

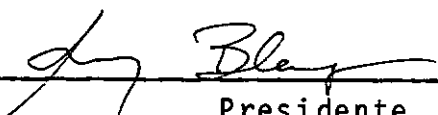
DINÂMICA DE ESTRUTURAS PRISMÁTICAS LAMINARES

- CONSIDERAÇÃO DE CARGAS MÔVEIS

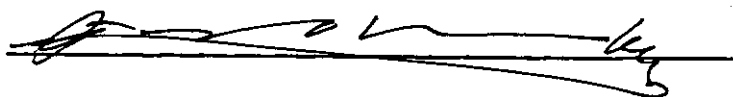
João Nisan Correia Guerreiro

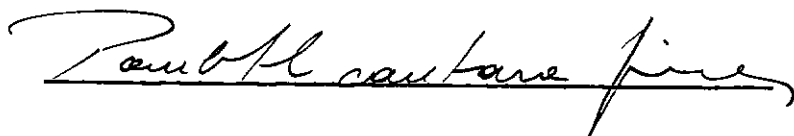
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada Por:


Presidente







RIO DE JANEIRO - RJ - BRASIL
MARÇO DE 1977

A minha Mãe

Aos meus Irmãos

AGRADECIMENTOS

Ao Professor LUIZ BEVILACQUA pela orientação.

Ao colega ABIMAEI D. LOULA pela sugestão do tema e a colaboração decisiva na realização deste trabalho.

Aos companheiros AUGUSTO C. GALEÃO e RAUL FEIJÃO pelo incentivo.

A minha esposa pela compreensão.

À CAPES, à Fundação Politécnica, à COPPE e ao CNPq (através do projeto nº 2222.0712/76) pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, é realizada a análise dinâmica de estruturas prismáticas laminares, sob a ação de cargas móveis.

O problema é formulado utilizando-se o princípio de Hamilton e a teoria linear de placas delgadas. O domínio espacial é então discretizado através do método dos elementos finitos associado a um desenvolvimento em série de Fourier. O sistema de equações diferenciais ordinárias assim obtido, é integrado utilizando-se o método de Newmark.

Alguns exemplos são analisados e os resultados obtidos são comparados com soluções conhecidas.

ABSTRACT

This work deals with the dynamic analysis of laminated structures submitted to moving loads.

The formulation of the problem makes use of Hamilton's principle and the linear theory of thin plates.

Associated with the Fourier series, the finite element method is used to discretize the spatial variables. The resulting system of ordinary differential equations is integrated by means of Newmark's method.

Some example problems are analysed in order to compare its results with some known solutions.

ÍNDICE

Capítulos:	Páginas:
INTRODUÇÃO	1
I MASSA MÓVEL EM PLACAS - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO	3
1.1 Introdução	3
1.2 Princípio de Hamilton	5
1.3 Teoria Linear de Placas Delgadas ..	8
1.3.1 Relações Deslocamentos-Deformações e Tensões-Deformações	8
1.3.2 Expressão da Energia de Deformação de Placa Delgada	13
1.3.3 Expressão da Energia Cinética de Placa Delgada	17
1.4 Forças Devidas à Massa Móvel - Trabalho Virtual das Forças Externas..	19
1.5 Equações do Movimento	22

Capítulos:

Páginas:

	1.6 Sobre a Solução das Equações Diferenciais do Movimento	27
II	SOLUÇÃO NUMÉRICA - MÉTODO SEMI-ANALÍTICO	30
	2.1 Introdução	30
	2.2 Método Semi-Analítico - Faixas Finitas	31
	2.3 Princípio de Hamilton Discretizado - Equações Matriciais do Movimento	33
	2.4 Integração das Equações do Movimento	38
	2.4.1 Vibrações Livres	39
	2.4.2 Integração Passo a Passo - Método de Newmark	40
	2.5 Resolução do Sistema de Equações..	45
III	RESULTADOS E CONCLUSÕES	51
	3.1 Introdução	51
	3.2 Viga Bi-apoiada	53
	3.3 Placa Apoiada nos Bordos	56
	3.4 Viga Celular Bi-apoiada	59
	3.5 Conclusões	74
	BIBLIOGRAFIA	76

Apêndices:	Páginas:
A	MATRIZES REFERENTES AO ELEMENTO (COORDENADAS LOCAIS 82
a)	Matrizes Referentes à Estrutura 82
b)	Matrizes Referentes à Inércia da Massa Móvel 84
c)	Vetor de Carga (Termo Independente) ... 87
B	MANUAL DE ENTRADA 88

INTRODUÇÃO

Estruturas compostas de placas delgadas tais como vigas de ponte com seção celular e "folded plates" para coberturas, têm tido uma crescente aplicação prática. A dificuldade de obtenção de soluções exatas, aliada à grande comodidade do método dos elementos finitos na análise desses problemas, principalmente quando em uma direção as propriedades geométricas da estrutura não variam, explicam a grande utilização do método dos elementos finitos semi-analítico ou método das faixas finitas na análise dessas estruturas.

Nos trabalhos (3, 4, 5, 6, 11) este método é aplicado na análise estática. Este mesmo enfoque foi utilizado no estudo de vibrações livres de placas (7) e de estruturas compostas (8), bem como na obtenção da resposta dinâmica de placas à passagem de um veículo (29).

A importância da consideração da inércia da massa

môvel na resposta de vigas e placas, foi demonstrada nas referências (12,15,21,34).

Neste trabalho, estuda-se a resposta dinâmica de estruturas prismáticas de eixos retos com diafragmas rígidos nos bordos transversais, solicitadas por uma massa móvel parcialmente distribuída, deslocando-se com uma velocidade função apenas do tempo.

No Capítulo I, obtem-se as equações diferenciais de movimento, a partir do princípio de Hamilton e da teoria linear de placas.

No Capítulo II é utilizado o método dos elementos finitos semi-analítico na discretização do domínio espacial e o sistema de equações diferenciais é integrado pelo método de Newmark.

Finalmente, no Capítulo III, alguns resultados são apresentados com a finalidade de ilustrar as possíveis aplicações do estudo desenvolvido.

CAPÍTULO I

MASSA MÓVEL EM PLACAS - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

1.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é determinar as equações diferenciais do movimento de uma placa retangular, delgada, elástica linear solicitada por uma massa móvel parcialmente distribuída, deslocando-se segundo direção paralela às arestas longitudinais. Admite-se que todos os pontos da massa tenham velocidade, em relação à placa, dada por:

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt}, \text{ função apenas do tempo.}$$

Será utilizado um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z , com o plano xy coincidindo com a superfície média da placa e sendo $[b_1, b_2]$, $[\xi(t) - c, \xi(t)]$ os limites de distri

buição da massa móvel (Figura 1).

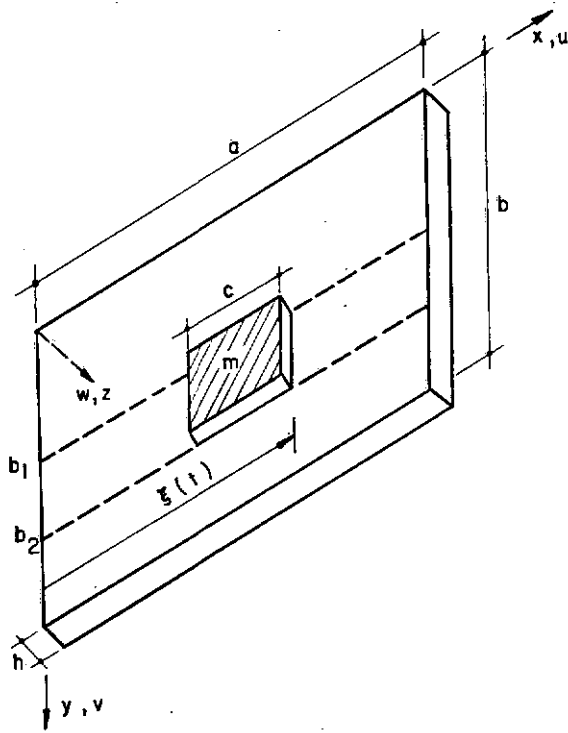


FIGURA 1 - Placa Retangular - Massa Móvel.

O objetivo proposto será alcançado através do princípio de Hamilton, fazendo-se uso das relações cinemáticas (relações deslocamentos-deformações) simplificadas para placas delgadas através das hipóteses de Kirchhoff e das relações tensões-deformações para sólidos elásticos lineares (lei de Hooke).

1.2 PRINCÍPIO DE HAMILTON

Seja C um corpo elástico sujeito a forças externas $\underline{F}$ e a condições de contorno que restringem os seus movimentos possíveis. Uma configuração admissível de C será qualquer configuração que atenda às restrições que lhe são impostas. Ao conjunto de todas as configurações reais, assumidas continuamente por C entre dois instantes t_1 e t_2 , chama-se caminho dinâmico. Uma variação virtual em torno do caminho dinâmico, gera um caminho variado. De todas as variações possíveis, considerando-se apenas aquelas que em t_1 e t_2 coincidem com a configuração real, o princípio de Hamilton afirma então que nessas condições o caminho dinâmico real será aquele que satisfaz a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta(T - U) + \delta W \right] dt = 0 \quad (1.1)$$

sendo:

- T = energia cinética do corpo
- U = energia de deformação
- δW = trabalho virtual das forças externas.

Para um corpo elástico linear com massa específica ρ , apresentando um campo de deslocamentos $\underline{D}$, um estado de de

formações $\underline{\varepsilon}$, um estado de tensões $\underline{\sigma}$, forças de superfície $\underline{F}$, prescritas na região do contorno S_{σ} e na ausência de forças gravitacionais, as grandezas envolvidas em (1.1) são dadas por:

$$T = \frac{1}{2} \int_{vol} \rho \dot{\underline{D}}^t \dot{\underline{D}} dvol \quad * \quad (1.2)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{vol} \underline{\sigma}^t \underline{\varepsilon} dvol \quad (1.3)$$

$$\delta W = \int_{S_{\sigma}} \underline{F}^t \delta \underline{D} ds \quad (1.4)$$

sendo:

$$\underline{D} = \left[u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t) \right]^t, \text{ componentes de deslocamentos.}$$

* Serão utilizadas as convenções:

$$(\dot{}) = \frac{\partial()}{\partial t} ; ()_{,x} = \frac{\partial()}{\partial x} ; ()_{,y} = \frac{\partial()}{\partial y} ; ()_{,z} = \frac{\partial()}{\partial z}$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}^t, \text{ forças de superfície}$$

e devido à simetria dos tensores de tensões e de deformações:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{bmatrix}^t, \text{ componentes de tensões.}$$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{bmatrix}^t, \text{ componentes de deformações.}$$

Para um material homogêneo e isotrópico, que segue a lei de Hooke, tem-se as seguintes relações entre tensões e deformações:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx}$$

sendo as relações deslocamentos-deformações lineares dados por:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

(1.6)

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

1.3 TEORIA LINEAR DE PLACAS DELGADAS

1.3.1 RELAÇÕES DESLOCAMENTOS-DEFORMAÇÕES E TENSÕES-DEFORMAÇÕES

A solução de problemas de elasticidade tridimensional (quando é conseguida), é bastante trabalhosa. A teoria de placas delgadas (que têm espessura pequena em relação às demais dimensões) consegue, através de simplificações conhecidas como hipóteses de Kirchhoff, reduzir o problema de três para duas dimensões, onde as grandezas envolvidas dizem respeito apenas à superfície média, S_m , da placa. Estas simplificações consistem em impor limitações aos campos de deslocamentos e de tensões de sorte que o conhecimento do campo de deslocamentos

na superfície média possibilite a determinação dos deslocamentos e, conseqüentemente, das tensões em qualquer ponto da placa.

As hipóteses de Kirchhoff são:

i) $\sigma_z = 0$

ii) As normais à superfície média antes da deformação, permanecem retas e normais a essa superfície deformada.

iii) A distância de qualquer ponto da placa à superfície média, permanece constante.

ii) e iii) são equivalentes a:

$$\epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (1.7)$$

Levando-se (1.7) em (1.6) e lembrando-se que o plano xy foi tomado coincidente com S_m , resulta que:

$$w = w_0(x, y)$$

$$u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.8)$$

$$v = v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

ou seja, os deslocamentos u e v , e as deformações ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} , variam linearmente ao longo da espessura da placa enquanto que o deslocamento w é constante ao longo dessa espessura.

Nas expressões acima, u_0 , v_0 e w_0 representam deslocamentos de pontos de S_m . Nas expressões que se seguem, serão escrito apenas $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ ou simplesmente

te u , v , w , para representar u_0 , v_0 e w_0 , respectivamente.

A hipótese i) juntamente com as equações (1.7) e (1.9), introduzidas em (1.5) fornecem:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \quad (1.10)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}$$

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Dessa forma, as únicas componentes de $\underline{\epsilon}$ e $\underline{\sigma}$ não nulas são:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^t \quad (1.11)$$

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^t \quad (1.12)$$

e, portanto, o problema ficou reduzido a duas dimensões.

Deve-se observar que a hipótese i), levada nas relações tensões-deformações tridimensionais, fornece

$$\epsilon_z = \frac{\nu}{\nu - 1} (\epsilon_x + \epsilon_y)$$

que por sua vez, juntamente com (1.9), ao ser integrada, resulta em:

$$\begin{aligned} w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) + \frac{\nu z}{\nu - 1} (u_0(x,y,t)_{,x} + v_0(x,y,t)_{,y}) \\ - \frac{\nu z^2}{2(\nu - 1)} (w(x,y,t)_{,xx} + w(x,y,t)_{,yy}) \end{aligned}$$

(1.13)

portanto, os dois últimos termos da expressão acima, foram desprezados na primeira das equações (1.8). (14, 33).

1.3.2 EXPRESSÃO DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DE PLACA DELGADA

As componentes de deformações dadas por (1.9) podem ser separadas em:

$$\underline{\varepsilon}_p = \begin{bmatrix} u_{,x} & v_{,y} & u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix}^t \quad (1.14)$$

referente aos deslocamentos u e v no plano da placa e,

$$\underline{\varepsilon}_f = - \begin{bmatrix} w_{,xx} & w_{,yy} & 2 w_{,xy} \end{bmatrix}^t \quad (1.15)$$

referente às deflexões w . Dessa forma, tem-se que:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_p + z \underline{\varepsilon}_f \quad (1.16)$$

Levando-se (1.16) em (1.3), obtem-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_{vol} \underline{\sigma}^t \underline{\varepsilon}_p \, dvol + \frac{1}{2} \int_{vol} \underline{\sigma}^t z \underline{\varepsilon}_f \, dvol = U_p + U_f$$

(1.17)

Sendo $\underline{\varepsilon}_p$ e $\underline{\varepsilon}_f$ independentes de z , pode-se então es
crever que:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\int_{-h/2}^{h/2} \underline{\sigma}^t dz \right) \underline{\varepsilon}_p dx dy + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\int_{-h/2}^{h/2} \underline{\sigma}^t z dz \right) \underline{\varepsilon}_f dx dy
 \end{aligned} \quad (1.18)$$

As expressões

$$\int_{-h/2}^{h/2} \underline{\sigma}^t dz \quad \text{e} \quad \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\sigma}^t z dz,$$

representam componentes de forças $\underline{N}$ e momentos $\underline{M}$ respectiva
mente, por unidade de comprimento, atuando no plano médio da
placa (Figura 2), sendo:

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \end{bmatrix}^t \quad (1.19)$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_{xy} \end{bmatrix}^t \quad (1.20)$$

e, portanto, utilizando-se (1.10) e (1.9), obtem-se:

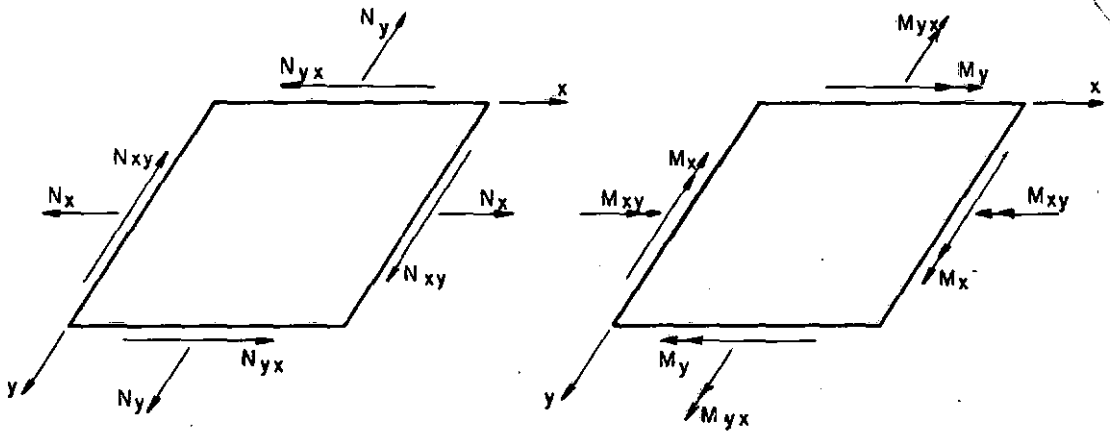


FIGURA 2 - Esforços no Plano Médio da Placa.

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, dz = D_p (u_{,x} + \nu v_{,y}) \\
 N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, dz = D_p (\nu u_{,x} + v_{,y}) \\
 N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, dz = \frac{D_p (1 - \nu)}{2} (u_{,y} + v_{,x})
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz = - D_f (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \\
 M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz = - D_f (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \\
 M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz = - (1 - \nu) D_f w_{,xy}
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

sendo:

$$D_p = \frac{Eh}{1 - \nu^2} = \text{rigidez no plano}$$

$$D_f = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} = \text{rigidez à flexão.}$$

A expressão da energia de deformação $\bar{e}$ então dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \underline{N}^t \underline{\epsilon}_p \, dx \, dy + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \underline{M}^t \underline{\epsilon}_f \, dx \, dy \tag{1.23}$$

em termos de esforços resultantes, ou

$$U_p = \frac{D_p}{2} \int_0^a \int_0^b \left[u_{,x}^2 + 2 \nu u_{,x} v_{,y} + v_{,y}^2 + \frac{1-\nu}{2} (u_{,y} + v_{,x})^2 \right] dx dy \quad (1.24)$$

$$U_f = \frac{D_f}{2} \int_0^a \int_0^b \left[w_{,xx}^2 + 2 \nu w_{,xx} w_{,yy} + w_{,yy}^2 + 2(1-\nu) w_{,xy}^2 \right] dx dy \quad (1.25)$$

em termos dos deslocamentos.

1.3.3 EXPRESSÃO DA ENERGIA CINÉTICA DE PLACA DELGADA

Em placas delgadas desprezando-se o efeito da inércia de rotação, tem-se:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx dy dz \quad (1.26)$$

que integrada em z resulta em:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \rho h (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx dy \quad (1.27)$$

Analogamente ao que foi feito no item anterior, pode-se separar a expressão acima em duas parcelas T_p e T_f correspondentes às energias cinéticas do estado plano e de flexão, respectivamente:

$$T_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \rho h (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dx dy \quad (1.28)$$

$$T_f = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \rho h \dot{w}^2 dx dy \quad (1.29)$$

1.4 FORÇAS DEVIDAS À MASSA MÓVEL - TRABALHO VIRTUAL DAS FORÇAS EXTERNAS

Dois tipos de solicitações são introduzidas na placa percorrida por uma massa móvel:

- a) força peso associada à massa $\underline{m}$ por unidade de área:

$$\underline{P} = \underline{m} \underline{g} \quad (1.30)$$

sendo $\underline{g}$ o vetor aceleração da gravidade;

- b) forças de inércia devidas ao movimento da massa e que pela segunda Lei de Newton, são dadas por:

$$\underline{F}_i = \underline{m} \underline{a} \quad (1.31)$$

sendo:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^t$$

a_x , a_y , a_z são componentes de acelerações absolutas (referencial inercial) da massa.

Supondo-se que a massa se desloque paralelamente ao eixo x , a sua componente de velocidade absoluta nessa direção, é dada por:

$$V_x = \dot{u} + \dot{\xi} \quad (1.32)$$

Admitindo-se que durante a travessia a massa jamais perde o contato com a placa, ou seja, as componentes dos deslocamentos dos dois corpos nas direções y e z são iguais, os deslocamentos v e w de um ponto sob a massa, podem ser escritos como:

$$v = v[x(t), y, t] \quad ; \quad w = w[x(t), y, t] \quad (1.33)$$

e, portanto, as componentes de velocidades nessas direções, são dadas por:

$$V_y = \dot{v} + \dot{\xi} v_{,x} \quad ; \quad V_z = \dot{w} + \dot{\xi} w_{,x} \quad (1.34)$$

Com o campo de velocidades dado por (1.32) e (1.34) as componentes de aceleração são:

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{u} + \dot{\xi} \dot{u}_{,x} + \ddot{\xi} \\ a_y &= \ddot{v} + 2 \dot{\xi} \dot{v}_{,x} + \dot{\xi}^2 v_{,xx} + \ddot{\xi} v_{,x} \\ a_z &= \ddot{w} + 2 \dot{\xi} \dot{w}_{,x} + \dot{\xi}^2 w_{,xx} + \ddot{\xi} w_{,x} \end{aligned} \quad (1.35)$$

e, portanto, as componentes de forças introduzidas na placa pela massa móvel são:

$$F_x = p_x - F_{ix} = p_x - m(\ddot{u} + \dot{\xi} \dot{u}_{,x} + \ddot{\xi})$$

$$F_y = p_y - F_{iy} = p_y - m(\ddot{v} + 2 \dot{\xi} \dot{v}_{,x} + \dot{\xi}^2 v_{,xx} + \ddot{\xi} v_{,x})$$

$$F_z = p_z - F_{iz} = p_z - m(\ddot{w} + 2 \dot{\xi} \dot{w}_{,x} + \dot{\xi}^2 w_{,xx} + \ddot{\xi} w_{,x})$$

(1.36)

onde p_x , p_y e p_z são as projeções de p sobre os eixos x , y e z , respectivamente.

Utilizando-se (1.4), obtem-se então o trabalho virtual das forças dadas por (1.36):

$$\begin{aligned} \delta W_p = & \int_{\xi(t)-c}^{\xi(t)} \int_{b_1}^{b_2} \left\{ \left[p_x - m(\ddot{u} + \dot{\xi} u_{,x} + \ddot{\xi}) \right] \delta u \right. \\ & \left. + \left[p_y - m(\ddot{v} + 2 \dot{\xi} v_{,x} + \dot{\xi}^2 v_{,xx} + \ddot{\xi} v_{,x}) \right] \delta v \right\} dx dy \end{aligned}$$

(1.37)

$$\delta W_f = \int_{\xi(t)-c}^{\xi(t)} \int \left[p_z - m(\ddot{w} + 2 \dot{\xi} \dot{w}_{,x} + \right. \\ \left. + \dot{\xi}^2 w_{,xx} + \ddot{\xi} w_{,x}) \right] \delta w \, dx \, dy \quad (1.38)$$

e,

$$\delta W = \delta W_p + \delta W_f. \quad (1.39)$$

1.5 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Com as expressões das energias de deformação e cinética e a do trabalho virtual das forças externas, obtidas nos parágrafos anteriores, pode-se então aplicar o princípio de Hamilton para a obtenção das equações do movimento do problema. Assim, levando-se os conjuntos de equações (1.24), (1.28), (1.37) e (1.25), (1.29), (1.38) em (1.1) e, efetuando-se as operações variacionais, obtem-se dois problemas de valor de contorno, com condições iniciais, independentes:

a) Estado Plano de Tensões

Equação do movimento:

$$D_p \left[u_{,xx} + \nu v_{,xy} + \frac{1-\nu}{2} (u_{,yy} + v_{,xy}) \right] - \rho h \ddot{u} =$$

$$= - \left[p_x - m(\ddot{u} + \dot{\xi} \dot{u}_{,x} + \ddot{\xi}) \right] H \quad (1.40-a)$$

$$D_p \left[\nu u_{,xy} + v_{,yy} + \frac{1-\nu}{2} (u_{,xy} + v_{,xx}) \right] - \rho h \ddot{v} =$$

$$= - \left[p_y - m(\ddot{v} + 2 \dot{\xi} \dot{v}_{,x} + \dot{\xi}^2 v_{,xx} + \ddot{\xi} v_{,x}) \right] H \quad (1.40-b)$$

Condições de Contorno:

$$\left. \begin{aligned} D_p (u_{,x} + \nu v_{,y}) \delta u &= 0 \\ \frac{D_p (1-\nu)}{2} (u_{,y} + v_{,x}) \delta v &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{em} \\ x = 0 \\ e \\ x = a \end{array} \quad \begin{array}{l} (1.41-a) \\ (1.41-b) \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} D_p (v u_{,x} + v_{,y}) \delta v &= 0 \\ \frac{D_p (1-\nu)}{2} (u_{,y} + v_{,x}) \delta u &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{em} \\ y = 0 \\ \text{e} \\ y = b \end{array} \quad \begin{array}{l} (1.41-c) \\ (1.41-d) \end{array}$$

b) Flexão de Placa

Equação do Movimento:

$$\begin{aligned} D_f \left[w_{,xxxx} + 2 w_{,xxyy} + w_{,yyyy} \right] + \rho h \ddot{w} &= \\ = \left[p_z - m(\ddot{w} + 2 \dot{\xi} \dot{w}_{,x} + \dot{\xi}^2 w_{,xx} + \ddot{\xi} w_{,x}) \right] H & \quad (1.42) \end{aligned}$$

Condições de Contorno:

$$\left. \begin{aligned} D_f \left[w_{,xxx} + (2 - \nu) w_{,xyy} \right] \delta w &= 0 \\ D_f \left[w_{,xx} + \nu w_{,yy} \right] \delta w_{,x} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{em} \\ x = 0 \\ \text{e} \\ x = a \end{array} \quad \begin{array}{l} (1.43-a) \\ (1.43-b) \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned}
 D_f \left[w_{,yyy} + (2 - \nu) w_{,yxx} \right] \delta w &= 0 \\
 D_f \left[w_{,yy} + \nu w_{,xx} \right] \delta w_{,y} &= 0
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{em} \\ y = 0 \\ \text{e} \\ y = b \end{array} \quad \begin{array}{l} (1.43-c) \\ (1.43-d) \end{array}$$

sendo:

$$H(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{para } \xi(t) - c < x < \xi(t) \\ 0, & \text{fora desse intervalo.} \end{cases} \quad (1.44)$$

Um problema, distinto dos descritos acima, é aquele em que a massa é distribuída por unidade de comprimento e se desloca sobre um dos bordos, por exemplo $y=0$, com componentes de força peso p_x e p_y apenas. (Figura 3).

Nesse caso, o único problema de resposta é o relativo a estado plano de tensões o qual é representado pelas equações:

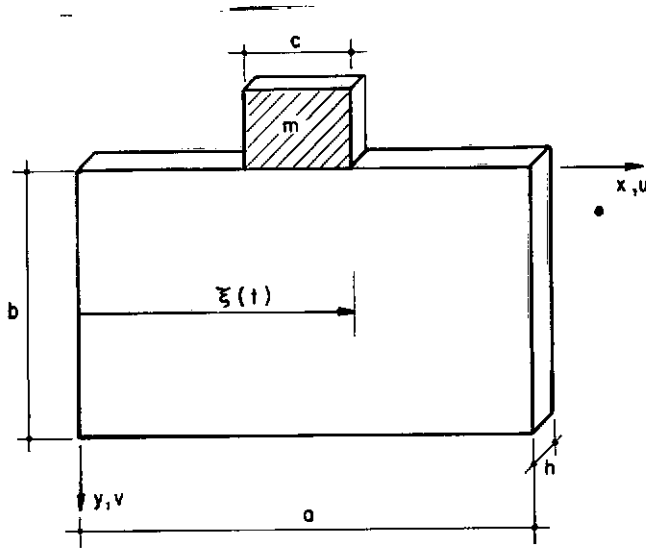


FIGURA 3 - Estado Plano de Tensões.

$$D_p \left[u_{,xx} + \nu v_{,xy} + \frac{1-\nu}{2} (u_{,yy} + v_{,xy}) \right] - \rho h \ddot{u} = 0 \quad (1.45)$$

$$D_p \left[\nu u_{,xy} + v_{,yy} + \frac{1-\nu}{2} (u_{,xy} + v_{,xx}) \right] - \rho h \ddot{v} = 0 \quad (1.46)$$

com as condições de contorno dadas por (1.41 a-d), exceto no bordo $y = 0$, onde elas passam a ser descritas por:

$$\left[p_y - m(\ddot{v} + 2 \dot{\xi} \dot{v}_{,x} + \dot{\xi}^2 v_{,xx} + \ddot{\xi} v_{,x}) \right] H - D_p (v u_{,x} + v_{,y}) \delta v = 0 \quad (1.47-a)$$

$$\left[p_x - m(\ddot{u} + \dot{\xi} \dot{u}_{,x} + \ddot{\xi}) \right] H - \frac{D_p (1-\nu)}{2} (u_{,y} + v_{,x}) \delta u = 0 \quad (1.47-b)$$

1.6 SOBRE A SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO

Analisando as equações (1.40 a-b) e (1.42) observa-se que os termos que aparecem no segundo membro destas equações dizem respeito a ação da carga móvel sobre a placa, sendo p_x , p_y , p_z as componentes da força peso, as parcelas restantes representam o efeito da inércia da massa móvel. Se não se considera a inércia do carregamento, as equações (1.40 a-b) e (1.42) ficam então reduzidas a:

$$D_p \left[u_{,xx} + v_{,xy} + \frac{1-v}{2} (u_{,yy} + v_{,xy}) \right] - \rho h \ddot{u} = p_x H \quad (1.40-c)$$

$$D_p \left[v_{,xy} + v_{,yy} + \frac{1-v}{2} (u_{,xy} + v_{,xx}) \right] - \rho h \ddot{v} = -p_y H \quad (1.40-d)$$

$$D_f \left[w_{,xxxx} + 2 w_{,xxyy} + w_{,yyyy} \right] + \rho h \ddot{w} = p_z H \quad (1.42-a)$$

Estas equações associadas a condições de contorno do tipo:

$$w = 0, \quad v = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = a \quad (1.48)$$

têm soluções na forma:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{j=1}^{\infty} U_j(y,t) \cos \frac{j\pi x}{a} \\ v(x,y,t) &= \sum_{j=1}^{\infty} V_j(y,t) \sin \frac{j\pi x}{a} \\ w(x,y,t) &= \sum_{j=1}^{\infty} W_j(y,t) \sin \frac{j\pi x}{a} \end{aligned} \quad (1.49)$$

que substituídas nas equações (1.40 c-d) e (1.42.a), fornecem um número infinito de sistemas de equações diferenciais em U_j , V_j , W_j e suas derivadas. A integração exata destes sistemas permite determinar a solução desse problema em forma fechada.

Entretanto, este tipo de solução não pode ser imediatamente estendido ao problema (1.40 a-b) e (1.42), mesmo com condições de contorno do tipo (1.48). Esta extensão não pode ser feita por duas razões:

- a) Os coeficientes dos termos relativos a inércia do carregamento não são constantes, uma vez que a massa móvel é apenas parcialmente distribuída ao longo de x , como indica a função H .
- b) No segundo membro das equações (1.40 a-b) e (1.42) aparecem derivadas de ordem ímpar em x nas variáveis u , v e w .

Está clara a grande dificuldade de se obter soluções analíticas e, por isto mesmo, este problema será tratado numericamente, usando-se um desenvolvimento em série de Fourier do tipo (1.49), embora esta série não constitua uma base completa para as soluções dos problemas (1.40 a-b) e (1.42). Os erros nesta aproximação crescem na medida em que aumenta a relação c/a .

CAPÍTULO II

SOLUÇÃO NUMÉRICA - MÉTODO SEMI-ANALÍTICO

2.1 INTRODUÇÃO

Uma solução aproximada para o problema formulado no Capítulo anterior e descrito pelas equações (1.40) e (1.42) com condições de contorno (1.48), consiste na utilização do método semi-analítico ou mais precisamente, método das faixas finitas, desenvolvido por Cheung (4 a 8). De acordo com esta técnica, associa-se ao desenvolvimento em série de Fourier descrito por (1.49), uma interpolação de elementos finitos na variável y , obtendo-se assim um sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo. Este tipo de tratamento numérico será aqui utilizado na análise dinâmica de estruturas compostas por placas delgadas e sujeitas à ação de cargas móveis com massa.

2.2 MÉTODO SEMI-ANALÍTICO - FAIXAS FINITAS

Para a aplicação do método das faixas finitas ao problema em estudo, a estrutura é discretizada em um número N_e de faixas longitudinais, conforme mostrado na Figura 4. As propriedades de cada faixa são tomadas constantes, podendo variar de faixa para faixa.

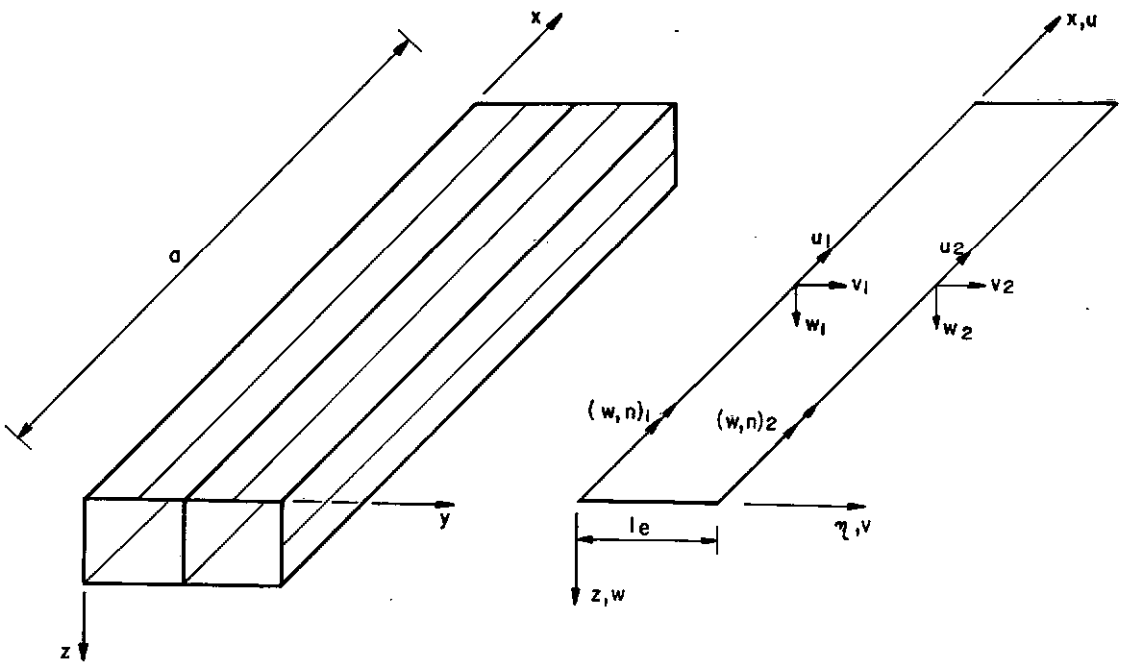


FIGURA 4 - Discretização em Faixas Finitas.

As funções de interpolação que definem o estado de deslocamentos no interior de cada um destes elementos, são:

$$\begin{aligned}
 u^e(x, n, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \cos \frac{j\pi x}{a} \underline{L}(n) \underline{U}_j^e(t) \\
 v^e(x, n, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{a} \underline{L}(n) \underline{V}_j^e(t) \\
 w^e(x, n, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{a} \underline{N}(n) \underline{W}_j^e(t)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\underline{U}_j^e$, $\underline{V}_j^e$ e $\underline{W}_j^e$ são os vetores dos deslocamentos nodais generalizados, de um elemento genérico e , referentes ao j -ésimo termo do desenvolvimento em série e dados por:

$$\begin{aligned}
 (\underline{U}_j^e)^t &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}_j \\
 (\underline{V}_j^e)^t &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}_j \\
 (\underline{W}_j^e)^t &= \begin{bmatrix} w_1, (w, \eta)_1, w_2, (w, \eta)_2 \end{bmatrix}_j
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

sendo os índices 1 e 2 referentes aos lados (linhas nodais) de uma faixa. Por conveniência, na montagem das matrizes globais, os vetores acima são colocados em um único vetor:

$$(\underline{D}_j^e)^t = \begin{bmatrix} u_1, v_1, w_1, (w, \eta)_1, u_2, v_2, w_2, (w, \eta)_2 \end{bmatrix}_j \tag{2.3}$$

As componentes de $\underline{L}(n)$ e $\underline{N}(n)$ são as funções de interpolação de Hermite, de ordem 0 e 1 respectivamente, ou seja:

$$\underline{L}(n) = \left[1 - n/\ell, n/\ell \right] \quad (2.4)$$

$$\underline{N}(n) = \left[1 - 3(n/\ell)^2 + 2(n/\ell)^3, n - 2n^2/\ell + n^3/\ell^2, \right. \\ \left. 3(n/\ell)^2 - 2(n/\ell)^3, -n^2/\ell + n^3/\ell^2 \right] \quad (2.5)$$

onde ℓ é a largura do elemento e $n \in [0, \ell]$, representa uma coordenada local definida sobre este elemento.

2.3 PRINCÍPIO DE HAMILTON DISCRETIZADO - EQUAÇÕES MATRICIAIS DO MOVIMENTO

Desde que as expressões (2.1) obedecem aos critérios de convergência, as energias cinética e de deformação e o trabalho virtual das forças externas totais, podem ser obtidas somando-se as contribuições de todos os elementos. Dessa forma, a expressão do princípio de Hamilton (1.1), pode ser escrita como:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{e=1}^N \left[\delta(T_e - U_e) + \delta W_e \right] dt = 0 \quad (2.6)$$

onde T_e , U_e e δW_e representam as energias cinética e de deformação e o trabalho virtual das forças externas referentes ao elemento e .

Levando-se (2.1) em (1.24), (1.25), (1.27), (1.37) e (1.38) e substituindo-se em (2.6), obtem-se um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias no tempo, do tipo:

$$\underline{M} \ddot{\underline{D}}(t) + \underline{K} \underline{D}(t) + \underline{Q}(t) = \underline{F}(t) \quad (2.7)$$

Devido à ortogonalidade das funções

$$\text{sen } \frac{j\pi x}{a} \quad \text{e} \quad \cos \frac{j\pi x}{a}$$

no intervalo $[0, a]$, as integrais do tipo

$$\int_0^a \text{sen } \frac{j\pi x}{a} \text{sen } \frac{k\pi x}{a} dx$$

$$\int_0^a \cos \frac{j\pi x}{a} \cos \frac{k\pi x}{a} dx$$

são nulas para $j \neq k$ e iguais a $a/2$ para $j = k$. Assim, as matrizes $\underline{M}$ e $\underline{K}$, referentes às propriedades de massa e de rigidez da estrutura, têm a forma:

$$\begin{aligned}
 \underline{M} &= \begin{bmatrix} \underline{M}_{11} & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \dots \\ \underline{0} & \underline{M}_{22} & \dots & \underline{0} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{M}_{jj} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots \end{bmatrix} ; \\
 \underline{K} &= \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \dots \\ \underline{0} & \underline{K}_{22} & \dots & \underline{0} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{K}_{jj} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

onde as submatrizes $\underline{M}_{jj}$ e $\underline{K}_{jj}$ são de ordem $N \times N$ (N = número de graus de liberdade da estrutura discretizada) e correspondem ao j -ésimo termo do desenvolvimento (2.1), sendo obtidas por "soma" conveniente das correspondentes matrizes $\underline{M}_{jj}^e$ e $\underline{K}_{jj}^e$ dos elementos (Ver Apêndice).

O vetor $\underline{D}$ contém os deslocamentos generalizados e $\underline{F}$ é o vetor das ações generalizadas, independentes de $\underline{D}$:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \underline{D}_1 \\ \vdots \\ \underline{D}_2 \\ \vdots \\ \underline{D}_j \\ \vdots \end{bmatrix} ; \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} \underline{F}_1 \\ \vdots \\ \underline{F}_2 \\ \vdots \\ \underline{F}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

O vetor $\underline{Q}$ representa a ação da inércia da massa m sobre a estrutura e é dado por:

$$\underline{Q}(t) = \underline{M}^*(t) \ddot{\underline{D}}(t) + \underline{C}^*(t) \dot{\underline{D}}(t) + \underline{K}^*(t) \underline{D}(t) \quad (2.10)$$

Como as integrais que aparecem em (1.37) e (1.38) não se estendem a todo o intervalo $[0, a]$, a propriedade de ortogonalidade das funções

$$\text{sen } \frac{j\pi x}{a} \quad \text{e} \quad \cos \frac{j\pi x}{a}$$

não mais se verifica, implicando assim no acoplamento entre os distintos termos do desenvolvimento (2.1). Portanto, $\underline{Q}(t)$ tem a forma:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_j \\ \vdots \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \tilde{M}_{11}^* & \tilde{M}_{12}^* & \dots & \tilde{M}_{1k}^* & \dots \\ \tilde{M}_{21}^* & \tilde{M}_{22}^* & \dots & \tilde{M}_{2k}^* & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \tilde{M}_{j1}^* & \tilde{M}_{j2}^* & & \tilde{M}_{jk}^* & \dots \\ \dots & \dots & & \dots & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{D}_1 \\ \ddot{D}_2 \\ \vdots \\ \ddot{D}_j \\ \vdots \end{array} \right\} + \\
& + \left[\begin{array}{cccc} \tilde{C}_{11}^* & \tilde{C}_{12}^* & \dots & \tilde{C}_{1k}^* & \dots \\ \tilde{C}_{21}^* & \tilde{C}_{22}^* & \dots & \tilde{C}_{2k}^* & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \tilde{C}_{j1}^* & \tilde{C}_{j2}^* & & \tilde{C}_{jk}^* & \dots \\ \dots & \dots & & \dots & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{D}_1 \\ \dot{D}_2 \\ \vdots \\ \dot{D}_j \\ \vdots \end{array} \right\} + \\
& + \left[\begin{array}{cccc} \tilde{K}_{11}^* & \tilde{K}_{12}^* & \dots & \tilde{K}_{1k}^* & \dots \\ \tilde{K}_{21}^* & \tilde{K}_{22}^* & \dots & \tilde{K}_{2k}^* & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \tilde{K}_{j1}^* & \tilde{K}_{j2}^* & \dots & \tilde{K}_{jk}^* & \dots \\ \dots & \dots & & \dots & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_j \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (2.11)
\end{aligned}$$

As submatrizes $\underline{M}_{jk}^*$, $\underline{C}_{jk}^*$ e $\underline{K}_{jk}^*$ são também de ordem $N \times N$ e são obtidas a partir das matrizes $\underline{M}_{jk}^{*e}$, $\underline{C}_{jk}^{*e}$ e $\underline{K}_{jk}^{*e}$, das no Apêndice.

Para a obtenção da solução da equação (2.7), torna-se necessário truncar a série (2.1) em um número finito de termos n , resultando portanto, devido ao acoplamento dos harmônicos, em um sistema de ordem $n.N$.

2.4 INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Os métodos normalmente utilizados para o cálculo da resposta dinâmica, são:

- a) Método da Superposição Modal
- b) Integração Passo a Passo.

O método da superposição modal, aplica-se bem a problemas em que as frequências e modos mais baixos contribuem significativamente para a resposta dinâmica. Entretanto, nos problemas em que as matrizes de massa, rigidez e eventualmente a de amortecimento são funções do tempo, a superposição modal não mais pode ser utilizada tornando-se necessária a integra

ção direta das equações diferenciais do movimento; utiliza-se então a técnica de integração passo a passo.

Em ambos os métodos, o conhecimento das propriedades vibratórias da estrutura (frequências e modos normais) é importante: na superposição modal estas propriedades são utilizadas diretamente enquanto que na integração passo a passo, a eficiência do algoritmo na correta previsão da resposta da estrutura, depende do intervalo de tempo utilizado no processo de integração numérica, o qual deve ser função dos períodos de vibrações associados aos modos preponderantes (16, 21). Por esta razão, é necessário analisar-se as vibrações livres da estrutura.

2.4.1 VIBRAÇÕES LIVRES

Quando não se considera a inércia do carregamento ($\underline{Q} = \underline{0}$), o problema de vibrações livres associado à equação (2.7), se desacopla em n sistemas independentes de ordem N :

$$\underline{M}_{jj} \ddot{\underline{D}}_j(t) + \underline{K}_{jj} \underline{D}_j(t) = \underline{0} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.12)$$

e cujas soluções são da forma:

$$\underline{\bar{D}}_j(t) = \underline{\bar{D}}_j e^{i\omega_j t} \quad (2.13)$$

que substituída na equação anterior, conduz ao seguinte problema de autovalor algébrico em ω_j^2 :

$$\omega_j^2 \underline{\bar{M}}_{jj} \underline{\bar{D}}_j = \underline{\bar{K}}_{jj} \underline{\bar{D}}_j \quad (2.14)$$

A solução de (2.14) fornece as N frequências naturais e os correspondentes modos normais de vibração, associados ao j-ésimo termo do desenvolvimento (2.1).

2.4.2 INTEGRAÇÃO PASSO A PASSO - MÉTODO DE NEWMARK

Os métodos de integração passo a passo utilizados na resolução de problemas vibratórios, do tipo descrito pela equação (2.7), associam através de uma transformação linear, os deslocamentos, velocidades e acelerações nodais em um instante t_{n+1} de uma discretização no tempo, aos seus valores no instante anterior t_n . Essa transformação é geralmente uma função do intervalo de tempo ($\Delta t = t_{n+1} - t_n$) e das propriedades físicas do sistema.

No método de Newmark (16,21,26,27), os deslocamentos e as velocidades no final de um intervalo de tempo $\tau = \Delta t$, são expressos por um desenvolvimento em série de Taylor com respeito, em torno de ponto $\tau = 0$, correspondente ao início do intervalo considerado. Assim, tem-se que:

$$\underline{\underline{D}}_{n+1} = \underline{\underline{D}}_n + \Delta t \dot{\underline{\underline{D}}}_n + \int_0^{\Delta t} (\Delta t - \tau) \ddot{\underline{\underline{D}}}(\tau) d\tau \quad (2.15)$$

$$\dot{\underline{\underline{D}}}_{n+1} = \dot{\underline{\underline{D}}}_n + \int_0^{\Delta t} \ddot{\underline{\underline{D}}}(\tau) d\tau \quad (2.16)$$

A integração das equações acima, é feita admitindo-se que a aceleração é uma função seccionalmente linear no intervalo $|0, \Delta t|$. Resulta então que:

$$\underline{\underline{D}}_{n+1} = \underline{\underline{D}}_n + \Delta t \dot{\underline{\underline{D}}}_n + (1/2 - \beta) \Delta t^2 \ddot{\underline{\underline{D}}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\underline{\underline{D}}}_{n+1} \quad (2.17)$$

$$\dot{\underline{\underline{D}}}_{n+1} = \dot{\underline{\underline{D}}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\underline{\underline{D}}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\underline{\underline{D}}}_{n+1} \quad (2.18)$$

onde β e γ são parâmetros livres adimensionais, introduzidos na avaliação das integrais de (2.15) e (2.16).

Com as expressões (2.17) e (2.18), os deslocamentos e velocidades em um instante t_{n+1} , podem ser obtidos desde que sejam conhecidos os deslocamentos, velocidades e acelerações no instante anterior t_n e as acelerações no instante t_{n+1} , as quais são obtidas diretamente a partir das equações do movimento.

A equação (2.7) pode ser escrita, utilizando-se (2.10), como:

$$(\underline{M} + \underline{M}^*) \ddot{\underline{D}} + \underline{C}^* \dot{\underline{D}} + (\underline{K} + \underline{K}^*) \underline{D} = \underline{F} \quad (2.19)$$

que particularizada para um instante t_{n+1} , transforma-se em:

$$(\underline{M} + \underline{M}_{n+1}^*) \ddot{\underline{D}}_{n+1} + \underline{C}_{n+1}^* \dot{\underline{D}}_{n+1} + (\underline{K} + \underline{K}_{n+1}^*) \underline{D}_{n+1} = \underline{F}_{n+1} \quad (2.20)$$

Utilizando-se as expressões (2.17) e (2.18), tem-se:

$$(\bar{\underline{M}} + \bar{\underline{M}}_{n+1}^*) \ddot{\underline{D}}_{n+1} = \bar{\underline{F}}_{n+1}^* \quad (2.21)$$

onde:

$$\bar{M} = \underline{M} + \beta \Delta t^2 \underline{K}$$

$$\bar{M}_{n+1}^* = \underline{M}_{n+1}^* + \gamma \Delta t \underline{C}_{n+1}^* + \beta \Delta t^2 \underline{K}_{n+1}^* \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{n+1}^* = \underline{F}_{n+1} - \underline{C}_{n+1}^* & \left[\dot{\underline{D}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\underline{D}}_n \right] \\ & - (\underline{K} + \underline{K}_{n+1}^*) \left[\underline{D}_n + \Delta t \dot{\underline{D}}_n + (1/2 - \beta) \Delta t^2 \ddot{\underline{D}}_n \right] \end{aligned}$$

As acelerações no instante t_{n+1} são obtidas a partir de (2.21) e utilizando-se (2.17) e (2.18) obtém-se os deslocamentos e velocidades nesse instante, possibilitando assim o prosseguimento da solução.

A escolha dos parâmetros γ e β e do intervalo de tempo Δt , não deve ser feita arbitrariamente. No caso de um sistema com um grau de liberdade por exemplo, mostra-se que deles depende a estabilidade e a convergência da solução obtida através da integração passo a passo. Para tal sistema, o limite de estabilidade imposto a Δt é:

$$\Delta t < \left[\frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 - \beta \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{T}{2\pi} \quad (2.23)$$

onde T representa o período de vibração do sistema. Portanto, para que o algoritmo seja incondicionalmente estável, deve-se ter:

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (2.24)$$

Mostra-se também que para $\gamma < 1/2$, um amortecimento negativo é introduzido tornando a resposta ilimitada com o tempo ao passo que para $\gamma > 1/2$ o amortecimento introduzido é positivo fazendo com que a resposta seja anulada à medida que se avança com o tempo. Dessa forma, quando são tomados os valores.

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \beta \geq \frac{1}{4} \quad (2.25)$$

a equação (2.24) é satisfeita e fica portanto garantido que o algoritmo será incondicionalmente estável e não introduzirá amortecimento na resposta do sistema.

Neste trabalho utilizou-se sempre os valores $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$ o que significa que as acelerações em cada intervalo foram tomadas constantes e iguais à aceleração média.

2.5 RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Quando a inércia do carregamento não é considerada, o sistema (2.7) se desacopla em n sistemas independentes de ordem N da forma:

$$\underline{M}_{jj} \ddot{\underline{D}}_j(t) + \underline{K}_{jj} \underline{D}(t) = \underline{F}_j(t) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.26)$$

Cada sistema é então resolvido separadamente * e a resposta da estrutura é obtida somando-se as parcelas relativas a cada harmônico:

$$\underline{D} = \underline{D}_1 + \underline{D}_2 + \dots + \underline{D}_n$$

$$\dot{\underline{D}} = \dot{\underline{D}}_1 + \dot{\underline{D}}_2 + \dots + \dot{\underline{D}}_n \quad (2.27)$$

$$\ddot{\underline{D}} = \ddot{\underline{D}}_1 + \ddot{\underline{D}}_2 + \dots + \ddot{\underline{D}}_n$$

* Embora neste caso seja possível obter-se a solução por superposição modal, utilizou-se aqui, o método de Newmark.

Se os termos relativos à inércia da massa são mantidos, o sistema (2.7) não mais se desacopla e deve-se então resolver a cada instante, um sistema de ordem $n.N..$ A resolução de tal sistema, torna-se bastante incômoda à medida em que cresce o número de harmônicos considerados, ou o número de graus de liberdade da estrutura.

Neste trabalho, considerou-se então que a massa móvel se desloca apenas sobre um elemento da estrutura discretizada. Nessas condições, o vetor $\underline{F}_j$ e as matrizes $\underline{M}_{ij}^*$, $\underline{C}_{ij}^*$, $\underline{K}_{ij}^*$, são da forma:

$$\underline{F}_j = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{F}_j^c \\ \underline{0} \end{bmatrix}, \quad \underline{M}_{ij}^* (\underline{C}_{ij}^*, \underline{K}_{ij}^*) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}_{ij}^{*c} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix}$$

(2.28)

sendo que $\underline{F}_j^c$ e $\underline{M}_{ij}^{*c}$ ($\underline{C}_{ij}^{*c}$, $\underline{K}_{ij}^{*c}$) ocupam as posições relativas ao elemento carregado e, portanto, são de ordem $NG \times 1$ e $NG \times NG$ (NG = número de graus de liberdade de um elemento), respectivamente.

Como as matrizes $\bar{M}_{ij}^*$ têm a mesma estrutura que $\bar{M}_{ij}^*(C_{ij}^*, K_{ij}^*)$, os produtos $\bar{M}_{ii}^{-1} \bar{M}_{ij}^*$ terão a forma:

$$\bar{M}_{ii}^{-1} \bar{M}_{ij}^* = \bar{B}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{B}_{ij}^1 & 0 \\ 0 & \bar{B}_{ij}^2 & 0 \\ 0 & \bar{B}_{ij}^3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} * \\ \text{NG} \\ * \end{array} \quad \begin{array}{c} * \\ N \\ * \end{array} \quad (2.31)$$

* ————— *

NG

onde as submatrizes $\bar{B}_{ij}^2$ referem-se ao elemento carregado com a massa móvel.

Decompondo-se os vetores $\bar{M}_{ii}^{-1} \bar{F}_i^*$ e $\ddot{D}_i$ de maneira análoga à realizada com as matrizes $\bar{B}_{ij}$, verifica-se que os produtos $\bar{B}_{ij} \ddot{D}_j$ têm a forma:

$$\bar{B}_{ij} \ddot{D}_j = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{B}_{ij}^1 & \bar{D}_j^2 \\ \bar{B}_{ij}^2 & \bar{D}_j^2 \\ \bar{B}_{ij}^3 & \bar{D}_j^2 \end{bmatrix} \right\} \quad \begin{array}{c} * \\ \text{NG} \\ * \end{array} \quad \begin{array}{c} * \\ N \\ * \end{array} \quad (2.32)$$

onde I é a matriz identidade de ordem $NG \times NG$. Portanto, resolve-se um sistema de ordem $n.NG$ em lugar do sistema inicial de ordem $n.N$. Obtidas as $\ddot{\tilde{D}}_i^2$, as demais acelerações nodais são dadas por:

$$\ddot{\tilde{D}}_i^1 = \tilde{P}_i^1 - \tilde{B}_{i1}^1 \tilde{D}_1^2 - \tilde{B}_{i2}^1 \tilde{D}_2^2 - \dots - \tilde{B}_{in}^1 \ddot{\tilde{D}}_n^2 \quad (2.35)$$

$$\ddot{\tilde{D}}_i^3 = \tilde{P}_i^3 - \tilde{B}_{i1}^3 \tilde{D}_1^2 - \tilde{B}_{i2}^3 \ddot{\tilde{D}}_2^2 - \dots - \tilde{B}_{in}^3 \ddot{\tilde{D}}_n^2$$

Com as acelerações em um determinado instante, os deslocamentos e as velocidades neste instante, são calculados através de (2.17) e (2.18). A resposta total para os harmônicos considerados, é dada pelas expressões (2.27).

CAPÍTULO III

RESULTADOS E CONCLUSÕES

3.1 INTRODUÇÃO

Baseado no desenvolvimento dos capítulos anteriores, foi elaborado um programa automático com a finalidade de obter-se as soluções estáticas, frequências, modos normais de vibração e a resposta dinâmica a cargas móveis, de estruturas prismáticas laminares apoiadas nas extremidades.

Apresentam-se aqui resultados obtidos da aplicação deste programa a três problemas distintos:

- 1) Viga bi-apoiada
- 2) Placa apoiada nos bordos
- 3) Viga celular bi-apoiada.

Nos três casos foram determinados diversos coeficientes de im

pacto, definidos como sendo a relação entre o máximo deslocamento ou esforço dinâmico, e o máximo deslocamento ou esforço estático respectivamente, de um determinado ponto.

Apresentam-se também "curvas de história" e, no caso da viga de seção celular, "espectros de amplificação". Nas curvas de história, traçadas para um determinado ponto, as abscissas representam o tempo dividido pelo tempo de travessia enquanto que as ordenadas representam a relação entre o deslocamento ou esforço dinâmico e o máximo deslocamento ou esforço estático respectivamente, do ponto considerado. Os espectros de amplificação são curvas nas quais os coeficientes de impacto são representados contra "parâmetros de velocidade" definidos por:

$$X = \frac{\dot{\xi} T}{2 a}$$

sendo T o período fundamental da estrutura.

Os resultados são apresentados também em função dos seguintes parâmetros adimensionais relativos à massa móvel e a sua distribuição:

$$\alpha = \frac{b_2 - b_1}{b}$$

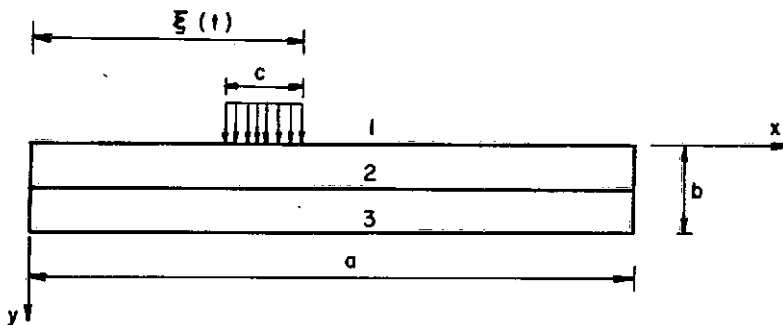
$$\gamma = \frac{c}{a}$$

$$\beta = \frac{m_t}{M}$$

onde m_t representa a massa total do carregamento e M a massa da estrutura.

3.2 VIGA BI-APOIADA

O exemplo analisado (Figura 5) foi extraído da referência (21) onde o problema é tratado através do método dos elementos finitos aplicado à teoria simples de viga.



$$\begin{array}{lll} E = 3.0 \times 10^6 \text{ t}^*/\text{m}^2 & \nu = 0.0 & \rho = 0.24 \text{ t}^*.\text{s}^2/\text{m}^4 \\ a = 54.5\text{m} & b = 2.0\text{m} & h = 0.5\text{m} \end{array}$$

FIGURA 5 - Viga bi-apoiada - Discretização em Faixas Finitas.

Na Tabela 1 apresentam-se os coeficientes de impacto dos deslocamentos verticais no ponto médio da viga, obtidos para diversos valores de γ e β e para $\chi = 0.5$ que corresponde a um tempo de travessia igual ao período fundamental. Os coeficientes foram obtidos com os três primeiros termos da série de Fourier.

TABELA 1 - Coeficientes de Impacto Para Viga Bi-apoiada

$\beta \backslash \gamma$	0	2	5	10
0,01	1,698 (1,70)	3,335 (3,37)	5,149 (5,55)	6,232 (7,51)
0,1	1,691 (1,69)	3,321 (3,40)	5,168 (5,46)	6,641 (7,58)
1	1,300 (1,33)	2,737 (2,96)	5,820 (6,51)	14,037 (14,66)
∞	1,300 (1,33)	3,159 (3,47)	instável (instável)	instável (instável)

OBS.: Os números entre parêntesis correspondem à Referência (21).

Na coluna $\beta = 0$ (correspondente ao caso em que não se considera a inércia do carregamento) observa-se uma boa concordância entre os resultados fornecidos pelas duas teorias.

Entretanto, à medida em que cresce o valor de β , os resultados obtidos pelas duas formulações, embora ainda estejam próximos apresentam uma maior discordância. Isso deve-se em parte aos fatos de terem sido tomados apenas os três primeiros harmônicos e, também, de ter se considerado a massa percorrendo a viga sobre o seu bordo superior (linha nodal 1) e não sobre o seu eixo como é feito na teoria de vigas. Assim é que no caso de $\beta = 5$ e $\gamma = 0,01$, quando se supõe que a massa percorre a viga sobre o seu eixo, obtem-se coeficiente de impacto igual a 5,389. Se além disso os cinco primeiros harmônicos são utilizados, obtem-se um valor igual a 5,440.

Como ilustração, apresenta-se na Tabela 2 a relação (Δ) entre os coeficientes obtidos com a carga sobre o bordo e a carga sobre o eixo da viga, em função da relação ($\bar{b}$) entre a sua altura e o seu comprimento. Adotou-se aí, $\chi = 0,5$, $\beta = 1$ e $\gamma = 0,01$. Nota-se que à medida em que cresce a altura, diminui a relação Δ a qual é também uma função de β . Para valores pequenos de $\bar{b}$ e β , os coeficientes de impacto praticamente não variam com a posição da carga ($\Delta = 1$).

TABELA 2 - Coeficientes de Impacto em Função da Altura.

$\bar{b}$	0,02	0,06	0,1	0,14	0,18
Δ	1,0	0,99	0,99	0,98	0,96

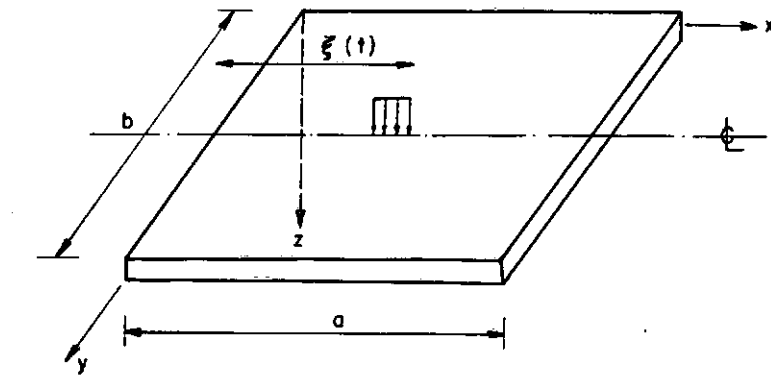
Finalmente, as colunas $\beta = 2$ e $\beta = 5$ da Tabela 1, confirmam a hipótese de que $\tilde{a}$ medida em que cresce o valor de γ , cresce também o erro na resposta da estrutura. (Ver item 1.6).

3.3 PLACA APOIADA NOS BORDOS

Foram determinados alguns coeficientes de impacto para a deflexão no ponto central de uma placa apoiada nos quatro bordos. O exemplo foi estudado por Yoshida (34), através de elementos finitos retangulares com dezesseis graus de liberdade (ω , $\omega_{,x}$, $\omega_{,y}$, $\omega_{,xy}$, por $n\bar{o}$).

A massa percorre a placa sobre o seu eixo de simetria

tria (Figura 6) com velocidade constante tal que $\chi = 0,125$ ou seja, o tempo de travessia $\bar{e}$ quatro vezes maior que o período fundamental e, embora Yoshida tenha analisado o caso de massa concentrada, aqui esta massa $\bar{e}$ parcialmente distribuída sobre uma linha nodal sendo os coeficientes $\gamma = 0,025$, portanto pequeno o bastante para possibilitar uma comparação, e $\alpha = 0$.



$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\rho = 0,001 \text{ lb.s}^2/\text{in}^4$$

$$a = b = 4 \text{ in}$$

$$h = 0,1 \text{ in}$$

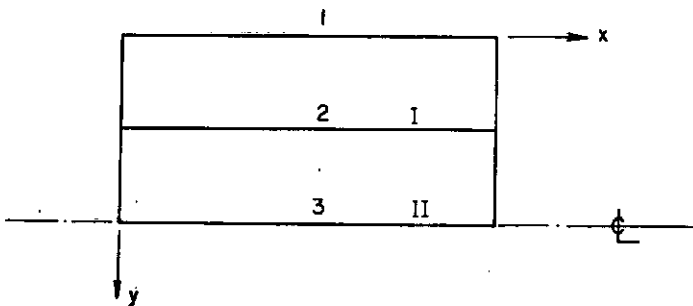


FIGURA 6 - Placa Apoiada nos Bordos - Discretização em Faixas Finitas.

Na Tabela 3, apresentam-se os coeficientes de impacto obtidos para diversos valores de β . Em seguida, no Gráfico 1 são mostradas as curvas de história para os valores $\beta = 3$ e $\beta = 10$.

TABELA 3 - Coeficientes de Impacto Para Placa.

β	Presente Trabalho	Yoshida
0	1,082	1,088
0,1	1,098	1,125
1	1,101	1,111
3	1,555	1,505
10	3,657	extremamente grande

Observa-se que, com exceção dos valores correspondentes a $\beta = 10$, há uma boa concordância entre os resultados.

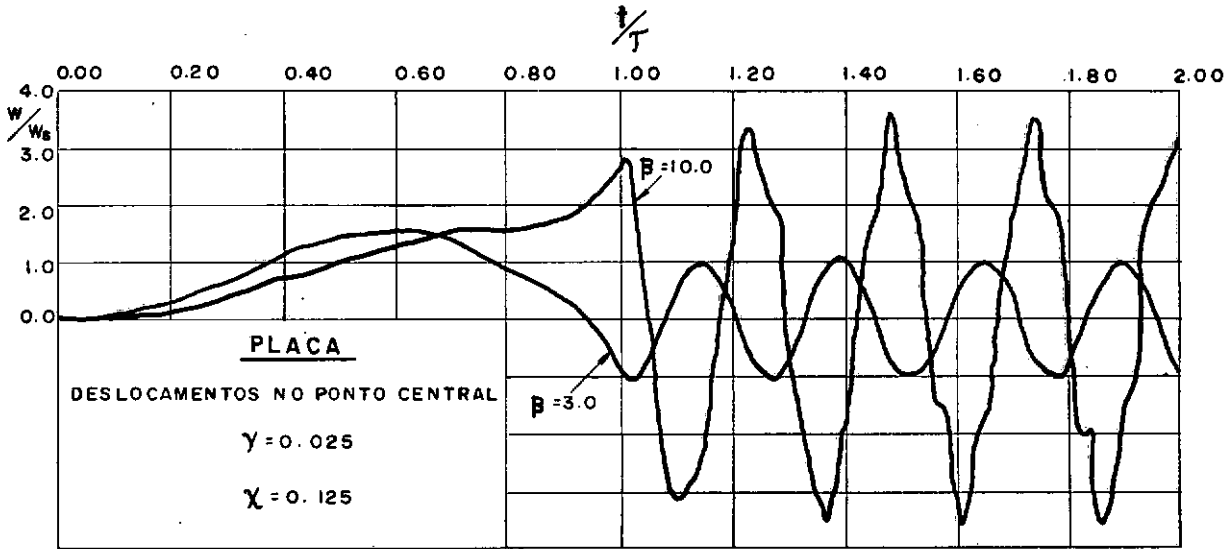
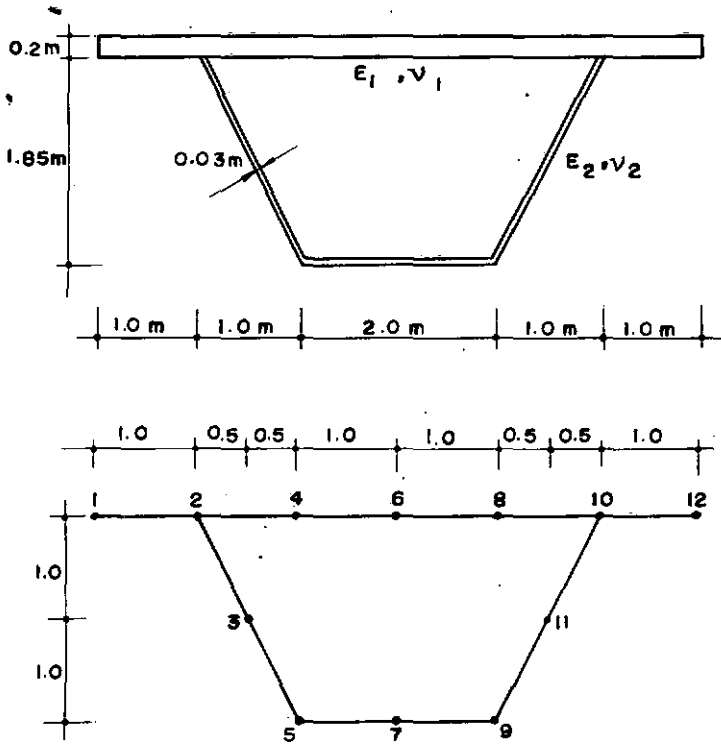


GRÁFICO 1

3.4 VIGA CELULAR BI-APOIADA

Finalmente, apresentam-se alguns resultados relativos às vibrações livres e à resposta dinâmica de uma viga celular constituída por dois materiais diferentes e cuja seção transversal é apresentada na Figura 7.



$$\begin{aligned}
 E_1 &= 3 \times 10^6 \text{ t}^* / \text{m}^2 \\
 \nu_1 &= 0,2 \\
 \rho_1 &= 0,24 \text{ t}^* \text{ s}^2 / \text{m}^4 \\
 E_2 &= 2,1 \times 10^7 \text{ t}^* / \text{m}^2 \\
 \nu_2 &= 0,3 \\
 \rho_2 &= 0,78 \text{ t}^* \text{ s}^2 / \text{m}^4 \\
 a &= 40 \text{ m} \\
 T &= 0,30589 \text{ s} \\
 M &= 17,578 \text{ t}
 \end{aligned}$$

FIGURA 7 - Viga de Seção Celular - Discretização em Faixas Finitas.

Na Tabela 4 são mostradas as cinco primeiras frequências naturais correspondentes aos quatro primeiros modos longitudinais. Na Figura 8, estão desenhados os modos normais de vibração referentes a $j = 1$.

TABELA 4 - Frequências Naturais.

Frequências Modos Longitudinais	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
j = 1	20,540	37,083	50,881	119,226	134,890
j = 2	71,888	74,179	124,385	134,764	155,862
j = 3	120,135	120,524	136,504	187,631	196,004
j = 4	131,079	151,489	160,866	227,043	240,895

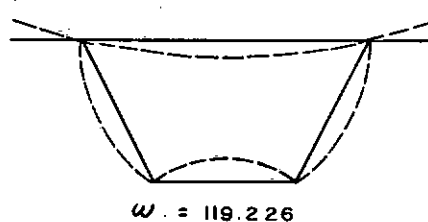
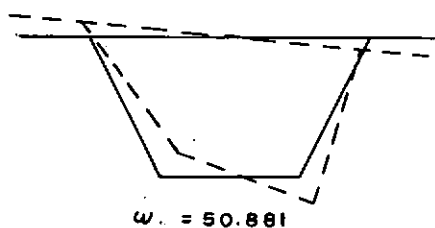
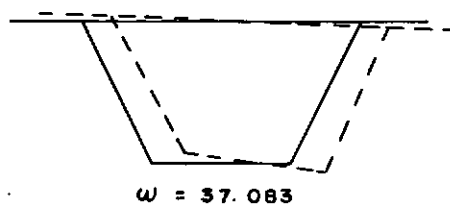
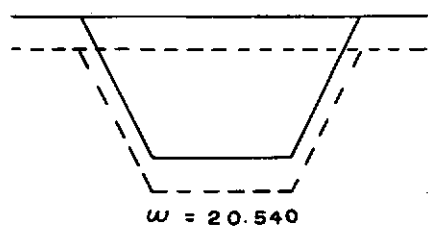


FIGURA 8 - Modos Normais de Vibração - Primeiro Harmônico.

Na Referência (17), com o mesmo programa aqui utilizado, obteve-se bons resultados para as frequências naturais de uma estrutura bi-apoiada, formada por placas delgadas.

Para a obtenção da resposta dinâmica, utilizou-se um carregamento com massa distribuída numa superfície de $(1 \times 4)\text{m}^2$ e valores de β iguais a zero, meio e um. Analisaram-se então duas situações: a) o carregamento deslocando-se segundo o eixo de simetria da seção; b) o carregamento deslocando-se sobre a extremidade direita da seção. No primeiro caso as curvas de história são traçadas para o ponto médio da placa superior, na seção a meio vão; no segundo caso essas curvas são traçadas para o ponto na extremidade direita da placa superior, também na seção a meio vão.

Embora para os esforços, a convergência seja bastante lenta sendo necessário que se considere muitos termos da série de Fourier, todos os coeficientes de impacto aqui apresentados foram obtidos com os três primeiros termos. Isso deveu-se à observação de que embora sendo lenta a convergência dos esforços, seus coeficientes de impacto não se alteram muito à medida em que se considera um maior número de harmônicos. Esse fato é ilustrado pelos Gráficos 2 e 3 onde são traçadas as curvas de história para os deslocamentos e momentos longitudinais respectivamente, utilizando-se um, três e cinco harmônicos.

Na Tabela 5 são dados os coeficientes de impacto correspondentes às situações apresentadas nos Gráficos 2 e 3.

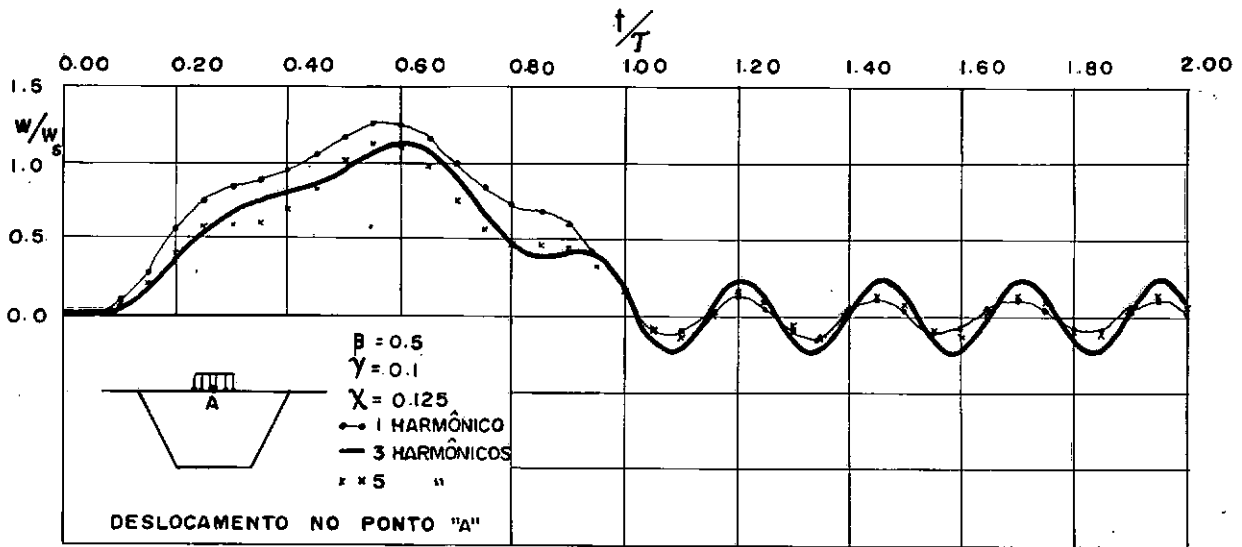


GRÁFICO 2

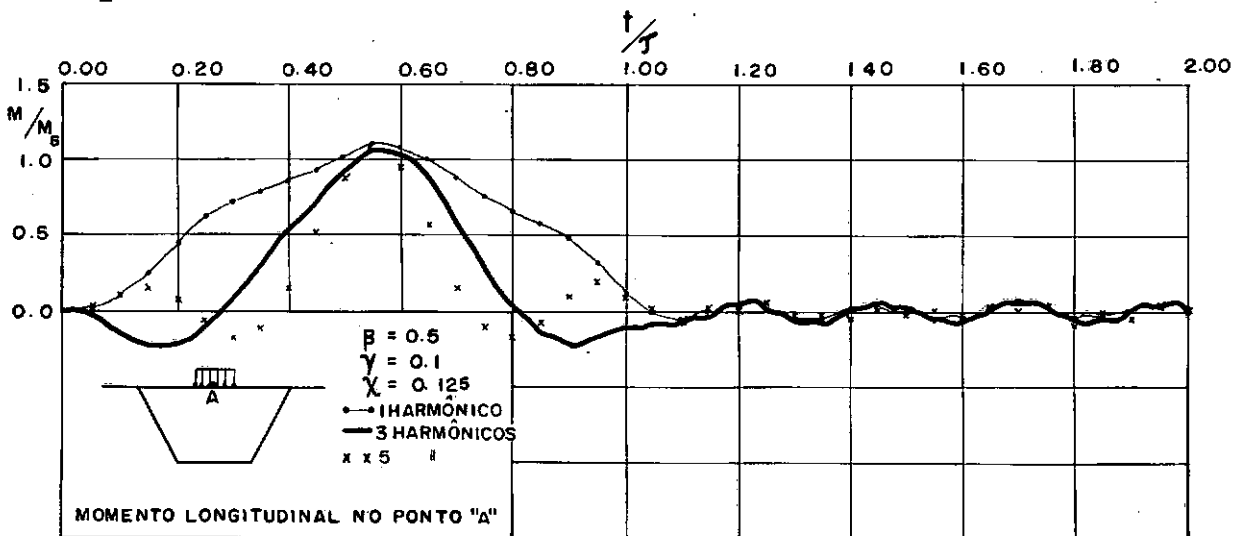


GRÁFICO 3

TABELA 5 - Coeficientes de Impacto - N^o 6
 $\beta = 0,5$ $\gamma = 0,1$ $\chi = 0,125$

Número de Harmônicos	Deslocamento Vertical	Momento Longitudinal
1	1,256	1,092
3	1,122	1,072
5	1,132	1,084

A seguir apresentam-se curvas de história para os deslocamentos verticais, momentos longitudinais, momentos transversais e tensões longitudinais. Todas as curvas são para $\beta = 1$ ou $\beta = 1/2$ e são apresentadas aos pares, uma correspondendo a $\chi = 0,5$ outra a $\chi = 0,125$.

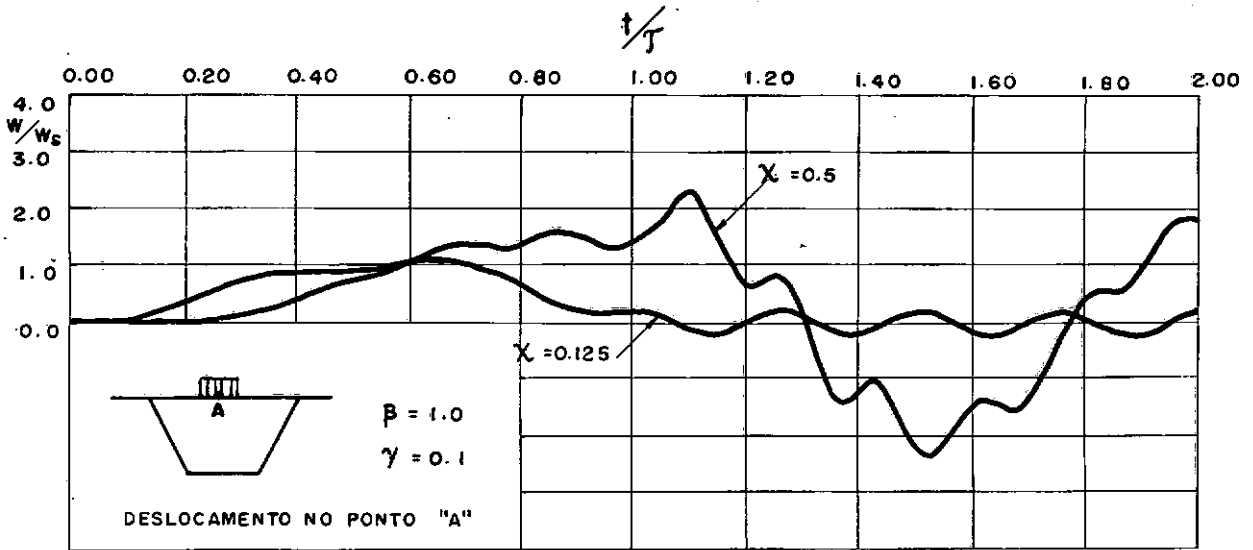


GRÁFICO 4

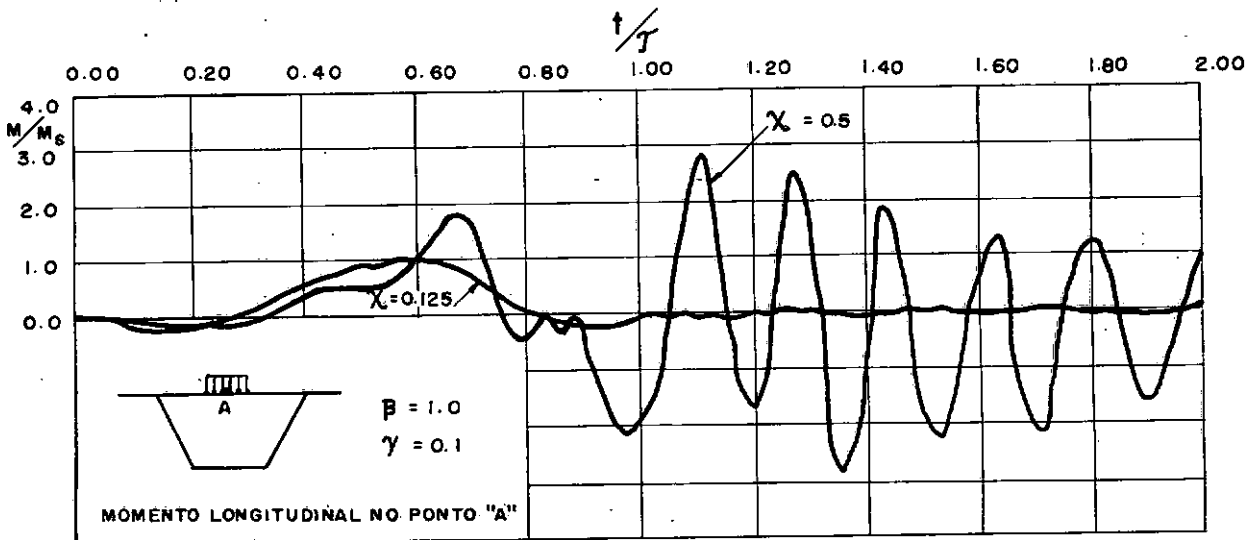


GRÁFICO 5

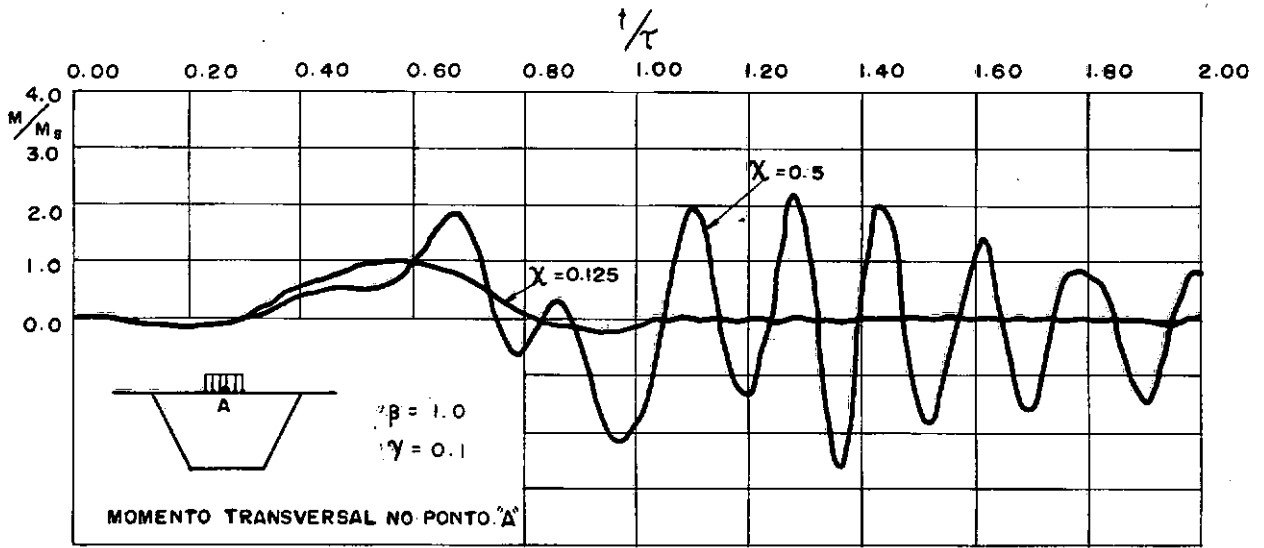


GRÁFICO 6

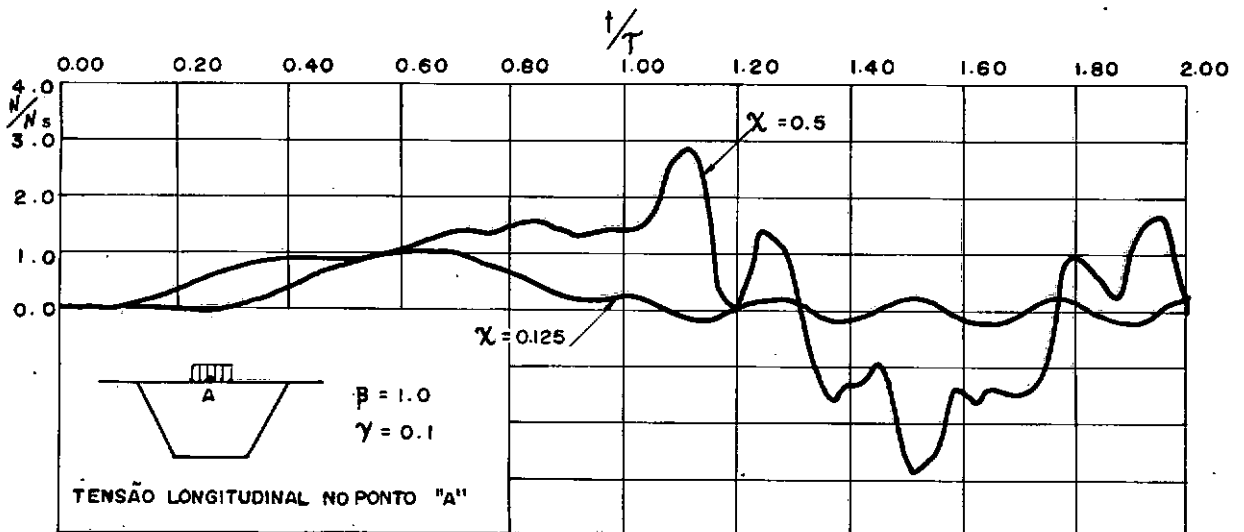


GRÁFICO 7

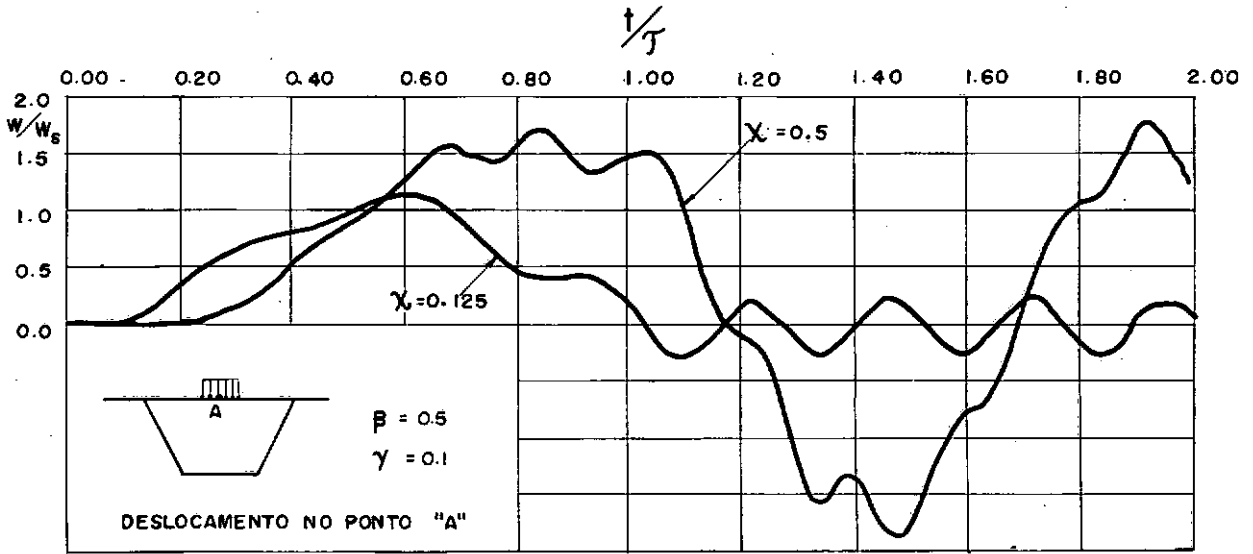


GRÁFICO 8

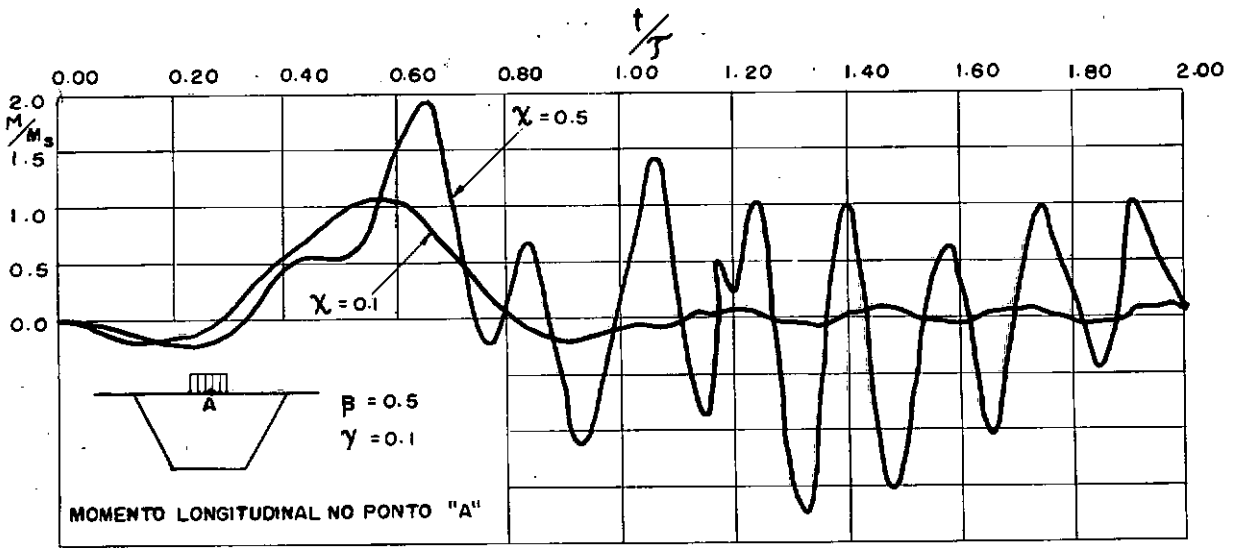


GRÁFICO 9

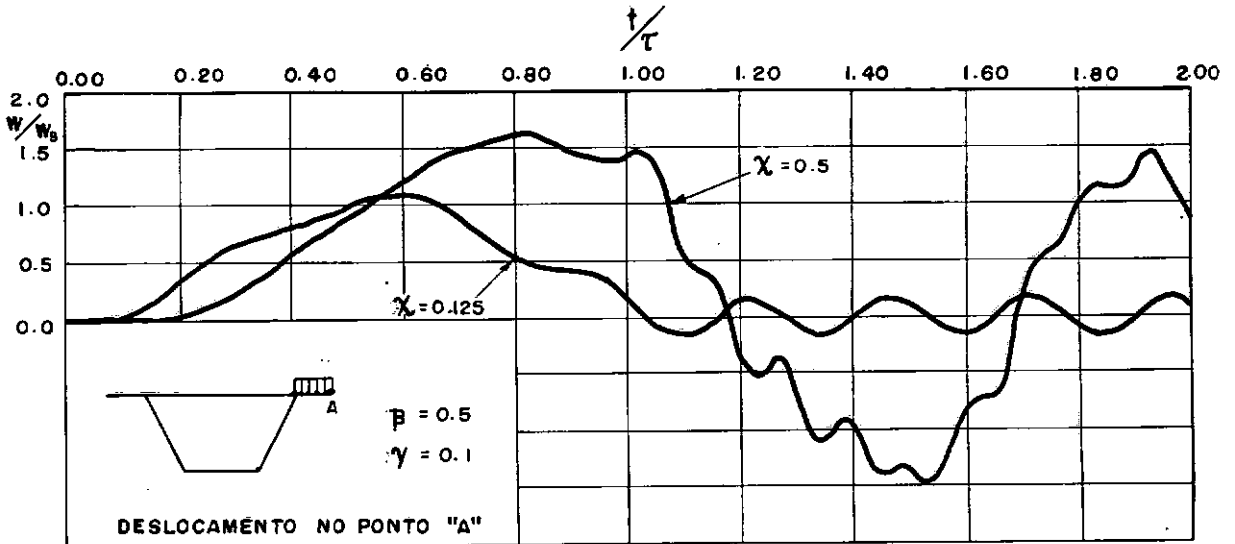


GRÁFICO 10

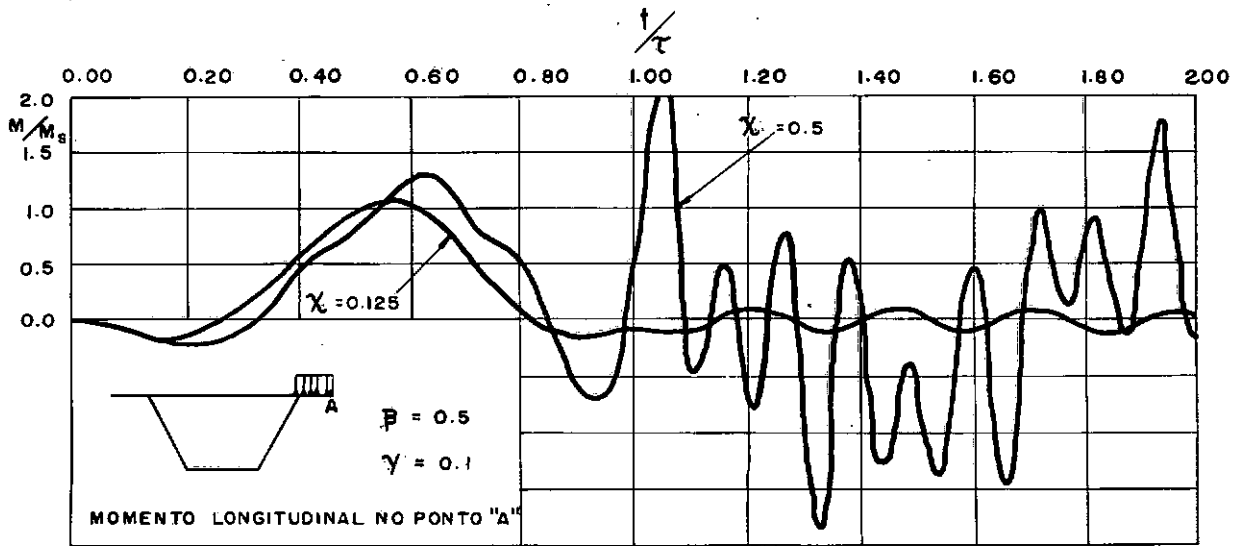


GRÁFICO 11

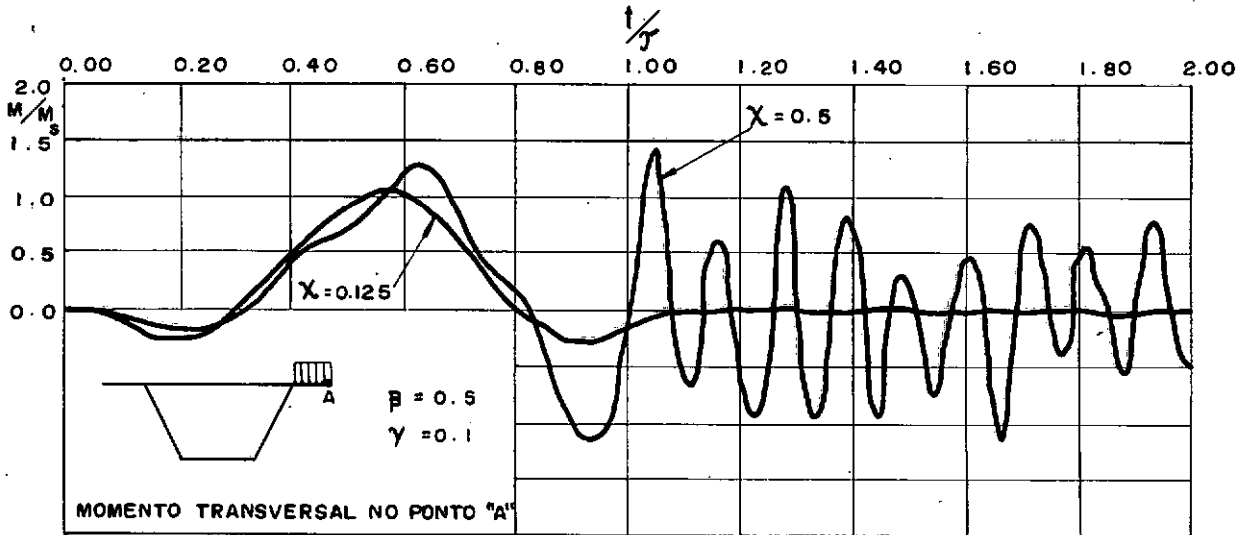


GRÁFICO 12

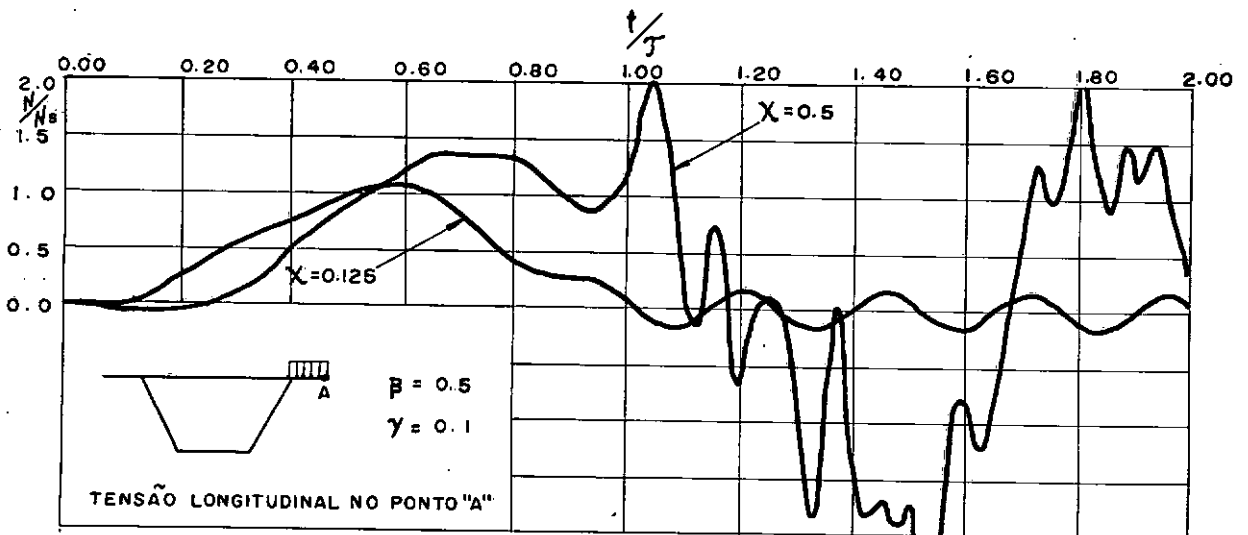


GRÁFICO 13

É importante ressaltar a diferença de comportamento da estrutura quando se aumenta a velocidade de travessia da massa. Enquanto que para $\chi = 0,125$ o deslocamento ou esforço dinâmico máximo ocorre quando a carga ainda está sobre a viga, para $\chi = 0,5$ o valor máximo só é atingido depois que a massa deixa a viga.

Nas Tabelas 6 e 7 estão reunidos os coeficientes de impacto referentes às situações descritas nos Gráficos 4 a 13 e, também, aos casos de $\beta = 0$.

TABELA 6 - Coeficientes de Impacto - N^o 6

β	Deslocamento Vertical		Momento Longitudinal		Momento Transversal		Tensão Longitudinal	
	$\chi = 0,125$	$\chi = 0,5$	$\chi = 0,125$	$\chi = 0,5$	$\chi = 0,125$	$\chi = 0,5$	$\chi = 0,125$	$\chi = 0,5$
0	1,073	1,541	1,006	1,125	1,005	1,055	1,081	1,595
0,5	1,122	1,838	1,072	1,938	1,072	2,031	1,128	2,037
1	1,066	2,340	1,015	2,825	1,024	2,583	1,046	2,882

TABELA 7 - Coeficientes de Impacto - N^o 12

β	Deslocamento Vertical		Momento Longitudinal		Momento Transversal		Tensão Longitudinal	
	$\chi = 0,125$	$\chi = 0,5$	$\chi = 0,125$	$\chi = 0,5$	$\chi = 0,125$	$\chi = 0,5$	$\chi = 0,125$	$\chi = 0,5$
0	1,057	1,440	1,008	1,166	1,002	1,019	1,058	1,469
0,5	1,092	1,627	1,069	2,214	1,058	1,295	1,092	2,342

Finalmente, no Gráfico 14 são apresentados espectros de amplificação do deslocamento vertical e dos esforços.

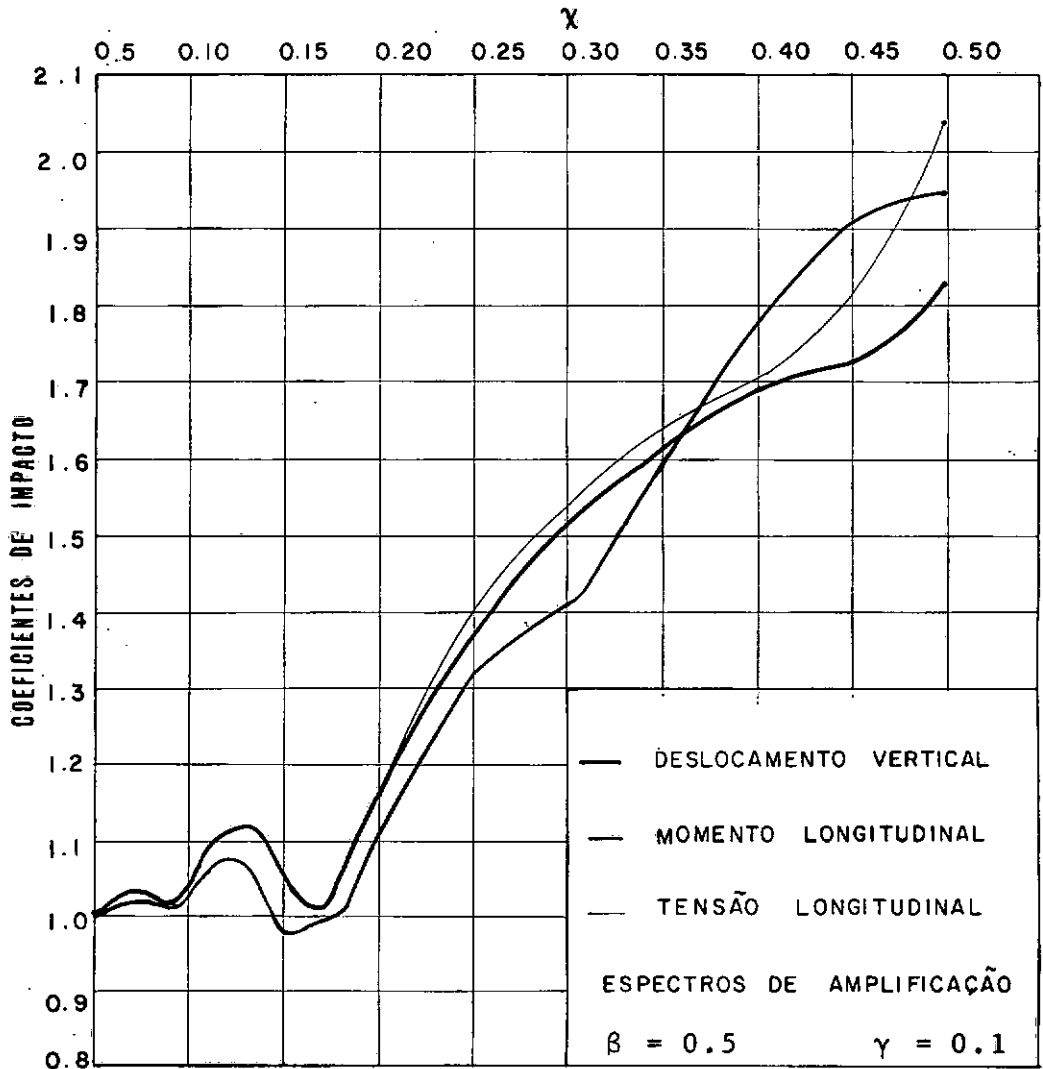


GRÁFICO 14

3.5 CONCLUSÕES

Do ponto de vista computacional, o método semi-analítico apresenta, em relação ao método dos elementos finitos, a vantagem de reduzir um problema inicialmente bidimensional a outro unidimensional. Apesar do acoplamento dos harmônicos, a técnica de resolução utilizada permite que se reduza o sistema de equações a ser resolvido a outro de ordem menor, resultando numa grande economia uma vez que a solução deve ser obtida a cada instante.

Reafirma-se a necessidade de consideração da inércia do carregamento. A sua influência se faz notar principalmente, à medida em que cresce a relação entre a massa móvel e a massa da estrutura, e em que o tempo de travessia se aproxima do período fundamental da estrutura. Deve-se notar porém que tempos de travessia da ordem do período fundamental normalmente correspondem a velocidades mais elevadas do que as encontradas na prática. Além disso, a não consideração do amortecimento estrutural conduziu à obtenção de coeficientes de impacto maiores que os reais.

Como possíveis extensões deste trabalho, sugerem-se:

- a) A consideração de outras condições de contorno.
- b) A utilização de um modelo mais real para o veículo.
- c) O estudo da estabilidade, utilizando-se uma base completa para as soluções, quando o carregamento se estende sobre todo o domínio.

BIBLIOGRAFIA

- (1) BIGGS, J.M.: "Introduction to Structural Dynamics" - McGraw-Hill, New York, 1964.
- (2) BRUCH, Y.A.: "Análise Dinâmica de Placas Pelo Método dos Elementos Finitos" - Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1973.
- (3) BATISTA, R.C.: "Estruturas Tridimensionais com Propriedades dos Materiais Representadas Matematicamente por Séries - Aplicação à Análise de Pontes" - Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1974.
- (4) CHEUNG, Y.K.: "Analysis of Rectangular Slabs by Finite Strip Method" - Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE 94, EM6, Dec. 1968, pp. 1365-1378.
- (5) CHEUNG, Y.K.: "Analysis of Box Girder Bridges by the Finite Strip Method" - 2nd International Symposium on Concrete Bridge Design, Paper SP 26-15, Chicago, 1969.

- (6) CHEUNG, Y.K.: "Folded Plate Structures by Finite Strip Method" - Journal of the Structural Division, ASCE 95, ST 12, Dec. 1969, pp. 2963-2979.
- (7) CHEUNG, Y.K.: "Flexural Vibrations of Rectangular and Other Polygonal Plates" - Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE 97, EM2, April 1971, pp. 391-411.
- (8) CHEUNG, M.S.; CHEUNG, Y.K.: "Natural Vibrations of Thin, Flat-Walled Structures With Different Boundary Conditions" - Journal of Sound and Vibration, 18, nº 3, 1971, pp. 325-337.
- (9) CHU, K.H.; JONES, M.: "Theory of Dynamic Analysis of Box Girder Bridges" - IABSE, 36 - II, 1976, pp. 121-131.
- (10) CUSENS, A.R.; PAMA, R.P.: "Bridge Deck Analysis" - John Wiley, London, 1975.
- (11) EBECKEN, N.F.: "Processo Semi-Analítico Para Análise de Estruturas Pelo Método dos Elementos Finitos" - Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1973.

- (12) FALABELLA, J.E.: "Resposta Dinâmica de Estruturas Reticu-
ladas a Cargas MÔveis, Pelo Método dos Elementos Fini-
tos" - Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro,
1975.
- (13) FRYBA, L.: "Vibration of Solids and Structures Under Moving
Loads" - Noordhoff, Groningen - The Netherlands, 1972.
- (14) FUNG, Y.C.: "Foundations of Solid Mechanics" - Prentice-
-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
- (15) GALEÃO, A.C.; LOULA, A.F.; BEVILACQUA, L.: "Dynamics of
Beams Carrying Moving Loads" - Proc. 39 COBEM, Rio
de Janeiro, 1975.
- (16) GOUDREAU, G.L.; TAYLOR, R.L.: "Evaluation of Numerical
Integration Methods in Elastodynamics" - Computer
Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3, 1972,
pp. 69-97.
- (17) GUERREIRO, J.N.C.; LOULA, A.F.; GALEÃO, A.C.: "Cargas
MÔveis em Vigas de Seção Celular" - XVIII Jornadas
Sulamericanas de Engenharia Estrutural, Salvador, De-
zembro, 1976.
- (18) HURTY, W.C.; RUBINSTEIN, M.F.: "Dynamics of Structures"
- Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, 1964.

- (19) JONES, M.; CHU, K.H.: "Dynamic Analysis of a Box Girder Bridge" - IABSE, 36 - II, 1976, pp. 133-145.
- (20) LANGHAAR, H.L.: "Energy Methods in Applied Mechanics" - John Wiley, New York, 1962.
- (21) LOULA, A.F.; GALEÃO, A.C.: "Vibração de Sistemas Elásticos Lineares" - Publicação Técnica PDD 3/76, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1976.
- (22) MEIROVITCH, L.: "Analytical Methods in Vibrations" - MacMillan, New York, 1967.
- (23) MEIROVITCH, L.: "Methods of Analytical Dynamics" - McGraw-Hill, New York, 1970.
- (24) MIANA, P.R.: "Análise Dinâmica de Vigas Pelo Método dos Elementos Finitos - Aplicação a Vigas Gerber" - Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1975.
- (25) NAGARAJU, N.; JAGADISH, K.S.; SUNDARA RAJA IYENGAR, K.T.: "Dynamic Behavior of Cantilever Bridges Under Moving Loads" - IABSE, 33 - II, 1973, pp. 149-172.
- (26) NEWMARK, N.M.: "A Method of Computation for Structural Dynamics" - Journal of The Engineering Mechanics Division, ASCE 85, EM3, July 1959, pp. 67-95.

- (27) NICKELL, R.E.: "On the Stability of Approximation Operators in Problems of Structural Dynamics" - Int. Journal of Solids and Structures, 7, 1971, pp. 301-319.
- (28) NOWACKY, W.: "Dynamics of Elastic Systems" - Chapman & Hall, London, 1963.
- (29) SMITH, J.W.: "Finite Strip Analysis of the Dynamic Response of Beam and Slab Highway Bridges" - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1, 1973, pp. 357-370.
- (30) SUNDARA RAJA IYENGAR, K.T.; JAGADISH, K.S.: "Dynamic Response of Highway Bridges to Moving Loads" - IABSE, 30 - II, 1970, pp. 57-76.
- (31) TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S.: "Theory of Plates and Shells" - McGraw-Hill, New York, 1959.
- (32) VENÂNCIO FILHO, F.: "Seminário Internacional Sobre Elementos Finitos e Utilização da Linguagem LORANE - Flexão de Placas, Vibrações, Análise Dinâmica" - UFRS, Porto Alegre, Julho 1973.
- (33) WASHIZU, K.: "Variational Methods in Elasticity and Plasticity" - Pergamon, Oxford, 1968.

- (34) YOSHIDA, D.M.: "Dynamic Response of Beams and Plates Due to Moving Loads" - Ph.D. Thesis, Stanford University, 1970.
- (35) ZIENKIEWICS, O.C.: "The Finite Element Method in Engineering Science" - McGraw-Hill, London, 1971.

APÊNDICE A

MATRIZES REFERENTES AO ELEMENTO (COORDENADAS LOCAIS)

a) MATRIZES REFERENTES À ESTRUTURA

Matriz de Massa:

$$\tilde{M}_{jj}^e = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{M}_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{M}_{ww} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M}_{uu} = \tilde{M}_{vv} = \frac{a}{2} \int_0^{\ell_e} \rho h \underline{L}^T \cdot \underline{L} \, d\eta$$

$$\tilde{M}_{ww} = \frac{a}{2} \int_0^{\ell_e} \rho h \underline{N}^T \cdot \underline{N} \, d\eta$$

Matriz de Rigidez:

$$\underline{K}_{jj}^e = \begin{bmatrix} \underline{K}_{uu} & \underline{K}_{uv} & 0 \\ \underline{K}_{uv}^T & \underline{K}_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{K}_{ww} \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{uu} = \frac{j^2 \pi^2}{2a} \int_0^{\ell_e} D_p \underline{L}^T \cdot \underline{L} \, d\eta + \frac{a}{2} \int_0^{\ell_e} Gh \underline{L}_{,\eta}^T \cdot \underline{L}_{,\eta} \, d\eta$$

$$\underline{K}_{vv} = \frac{a}{2} \int_0^{\ell_e} D_p \underline{L}_{,\eta}^T \cdot \underline{L}_{,\eta} \, d\eta + \frac{j^2 \pi^2}{2a} \int_0^{\ell_e} Gh \underline{L}^T \cdot \underline{L} \, d\eta$$

$$\underline{K}_{uv} = \frac{j\pi}{2} \int_0^{\ell_e} D_p \underline{L}^T \cdot \underline{L}_{,\eta} \, d\eta + \frac{j\pi}{2} \int_0^{\ell_e} Gh \underline{L}_{,\eta}^T \cdot \underline{L} \, d\eta$$

$$\underline{K}_{ww} = \frac{j^4 \pi^4}{2a^3} \int_0^{\ell_e} D_f \underline{N}^T \cdot \underline{N} \, d\eta - \frac{j^2 \pi^2}{2a} \cdot \int_0^{\ell_e} D_f (\underline{N}^T \cdot \underline{N}_{,\eta\eta}$$

$$+ \underline{N}_{,\eta\eta}^T \cdot \underline{N}) \, d\eta + \frac{a}{2} \int_0^{\ell_e} D_f \underline{N}_{,\eta\eta}^T \cdot \underline{N}_{,\eta\eta} \, d\eta$$

$$+ \frac{j^2 \pi^2}{a} (1-\nu) \cdot \int_0^{\ell_e} D_f \underline{N}_{,\eta}^T \cdot \underline{N}_{,\eta} \, d\eta$$

b) MATRIZES REFERENTES À INÉRCIA DA MASSA MÓVEL

Matriz de "Massa":

$$\tilde{M}_{jk}^{*e} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{uu}^{*} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{M}_{vv}^{*} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{M}_{ww}^{*} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M}_{uu}^{*} = I_1 \int_{\eta_1}^{\eta_2} m \underline{L}^T \cdot \underline{L} \, d\eta \quad ;$$

$$I_1 = \int_{\xi(t)-c}^{\xi(t)} \cos \frac{j\pi x}{a} \cdot \cos \frac{k\pi x}{a} \, dx$$

$$\tilde{M}_{vv}^{*} = I_2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} m \underline{L}^T \cdot \underline{L} \, d\eta \quad ;$$

$$I_2 = \int_{\xi(t)-c}^{\xi(t)} \sin \frac{j\pi x}{a} \cdot \sin \frac{k\pi x}{a} \, dx$$

$$\tilde{M}_{ww}^{*} = I_2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} m \underline{N}^T \cdot \underline{N} \, d\eta$$

Matriz de "Amortecimento":

$$\underline{C}_{jk}^{*e} = \begin{bmatrix} \underline{C}_{uu}^* & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{C}_{vv}^* & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{C}_{ww}^* \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_{uu}^* = - \frac{k\pi}{a} I_3 \int_{\eta_1}^{\eta_2} m \dot{\xi} \underline{L}^T \cdot \underline{L} d\eta ;$$

$$I_3 = \int_{\xi(t)-c}^{\xi(t)} \cos \frac{j\pi x}{a} \cdot \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{a} dx$$

$$\underline{C}_{vv}^* = \frac{k\pi}{a} I_4 \int_{\eta_1}^{\eta_2} 2 m \dot{\xi} \underline{L}^T \cdot \underline{L} d\eta ;$$

$$I_4 = \int_{\xi(t)-c}^{\xi(t)} \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{a} \cdot \cos \frac{k\pi x}{a} dx$$

$$\underline{C}_{ww}^* = \frac{k\pi}{a} I_4 \int_{\eta_1}^{\eta_2} 2 m \dot{\xi} \underline{N}^T \cdot \underline{N} d\eta$$

Matriz de "Rigidez":

$$\underline{K}_{jk}^{*e} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{K}_{vv}^{*} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{K}_{ww}^{*} \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{vv}^{*} = - \frac{k^2 \pi^2}{a^2} I_2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} m \dot{\xi}^2 \underline{L}^T \cdot \underline{L} d\eta$$

$$+ \frac{k\pi}{a} I_4 \int_{\eta_1}^{\eta_2} m \ddot{\xi} \underline{L}^T \cdot \underline{L} d\eta$$

$$\underline{K}_{ww}^{*} = - \frac{k^2 \pi^2}{a^2} I_2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} m \dot{\xi}^2 \underline{N}^T \cdot \underline{N} d\eta$$

$$+ \frac{k\pi}{a} I_4 \int_{\eta_1}^{\eta_2} m \ddot{\xi} \underline{N}^T \cdot \underline{N} d\eta$$

c) VETOR DE CARGA (TERMO INDEPENDENTE)

$$\vec{F}_j^e = \begin{Bmatrix} \vec{F}_u \\ \vec{F}_v \\ \vec{F}_w \end{Bmatrix} \quad \vec{F}_w = p_w S_2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} \vec{N}^T d\eta$$

$$\vec{F}_u = (p_u - m\ddot{\xi}) S_1 \int_{\eta_1}^{\eta_2} \vec{L}^T d\eta ;$$

$$S_1 = \int_{\xi(t)-c}^{\xi(t)} \cos \frac{j\pi x}{a} dx$$

$$\vec{F}_v = p_v S_2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} \vec{L}^T d\eta ;$$

$$S_2 = \int_{\xi(t)-c}^{\xi(t)} \text{sen} \frac{j\pi x}{a} dx$$

APÊNDICE BMANUAL DE ENTRADA

Apresenta-se a seguir, o manual de entrada para o programa de obtenção da resposta dinâmica a massas móveis. Este programa foi escrito em FORTRAN-IV-G e executado no computador Burroughs B-6700.

Nº DE ORDEM	Nº DE CARTÕES	VARIÁVEIS	FORMATOS
1	1	NPRO	I5
2	1	NN,NE,NMAT,NTEN,NCN,NDF,NB,AX	7I5, F10.3
3	NN	N, X(N,I)	I5, 3F10.0
4	NE	N, NOP(N,M)	5I5
5	NB	NBC(I), NFIX(I,J)	I10, 4I1
6	NMAT	N, ORT(L,I)	I5, 6F10.2
7	1	NHAR, IHAR(I)	10I5
8	1	GAMA, BETA, TEMPO, NTE	3F10.0, I10
9	1	WST,IMP, KNT, NNI, NET, NSEC	F10.0, 5I5
10	1	DSEC(J)	7F10.0
11	1	NIMP(K)	15I5
12	1	NETEN(K)	15I5
13	1	NCCA	I5
14	1	NEM,MAS,PMY,PMZ,Y1,Y2,CMX,VO,AO	I5, 8F8.0

DESCRIÇÃO DAS VARIÁVEIS DE ENTRADA

- | | | |
|----|-----------|--|
| 1. | NPRO | Número de estruturas a serem analisadas. |
| 2. | NN | Número de nós. |
| | NE | Número de elementos. |
| | NMAT | Número de materiais. |
| | NTEN | Número de matrizes de tensões a serem montadas. Se dois ou mais elementos têm a mesma matriz de tensões, ela é montada apenas uma vez. |
| | NCN | Número de nós por elemento. |
| | NDF | Número de graus de liberdade do elemento. |
| | NB | Número de nós com restrições. |
| | AX | Comprimento da estrutura. |
| 3. | N | Número do nó. |
| | X(N,I) | Coordenadas do nó. |
| 4. | N | Número do elemento. |
| | NOP(N,M) | Nós 1 e 2 do elemento, índice referente ao material, índice relativo à matriz de tensões. |
| 5. | NBC(I) | Número do nó com restrições de deslocamentos. |
| | NFIX(I,J) | Deslocamentos restringidos, na ordem x,y,z e rotação. Índice 1 + direção livre, índice |

ce 0 → direção presa.

- | | | |
|----|-----------|---|
| 6. | N | Número associado ao material. |
| | ORT(L,I) | Propriedades do material: módulos de elasticidades nas direções x e y, coeficientes de Poisson nas direções x e y, massa específica e espessura dos elementos constituídos por este material. |
| 7. | NHAR | Número de harmônicos. |
| | IHAR(I) | Números dos harmônicos. |
| 8. | GAMA,BETA | Parâmetros da integração pelo método de Newmark. |
| | TEMPO | Tempo de travessia da massa móvel. |
| | NTE | Número de intervalos de integração. |
| 9. | WST | Máximo deslocamento estático. |
| | IMP | Número de intervalos que devem ser saltados na impressão dos resultados. |
| | KNT | Fator que multiplicado pela variável TEMPO, fornece o tempo total em que se deseja analisar a estrutura. |
| | NNI | Número de nós cujos deslocamentos devem ser impressos. |
| | NET | Número de elementos cujas tensões serão calculadas. |

	NSEC	Número de secções a serem analisadas.
10.	DSEC(J)	Secções a serem analisadas e definidas por frações de comprimento total AX.
11.	NIMP(K)	Números dos nós que terão os seus deslocamentos impressos.
12.	NETEN(K)	Números dos elementos que terão as tensões nos seus nós calculadas e impressas.
13.	NCCA	Número de casos de carregamento.
14.	NEM	Número do nó ou elemento carregado com a massa móvel.
	MAS	Massa móvel por unidade de comprimento ou de área.
	PMY, PMZ	Componentes de força peso nas direções y e z.
	Y1, Y2	Coordenadas transversais (direção y) da massa móvel.
	CMX	Comprimento na direção x, da massa móvel.
	VO	Velocidade de travessia.
	AO	Aceleração da massa móvel.