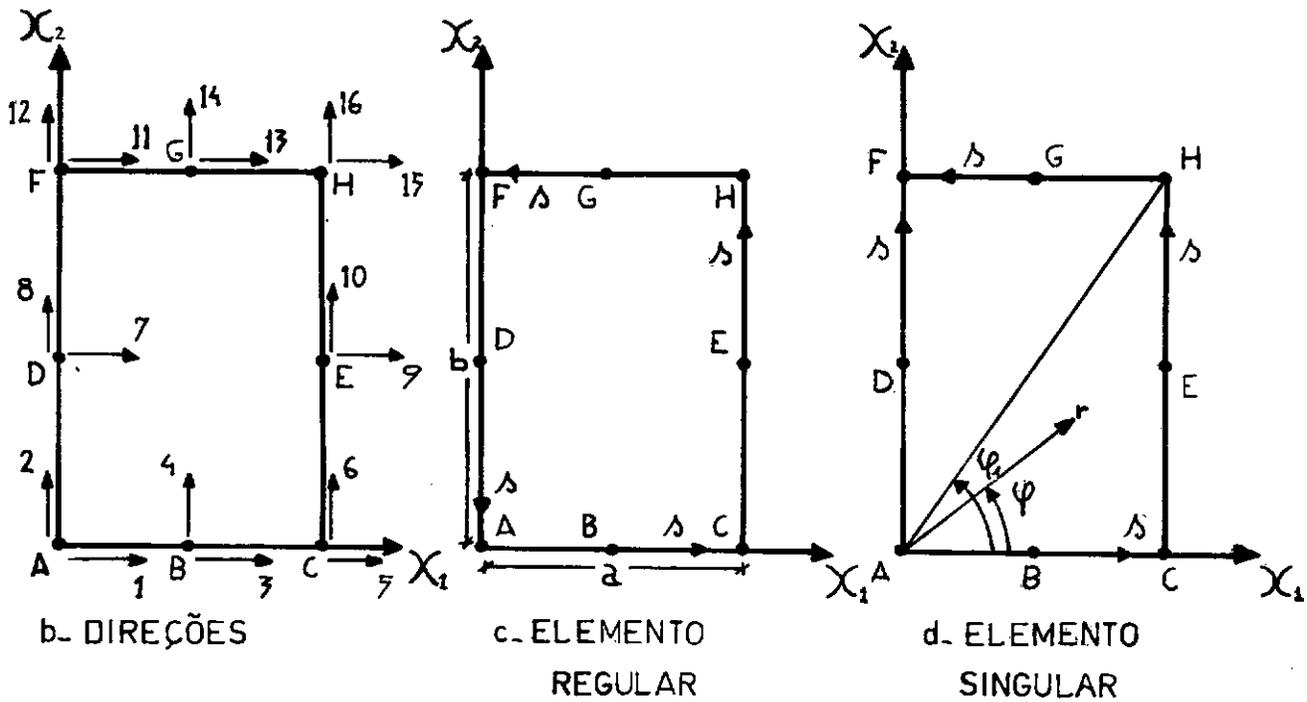


Fig. III.1 - Elementos Propostos

### III.2 - Elemento Singular

Os deslocamentos no interior do elemento são interpolados por:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_4 x_1 + \alpha_5 \sqrt{r} + (\alpha_{01} x_2 + \alpha_{02}) \\
 u_2 &= \alpha_6 x_1^2 + \alpha_7 x_2^2 + \alpha_8 x_1 x_2 + \alpha_9 x_2 + \alpha_{10} \sqrt{r} + (-\alpha_{01} x_1 + \alpha_{03})
 \end{aligned}
 \tag{III.8}$$

Em forma matricial:

$$\underline{u} = \underline{U} \underline{\alpha} + \underline{U}_0 \underline{\alpha}_0
 \tag{III.9}$$

onde

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_1 x_2 & x_1 \sqrt{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_1 x_2 & x_2 \sqrt{r} \end{bmatrix}$$

e

$$\underline{U}_0 = \begin{bmatrix} x_2 & 1 & 0 \\ -x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sõ a matriz  $\underline{U}$  serã considerada inicialmente em (III.9), isto ẽ, as parcelas referentes à rotaçãõ e translaçãõ de corpo rĩgido se rãõ excluĩdas. Isso facilita o encaminhamento da soluçãõ do sistema de equações obtido via extremizaçãõ do funcional. Para a consideraçãõ de  $\underline{U}_0$ , ver Apẽndice.

Os deslocamentos  $v_i$ , nos dois lados do contorno

que se cruzam na extremidade da fissura, são interpolados com auxílio das seguintes funções:

$$\begin{aligned}\eta_1(s,L) &= \sqrt{2} \left(\frac{s}{L}\right) - (1 + \sqrt{2})\sqrt{\frac{s}{L}} + 1 \\ \eta_2(s,L) &= -2(1 + \sqrt{2})\left(\frac{s}{L}\right) + 2(1 + \sqrt{2})\sqrt{\frac{s}{L}} \quad (\text{III.10}) \\ \eta_3(s,L) &= (\sqrt{2} + 2)\left(\frac{s}{L}\right) - (1 + \sqrt{2})\sqrt{\frac{s}{L}}\end{aligned}$$

onde  $L$  é o comprimento do lado no qual a interpolação está sendo feita, e  $0 \leq s \leq L$ .

Tem-se então, para os dois lados que se cruzam na extremidade da fissura (vértice A na fig. III.1d):

Lado ABC (origem dos  $s$  em A):

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1(s,a) & 0 & \eta_2(s,a) & 0 & \eta_3(s,a) & 0 \\ 0 & \eta_1(s,a) & 0 & \eta_2(s,a) & 0 & \eta_3(s,a) \end{bmatrix} \{v_N\} \quad (\text{III.12})$$

onde  $v_N$  são os deslocamentos nodais e seguem a convenção de direções da fig. III.1b, sendo:

$$v_N^T = [v_{N1} \quad v_{N2} \quad v_{N3} \quad v_{N4} \quad v_{N5} \quad v_{N6}]$$

Lado FDA (origem dos  $s$  em A):

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\eta_3(s,b) & 0 & -\eta_2(s,b) & 0 & -\eta_1(s,b) \\ \eta_3(s,b) & 0 & \eta_2(s,b) & 0 & \eta_1(s,b) & 0 \end{bmatrix} \{v_N\} \quad (\text{III.13})$$

onde  $v_N^T = \begin{bmatrix} v_{N11} & v_{N12} & v_{N7} & v_{N8} & v_{N1} & v_{N2} \end{bmatrix}$

Nos lados CEH e HDF, as interpolações dos  $v_i$  são as mesmas do elemento regular, isto é, (III.5) e (III.6), respectivamente. Segundo ATLURI (25) isto conduz a melhores resultados porque, se tais lados fossem encarados do ponto de vista do elemento singular, teriam que ser interpolados segundo funções envolvendo  $\theta$ , o que aqui não se faz.

As interpolações para os multiplicadores de Lagrange  $t_{L_i}$ , nos lados ABC e FDA (Fig. III.1d), são feitas por meio de funções com uma parcela polinomial e outra singular. A parcela polinomial aqui adotada é quadrática, usando-se para isso as funções (III.3). Somente essa parcela afeta os valores nodais  $t_N$ . A parcela singular, por sua vez, contém termos do tipo  $s^{-1/2}$ , e afeta os fatores de intensidade de tensões  $K_I$  e  $K_{II}$ .

Assim, para os dois lados que se cruzam na extremidade da fissura, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} t_{L1} \\ t_{L2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(s,a) & 0 & \psi_2(s,a) & 0 & \psi_3(s,a) & 0 \\ 0 & \psi_1(s,a) & 0 & \psi_2(s,a) & 0 & \psi_3(s,a) \end{bmatrix} \{t_N\} + \\ + \begin{bmatrix} C \\ -s \end{bmatrix} \{Y_S\} \quad (\text{III.13})$$

onde  $t_N$  são valores nodais dos  $t_{L_i}$ , sendo:

$$t_N^T = [t_{N1} \quad t_{N2} \quad t_{N3} \quad t_{N4} \quad t_{N5} \quad t_{N6}] \\ e \quad Y_S^T = [K_I \quad K_{II}]$$

Lado FDA (origem dos  $s$  em A):

$$\begin{Bmatrix} t_{L1} \\ t_{L2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\psi_3(s,b) & 0 & -\psi_2(s,b) & 0 & -\psi_1(s,b) \\ \psi_3(s,b) & 0 & \psi_2(s,b) & 0 & \psi_1(s,b) & 0 \end{bmatrix} \{t_N\} + \\ + \begin{bmatrix} C \\ -s \end{bmatrix} \{Y_S\} \quad (\text{III.14})$$

onde

$$t_N^T = [t_{N1} \quad t_{N2} \quad t_{N7} \quad t_{N8} \quad t_{N11} \quad t_{N12}] \\ e \quad Y_S^T = [K_I \quad K_{II}]$$

As interpolações dos  $t_{L_i}$ , nos lados CEH e HGF são feitas como se pertencessem a elemento regular. Para isso são usadas as funções quadráticas (III.3). A analogia com (III.5) e (III.6), respectivamente, é completa.

### III.3 - Matrizes Auxiliares

#### A. No interior dos Elementos

##### A.1 - Elemento regular:

Matriz  $\underline{K}_1$  (Simétrica):

$$[K_1(I,J)]_{8 \times 8} = \int_{S_m} (D A)^T \underline{E} \underline{D} \underline{A} dS$$

Para  $\underline{A}$  da eq. (III.2), e  $\underline{E}$  dado na eq. (II.14).

Componentes não nulos

$$K_1(1,1) = 4a^3b/3$$

$$K_1(1,3) = a^2b^2/2$$

$$K_1(1,4) = a^2b^2$$

$$K_1(1,6) = C_3a^2b^2$$

$$K_1(1,7) = 2C_3a^3b/3$$

$$K_1(1,8) = 2C_3a^2b$$

$$K_1(2,2) = C_2ab^3/3$$

$$K_1(2,3) = C_2a^2b^2/8$$

$$K_1(2,5) = C_2a^2b^2/4$$

$$K_1(2,7) = C_2ab^3/6$$

$$K_1(3,3) = ab^3/3 + C_2 a^3b/6$$

$$K_1(3,4) = ab^2/2$$

$$K_1(3,5) = C_2a^3b/6$$

$$\begin{aligned}
K_1(3,6) &= 2C_3ab^3/3 \\
K_1(3,7) &= (C_3 + C_2/4)a^2b^2/4 \\
K_1(3,8) &= C_3a^2b^2/2 \\
K_1(4,4) &= ab \\
K_1(4,6) &= C_3ab^2 \\
K_1(4,7) &= C_3a^2b/2 \\
K_1(4,8) &= C_3ab \\
K_1(5,5) &= C_2a^3b/3 \\
K_1(5,7) &= C_2a^2b^2/8 \\
K_1(6,6) &= 4ab^3/3 \\
K_1(6,7) &= a^2b^2/2 \\
K_1(6,8) &= ab^2 \\
K_1(7,7) &= a^3b/3 + C_2ab^3/12 \\
K_1(7,8) &= a^2b/2 \\
K_1(8,8) &= ab
\end{aligned}$$

A.2 - Elemento singular:

Matriz  $K_2$  (simétrica):

$$[K_2(I,J)]_{10 \times 10} = \int_{S_m} (\underline{D} \underline{U})^T \underline{E} \underline{D} \underline{U} \, dS$$

Para  $\underline{U}$  da eq. (III.9) e  $\underline{E}$  dado na eq. (II.14).

Componentes não nulos:

$$K_2(M, N) = K_1(M, N) \quad \text{para } M, N = 1 \text{ a } 4$$

$$K_2(M, N) = K_1(M-1, N-1) \text{ para } M, N = 6 \text{ a } 9$$

$$K_2(1, 5) = I_1$$

$$K_2(1, 10) = C_3 I_5$$

$$K_2(2, 5) = C_2 I_2 / 4$$

$$K_2(3, 5) = I_6 / 2 + C_2 I_5 / 8$$

$$K_2(3, 10) = C_3 I_2 / 2 + C_2 I_1 / 8$$

$$K_2(4, 5) = I_3 / 2$$

$$K_2(4, 10) = C_3 I_4 / 2$$

$$K_2(5, 5) = I_6 / 4 + C_2 I_7 / 16$$

$$K_2(5, 6) = K_2(2, 10) = C_2 I_5 / 4$$

$$K_2(5, 7) = C_3 I_6$$

$$K_2(5, 8) = C_3 I_1 / 2 + C_2 I_2 / 8$$

$$K_2(5, 9) = C_3 I_3 / 2$$

$$K_2(5, 10) = (C_3 / 4 + C_2 / 16) I_8$$

$$K_2(6, 10) = C_2 I_1 / 4$$

$$K_2(7, 10) = I_2$$

$$K_2(8, 10) = I_5 / 2 + C_2 I_6 / 8$$

$$K_2(9, 10) = I_4 / 2$$

$$K_2(10, 10) = C_2 I_9 / 16 + I_7 / 4$$

As expressões dos  $K_1(I, J)$  e  $K_2(I, J)$  acima, valem para o estado plano de deformações, sendo:

$$C_1 = E(1-\nu)/2(1+\nu)(1-2\nu)$$

$$C_2 = (1-2\nu)/2(1-\nu)$$

$$C_3 = \nu/(1-\nu)$$

Para o estado plano de tensões basta substituir:

$$\nu \text{ por } \nu/(1+\nu) \quad \text{e} \quad E \text{ por } E(1+2\nu)/(1+\nu)^2$$

Ainda nas expressões acima:

$$I_1 = \frac{2}{5} a^{5/2} \int_0^{\varphi_1} (\cos\varphi)^{-1/2} d\varphi + \frac{2}{5} b^{5/2} \int_{\varphi_1}^{\pi/2} \cos^2 \varphi (\sin\varphi)^{-5/2} d\varphi$$

$$I_2 = \frac{2}{5} a^{5/2} \int_0^{\varphi_1} \sin^2 \varphi (\cos\varphi)^{-5/2} d\varphi + \frac{2}{5} b^{5/2} \int_{\varphi_1}^{\pi/2} (\sin\varphi)^{-1/2} d\varphi$$

$$I_3 = \frac{2}{3} a^{3/2} \int_0^{\varphi_1} (\cos\varphi)^{-1/2} d\varphi + \frac{2}{3} b^{3/2} \int_{\varphi_1}^{\pi/2} \cos \varphi (\sin\varphi)^{-3/2} d\varphi$$

$$I_4 = \frac{2}{3} a^{3/2} \int_0^{\varphi_1} \sin\varphi (\cos\varphi)^{-3/2} d\varphi + \frac{2}{3} b^{3/2} \int_{\varphi_1}^{\pi/2} (\sin\varphi)^{-1/2} d\varphi$$

$$I_5 = I_6 = \frac{2}{5} a^{5/2} \int_0^{\varphi_1} \sin\varphi (\cos\varphi)^{-3/2} d\varphi + \frac{2}{5} b^{5/2} \int_{\varphi_1}^{\pi/2} (\sin\varphi)^{-3/2} \cos\varphi d\varphi$$

$$I_7 = a \left[ -\sin \varphi_1 + \ell \operatorname{tg}(\varphi_1/2 + \frac{\pi}{4}) \right] + b \cos \varphi_1$$

$$I_8 = a(1 - \cos \varphi_1) + b(1 - \sin \varphi_1)$$

$$I_9 = \left[ a \sin \varphi_1 - b(\cos \varphi_1 + \ell \operatorname{tg}(\varphi_1/2)) \right]$$

$$\psi_1 = \text{arctg}(b/a)$$

a, b - lados do retângulo nas direções  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente.

B. - Nos Contornos dos Elementos

B.1 - Elemento regular:

Matriz  $\underline{B}$  (2 x 16):

É obtida somando-se adequadamente as contribuições dos 4 lados do elemento, dadas nas expressões dos  $v_i$ , em (III.4), (III.5), (III.6) e (III.7).  $\underline{B}$  é usada para interpolar os deslocamentos  $v_i$ , os multiplicadores de Lagrange  $t_{L_i}$ , no contorno do elemento regular; é a parte regular dos  $t_{L_i}$  no contorno do elemento singular. Assim:

$$\underline{B} = \underline{C} = \underline{C}_R$$

Componentes não nulos:

$$B(1,1) = B(2,2) = \psi_1(x_1, a)$$

$$B(1,2) = B(2,1) = -\psi_3(-x_2 + b, b)$$

$$B(1,3) = B(2,4) = \psi_2(x_1, a)$$

$$B(1,5) = B(2,6) = \psi_3(x_1, a)$$

$$B(1,6) = -B(2,5) = \psi_1(x_2, b)$$

$$B(1,8) = -B(2,7) = -\psi_2(-x_2 + b, b)$$

$$B(1,10) = - B(2,9) = \psi_2(x_2, b)$$

$$B(1,11) = B(2,12) = - \psi_3(-x_1 + a, a)$$

$$B(1,12) = - B(2,11) = - \psi_1(-x_2 + b, b)$$

$$B(1,13) = B(2,14) = - \psi_2(-x_1 + a, a)$$

$$B(1,15) = B(2,16) = - \psi_1(-x_1 + a, a)$$

$$B(1,16) = - B(2,15) = \psi_3(x_2, b)$$

## B.2 - Elemento singular

### Matriz $\underline{V}$ (2 x 16)

É obtida somando-se adequadamente as contribuições dos 4 lados do elemento singular da fig. III.1d. As contribuições dos lados ABC e FDA, suposta a extremidade da fissura em A, é obtida a partir das eq. (III.11) e (III.12) respectivamente. Os lados CEH e HGF, por não conterem o ponto A, são tratados como pertencentes a elemento regular, sendo suas contribuições dadas respectivamente por (III.5) e (III.6).  $\underline{V}$  é usada para interpolar os deslocamentos  $v_i$ , no contorno do elemento singular.

Componentes não nulos:

$$V(1,1) = V(2,2) = \eta_1(x_1, a)$$

$$V(1,2) = V(2,1) = -\eta_3(x_2, b)$$

$$V(1,3) = V(2,4) = \eta_2(x_1, a)$$

$$V(1,5) = V(2,6) = \eta_3(x_1, a)$$

$$V(1,6) = -V(2,5) = \psi_1(x_2, b)$$

$$V(1,8) = -V(2,7) = -\eta_2(x_2, b)$$

$$V(1,10) = -V(2,9) = \psi_2(x_2, b)$$

$$V(1,11) = V(2,12) = -\psi_3(-x_1 + a, a)$$

$$V(1,12) = -V(2,11) = -\eta_1(x_2, b)$$

$$V(1,13) = V(2,14) = -\psi_2(-x_1 + a, a)$$

$$V(1,15) = V(2,16) = -\psi_1(-x_1 + a, a)$$

$$V(1,16) = -V(2,15) = \psi_3(x_2, b)$$

As funções  $\psi_n(s, L)$  e  $\eta_n(s, L)$ , com  $n = 1$  a  $3$ , que aparecem acima, são definidas em (III.3) e (III.10) respectivamente.

### Matrizes $\underline{C}_s$

Particularizando-se as expressões (II.5) e (II.6) da seção (II.4), vem:

1. Para o Modelo de Abertura:

$\theta$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{22}$	$\sigma_{12}$
0	$K_I / (2\pi r)^{1/2}$	$K_I / (2\pi r)^{1/2}$	0
$\pi/2$	$\frac{1}{4} K_I / (\pi r)^{1/2}$	$\frac{3}{4} K_I / (\pi r)^{1/2}$	$\frac{1}{4} K_I / (\pi r)^{1/2}$
$\pi$	0	0	0
$-\pi$	0	0	0
$-\pi/2$	$\frac{1}{4} K_I / (\pi r)^{1/2}$	$\frac{3}{4} K_I / (\pi r)^{1/2}$	$-\frac{1}{4} K_I / (\pi r)^{1/2}$

Quadro III.12. Para o Modelo de Deslizamento

$\theta$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{22}$	$\sigma_{12}$
0	0	0	$K_{II} / (2\pi r)^{1/2}$
$\pi/2$	$-\frac{3}{4} K_{II} / (\pi r)^{1/2}$	$-\frac{1}{4} K_{II} / (\pi r)^{1/2}$	$\frac{1}{4} K_{II} / (\pi r)^{1/2}$
$\pi$	$-\sqrt{2} K_{II} / (\pi r)^{1/2}$	0	0
$-\pi/2$	$\frac{3}{4} K_{II} / (\pi r)^{1/2}$	$\frac{1}{4} K_{II} / (\pi r)^{1/2}$	$\frac{1}{4} K_{II} / (\pi r)^{1/2}$
$-\pi$	$\sqrt{2} K_{II} / (\pi r)^{1/2}$	0	0

Quadro III.2

Com base nos quadros (III.1) e (III.2), podem-se compor as matrizes  $\underline{C}_s$  para todos os lados que se cruzam na extremidade de uma fissura (vértice A na fig. III.1a). A idéia está fundada no fato de que os  $t_{L_i}$  são identificados com tensões no contorno do elemento.

Assim, obtem-se as tensões-normal e tangencial nos lados partindo de A. Estas tensões são obtidas em termos dos fatores de intensidade de tensões  $K_I$  e  $K_{II}$ , a partir de composições feitas com o auxílio dos quadros III.1 e III.2.

Como exemplo, seja o lado  $AB_1C_1$  na fig. III.1a. A ele corresponde  $\theta = 0$ , e o raio  $r$  se confunde com a coordenada  $s$  do contorno. A tensão tangencial é dada pela adição dos  $\sigma_{12}$  dos dois modelos. E a tensão normal é dada pela adição dos  $\sigma_{22}$  dos dois modelos. Assim:

$$\begin{aligned} T_1 &= K_{II} (2\pi s)^{-1/2} \\ e \quad T_2 &= K_I (2\pi s)^{-1/2} \end{aligned} \quad (III.15)$$

onde  $T_1$ ,  $T_2$  são os valores das tensões no lado  $AB_1C_1$ .

Desde que os  $t_{L_i}$ , via extremização do funcional híbrido de deslocamentos, são assimilados aos  $T_i$  (eq. II.8), então é conveniente incluir parcelas tipo (III.15) nas funções de interpolação dos  $t_{L_i}$ . A matriz  $\underline{C}_s$  responde justamente pelas

parcelas singulares da interpolação dos  $t_{L_i}$ , isto é, aquelas que afetam  $K_I$  e  $K_{II}$ . Assim:

Para o lado  $AB_1C_1$  ( $\theta = 0$ ):

$$\underline{C}_S = \begin{bmatrix} 0 & (2\pi s)^{-1/2} \\ (2\pi s)^{-1/2} & 0 \end{bmatrix} \quad (III.16)$$

Analogamente, fazendo uso dos quadros (III.1) e (III.2), tem-se:

Lado ADF ( $\theta = \pi/2$ ):

$$\underline{C}_S = \begin{bmatrix} + \frac{1}{4}(\pi s)^{-1/2} & - \frac{3}{4}(\pi s)^{-1/2} \\ \frac{1}{4}(\pi s)^{-1/2} & + \frac{1}{4}(\pi s)^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (III.17)$$

Lado ABC ( $\theta = \pi$ ):

$$\underline{C}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{face da fissura}) \quad (III.18)$$

Lado  $AB_2C_2$  ( $\theta = -\pi$ ):

$$\underline{C}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{face da fissura}) \quad (III.19)$$

Lado  $AD_1F_1$  ( $\theta = -\pi/2$ ):

$$\underline{C}_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} (\pi s)^{-1/2} & \frac{3}{4} (\pi s)^{-1/2} \\ -\frac{1}{4} (s)^{-1/2} & \frac{1}{4} (s)^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

Com o auxílio das matrizes obtidas acima, obtem-se:

$$\underline{H} = \int_{\partial S_m} \underline{B}^T \underline{C} \, ds \quad \underline{H}_R = \int_{\partial S_m} \underline{V}^T \underline{C}_R \, ds$$

$$\underline{H}_s = \int_{\partial S_m} \underline{V}^T \underline{C}_s \, ds$$

$$\underline{G} = \int_{\partial S_m} \underline{A}^T \underline{C} \, ds \quad \underline{G}_R = \int_{\partial S_m} \underline{U}^T \underline{C}_R \, ds$$

$$\underline{G}_s = \int \underline{U}^T \underline{C}_s \, ds$$

$$\underline{f}_1 = \int_{S_m} \underline{B}^T \underline{F} \, dS \quad \underline{f}_2 = \int_{S_m} \underline{V}^T \underline{F} \, dS$$

$$\underline{g}_1 = \int_{s\sigma_m} \underline{B}^T \underline{T} \, ds \quad \text{e} \quad \underline{g}_2 = \int_{s\sigma_m} \underline{V}^T \underline{T} \, ds$$

III.21)

onde:

$\underline{A}$  é dada na eq. (III.2) e  $\underline{U}$  na eq. (III.9).  $\underline{F}$  (eq.

II.17a) e  $\bar{T}$  (eq. II.17b) expressam as distribuições das forças de massa em  $S_m$ , e as distribuições de tensões prescritas em  $s\sigma_m$ , respectivamente.

Finalmente, obtem-se as matrizes necessárias para a montagem do sistema (II.29):

$$p_1 = \underline{G}_1^T \underline{K}_1 \underline{f}_1 \quad p_2 = \underline{G}_R^T \underline{K}^{-1} \underline{f}_2 \quad p_3 = \underline{G}_s \underline{K}_2^{-1} \underline{f}_2$$

$$\underline{Q} = \underline{G} \underline{K}_1^{-1} \underline{G}^T \quad \underline{Q}_R = \underline{G}_R^T \underline{K}_2^{-1} \underline{G}_R$$

$$\underline{Q}_{RS} = \underline{G}_R^T \underline{K}_2^{-1} \underline{G}_s \quad \underline{Q}_{SS} = \underline{G}_s^T \underline{K}_2^{-1} \underline{G}_s$$

e mais  $\underline{q}_1$  e  $\underline{q}_2$ , dadas por (III.21).

Observações:

1) As matrizes  $\underline{C}_s$  que aparecem em (III.16) até (III.20), tem que ser associadas adequadamente para cada um dos quatro elementos singulares que cercam a extremidade da fissura (ver fig. III.1a). Após a associação é que são geradas as matrizes  $\underline{H}_s$  e  $\underline{G}_s$ , de cada elemento singular.

2) Os deslocamentos nodais  $\underline{V}_N$  e valores nodais  $\underline{t}_N$  dos multiplicadores de Lagrange, estão em ordem consecutiva (de 1 a 16) para efeito de arrumação das matrizes, e conforme a con-

venção da fig. III.1b;

3) Os fatores de intensidade de tensões estão na ordem  $K_I$ ,  $K_{II}$ , para cada extremidade de fissura no domínio.

APÊNDICECONSIDERAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS DE CORPO RÍGIDO  
NO INTERIOR DOS ELEMENTOS

Nas eq. (II.19) e (II.22) aparecem as parcelas  $\underline{A}_0 \underline{a}_0$  e  $\underline{U}_0 \underline{\alpha}_0$ , respectivamente, correspondentes aos deslocamentos de corpo rígido. Foram postas em separado a fim de possibilitar as inversões das matrizes  $\underline{K}_1$  e  $\underline{K}_2$  em (II.26) e (II.27).

Procura-se obter aqui, as contribuições de  $\underline{A}_0 \underline{a}_0$  e  $\underline{U}_0 \underline{\alpha}_0$  que deverão ser adicionadas a  $\pi_{HD}$  em (II.28).

Sejam:

$$\underline{u}_0 = \underline{A}_0 \underline{a}_0 \quad (\text{nos elementos regulares}) \quad (\text{A.1})$$

e

$$\underline{u}_0 = \underline{U}_0 \underline{\alpha}_0 \quad (\text{nos elementos singulares}), \quad (\text{A.2})$$

parcelas correspondentes aos deslocamentos rígidios nas interpolações dos  $u_i$ .

Levando (A.1) e (A.2) ao funcional (II.16), evidentemente a parcela  $\frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \underline{E} \underline{\varepsilon}$  se anula, porque os deslocamentos rígidios não contribuem para as deformações. Consequentemente, a forma de (II.25), quando são considerados exclusivamente os  $u_{0i}$ ,

é a seguinte:

$$\begin{aligned} \pi_{HD_0} = & \sum_{m=1}^p e\{-\underline{a}_0^T \underline{f}_1 + (\underline{v}_N^T \underline{H} - \underline{a}_0^T \underline{G}_0) \underline{t}_N - \underline{v}_N^T \underline{g}_1\} + \\ & + \sum_{m=p+1}^q e\{-\underline{\alpha}_0^T \underline{f}_2 + (\underline{v}_N^T \underline{H}_R - \underline{\alpha}_0^T \underline{G}_{R_0}) \underline{t}_N + \\ & + (\underline{v}_N^T \underline{H}_s - \underline{\alpha}_0^T \underline{G}_{s_0}) \underline{y}_s - \underline{v}_N^T \underline{g}_2\} \quad (A.3) \end{aligned}$$

sendo:

$$\underline{G}_0 = \int_{\partial S_m} \underline{A}_0^T \underline{C} \, ds \quad \underline{G}_{R_0} = \int_{\partial S_m} \underline{U}_0^T \underline{C}_R \, ds$$

$$\underline{G}_{s_0} = \int_{\partial S_m} \underline{U}_0^T \underline{C}_s \, ds$$

mantidas as demais matrizes com o mesmo significado que possuem na eq. (II.25).

Pelo fato de que  $\underline{a}_0$  é restrito ao interior do elemento regular do mesmo modo que  $\underline{\alpha}_0$  é restrito ao interior do elemento singular; as eq. (II.26) e (II.27) ficam, respectivamente:

$$\underline{f}_1 + \underline{G}_0 \underline{t}_N = \underline{0} \quad (A.4)$$

$$e \quad \underline{f}_2 + \underline{G}_{R_0} \underline{t}_N + \underline{G}_{s_0} \underline{y}_s = \underline{0} \quad (A.5)$$

Substituindo (A.4) e (A.5) em (A.3) tem-se:

$$\pi_{HD_0} = \sum_{m=1}^p e\{\underline{v}_N^T (\underline{H} \underline{t}_N - \underline{g}_1)\} + \sum_{m=p+1}^q e\{\underline{v}_N^T (\underline{H}_R \underline{t}_N + \underline{H}_S \underline{\gamma}_S - \underline{g}_2)\} \quad (A.6)$$

Após somar as contribuições de todos os elementos, a nível de sistema global tem-se:

$$\pi_{HD_0} = e \underline{v}_N^{*T} \left[ \underline{H}^* \underline{t}_N^* - \underline{g}_1^* + \underline{H}_R^* \underline{t}_N^* + \underline{H}_S^* \underline{\gamma}_S - \underline{g}_2^* \right] \quad (A.7)$$

$\pi_{HD_0}$  é a contribuição dos deslocamentos rígidos  $\underline{u}_{0i}$ , a ser somada com  $\pi_{HD}$  na eq. (II.28).

BIBLIOGRAFIA

- [1] N.I. MUSKHELISHVILI - Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, 1963.
- [2] L. M. ROJAS - Seminário de Doutorado sobre Aplicação de Funções de Variável Complexa à Elasticidade Plana, não publicado, COPPE/UFRJ.
- [3] A. A. GRIFFITH - The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids, Phil. Trans. Roy. Soc., A, vol. 221, 1920.
- [4] A. MARKUSHEVICH - Teoria de las Funciones Analíticas, Editorial MIR, Moscou, 1970.
- [5] E. OROWAN - Energy Criteria of Fracture, Welding, J. Res. Suppl., March 1955.
- [6] G. R. IRWIN - Analysis of Stress and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate, J. Appl. Mech., vol.24, 3, 1957.
- [7] A. A. GRIFFITH - The Theory of Rupture, Proc. 1st. Int.Cong. Appl. Mech., Delft, 1924.
- [8] C. E. INGLIS - Stress in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners, Trans. Instn. Naval Arch., t.55, 219, 1913.
- [9] H. F. BUECKNER - The Propagation of Cracks and the Energy of Elastic Deformation, Trans. A. Soc. Mec. Eng., vol. 80, nº 6, 1958.

- [10] N. F. MOTT - Fracture Metals: Theoretical Considerations, Engineering, vol. 65, nºs. 4275, 4276, 1948.
- [11] Va I. FRAENKEL' - Fissuras Reversíveis e Irreversíveis em Corpos Sólidos; Zh. Tekh. Fiz., vol. 22, nº 11, 1952 (em russo).
- [12] G. I. BARENBLATT - On the Equilibrium Cracks Formed during Brittle Fracture, PMM, vol. 23, nºs. 3, 4, 5; 1959.
- [13] G. I. BARENBLATT - On Finiteness Conditions in the Mechanics of Continuous Media. Static Problems of the Theory of Elasticity, PMM, vol. 24, nº 2, 1960.
- [14] G. I. BARENBLATT e G. P. CHEREPANOV - On the Equilibrium and Propagation of Cracks in an Anisotropic Medium, PMM, vol. 25, nº 1, 1961.
- [15] A. G. SVESHNIKOV e A. N. TIKHONOV - The Theory of Functions of a Complex Variable, MIR, Moscou, 1971.
- [16] A. C. STEVENSON - Some Boundary Value Problems of Two-Dimensional Elasticity, Phil. Mag., 34, 766, 1943.
- [17] I. N. SNEDDON e M. LOWENGRUB - Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity, Wiley, 1969.
- [18] I. N. SNEDDON e G. S. BERRY - The Classical Theory of Elasticity, Handbuch der Physik, Bd. VI, Springer, Berlin, 1958.
- [19] N. I. MUSKHELISHVILI - Singular Integral Equations, Noordhoff, 1953.
- [20] G. C. SIH e P. C. PARIS - Fracture Toughness Testing and its Applications, STP 381, ASTM, Philadelphia.

- [21] V. V. NOVOZHILOV - On the Foundation of a Theory of Equilibrium Cracks in Elastic Solids, PMM, vol. 33, n° 5, 1969.
- [22] H. LIEBOWITZ (Editor) - Fracture, vol. II, Academic Press, N. York, 1968.
- [23] E. BISKOV - The Calculation of Stress Intensity Factors Using Finite Element Method with Cracked Elements, Int. Journal of Fracture Mechanics, Vol. 6, n° 2, 1970.
- [24] T. H. H. PIAN, P. TONG e C. H. LUK - Elastic Crack Analysis by a Finite Element Hybrid Method, AFOS-TR-72-0752, Dec. 1971.
- [25] S. N. ATLURI, A. S. KOBAYASHI e M. NAKAGAKI - Application of an Assumed Displacement Hybrid Finite Element Procedure to Two-dimensional Problems in Fracture Mechanics, vol. 7, n° 1, 1971.