INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFRJ

Ferramentas visuais e a construção do conhecimento matemático formal: O caso das sequências numéricas reais

Ana Clara Buçard Teixeira Lopes

Rio de Janeiro, Brasil

22 de dezembro de 2020

Ferramentas visuais e a construção do conhecimento matemático formal: O caso das sequências numéricas reais

Ana Clara Buçard Teixeira Lopes

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Orientador: Márcia Maria Fusaro Pinto

Rio de Janeiro, Brasil

22 de dezembro de 2020

CIP - Catalogação na Publicação

Lopes, Ana Clara Buçard Teixeira
LL864f Ferramentas visuais e a construção do conhecimento matemático formal: O caso das sequências numéricas reais / Ana Clara Buçard Teixeira Lopes. -- Rio de Janeiro, 2020.
175 f.

Orientadora: Márcia Maria Fusaro Pinto.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2020.

1. Abstração Matemática. 2. Abstração na educação matemática. 3. Representações visuais. 4. Matemática. I. Pinto, Márcia Maria Fusaro, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Ana Clara Buçard Teixeira Lopes

Ferramentas visuais e a construção do conhecimento matemático formal: O caso das sequências numéricas reais

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Trabalho aprovado por

Márcia Maria Fusaro Pinto
Orientadora
Doutora em Educação Matemática - UFRJ

Sonia Barbosa Camargo Igliori
Doutora em Matemática - PUC-SP

Agnaldo da Conceição Esquincalha
Doutor em Educação Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro, Brasil
22 de dezembro de 2020

Dedico este trabalho a todos os profissionais
que acreditam na educação.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me permitir chegar aqui.
Agradeço em segundo lugar a minha família, por ter me instruído desde cedo a estudar e perseguir meus sonhos. Aos meus pais Lucimar e Oseas por terem desistido de tantas coisas para que hoje você pudesse estar lendo esse texto.
Ao meu marido por ter me apoiado em todos os momentos.
Tenho o coração cheio de gratidão pela minha orientadora, sem a qual eu não teria conseguido.
Agradeço também aos membros da banca que com suas sugestões permitiram que esse trabalho fosse melhorado.
Agradeço finalmente a todos que ao longo da minha trajetória me encorajaram a continuar.

Resumo

A prática de diversos produtores de conhecimento de matemática levou à seguinte questão: “De que modo os diagramas e outras representações visuais podem auxiliar na produção e na construção do conhecimento matemático formal, em que a abstração é reconhecida como desempenhando um papel central?” Este trabalho busca responder a essa questão. Inicialmente, uma análise sobre os diversos conhecimentos acerca do conceito de abstração foi realizada. Em seguida, uma pesquisa de campo foi executada a fim de analisar os modos como os estudantes e a professora da disciplina de Introdução à Topologia utilizavam diagramas e representações visuais em sua prática cotidiana. Além disso, uma entrevista semiestruturada foi feita. Tal pesquisa permitiu verificar que, apesar de, em seu discurso, os estudantes não valorizarem o uso de diagramas visuais e gestos, eles estavam presentes ao longo de toda entrevista.

Palavras-chave: abstração matemática, abstração na educação matemática, representações visuais; e matemática.

Abstract

The practice of a variety of producers of knowledge has led to the following question: ?How might diagrams and other visual representations help in the production and construction of knowledge?? This study explores that question. Initially, the different understandings of abstraction were analyzed. Next, field research was conducted to analyze the ways in which students as well as the instructor of Introduction to Topology used diagrams and visual representations in their daily practices. Additionally, a semi-structured interview was developed. This interview demonstrated that, although in participants? responses they did not value the use of visual diagrams and gestures, they were present throughout the interview.

Keywords: mathematical abstraction; abstraction in mathematics education; visual representations; and mathematics.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
PEMAT	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
UNIRIO	Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Sumário

1 Introdução

1.1 Motivação

Esta pesquisa tem por objetivo responder a uma questão que foi levantada durante um curso de verão sobre Análise Real, que frequentei na Universidade Federal de Santa Catarina. O curso ocorreu entre os meses de janeiro e fevereiro de 2017, alguns meses após eu ter me graduado em Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO) e ter sido aceita no mestrado em Ensino de Matemática, ofertado pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, na Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT - UFRJ).

Quem levantou a indagação foi o professor da turma, enquanto resolvíamos problemas de topologia em espaços métricos, ao nos perguntar: "Por que os matemáticos utilizam diagramas para auxiliar as respostas de algumas questões?". Logo em seguida, esse mesmo professor indicou que "algumas vezes, o não desenhar um esquema pode transformar o processo de provar determinada proposição em um trabalho muito mais difícil". Naquele momento, o professor informou que não sabia se existiam pesquisas nessa área, mas que se não houvesse, esse seria um tópico interessante de ser estudado. Nenhum dos estudantes em sala demonstrou qualquer conhecimento sobre o assunto, inclusive eu.

Essa questão permeia meus pensamentos e me instiga desde então. Concordando com o professor em sua primeira indagação, não é de se esperar que o uso de diagramas auxiliará, de alguma forma, a compreensão de conceitos abstratos apresentados por definições formais, como são os conceitos da análise real. No meu entender, ao longo do meu curso de licenciatura, as disciplinas não abordaram tal questão de um ponto de vista teórico.

No período em que cursei a licenciatura, o curso presencial ainda era muito novo naquela instituição e a grande maioria dos professores era constituída por doutores em matemática ou em engenharia. Desse modo, naquele momento, o curso era principalmente voltado ao campo da matemática e, apesar de incluir disciplinas voltadas à área da Educação, havia pouca reflexão sobre o processo de aprendizagem. Após uma apresentação das linhas de pesquisa no PEMAT, no qual me matriculei como aluna de mestrado no primeiro semestre de 2017, a questão da visualização e da formalização do conhecimento matemático foi apresentada como foco de pesquisa. Então, eu decidi investigar e buscar respostas para as questões apresentadas pelo professor do curso de verão, as quais já tinham despertado meu interessado.

Além dessa experiência no curso de verão, que me instou, enquanto estudante pude perceber que, para diversos colegas, entender os conteúdos matemáticos parecia ser muito difícil quando eles eram formalizados. Minhas primeiras reflexões sobre os motivos para esse fato aconteceram logo nas primeiras semanas de aulas do mestrado.

Pude concluir que é inegável que o estudo da matemática é acompanhado por uma série de inverdades e mitos gerados pelas práticas de alguns ao produzir tais conhecimentos — e, também, ao ensiná-los —, assim como pelas frustrações de outros ao tentar, sem sucesso, compreender essa ciência. Aqui, como práticas, refiro-me às normas e aos padrões de rigor compartilhados por uma comunidade que produz e ensina tal ciência e que, portanto, inclui os matemáticos, os professores e os pesquisadores. Tal quadro é replicado nos diversos níveis de ensino e de aprendizado dessa matéria, que eu acredito ter tanto a agregar ao mundo em que vivemos.

Com o passar do estudo, percebi também que, muito embora o corpo de conhecimentos sobre a educação matemática tenha sido ampliado nas últimas décadas, ainda há muito o que se conhecer e se investigar sobre as dificuldades com a matemática, as quais se acentuam no decorrer da vida escolar e acadêmica. Procurando respostas para tais questões que percebi ainda em aberto, um dos objetivos deste trabalho é estudar a literatura de pesquisa buscando respostas e referências para afirmações frequentemente evocadas no senso comum.

Acredito que se pudermos nos despojar de crenças e olharmos para o que os métodos científicos nos revelam, podemos, enquanto educadores, repensar nossas práticas a fim de propiciar aos nossos estudantes aulas significativas. Meu trajeto na pesquisa se inicia retomando Piaget, que deixou um legado importante para o estudo dos processos envolvidos na aprendizagem da matemática com significado para os alunos.

> A possibilidade de uma ciência matemática rigorosamente dedutiva e que ao mesmo tempo se adapte exatamente à experiência constitui, desde sempre, o problema central da epistemologia. A questão é mais perturbadora ainda do ponto de vista genético. De fato, por um lado a Matemática concorda com a realidade física de modo muito detalhado. Nunca sucede que o físico - por múltiplas e diversas que sejam as estruturas ou as relações que descobre no mundo material - encontre uma estrutura que não possa expressar-se com precisão em linguagem matemática, como se existisse uma espécie de harmonia pré-estabelecida entre todos os aspectos do universo físico e os marcos abstratos da geometria e da análise. Além disso, há algo mais: acontece que este acordo se realiza não só no momento do descobrimento de uma lei física, ou a posteriori, como os esquemas matemáticos antecipam, com anos de distância, o conteúdo experimental que logo será inserido neles. As formas geométricas e analíticas podem elaborar-se sem preocupação alguma com a realidade, se tem a segurança não só de que a experiência jamais poderá questioná-las, como também de que - e este é o ponto paradoxal - a experiência as levará em conta, cedo ou tarde e se adaptará perfeitamente a elas. (PIAGET, 1975, p.63).

Nesse excerto, o autor destaca o refinamento gradual de tal conhecimento, o alcance e o poder formatador de seu conteúdo em sua relação com a realidade, que, além de, por vezes, sofrer distorções em seu uso, resultam em tensões e obstáculos em sua aprendizagem (BORBKA; SKOVSMOSE, 2001).

Nos cursos de graduação, em particular, as primeiras disciplinas que geram, comumente, grande dificuldade na área de exatas são as disciplinas de Cálculo. Essa etapa representa uma primeira ruptura nas práticas de ensino, correspondente à mudança nas práticas dos professores da escola básica para as práticas dos professores universitários. Várias pesquisas em educação matemática adotando perspectivas teóricas diversas se voltam para entender os porquês das dificuldades nesse momento de transição (TALL, 1991; DUVAL 2006; TALL; VINNER 1981 , ARTIGUE *et al.*, 2007).

Superadas as dificuldades com os cálculos, os estudantes dos cursos de Matemática, tanto os do bacharelado quanto os da licenciatura, têm, em seguida, o contato com a disciplina Análise Real, cujo objetivo é construir formalmente a matemática estudada nas disciplinas Cálculo em uma variável real. Essa introdução ao estudo formal dos conceitos, entendidos pelos estudantes e pelos professores como "mais abstrato" do que as demais formas de apresentação e o uso do conteúdo, representa um segundo momento de ruptura com práticas anteriores. Além disso, ela é também foco de interesse de pesquisadores em educação matemática (TALL, 1991; PINTO, 1998; GUEUDET, 2008). Nesse contexto, a noção de abstração é frequentemente retomada, mesmo seu entendimento permanecendo ambíguo e, por vezes, controverso (SCHEINER; PINTO, 2016).

A literatura em educação matemática trata da relação entre abstração e o conhecimento matemático em diversas pesquisas e sob diferentes perspectivas (SPINELLI, 2011; BRANDT; ROSSO, 2010). Mitchelmore e White (2007) destacam que referências à noção de abstração como processo de construção/produção do conhecimento matemático está presente em trabalhos desde Aristóteles e Platão.

Mais recentemente, percebe-se que o uso do termo abstração não tem sido único e uniforme, bem como tem sido transformado, como foi o caso, por exemplo, de Hiebert e Carpenter (1992). Os autores definem uma noção de compreensão, em vez de abstração, entendendo-a como o "fazer conexões entre ideias, fatos ou procedimentos"?, que, no entanto, são processos envolvidos na abstração e na concepção de outros autores (MITCHELMORE; WHITE, 2014; SCHEINER; PINTO; 2019).

Outros pesquisadores afirmam que o processo de abstração é um processo intrínseco à aprendizagem da matemática independentemente da formalização ou não do conhecimento (MITCHELMORE; WHITE, 2007; SPINELLI, 2011; SCHEINER; PINTO, 2019).

Por suas características, ao exigir demonstrações formais, complexas e completas, além de com pouca ou nenhuma relação com campos fora da matemática, a análise real integrará nosso objeto de estudo.

Por demonstrações formais, queremos dizer que são demonstrações que não se sustentam em argumentos intuitivos ou visuais, mas sim em axiomas e em definições, bem como são comunicadas usando termos técnicos, também previamente definidos de forma axiomática.

Por demonstrações complexas, entendemos que são demonstrações que exigem o uso de relações conceituais diversas e de ferramentas de forma lógica. E por demonstrações completas, estamos nos referindo a provas que têm todas as suas partes explicitamente justificadas, mesmo que em proposições ou em teoremas anteriores, sem que haja nenhum salto em seu desenvolvimento.

Em sendo um tema amplo e por eu ter sido instigada por questões sobre visualização para o entendimento do conhecimento formal, o foco da pesquisa será o uso de representações visuais na atividade do professor ou do aluno durante a abordagem e o desenvolvimento formal do conteúdo de sequências numéricas, tema estudado em cursos de análise real. Com a intenção de elaborar uma questão norteadora para a pesquisa, iniciei uma revisão de literatura sobre como se dá o processo de aprendizado e de produção de conhecimento, bem como acerca dos processos envolvidos para que o ensino e a aprendizagem aconteçam.

A perspectiva a ser adotada é principalmente a da psicologia da educação matemática. Centrais às discussões sobre ensino e aprendizagem da matemática formal na literatura estudada, passei a conhecer as diferentes perspectivas sobre a noção de abstração, que o senso comum e muitos autores reconhecem ou destacam como necessárias para que ocorra o aprendizado da matemática. Essas diferentes perspectivas serão abordadas na seção a seguir.

1.2 Elaborando a questão de pesquisa

O conhecimento matemático, em especial o conhecimento matemático formal, é apresentado frequentemente nas escolas pelos professores como exemplo de conhecimento abstrato por excelência, sendo também estudado como um caso para descrever processos envolvidos na construção, na aquisição e na produção de conhecimento (PIAGET, 1995).

Piaget foi um teórico do século XX e teve grande influência em tais estudos, trazendo a matemática no centro de suas investigações. Em sua elaboração sobre construção de conhecimento por um indivíduo, Piaget (1995) descreve dois modos de abstração: a “abstração a partir de objetos”, que diz respeito à abstração feita com base em características físicas do objeto, identificando similaridades, e a “abstração a partir de ações”, que diz respeito “à abstração feita com base nas relações percebidas quando o aprendiz manipula os objetos”.

Há um entendimento de que a aprendizagem dos conceitos matemáticos demandaria essencialmente abstrações a partir de ações sobre objetos, classificadas pelo pesquisador em duas categorias: abstração pseudoempírica e abstração reflexionante. A abstração reflexionante é amplamente discutida e utilizada por diversos pesquisadores, inclusive, ao investigar a aprendizagem de conhecimento matemático formal. Por exemplo, Dubinsky (1991), em sua pesquisa, considera que a abstração reflexionante se apoia tanto sobre estruturas que permitem ao sujeito captar um determinado conteúdo quanto sobre atividades cognitivas, como esquemas ou coordenações de ações, operações, etc., para extrair novos caracteres e utilizá-los em novas adaptações ou em novos problemas.

O entendimento é o de que a abstração reflexionante inclui sempre dois componentes inseparáveis: o reflexionamento, que é uma projeção sobre um nível superior daquilo que é extraído do inferior e é o que caracteriza uma continuidade na construção do conhecimento, e a reflexão, que é a reconstrução e a reorganização daquilo que foi extraído dos níveis inferiores. Dessa forma, o resultado de uma abstração é entendido como um conhecimento hierarquicamente mais avançado do que os objetos que lhe dá origem. Para Nogueira e Pavanello (2008), é assim que se elaboram os conceitos e se generalizam propriedades. Quando uma abstração reflexionante se torna consciente, esses autores a denominam abstração refletida. Como exemplo, eles citam a álgebra como resultado da abstração refletida sobre a aritmética.

Mitchelmore e White (2007), em seus estudos, destacam dois tipos de abstração. O primeiro deles é a abstração-separada, que diz respeito a abstrações a partir de ações sobre objetos matemáticos, as quais têm significado dentro da própria matemática e são construções mentais, existindo como representações de forma independente do mundo real. Por outro lado, há ideias matemáticas fundamentais que são intimamente relacionadas ao mundo real e sua aprendizagem envolve conceitos empíricos. Os conceitos desenvolvidos dessa forma compõem o que Mitchelmore e White chamam de abstração-geral, uma vez que eles incorporam propriedades gerais do mundo real; há aqui uma certa similaridade entre essa e a abstração empírica conceituada por Piaget.

Ao considerar que a construção do conhecimento matemático envolve conceitos abstratos, a abordagem de Mitchelmore e White (1995) para a formação de conceitos são: a classificação, a similaridade, a abstração e a conceituação. A relação entre essas ideias é estabelecida pelos autores a partir de Skemp (1986):[1]

> *Abstrair* é uma atividade na qual nós tomamos conta das similaridades... acerca de nossas experiências. *Classificar* significa coletar unindo nossas experiências com base nessas similaridades. Uma *abstração* é um tipo de mudança duradoura, o resultado de abstrair, que nos permite reconhecer novas experiências como tendo as similaridades de uma classe já formada... Para distinguir entre abstração como uma atividade e abstração como produto final, devemos ... chamar o último um *conceito*.(SKEMP, 1986, p.21, itálico no original)

Desse modo, pode-se perceber que os entendimentos sobre a noção de abstração não são únicos. Em Scheiner e Pinto (2016), encontramos uma análise das contradições, das convergências e das controvérsias referente a diversas perspectivas e definições de abstração presentes na literatura. No artigo, os autores organizam como as características de noções diferentes de abstração são apresentadas e identificam, na literatura de pesquisa atual, diversos entendimentos e descrições sobre os processos de abstração, que tomam lugar em diferentes níveis de aprendizado matemático.

Dentre os autores que tratam da abstração, Scheiner e Pinto (2016) citam Boero *et al.* (2002), por reconhecerem a abstração como central ao processo de aprendizado da matemática. Outro pesquisador mencionado é Dreyfus (1991), que trata da complexidade e da multidimensionalidade da abstração ao estudar os processos envolvidos na aprendizagem da matemática no ensino superior.

Scheiner e Pinto se referem a Dreyfus (2014) quando ele reconhece uma variedade de formas de abstração, a Mitchelmore e White (2012), uma vez que eles discutem a abstração nos diversos níveis de aprendizado da matemática, e a Tall (2013), que trata da abstração em diferentes mundos da matemática, os quais correspondem a conhecimentos produzidos em diferentes práticas matemáticas.

[1] Tradução nossa do trecho: *Abstracting* is an activity by which we become aware of similarities ... among our experiences. *Classifying* means collecting together our experiences on the basis of these similarities. An *abstraction* is some kind of lasting change, the result of abstracting, which enables us to recognise new experiences as having the similarities of an already formed class. ... To distinguish between abstracting as an activity and abstraction as its end-product, we shall ... call the latter a *concept*. (p. 21, italics in original)

Dentre as contradições, os autores destacam uma contradição encontrada ao se pensar em abstração, que é entendê-la como sinônimo de generalização. Ao contrário, Scheiner e Pinto (2016) argumentam em favor de um entendimento de abstrair como significando extrair e atribuir alguns componentes significativos. Em Mitchelmore e White (2007), a diferença essencial entre abstração e generalização é que a abstração tem como resultado novos objetos mentais — conceitos —, enquanto a generalização estende o significado de um conceito existente.

Como controvérsia, Scheiner e Pinto (2016) consideram comum a perspectiva de que abstrair é descontextualizar. Tal fato pode ser explicado baseado na concepção de Ferrari (2003), que diz que "generalização e descontextualização, frequentemente, atuam como dois lados da mesma moeda". Por outro lado, considerar abstração como descontextualização contradiz os avanços feitos em entender o conhecimento como situado e sensível a contextos (SCHEINER; PINTO 2016).

Estudos recentes têm como ponto de partida a heterogeneidade nos diversos entendimentos sobre o processo de abstração, bem como a diversidade de abordagens utilizada pelos indivíduos para aprender. Por exemplo, Scheiner (2016) destaca "abstrações a partir de ações", isto é, abstrações pseudoempiricas e reflexivas, como uma abordagem que oferece uma boa descrição dos processos envolvidos na construção dos conceitos, por estudantes que utilizam estratégias de "extrair significado"(PINTO, 1998)[2].

Já as "abstrações a partir de objetos" parecem oferecer melhores explicações para as estratégias dos estudantes ao "dar sentido" a um conhecimento novo (PINTO, 1998). Pesquisadores que têm por foco entender a "abstração a partir de objetos", como é o caso também de Mitchelmore e White (2007), são guiados pela suposição que os aprendizes adquirem conceitos matemáticos inicialmente baseados em seus conhecimentos conceituais de domínio específico pré-existentes; considerando abstração como interação progressiva de prévias imagens de conceitos e/ou inserção de um novo discurso ao lado de experiências matemáticas existentes (SCHEINER; PINTO, 2017).

Essa última perspectiva parece abrir um espaço potencial para investigar que papel as imagens, os diagramas e outras representações desempenham em processos reconhecidos como processos de abstração. Desse modo, adoto como ponto de partida entender a abstração como parte de um sistema complexo, que é a aprendizagem, para compreender as especificidades e as funcionalidades dos processos envolvidos. Ciente da diversidade de concepções sobre a noção de abstração, este trabalho busca responder à seguinte questão: De que modo os diagramas e outras representações visuais podem auxiliar a produção e a construção do conhecimento matemático formal, no qual a abstração é reconhecida como desempenhando um papel central?

[2] Ao investigar o desenvolvimento de estudantes de matemática em seu primeiro curso de análise real, Pinto (1998) identifica a estratégia "extrair significado" como aquela adotada por estudantes que constroem conceitos a partir de definições formais, enquanto "dar sentido" corresponde a uma alternativa de elaborar os conceitos a partir de imagens conceituais prévias.

1.3 Desdobramentos e expectativas

Uma das expectativas é a de que o desenvolvimento deste trabalho sirva de aporte para a elaboração de propostas didáticas voltadas ao ensino de disciplinas de nível superior que contemplam assuntos que, no entendimento de diversos pesquisadores, exigem do estudante um grau elevado de abstração. Além disso, esperamos que este trabalho ofereça um panorama teórico sobre a noção de abstração a todos os interessados na área de educação matemática, a fim de melhor compreender sobre o que é, como se dá e de que forma a abstração se situa nesse campo, bem como os limites e as possibilidades de entender a produção do conhecimento matemático retomando essa noção.

O texto desta dissertação está organizado em sete capítulos. No primeiro capítulo, faço a introdução, explicando de que forma se chegou à proposta desta pesquisa. No segundo capítulo, apresento os referenciais teóricos que sustentam a investigação, bem como seu planejamento.

No terceiro capítulo, discorro sobre os diversos entendimentos sobre a noção de abstração na literatura de pesquisa e de que forma eles se apresentam ao longo dos cursos mais avançados de matemática da graduação. Além disso, trago uma revisão de literatura.

No quarto capítulo, introduzo a metodologia utilizada e os procedimentos de pesquisa utilizados, como se deu a escolha do campo e de que forma esta pesquisa foi conduzida, com uma breve explicação da instituição onde a pesquisa foi realizada. No quinto capítulo, apresento o material empírico produzido para análise, bem como a análise e a discussão desse material, buscando responder à questão colocada.

No sexto capítulo, abordo a análise e a discussão do material empírico, buscando responder à questão colocoda. Por fim, no sétimo capítulo, trago as considerações finais, buscando responder à questão de pesquisa. Em dois anexos, introduzo o termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) assinado pelos participantes da pesquisa e toda a transcrição da entrevista realizada (Apêndices A e B).

2 Referências teóricas

Buscando entender a que se refere a noção de pensamento matemático e como ele se desenvolve, retomamos as visões de Mitchelmore e White (1995, 2000, 2004, 2007), Scheiner e Pinto (2014, 2016, 2019) e Nogueira e Pavanello (2008). Ao contrastá-las buscando suas similaridades, convergências e conflitos, explicitamos uma perspectiva para adotarmos nessa pesquisa.

Todos esses autores abordam as noções de abstração matemática, abstração e produção do pensamento matemático, descrevendo esse último em termos de processos envolvidos no ensino e na aprendizagem do conhecimento matemático. No caso dessa pesquisa, os objetos matemáticos são ensinados por meio de definições formais, com uma expectativa de que seu significado seja construído a partir dessas definições e de seu uso em exercícios (TALL, 1991). Nesse caso, por se tratar da matemática apresentada formalmente, podemos considerá-la como em Mitchelmore e White (2004), que a entendem como um sistema autocontido que não necessariamente está associado ao mundo real. Os autores trazem como exemplo as expressões x^0 e raiz quadrada de (-1) representando objetos que só possuem significado na própria matemática[1].

Nogueira e Pavanello (2008) retomam Platão e Aristóteles ao iniciar sua discussão abordando aspectos epistemológicos da matemática. Platão afirma que a matemática é pré-existente e só está aguardando para ser descoberta, enquanto na perspectiva de Aristóteles, esse conhecimento é construído por indivíduos a partir de experiências no mundo real. Para Aristóteles, as construções matemáticas poderiam ser validadas a partir de experiências com objetos do mundo real. Independentemente da perspectiva a ser adotada, é inegável que a compreensão do que é a matemática, do que e como se constituem seus objetos permeia a mente de diversos pensadores e, consequentemente, está subjacente à diversidade de propostas pedagógicas elaboradas.
Prosseguindo em sua discussão, Nogueira e Pavanello (2008) observam que a matemática recebe um tratamento diferenciado dos demais sistemas filosóficos. As autoras argumentam que, além de ser um objeto de cultura, ela é também uma ferramenta de desenvolvimento de diversas ciências, constituindo-se, também, como instrumento de comunicação interdisciplinar (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008).

As autoras destacam, ainda, a visão de conhecimento de Descartes, que descreve a matemática como sendo uma árvore na qual as raízes seriam a metafísica, o tronco, a física, e os ramos, a astronomia, a medicina etc. Segundo Nogueira e Pavanello (2008, p. 2) "a matemática, nessa visão, seria a seiva, a responsável por viabilizar todo o campo do conhecimento".

Retomando Machado (2005), as autoras introduzem o debate sobre as relações entre a matemática e a realidade. Leibniz é citado como representante dos filósofos racionalistas, e Hume, como representante dos filósofos empiristas, em debate sobre classificação das proposi-

[1] Tal exemplo é controverso, uma vez que uma aplicação de números complexos é o cálculo de impedância e tensão considerando a corrente como um número complexo na física.

ções. Para ambos, as proposições podem ser analíticas, quando elas englobam as verdades da razão, e empíricas, quando expressam os fatos. Todas as proposições se enquadram, então, em uma dessas categorias, e uma proposição não pode estar em mais de uma categoria ao mesmo tempo. Nogueira e Pavanello (2008, p. 113) afirma que "uns e outros concordam, todavia, que as proposições da Matemática são analíticas, reduzindo suas discordâncias para a interpretação que dão às proposições empíricas."

Prosseguindo com a discussão sobre as relações entre matemática e realidade, Kant afirma que a matemática é concebida no mundo das ideias, mas é possível aplicar seus conhecimentos e comprová-los no mundo real (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008). Para o filósofo, as verdades matemáticas seriam obtidas por meio de dedução.

Nogueira e Pavanello (2008) descrevem como Kant percebe que o uso do raciocínio matemático, da razão, poderia ser comprovado empiricamente. Portanto, as proposições matemáticas seriam analíticas e, ao mesmo tempo, estariam de acordo com a realidade. A visão kantiana discorda, desse modo, de uma visão dicotômica sobre proposições matemáticas, como a expressa pelos racionalistas e empiristas. Em síntese, para Kant, a matemática pode surgir no mundo das ideias, ou seja, a partir de axiomas que podem não ter relação com o mundo real, e, ao mesmo tempo, ser aplicada ao mundo real, pelas atividades e experiências. Muito há a ser debatido sobre o tema; problema que Piaget denomina "problema central da epistemologia".

Quanto aos processos envolvidos na produção do conhecimento matemático, é senso comum nomeá-los como processos de abstração. Mitchelmore e White (2004) afirmam, por exemplo, que a essência da abstração em matemática se relaciona ao fato de o conhecimento matemático ser autocontido e, portanto, seus objetos terem seus significados dentro do sistema em que foram definidos. Por esse motivo, conforme enfatizado por Sierpinska apud Mitchelmore e White (2004, p. 2), "a abstração em matemática requer ignorar algumas características do objeto e realçar outros."

Além disso, Mitchelmore e White (2004) afirmam que o fato da matemática ser autocontida é primordial, uma vez que é importante que os objetos matemáticos possam ser operados em sistemas consistentes que não exijam referências a significados anteriores. Dentre os processos de abstração elaborados por Piaget, Nogueira e Pavanello (2008) retomam a abstração reflexionante por ser um mecanismo essencial para a construção do conhecimento matemático. Para tal, conhecimentos anteriores são necessários para a elaboração de um novo objeto e esse é necessário para a construção de conceitos subsequentes a ele relacionados.

Nogueira e Pavanello (2008) afirmam que a matemática e a abstração sempre estiveram relacionadas, principalmente no senso comum. As autoras citam Machado (1990), quando ele afirma que um dos lemas que caracterizam a matemática é que "a matemática é abstrata". Tal imbricação entre a matemática e a noção de abstração pode ter sua origem já no processo necessário para a contagem, sendo abstração uma noção relacionada ao fato de a contagem poder ser feita, independentemente da natureza dos objetos a serem contados. Piaget a denomina abstração pseudoempírica, e Davis e Hersh (1986) denominam "abstração como extração"a abstração que não depende do objeto, mas se baseia nele.

As autoras afirmam que a abstração presente ao se representar entes geométricos, que é denominada, em Davis e Hersh (1986), "abstração como idealização (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008, p. 9)", coincide com a noção de abstração concebida por Aristóteles. Aristóteles considera a abstração como um processo importante na elaboração do conhecimento. Para ele, as formas inteligíveis seriam extraídas por abstração a partir do mundo sensível. Além disso, a visão de Aristóteles, segundo Nogueira e Pavanello (2008, p. 8), é a de que "a abstração começa na base e vai se elevando em níveis, nos quais o auge é a representação abstrata da coisa ou idealização".

As autoras passam a tratar, então, dos tipos de abstração propostas por Piaget. Para elas, a abstração empírica proposta por Piaget corresponde à abstração como idealização, posteriormente proposta por Davis e Hersh (1986). As autoras consideram que qualquer abstração empírica depende de quadros de conhecimento prévios que foram criados por meio de uma abstração reflexionante (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008).

Nogueira e Pavanello (2008, p. 9) defendem, ainda, que a abstração reflexionante "se apoia tanto sobre estruturas que permitem ao sujeito captar um determinado conteúdo como sobre as atividades cognitivas do sujeito para extrair novos caracteres e utilizá-los para outras finalidades". Em outras palavras, em todos os níveis, enquanto a abstração empírica fornece os dados, a abstração reflexionante atua de forma a estruturar o conhecimento.

A abstração reflexionante comporta sempre dois componentes inseparáveis, o reflexionamento, que é, de acordo com Nogueira e Pavanello (2008, p. 9), "a projeção daquilo que é extraído de um patamar inferior em um superior", e a reflexão, que é o "ato de reorganizar e reconstruir as projeções que foram feitas". Segundo as autoras, é no resultado desses processos que se elaboram conceitos e se generalizam propriedades.

Nogueira e Pavanello (2008) argumentam que a abstração reflexionante com seus dois componentes pode ser percebida em todos os estágios do desenvolvimento humano. Quando a reflexão é feita "em níveis mais altos"?, ou seja, processada mentalmente, a abstração reflexionante está se tornando consciente e, nesse momento, ela é denominada abstração refletida. A abstração refletida é então uma reflexão consciente sobre a reflexão. A relação entre a abstração reflexionante e empírica não é simétrica, uma vez que, enquanto a abstração reflexiva é autônoma, a abstração refletida depende da abstração reflexiva.

Em síntese,

> o conceito de abstração reflexionante permite mostrar a continuidade que sustenta a formação de conhecimentos mesmo por ocasião da aparição de formas novas, além de dar conta dos progressos incessantes da ciência, que podem ser produzidos, também, na ausência de experimentação. (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008 p. 10).

Nogueira e Pavanello (2008) destacam que as estruturas lógico-matemáticas não desprezam e não invalidam conhecimentos precedentes, mas os integram como subestruturas. As autoras se referenciam em Piaget, uma vez que esse pensador concebe a matemática como um sistema de construções que considera os conhecimentos prévios, as ações e as operações do sujeito sobre os objetos, bem como vai se desenvolvendo por meio das abstrações reflexionantes em níveis mais elevados.

Assim, segundo Piaget, para entender a epistemologia do conhecimento matemático, é necessário entender as conexões entre as estruturas matemáticas nascentes e as estruturas operatórias do sujeito. As autoras, também, comentam que Piaget afirma existir uma relação entre as construções do conhecimento por crianças e pelos matemáticos, pois ambos desenvolvem seu conhecimento pela contínua construção intencional e refletidas das operações sobre outras operações (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008). Elas afirmam que tal visão é contrária à opinião da maioria dos cientistas e dos historiadores das ciências, uma vez que eles afirmam, não existir, segundo Nogueira e Pavanello (2008, p. 6), uma "relação entre a formação das noções e operações em seus estágios mais elementares e a sua evolução nos níveis superiores."

Mitchelmore e White (2008) também buscam analisar os processos envolvidos na aprendizagem de conceitos matemáticos. Assim como Nogueira e Pavanello (2008), os autores adotam o referencial de Piaget sobre abstração, mas diferentemente delas, eles dão atenção e assumem um olhar diferenciado para o conceito de abstração empírica. Além disso, os autores, em seu trabalho intitulado *"Abstração em matemática e no aprendizado de matemática"*[2] , afirmam que os estudantes aprendem diversos objetos matemáticos abstratos na escola; ressaltando que é nesse contexto, o contexto escolar, que eles pretendem a discutir o significado da noção de abstrato (MITCHELMORE; WHITE, 2004).

Como exemplos, eles apresentam, portanto, o caso da adição, de ângulos e de taxas de variação, mostrando que, em todos eles, os estudantes experimentam e, a partir de tais experiências, são capazes de analisar que características comuns surgem nas experiências vividas.

Mitchelmore e White (2004, p. 4) ressaltam que "uma das características do aprendizado de ideias matemáticas fundamentais é o reconhecimento das similaridades"; similaridades essas que não são superficiais, mas que estão associadas às estruturas subjacentes a tais ideias.

Mitchelmore e White (2004, 2008) argumentam que há um grande ganho quando os estudantes são capazes de reconhecer as similaridades subjacentes a experiências diversas e conseguem relacionar situações que antes eram estanques. Em outras palavras, ao realizar isso, esses estudantes passam a ser capazes de fazer coisas que antes não podiam. Assim, os indivíduos elaboram novas ideias e são incapazes de voltar ao seu estágio anterior de ignorância ou de desconhecimento. Os autores definem então como abstração empírica o processo de reconhecimento de similaridades seguida da incorporação em uma nova ideia.

Mitchelmore e White (2004) se apoiam na distinção feita por Piaget, quando distinguem a abstração em termos de características superficiais de objetos físicos, os quais ele chamou de *abstraction a partir de l?objet*, e abstração em termos das relações percebidas ao se manipular tais objetos, de *abstraction a partir de l?actio*n (PIAGET, 1977, 2001). Os autores levam em consideração as experiências físicas e sociais do indivíduo. Para ambos, o reconhecimento de

[2] Tradução nossa de "Abstraction in mathematics and mathematical learning".

similaridades é essencial. Os autores utilizam a expressão abstração empírica para se referir a ambos os casos e, ao fazer isso, eles estão fazendo uma distinção entre abstração baseada na experiência e um outro tipo de abstração, que eles chamam de abstração teórica.

Mitchelmore e White (2004) argumentam que, quando o indivíduo aprende a partir de experiências que geram uma consciência de similaridades, três coisas acontecem: os estudantes aprendem o conceito empírico, o objeto matemático e a relação entre o conceito empírico e o objeto matemático (MITCHELMORE; WHITE, 2004). Os autores afirmam que os conceitos empíricos, muitas vezes, são imprecisos e difíceis de definir. Para exemplificar essa afirmação, eles utilizam o círculo, que pode ser definido empiricamente como um objeto perfeitamente redondo, mas isso só pode ser realizado com exemplos. O círculo só se transforma em um objeto matemático quando é definido como o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um dado ponto, pois, nesse caso, ele está claramente definido em termos de outros objetos matemáticos (MITCHELMORE; WHITE, 2004).

Entretanto, os autores alegam que, para que essa definição faça sentido para alguém, é necessário que o indivíduo tenha visto que o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um dado ponto é um objeto perfeitamente redondo, e vice-versa. Em outras palavras, eles devem ter a experiência com diversas representações de círculos, bem como perceber a similaridade entre os diversos exemplos. (MITCHELMORE; WHITE, 2004).

Mitchelmore e White (2004) enfatizam uma distinção epistemológica entre abstração em matemática e na aprendizagem de matemática. Enquanto aqueles pesquisadores denominam os objetos matemáticos como sendo abstratos-separados, eles chamarão os conceitos empíricos de abstratos-gerais, em uma menção à ideia de que cada conceito incorpora aquilo que é geral aos objetos dos quais a similaridade é abstraída.

As perspectivas de Nogueira e Pavanello (2008) e de Mitchelmore e White (2004) podem ser incluídas em uma segunda tradição, de acordo com a organização proposta por Scheiner e Pinto (2019) para as diferentes teorias sobre abstração. Esses pesquisadores destacam que as discussões recentes abordam o conceito de abstração segundo três tradições, que são: as teorias que se referenciam na teoria da atividade, as que adotam perspectivas sobre a dualidade processo-objeto dos entes matemáticos, e as que retomam o entendimento de que todo conhecimento é situado.

Citando Freudenthal (1978), "a primeira dessas tradições envolve abordagens para, e considerações sobre, a cognição matemática alinhada com a orientação de que a matemática é uma atividade humana"[3] . (PINTO; SCHEINER, 2019). É o caso das pesquisas que definiram o modelo RBC+C model, proposto por Schwarz, Dreyfus e Hershkowitz (2009), que "aninha"quatro ações epistêmicas: reconhecimento, construir com, construção e consolidação.

Em breve descrição, Scheiner e Pinto (2019) destacam que os autores concebem que o processo de construção de novos conhecimentos matemáticos requer reorganizar construções prévias, estabelecer relações e conexões entre eles, entrelaçando-os em um único processo do

[3] Tradução nossa de: The first of these traditions involves approaches to, and accounts of, mathematical cognition aligned with the orientation that mathematics is a human activity.

pensamento matemático, então, alcançar o novo construto matemático. Além desse, Pinto e Scheiner (2019) mencionam, ainda, o trabalho de Bass (2017), que foca a elaboração de atividades de construção de teorias, enfatizando o reconhecimento e a articulação pelo estudante de estruturas comuns.

Tais estruturas são construídas propositalmente para serem relacionadas de forma, muitas vezes, inesperadas. Como último exemplo, na primeira tradição, Radford (2013) propõe sua teoria da objetificação. Nela, o que se analisa são os modos como formas de pensar codificadas socio-historicamente se tornam objetos de reconhecimento. A segunda tradição, segundo Pinto e Scheiner (2019, p. 2) “inclui abordagens para, e considerações sobre, processos cognitivos que constituem um conceito estrutural a partir de processos operacionais”. Um primeiro exemplo de teoria e de autores incluídos nessa tradição é a teria APOS[4], proposta por Dubinsky (1991) e seus colaboradores (ARNON *et al.*, 2014).

Para Pinto e Scheiner (2019, p. 2), essa teoria descreve a construção de conceitos como resultado do “encapsulamento de processos em objeto”. De modo similar, todavia, mais próximo de uma epistemologia dos conceitos, Sfard (1991) concebe a dualidade das noções matemáticas como processo-objeto como sendo “duas faces de uma mesma moeda”. Além disso, denomina-se reificação o fenômeno que corresponde à transformação dos conhecimentos matemáticos de um modo operacional, correspondente a processos, para o estrutural, correspondente a objetos. Ainda na segunda tradição, Gray e Tall (1994) descrevem a progressão do pensamento procedural para o procedimento proceitual, “em que o conhecimento proceitual é a habilidade de manipular de forma flexível os símbolos matemáticos tanto como um processo ou um conceito.”(SCHEINER; PINTO 2019, p. 2).

A terceira tradição, segundo Pinto e Scheiner (2019), argumenta contra relatos reducionistas e mentalistas, reconhecendo entendimentos matemáticos como situados em contextos específicos, como Noss e Hoyles (1996), ou descrevendo a dinâmica complexa da aprendizagem de matemática como em Schoenfeld, Smith e Arcavi (1993). Nessa última vertente, Piere e Kieren (1994) desenvolveram uma teoria sobre a compreensão da matemática como um processo recorrente de organizar as estruturas dentro ou por meio de níveis de conhecimento. Segundo essa última teoria, o desenvolvimento da compreensão matemática não é linear, mas exige que se retorne a níveis anteriores para estender o conhecimento atual e, assim, criar compreensões mais profundas e sofisticadas sobre um mesmo conceito.

Scheiner e Pinto (2019) inserem sua contribuição para o campo da pesquisa de modo transversal a essas três tradições. Eles buscam descrever processos envolvidos quando indivíduos atribuem significados aos objetos matemáticos elaborando, para isso, noções que denominaram contextualizar$_P$ [5], complementarizar$_P$ e complexificar$_P$. Aqui, atribuir significado é, segundo Pinto, (1998, p. 299) “utilizar a imagem conceitual do indivíduo como ponto de partida para criar conhecimento. Explorando e refletindo sobre, o indivíduo reconstrói imagens prévias para

[4] APOS é sigla para Action Process Object Schema.

[5] A letra P subscrita é utilizada para identificar que o significado da palavra é o utilizado por Scheiner e Pinto (2019)

se enquadrar ao novo conceito."

Scheiner (2016) propõe considerar processos contextualizar$_P$, complementarizar$_P$ e complexificar$_P$ como cruciais quando o indivíduo atribui significado a objetos matemáticos. Scheiner e Pinto (2019) teorizam, descrevem e interpretam os três processos. Scheiner e Pinto (2019) entendem que grande parte da pesquisa atual sobre compreensão e aprendizado de matemática parte, como no construtivismo, do princípio de que os indivíduos constroem seu próprio conhecimento. Segundo Scheiner e Pinto (2019, p. 2), os "processos de atribuir significado a objetos do pensamento de um indivíduo têm sido subespecificados, e assim sendo, impedem nosso discurso de sair de uma visão tradicional de que o sentido é uma qualidade inerente do objeto matemático."

Esses autores buscam, assim como em Scheiner (2016), aprofundar o entendimento da perspectiva de atribuir significado, colocando em diálogo tipos de abstração que poderiam ser entendidos como opostos ou distintos. São eles a abstração a partir de ações e a abstração a partir de objetos (PIAGET, 1977/2001), bem como duas estratégias para dar sentido a um conhecimento novo, no caso, as estratégias nomeadas por extrair significado e atribuir significado (PINTO, 1998). O diálogo entre as formas de abstração em Piaget e as estratégias de significação para o conhecimento novo em Pinto (1998) resultou no reconhecimento dos processos mencionados como contextualizarP, complementarizarP e complexificarP. Em Scheiner (2016), o autor discute tanto a formação de conceito quanto a construção de significado a partir de Frege (1892).

O significado de um conceito matemático surge a partir das interações da pessoa com objetos, que, de acordo com a visão fregeana, estão incluídos sob o conceito. Essa afirmação se baseia na compreensão de Frege (1892), de que não é possível acessarmos diretamente um conceito, mas apenas por meio de objetos que os representam. Scheiner e Pinto (2019) discutem essas colocações observando que, ao contrário do que ocorre com as ciências naturais, os objetos matemáticos não podem ser (ou não são) apreendidos pelos sentidos humanos (DUVAL, 2006; FREGE, 1892). Ou seja, os objetos precisam ser expressos por meio de sinais ou outros meios semióticos (RADFORD, 2002).

Adotando a perspectiva fregeana, segundo Scheiner e Pinto (2019, p. 3), Duval (2006) escreve que o "modo de representação do objeto deve ser diferenciado do objeto que ele representa"porque ele não é o objeto representado. Scheiner e Pinto (2019) discutem esse aspecto retomando a terminologia em Frege e explicando que, muitas vezes, o indivíduo confunde o sentido$_F$[6] ("Sinn") de uma expressão com a referência$_F$ ("Bedeutung") de uma expressão ou uma representação.

Buscando entender a que se refere a noção de pensamento matemático e como ele se desenvolve, retomamos as visões de Mitchelmore e White (1995, 2000, 2004, 2007), Scheiner e Pinto (2014, 2016, 2019) e Nogueira e Pavanello (2008). Ao contrastá-las buscando suas similaridades, convergências e conflitos, explicitamos uma perspectiva para adotarmos nessa

[6] F subscrito faz referência as definições de Frege para aquele termo.

pesquisa. Todos esses autores abordam as noções de abstração matemática, abstração e a produção do pensamento matemático, descrevendo esse último em termos de processos envolvidos no ensino/aprendizagem do conhecimento matemático. No caso dessa pesquisa, os objetos matemáticos são ensinados por meio de definições, formais, com uma expectativa de que seu significado seja construído a partir dessas definições e de seu uso em exercícios (TALL, 1991). Nesse caso, por se tratar da matemática apresentada formalmente, podemos considerá-la como em Mitchelmore e White (2004), que a entendem como um sistema autocontido que não (necessariamente) está associado ao mundo real. Os autores trazem como exemplo as expressões x^0 e raiz quadrada de (-1) representando objetos que só possuem significado na própria matemática[7]. Nogueira e Pavanello (2008) retomam Platão e Aristóteles ao iniciar sua discussão abordando aspectos epistemológicos da matemática. Platão afirma que a matemática é pré-existente e só está aguardando para ser descoberta, enquanto na perspectiva de Aristóteles, esse conhecimento é construído por indivíduos a partir de experiências no mundo real. Nessa última perspectiva, as construções matemáticas poderiam ser validadas a partir de experiências com objetos do mundo real.

Independente da perspectiva a ser adotada, é inegável que a compreensão do que é a matemática, do que e como se constituem seus objetos permeiam a mente de diversos pensadores e consequentemente estão subjacentes à diversidade de propostas pedagógicas elaboradas. Prosseguindo em sua discussão, Nogueira e Pavanello (2008) observam que a matemática recebe um tratamento diferenciado dos demais sistemas filosóficos. Argumentam que além de ser um objeto de cultura, é também uma ferramenta de desenvolvimento de diversas ciências, constituindo-se também como instrumento de comunicação interdisciplinar (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008). As autoras destacam ainda a visão de conhecimento de Descartes que o descreve como uma árvore na qual as raízes seriam a metafísica, o tronco a física e os ramos seriam a astronomia, medicina etc. A matemática nessa visão seria a seiva, a responsável por viabilizar todo o campo do conhecimento. (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008, p.2)

Retomando Machado (2005), as autoras introduzem o debate sobre as relações entre a matemática e a realidade. Leibniz é citado como representante dos filósofos racionalistas, e Hume, como representante dos filósofos empiristas, em debate sobre classificação das proposições. Para ambos as proposições podem ser analíticas, quando essas englobam as verdades da razão, e empíricas, quando essas expressam os fatos. Todas as proposições se enquadram então em uma dessas categorias; e uma proposição não pode estar em mais de uma categoria ao mesmo tempo. "Uns e outros concordam, todavia, que as proposições da Matemática são analíticas, reduzindo suas discordâncias para a interpretação que dão às proposições empíricas."(NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008, p. 113)

Prosseguindo com a discussão sobre as relações entre matemática e realidade, Kant afirma que a matemática é concebida no mundo das ideias, mas que é possível aplicar seus conhecimentos e comprová-los no mundo real (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008). Para aquele filósofo, as

[7] Tal exemplo é controverso, uma vez que uma aplicação de números complexos é o cálculo de impedância e tensão considerando a corrente como um número complexo na física.

verdades matemáticas seriam obtidas por meio de dedução. Nogueira e Pavanello (2008) descrevem como Kant percebe que o uso do raciocínio matemático, da razão, poderia ser comprovado empiricamente. Portanto, as proposições matemáticas seriam analíticas e, ao mesmo tempo, estariam de acordo com a realidade. A visão kantiana discorda portanto de uma visão dicotômica sobre proposições matemáticas, como expressa pelos racionalistas e empiricistas. Em síntese, para Kant, a matemática pode surgir no mundo das ideias (ou seja, surgir a partir de axiomas que podem não ter relação com o mundo real), e ao mesmo tempo ser aplicada ao mundo real (pelas atividades e experiências). Muito há a ser debatido sobre o tema; problema que Piaget denomina como "problema central da epistemologia".

Quanto aos processos envolvidos na produção do conhecimento matemático, é senso comum nomeá-los como processos de abstração. Mitchelmore e White (2004) afirmam por exemplo, que a essência da abstração em matemática relaciona-se ao fato de o conhecimento matemático ser autocontido e, portanto, seus objetos terem seus significados dentro do sistema em que foram definidos. Por este motivo, conforme enfatizado em Sierpinska (apud MITCHELMORE; WHITE, 2004, p. 2), a abstração em matemática requer ignorar algumas características do objeto e realçar outros. Além disso, Mitchelmore e White (2004) afirmam que o fato da matemática ser autocontida é primordial uma vez que é importante que os objetos matemáticos possam ser operados em sistemas consistentes que não exijam referências a significados anteriores.

Dentre os processos de abstração elaborados por Piaget, Nogueira e Pavanello (2008) retomam a abstração reflexionante, por ser um mecanismo essencial para a construção do conhecimento matemático. Para tal, conhecimentos anteriores são necessários para a construção de um novo objeto e esse é necessário para a construção de conceitos subsequentes a ele relacionados. Nogueira e Pavanello (2008) afirmam que a matemática e a abstração sempre estiveram relacionadas, principalmente no senso comum. Citam Machado (1990) quando esse afirma que um dos lema que caracterizam a matemática é que "a matemática é abstrata". Tal imbricação entre matemática e a noção de abstração pode ter sua origem já no processo necessário para a contagem, sendo abstração uma noção relacionada ao fato de a contagem poder ser feita, independendo da natureza dos objetos a serem contados. Piaget denomina de abstração pseudo-empírica, e Davis e Hersh denominam por "abstração como extração"a abstração que não depende do objeto, mas se baseia nele. As autoras afirmam que a abstração presente ao se representar entes geométricos, que é denominada em Davis e Hersh (1986) por "abstração como idealização", coincide com a noção de abstração concebida por Aristóteles (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008, p.9). Aristóteles considera a abstração como um processo importante na elaboração do conhecimento. Para ele, as formas inteligíveis seriam extraídas por abstração a partir do mundo sensível. Além disso, a visão de Aristóteles é a de que a abstração começa na base e vai se elevando em níveis, nos quais o auge é a representação abstrata da coisa ou idealização. (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008, p. 8)

As autoras passam a tratar então dos tipos de abstração propostas por Piaget. Para elas a abstração empírica proposta por Piaget corresponde à abstração como idealização, como posteriormente proposto por Davis e Hersh (1986). Em Nogueira e Pavanello(2008) as autoras consideram que qualquer abstração empírica depende de quadros de conhecimento prévios que foram criados por meio de uma abstração reflexionante (NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008, p. 9). Elas defendem ainda que a abstração reflexionante "se apoia tanto sobre estruturas que permitem ao sujeito captar um determinado conteúdo como sobre as atividades cognitivas do sujeito para extrair novos caracteres e utilizá-los para outras finalidades"(NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008, p.9). Em outras palavras, em todos os níveis, enquanto a abstração empírica fornece os dados, a abstração reflexionante atua de forma a estruturar o conhecimento. A abstração reflexionante comporta sempre dois componentes inseparáveis, o reflexionamento, que é "a projeção daquilo que é extraído de um patamar inferior em um superior", e a reflexão, que é o "ato de reorganizar e reconstruir as projeções que foram feitas"(NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008 p.9). Segundo as autoras, é em resultado desses processos que se elaboram conceitos e se generalizam propriedades.

Nogueira e Pavanello (2008) argumentam que a abstração reflexionante com seus dois componentes pode ser percebida em todos os estágios do desenvolvimento humano. Quando a reflexão é feita "em níveis mais altos", ou seja, processada mentalmente, a abstração reflexionante está se tornando consciente e, neste momento, ela é denominada abstração refletida. A abstração refletida é então uma reflexão consciente sobre a reflexão. A relação entre a abstração reflexionante e empírica não é simétrica, uma vez que enquanto a abstração reflexiva é autônoma, a abstração refletida depende da abstração reflexiva. Em síntese,

> o conceito de abstração reflexionante permite mostrar a continuidade que sustenta a formação de conhecimentos mesmo por ocasião da aparição de formas novas, além de dar conta dos progressos incessantes da ciência, que podem ser produzidos, também, na ausência de experimentação.
>
> NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008 p. 10.

Nogueira e Pavanello (2008) destacam que as estruturas lógico-matemáticas não desprezam nem invalidam conhecimentos precedentes, mas as integram como subestruturas. As autoras referenciam-se em Piaget uma vez que esse pensador concebe a matemática como um sistema de construções que considera os conhecimentos prévios, as ações e operações do sujeito sobre os objetos e que vai se desenvolvendo por meio das abstrações reflexionantes em níveis mais elevados. Sendo assim, e ainda segundo Piaget, para entender a epistemologia do conhecimento matemático, é necessário entender as conexões entre as estruturas matemáticas nascentes e as estruturas operatórias do sujeito. As autoras também comentam que Piaget afirma existir uma relação entre as construções do conhecimento por crianças e pelos matemáticos, uma vez que ambos desenvolvem seu conhecimento pela contínua construção intencional e refletidas das operações sobre outras operações. As autoras afirmam que tal visão é contrária à opinião da maioria dos cientistas e historiadores das ciências, uma vez que eles afirmam que não existe uma "relação entre a formação das noções e operações em seus estágios mais elementares e a sua evolução nos níveis superiores"(NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008, p. 6). Assim como Nogueira e Pavanello (2008), Mitchelmore e White (2008) buscam analisar os processos envolvidos na aprendizagem de conceitos matemáticos. Como as autoras, adotam o referencial de Piaget sobre abstração, mas diferentemente delas, dão atenção e assumem um olhar diferenciado para o conceito de abstração empírica. Além disso, Mitchelmore e White (2004) em seu trabalho intitulado "Abstração em matemática e no aprendizado de matemática"[8] afirmam que os estudantes aprendem diversos objetos matemáticos abstratos na escola; ressaltando que é nesse contexto, o contexto escolar, que eles pretendem discutir o significado da noção de abstrato. Como exemplos, eles apresentam então o caso da adição, de ângulos e taxas de variação, mostrando que em todos eles, os estudantes experimentam e, a partir de tais experiências, são capazes de analisar que características comuns surgem nas experiências vividas. Ressaltam que "uma das características do aprendizado de ideias matemáticas fundamentais é o *reconhecimento das similaridades*"[9]. Similaridades essas que não são superficiais, mas que estão associadas às estruturas subjacentes a tais ideias. Mitchelmore e White (2004, 2008) argumentam que há um grande ganho quando o estudante é capaz de reconhecer as similaridades subjacentes a experiências diversas e conseguem relacionar situações que antes eram estanques. Ao fazer isso, esses estudantes passam a ser capazes de fazer coisas que antes não podiam. Assim os indivíduos elaboram novas ideias e são incapazes de voltar ao seu estágio anterior de ignorância ou desconhecimento (MITCHELMORE; WHITE, 2004, p.4). Mitchelmore e White (2004) definem então como abstração empírica o processo de reconhecimento de similaridades seguida da incorporação em uma nova ideia.

Mitchemore e White (2004) apoiam-se na distinção feita por Piaget quando distinguem a abstração em termos de características superficiais de objetos físicos (que ele chamou de abstraction à partir de l'objet) e abstração em termos das relações percebidas ao se manipular tais objetos (abstraction à partir de l'action) (PIAGET, 1977/2001). Mitchelmore e White (2004) levam em consideração as experiências físicas e sociais do indivíduo. Para ambos o reconhecimento de similaridades é essencial. Os autores utilizam a expressão abstração empírica para se referir a ambos os casos e ao fazer isso eles estão fazendo uma distinção entre abstração baseada na experiência e um outro tipo de abstração, que eles chamam de abstração teórica.

Mitchelmore e White (2004) argumentam que quando o indivíduo aprende a partir de experiências que geram uma consciência de similaridades, três coisas acontecem: os estudantes aprendem o conceito empírico, aprendem o objeto matemático e aprendem a relação entre o conceito empírico e o objeto matemático (MITCHELMORE; WHITE, 2004). Os autores afirmam que os conceitos empíricos muitas vezes são imprecisos e difíceis de definir. Para exemplificar essa afirmação eles utilizam o círculo, que pode ser definido empiricamente como um objeto perfeitamente redondo, mas isso só pode ser realizado com exemplos. O círculo só se transforma em um objeto matemático quando é definido como o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um dado ponto pois nesse caso ele está claramente definido em termos de outros objetos matemáticos.

[8] Tradução nossa de "Abstraction in mathematics and mathematical learning.

[9] Tradução nossa de: "a characteristic of the learning of fundamental mathematical ideas is *similarity recognition*."Ênfase no original

Os autores alegam, entretanto, que para que essa definição faça sentido para alguém, é necessário que o indivíduo tenha visto que o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um dado ponto é um objeto perfeitamente redondo, e vice-versa. Em outras palavras, eles devem ter a experiência com diversas representações de círculos, e perceber a similaridade entre os diversos exemplos.
Mitchelmore e White (2004) enfatizam uma distinção epistemológica entre abstração em matemática e na aprendizagem de matemática. Enquanto aqueles pesquisadores denominam os objetos matemáticos como abstratos-separados, eles denominarão os conceitos empíricos como abstratos-gerais em uma menção à ideia de que cada conceito incorpora aquilo que é geral aos objetos dos quais a similaridade é abstraída.
As perspectivas de Nogueira e Pavanello (2008) e de Mitchelmore e White (2004) podem ser incluídas em uma segunda tradição, de acordo com a organização proposta por Scheiner e Pinto (2019) para as diferentes teorias sobre abstração. Esses pesquisadores destacam que as discussões recentes abordam o conceito de abstração segundo três tradições, que são: as teorias que se referenciam na teoria da atividade, as que adotam perspectivas sobre a dualidade processo-objeto dos entes matemáticos, e as que retomam o entendimento de que todo conhecimento é situado.
Citando Freudenthal (1978), "a primeira dessas tradições envolve abordagens para, e considerações sobre, a cognição matemática alinhada com a orientação de que a matemática é uma atividade humana"[10] (PINTO; SCHEINER, 2019). É o caso das pesquisas que definiram o modelo RBC+C model, proposto por Schwarz, Dreyfus e Hershkowitz (2009), que "aninha"quatro ações epistêmicas: reconhecimento, construir com, construção e consolidação. Em breve descrição, Scheiner e Pinto (2019) destacam que os autores concebem que o processo de construção de novos conhecimentos matemáticos requer reorganizar construções prévias, estabelecer relações e conexões entre eles, entrelaçando-os em um único processo do pensamento matemático para então se alcançar o novo construto matemático. Além desse, Pinto e Scheiner (2019) mencionam ainda o trabalho de Bass (2017), que foca na elaboração de atividades de construção de teorias, enfatizando o reconhecimento e articulação pelo estudante de estruturas comuns que são construídas propositalmente para serem relacionadas, de forma muitas vezes inesperadas. Como último exemplo na primeira tradição, Radford (2013) propõe sua teoria da objetificação. Nela o que se analisa são os modos como formas de pensar codificadas socio-historicamente se tornam objetos de reconhecimento.
A segunda tradição, "inclui abordagens para, e considerações sobre, processos cognitivos que constituem um conceito estrutural a partir de processos operacionais"(PINTO; SCHEINER, 2019, p. 2). Um primeiro exemplo de teoria e autores incluídos nessa tradição é a teria APOS[11] proposta por Dubinsky (1991) e seus colaboradores (ARNON et al., 2014). Essa teoria descreve a construção de conceitos como resultado do "encapsulamento de processos em objeto". De modo similar, mas que mais próximo de uma epistemologia dos conceitos, Sfard (1991) concebe a dualidade das noções matemáticas como processo-objeto como "duas faces de uma

[10] Tradução nossa de: The first of these traditions involves approaches to, and accounts of, mathematical cognition aligned with the orientation that mathematics is a human activity

[11] APOS é sigla para Action Process Object Schema.

mesma moeda", denominando por reificação o fenômeno que corresponde à transformação dos conhecimentos matemáticos de um modo operacional (correspondente a processos) para o estrutural (correspondente a objetos). Ainda na segunda tradição, Gray e Tall (1994) descrevem a progressão do pensamento procedural para o procedimento proceitual, "em que o conhecimento proceitual é a habilidade de manipular de forma flexível os símbolos matemáticos tanto como um processo ou um conceito"(SCHEINER; PINTO 2019, p. 2).

A terceira tradição, segundo Pinto e Scheiner (2019) argumentam contra relatos reducionistas e mentalistas, reconhecendo entendimentos matemáticos como situados em contextos específicos, como Noss e Hoyles (1996) ou descrevendo a dinâmica complexa da aprendizagem de matemática como em Schoenfeld, Smith e Arcavi (1993). Nesta última vertente, Piere e Kieren (1994) desenvolveram uma teoria sobre a compreensão da matemática como um processo recorrente de organizar as estruturas dentro ou por meio de níveis de conhecimento. Segundo esta última teoria, o desenvolvimento da compreensão matemática não é linear, mas exige que se retorne a níveis anteriores para estender o conhecimento atual e assim criar compreensões mais profundas e sofisticadas sobre um mesmo conceito.

Scheiner e Pinto (2019) inserem sua contribuição para o campo da pesquisa de modo transversal a essas três tradições. Buscam descrever processos envolvidos quando indivíduos atribuem significados aos objetos matemáticos elaborando, para isto, noções que denominaram por contextualizar$_P$[12] , complementarizar$_P$ e complexificar$_P$. Aqui, atribuir significado é "utilizar a imagem conceitual do indivíduo como ponto de partida para criar conhecimento. Explorando e refletindo sobre, o indivíduo reconstrói imagens prévias para se enquadrar ao novo conceito."(PINTO, 1998, p. 299)

Scheiner (2016) propõe considerar processos contextualizar$_P$, complementarizar$_P$ e complexificar$_P$ como cruciais quando o indivíduo atribui significado a objetos matemáticos. Scheiner e Pinto (2019) teorizam, descrevem e interpretam os três processos.

Scheiner e Pinto (2019) entendem que grande parte da pesquisa atual sobre compreensão e aprendizado de matemática parte, como no construtivismo, do princípio de que os indivíduos constroem seu próprio conhecimento. Segundo Scheiner e Pinto (2019) "processos de atribuir significado a objetos do pensamento de um indivíduo têm sido subespecificados, e assim sendo, impedem nosso discurso de sair de uma visão tradicional de que o sentido é uma qualidade inerente do objeto matemático"(2019, p.2). Esses autores buscam, como em Scheiner (2016), aprofundar o entendimento da perspectiva de atribuir significado (Pinto, 1998) colocando em diálogo tipos de abstração que poderiam ser entendidos como opostos ou distintos, que são a abstração a partir de ações e abstração a partir de objetos (PIAGET, 1977/2001), e duas estratégias para dar sentido a um conhecimento novo, no caso, as estratégias nomeadas por extrair significado e atribuir significado (PINTO, 1998).

O diálogo entre as formas de abstração em Piaget e as estratégias de significação para o conhecimento novo em Pinto (1998) resultou no reconhecimento dos processos mencionados como

[12] A letra P subscrita é utilizada para identificar que o significado da palavra é o utilizado por Scheiner e Pinto (2019)

contextualizar$_P$, complementarizar$_P$ e complexificar$_P$.Em Scheiner (2016), o autor discute tanto a formação de conceito quanto para a construção de significado a partir de Frege (1892). O significado de um conceito matemático surge a partir das interações da pessoa com objetos, que de acordo com a visão fregeana, estão incluídos sob o conceito. Essa afirmação se baseia na compreensão de Frege (1892) de que não é possível acessarmos diretamente um conceito, mas apenas por meio de objetos que os representam.

Scheiner e Pinto (2019) discutem essas colocações observando que, ao contrário do que ocorre com as ciências naturais, os objetos matemáticos não podem ser (ou não são) apreendidos pelos sentidos humanos (DUVAL, 2006; FREGE, 1892). Ou seja, os objetos precisam ser expressos por meio de sinais ou outros meios semióticos (RADFORD, 2002). Adotando a perspectiva Fregeana Duval (2006) escreve que o "*modo de representação* do objeto deve ser diferenciado do objeto que ele representa"(SCHEINER ; PINTO, 2019, p. 3) porque ele não é o objeto representado.

Scheiner e Pinto (2019) discutem esse aspecto retomando a terminologia em Frege e explicando que muitas vezes o indivíduo confunde o sentido$_F$[13] ("Sinn") de uma expressão com a referência$_F$ ("Bedeutung") de uma expressão ou representação. A referência$_F$ de uma expressão é o objeto a que se refere enquanto o sentido$_F$ é a forma com que o objeto é concebido pela mente (FREGE, 1892, b).

Ilustrando com um caso matemático, Scheiner e Pinto (2019) apresentam as expressões "$3 + 2$"e "$7 - 2$"na qual apesar a referência$_F$ ser a mesma, ou seja, o número 5, as expressões expressam pensamentos$_F$ diferentes. Scheiner e Pinto (2019) interpretam, baseado nos exemplos, que os sentidos$_F$ capturam os significados epistemológicos e cognitivos das expressões. Eles afirmam ainda que tal entendimento incorpora uma das mais importantes afirmações de Frege, que diz que o indivíduo só tem acesso ao objeto através de um sentido$_F$ da expressão.

Na visão de Frege, sentidos$_F$ e pensamentos$_F$ não dependem de portadores, sendo inerentes ao objeto; e, portanto, devem ser distinguidos de uma ideia$_F$. Um indivíduo possui uma ideia$_F$ e essa é parte constituinte da consciência do indivíduo. Por outro lado, pensamentos$_F$ não dependem do pensamento do indivíduo e, portanto, o ato de pensar deve ser diferenciado do pensamento$_F$ que o indivíduo possa ter. Scheiner e Pinto (2019) afirmam ainda que ao conhecer um objeto, o indivíduo alcança o sentido$_F$ ou percebe o pensamento$_F$ por meio de uma ideia$_F$. Desse modo as concepções são entendidas como organizações mais complexas de diferentes ideias$_F$.

Scheiner e Pinto (2019) retomam diferentes formas ou estratégias do indivíduo para conhecer objetos identificadas em Pinto (1998) em um contexto em que conceitos matemáticos eram apresentados por suas definições formais.[14]

> Extrair significado envolve trabalhar no conceito, rotinizando-o, usando-o, e construindo seu significado como uma construção formal. Dar significado significa pegar como ponto de partida a

[13] F subscrito faz referência as definições de Frege para aquele termo.

[14] Gray, Pinto, Pitta e Tall (1999) afirmam que ao dar significado o que o indivíduo está fazendo é criando perspectivas que permitam significar novos conhecimentos baseados em estruturas cognitivas prévias. Para Tall (2003) dar significado se aproxima de uma "abordagem natural"que constrói imagens de conceito enquanto extrair significado se aproxima de uma "abordagem formal"que constrói teoremas formais baseados em axiomas formais.

> imagem de conceito pessoal para criar um conhecimento novo. (PINTO, 1998, pp. 298-299)

Os processos envolvidos na estratégia de extrair significados são bem descritos e explicados como resultando da manipulação de objetos ou ações sobre objetos e de reflexões sobre as variações nos modelos apresentados a partir das manipulações (Scheiner, 2016). Tais reflexões sobre ações sobre objetos são em geral associadas à noção de abstração reflexiva, como proposta por Piaget (1977/2001). Os processos envolvidos ao dar sentido, ou atribuir significado, como proposto por Pinto (1998), podem ser melhor interpretados em termos das ideias de Frege como atribuir uma ideia$_F$ a um modo de representação. Desse modo o indivíduo atribui significados a partir de experiências já vividas por ele. Segundo Scheiner:

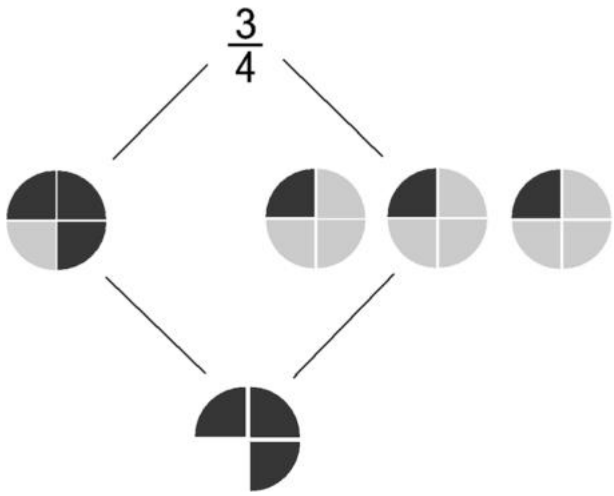
> Dar sentido se assemelha a adotar uma perspectiva baseada na noção da abstração estrutural que foca na "riqueza do particular que está incorporador não no conceito propriamente mas no objeto que está sob o conceito"(SCHEINER 2016, p.175, tradução nossa.)

Scheiner (2016) propõe os processos de contextualizar$_P$, complementarizar$_P$ e complexificar$_P$ como essenciais para o desenvolvimento da cognição matemática. Ao desenvolver tais processos Scheiner e Pinto (2019) retomam van Oers (1998) ao argumentar que o sentido$_F$ de uma representação de um objeto em determinado momento só pode ser definido até um certo ponto, uma vez que esta depende de como o objeto é contextualizado. Scheiner e Pinto (2019) afirmam ainda que van Oers (1998) defende uma abordagem dinâmica em que a diversidade de contextos permitiria uma particularização do sentido$_F$ relacionado com o contexto específico em que o objeto está inserido em cada momento. [15]
Frege (1892) defende que um sentido$_F$ particular "ilumina a referência de modo unilateral"(p. 27) e que uma compreensão completa da referência$_F$ demanda ser possível afirmar se determinado sentido$_F$, qualquer que seja este, pertence a determinada referência$_F$. Scheiner e Pinto (2019) mencionam Duval (2006) quando este afirma que vislumbrar o sentido$_F$ de apenas uma representação não é suficiente para que se compreenda o que é o objeto. Scheiner e Pinto (idem) afirmam que enquanto *contextualizar* particulariza o sentido$_F$ de uma representação, o "re-contextualizar" particulariza diferentes sentidos$_F$ expresso em diferentes representações de um mesmo objeto. Assim os sentidos$_F$ podem variar, mesmo tendo a mesma referência$_F$. São estes diferentes sentidos$_F$ que são importantes como "valor epistemológico" para diferentes representações, uma vez que remetem a aspectos distintos do objeto. É a diversidade de sentidos$_F$ que têm um "significado epistemológico" que constitui uma unidade conceitual, e não suas semelhanças ou similaridades. Destacamos aqui uma distinção importante entre a abstração a partir de objetos, e os processos que estamos apresentando, que queremos considerar. Enquanto a abstração empírica destaca a percepção de similaridades no processo de conceituação, aqui é a diversidade de

[15] Para ilustrar a afirmação, Scheiner e Pinto (2019) apresentam o caso da equação $(a+b)^2$, que pode ser manipulada algebricamente a fim de se obter a equação $a^2+2ab+b^2$. No campo da geometria, $(a+b)^2$ pode tanto representar a área de um quadrado de lado $a+b$ quanto a soma de dois quadrados, um de lado a e outro de lado b, e de dois retângulos de lados a e b, se expresso como $a^2+2ab+b^2$. Assim expressões diferentes, e contextos diferentes, podem comunicar pensamentos$_F$ diferentes.[16] Tais ideias se baseiam em uma das principais afirmações de Frege que diz que o contexto é constitutivo para sentido$_F$. (PINTO; SCHEINER, 2019).

sentidos que nos revela uma unidade resultante do processo de abstração que Scheiner (2016) e Scheiner e Pinto (2019) denominam por integrando a abstração estrutural. Segundo Scheiner e Pinto (2015) a abstração estrutural é constituída pela abstração empírica como idealizada por Piaget e a “abstração platônica ”como proposta por Tall (2012). Para Tall a abstração platônica difere das três formas de abstração propostas por Piaget uma vez que “generaliza a abstração empírica das propriedades de objetos físicos, para imaginar objetos mentais que só podem existir na mente”(TALL; p.9, APUD PINTO; SCHEINER, 2015, p.639) *Complementarizar* portanto, não dirá respeito a reunião de diversos sentidos$_F$ mas à coordenação de diversos sentidos para criar uma unidade conceitual. Como exemplo, Scheiner e Pinto (2019) apresentam o seguinte diagrama:

Figura 1 – Esquema apresentado por Scheiner e Pinto (2019)



Fonte: Scheiner; Pinto, 2019

Na Figura 1, o objeto $\frac{3}{4}$ é representado de dois modos diferentes, correspondendo a sentidos$_F$ diferentes. Enquanto uma representação sugere $\frac{3}{4}$ como “tomar três partes de um inteiro que foi divido em quatro”, a segunda sugere entender a mesma fração como pegar $\frac{1}{4}$ de três inteiros. Ambas representações podem ser coordenadas de modo a formar uma única representação que coordena os dois sentidos e corresponde a três partes de um todo dividido em quatro partes iguais.

Frege defende que um indivíduo compreende um sentido$_F$ de uma representação através de uma ideia$_F$; ou seja, o indivíduo atribui significado a um sentido$_F$ ao vincular uma ideia$_F$ a ele. Vale comentar que este processo parte do objeto representado - ou seja, da referência, em direção à ideia. Aqui, Scheiner e Pinto (2019) propõe explorar uma estratégia - a de dar ou atribuir significado, em um movimento de ideias, em direção ao objeto representado, por um processo que denominam *complementarização*. Scheiner (2016) prossegue interpretando que

“um indivíduo pode focar primeiramente num aspecto particular, mas depois vê outros aspectos

> significativos e os conecta para criar não apenas diversas ideias$_F$, mas também concepções comprimidas e mais ricas que podem operar como entidades únicas no processo futuro de aprendizado"(p. 179) .

Ele defende que *complexificar*$_P$ implica transformar pedaços de conhecimentos "uni-estruturais" em "multi-estruturais" e relacionais que produzirão estruturas de conhecimentos sofisticadas, altamente coerentes e comprimidas e que podem ser utilizadas posteriormente no processo de aprendizado. Scheiner (2016), assim como diSessa (1993), partilham uma visão de que o conhecimento é um sistema complexo de diversos tipos de elementos de conhecimento. Scheiner e Pinto (2019) sintetizam então que complexificar significa montar estruturas de conhecimento mais complexas e comprimidas, o que sugere um movimento do sistema de conhecimento do simples para o complexo.
Por exemplo, a expressão $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$ pode ser compreendido com uma ideia$_F$ da "expansão"de $(a+b)^2$ enquanto a expresão $a^2+2ab+b^2 = a^2+ab+ab+b^2 = a(a+b)+b(a+b) = (a+b)(a+b) = (a+b)^2$ pode ser entendido com a ideia$_F$ de "fatoração"de $a^2+2ab+b^2$. Os autores afirmam então que a complexificação destas duas ideias$_F$ pode levar ao entendimento da igualdade entre $(a+b)^2$ e $a^2+2ab+b^2$.

Scheiner e Pinto (2019) ressaltam que o estudo de caso em Pinto (1998) foi revisitado, e gerou novas hipóteses teóricas a partir de fundamentação empírica, a fim de elucidar as perspectivas teóricas sobre contextualizar$_P$, complementarizar$_P$ e complexificar$_P$.
Com este estudo Scheiner e Pinto (2019) ressaltam que as funções epistemológicas do processo de contextualizar$_P$, conceitual de complementarizar$_P$ e cognitiva de complexificar$_P$. Segundo os autores:

> Contextualizar permite tratar sentidos$_F$ particulares ao escolher perspectivas específicas para particularizar o valor epistemológico de diferentes representações. Complementarizar, por outro lado, é o progresso coerente de diversos sentidos$_F$ para uma unidade cujas capacidades conceituais excedem aqueles do sentidos$_F$ individuais sozinhos.

(SCHEINER; PINTO, 2019, p. 14)

Para finalizar, destacamos a diversidade de entendimentos sobre o termo "abstração" em matemática. Como o objetivo desta pesquisa é investigar modos com que diagramas e outras representações podem estar presentes no ensino e aprendizagem da matemática, e até mesmo na produção da matemática formal, passo a investigar o fenômeno da perspectiva elaborada em Scheiner (2016) e Scheiner e Pinto (2019), pelo destaque e importância atribuídos à diversidade de modos para representar o conhecimento, expressos nos papéis epistemológicos, conceituais e cognitivos dos processos envolvidos que são estudados por aqueles autores.

3 Revisão de literatura

Um dos objetivos de uma revisão de literatura é trazer um panorama sobre a produção de pesquisa sobre o tema de interesse da investigação em andamento (AZEVEDO, 2016). Interessa ao pesquisador situar o projeto em desenvolvimento no campo de pesquisa, relacionando-o às demais investigações sobre o tema escolhido, justificando sua importância ao destacar sua contribuição para a área em que se insere.

Sendo assim, apresentamos aqui pesquisas no campo da educação matemática que buscam analisar os processos envolvidos ao se aprender conceitos matemáticos formais, que destacam as dificuldades enfrentadas pelos estudantes de matemática ao aprenderem os conceitos assim apresentados e as diferentes relações que são estabelecidas ao se aprender conceitos matemáticos em contextos diversos . Uma vez que o foco no conteúdo matemático é o limite de sequências, selecionamos em especial trabalhos sobre o tema.

Em contato com a literatura de pesquisa, escolhemos cinco trabalhos como centrais, para trazer neste capítulo e organizarmos a discussão. A escolha se justifica pela contribuição dos resultados para ampliar o entendimento sobre a questão colocada, para o planejamento da própria pesquisa e análise do material empírico produzido. Como ponto de partida trazemos Vinner (1991), que busca entender o papel de definições no ensino e aprendizado de matemática. Em seguida Alcock e Simpson (2016) tratam dos processos cognitivos envolvidos no processo de classificação, definição e explicação de conceitos formais de matemática, com uma análise mais específica sobre conceitos de sequências numéricas, em foco nesta pesquisa. O trabalho de Zazkis (2016) apresenta o seu estudo sobre a conversão de argumentos gráficos para demonstrações formais. Na literatura de pesquisa desenvolvida no país, Bisognin et al. (2016) analisam as dificuldades enfrentadas pelos licenciandos em matemática ao resolverem questões sobre sequências numéricas, enquanto Heck e Cury (2018) apresentam um estudo sobre a resposta de licenciandos às questões sobre sequências numéricas utilizando para sua análise a teoria de Duval das representações semióticas.

Shlomo Vinner (1991) busca analisar o papel de definições no ensino e aprendizagem de matemática. Em seu texto “O papel das definições no ensino e aprendizado de matemática”[1], o autor argumenta que as definições, apesar de representarem as estruturas da matemática utilizadas por matemáticos, não refletem os processos cognitivos necessários para o entendimento dos conceitos pelos alunos. Desta forma, ensinar a matemática a partir de axiomas e definições é ensiná-la a partir do produto final de longo processo de sua produção. Usualmente, os matemáticos partem de definições e teoremas conhecidos para então desenvolver novas definições e provar novos teoremas. Para Vinner (1991) professores não deveriam apresentar axiomas e teoremas como fundamentos para um curso, mas sim elaborar seu curso considerando os processos que os

[1] Tradução nossa de “The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics”.

estudantes se envolvem para aprender o conceito.

Lara Alcock e Adrian Simpson em seu trabalho de 2017 intitulado "Interações entre definir, explicar e classificar: O caso das sequências crescentes e decrescentes"[2] descrevem um estudo em que investigam as relações entre definir conceitos matemáticos, explicar seus significados, classificando-os com definições formais. Segundo os autores, definições são centrais à matemática contemporânea formal pois é necessário que haja consenso entre o que se entende como sendo cada conceito. Por muito tempo os significados foram discutidos; mas isso não é mais aceito na matemática moderna, ou seja, o que uma vez é definido, não deve ser discutido. Segundo Brown (1998), revoluções nos significados ainda são possíveis, mas a determinação se dado objeto pertence a determinada categoria se daria unicamente pela definição e propriedades da categoria. Entretanto, ao investigar a construção/produção do conhecimento matemático pelos alunos, Alcock e Simpson (2017) afirmam que há indícios que seres humanos estipulam se dado elemento faz parte ou não de um conjunto não por meio de verificação de propriedades, mas pelas similaridades com exemplos anteriores e que classificações idiossincráticas são esperadas.

Alcock e Simpson (2016) denominam de pedagogia "definição-teorema-prova"o tipo de aulas centradas no professor ou no livro texto, em que é inicialmente apresentada a definição, seguida de alguns exemplos e aplicações. Alcock e Simpson (2016) ressaltam que em uma tal proposta de ensino não é discutido o pertencimento de objetos a dada categoria. Para esses autores, existem indícios de que isso cause ambiguidade com relação a de que forma definições devem determinar categorias. Para Bergé (2008) e Raman (2004), que analisaram livros texto, apesar das diferentes formas de representação do conceito (modo informal ou formal, a definição sendo muito ou pouco utilizada), gera nos estudantes dificuldades para saber como e quando a utilização das definições é necessária.

Seguindo em direção complementar à desses professores, pesquisadores em educação matemática desenvolveram e analisaram intervenções para auxiliar estudantes no processo de compreensão e utilização adequada de definições (ver ALCOCK; SIMPSON, 2016). As propostas variaram de ambientes computacionais para propiciar a compreensão de proposições logicamente complexas (DUBINSKY; ELTERMAN; GONG; 1988), a atividades que permitam que estudantes tenham experiências estruturadas e extensas para elaboração do conhecimento. (FUKAWA-CONELLY; NEWTON, 2014, WATSON; MASON, 2005). Há também pesquisadores que têm analisado de que forma o trabalho colaborativo de construção de definições tem empenhado um papel da construção do conhecimento. Pesquisadores nessa última vertente têm descrito os processos em que os participantes se engajam utilizando para tal os construtos e princípios Lakatosianos e têm analisado os critérios utilizados pelos indivíduos ao categorizar os objetos (ALCOCK; SIMPSON, 2017).

Vinner (1991) argumenta que, em diversos livros textos, as premissas para a organização do conteúdo são:

> Os conceitos são adquiridos principalmente por meio de suas definições, estudantes irão utilizar

[2] Tradução nossa de "Interactions between defining, explaining and classifying: The case of increasing and decreasing sequences"

> definições para resolver problemas e provar teoremas quando necessários de um ponto de vista matemático, definições deveriam ser mínimas[...], é desejável que definições sejam elegantes, [...] definições são arbitrárias.
>
> p.65, tradução nossa.

O autor explica sua afirmação de que as definições, de acordo com a cultura e a prática dos matemáticos, deveriam ser mínimas - o que significa que elas deveriam conter apenas o necessário para caracterizar um objeto, e que seus conteúdos não podem conter aspectos que podem ser inferidos ou deduzidos a partir da própria definição. Como exemplo para essa afirmação o autor apresenta a definição de retângulo na geometria euclidiana. Segundo Vinner (1991) caso se deseje definir um retângulo considerando seus ângulos, é desejável que se defina como sendo um quadrilátero com três ângulos retos, uma vez que é possível demonstrar na geometria euclidiana que se um quadrilátero tem 3 ângulos retos, então o quarto ângulo também será reto. Além disto uma outra premissa é a de que as definições devem ser elegantes; um valor que surge do fato de alguns matemáticos acreditarem que algumas definições são esteticamente mais elegantes que outras. O autor cita como exemplo que alguns matemáticos acham mais elegante definir números primos como aqueles que têm exatamente dois divisores, quando contrastada com a definição de que números primos são aqueles divisíveis apenas por um e eles mesmos . Entendemos com isso que um sinal de elegância da definição, um valor estético, pode ser envolver uma variedade de conceitos que exigem do estudante uma maior mobilização de conhecimentos matemáticos para compreendê-la.

As cinco premissas citadas por Vinner (1991) e apresentadas nesse texto são: 1) conceitos são adquiridos através de definições; 2) estudantes usam definições para resolver problemas; 3) definições deveriam ser mínimas; 4) é desejável que definições sejam elegantes; 5) definições são arbitrárias. Para o autor, elas "não necessariamente refletem todos os aspectos das definições em matemática avançada"(p. 66, tradução nossa). O autor reforça sua afirmação de que essas premissas são muitas vezes verificadas nas práticas pedagógicas daqueles que ensinam matemática e que ao se analisar livros textos é possível perceber a relevância das definições na apresentação do curso. Vinner (1991) afirma que o educador ao ensinar "deve levar em consideração não apenas a questão sobre como se espera que os estudantes adquiriram o conceito matemático mas também, e talvez mais importante, como estudantes *realmente* adquirem esses conceitos"(p. 67, ênfase do original, tradução nossa).

Para analisar os processos cognitivos envolvidos na compreensão de conceitos, Vinner (1991) retoma o estudo de Fodor et al. (1980) que buscou analisar os processos envolvidos quando indivíduos buscam entender determinadas afirmações, do senso comum. Vinner (1991) traz como exemplo a afirmação "meu belo carro verde está estacionado em frente à minha casa"pois apesar de existirem definições no dicionário para esses termos o indivíduo não recorre a elas. Vinner (1991) argumenta que o mesmo não é desejável no caso de afirmações técnicas, como as feitas na matemática por exemplo. Em contextos técnicos as definições desempenham um papel bem diferente se comparado aos contextos da vida cotidiana, sendo essenciais para a criação das imagens de conceito, além de serem partes integrantes das tarefas cognitivas.

Por outro lado, memorizar a definição de um conceito não é suficiente e "alguns significados deveriam estar associados com palavras"(VINNER, 1991, p.69). Dito de outro modo, "adquirir um conceito significa formar uma imagem de conceito para ele"(p. 69). Segundo Tall e Vinner (1981) e Vinner (1983), a imagem de conceito é aquilo que é resgatado pela mente ao se ouvir ou ler o nome de um conceito, e normalmente é diferente da definição. Segundo Vinner (1991), "a imagem de conceito é algo não verbal [...]. Pode ser uma representação visual do conceito no caso de o conceito ter uma representação visual, pode ser também uma coleção de impressões ou experiências"(idem, p. 68). Portanto, imagens de conceitos são construções individuais e que irão variar para cada indivíduo. Vinner (1991) afirma que as formas verbais provenientes das representações visuais só acontecem num momento futuro. O autor afirma também que ao dizer "evocar uma imagem de conceito"ele está se referindo "a partes da memória evocada em dado contexto"(p. 68) sem necessariamente se referir a todo o conhecimento do indivíduo sobre o assunto[3].

Vinner (1991) utiliza então dados para mostrar que estudantes de ensino médio e de universidade normalmente utilizam as formas de pensar de contextos não técnicos para resolver problemas técnicos. Os tópicos a serem analisados em sua pesquisa são o conceito de função, o conceito de tangente e o conceito de limite de uma sequência.

A conclusão da análise é que os três conceitos discutidos evidenciam "conflitos entre a definição formal e os exemplos típicos do conceito que podem gerar imagens de conceito incorretas"(VINNER, 1998, p. 79). Para Vinner, esses exemplos evidenciam que apesar da ênfase dada à definição, esta não era acionada para resolver as questões propostas.

Quanto ao ensino, Vinner (1998) sugere que se evite conflitos cognitivos desnecessários - ao apresentar como contra exemplos casos muito especiais, e que só se deve fazer isso quando eles se mostram necessários para apoiar o crescimento intelectual dos alunos. Na visão do autor, para uma melhor compreensão de conceitos matemáticos é necessário que, se possível, que o aprenda de forma mais próxima da vida cotidiana, uma vez que o processo de mudança da aprendizagem de conceitos da forma cotidiana para a forma técnica não é imediata nem terá a mesma eficácia com todos os indivíduos. Isto não significa excluir as definições formais, mas sim entender que seu papel e sua forma de apresentação devem ser refletidos, e que o professor leve em consideração as possíveis implicações de sua apresentação no processo de aprendizagem. No caso de estudantes cursando níveis mais avançados de matemática, as definições devem ser a principal base para a aprendizagem do novo conhecimento. O autor reforça que o professor deve buscar e apontar possíveis conflitos entre as imagens de conceito e as definições formais a partir de exemplos diferenciados, ao invés de apenas apresentá-las. Caso o estudante não deseje prosseguir em níveis mais avançados de conhecimento matemático então o melhor a se fazer

[3] Vinner ressalta ainda que a definição não é indispensável para a criação de uma imagem de conceito. Para tal usa como exemplo a "floresta"que para a criança pode ser entendida como muitas árvores juntas, mas que tem sua definição de acordo com o dicionário Merriam Webster como sendo "um grande crescimento espesso de árvores e arbustos"(VINNER, 1991, p. 69, tradução nossa) que provavelmente é inacessível a uma criança. Segundo o autor, a partir do momento que o indivíduo cria a imagem de conceito, muitas vezes a definição é deixada de lado ou até esquecida.

é evitar os conflitos. Concordamos com tal afirmação uma vez que tais conflitos podem gerar mais dúvidas e inseguranças ao estudante com relação ao conteúdo, em um primeiro contanto. Segundo Vinner (1998)

> não há prejuízos se o estudante memoriza a definição formal e a repetir em diferentes ocasiões. O professor e o editor do livro didático (...)podem até achar que completaram sua tarefa ao apresentar a definição formal. Porém eles não deveriam ter a ilusão sobre o poder cognitivo que essa definição tem no pensamento matemático do aluno
>
> (p. 80, tradução nossa)

.

Vinner (1998) defende que o papel das definições em um curso deve ser sensível ao objetivo da disciplina que os estudantes estão acompanhando. Se a intenção é prosseguir em níveis mais avançados da matemática, então os estudantes precisam ter nas definições suas bases para resoluções de problemas. O professor deve apresentar problemas que não podem ser resolvidos corretamente utilizando apenas imagens de conceito, para desenvolver o hábito de recorrer às definições. Tal estratégia é importante uma vez que caso isso não ocorra, o estudante fará o que é mais natural e continuará buscando as imagens de conceito ao responder as questões, perpetuando assim a prática cotidiana. Vinner (1998) afirma que "acreditamos que mudar os hábitos de pensamento dos estudantes do modo cotidiano para o modo técnico é um objetivo importante da educação matemática"(p. 80)[4].

Alcock e Simpson (2017) tem por foco a atividade matemática de definir. Segundo os autores, a maioria das investigações sobre a imagem conceitual de estudantes têm focado dois tipos de atividades: atividades de classificação e de compreensão, em que os participantes evocam as definições de forma implícita, e tarefas solicitando definições, em que há solicitação explicita aos participantes para enunciar definições, formais ou até mesmo informais.

Na leitura dos autores, em algumas pesquisas os participantes se engajam inicialmente em atividades de classificação e compreensão para só depois haver uma proposta de atividades solicitando definição. Ou seja, o foco dessas pesquisas é analisar se os entrevistados têm conhecimento dos conceitos e se são capazes de evocar as definições e de utilizá-las corretamente. Dos resultados encontrados constata-se que as definições eram muitos próximas à definição formal mas que a classificação se baseava em protótipos. Ou seja, as respostas apoiam-se em primeiro lugar na imagem conceitual. Alcock e Simpson (2017) discutem em seguida outras pesquisas que propõem uma ordem inversa em tais atividades: primeiro solicitam a definição e posteriormente introduzem as atividades de classificação. Nessa vertente, trazem a pesquisa de Inglis e Simpson (2008) que tem como público alvo estudantes de matemática e leigos com boa formação em matemática. Os autores destacam que embora matemáticos tenham se saído melhor, ainda há

[4] O autor segue afirmando que cabe a cada professor de matemática determinar quais estudantes são capazes de fazer essa mudança. Vinner (1998) conclui afirmando que "não acreditamos em 'matemática para todos'. Acreditamos em algumas matemáticas para alguns alunos. E até isso só pode ser alcançado com uma pedagogia apropriada sob condições apropriadas para o aprendizado"(p.81). Acreditamos que estas são afirmações que mereceriam uma reflexão e discussão. Não a faremos neste texto.

evidências de que diversos participantes se baseiam em exemplos.
Como um outro exemplo Alcock e Simpson (2017) retomam resultados em Alcock e Simpson (2011) em que propõem a estudantes de graduação a classificação de sequências como crescentes ou decrescentes. Estes conceitos ainda não haviam sido formalmente apresentados. Em seguida "apresentaram as definições usuais e pedem aos participantes que repitam as tarefas de classificação com essas definições claramente visíveis"(ALCOCK; SIMPSON, 2017, p. 8). Os resultados confirmam que as respostas apresentadas após as definições terem sido apresentadas ainda não eram muito consistentes com elas. O que confirma a hipótese de que os estudantes evocam sua imagem conceitual relacionada ao conceito definido.
Alcock e Simpson (2017) apontam duas questões sobre a metodologia adotadas nessas pesquisas. A primeira é que o foco principal diz respeito a respostas para as atividades de classificar e de compreender, e que nelas o papel das atividades de classificação é secundário. Segundo Alcock e Simpson (2017)

> Os relatórios desses estudos, portanto, tendem a subestimar o fato de que fornecer uma definição em si envolve cognição significativa; eles normalmente não examinam a natureza das respostas, além de considerar o quanto elas correspondem à definição relevante
>
> (p. 8)

.

Os autores afirmam ainda que as atividades de classificação variaram bastante, e que as diferenças nos formatos das questões podem levar a diferentes respostas. Questões mais abertas (defina ou explique como desejar) podem levar a respostas idiossincráticas, ao contrário do que ocorre com questões mais fechadas, porque sugerem uma direção mais estrita, como por exemplo, quando é pedido para definir o conceito.
O segundo ponto levantado por Alcock e Simpson (2017) com relação à metodologia diz respeito à ordem das atividades propostas, ou seja, elas foram as mesmas para todos os participantes e portanto não foi possível avaliar o impacto das primeiras atividades nas subsequentes. Os autores sugerem que analisar as influências de atividades de definição ou explicação em atividades de classificação e raciocínio, ou vice-versa, são de grande interesse para a área uma vez que essas informações poderiam ser úteis para auxiliar na compreensão dos processos em que estudantes se engajam para atribuir um sentido à matemática avançada. Assim, professores poderiam desenhar melhor a ordem das atividades a fim de facilitar o processo.Alcock e Simpson (2017) elaboraram atividades propondo que os participantes definam ou expliquem um conceito.
Para os autores, essas respostas trouxeram revelações interessantes, uma vez que ao serem analisadas qualitativamente essas respostas mostraram que os participantes tinham alguma noção dos conceitos e que estavam tentando apresentá-los de forma concisa. O estudo revelou uma surpreendente gama de respostas para a atividade de definir-explicar, ressaltando diferenças entre o fazer sentido individual e a definição formal. Segundo Alcock e Simpson (2017), os estudantes eram mais propensos a dar respostas verbais após tarefas de classificação e esta constitui uma

primeira interferência entre as tarefas. Os autores concluíram que tarefas de classificar antes de tarefas de explicação produziram diferentes formas de resposta. Os pesquisadores comentam que a expectativa de que a pontuação de estudantes que deveriam apresentar a definição em primeiro lugar seria muito maior que a de estudantes que deveriam explicar o significado não foi contemplada. Por outro lado, identificaram uma diferença significativa entre os que deveriam definir ou explicar antes de classificar e aquele que tiveram essa ordem invertida. Os resultados em Alcock e Simpson (2017) sugerem que diferentes exemplos podem contribuir com a habilidade do estudante em dar explicações para o significado dos conceitos. Ou seja, uma vez tendo sido apresentados a modelos atípicos, tais representações acabam sendo percebidas pelos estudantes de maneira proeminente e o indivíduo busca inserir suas características ao definir/explicar.

A análise da relação entre a pontuação de atividades de definir/explicar e a pontuação de classificação levou à conclusão de que participantes que foram melhores em tarefas de definição/explicação tendiam a fazer classificações mais consistentes a partir das definições formais. Além disso, os autores afirmam que os dados da pesquisa condizem com os de pesquisas similares quando mostra que é necessário que os estudantes deixem seus desenvolvimentos baseados em suas imagens de conceito para passar a tratar os conteúdos de acordo com suas definições matemáticas. Os pesquisadores afirmam que "aqueles que foram pedidos para explicar os significados dos termos tiveram um melhor desempenho melhor do que aqueles que foram pedidos para estudar a definição formal fornecida"(ALCOCK; SIMPSON, 2017, p.15).

Resultados em Alcock e Simpson (2017) mostram que mesmo estudantes qualificados não obtiveram uma pontuação total nas atividades de classificação, o que mostra que nem esses abandonaram suas ideias idiossincráticas para trabalhar unicamente com as definições. Os estudos mostram também que estudantes enunciaram explicações tiveram uma pontuação maior do que aqueles que se mantiveram restritos à análise. Os autores afirmam que pode parecer contra intuitivo que a apresentação da definição formal, que os participantes já conheciam, tenha resultado em uma performance inferior à daqueles que escreveram suas definições por vezes idiossincráticas. Concluem que tal resultado parece mostrar que ao escrever suas definições os participantes precisem engajar em processos mais complexos e significativos do que aqueles envolvidos apenas em seu estudo. Alcock e Simpson (2017) afirmam que "pode ser que o fator principal seja o grau em que a tarefa leva os estudantes a se concentrarem em fixar um significado para o conceito, anotando sua definição ou explicação"(p. 16).

Os autores consideram ainda que para se entender um conceito é necessário que duas coisas aconteçam: uma global e uma local. Em nível global, o estudante deve ser capaz de entender a definição como critério estipulante e evocar a definição sempre que necessário. O nível local diz respeito à capacidade do estudante aprender uma definição particular e ser capaz de adaptar sua imagem de conceito a ela. Alcock e Simpson (2017) afirmam que sua pesquisa vai de encontro a resultados de diversas pesquisas, indicando que os estudantes não conseguem utilizar de forma apropriada definições em atividades de classificação ou de desenvolvimento. Entretanto os autores argumentam que não são capazes de afirmar se o problema inicial se dá na esfera global, ou seja, “os estudantes não tratam as definições como critério e portanto não as evoca quando apropriado”(ALCOCK; SIMPSON, p.16) ou se o problema é na esfera local, “eles tentam evocar as definições mas falham em o fazer com sucesso em alguns casos, ou evocam as definições com sucesso mas não as aplicam corretamente em exemplos particulares”(ALCOCK; SIMPSON, 2017, p.16).

Alcock e Simpson (2017) argumenta que as pesquisas que distinguem entre imagem de conceito e definição de conceito tais como, Fujita (2012), Moore (1994) e Tall e Vinner (1981) levam a discussão para a esfera global. Tais pesquisas “descrevem a principal dificuldade como a de fazer a transição de um mundo onde as categorias são naturais e as definições descritivas [...] para um mundo em que as categorias são definidas e as definições são estipulantes”(ALCOCK; SIMPSON, 2017, p.16). Os autores trazem como contraponto pesquisas como as de Dawkins (2014) e Zaslavsky e Shir (2005), como exemplos em que os pesquisados “empregam critérios sensíveis ao declarar e discutir os méritos relativos de diferentes definições possíveis”(ALCOCK; SIMPSON, 2017, p.16), esperando que todas as definições sejam aplicadas universalmente. Isso levou os autores a sugerir que o problema possa estar na esfera local, apontando como maior dificuldade o aplicar uma definição particular a contextos que contenham imagens existentes que venham a entrar em conflito com a definição.

Os autores afirmam que seu estudo não permite determinar em qual esfera os problemas se iniciam, uma vez que os dados coletados estão de acordo com as informações provenientes de ambas vertentes, mas que ao variar as atividades foi possível encontrar evidências de que ambas esferas impactam as habilidades de raciocínio do indivíduo. Alcock e Simpson (2017) seguem afirmando que ainda é necessário pesquisar sobre as trajetórias de aprendizado do indivíduo a fim de melhor analisar como as dificuldades se iniciam. As autoras afirmam que uma importante contribuição para as futuras pesquisas é a de que a ordem de proposição das atividades vai sim impactar os resultados.

Os autores finalizam informando que a pesquisa realizada mostra que as definições nem sempre são bem lembradas e nem sempre são evocadas quando necessário. Isso leva a crer que as definições não levam às melhores classificações. Um dos pontos relevantes trazido por sua pesquisa é que essa mostra que “embora a exposição a exemplos atípicos possa ser desejável para desenvolver uma imagem de conceito de tipo especialista, essa pode, pelo menos temporariamente, romper a habilidade de focar em definições”(ALCOCK; SIMPSON, 2017, p. 18).

Alcock e Simpson (2017) então sugerem que propostas focadas em exemplos devam alternar entre exemplos e atividades que exijam explicitamente a atenção às definições. Como sugestões de pesquisas a serem realizadas, os autores propõem “comparar os modos com que tarefas de definição e geração de exemplos influenciam em suas argumentações posteriores, e investigar o impacto de diferentes atividades de definição na geração de exemplos”(ALCOCK; SIMSPON, 2017, p. 19).

A habilidade dos estudantes em transformar seus argumentos em demonstrações formais é analisada em Zazkis, Weber e Mejía-Ramos em seu artigo de (2016) intitulado “Suprimindo as lacunas entre argumentos gráficos e demonstrações verbais-simbólicas no contexto de análise real". Para os autores, "Demonstração é central para prática matemática"(ibid., p.1, tradução nossa) e fazer com que os estudantes se tornem proficientes em escrever demonstrações é um dos primeiros objetivos nos cursos de matemática avançada na universidade. Por outro lado existem pesquisas, tais como Alcock e Weber (2010) e Hart (1994), que mostram que tal resultado é raramente alcançado. Zazkis et al. (2016) afirmam ainda que pesquisas mostram que algumas das causas da dificuldade de escrever demonstrações são: baixo conhecimento conceitual de matemática, falta de estratégias de demonstração e não saber como iniciar uma atividade que existe demonstração. Alcock e Simpson (2017) afirmam que ainda há pouca pesquisa sobre modos de melhorar a escrita de demonstrações e é nessa área que o artigo se enquadrará. Zazkis et al. (2016) analisam uma sugestão da literatura, que é de que os estudantes inicialmente produzem um argumento gráfico como base para suas demonstrações verbais-simbólicas.

Zazkis et al (2016) retoma Boero (1999) ao afirmar que uma demonstração deve satisfazer algumas restrições formais, o que não ocorre com o raciocínio utilizado para gerar tal demonstração. Zazkis et al. (2016) afirmam que ao demonstrar, alguns indivíduos podem inicialmente construir um argumento informal para se convencer de que a afirmação é verdadeira e então utilizar tal argumento como base para desenvolver a demonstração formal. Uma distinção feita pelos autores é a de que um "argumento informal pode ser entendido como uma forma de persuasão pessoal na qual o indivíduo se convence de que determinada afirmação é verdadeira"(idem, 2016, p.2). Este momento deve ser diferenciado de uma demonstração, que é "uma forma de validação em que o indivíduo se convence de que a afirmação é uma consequência lógica necessária do que se sabe ser verdadeiro"(ZAZKIS et al., 2016, p.2, tradução nossa).

Segundo os autores o artigo tratará da tradução de argumentos gráficos, que são entendidos como um argumento informal, para uma forma de demonstração que é privilegiada nos cursos de análise real na graduação, que é a que os autores denominam demonstração verbal-simbólica. Diretrizes para determinar se dado argumento pode ser considerado uma demonstração baseia-se em três elementos destacados em Stylianides (2007): "i) os fatos utilizados como ponto de partida do argumento, ii) o sistema de representação utilizado e (iii) a validade dos métodos de inferência usados no argumento"(ZAZKIS et al., 2016, p.2). Para os autores, o contexto cultural e a matemática abordada impactarão o que é entendido como demonstração. Os autores informam que o artigo contemplará demonstrações de afirmações abordadas no curso de cálculo mas que são provados no curso de análise real.

Zazkis et al. (2016) afirmam que em uma demonstração, cada afirmação deve ser uma proposição aceita como verdade pela comunidade matemática em um determinado contexto ou inferidos a partir de afirmações anteriores. Como exemplo os autores explicitam que o contexto é relevante pois é comum que durante demonstrações em análise real, que os indivíduos utilizem a comutatividade da adição e multiplicação de números reais, se admitidos como axiomas. Mas ao caracterizar números reais por meios de cortes de Dedekind tais fatos podem não ser aceitos. Por outro lado, em um argumento informal, é suficiente que as afirmações sejam aceitas pelo

indivíduo.
Zazkis et al. (2016) entendem como representação verbal-simbólica do conceito as representações sintáticas apresentadas nos livros texto de cursos de análise, que utilizam uma combinação de linguagem natural e sintaxes lógicas. Entretanto os autores afirmam que tais conceitos por vezes permitem uma representação gráfica. Como exemplos os autores citam as funções estritamente positivas como aquelas que têm seu gráfico todo acima do eixo x, e as funções pares como aquelas cujos gráficos são simétricos com relação ao eixo y.
Os autores retomam em Zhen, Weber e Mejía-Ramos (2016) a definição de uma inferência gráfica como sendo uma inferência feita a partir da representação gráfica de um conceito. Segundo os autores:

> Essas incluem inferências perceptuais onde o indivíduo infere um objeto particular como uma instância do conceito porque satisfaz a interpretação gráfica da definição do conceito (e.g., se o indivíduo inferir que $f(x) = x^3$ é crescente porque seu gráfico continuamente sobe quando se lê da direita para esquerda, esta seria uma inferência gráfica perceptual).
>
> ZAZKIS et al., 2016, p. 3, tradução nossa.

Além disso, uma distinção apontada por Zazkis et al. (2016) sobre argumentos gráficos e demonstrações verbais-simbólicas é que o primeiro pode conter inferências gráficas dedutivas. Os autores citam como exemplo que, ao se considerar o espaço bidimensional, se uma certa propriedade é satisfeita, outra também deverá ser satisfeita. O caso de uma função estritamente crescente é um exemplo: essa função não pode ter duas raízes, pois para tal seria necessário ter um intervalo de crescimento e outro de decrescimento entre as duas raízes, o que pode ser verificado ao se esboçar funções que satisfaçam tais condições. Os autores alegam que tal inferência não poderia ser feita em demonstrações verbais-simbólicas.
Para os autores, demonstrações verbais-simbólicas são privilegiadas no contexto do curso de análise real. Para corroborar com tal afirmação Zazkis et al. (2016) trazem Raman (2004) uma vez que em sua pesquisa verificou que concernente à continuidade, livros texto de pré-cálculo e cálculo continham interpretações gráficas informais de conceitos, entretanto o mesmo não aconteceu com os livros de análise real. Em suas pesquisas, Zazkis et al. (2016) afirmam que em livros de análise real também não foram encontradas interpretações gráficas informais. Mostraram, por exemplo, que em um livro de cálculo (Advanced Calculus de Fitzpatrick, 2006) das 48 demonstrações apresentadas, apenas 4 delas foram acompanhadas por imagens e nenhum dos passos na demonstração foi justificado, implícita ou explicitamente, pela imagem apresentada. Ao analisar gabaritos de cursos de análise real publicados, foram verificadas apenas demonstrações verbais-simbólicas, “to que sugere que as provas valorizadas pelos autores dessas soluções eram verbal-simbólicas”(ZAZKIS et al., 2016, p.3, tradução nossa). Em sua pesquisa com graduandos, os autores verificaram que muitos deles acreditavam que não se pode provar utilizando imagens e que gráficos não deveriam estar presentes em demonstrações.
Para Zazkis et al. (2016) o objetivo do artigo não é discutir se argumentos gráficos deveriam

ou não ser aceitos em demonstrações, uma vez que tais ferramentas são utilizadas em “cursos operacionais”(p. 4) de cálculo e em outras teorias, como a dos nós. Os autores afirmam que uma heurística comum é a que ocorre quando os estudantes baseiam suas demonstrações em argumentos visuais frente a uma tarefa difícil. Há relatos de que a utilização de gráficos era crucial para o sucesso de estudantes em demonstrações (GIBSON, 1998). Em Zazkis e Liljedahl (2004), os autores afirmam que o gráfico de funções pode transformar propriedades que antes eram opacas em transparentes, se comparadas com a representação verbal-simbólica. Zazkis et al. (2016) enunciam que argumentos gráficos têm oferecido aos estudantes uma maior oportunidade de aprendizado, uma melhor compreensão do empreendimento de demonstração em matemática, uma melhor apreciação de demonstrações como ferramentas de solução de problemas e maior convicção das proposições que são demonstradas.

Por fim Zazkis et al. (2016) alegam que diversas pesquisas documentam a dificuldade ao transformar argumentos gráficos em demonstrações verbais simbólicas. A fim de realçar tal dificuldade uma pesquisa que envolveu oito pesquisadores em matemática de universidades de prestígio foi desenvolvida e relatada em Samkoff, Lai e Weber (2012). Nesse estudo, foi solicitado aos participantes demonstrar a seguinte afirmação “Prove que $f(x) = sen(x)$ não é injetiva em nenhum intervalo de comprimento maior que π”(ZAZKIS et al. 2016, p. 4). Todos os oito participantes iniciaram desenhando o gráfico da função seno e utilizaram tal diagrama para se convencer de que a afirmação era verdadeira. Em seguida, todos os participantes se engajaram em escrever uma demonstração verbal-simbólica por entender que apenas o argumento gráfico não era suficiente. Os participantes levaram em média 18 minutos para concluir, e apenas quatro das demonstrações estavam completamente corretas. Tal fato pode ser entendido como um sinal de a tarefa não era fácil. Os autores concluem que “se traduzir um argumento gráfico em uma demonstração verbal-simbólica de uma afirmação de cálculo é desafiadora para pesquisadores matemáticos, podemos esperar que esta atividade pode ser intimidadora para graduandos”(ZAZKIS et al., 2016, p.5, tradução nossa). Zaskis et al, referem-se a Alcock (2010) ao tratar dessa dificuldade e afirmar que “diagramas podem prover compreensão, mas nem sempre é fácil para os estudantes fazerem conexões detalhadas entre o que está no diagrama e o que está na demonstração formal”(ALCOCK, 2010, p.232, apud ZAZKIS et al., 2016, p. 5).

Ao analisar a literatura recente concernente à pesquisa sobre as lacunas entre argumentos informais e demonstrações, Zazkis et. al. (2016) notaram que esta poderia ser dividida em trabalhos que analisam quais argumentos são mais facilmente traduzidos em demonstrações e trabalhos que buscam determinar quais são as melhores organizações de salas de aula para auxiliar na transposição de tais lacunas.

Como exemplo da primeira categoria, Zazkis et al. (2016) citam Pedemonte (2007, 2008) e Pedemonte e Reid (2011), uma vez que esses trabalhos buscam caracterizar argumentação e prova em matemática. Em seus estudos, Pedemonte (2007) analisou que se a lacuna entre o argumento informal e a demonstração exigida fosse muito grande, ou seja, se os processos envolvidos no argumento fossem muito diferentes dos processos exigidos na demonstração, então os indivíduos

teriam dificuldades em desenvolver uma demonstração baseada no argumento.
Como exemplo da segunda categoria são apresentados os trabalhos de Bartolini -Bussi et al. (2007), Boero et al. (1996) e Mamona-Downs & Downs (2010), pois buscam conceituar o papel da instrução na conversão de argumentos informais em demonstrações. Além disto, Zazkis et al. (2016) afirmam que seu artigo busca explorar como graduandos em matemática não só podem mas também transpassam as lacunas entre argumentos gráficos e demonstrações verbais simbólicas. As questões norteadoras são descritas como sendo as atividades nas quais os estudantes engajam quando, baseados em uma representação gráfica, escrevem uma demonstração e de que maneira tais atividades são atuantes no sucesso das demonstrações.
Os autores informam que os dados utilizados no artigo são provenientes de um extenso estudo de caso que teve como participantes estudantes de uma grande universidade pública dos Estados Unidos da América que tinham sua formação voltada para matemática e que haviam completado recentemente o segundo curso de álgebra linear. O estudo consistiu na observação da construção de demonstrações desses estudantes de sete afirmações sobre cálculo. Baseado em suas observações das aulas do curso de análise naquela universidade e de acordo com Lew et al. (2016), de Weber (2004) e de Alcock (2010), os autores foram levados a acreditar que as discussões de como argumentos gráficos poderiam ser traduzidos em demonstrações não fazia parte das discussões naqueles ambientes.
Para análise das tentativas de demonstração os autores utilizaram o esquema de Toulmim (2003) simplificado. Segundo o esquema simplificado de Toulmin, “cada inferência contém três partes básicas, ‘afirmação’(A) sendo avançada[5], o ‘dado’(D) usado para corroborar a afirmação e a ‘garantia’(G) que relaciona como a afirmação segue dos dados”(ZAZKIS et al., 2016, p.7). Segundo os autores, nem sempre a garantia era explicitada pelos participantes, e nesse caso, foram os autores que inferiram quais eram as garantias utilizadas pelos participantes.
Os autores relatam que para categorizar as formas com que os participantes transformam seus argumentos gráficos que foram considerados válidos em demonstrações, foi utilizado um esquema de codificação condizente com o presente em Strauss e Corbin (1990), e que tal metodologia levou Zazkis et al. (2016) a identificar três categorias que foram denominadas: elaboração, sintatificação e re-garantia. Para os autores, a elaboração acontece quando os participantes se engajam na tentativa de adicionar mais informações às demonstrações que estão sendo construídas. Isso ocorreu de duas formas: os participantes adicionavam dados e garantias (D_0 e W_0) para corroborar com afirmações que eram tomadas como garantias (G) feitas a partir dos gráficos, e os dados que antes eram dados (D) passam a ser a conclusão (C) do argumento elaborado; e os participantes faziam afirmações (A) que estavam implícitas em seus gráficos. Os autores afirmam que elaboração não diz respeito apenas à argumentos gráficos, mas que podem ser particularmente relevantes para argumentos informais em argumentos aceitos em demonstrações. Como exemplo os autores trazem o caso de um participante ao demonstrar que $\int_{-a}^{a} sen^3(x) = 0$ para qualquer número real a. O participante exemplifica o primeiro tipo de elaboração, que

[5] the claim (C) being advanced, the data (D) used to support the claim, and the warrant (W) that necessitates how the claim follows from the data.

é justificar afirmações anteriormente tomadas como verdadeiras. Segundo o participante, "A função $y = [sen^3(x)]$ deve ser uma função ímpar [...] Certo será simétrica com relação à linha identidade, o que significaria que a integral de a negativo a zero deveria ser a negação de zero a a. Então seria zero."(ibid., p. 8, tradução nossa) Os autores ressaltam que a afirmação que $y = sen^3(x)$ é ímpar é tratada como fato conhecido (dado) e baseando-se no argumento gráfico, o participante inicia o raciocínio para demonstrar a sua afirmação. Para demonstrar tal afirmação o participante recorre ao fato que $y = sen(x)$ é ímpar, e a partir de uma manipulação algébrica $y = sen^3(-x) = (sen(-x))(sen(-x))(sen(-x)) = (-sen(x))(-sen(x))(-sen(x)) = -sen^3(x)$ conclui que $y = sen^3(x)$ é ímpar.

Da análise dos autores, a sintatificação é caracterizada quando os participantes tentavam extrair a partir de argumentos gráficos uma afirmação que posteriormente seria traduzida em afirmações verbal-simbólicas. Os autores reforçam segundo matemáticos ou conhecedores do conteúdo, ao traduzir a afirmação o sentido não seria alterado mas que haveria sim uma conversão da representação gráfica de um conceito para uma representação verbal-simbólica. Para os autores, segundo o esquema de Toulmin, sintetificar seria a tradução de dados (D), afirmações (A) e/ou garantias (G) de um argumento gráfico em seus correspondentes em um sistema de representação verbal-simbólica, enquanto seu significado é mantido. Para exemplificar a sintatificação, os autores trazem o exemplo da aluna C que começa seu raciocínio analisando o gráfico de uma função par (função $f(x) = x^2$, por ser um exemplo genérico desse tipo de função), para demonstrar que as funções derivadas de uma função par são ímpares. A aluna discute que a função par é simétrica com relação ao eixo y, e portanto as derivadas em um dos lados do gráfico deveria ser o oposto das derivadas do outro lado (considerando que os lados seriam divididos pelo eixo y). Segundo Zazkis et al. (2016) "a aluna construiu um argumento concluindo com uma afirmação a ser provada e contendo uma inferência gráfica. Ela argumentou que uma vez que funções pares são simétricas com relação ao eixo y (D), o eixo atua como um espelho (A)"(p. 11). A aluna utiliza da ideia de espelho para justificar que $-f'(a) = f'(-a)$ para todo a, o que a levou a concluir que a função derivada seria ímpar. Em seguida, as transcrições da entrevista mostram que a aluna sintetifica quando ela discute as tangentes não mais em função do gráfico, mas o faz de forma verbal-simbólica. A aluna afirma: "Como eu coloco isso em palavras?"(ZAZKIS et al., 2016, p.11). Ao iniciar sua demonstração ela escreve em linguagem verbal simbólica o que se quer demonstrar $(f'(-x) = -f'(x))$ e segue utilizando a definição verbal-simbólica de derivada $(f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a})$ e as definições como mostrado no extrato da transcrição a seguir .

Zazkis et al. (2016) afirmam que a aluna sintetificou tanto o ponto final quanto o ponto inicial de seu argumento gráfico. No começo de sua demonstração ela afirma que deseja mostrar que $f'(-x) = -f'(x)$, o que é uma sintetificação de sua afirmação que os valores da derivada em um lado do eixo y são "os negativos"dos do outro lado. A sintetificação também ocorreu ao traduzir a definição verbal-simbólica de uma função par oriunda da definição gráfica utilizada inicialmente. Os autores sumarizam que ao sintatificar tais afirmações de seus argumentos gráficos, ela deixou de trabalhar com representações gráficas para passar a trabalhar com representações verbais-simbólicas e que isso representou uma mudança para o uso de um sistema mais convencional de apresentar demonstrações naquele contexto.

Segundo Zazkis et al. (2016) "por definição, argumentos gráficos utilizam garantias que não admissíveis em demonstrações verbal-simbólicas"(p. 12) e que a regarantia seria caracterizada quando o participante se empenhasse em encontrar justificativas mais adequadas para afirmações usadas em argumentos gráficos. Os autores afirmam que segundo o esquema de Toulmin, regarantir seria a substituição de uma garantia (G) gráfica de um argumento gráfico por uma garantia verbal-simbólica ($G^{\oplus}$)[6]. Ainda segundo os autores, "essencialmente, os participantes tentam escrever uma sub-demonstração verbal-simbólica que mostra que a afirmação é uma consequência deduzida dos dados"(ibid., 2016, p. 12).

Zazkis et al. (2016) afirmam que em alguns casos, a construção de tais sub-demonstrações pode ser tão difícil quanto demonstrar as proposições iniciais. Este seria um exemplo de quando a distância estrutural entre o argumento gráfico e a demonstração verbal-simbólica seria muito grande e que nesse caso, é provável que a unidade entre argumento gráfico e a demonstração seja difícil de ocorrer. Como exemplo, analisam a prova de que a derivada de uma função par é ímpar apresentada pelo estudante D. O estudante inicia seu desenvolvimento desenhando uma função par genérica e conclui, a partir do gráfico que o coeficiente angular em pontos opostos ao eixo y deveriam ser opostos. Sua inferência é a de que as tangentes onde os domínios das funções correspondentes são números opostos, são opostas, o que foi utilizado como dado para auxiliar a afirmação final de que a função derivada de uma função par é ímpar. A garantia implícita para sustentar a afirmação é gráfica. Em sua entrevista, o estudante D diz "se eu olhar para a definição de derivada como o coeficiente angular e então eu achar a derivada no lado negativo usando o fato que é par eu deveria conseguir o negativo da derivada, mostrando que f linha é ímpar"(ZAZKIS et al., 2016, p. 13). Para os autores, o estudante deixou claro a conexão e, transformou seu argumento gráfico sobre tangentes em uma demonstração ao dizer "se eu olhar a definição de derivada como coeficiente angular"(p. 13). "A transição de coeficientes angulares para a definição de derivada é a sintetificação daquela parte do seu argumento gráfico"(ibid, p.13).

O estudante D então elaborou uma estratégia para conectar o novo dado sintetificado com a afirmação que a função é ímpar. Este plano, segundo Zazkis et al. (2016), envolveu conectar a hipótese que a função é par com a afirmação que a sua função derivada é ímpar usando uma justificativa garantia que é diferente da conexão utilizado no argumento gráfico. Parte da transcrição da tentativa do estudante D é apresentada a seguir.

> estudante D: Então, direi que f linha de negativo x é igual a f de negativo x menos f de negativo x mais h sobre h é igual ao limite disso [escreve $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(-x)-f(-x+h)}{h}$] e existe. E agora porque f é par eu vou substituir f de negativo x por f de x. E eu vou substituir f de negativo x mais h por f de x menos h [escreve $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x+(-h))}{-h}$]. Então eu posso só substituir h por h negativo. Então o limite quando h tende a zero é o mesmo que o limite quando h negativo

6 Notação utilizada por Zazkis et al. (2016)

> tende a zero [escreve $= -\lim_{h \to 0} \frac{f(-x)-f(-x+h)}{h}$]. E esse pela definição é f linha de x [escreve $= -f'(x)$]. E isso significa que é ímpar.

Para Zazkis et al. (2016) o extrato acima mostra que a manipulação algébrica da definição de derivada para mostrar que $f'(-x) = -f'(x)$ mudou a natureza da justificativa que conectava a hipótese $f(-x) = f(x)$ à afirmação que $f'(-x) = -f'(x)$ uma vez que a justificativa no argumento original era gráfica e baseada na conexão entre derivada e coeficiente angular. Na interpretação dos autores "ele [o estudante] conectou uma observação gráfica com relação a coeficientes angulares espelhados (D) à afirmação que f'(x) é ímpar (A). Essa garantia foi substituída por uma sequência de manipulações algébricas"(p.13, tradução nossa). Além disto a nova garantia não é a tradução da garantia anterior. Apesar de mudar a forma de representação, mantém seu significado inalterado, mas é uma nova estratégia para conectar o dado à afirmação. Para Zazkis et al. (2016) "ao mover de uma representação gráfica para uma representação verbal-simbólica, as garantias do argumento gráfico precisaram mudar. Esse processo de troca de garantia é o que chamamos de regarantir"(p. 13, tradução nossa). Segundo análise dos autores, regarantir normalmente ocorre após a sintetificação do dado e da afirmação e isto ocorre uma vez que afirmações apresentadas utilizando representação verbal-simbólica levam a esse tipo de raciocínio dedutivo.

Zazkis et al. (2016) afirmam que "estudantes que tentaram participar nas três atividades tiveram uma taxa de sucesso maior ao produzir demonstrações corretas, [...] é importante ilustrar como todas as três atividades atuam de forma sucessiva para contribuir na tradução de argumentos gráficos em demonstrações"(p.14, tradução nossa). Como exemplo os autores utilizam o caso do estudante D ao demonstrar que $\int_{(-a)}^{a} sen^3(x)\,\mathrm{d}x = 0$ para qualquer número real a. Abaixo é apresentado outro trecho da entrevista com o estudante D.

> estudante D: Sim, ok, então vamos usar apenas o fato de que seno de x é uma função par [ele quis dizer ímpar]. Então se olharmos para a integral [pinta a parte do gráfico de $sen^3(x)$ à esquerda da origem] e olhar aquilo [pinta a parte do gráfico de $sen^3(x)$ à direitas da origem] eles são a mesma área porque o seno é a mesma função. Só é negativa. É ok. [...] Vamos nos atentar apenas às demonstrações agora. Sabemos que o seno é uma função par, então seno de x é igual ... Desculpa, seno é uma função ímpar. Sim, quando eu disse par eu quis dizer ímpar. Estou apenas tentando te confundir [...] É uma função ímpar, então negativo seno de x é igual ao seno de negativo x [escreve $-sen(x) = sen(-x)$]. Ao elevar ambos ao cubo e terá negativo seno ao cubo igual a seno ao cubo de negativo x [escreveu $-sen^3(x) = sen^3(-x)$.
>
> (ZAZKIS, WEBER, MEJÍA-RAMOS, 2016, p.14, tradução nossa.)

Zazkis et al. (2016) afirmam que inicialmente o estudante constrói um argumento gráfico baseado na simetria percebida a partir do desenho feito ao ler o problema. Apesar de inicialmente ter confundido a função seno com uma função par, ele se corrige mais a frente, mostrando que ele tinha conhecimento das propriedades mas que havia utilizado o termo errado. O estudante D não tratou $sen^3(x)$ sendo ímpar como dado inicial, mas sim que $sen(x)$ sendo ímpar e ao elevar ambos os lados da expressão $-sen(x) = sen(-x)$ como garantia para justificar que $sen^3(x)$ é ímpar. Outro ponto levantado pelos autores no desenvolvimento do estudante é que ele não trata mais a simetria com relação ao gráfico, mas sim, expressa a definição de função ímpar utilizando linguagem algébrica e portanto sintetificando aquela parte do argumento. Os autores afirmam que o estudante em seguida inicia o processo de regarantia do argumento quando utiliza a intuição proveniente do gráfico de que as áreas são iguais mas apenas opostas para criar uma estratégia para conectar o dado que $sen^3(x)$ é ímpar com a afirmação que $\int_{(-a)}^{a} sen^3(x)\mathrm{d}x = 0$. Baseado nessa intuição o estudante concluiu que ambas as partes deveriam se anular e portanto decide dividir a integral em duas áreas correspondentes, e que ele pretende demonstrar que serão opostas. “Isso pode ser pensado como a sintetificação da sua inferência implícita de ambos os lados se cancelando”(ZAZKIS et al, 2016, p. 15). Os autores chamam a atenção ao fato de que ao se analisar o argumento gráfico, é possível inferir através de uma garantia gráfica que as áreas se cancelam, mas tal garantia não é válida no contexto algébrico. Desta forma, para provar tal proposição algebricamente é necessária uma garantia diferente. O extrato abaixo mostra a as estratégias do estudante para justificar sua afirmação.

> estudante D: Eu vou fazer uma mudança de variáveis porque eu quero ter seno ao cubo de negativo x. Então ele vai se cancelar com esse aqui. Então vou dizer que u é igual a negativo x [escreve $u = -x$]. $\mathrm{d}u$ é igual a $-\mathrm{d}x$ [escreve $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$]. Então eu vou pegar a integral de negativo-negativo a até negativo zero seno ao cubo de negativo x. Quero dizer negativo u. Substitui $\mathrm{d}x$ por negativo $\mathrm{d}u$. [escreve $\int_{(-(-a))}^{-0} sen^3(-u)(-\mathrm{d}u) + \int_0^a sen^3(x)\mathrm{d}x = 0$]. Ok. E reescreve mais uma vez. Então integral de a a zero de seno ao cubo de negativo u. Eu só estou fazendo isso ser mais complicado do que precisa ser. Negativo seno ao cubo de u.... negativo $\mathrm{d}u$ mais a mesma coisa [escreve $= \int_a^0 (-sen^3(u)(-\mathrm{d}u)) + f''$]. É. E aí quando você inverter a e b [presumimos que por a e b o estudante D estava se referindo ao limites superior e inferior de integração] do lado esquerdo faz a coisa toda negativa [escreve $= -\int_a^0 sin^3(u)\mathrm{d}u + \int_0^a sin^3(x)\mathrm{d}x$. E lembre que x é uma variável “dummy” [7]. Então são a mesma coisa. Isso ok. [Escreve “$= 0$”]
>
> ZAZKIS, WEBER, MEJÍA-RAMOS, 2016, p.15, tradução nossa.

Os autores afirmam que o estudante D regarantiu a inferência do cancelamento de seu argumento gráfico ao substituí-la por uma série de etapas algébricas. Além disso os autores afirmam que o estudante usou o fato de que “x é uma variável ‘dummy’”para garantir o fato que ambas integrais de fato se cancelam apesar de incluírem duas variáveis diferentes. (ZAZKIS et al., 2016, p. 15) Zazkis et al. (2016) afirmam que o caso ilustrado mostra que as três atividades de tradução têm um papel importante na produção de uma demonstração válida. Além disso, os autores afirmam que os participantes que produziram demonstrações verbal-simbólicas válidas tendiam preponderantemente a se engajar em elaborar, sintetificar e regarantir, enquanto aqueles que não foram bem sucedidos raramente se engajavam nas três atividades. Zazkis et al. (2016) afirmam também que eles não estão sugerindo que apenas fazer com que os estudantes se engajem nas atividades de elaborar, sintetificar e regarantir será suficiente para melhorar as habilidades em converter de argumentos gráficos para demonstrações, pois como Pedemonte (2001,2007) apontou, existem casos em que a distância estrutural e/ou do conteúdo pode ser muito grande para ser ultrapassado.

Outro ponto ressaltado pelos autores é o de apesar do artigo ter se concentrado na tradução de argumentos gráficos para demonstrações, que os processos de elaboração, sintetificação e regarantia possam ser relevantes para traduzir argumentos informais de forma mais geral. Os autores

[7] Em estatística ou econometria, particularmente na análise de regressão, uma variável Dummy é aquela que toma o valor de "zero"ou "um"indicando a ausência ou presença de qualidades ou atributos. (PATIAS et al., 2020)

dialogam com Pedemonte (2007, 2008) que revelam que caso a distância entre os argumentos e a demonstração seja muito grande, então pode ser impossível representá-los. Destacam ainda em tais domínios e contextos tal fato é mais provável de ocorrer. Zazkis et al. (2016) complementa Pedemonte (2007, 2008) de duas formas: uma é clarificando uma forma na qual a distância estrutural é muito grande "a saber se a regarantia exige uma sub-demonstração verbal-simbólica muito difícil para conectar o dado à conclusão de uma inferência específica"(ZAKIS et al., 2016, p. 17), e outra ao ilustrar as atividades que os estudantes se engajam quando traduzem corretamente argumentos gráficos em demonstrações verbais-simbólicas.

Em "Aprendizagem de sequências numéricas: pesquisa sobre dificuldades de Licenciandos em Matemática" , Eleni Bisognin, Vanilde Bisognin e José Carlos Pinto Leivas relatam uma pesquisa cujo objetivo era investigar e analisar a dificuldade apresentada pelos licenciandos em matemática ao resolver questões envolvendo sequências numéricas. Os autores trazem Shulman (1986, 2987) para explicar os tipos de conhecimentos envolvidos na prática do professor: conhecimento de conteúdo, conhecimento pedagógico e conhecimento pedagógico do conteúdo. Esse último é caracterizado por Shulman como sendo o domínio de conhecimento específico do professor e que engloba tanto o conteúdo quanto a pedagogia. Seguindo essa linha de pensamento, os autores propõem que as licenciaturas deveriam ter além das disciplinas obrigatórias presentes nas Diretrizes Curriculares Nacionais, disciplinas que estudassem estratégias específicas para cada tópico, tendo assim acesso ao conhecimento que mescla pedagogia e conteúdo específico como concebido por Shulman.

Bisognin et al. (2016) sugerem que um primeiro passo a ser tomado em direção a uma mudança é a de verificação, que pode ser por meio de atividades, do conhecimento prévio do aluno, identificando claramente o conhecimento sobre conceitos necessários para posteriormente elaborar aulas sobre os tópicos para educação básica. Bisognin et al. (2016) retomam Borasi (1996), Cury (2007), Barichello (2008) entre outras, que analisam a produção escrita dos estudantes e seus erros, em diversos níveis de ensino. Tais pesquisas concordam que "as maiores dificuldades na aprendizagem, no ensino superior da área de Ciências Exatas, são evidenciadas nas primeiras disciplinas matemáticas constantes da matriz curricular dos cursos" (BISOGNIN et al., 2016, p. 363). Para os autores, a questão nas Licenciaturas em Matemática é ainda maior pois os futuros professores apresentam déficits no conhecimento de conteúdos oriundos do ensino médio.

> A formação de professores de Matemática, inicial ou continuada, precisa levar em conta as dificuldades dos estudantes em conteúdos específicos, porque imagens de conceitos (Tall e Vinner, 1981), construídas ao longo da escolarização desses estudantes, podem conflitar com definições que lhes são apresentadas nos respectivos cursos, constituindo-se em uma fonte de erros que vão prejudicar a sua futura prática profissional.
>
> BISOGNIN; BISOGNIN; LEIVAS, 2016, p. 363

Bisognin et al. (2016) afirmam que sequências numéricas são conteúdos basilares para a compreensão da Matemática e, portanto, as dificuldades dos estudantes nesse campo do conhecimento deveriam ser enfrentadas por meio de investigação aprofundada. Os autores então, propuseram investigar seguindo as seguintes questões norteadoras[8]: "Quais as dificuldades apresentadas por professores de Matemática em formação inicial, em relação ao conteúdo 'sequências numéricas'? Como essas dificuldades se situam em relação aos três Mundos da Matemática, conforme Tall (2004, 2013)?"(ibid., p. 363-364). Os autores apresentam a parte inicial da pesquisa, e contará com a análise das dificuldades encontradas por licenciandos em Matemática ao resolverem uma questão sobre sequências numéricas.

Para Bisognin et al. (2016), sequências numéricas poderiam ser ensinadas em diversas fases da vida acadêmica, sendo introduzida quando os estudantes começam a aprender padrões, podendo posteriormente ser abordada ao se entender progressões aritméticas e geométricas até se chegar no ensino superior, quando estas serão o alicerce para o estudo de séries. Os autores então levantam a questão: Como apresentar e quais metodologias de ensino utilizar nas diferentes fases da vida acadêmica? "E o que os professores precisam saber sobre sequências para entender as necessidades de diferentes propostas de ensino desse conteúdo?" (BISOGNIN; BISOGNIN; LEIVAS, 2016, p.362).

Os autores então trazem a definição de sequências numéricas de acordo com diversos autores. Como um representante de autores que utilizam apenas de palavras para definir sequências numéricas, Bisognin et al. trazem Malta, Pesco e Lopes (2002, p.95) uma vez que esses definem que "uma sequência de números reais é uma lista de números ordenados pelos naturais, isto é, uma sequência nos dá um número real que é o primeiro termo da sequência, um número que é o 2 termo da sequência e assim por diante" (apud BISOGNIN et al., 2016, p.364). Para contrastar, os autores trazem a definição em Stewart (2001, p.693) por estar algebrizada como "uma sequência pode ser pensada como uma lista de números escritos em uma ordem definida: a_1, a_2,a_2 O número a_1 é chamado de primeiro termo, a_2 é o segundo termo, e em geral a_n é o n-ésimo termo" . Em Lima (1999, p.22), um texto de análise real, a definição é "uma função de: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado n-ésimo termo da sequência" (apud BISOGNIN et al., 2007, p. 364). Nesse mesmo livro, Lima (1999, p.23) traz um número real "é o limite da sequência (x_n) quando, para todo número real $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \epsilon$" (apud BISOGNIN et al., 2007, p. 364). Bisognin et al. (2016) defendem que durante o curso de licenciatura, os professores em formação têm a oportunidade de conhecer conceitos como sequências numéricas, limites e convergências de sequências e limites no infinito. Para esses autores é necessário que o estudante da licenciatura compreenda esses conceitos pois eles podem ser úteis para o estudo de conceitos presentes no ensino básico. Bisognin et al. (2016) utilizam a ideia de Tall (2004, 2013) sobre os Três Mundos da Matemática como aporte teórico para sua pesquisa. Para Tall (2004, 2013) "o desenvolvimento cognitivo de um sujeito, em Matemática, envolve três mundos: mundo conceitual corporificado, mundo proceitual simbólico e mundo formal axiomático" (BISOGNIN et al., 2007, p. 364-365). Bisognin et al. (2016) relacionam o mundo conceitual corporificado com as nossas experiências no mundo real.

[8] A pesquisa foi submetida a um edital do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Segundo os autores “por meio da reflexão e do uso da linguagem, podemos enfocar aspectos da nossa experiência sensorial, que nos levam a imaginar elementos provenientes da nossa visualização ou da nossa imaginação” (BISOGNIN et al., 2007, p. 365). Bisognin et al (2007) interpretam que o mundo conceitual corporificado também diz a manipulações de objetos na mente do indivíduo.

Já o mundo proceitual simbólico está relacionado ao uso de símbolos para indicar noções presentes no mundo corporificado. Esses símbolos podem tanto se referir a conceitos quanto a operações. Uma distinção apresentada por Gray e Tall (1994) é entre procedimento, que diz respeito a algoritmos específicos, e processo, que é “usado em termos gerais, como quando se menciona o processo de adição” (BISOGNIN; BISOGNIN, LEIVAS, 2007, p. 365). Gray e Tall (1994) conceituam a noção de proceito, que é um amalgama entre processo e o objeto (resultante do processo) combinados em uma única noção representada por um mesmo símbolo. Bisognin et al. (2016) exemplificam com a expressão “5+4” que diz respeito tanto ao processo de adição de 5 com 4, quanto o seu resultado “9” .

Bisognin et al. (2016) definem o mundo formal axiomático como aquele construído a partir de definições, axiomas e teoremas, ou seja, é o mundo formado por um sistema axiomático. A partir desses três mundos Tall (2013) concebe um esquema e três processos não hierárquicos de desenvolvimento dos conhecimentos denominados: matemática prática, matemática teórica e matemática formal.

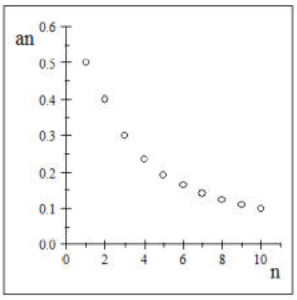
Para Tall (2013) a matemática prática diz respeito à percepção e descrição de determinadas propriedades de figuras, mas sem uma percepção mais avançada sobre as relações entre elas. Pode envolver cálculos aritméticos e experiências com forma e espaço. Tall (2013) afirma que a matemática teórica “inclui os níveis mais sofisticados de incorporação e simbolismo”(TALL, 2013, p. 19). A matemática formal engloba o desenvolvimento de demonstrações formais utilizando axiomas e baseadas em definições provenientes da teoria de conjuntos.

Bisognin et al. (2016) afirmam que a experiência de cada indivíduo com os três mundos pode ser diferente, uma vez que sofrerão influência do meio, da sua formação escolar e das dificuldades enfrentadas ao longo da sua vida acadêmica. Os autores trazem Lima (2007) e Tall e Vinner (1981) quando estes afirmam que cada indivíduo cria sua própria imagem de um conceito e que essa não é estática, mas que vai se modificando a partir de novas experiências. Bisognin et al. (2016) afirmam que os estudantes de licenciatura, durante sua formação, precisam transitar por todos os mundos, e para tal, é necessário que recorram a conhecimentos anteriores que Tall denomina “met-before” e que foi traduzido por Lima (2007) como “já encontrado” . Bisognin et al. (2016) trazem Lima e Tall (2008) quando tratam da ambiguidade da influência dos “já encontrados” , uma vez que podem ser tanto positivos quanto negativos. Explicam essa ambiguidade por meio de um exemplo, sendo positiva quando o indivíduo é capaz de resgatar conteúdos anteriores para auxiliar na resolução de novos problemas, mas negativa quando os procedimentos não são compreendidos corretamente o que pode gerar procedimentos incorretos no decorrer da resolução.

Bisognin et at. (2016) afirmam que embora por vezes os licenciandos sejam capazes de identificar dificuldades enfrentadas no decorrer da sua vida acadêmica, eles não são capazes de modificar suas práticas a fim de não replicar os quadros que os levou a essa situação, ou por não terem tempo de estudo suficiente, ou por falta de orientação. Os autores defendem então que um caminho para auxiliar a mudança de práticas que não mais perpetuarão as dificuldades já encontradas é analisar qual dos Três Mundos da Matemática são mais proeminentes e quais os elementos "já encontrados" que influenciam essas respostas para sanar as dificuldades dos licenciandos. A pesquisa realizada por Bisognin et al. (2007) teve um carácter qualitativo onde foram analisadas as respostas de 15 estudantes de Licenciatura em Matemática. Os alunos, oriundos de duas Instituições de Ensino Superior do Estado do Rio Grande do Sul, responderam uma questão sequências numéricas. Os participantes já haviam cursado a disciplina de análise matemática e, portanto, os estudantes já haviam estudado sobre sequências numéricas. Os autores representam a questão como a seguir:

Figura 2 – Questão apresentada por Bisognin et al.

A sequência $\left(a_n = \dfrac{n}{n^2+1}\right)$ tem os seus primeiros termos representados na figura abaixo.



(a) A figura permite concluir que a sequência é convergente? Por quê?

(b) Considere, também, a definição do seu termo geral e determine qual é o limite desta sequência quando $n \to +\infty$.

Fonte: Bisognin et al., 2016, p. 367 .

Bisognin et al. (2016) consideram duas respostas corretas para a primeira questão. Uma delas é usando linguagem natural, ou seja, falando que os termos da sequência estão se aproximando de zero conforme o valor de n cresce. A outra possibilidade apresentada pelos autores é utilizando a linguagem simbólica, a sequência (a_n) converge para 0 porque, para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 => |a_n| < \epsilon$. Os autores classificaram como parcialmente corretas quando os estudantes afirmaram que a sequência era convergente mas sua justificativa utilizava argumentos incorretos e incorretas quando o estudante considerou que a sequência ou não era convergente ou não sabia argumentar sobre a convergência.

Para a segunda questão os autores esperavam que os alunos, por meio de cálculos, concluíssem que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ e essa foi considerada a resposta correta. Os autores consideraram a resposta parcialmente correta caso o estudante tenha escolhido a estratégia adequada para o cálculo do limite mas tenha cometido um erro de linguagem matemática, e incorreta quando o cálculo do limite estivesse errado ou quando a resposta foi apresentada sem desenvolvimento. Os autores consideraram a resposta em branco quando o estudante não demonstrou uma tentativa de solução ou quando apenas copiou os dados do enunciado.[9]

Das respostas corretas na letra a) os autores informam que todos utilizaram da linguagem natural para justificar sua resposta, e, segundo eles, nesse contexto os estudantes acabam por mostrar certa impropriedade. Para os autores esse fenômeno representa uma visão do mundo conceitual corporificado, uma vez que símbolos e definições formais estão ausentes. Das respostas parcialmente corretas, ambos estudantes tentaram utilizar cálculos para chegar à resposta certa, o que segundo os autores mostra traços do mundo corporificado e simbólico. Das respostas incorretas, alguns consideram que a função não era convergente, outros afirmaram não ser possível afirmar com base nos dados apresentados. Um estudante apenas afirmou que “sim” , a sequência era convergente, mas não justificou sua resposta. Os autores afirmam em sua análise que as respostas indicam uma visão do mundo corporificado, uma vez que os participantes não são capazes de fazer generalizações com base nos dados apresentados.

Para a questão b) as análises se iniciaram a partir das questões parcialmente corretas, uma vez que não houve respostas corretas. Os estudantes que tiveram sua resposta categorizadas como parcialmente correta, em geral, tinham noção dos procedimentos a serem realizados a fim de se calcular o limite, entretanto falhavam ao aplicá-los. Quatro dentre os estudantes que tiveram suas respostas parcialmente corretas utilizaram ferramentas algébrica e um deles respondeu à questão usando linguagem natural sem se ater ao termo geral da sequência numérica. Segundo Bisognin et al. (2016) esses estudantes eram capazes de trabalhar tanto no mundo corporificado quanto no mundo simbólico, mas não conseguiam transferir essas informações para o mundo formal. Segundo Bisognin et al. (2016) as respostas dos oito participantes que erraram têm características do mundo corporificado. Algumas delas inclusive incluíam símbolos, o que sugere, segundo Bisognin et al. (2016), que seus autores têm a propensão a passear pelo mundo simbólico, mas falham ao tentar fazê-lo.

Bisognin et al. (2016) afirmam que são as respostas para o item a) que indicam que a maioria participantes não sabem expressar em linguagem simbólica a definição de convergência de sequência, uma vez que nenhum dos entrevistados utilizou ϵ para demonstrar o limite. Com relação à resposta ao item b) os pesquisadores afirmam que os dados mostram que os estudantes ainda estão restritos à matemática prática uma vez que nenhum deles apresentou uma demonstração formal.

[9] Os autores apresentaram os dados sobre erros e acertos em um quadro, que mostrou que para a letra a) houve 4 acertos, 2 questões parcialmente corretas, 4 incorretas e 5 em branco. Já para a letra b) não houve acerto, 5 questões estavam parcialmente corretas, 8 incorretas e 2 em branco. Os autores em sua análise ressaltam que não houve nenhum acerto na letra b) e como o corpo de dados era muito limitado, os erros não foram separados em categorias, mas uma análise foi feita em todas as respostas.

Para os autores é possível detectar "já encontrados" nas respostas para ambos itens, como por exemplo, quando no item a) um dos pesquisados responde que é possível analisar o limite pela direita mas não pela esquerda, o que demonstra um regaste da noção de limite trabalhada no cálculo. Como exemplo de "já encontrado" na questão b) os autores trazem as respostas do estudante que justificou corretamente a convergência da sequência, considerando que o denominador é sempre maior que o numerador, indicando assim um resgate do conhecimento "de que o valor de uma fração com numerador e denominador positivos e denominador maior que o numerador está entre 0 e 1" (BISOGNIN et al., p.372).
Bisognin et al. (2007) afirmam também que uma das razões possíveis para as dificuldades dos estudantes e que podem se perpetuar na prática deles é relacionada ao sinal de igualdade. Os autores trazem Ponte, Branco e Matos (2009) por sua contribuição ao indicar o sinal de igualde tem pelo menos três significados. O primeiro significado é o operacional, onde o sinal de igualdade atua como "separador" entre dois raciocínios. O segundo significado está associado à noção de equivalência, onde os indivíduos operam um lado da igualdade para determinar a resposta, como por exemplo, quando o estudante é solicitado a resolver a equação $5 + x = 3$, onde se pergunta qual o valor de x que fará com que as duas expressões sejam equivalentes. O terceiro está associado a relação de dependência entre duas variáveis, como é o caso da equação $y = x^2 + 2$.
Bisognin et al. (2016) discutem também o uso do sinal de igualdade que estudantes fazem como apenas uma conexão entre diversos passos, o que leva a diferentes erros. Bandaró e Lima (2011) fazem uma análise baseada nos Três Mundos da Matemática dos significados da igualdade. Para eles, quando o sinal de igualdade está sendo utilizado para relacionar a coisas concretas como, por exemplo, ao resultado de uma contagem, essa situação estaria enquadrada no mundo corporificado. Como representação do mundo simbólico os pesquisadores usam a notação $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ quando os estudantes a entendem tanto como processo como também como conceito. No mundo formal o sinal de igualdade deveria ir além do mundo simbólico, sendo entendido como a indicação de uma verdade (BISOGNIN et al.; 2016), o que não aconteceu em nenhuma resposta.
Bisognin et al. (2016) sintetizam que os dados indicam que os 15 licenciandos ainda estão no estágio da matemática prática uma vez que justificam suas afirmações baseados em elementos corporificados. Outro ponto ressaltado pelos autores é que os estudantes apresentaram dificuldades relacionadas tanto à linguagem matemática, quanto o símbolo de igual e o símbolo de limite e suas funções
Por fim trazemos o trabalho de Miriam Ferrazza Heck e Helena Noronha Cury intitulado "Uma análise de respostas de estudantes de licenciatura em matemática a uma questão sobre sequências numéricas, à luz dos registros de representação semiótica" . Assim como o trabalho de Bisognin et al. (2016), Heck e Cury (2018) analisa as respostas de estudantes de licenciatura a uma questão sobre sequências numéricas, adotando a perspectiva dos registros de representação semiótica.[10]

[10] A pesquisa relatada no artigo faz parte de um projeto apoiado pelo Edital do CNPq.

Os autores notam que os estudantes pesquisados tinham muita dificuldade em converter diferentes representações em linguagem simbólica de sequências.

Heck e Cury (2018) afirmam que o conteúdo de sequências numéricas está em presente em tanto no ensino fundamental quanto médio; no primeiro, apresentado na forma de representações figurais e no segundo quando são estudadas progressões aritméticas (P.A.) e progressões geométricas (P.G.).[11]

Segundo Duval (2006) é necessário que se entenda os processos, que envolvem registros de representação, pelo qual os indivíduos passam ao tentar compreender a matemática. Heck e Cury (2018) retomam a visão de Duval (2006) quando este afirma que ao se fazer matemática é necessário que o indivíduo converta uma representação semiótica em outra. Heck e Cury (2018) utilizam a definição dada por Duval (2012a) para representações semióticas:

> as representações **semióticas** são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes.
>
> (2012a, p. 269, grifo do autor)

.

Para Duval (2012) é importante que ao se ensinar, se utilize de diferentes representações semióticas (gráficos, língua natural, símbolos) pois, segundo ele, para que se aprenda conceitualmente sobre um objeto (noésis) é necessário que se aprenda os diferentes registros de representações (semiose). Heck e Cury (2018) apresentam Duval (2009) quando este explica as três atividades cognitivas da semiose que são:

> formação (identificação do objeto matemático representado), tratamento (operação cognitiva que vai compreender uma transformação do registro representação no interior do mesmo sistema semiótico de representação em que foi formado) e conversão (transformação de um dado registro de representação, pertencente a um sistema semiótico em outro registro, pertencente a outro sistema semiótico).
>
> (HECK; CURY, 2018, p. 4-5)

Apoiando-se em Duval, Heck e Cury (2018) defendem que os objetos matemáticos só podem ser acessados através de representações semióticas, o que não é o caso de disciplinas como química e física. Ainda apoiando-se em Duval (2012), retomam sua questão sobre como seria possível reconhecer que diferentes registros de representações são na verdade representações do mesmo objeto se não existe um meio diferente do semiótico para alcançá-los. Para Duval, isso é possível quando o indivíduo é capaz de converter um registro de representação em outros, não importando o sentido da conversão. [12]

[11] Os autores afirmam que uma vez que tal conteúdo está presente nas diversas fases da escolaridade, é necessário que o professor tenha sólidos conhecimentos conceituais e procedimentais desse conteúdo.

[12] Como exemplo Heck e Cury utilizam uma equação linear da forma y=ax+b, que pode ser representada no plano cartesiano por uma reta. Por outro lado, uma reta não vertical no plano cartesiano pode ser representada utilizando termos algébricos.

Heck e Cury (2018) afirmam que os erros cometidos pelos estudantes são importantes para representar o seu conhecimento sobre a matemática. Os autores apontam para os dois tipos de erros apresentados por Duval, que são os erros recorrentes ou transitórios. O primeiro diz respeito aos erros relacionados a um conteúdo específico. Já os erros recorrentes não estão relacionados a um conteúdo específico, mas sim, ?a maneiras de definir, de raciocinar? (HECK; CURY, 2018, p.5).[13]
Segundo Heck e Cury (2018):

> Para Vale (2009), fazer uma generalização algébrica consiste em tomar uma característica comum que é notada em alguns elementos de uma sequência, perceber que se aplica a todos os termos dessa sequência e ser capaz de usá-la numa expressão que traduza qualquer termo. Segundo Vale (2012), um padrão será de repetição quando há um motivo identificável que se repete de forma cíclica, indefinidamente, e será de crescimento quando cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior.
>
> HECK; CURY, 2018, p. 5

Heck e Cury (2018) concordam com Duval (2012b) quando ele afirma que um dos meios de entender o que os estudantes sabem de matemática, é por meio das respostas deles. Ao analisar as respostas dos alunos, os autores concluíram, assim como Bisognin et al (2016), que muitos licenciandos possuem diversas defasagens com respeito a conceitos matemáticos e processos matemáticos. Os autores afirmam também que os dados da amostra mostram que os estudantes "tem dificuldades em realizar transformações dos registros de representação em linguagem natural e em figuras para registros simbólicos e, em especial, para realizar tratamentos dentro do registro simbólico" (HECK, CURY; 2018, p.12). Heck e Cury (2018) concordam com D'Amore (2005) uma vez que acreditam que existem três processos que o estudante deve se engajar para aprender os conceitos matemáticos e são eles: representar os conceitos, tratar as representações e converter as representações. Heck e Cury (2018) defendem que o mais importante processo é o de conversão pois "somente quando um estudante consegue converter uma representação de um registro para outro é que se apropria do conhecimento sobre aquele conceito" (p. 13).[14]

[13] Heck e Cury (2018) trazem a visão de Duval que professores em formação deveriam desenvolver a habilidade de analisar os erros dos estudantes e serem capazes de elaborar atividades que ?permitam o acesso ao seu pensamento? (p. 5). Os autores afirmam então que a questão apresentada aos participantes da pesquisa envolvia um padrão que se repetia. Para os autores padrões são estabelecidos matematicamente quando se é possível determinar uma regra que define os termos. Os autores afirmam que uma das consequências do trabalho é que os dados apresentados nele podem ser usados por professores para conscientizar seus licenciandos de suas dificuldades conceituais e procedimentais.

[14] Heck e Cury (2018) defendem que nas aulas que o professor foca em termos algébricos no tratamento desse tipo de registro, ele está privando os estudantes de um conhecimento que vai os acompanhar ao longo de suas trajetórias acadêmicas. Segundo os autores, uma forma de se trabalhar os conceitos de sequência seria inicialmente trabalhar padrões de figuras e suas conversões, o que serviria para auxiliar as discussões do conceito nos seus diferentes registros.

4 Métodos da Pesquisa

4.1 Sobre a metodologia

A pesquisa é de cunho qualitativo, por seu caráter exploratório e características da questão a ser respondida, tendo o ambiente natural como campo de investigação. Encontramos na etnografia (MATTOS, 2011) ferramentas para estudar fatos e eventos menos previsíveis em contextos interativos determinados entre as pessoas ou grupos. Desta forma, essa metodologia nos permite investigar e analisar diversos aspectos que podem interferir no processo de aprendizagem, apoiando a intenção da pesquisa. De acordo com Mattos (2011) a pesquisa etnográfica tem por objetivo documentar, monitorar e encontrar o significado da ação. Por ser essa uma metodologia que é guiada preponderantemente pela intuição do pesquisador, isso permite que a utilização de técnicas e procedimentos etnográficos não siga padrões rígidos ou pré-determinados, mas que a forma com que a pesquisa vai ser desenvolvida a partir de determinado instante seja orientada pelo conhecimento do pesquisador ou por resultados que podem emergir sugerindo uma forma diferente de se pesquisar. Como a forma com que cada indivíduo aprende é diferente, esse tipo de pesquisa permite que se possa estudar indivíduos que não se enquadram em modelos pré-estabelecidos.

As ferramentas metodológicas para produção de material empírico consistem em registros de campo provenientes do acompanhamento das aulas supracitadas, as respostas dos estudantes às questões das avaliações elaboradas pelo professor, e transcrição na íntegra de uma entrevista em grupo, semi-estruturada e planejada no formato de uma atividade. Nossa hipótese de pesquisa é a de que os indivíduos aprendem de formas diferentes e que representações visuais e diagramas auxiliam no processo de aprendizado de conceitos matemáticos formais. Nosso objetivo é analisar de que modos tais objetos - representações visuais e diagramas, podem permear, apoiar ou obstruir os processos de aprendizagem de conceitos matemáticos formais.
Desse modo, e utilizando métodos etnográficos planejamos acompanhar as aulas em uma turma de terceiro ano de um curso de matemática em uma universidade, no período em que, na maioria dos currículos, as disciplinas que abordam a matemática formal passam a ser oferecidas. A intenção do pesquisador é a de que, mesmo como observador não participante, sua presença se torne familiar ao grupo.
Para o planejamento da atividade da entrevista foi utilizado como plano de fundo, o caso de Chris, um estudo de caso apresentado por Pinto (1998) em sua tese de doutorado.
Após a escolha do tema de pesquisa para a dissertação, e o planejamento geral da pesquisa, a outra questão importante de fazer era onde seria realizado o trabalho de campo. Dentre as instituições e disciplinas em que o campo de pesquisa atenderia aos propósitos da pesquisa e cujo acesso ao campo seria possível, escolhemos a disciplina de Introdução à Topologia, que é

apresentada como a primeira parte do curso de análise real, na Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro.

Para análise do material empírico produzido, utilizaremos Thematic Analisys (análise temática - TA) uma vez que esta é uma metodologia para identificar, analisar e reportar padrões (temas) em dados (BRAUN; CLARKE, 2008, p.6), o que pode permitir responder à questão de pesquisa colocada. Braun e Clarke defendem que a TA deveria ser o primeiro método qualitativo de análise que pesquisadores deveriam aprender, uma vez que este fornece diversas habilidades que são úteis para diversas outras formas de análise quantitativa (BRAUN; CLARKE, 2008, p.4). Além disso, os autores defendem que a TA fornece uma ferramenta de pesquisa útil e que pode prover uma análise rica, detalhada e complexa dos dados.

Braun e Clarke (2008) argumentam também que ao mesmo tempo que a TA tem alto grau de flexibilidade, é necessário que se estabeleçam diretrizes para uma utilização efetiva do método. Portanto alguns termos que serão utilizados são definidos tais como: Corpo de dados, que se refere a todo material coletado para um projeto de pesquisa específico; conjunto de dados, que se refere a todo material do corpo que está sendo utilizado em uma análise específica; item de dado, que é utilizado para descrever um pedaço individual do material coletado. Juntos, formarão o conjunto de dados ou corpo de dados e a extração de dados se refere a todo pedaço de material codificado que foi identificado em ou extraído de um item de dado. Em nosso texto usaremos a expressão material produzido para a análise como sendo o conjunto de dados usado na análise buscando responder a questão de pesquisa.

Braun e Clarke afirmam que não há consenso acerca do que é a análise temática e de que forma esta deve ser conduzida. Entretanto eles afirmam que apesar de muitas vezes não informado, diversas análises são, em sua essência, análises temáticas (BRAUN; CLARKE, 2008, p. 6-7). Os autores seguem afirmando que uma clara exposição acerca de quais suposições guiaram suas análises e de que forma esta análise foi feita são essenciais para que outros pesquisadores sejam capazes de avaliar os dados da pesquisa e realizar projetos relacionados no futuro (BRAUN; CLARKE, 2008, p. 7). Braun e Clarke (2008) defendem ainda que autores como Singer e Hunter (1999) falam da emergência de temas a partir dos dados, em uma perspectiva próxima à da Teoria Fundamentada em dados (Grounded Theory). Para Braun e Clarke (2008), tal perspectiva nega o papel ativo do pesquisador, que identifica e seleciona os temas e padrões de interesse da análise. Enfim, que produz os dados, para análise. Ely et al. (1997) afirmam que a emergência de temas pode ser mal interpretada como algo que é intrínseco ao material empírico coletado, quando, na verdade, este está de fato na cabeça de quem analisa os dados e cria relações para entendê-lo (ELY et al., 1997).

Braun e Clarke (2008) afirmam que análise temática é um método mais acessível para pesquisadores que estão iniciando suas pesquisas qualitativas uma vez que esta não requer um conhecimento teórico e tecnológico da teoria como é necessário, por exemplo, para análise do discurso e para a teoria fundamentada nos dados (BRAUN; CLARKE, 2008, p. 9). Além disto, Braun e Clarke afirmam ainda que a TA não é associada a nenhuma teoria pré-existente, e portanto, pode ser utilizado em diferentes referenciais teóricos. Braun e Clarke (2008) reconhecem que a TA pode ser um método essencialista ou realista, que reporta experiências, sentidos e a realidade dos participantes, ou pode ser um método construcionista quando se examina de que formas eventos, realidades, significados, experiências são o efeito de diversos discursos operando na sociedade (BRAUN; CLARKE, 2008, p. 9). Uma vez que a TA pode ser utilizada com diversas finalidades, é importante que o ponto de vista teórico seja explicitado para trazer a tona suposições sobre a natureza dos dados, o que eles representam em termos de 'mundo', 'realidade' e assim sucessivamente (BRAUN; CLARKE, 2008, p. 9).

Dentre os tópicos importantes que devem ser considerados antes mesmo do início da análise dos dados devem estar, por exemplo, a consideração do que se entende por um tema. Braun e Clarke (2008) consideram que um tema captura algo importante acerca dos dados com relação a questão de pesquisa, e representa alguns níveis de resposta ou significado padronizado no escopo do conjunto de dados. Ao se realizar a codificação, um ponto importante a ser analisado é o que é considerado um tema e qual tamanho ele precisa ter. Uma vez que a TA trata de análise qualitativa, a quantidade de vezes que a evidência de um tema aparece no conjunto de dados não será relevante para determinar se este deve ou não ser considerado como tal. Um tema pode ter um espaço considerável em alguns itens de dados, e pouco ou nenhum em outros, ou pode aparecer pouco no conjunto de dados (BRAUN; CLARKe, 2008, p.10). Braun e Clarke (2008) defendem que é necessária certa flexibilidade ao se julgar o que pode ser considerado um tema e que um dos principais aspectos a ser considerados é que para ser considerado um tema este deve capturar algo importante com relação a questão de pesquisa. Além disso outro ponto a ser observado é a prevalência. Segundo Braun e Clarke não existe forma certa ou errada de determinar a prevalência, mas o que é necessário é que haja consistência na forma que você determina a prevalência na análise realizada. Autores como Meehan et al. (2000), Braun, Gavey e McPhilips (2003), Taylor e Ushher (2001) representam prevalência como 'a maioria dos participantes', 'diversos participantes', 'alguns participantes'; desta forma não atribuindo carácter quantitativo ao conceito. Braun e Clarke (2008) defendem que ainda se faz necessária uma discussão acerca do como e porque nós poderíamos representar a prevalência dos temas em um dado, e, de fato, se, e porque a prevalência é importante (BRAUN; CLARKE, 2008, p.11).

É preciso determinar o tipo de análise que será feita e quais alegações que se deseja fazer, em relação ao conjunto de dados (BRAUN; CLARKE, 2008, p.11). Diferentes tipos de análise podem ser realizados; por exemplo, pode-se fazer uma descrição de todo seu conjunto de dados. Neste caso, não será possível ter um alto grau de complexidade e profundidade nos seus dados, mas tal abordagem se faz útil em estudos exploratórios, quando se está realizando uma pesquisa num campo relativamente pouco pesquisado ou quando não se sabe a visão dos participantes acerca do tópico. Outra possibilidade é utilizar a TA para fornecer uma visão mais detalhada de um tema particular, ou conjunto de temas, dentro de um dado. Isto pode relacionar a uma questão específica ou área de interesse em um conjunto de dados, ou de um tema que se destaque em sua maior parte (BRAUN; CLARKE, 2008, p.11).

Braun e Clarke (2008) reconhecem duas formas iniciais de identificar temas e padrões nos dados, que são a forma indutiva, também denominada 'de baixo para cima'[1] ou a forma dedutiva ou teórica, também denominada 'de cima pra baixo'[2].(BRAUN; CLARKE, 2008, p.XX)

Na análise indutiva os temas identificados são ligados fortemente aos dados. Nesta abordagem os temas identificados podem ter pouca conexão com a questão feita aos participantes, além de não serem guiados pelo interesse teórico do pesquisador na área ou tópico. Sendo assim, codificar os dados seguindo esta vertente significa codificar sem tentar fazer seus dados fiquem adequados a estruturas de codificação preexistentes, ou seja, a codificação é determinada pelo material produzido para análise.

A análise teórica é guiada pelo interesse do pesquisador na área e, portanto, é determinado pelo analista. Tal forma de análise não tem uma boa explicação do quadro geral, mas apresenta de forma mais detalhada alguns aspectos do material empírico.

Outra decisão que Braun e Clarke (2008) apontam ser necessária é sobre o nível em que os temas serão identificados: se serão identificados no nível semântico ou explícito, ou no nível latente ou interpretativo. A TA tipicamente se foca consistentemente no primeiro nível. A análise semântica identifica diretamente o que o participante disse, sem se aprofundar. Idealmente, o processo analítico progride da descrição, que a organização dos dados resumidos a fim de mostrar padrões no conteúdo semântico, para a interpretação que é a tentativa de teorizar o significado dos padrões e seus sentidos e implicações mais amplos, frequentemente relacionados à literatura preexistente (BRAUN; CLARKE, 2008, p.13).

Por outro lado, a TA no nível latente vai além da semântica dos dados. Ela busca analisar e identificar ideias, suposições, conceitualizações e ideologias que moldam ou informam o conteúdo. O uso dos dois níveis de análise é exemplificado em Braun e Clarke (2008) usando o exemplo de uma metáfora. Se o objeto de estudo fosse uma massa de gelatina, a abordagem semântica iria buscar descrever a superfície da gelatina, sua forma e significado, enquanto a abordagem latente buscaria identificar as características que deram à massa de gelatina sua forma e significado.

Segundo Braun e Clarke (2008) a TA pode se inserir tanto no paradigma realista/ essencialista quanto no paradigma construtivista. A abordagem essencialista/ realista pode ser utilizada para teorizar motivações, experiências e significados de forma direta, porque nesta vertente é assumida uma relação unidirecional entre experiência e linguagem (BRAUN; CLARKE, 2008, p.14). A análise conduzida sobre a abordagem construtivista busca teorizar o contexto sociocultural e condições estruturais que levaram as percepções do indivíduo.

Os passos necessários para se realizar a TA não são exclusivos. Pelo contrário, são parecidos com os passos de outras pesquisas qualitativas. A análise se inicia quando o analista começa a notar e buscar por padrões de significados e áreas de potencial interesse no material empírico. O ponto final é a descrição do conteúdo e significado dos padrões (temas).

Braun e Clarke (2008) apresentam um guia para ajudar no processo de análise, ressaltando que

[1] Tradução do termo, em inglês, bottom up.
[2] Tradução do termo, em inglês, top down

um guia para uma pesquisa qualitativa não são regras, mas caminhos que podem ser seguidos de forma flexível para tornar-se adequado tanto à questão de pesquisa quanto aos dados. Além disso, a análise não é um processo linear, mas um processo que requer avançar e revisitar o que já foi feito diversas vezes. Os passos são: se familiarizar com os dados, gerar códigos iniciais, procurar por temas, rever os temas, definir e nomear os temas e produzir o relatório. (BRAUN; CLARKE, 2008 p.16)

Segundo Braun e Clarke (2008) é vital que o analista esteja imerso nos dados ao ponto de estar familiarizado com a profundidade e extensão do conteúdo. Essa imersão comumente envolve a leitura repetida dos dados, muitas vezes buscando significados e padrões (BRAUN; CLARKE, 2008 p.16). Braun e Clarke (2008) sugerem que é importante que se leia os dados na íntegra pelo menos uma vez antes de começar a codificar. Esta é uma das razões pelo qual pesquisas qualitativas usam amostras menores, uma vez que ler e reler os dados requer tempo. Braun e Clarke (2008) afirmam ainda que nesta fase é bom que se comece a tomar notas e marcar ideias para a codificação que ocorrerão nas próximas fases e é após esta fase que o processo de codificação formal terá seu início (BRAUN; CLARKE, 2008 p.17).

Ao se trabalhar com dados verbais, como entrevistas ou programas de televisão por exemplo, se faz necessária a transcrição para a forma escrita para poder ser feita a análise temática. Apesar de constituir uma fase demorada, a transcrição pode ser uma ótima oportunidade de familiarização com os dados (BRAUN; CLARKE, 2008 p.17). Existem algumas convenções para a transformação de textos verbais para textos escritos como Edwards e Lampert (1993) e Lapadat e Lindsay (1999). Braun e Clarke (2008) afirmam que a TA não requer o mesmo nível de detalhes na transcrição como a análise da conversação, do discurso ou da narrativa. Entretanto é necessária uma transcrição ‘ortográfica’ rigorosa e minuciosa, que considera todos os enunciados verbais e não verbais.

A segunda fase consiste em gerar os códigos iniciais e tem início quando o analista já está familiarizado com o texto e já criou uma lista inicial de ideias sobre o que são os dados e o que eles têm de interessante. Os códigos têm por objetivo identificar a característica do dado (conteúdo semântico ou latente) que lhe parece interessante, e que refere ao “segmento ou elemento mais básico dos dados não tratados ou informação que pode ser avaliada de forma significativa com respeito ao fenômeno”(BOYATZIS 1998, p.63 APUD BRAUN; CLARKE, 2008 P.18).

O processo de codificação constitui parte da análise, mas os dados codificados diferem das unidades de análise (temas) que comumente são mais amplos. Os temas que serão desenvolvidos na próxima etapa constituem o material que será utilizado para a análise interpretativa e como os argumentos sobre os fenômenos serão examinados (BRAUN; CLARKE, 2008, p.18).

A codificação será impactada pelo tipo de análise que está sendo feita, se esta é determinada pelos dados ou determinada pela teoria. Outro ponto que impactará a codificação é se o foco é analisar todo o dado ou identificar características específicas do conjunto de dados. Existem programas que podem auxiliar na codificação, mas a mesma pode ser feita de maneira manual. Uma dica importante na fase de codificação dada por Braun e Clarke (2008) é que o analista codifique quantos temas/padrões forem possíveis, pois algo pode vir a se tornar relevante no futuro; codifique extratos de dados de forma inclusiva, uma vez que o contexto pode se mostrar bastante relevante; extratos de dados podem ser codificados em diferentes temas aos quais este pertença, ou seja, um extrato de dado pode não ser codificado, codificado uma única vez ou codificado diversas vezes.

A terceira fase consiste em procurar por temas e se inicia quando todos os dados foram codificados e organizados de acordo com a codificação e portanto o analista tem uma lista de diferentes códigos que foram identificados no conjunto de dados. Esta fase consiste em organizar os códigos em potenciais temas e organizando os extratos de dados relevantes dentro dos temas identificados (BRAUN; CLARKE, 2008, p.19). O processo então consiste em analisar os códigos e considerar como diferentes códigos podem ser combinados para formar tema abrangente. Braun e Clarke (2008) sugerem que neste momento, a utilização de esquemas visuais pode ser útil para identificar como diferentes códigos podem ser organizados em temas. É nesta fase também que se inicia o processo de reflexão das relações entre códigos, entre temas e entre diferentes níveis de temas. (BRAUN; CLARKE, 2008, p.20). Neste momento, alguns códigos podem formar alguns temas principais, outros podem formar subtemas e outros serem descartados. Podem existir ainda aquele que parecem não se encaixar em nenhum dos anteriores e podem compor um grupo chamado miscelânia que possivelmente temporariamente não se enquadram (BRAUN; CLARKE, 2008, p.20).

A quarta fase consiste na revisão dos temas e tem seu início quando os grupos de temas criados são refinados. Segundo Braun e Clarke (2008) é nesta fase que se torna evidente que alguns dos temas não são de fato temas (nem sempre há informação suficiente para suportá-los, ou os dados são muito diversos), enquanto outros podem se juntar para formar um único tema. Outra possibilidade é que temas precisem ser divididos em temas separados. Segundo Braun e Clarke (2008) "os dados dentro dos temas devem se unir significativamente, enquanto deve haver distinções claras e identificáveis entre temas"(BRAUN; CLARKE, 2008, p.20).

Esta fase envolve dois níveis de revisão e refinamento dos temas, onde o primeiro envolve rever no nível de extrato de dados codificado, que significa analisar os extratos para verificar se existe uma coerência entre eles. E o segundo, que é posterior ao primeiro, corresponde a determinar a validade dos temas individualmente com relação ao seu conjunto de dados, além de analisar se seu projeto de mapa temático reflete de forma correta os significados evidentes no seu conjunto de dados. Nesse momento pode ser necessária a releitura dos dados, para analisar e codificar partes que não foram consideradas no primeiro momento. "A necessidade de codificação do conjunto de dados é esperada, uma vez que a codificação é um processo orgânico contínuo"(BRAUN; CLARKE, 2008, p.21).

Caso o mapa temático represente os dados de forma adequada, então o analista pode passar para a próxima fase. Caso contrário, será necessário rever e refinar a codificação até que o mapa montado represente fidedignamente os dados. Ao final desta fase é esperado que o analista tenha uma noção de quais são os diferentes temas, como eles estão relacionados e as informações que se pretende passar dos dados.

A quinta fase consiste em definir e nomear os temas e tem seu início quando o analista já possui uma clara ideia do mapa de dados. Nesta fase que se definem os temas e os refina para analisar os dados neles. Braun e Clarke (2008) definem definir e refinar como identificar a 'essência' do que o tema é sobre, e determinar quais aspectos dos dados cada esquema captura. Braun e Clarke afirmam ainda que é importante nesta fase que não apenas se parafraseie o conteúdo dos dados, mas que os organize de forma coerente e consistente internamente, identificando os pontos de interesse, justificando-os (BRAUN; CLARKE, 2008, p.22).

É necessário conduzir e produzir uma análise detalhada para cada tema. É necessário também analisar cada tema com relação aos dados e a relação entre os diferentes temas. Neste momento é importante que se comece a pensar nos nomes que serão utilizados na análise, uma vez que precisam ser concisos, fortes e deem ao leitor uma noção do que o tema trata.

A última fase consiste na produção do relatório e para que essa fase tenha início, é importante que os temas estejam desenvolvidos. Braun e Clarke (2008) afirmam que é importante que a análise forneça um relato conciso, coerente, lógico, não repetitivo e interessante da história que os dados contam, tanto dentro como por meio dos temas. No relatório devem estar presentes evidências suficientes dos temas, ou seja, extratos de dados suficiente para mostrar a prevalência do tema. Tais extratos devem ser identificados facilmente como exemplos do problema. Braun e Clarke (2008) afirmam ainda que o texto precisa ser mais do que apenas um apanhado de dados, mas devem estar incorporados na narrativa analítica que convincentemente ilustra a história que você está contando sobre os dados. "Sua narrativa analítica precisa ir *além* da descrição dos dados, e fazer um *argumento* em relação a sua questão de pesquisa"(BRAUN; CLARKE, 2008, p.23, em itálico no original).

Braun e Clarke (2008) afirmam que é relativamente fácil conduzir uma análise temática uma vez que esta não requer profundo conhecimentos técnicos e teóricos mas que existem alguns erros que tornam pobre a análise. Eles citam como primeiro exemplo como sendo a análise dos dados com pouca ou nenhuma narrativa analítica ou extratos de dados com comentários analíticos que simplesmente parafraseiam o conteúdo. Segundo Braun e Clarke (2008) os extratos em uma análise são ilustrações dos pontos que o pesquisador que fazer dos dados (BRAUN; CLARKE, 2008 p.25). Outro erro apontado por Braun e Clarke é utilizar as questões norteadoras, das entrevistas por exemplo, como temas. Tal ação é considerada um erro uma vez que nenhuma análise dos dados foi feita, nem uma tentativa de fazer sentido dos padrões de resposta. Um terceiro problema relatado por Braun e Clarke (2008) é uma análise fraca ou pouco convincente. Neste caso uma das coisas que pode acontecer é que ou os temas parecem não funcionar, ou há muitas sobreposições entre temas, ou temas que não são internamente coerentes nem consistentes. Braun e Clarke (2008) apontam que todos os aspectos dos temas devem convergir para a ideia ou conceito central. Uma análise fraca pode ser fruto também da falha em apresentar exemplos adequados dos dados; ou seja, uma falha na produção do material a ser analisado.

O quarto erro é uma incoerência entre dos dados e as alegações analíticas feitas sobre eles. Isto acontece quando os dados não suportam as alegações ou os extratos sugerem outra análise ou uma contradição entre as alegações. O quinto erro apresentado por Braun e Clarke (2008) diz respeito a uma falta de coerência entre a teoria e as alegações analíticas ou entre a questão de pesquisa e a forma como a TA é utilizada. Uma boa TA busca uma consistência entre o *framework* da teoria e as interpretações dos dados.

4.2 Planejamento e solicitação de campo

A proposta inicial da pesquisa de campo é presenciar o dia a dia da sala de aula de uma disciplina que introduza a matemática em sua abordagem formal, para analisar modos e intenções com que visualização e diagramas são utilizados no decorrer do semestre. Conhecendo as possibilidades e limitações de imersão em sala de aula nas universidades devido a exigências do campo para pesquisar o espaço da sala de aula, nesse momento, o planejamento foi de a pesquisadora atuar como observadora não participante, coletando os dados por meio de áudio, anotações e fotos do quadro da sala de aula e sem fazer qualquer interferência na apresentação do conteúdo pelo professor. Nos momentos de avaliação, planejamos solicitar a permissão dos estudantes e do professor para analisar as provas feitas pelos alunos, com o objetivo de buscar indícios do uso de representações gráficas e qual o seu papel no desenvolvimento das soluções. Próximo ao final do curso, planejamos uma entrevista com um grupo voluntário de estudantes da turma, com o objetivo de envolvê-los em atividades que permitam uma análise do papel das representações gráficas na compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos em um tema específico da disciplina, a ser determinado. Em particular, esses procedimentos têm por objetivo analisar o papel das representações visuais na construção do conhecimento matemático formal. A Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO) foi escolhida como campo de pesquisa por uma série de fatores. Um deles é o fato da pesquisadora ser uma aluna egressa do curso de licenciatura, e, portanto, ter conhecimento sobre o funcionamento daquela universidade, além de estar familiarizada com o currículo e os diretores, coordenadores e técnicos do curso, fato este que facilitaria o contato e a abertura da escola para campo. Decidido o local onde a pesquisa seria feita, a pesquisadora entrou em contato com a coordenação da UNIRIO para expor a sua pesquisa e saber se a universidade aceitaria abrir suas portas para ser o campo de investigação. Após receber uma resposta positiva o próximo passo foi submeter a pesquisa ao comitê de ética de pesquisa (CEP) da UFRJ. O comitê de ética em pesquisa (CEP) é um órgão institucional que tem por objetivo proteger o bem-estar dos indivíduos pesquisados. É um comitê interdisciplinar e independente, responsável pela avaliação e acompanhamento dos aspectos éticos de todas as pesquisas que envolvam a participação de seres humanos. A UFRJ possui oitp comitês de ética de pesquisa. O comitê que avaliou e aprovou esta pesquisa foi o do Hospital Universitário Clementino Fraga Filho/HUCFF/UFRJ situado à R. Prof. Rodolpho Paulo Rocco, n.° 255 - Cidade Universitária/Ilha do Fundão - 7º andar, Ala E. O comitê se coloca a disposição para consultas e esclarecimentos, para tal, basta ir pessoalmente ao comitê, ou entrar em contato pelo telefone 3938-2480, de segunda a sexta-feira, das 8 às 16 horas, ou por meio do e-mail: cep@hucff.ufrj.br.

O processo de submissão ao comitê de ética se iniciou com a inscrição na pesquisa na Plataforma Brasil (plataformabrasil.saude.gov.br) envolvendo diversos documentos como: o projeto da pesquisa, cartas da universidade a ser pesquisada autorizando a pesquisa a ser realizada, uma carta de compromisso de divulgação de resultados, no qual a pesquisadora se responsabiliza por divulgar os dados proveniente da pesquisa, o termo de consentimento livre e esclarecido que foi apresentado e assinado pelos entrevistados, entre outros. Todo esse procedimento foi necessário para assegurar a responsabilidade ética da pesquisa e a integridade de todos os participantes. As cartas de encaminhamento da solicitação de campo e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido estão no Anexo A a esse texto.

4.3 O contexto e os participantes

4.3.1 A instituição

A pesquisa relatada neste trabalho foi realizada na Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO. A escolha desta instituição para o desenvolvimento da pesquisa se deu também pelo fato da mesma contar com turmas da disciplina Introdução à Topologia em todos os semestres, o que permitiu uma adequação da proposta de pesquisa ao cronograma de trabalho. A UNIRIO oferece vagas para o curso de Licenciatura em Matemática desde 2010, sendo portanto um curso com menos de 10 anos. O programa do curso de Licenciatura passou por duas grandes alterações, entretanto a disciplina Introdução à Topologia não teve nenhuma mudança registrada. De suas características institucionais, a Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO) é uma fundação de direito público integrante do Sistema Federal de Ensino Superior. Originou-se da Federação das Escolas Isoladas do Estado da Guanabara (Fefieg), criada pelo Decreto-Lei nº 773 de 20 de agosto de 1969, que reuniu estabelecimentos isolados de ensino superior, anteriormente vinculados aos Ministérios do Trabalho, do Comércio e da Indústria; da Saúde; e da Educação e Cultura.

A criação da Fefieg propiciou a integração de instituições tradicionais, como a Escola Central de Nutrição, a Escola de Enfermagem Alfredo Pinto, o Conservatório Nacional de Teatro (atual Escola de Teatro), o Instituto Villa-Lobos, a Fundação Escola de Medicina e Cirurgia do Rio de Janeiro e o Curso de Biblioteconomia da Biblioteca Nacional.

Com a fusão dos estados da Guanabara e do Rio de Janeiro, em 1975, a Fefieg passou a denominar-se Federação das Escolas Federais Isoladas do Estado do Rio de Janeiro (Fefierj). Dois anos mais tarde, foram incorporados à Fefierj o Curso Permanente de Arquivo (do Arquivo Nacional) e o Curso de Museus (do Museu Histórico Nacional).

Em 5 de junho de 1979, pela Lei nº 6.655, a Fefierj foi institucionalizada com o nome de Universidade do Rio de Janeiro (UNIRIO). E, em 24 de outubro de 2003, a Lei nº 10.750 alterou

o nome da Universidade para Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, mas a sigla foi mantida.
Atualmente a UNIRIO conta com cinco unidades Acadêmicas e são elas: Biológicas e da Saúde, Exatas e Tecnologia, Humanas e Sociais, Jurídicas e Políticas e Letras e Artes. No campo da Graduação, a instituição oferece 34 cursos. No campo da pós-graduação a UNIRIO oferece cursos *stricto sensu* (mestrados acadêmicos, mestrados profissionais e doutorados) e *lato sensu* (especialização).

4.3.2 A escola de matemática da UNIRIO

A Escola de Matemática foi criada pela Resolução UNIRIO no 3.823, de 12 de dezembro de 2011, com o objetivo de abrigar os Cursos de Matemática - Licenciatura presencial e a distância, oferecidos pela UNIRIO. A Escola atualmente oferece três cursos: licenciatura em matemática (presencial), licenciatura em matemática a distância e o mestrado profissional (PROFMAT). Em 2006, em consócio com o CEDERJ, Centro de Educação a distância do Rio de Janeiro, a UNIRIO passou a oferecer o curso de licenciatura em matemática na modalidade a distância, sendo responsável pela diplomação dos estudantes dos polos Belford Roxo, Magé, Miguel Pereira, Petrópolis, São Gonçalo e Três Rios. A licenciatura presencial começou a ser ofertada em 2010. Além disso a universidade oferece também o PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) desde 2011. Este é um programa de mestrado semipresencial na área de Matemática com oferta nacional. É formado por uma rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil/Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). A escola de matemática possui 33 docentes, que se encontram em dois departamentos: o departamento de matemática (DMat) e o departamento de métodos quantitativos (DMQ). Atualmente o departamento de matemática possui 25 professores, sendo 18 doutores e 7 mestres. Dos doutores, 12 tem seus títulos em áreas da matemática, 5 no campo da engenharia e 1 em estatísticas. Existem 4 mestres em matemática e 2 mestres em Ensino de matemática. Um dos professores tem mestrado em modelagem computacional. Desta forma, existe uma predominância de docentes que são doutores em matemática e engenharia. O departamento de métodos quantitativos é constituído por 8 professores com formação na área de estatística.

4.3.3 A licenciatura

O curso de Licenciatura em Matemática foi criado no final de 2009 por intermédio da Resolução UNIRIO nº 3215 de 10/11/2009, e teve sua primeira turma ingressando no primeiro semestre de 2010. O processo de reconhecimento foi finalizado em agosto de 2012, com a visita da Comissão de Avaliação in loco, que atribuiu o conceito 4 ao curso, em uma escala de 1 a 5. A proposta do curso é formar professores em sintonia com as novas práticas em educação, com apurada visão interdisciplinar e domínio das novas tecnologias, sem abrir mão, claro, de uma sólida formação matemática. O curso oferece 30 vagas por semestre e funciona em horário noturno, com as aulas começando às 18 horas, exceto os Estágios Supervisionados, que acontecem durante o dia. A forma de acesso à esse curso se dá através do SISU (Sistema de seleção unificada) ou pelos editais de transferência, revinculação ou reingresso. Em 2017 o curso de Licenciatura em matemática alcançou a nota máxima (nota 5) no ENADE (Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes).

4.3.4 O curso de Introdução à Topologia

A disciplina de Introdução à Topologia atualmente está situada no oitavo período no fluxograma presente no site do curso, entretanto, no momento da pesquisa, ele estava situado no quinto período. Isso porque no segundo semestre do ano de 2018, o curso passou por um processo de atualização do seu Projeto Pedagógico. Com essa modificação, algumas disciplinas foram removidas, outras modificadas e outras acrescentadas. A disciplina de Introdução à Topologia sofreu apenas uma modificação, passando a se chamar Introdução à análise real, mas mantendo sua carga horária, programa e textos de referência.

Segundo o programa Pedagógico do curso que regia a disciplina no momento da pesquisa, esta disciplina deveria fornecer ao estudante os elementos necessários à compreensão da topologia do conjunto dos números reais e ferramentas para tratar problemas de convergência de séries e sequências de números reais. Além disto, seria nesta disciplina que o estudante deveria ser apresentado ao rigor matemático utilizado da produção do conhecimento científico na atualidade. Os conteúdos abordados nesta disciplina são: conjuntos finitos e infinitos, números reais, sequências e séries de números reais e a topologia da reta. As aulas aconteciam duas vezes na semana, e cada aula possuía duas horas de duração. A bibliografia utilizada pela professora era o livro Análise real volume 1, do professor Elon Lages Lima.

As aulas acompanhadas foram expositivas, e a professora utilizava majoritariamente o quadro para apresentar as definições, teoremas, provas e demais assuntos que deveriam ser abordados. Os estudantes eram incentivados pela professora a fazer perguntas, entretanto esta não era uma prática comum a todos os alunos.

Quanto à forma de avaliação, a composição da nota dos estudantes era em sua grande parte proveniente das provas. Foram duas ao longo do período. Além disso, a professora produzia listas de exercícios informando que em determinada aula ela pediria para alguns estudantes irem ao quadro resolver as questões, e que eles seriam contemplados com pontos que seriam acrescentados à nota da disciplina. Um seminário com tema definido com antecedência também compôs as notas dos alunos.

Outro ponto a ser ressaltado é que a professora da turma pesquisada não era membro do corpo docente da universidade quando a pesquisadora era uma discente do curso e, portanto, a abordagem utilizada pela professora não era conhecida pela pesquisadora.

Uma vez que o conteúdo abordado na disciplina é muito extenso, foi feita a opção de focar o tópico sobre limites de sequências para análise nesta pesquisa. Tal escolha se deu pela importância do tema na matemática para licenciatura, principalmente na construção dos números reais, e pelo interesse da pesquisadora e de sua orientadora em investigá-lo. Haviam tido contato com a literatura de pesquisa em educação matemática sobre o assunto, fato entendido como podendo auxiliar de alguma forma no desenvolvimento da pesquisa.

4.3.5 A turma pesquisada

Os participantes da pesquisa são estudantes voluntários das turmas de Introdução à Topologia. Foram excluídos da pesquisa estudantes que não comparecerem a todas as aulas e avaliações aplicadas pelo professor. Inicialmente a proposta era de convidar alguns estudantes para entrevistas individuais a fim de pedir que os mesmos explicassem como eles desenvolveram as demonstrações nas provas da disciplina, entretanto, uma vez que diagramas e representações visuais não foram encontrados a partir da segunda avaliação, essa opção foi descartada. Ao invés disso, próximo ao final do curso os estudantes foram convidados para uma entrevista semi-estruturada proposta como uma atividade ou tarefa a ser explorada pelo grupo, com a expectativa de explicitar modos com que as representações visuais e diagramas associados pelos participantes aos conceitos envolvidos no conteúdo de limites de sequência. As questões norteadoras da entrevista se encontram em seção específica. A turma pesquisada consistia de 10 alunos, sendo 3 mulheres e 7 homens, e faixa etária estava entre 20 e 50 anos.
Todos se mostraram bastante confortáveis com a presença da pesquisadora. Um dos motivos para a aceitação, além da presença da observadora em todas as aulas do curso, pode ser o fato de os estudantes já conhecerem a pesquisadora em diversos momentos na universidade, uma vez que ela é egressa dessa instituição.
A única intervenção feita pela pesquisadora na aula foi no primeiro dia de aula ao se apresentar à turma e expor a intenção da pesquisa. Nesse momento os estudantes foram informados que a participação na pesquisa era voluntária e que caso eles optassem por participar, eles poderiam sair a qualquer momento. A assinatura do termo de consentimento livre e esclarecido aconteceu nesse mesmo dia.

4.3.6 O material empírico produzido para análise

A pesquisadora assistiu a todas as aulas do semestre, sempre observando mas sem fazer interferências. Algumas aulas foram gravadas em áudio. No início, as anotações feitas pela professora no quadro foram copiadas. Para evitar interferências provenientes da compreensão da pesquisadora sobre os fatos discutidos em aula, fotos do desenvolvimento da aula no quadro foram feitas, mantendo assim os registros fieis ao exposto em sala de aula. As duas provas aplicadas pela professora foram copiadas e arquivadas para serem analisadas, com o de acordo dos participantes. As entrevistas foram gravadas em vídeo, e transcritas para serem analisadas. A preparação do material transcrito foi dividida em episódios de acordo com temas identificados como de interesse para responder a questão colocada.

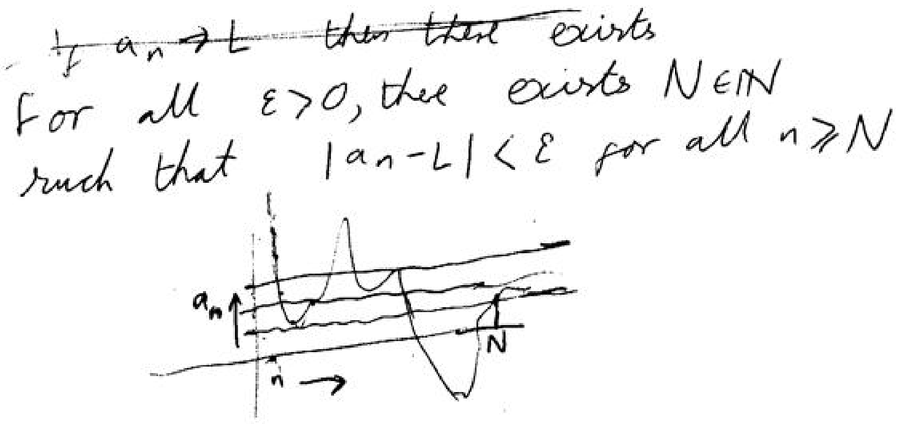
4.3.7 A preparação das atividades para a entrevista

O planejamento da entrevista, semi-estruturada, previu sua realização em grupo, enquanto os participantes desenvolviam atividades sobre sequências numéricas. A elaboração do roteiro para as atividades teve como seu plano de fundo o estudo de caso sobre Chris, apresentado em Pinto (1998), e sua releitura em termos dos processos de contextualização, complementarização e complexificação (SCHEINER, 2016, SCHEINER; PINTO, 2019). O material produzido sobre Chris e sua análise em Pinto (1998) constitui um caso porque de sua análise emergem resultados - em especial, aqueles relacionados ao uso de diagramas e representações visuais, que tangenciam, mas não são explicados satisfatoriamente pelos referenciais disponíveis até então. Dito de outro modo, ao focar prioritariamente abstrações a partir de ações em detrimento de abstrações a partir de objetos, tais referenciais não exploram o potencial das representações gráficas e visuais ao longo do processo de produção/construção do conhecimento.
Para exemplificar, em uma das entrevistas, quando pedido para escrever a definição formal de convergência de sequência, Chris afirmou:

> Eu penso nela [na definição formal de limite de sequência] ... graficamente ... Eu penso sobre ela ... tipo você tem o gráfico lá ... e você tem tipo a função lá, e eu penso que... ... Tem o limite lá [fixando a posição da linha do meio no eixo vertical] .... e então o epsilon [marcando as suas posições laterais], uma vez assim... você pode desenhar continuando [desenhando as três linhas] e aí ... todos os ... pontos depois de N lá... ... É que ... err quando eu inicialmente ... pensei nisso, foi difícil entender, então eu pensei nisso assim, tipo .. é o n indo pra lá e aquele é o a_n ...
>
> Pinto, 1998.

A definição apresentada por Chris e o diagrama utilizado em sua resposta são apresentados na Figura 3 O exemplo de Chris foi utilizado, uma vez que evidencia o uso de uma representação visual como um alicerce para a escrita e o entendimento da definição formal. Além disto a representação visual apresentada, além de usada genericamente por Chris em sua argumentação, tem característica que permitem reconhecê-la como genérica, como objeto. De fato, ela não é nem crescente, nem decrescente, evidenciando que antes da posição N ela pode "fazer qualquer coisa". Uma conjectura é a de que Chris teve contato com uma diversidade de exemplos de sequências convergentes, que sintetizou nesse recurso que utiliza em sua argumentação. Scheiner e Pinto (2019) consideram que tais processos podem ser pensados como envolvidos na abstração matemática, e os descrevem como contextualização e complementarização. Vale observar que a representação de sequência numérica utilizada por Chris, em um sistema de coordenadas cartesiano, não é comum em nossas salas de aula e portanto provavelmente não é conhecida pelos estudantes brasileiros. Portanto, uma primeira parte, ou parte introdutória da entrevista consistiria de uma atividade para apresentar aos estudantes tal possibilidade de

Figura 3 – Representação de Chris da convergência de sequência.



Fonte: Pinto, 1998.

representar uma sequência numérica no plano cartesiano, momento que poderia criar a oportunidade de rediscutir o conceito formal de sequências numéricas como funções do conjunto dos números Naturais no conjunto dos números Reais. Uma segunda atividade teria como objetivo oferecer aos estudantes um catálogo de exemplos, como proposta de contextualização do objeto de sequências numéricas convergentes. A diversidade nos exemplos busca atender o processo de complementarização. A terceira e última etapa da primeira entrevista seria solicitar que os entrevistados apresentassem uma representação geral de uma sequência convergente, utilizando para tal o plano cartesiano. O roteiro utilizado na primeira entrevista está apresentado na Figura 4.

Em síntese, o plano de atividades para a entrevista é apresentar aos entrevistados uma forma diferenciada de representar uma sequência, utilizando recursos gráficos e visuais para investigar modos com que os participantes fariam uso desse material para produzir conhecimento sobre sequências numéricas, que foi apresentado formalmente em sala de aula. Para isto, era esperado que fosse necessário retomar que uma sequência real é uma função com domínio no conjunto dos números naturais com imagem no conjunto dos números reais. Tal retomada poderia decorrer de discussões sobre representações de sequências numéricas em sistemas de coordenadas cartesiano, que é o usual para representar funções reais. Em seguida foram apresentadas representações gráficas de sequências diversas com o objetivo de fornecer aos entrevistados diferentes exemplos como contextualizações do objeto matemático, para investigar se eles proporiam, assim como Chris, uma representação gráfica genérica de uma sequência numérica convergente, indicando complementarização das diferentes representações..

Figura 4 – Roteiro utilizado na primeira entrevista.

Primeiro pedir aos alunos para tentar fazer uma representação da sequência $\frac{1}{n}$.

Lembrar que a sequência é uma função $f: \mathbb{N} -> \mathbb{R}$

Dar ao grupo uma folha de papel com os eixos nomeados n e a_n para que eles desenhem. Se necessário fornecer mais folhas caso eles precisem, para não precisar apagar.

Se mesmo as folhas tendo dois eixos os alunos representarem tudo em apenas um, tentar mostrar que a sequência é uma função e pode ser representada no plano cartesiano.

- Pensando na sequência como uma função, você poderia desenhar uma representação do comportamento da função no plano cartesiano?

Tentar fazer com que eles falem o máximo possível e apenas fazer perguntas quando a conversação/discussão está esfriando.

Depois que eles apresentarem, pedir para que eles façam a mesma coisa com a sequência $\frac{(-1)^n}{n}$.

Depois que eles terminarem, apresentar a representação gráfica das sequências:

$$a_n = 2$$

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$a_n = \frac{-1}{n} + 1$$

$$a_n = \begin{cases} -1 + \frac{1}{n} se\ n\ é\ par \\ -1 - \frac{1}{n}\ se\ n\ é\ ímpar \end{cases}$$

$$a_n = (-1)^n$$

Para cada sequência, perguntar: O que esta imagem está representando?

Perguntar o que eles podem dizer sobre a sequência apresentada no gráfico.

Se ninguém disser, perguntar se eles podem dizer alguma coisa sobre a convergência da sequência.

E perguntar se eles podem desenhar uma representação que agregue todas essas ideias.

Após discutir cada sequência separadamente mostrar todas as representações juntas e pedir que os alunos comparem os exemplos.

- O que eles têm de diferente?
- O que eles têm em comum?
- Dentre as imagens, qual é mais geral?
- Analise as ideas apresentadas para cada representação. Você consegue criar uma representação que seja mais geral que as demais?
- Você pode desenhar uma representação que agregue todas as diferentes representações?

Fonte: Arquivo pessoal.

4.3.8 A realização da entrevista

Como planejado, no fim do semestre, realizamos as entrevistas. A professora da turma não pode comparecer às aulas durante uma semana, e a pesquisadora se ofereceu para resolver alguns exercícios com os alunos. Na semana que aconteceria a última prova, a pesquisadora então propôs a seguinte alternativa: como os estudantes não teriam aulas, ela propôs dois encontros na Universidade durante o horário da aula. Na primeira hora de aula ela tiraria dúvidas, resolvendo questões da lista de revisão fornecida pela professora aos alunos, e na segunda hora ela proporia algumas atividades relacionadas à pesquisa que estava desenvolvendo, que seriam gravadas. Os estudantes se mostraram muito felizes com a proposta e se comprometeram a comparecer.

A pesquisadora esteve presente nos dois dias combinados. No primeiro dia a aula ocorreu como planejado, uma hora de resolução de exercícios e uma hora de entrevista que foi vídeo gravada. O segundo encontro contou com alguns estudantes que estavam no primeiro encontro e alguns que não haviam comparecido. Desta forma, por entender que a dinâmica que havia sido planejada seria prejudicada, a pesquisadora optou por apenas fazer os exercícios com os alunos. Os motivos para desistência dos demais estudantes pode ser decorrente do fato de que a abordagem das atividades para a entrevista divergia da abordagem do conteúdo em sala de aula, que afinal seria cobrada na prova para a qual estavam se preparando.

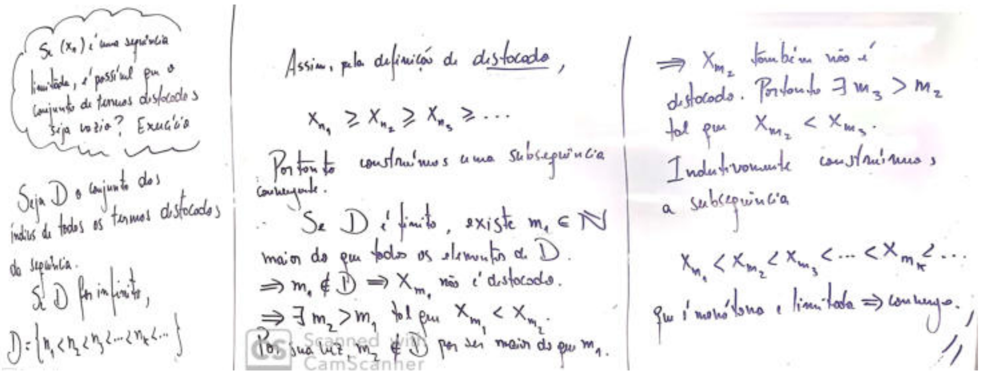
5 Apresentação do material empírico

Nesta seção abordaremos o material produzido durante os seis meses de pesquisa realizados nas aulas de Introdução a Topologia ofertada pela UNIRIO no segundo semestre do ano de 2017.

5.1 As aulas sobre sequências e limites de sequências

Durante a pesquisa, a pesquisadora participou das aulas da disciplina. Os dados coletados desta participação foram o diário de campo e imagens do quadro. A pesquisadora iniciou copiando as anotações da professora no quadro, entretanto entendeu que ao copiar estaria adicionando muito da sua própria perspectiva ao material, uma vez que a disposição do texto no quadro, e figuras, nem sempre eram reproduzidos como estavam sendo apresentados. Passou a tirar fotos das anotações feitas no quadro pela professora, pois assim, os dados seriam fidedignos ao que aconteceu em sala.
Durante as aulas a professora utilizou de alguns diagramas no momento da explicação de conceitos como enumerabilidade e conjuntos compactos. Entretanto a mesma não utilizou qualquer tipo de diagrama ou representação visual ao explicar o conteúdo de sequências. Tipicamente o quadro da professora no tópico de sequências apresentava-se como na Figura 5.

Figura 5 – Exemplo de aula sobre sequências.



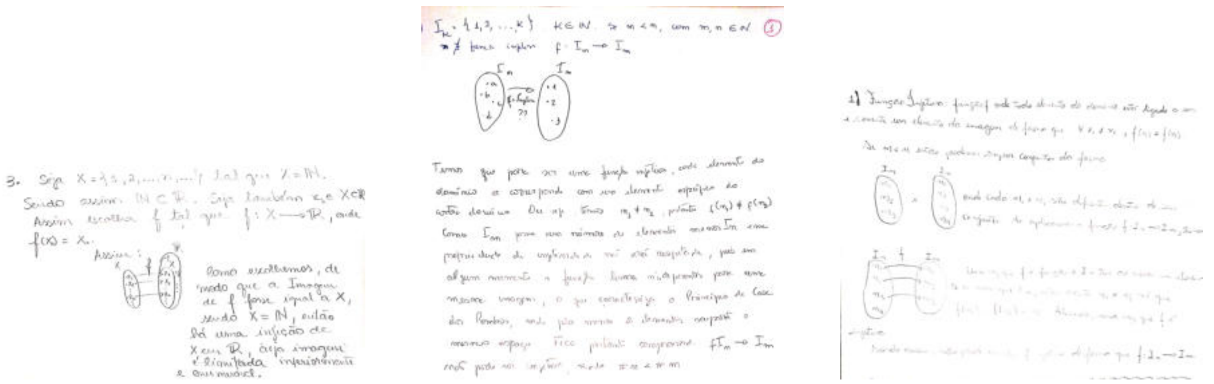
Fonte: Arquivo pessoal.

5.2 As provas

Fotos das provas feitas pelos estudantes foram tiradas. Nosso objetivo era buscar nessas avaliações indicações de uso de diagramas ou representações visuais que auxiliassem de alguma forma na demonstração formal exigida pela professora.

Dentre as avaliações identificamos que nas questões que tratavam de injetividade, em quase todas as avaliações pudemos notar a presença de diagramas para auxiliar nas demonstrações. A figura 6 traz modos utilizados pelos alunos.

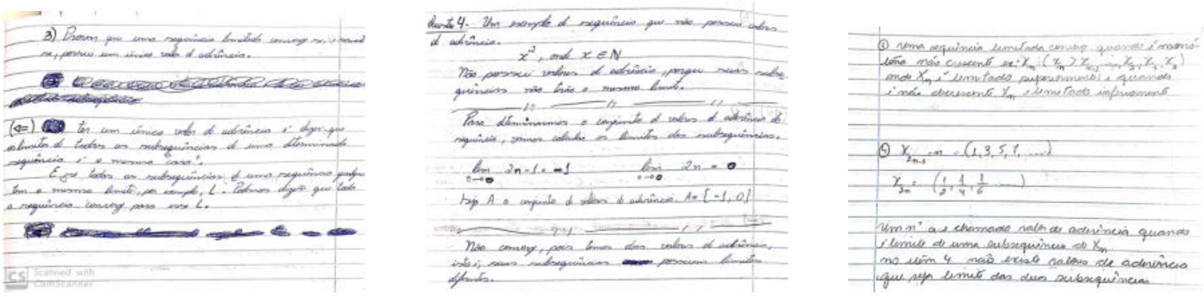
Figura 6 – Exemplo de solução que apresenta o uso de diagramas.



Fonte: Arquivo pessoal.

Por outro lado, na avaliação que tinha como objetivo analisar a compreensão dos estudantes com relação ao conteúdo de sequências, em nenhuma das avaliações foi utilizado qualquer tipo de diagrama. Uma conjectura é que isto tenha ocorrido uma vez que no conteúdo abordado na primeira prova, a professora utilizou diagrama nas demonstrações, o que não ocorreu com o conteúdo abordado na segunda prova.
Na figura 7, temos a cópia do material escrito pelos alunos.

Figura 7 – Exemplo de uso de solução de questão sobre sequências.



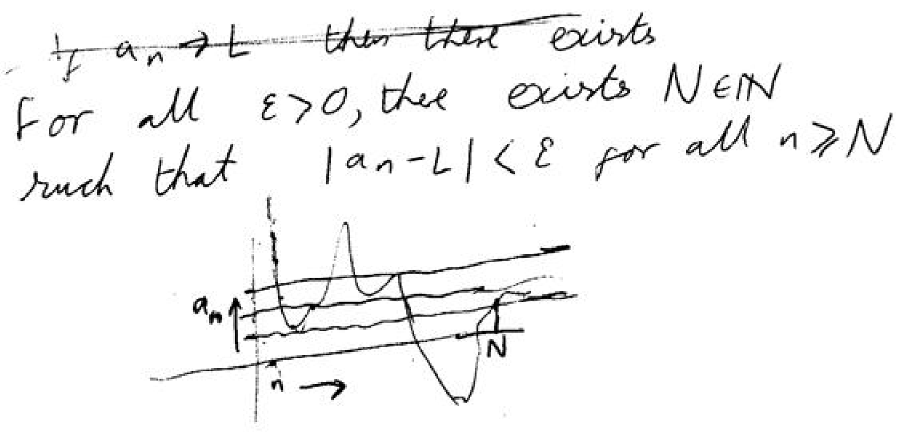
Fonte: Arquivo pessoal.

5.3 A entrevista

Aqui apresentaremos a elaboração das atividades para a entrevista com os estudantes da turma, como parte do acordo feito entre a pesquisadora e os alunos. O combinado havia sido que durante a semana que a professora da disciplina não poderia ir à Universidade, a pesquisadora se propôs a as aulas e essas seriam divididas em dois momentos: na primeira hora, a pesquisadora

tiraria dúvidas dos estudantes e resolveria alguns exercícios a fim de ajudá-los a estudar para a prova que ocorreria na semana seguinte, e no segundo momento a pesquisadora traria algumas atividades que tinham seu cerne voltado para a pesquisa que estava sendo desenvolvida com a turma. A pesquisadora esteve presente nas duas datas. No primeiro dia, compareceram 5 estudantes e a aula ocorreu como planejado, na primeira hora a pesquisadora resolveu alguns exercícios, tirou algumas dúvidas e revisou conceitos chave da disciplina. Na segunda entrevista, inicialmente estavam presentes 4 alunos, dos quais 3 estavam presentes na primeira entrevista. Por volta de vinte minutos depois do início da entrevista, outro estudante que não estava presente no primeiro encontro chegou. Esta configuração se manteve até o momento em que a segunda entrevista deveria ser iniciada, mas como quase metade dos presentes não havia estado na primeira entrevista, a pesquisadora optou por dar prosseguimento a aula de resolução de exercícios, uma vez que entendia que a dinâmica preparada para a segunda entrevista estava prejudicada.
A entrevista foi planejada para trazer elementos para responder a questão *De que modos os diagramas e outras representações visuais se apresentam durante a aprendizagem do conhecimento matemático formal, cuja produção parece considerar os processos de abstração como centrais?* Interessa-nos analisar, em particular, que estratégias são utilizadas pelos estudantes para relacionar o conhecimento teórico formal com representações visuais, que no caso investigado foram pouco abordadas em sala de aula. Como plano de fundo para elaborar as atividades, utilizamos os dados apresentados por Pinto (1998) em seu caso de estudo sobre o estudante Chris, no qual o mesmo utiliza de uma representação gráfica para escrever a definição formal do limite de uma sequência numérica.

Figura 8 – Representação de Chris da convergência de sequência.



Fonte: Pinto, 1998.

A primeira entrevista consistiu de dois principais momentos. Inicialmente solicitamos aos entrevistados que coletivamente, representassem no plano cartesiano a sequência $\frac{1}{n}$. Essa atividade foi proposta porque a professora não apresentou aos estudantes representações gráficas de sequências. Além disto, na maioria dos textos didáticos brasileiros, sequências são representadas em uma reta real, e não no plano cartesiano. Queremos dizer, é comum identificarmos, nesse caso, a sequência, que é uma função do conjunto dos números naturais, com sua imagem, na reta real. Por um abuso de linguagem, confundimos a sequência com suas imagens. Nosso interesse seria ainda abrir a possibilidade para discutirmos o conceito de sequência como uma função ao solicitar sua representação no plano cartesiano.

No segundo momento foram entregues diversas representações de sequências para os entrevistados e foi solicitado que a partir daquelas representações eles fizessem conjecturas acerca de propriedades das sequências e sobre sua convergência. As figuras 9a 15 trazem as sequências que foram utilizadas na atividade.

Figura 9 – Primeira sequência trabalhada.

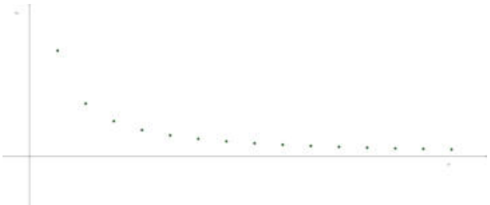


Figura 10 – Segunda sequência trabalhada.

Figura 11 – Terceira sequência trabalhada.

Figura 12 – Quarta sequência trabalhada.

Figura 13 – Quinta sequência trabalhada.

Figura 14 – Sexta sequência trabalhada.

Figura 15 – Sétima sequência trabalhada.

Fonte: Arquivo Pessoal.

6 Análise do material produzido

Complementando o material já analisado e produzido a partir das observações em sala de aula e leitura dos exames sobre o conceito de sequências numéricas, passamos a analisar as transcrições dos vídeos gravados durante as duas entrevistas. O material produzido a partir das transcrições encontra-se no Anexo B a este documento, subdividido em episódios e com anotações e análise inicial para identificação de temas.

A primeira entrevista teve início às 19 horas e terminou, como programado, às 20 horas. Aconteceu em uma sala cedida pela Instituição, contando com quadro branco, mesa do professor e carteiras para os alunos. Participantes foram em número de 05. As carteiras foram posicionadas em semicírculo, para facilitar a comunicação entre os participantes, uma vez que a proposta era o de desenvolvimento de uma atividade coletiva sobre o conteúdo de sequências reais e sequências reais convergentes. O ambiente era de amizade entre participantes e pesquisadora, uma vez que alguns dos participantes já haviam encontrado a pesquisadora na Universidade. A pesquisadora iniciou a atividade buscando deixar todos à vontade, como havia sido programado, e é bem sucedida. Como acordado previamente, a entrevista foi gravada em vídeo e em áudio, e foi transcrita na íntegra para ser analisada. A fim de manter o anonimato dos participantes, escolhemos os nomeá-los por An, onde n representa a sua posição no entorno da mesa, iniciando na esquerda, e indo para a direita.

Para a segunda entrevista, a entrevistadora compareceu como acordado com os participantes, entretanto diversos participantes que haviam estado na primeira entrevista não compareceram e estavam presentes outros estudantes que não haviam participado das discussões iniciais. Por entender que a dinâmica para a segunda entrevista estava comprometido, a entrevistadora então decidiu não seguir a diante com as atividades propostas. Uma das justificativas da ausência de diversos estudantes é que eles haviam informado ter uma prova de outra disciplina no dia da segunda entrevista e podem ter optado por utilizar o tempo que seria dedicado à aula e a entrevista para estudar.

Nessa dissertação trazemos a análise e apresentação da primeira entrevista, que está organizada em nove episódios. Cada episódio delimita uma discussão do grupo de participantes que pode ser pensada como específica e contemplando um tópico ou um tema ao longo da atividade.

6.1 Primeiro Episódio

A pesquisadora retoma a proposta do projeto de pesquisa. Reforça as questões éticas envolvidas reiterando o anonimato dos participantes e sua possibilidade de sair a qualquer momento da pesquisa sem qualquer prejuízo. Inicia a atividade segurando uma das folhas colocadas

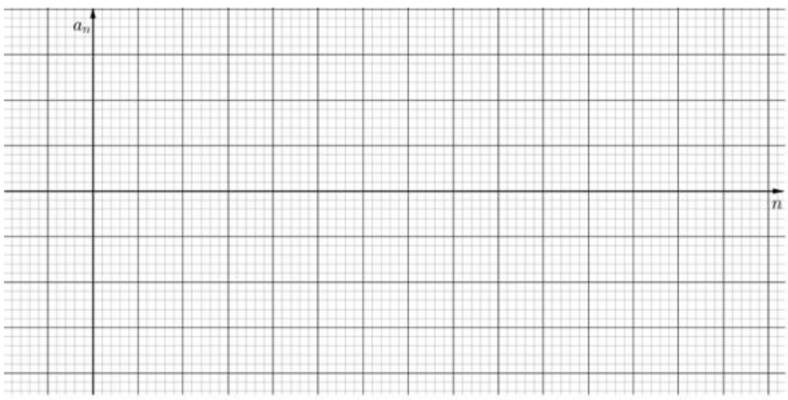
em cima da mesa (Figura 16). No plano cartesiano entregue pela entrevistadora, a parte negativa do domínio estava presente na representação, mas era consideravelmente menor que a parte positiva. Foi proposto deste modo para *sugerir o domínio da função* que seria investigada; mas o desenvolvimento da atividade confirma que a "dica" visual não funcionou como era esperado.
A pesquisadora propõe que o grupo represente graficamente uma sequência dada pela sua expressão algébrica $x_n = \frac{1}{n}$, ao que segue o seguinte diálogo:

E - Eu quero que vocês discutam como grupo, tá? Como vocês poderiam representar, graficamente Eu quero que vocês pensem numa representação gráfica para a sequência [de termo geral] $\frac{1}{n}$. Vocês podem colocar nessa folha de papel, uma...

A fala da pesquisadora é interrompida pela fala de A3:

A3: Esqueci minha lapiseira.
E: Ah, tem uma aqui .

Figura 16 – Folha entregue aos entrevistados



Fonte: Arquivo pessoal.

A3 começa dizendo que esqueceu a lapiseira, talvez, expressando um desejo de se assegurar da não participação na atividade produzindo respostas escritas. A pesquisadora entrega uma lapiseira ao estudante A3, retomando o turno de fala. Reitera que a proposta é a de trabalhar em grupo, explicando mais uma vez do que se trata a atividade.

A4: Mas como assim?
E: [a questão é] Como vocês podem representar graficamente a sequência 1 .
A4: 1/x é assim né? [fazendo um gesto com o braço esquerdo que se assemelha ao gráfico da função exponencial]

Não fica claro o que A4 perguntava no início, qual seria sua dúvida, realmente; por outro lado ele não contesta a resposta da pesquisadora e refere-se à função $\frac{1}{n}$, utilizando-se de *gestos para comunicar uma ideia* uma curva no plano descrita pelo movimento contínuo da ponta de seu dedo. Nomeando a variável como x, ao invés de n, e movendo seu dedo de modo contínuo no ar, A4 sugere estar se referindo a uma função de uma variável real, em contraste com a função definida em $\mathbb{N}$ que a sequência proposta representa. Assim, a princípio A4 evoca a função real que coincide com a sequência caso seu domínio seja restrito aos naturais. Há professores de ensino médio que se referem a essa função como "a função que carrega a sequência" .
Respondendo à questão de pesquisa, destacamos em nossa análise um primeiro modo com que ferramentas visuais são utilizadas na aprendizagem, a saber, *gestos para comunicar uma ideia ou expressar um pensamento*. Em seguida, destacamos o fato de o estudante evocar a função $\frac{1}{n}$ nesta atividade. Como já mencionamos, não é comum na literatura adotada no país representar uma sequência numérica em um sistema de coordenadas cartesiano. Não foi assim que o conceito foi apresentado em sala de aula, e nem no livro texto adotado. Uma vez que coordenadas cartesianas são amplamente utilizadas para representar funções reais, $\frac{1}{x}$ é relacionada à tarefa solicitada, ao invés da sequência $\frac{1}{n}$. Este fenômeno é analisado em Pinto (1998), que o identificou em dois dentre seis casos analisados. Apesar de essa ser uma forma comum de representação de uma sequência numérica no país onde o material empírico fora coletado, o trabalho com funções reais parece ser familiar a esses estudantes e predominar em atividades envolvendo o plano cartesiano. Nas Figuras 17 e 17, os dois casos mencionados em que a "função que carrega a sequência" foi representada, ao invés da função correspondente à sequência. À esquerda, a representação de Chris, que se autocorrige. No caso de Colin, na figura 18, as especificidades sobre o domínio da função a ser representada não são percebidas.
Como Colin, os participantes da entrevista que está sendo analisada não percebem inicialmente que A4 está se referindo a uma função real ao invés de uma sequência numérica e mantém a representação da função como uma função real.

Figura 17 – Chris, primeira entrevista.

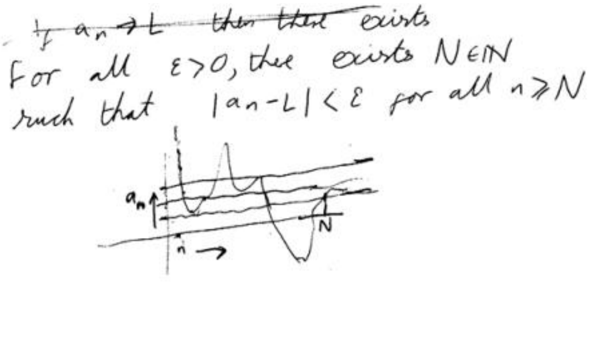
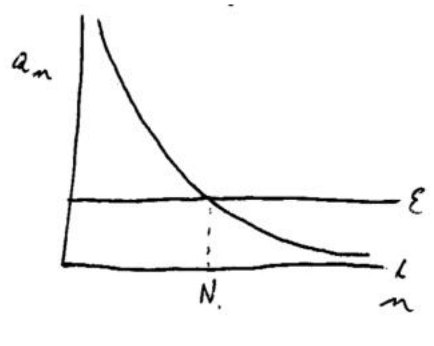


Figura 18 – Colin, primeira entrevista.



Fonte: Pinto, 1998.

Para uma análise que explicita e explica equívocos ou erros que cometemos ao vivenciar experi-

ências matemáticas novas, retomamos a noção de *imagem conceitual* (TALL; VINNER, 1981) relacionada a sistemas de coordenadas cartesianos. Na experiência anterior dos alunos, coordenadas cartesianas se relacionam predominantemente a representações de gráficos de funções de variáveis reais. De outro modo, podemos interpretar que A4 *contextualiza* (SCHEINER; PINTO, 2018) a atividade no contexto de funções reais, que lhe é familiar, e no qual representações e recursos são produtivos no sentido de serem eficientes para resolução da grande maioria dos problemas com que tiveram contato até então.
Sem perceber que não se tratava de uma função de variável real, A3 passa a representar em um gráfico no plano cartesiano a curva contínua que A4 representou gestualmente. A partir de tais representações (gestual e gráfica), o grupo propõe os seguintes *sentidos (ou ideias)* para o objeto $y = \frac{1}{n}$ chegando no zero, indo para mais infinito próximo do zero, não corta o eixo horizontal. Aqui, entendemos que as ferramentas visuais, já em fase de sua elaboração, constituem-se como *recurso para explorar propriedades e para formulação de hipóteses.*

A3: Mas tá chegando no zero, né?
A5: É, é.
A4: Indo pra mais infinito A3: Mas, pra baixo?
A4: Não, isso aqui. [apontando no gráfico que está sendo feito]

A2 e A1 acompanham a discussão dos colegas, concordando com as representações de ambos. A pesquisadora intervém buscando garantir a continuidade da atividade. Os estudantes A4, A3 e A2 continuam a discussão da sequência proposta pela pesquisadora - mesmo entendendo-a como função de variável real, evocando outros *sentidos* e trazendo *ideias* sobre assíntotas horizontais, limites no infinito valendo zero neste caso. Estas ideias são recuperadas, assim, a partir da atividade e da utilização de recursos visuais.
A3 relaciona características encontradas e pergunta se o gráfico representado é o gráfico de $y = ln(x)$.[sic] Os demais colegas A2 e A5 dizem que não; e A4 justifica representando a função $ln(x)$ com um gesto. Novamente, o gesto é utilizado *para representar um conceito e para comunicar uma ideia ou expressar um pensamento*.

A3: É o gráfico da ln de x, não é isso? A2: Não.
A5: Não.
A4: Não, ln de x é assim (gesticula com a mão a forma que teria a função ln(x).
A2 relembra que a função é 1/x (e não ln x).
A2: É um sobre x.

A fala de A2 chama a atenção de A1 e A5 para o fato de que a proposta era representar 1 sobre n e não 1 sobre x.

A1: É um sobre ene.
A5: Um sobre ene.
A1: Isso. Um sobre ene.

Nesse momento, a consciência de um conhecimento novo parece emergir na interação entre A1 e A5. Por fim os estudantes A1 e A5 percebem o objeto sequência numérica, relacionado na imagem conceitual à função 1 sobre x, ou, dito de outro modo, contextualizado no conjunto de funções reais de variáveis reais o que se explica pela familiaridade em atividades como a que foi proposta pela pesquisadora ? construir gráfico (de uma sequência numérica) em sistemas de coordenadas cartesianas. Ainda não está explícita na fala dos estudantes a questão dos números naturais serem o domínio das funções que denominamos sequência numérica, nem da definição formal de sequências reais como uma funções real cujo domínio é o conjuntos dos números naturais. Inferimos a consciência sobre estes conhecimentos, correspondendo à denominação “um sobre ene” , foi proposta pelos estudantes A1 e A5.

6.2 Segundo episódio: a definição de sequência real

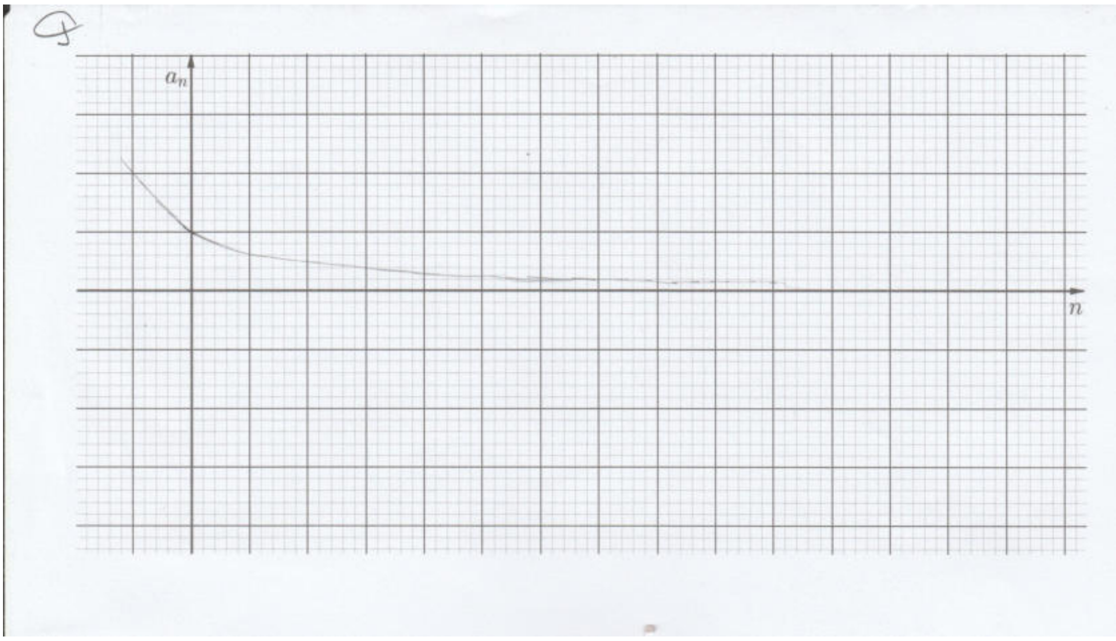
As interações que se seguem são um exemplo da diferença de tempos em tomada de consciência de novos objetos. A3 permanece registrando na folha o gráfico proposto na atividade e todo o grupo discute como fazê-lo. No entanto não incorporam a observação feita por A1 e A5, que constataram que o gráfico a ser feito é da função 1 sobre n e não da função real 1 sobre x. A1 e A5 não impõe sua “descoberta” mas se envolvem ativamente na discussão iniciada, trazendo observações e reforçando afirmações dos outros colegas, quando estão de acordo com elas:

A3: Onde que é o x cara?
A4: Aqui ó, botaram o x aqui. [apontando o eixo vertical]
A3: Não cara, esse é o y.
A4: Não vai para zero. [explorando a figura]
A3: Esse é o y e esse é o x cara. [Nesse momento A3 reforça que o x, que representa o domínio está representado no eixo horizontal, e o y, que presenta a imagem, está representado no eixo vertical]
A1: É, cuidado com o zero.
A3: Vai para lá.
A5: Ele está indo pra zero.
A3: Tá indo pra zero, só que nunca vai chegar. A5: É.
A4: É aqui também.
A3: Aqui também?
A4: É

A3: Pode escrever?

Destacamos aqui, novamente, a fase de elaboração da representação que em si torna-se *recurso para explorar ou explicitar propriedades* do objeto que está sendo representado, bem como para *formulação de hipóteses*.
A entrevistadora intervém, ao perceber que participantes estavam revendo a representação esboçada e pareciam se preparar para modificá-la. Abaixo apresentamos o esboço recolhido pela entrevistadora nesse momento. Embora haja a menção de que o zero não deveria estar incluído, esta observação não parece ter sido verificada.

Figura 19 – Esboço inicial da representação em sistemas cartesianos da sequência $\frac{1}{n}$



Fonte: Arquivo pessoal.

Nesse esboço podemos notar que o domínio utilizado pelos participantes se mantém como o conjunto dos números reais. Vale ressaltar que tal representação é proposta mesmo com os eixos rotulados como n e a_n.
A pesquisadora, vendo que os estudantes iam desmanchar com borracha o gráfico iniciado, intervém:

E: Cês querem outro? Podem usar... NÃO! Não! Pode deixar esse aí e pega outra. Faz outra, não tem problema.

A3: Ihh
A3: Mas ele não [TRECHO INAUDÍVEL]

A4: É um. Passa no um.
A3: No um. É aqui [apontando no gráfico o ponto correspondente a (0,1)]
A5: Ele passa no um.
A4: Não!

A4 percebe o equívoco de A3 ao interpretar incorretamente a sua menção ao "passa no um" .

A3: No um [TRECHO INAUDÍVEL]
A4: Isso, agora [TRECHO INAUDÍVEL]
A3: Eu falei que não mas fiz o gráfico da ln.
A4: Não, o da ln é assim. [fazendo um gesto com as mãos]
A3: Não, o da exponencial. A exponencial é assim. [denominando, erradamente, o gráfico de 1 sobre x como gráfico da exponencial].
A1: Cuidado com isso. Quando o x for negativo o y tem que ser negativo também.

O grupo decide fazer outro desenho da mesma sequência porque no primeiro desenho eles colocam o gráfico interceptando o eixo y, passando por $(0, 1)$, uma vez que identificam o gráfico de 1 sobre x como o gráfico da função exponencial. Continua a discussão sobre os gráficos do logaritmo e da exponencial. Ao trazer novamente a forma do gráfico da exponencial observação de A1 sobre o sinal da expressão 1 sobre x quando x é negativo, o participante A4 se conscientiza do conflito entre a resposta que estão elaborando para a atividade e a proposta dessa última.
A4: Tá, mas pera aí. Esse n aí tá pertencendo a que?
A1: É uma boa pergunta! É natural?

Nesse momento a pesquisadora intervém e reforça a proposta de que havia sido pedido que os participantes representassem graficamente a sequência um sobre n, uma vez que quando se trata de uma sequência numérica real, o domínio é sempre o conjunto dos números naturais. Após a fala da entrevistadora, quase todos os participantes concordam que o domínio vai ser natural. Ao seguir com o desenho, A3 é interrompido por A4 dizendo:

A4: Calma, então... Não tem... Ele vai diminuir, aqui não tem essa parte. [indicando no gráfico o trecho da curva que fora desenhado entre 0 e 1]
A3: Não tem?
A4: Porque o primeiro elemento é um, o segundo é meio, ele vai subindo pra cá entendeu? Não tem essa parte.

Nesse momento, usando a representação para *localizar valores específicos e fazer inferências* sobre a função, A4 utiliza *gestos para transmitir/comunicar uma informação /ideia*, a forma com a qual o gráfico vai parecer. Em seguida, os participantes conversam.

A5: O que ele tem que fazer?
A4: Não, ele não vai pra antes de um. Não é uma sequência?

A pesquisadora intervém, confirmando a observação de A4:

E: É uma sequência.

Os participantes prosseguem usando o *gráfico para explorar propriedades* da expressão algébrica da função:

A4: Então, ele não vai para menos de um. Ele começa no um.
A1: Sim.
A4: Então começa no um.
A3: Começa daqui pra cá.
A4: Não. Ele começa aqui e vem pra cá.
E: Por que?
A4: Porque quando n cresce,
A3: Pode crer, ele tende a zero.

A1 interfere, para confirmar o entendimento do domínio da função que está sendo trabalhada:

A1: Como n é natural.
A3: Exato.
Grupo murmura frases de concordância.

Ao se explicar novamente A4 utiliza *gestos para indicar uma informação / ideia*, relacionada ao domínio da função que querem representar. Mesmo que A4 não tenha terminado sua afirmação verbalmente, ao concordar com a afirmação verbal de A3, ele o fez *gestualmente, utilizando gestos para concordar com uma ideia*. Durante a discussão, tanto A3 quanto A4 recorreram ao diagrama presente no papel entregue a eles para expressar suas ideias e opiniões, inclusive avaliações sobre limites quando n cresce. Podemos dizer assim que o uso do gráfico elaborado pelos participantes juntamente com seus gestos teve como objetivo *transmitir ideias, reforçar hipóteses e sustentar argumentação*. Em seguida, A3 menciona o uso de diversas folhas de papel:

A3: Pô, vai acabar as folhas aqui.
E: Não! Eu trouxe bastante justamente por isso.

Mais uma vez A3 levanta um ponto, que é o uso demasiado de folhas de papel. Discurso esse que parece reforçar a inferência em análise anterior, no primeiro episódio, de um distanciamento da atividade, como proposta pela pesquisadora. Neste episódio ressaltamos a tomada de consciência pelos participantes de mais um aspecto da função a ser trabalhada na atividade, que define uma sequência real e portanto o domínio é o conjunto dos números naturais.

6.3 Terceiro Episódio: explorando representações

Os participantes retomam a questão do domínio da função a ser estudada, uma vez que entraram em acordo quanto ao seu significado.

A3: ele começa no 1 e vem para cá [apontando o ponto n=1 no gráfico que está sendo elaborado]
A4: é só, isso.
A3: fechado no um.
A4: é
A1: é
A3: fechado no um

A4 faz uma colocação a respeito da representação gráfica, que ainda não tinha sido feita:

A4: é, Tecnicamente você não teria nem a linha você teria só as bolinhas
A2: é, sim
A3: é. ½ 2, meio, 3 um terço,
A3: Certo, é faz sentido

Assim, a *representação visual reforça, ou faz emergir*, aspectos do conceito importantes de serem levados em consideração. Implicitamente A4 afirma verbalmente que uma vez que a sequência é uma função com o domínio nos números naturais então o gráfico não seria uma curva contínua, mas sim, um gráfico discreto constituído de pontos. Um modo semelhante à autocorreção que o estudante Chris faz após recuperar a definição de limite de sequência a partir do gráfico que desenhou, também usando uma linha contínua para representar uma sequência (PINTO,1998). Ao notar que A3, entrevistado que estava com a folha de papel e lapiseira, não havia esboçado nenhuma reação no sentido de registrar o gráfico no papel, A4 pega a lapiseira de A3 e desenha no papel. Nesse momento interpretamos que A4 utilizou *diagramas para representar visualmente um objeto* que todos haviam se declarado de acordo. É uma forma de uso da representação visual ? *a posteriori do compartilhamento do objeto*, para representá-lo de um outro modo.

6.4 Quarto Episódio: ressignificando propriedades

É a partir da representação visual proposta pelos participantes que entrevistadora tem *acesso aos aspectos construídos pelos estudantes sobre o objeto* matemático, que é a definição de sequências reais como funções reais, que por um momento parecia consolidada mas não era o caso. Para o professor, portanto, uma representação visual apresenta-se como uma *oportunidade para conhecer elementos da construção* que está sendo feita pelos seus alunos, inferindo elementos em sua imagem conceitual.

Ao analisar a transcrição da entrevista podemos notar que A4 anteriormente havia apresentado indícios de que estava utilizando os eixos de forma incorreta, invertendo domínio da função com sua imagem. Foi ao representar graficamente a sequência solicitada que, ele explicita esse equívoco. Dessa forma podemos notar o uso da *representação gráfica como forma de acessar conhecimentos*.

Então, com a expectativa de resgatar o conhecimento dos estudantes sobre planos cartesianos e funções reais, a entrevistadora intervém fazendo uma série de perguntas que buscam associar os conhecimentos prévios com o conteúdo abordado na entrevista.

E: É mas olha só pode mandar [os termos da sequência] para cá [apontando o eixo a_n]
A3: Ai caraca?
A4: É po...
E: Vocês estão vendo que os eixos estão ...
A3: Estão desproporcionais
E: Não estão desproporcionais não
A3: Não, desproporcional não, o y e o x está muito grande
A3: Tem alguma coisa para cá
E: Olha só eles estão... descritos
A3: A sequência para cá e
E: Isso
A4: Aqui é o dois fica no meio.
A2: É, isso.
E: Aqui eu faço também outra pergunta né ?
A2: Vai para lá
A4: É, isso aqui é assim, é assim [associando os valores no gráfico como usualmente fazemos ao representar funções].

Ao notar que os entrevistados estão equivocados com relação às propriedades de uma sequência, a pesquisadora intervém em uma tentativa de auxiliá-los a representar graficamente a sequência em um contexto familiar, que é o da representação de funções reais. Como a identificação parecia não ter sido completa, a pesquisadora busca explicitar o ponto em questão.

E: uma sequência vocês acham que uma sequência é uma função...
A2: sim.
E: Sim?

No que segue, A2 evoca uma imagem que ele associa a sequências reais definidas como funções, que precisa ser discutida. O desvio da proposta incial da atividade provocou a discussão:

A2: Uma função bijetiva
E: Bijetiva?
A2: Uhum
E: Tá. Por que ela é bijetiva?
A4: Não, bijetora não é
E: Toda sequência é uma função bijetiva?
E: Sim?
A2: Por definição.
E: Por definição? Qual a definição de sequência?
A2: Uma bijeção de ene em ene.

Nesse momento os entrevistados estão menos falantes que nos outros momentos, podendo isso ser uma evidência da falta de convicção a respeito da abordagem dos conceitos. Quando se diz bijeção de ene em ene, ele está se referindo a uma bijeção do conjunto dos números naturais no conjunto dos números naturais.

E: Bijeção de ene em ene?
A3: Não.
A2: É.
A4: Não necessariamente. Você tem a sequência 1 sobre ene.
E: Então você tem por exemplo a sequência xis ene.
A2: Ah, não, desculpa. De ene em erre, né?
A4: é.
E: Ok.

A2: De ene em erre, verdade.

De ene em erre, se quer dizer uma função cujo domínio é o conjunto dos números Naturais e o contradomínio é o conjunto dos números reais. Enfim, a definição de uma sequência real, expressa por um dos estudantes é compartilhada entre os participantes.
Nesse momento os entrevistados entram em um consenso de que uma função é bijetiva quando cada elemento do domínio está associado a apenas um elemento no contradomínio. A entrevistadora, acreditando que os entrevistados sabiam a definição de função injetiva, mas que estavam equivocados por talvez terem uma imagem de conceito muito restrita, apresentou exemplos que pudessem gerar conflitos com as imagens de conceito dos presentes.

E: Ok, de ene em erre. Beleza
E: Então a sequência que leva todos os xis enes no elemento um então ela não é uma sequência?
A4: Não, é uma sequência sim
E: É uma sequência
A5: É constante
A4: É não é bijetiva. É só injetiva.
E: Injetiva? Hum.... isso aqui é injetivo?
A4: É, todas os enes tem alguém.
A3: Tem alguém
E: Qual a definição de injeção?
A1: Só pode ter um!?
A4: Só pode ter um correspondente...

Inicialmente, para A4 a definição de função injetiva é identificada com a de uma função real definida em N. Nesse momento a entrevistadora percebe que o equívoco estava na definição do conceito de funções injetivas ? e talvez de função. Sendo assim, a entrevistadora intervém apontando a inconsistência. O tempo de resposta não é imediato nesse momento; corroborando a hipótese de que falta aos participantes familiaridade e domínio das definições abordadas. Este momento remete a inúmeros resultados de pesquisas sobre dificuldades dos estudantes com o conceito de função muito presentes na literatura (NASSER, 2017). Neste caso, dúvidas persistem mesmo após terem cursado as disciplinas de cálculo na universidade, como é o caso dos participantes desta pesquisa. Após o esclarecimento da entrevistadora, A1 apresenta uma definição formal de uma função injetiva.

A1: Para cada xis um diferente de xis dois efe de xis um diferente de efe de xis dois, é isso.
A5: Verdade, é, é.

Em seguida a entrevistadora utiliza o exemplo da sequência constante para mostrar que, segundo a definição apresentada por A4, a sequência é uma função cujo domínio é os números naturais não obrigatoriamente injetiva.
Vale observar que todas estas dúvidas e questões estão emergindo a partir de uma proposta de representar visualmente, em um gráfico, uma sequência específica. O que vai de encontro a uma análise já feita anteriormente: de que, para o professor, a visualização pode ser utilizada para ter acesso a concepções dos estudantes.

6.5 Quinto Episódio: explorando a definição de sequencias numéricas

A entrevistadora retoma a questão inicial que pedia que os participantes representassem visualmente a sequência 1 sobre n. Esclarecidas todas as questões evocadas sobre a definição de uma sequência como função que surgiram por conta da necessidade de se criar uma representação gráfica, a entrevistadora retoma a ideia inicial, de buscar na representação de uma função ? a função que "carrega a sequência" - elementos que auxiliem a representação gráfica de uma sequência numérica. Desta forma podemos entender o *uso de representações gráficas como problematizadoras de conceitos* trabalhadas na disciplina. Novas folhas de trabalho são distribuídas.

E: [...] Vocês estão dizendo para mim que uma sequência pode ser vista como uma função de ene em erre.
A1: Certo.
E: Como vocês representariam essa função nesse papel aí (Fig. 12)? No caso, eu estou falando agora, né, da função um sobre n.
A2: Bem, no caso é injetiva.

A entrevistadora intervém, e a resposta de A2, contradizendo sua classificação, é correta.

E: Nesse caso aqui, sim. Você pode ir até um pouco mais né? É bijetiva.
A2: Não, ela não cobre os reais todos.
A3: Alguém quer tentar, eu não faço a menor ideia.
A2: Não, ela não cobre os reais todos.

A3 retoma o turno de fala, iniciando a atividade:

A3: É a mesma coisa, só que pra cá?
A4: Pra cá é.

E: É verdade. Tá certo
A3: Um, um meio, um terço, um quarto.
A2: Não tem como cobrir os reais todos. De ene em erre.

Em seguida A3 estende a lapiseira a A4 indicando para ele tentar o registro escrito. [A4 já tinha mencionado anteriormente e de forma equivocada que o eixo vertical representava o domínio e o eixo horizontal era a imagem, o que não corresponde à prática comum.] Em seguida A4 pega a lapiseira de A3 e começa a escrever sobre o papel que está sobre a mesa de A3.
Nesse momento A4 desenha no papel entregue pela entrevistadora, A3 se entorta na cadeira para ver o que está sendo escrito e A5 se debruça em sua carteira para ter uma melhor visão do que está acontecendo. A1 e A2 seguem olhando a distância. Em seguida A3 retoma a folha que A4 estava escrevendo e começa a escrever. Os demais entrevistados permanecem hora de cabeça baixa, hora olhando o que estava sendo feito. Os entrevistados buscam na entrevistadora uma validação para o trabalho até então realizado. A3 então entrega o trabalho finalizado para a entrevistadora.
Em seguida, a pesquisadora pede que os entrevistados representem graficamente a sequência $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, com intuito de adicionar mais exemplos às imagens de conceito de representações visuais de sequências numéricas em planos cartesianos; uma vez que tal tipo de representação não é muito frequente nos cursos da universidade. Logo após a pesquisadora fazer a solicitação A3 e A4 começam a fazer gestos sobre o papel com a representação do plano cartesiano utilizando tais *gestos para representar ideias*. A2 expressa sua opinião utilizando apenas palavras e A1 e A5 olham sem interferir na nova produção.

6.6 Sexto episódio: contextualizando

Após a finalização do segundo modelo, a entrevistadora com a intenção de analisar os aspectos levantados pelos participantes a partir de diagramas, apresentou ao grupo, representações gráficas de sete sequências numéricas diferentes. (Figuras 20, 21, 22, 23, 24, 25 e 26) A intenção é a de trazer a noção de limite de sequência e de convergência *contextualizando tais objetos matemáticos por meio do uso de representações visuais*. Sequências convergentes são escolhidas como contexto que expõe uma diversidade de aspectos. Ao contextualizar o mesmo objeto (o conceito de limite de sequência) em diferentes situações ou contextos (sequências convergentes distintas e diversas), promovemos valores epistemológico diferentes para conhecer o objeto que está sendo representado (Scheiner e Pinto, 2016) .

Para cada representação apresentada, a pesquisadora coloca as seguintes perguntas: “O que a imagem está expressando?” e “O que vocês podem dizer sobre a sequência apresentada no gráfico?” .
A intenção é a de inferir aspectos da imagem conceitual sobre limite de sequências dos alunos,

evocada pela representação visual. (na perspectiva de Frege (Scheiner, 2016; Scheiner e Pinto, 2017), inferir os pensamentos evocados a partir do objeto representado visualmente). O repertório completo de sequências utilizado na entrevista contou com sete sequências diferente.

Figura 20 – Primeira sequência trabalhada.

Figura 21 – Segunda sequência trabalhada.

Figura 22 – Terceira sequência trabalhada.

Figura 23 – Quarta sequência trabalhada.

Figura 24 – Quinta sequência trabalhada.

Figura 25 – Sexta sequência trabalhada.

A primeira sequência apresentada aos participantes foi a sequência $a_n = k$, onde $k > 0$, representada geometricamente na figura 22. Imediatamente os participantes buscam a representação algébrica equivalente. Podemos entender como natural a reação dos estudantes. Afinal, em sala de aula, a professora não usou o recurso visual em sala de aula sobre sequências numéricas. A pesquisadora intervém explicando que não era a intenção fazer a conversão da representação visual para a algébrica. Corroborando uma cultura que privilegia representações numéricas e algébricas em detrimento de outros recursos, como destacado em (MATOS, 2016)

A3: Vixi... E a gente tem que dizer qual é.
E: Não, a gente não vai olhar para a... pra fórmula algébrica dela não. Eu só quero que vocês me

Figura 26 – Sétima sequência trabalhada.

Fonte: Arquivo Pessoal.

digam o que que vocês acham que essa sequência está representando. A sequência número 3.
A4: Três?

A entrevistadora esclarece o porquê de sua ênfase:

E: É. Três só pra eu poder saber quando eu tiver fazendo a análise do áudio, saber a que que eu tô me referindo aqui com vocês.
A3: Tá. Tem como [TRECHO INAUDÍVEL]?

A discussão prossegue, com A4 retomando o turno de fala:

A4: é uma constante.
A5: É, vai ser constante.

Novamente surgem as dúvidas a respeito do conceito de sequência numérica, e de sua definição como função.

A3: É uma constante, mas seriam só os naturais. Né?
A4: Não sei. Não necessariamente. Pode ser pi...
A3: Verdade. Não, mas aí vai ser constante.

Novamente a discussão entre A3 e A4 expõe dúvidas que pareciam já ter sido resolvidas.

E: Sequência constante?
A4: Quando n... número [TRECHO INAUDÍVEL].
E: Não entendi o que você quis dizer.
A4: Levando n naturais, em um número qualquer constante.

A4 não foi contestado pelos demais participantes; o que sugere o entendimento do aspecto por ele compartilhado.
No momento que A4 enuncia “Quando n... número [TRECHO INAUDÍVEL].” , ele faz apenas o gesto com as mãos de entrelaçar os dedos. Entretanto quando a pesquisadora coloca que não entendeu o que ele quis dizer, abrindo assim uma oportunidade para que ele explicasse sua afirmação, A4 se explica utilizando a mão e gestos como recursos. Inicialmente utilizando o dedo indicador aponta para o quadro onde a pesquisadora havia escrito anteriormente; em seguida com o mesmo dedo desenha no ar a letra N maiúscula enquanto fala “ene naturais” , uma seta quando fala “em” e utiliza ambas as mãos, com as palmas voltadas para dentro, em um movimento que faz parecer que ele estava desenhando parênteses quando fala “um número constante” . Ou seja, nesse momento, A4 usa *gestos como recurso para explicar/ tornar uma ideia mais clara*.

E: Todos os elementos da sequência
A4: Vão em um só.
E: Vocês podem dizer mais alguma coisa sobre essa sequência?
A3: Eu não sei se existe mas...
E: Hã?
A2: Converge.
E: Converge
A1: Mais infinito quando k positivo
E: Oi?
A1: ou k positivo.
E: Com k positivo?
A3: [TRECHO INAUDÍVEL]

Não foi possível fazer sentido da interação acima. Inferimos a partir do diálogo vários conflitos na intervenção de A1, envolvendo noção de convergência (mais infinito quando k é positivo, de limite (converge para infinito). Para retomar a discussão, a entrevistadora intervém, porque não houve contribuição dos participantes a partir da fala de A3. No diálogo a seguir, A3 reconhece o conflito com a representação gráfica, que a *visualização evidenciar dúvidas* sobre os conceitos que não foram expostas quando trabalhando algebricamente.

E: O que que você acha que define graficamente a convergência de uma sequência?
A5: [TRECHO INAUDÍVEL] constante
A3: Tipo, eu não sei lidar quem é o x e quem é o y. Sei lá, parece que tem que se aproximar de um certo y.
A4: É, você consegue achar um número... um número muito grande assim... você consegue achar

um menor ou maior
A3: É
A4: [TRECHO INAUDÍVEL] no outro também.
E: Vocês conseguem dizer mais alguma coisa dessa sequência?
A3: E aí? [TRECHO INAUDÍVEL]
Não sei mais nada
A2: Limitada né?
A3: Limitada?
E: Uhum...
E: Por que você acha?
A2: Monótona.
A5: É verdade.
A2: Monótona crescente e decrescente.
A5: Mas não pode ser monótona porque é, porque está dizendo que é constante.
A1: [TRECHO INAUDÍVEL] constante.
A3: Sim, e constante. Por isso é monótona, limitada.
E: Mas qual é a definição de monótona?
A3: Tá, se é constante é limitada.

Aqui a leitura do gráfico sugere propriedades das sequencias representadas; temos então um uso da *visualização para sugerir propriedades do conceito*. Segue o diálogo:

A2: Ela é oscilante né?
E: Oscilante?
A2: É, tem uma parada assim. ... Constante é um caso particular... de oscilante.
E: Constante é uma para... Constante é um caso particular ..?
A2: Da oscilante.
E: Por que você acha isso?
A2: Não, ainda eu não acho. Tinha um exercício disso.
A3: Cê é louco. Pra que falar disso cara. O cara já sabe o exercício.
A4: Para de chorar cara
E: aqui não tem certo e errado gente. Pode botar pra fora.
A3: é mas...
E: Ele falou que era monótona...

A fala de A3 provoca uma reflexão a partir da leitura da visualização, para *confirmar propriedades*:

A5: [TRECHO INAUDÍVEL] se ela oscila não seria monótona né? Uma hora está em cima e outra está em baixo.

No momento que A5 fala que para ser oscilante, ela não poderia ser monótona, a pessoa utiliza a mão para fazer um gesto de cima para baixo repetidas vezes, fazendo uma leitura da representação gráfica para *confirmar propriedades* e utilizando então *gestos para reforçar uma ideia*.

E: É, você falou que ela era monótona e agora você falou que ela era oscilante. Ela pode ser as duas coisas?

Nesse momento a entrevistadora faz essa indagação a fim de tentar utilizar informações presentes no discurso de A2 que possam auxiliar na identificação das sequências que ele denomina como oscilantes.

A2: Aí não sei. Ela não vai ser monótona não. Não sei.
A4: Monótona é que só cresce?

Ao indagar se monótonas são aquelas sequências que apenas crescem, A4 utilizou a mão para indicar um movimento ascendente, utilizando portanto *gestos para representar comportamentos*.

A5: É, só cresce, é.
A4: [TRECHO INAUDÍVEL]
A5: Ou então, então...
A3: É, a constante é monótona, não é?
A2: É,
A5: Ela pode ser também cons... Pode ser também...

A5 também utiliza mão para representar a ideia de que constante seria algo que não tem variação, e para tal ela faz um gesto com a mão no sentido horizontal, o que mostra uma noção da representação gráfica de funções reais constantes. Ao notar nos participantes traços de um comportamento que busca no pesquisador sinais para validação ou reprovação das informações apresentadas, a pesquisadora reafirma:

E: Gente, não adianta olhar pra mim que eu não vou dizer se tá certo ou tá errado.
A4: Não, mas aí dá uma dica.
E: Agora, agora não estou mais dando aula. Agora eu só estou entrevistando vocês.
A4: A monótona é a que não muda né? A direção do...

A2: É
A4: do crescimento.
A2: Pois é.
A4: Então, [TRECHO INAUDÍVEL]. Nesse caso seria aqueles casos particulares. Tipo, vazio.
A2: É.
A4: Tipo, é tudo mas não é nada.
A2: É crescente e é decrescente
E: Certo.

Nesse momento a pesquisadora utiliza um vocabulário que levou ao entendimento dos participantes que havia uma validação por parte da entrevistadora acerca das informações discutidas. Sendo assim, a entrevistadora mais uma vez reforça que durante toda entrevista ela não classificará os pensamentos como certo ou errados, mas que apenas está ali para coletar o dados sobre o conhecimento deles.

A3: Aí!
E: Certo é só que é certo que eu entendi o que vocês queriam. Não é certo de está certo, porque eu já falei, eu já falei que hoje agora, a partir de agora
A4: Então fala ok assim
E: Ok, é ok. Obrigada
A2: Supimpa.

Em seguida a entrevistadora propõe explorar a sequência número 5, que é uma representação da sequência $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ como na Figura 24.

E: Supimpa! Então vamos lá! A sequência número cinco.
A3: Ixie.
E: Quê que vocês podem falar dessa sequência?
A4: Ah, essa sequência.
A2: Essa aí é o ln de x.
A1: É ln de x.
A4: A mesma coisa. Tem... Ela é...
A3: Mas tem um espaço bem grande aqui.
A2: Ln converge ou vai para mais infinito?
A3: Mas é convergente também.
E: Não foquem
A2: É
E: Na forma algébrica. Eu quero é que vocês digam o que vocês estão vendo e o que que vocês

em...
A2: Parece que converge.
E: Parece que converge, por que?

Uma vez que a um dos objetivos era analisar a percepção dos entrevistados acerca da convergência de sequências, a pesquisadora solicitou que os participantes elaborassem um pouco mais suas respostas sobre a análise da convergência da sequência apresentada. Próximo gesto ou uso de representação visual por A3 provoca a seguinte reflexão em A2:

A2: Parece que converge.
E: Parece que converge, por que?
A3: Parece porque ela está indo e mantendo o y. [aqui o "y" é uma posição constante]

Nesse momento A3 faz um gesto todo com a mão representando o comportamento da função, expressando uma assíntota ao gráfico da qual a sequência se estabiliza, para comunicar sua *leitura de propriedade visual sugerida no gráfico*. Nesse momento A3 está utilizando o *gesto para reafirmar uma ideia*. Por outro lado temos o seguinte relato de A2:

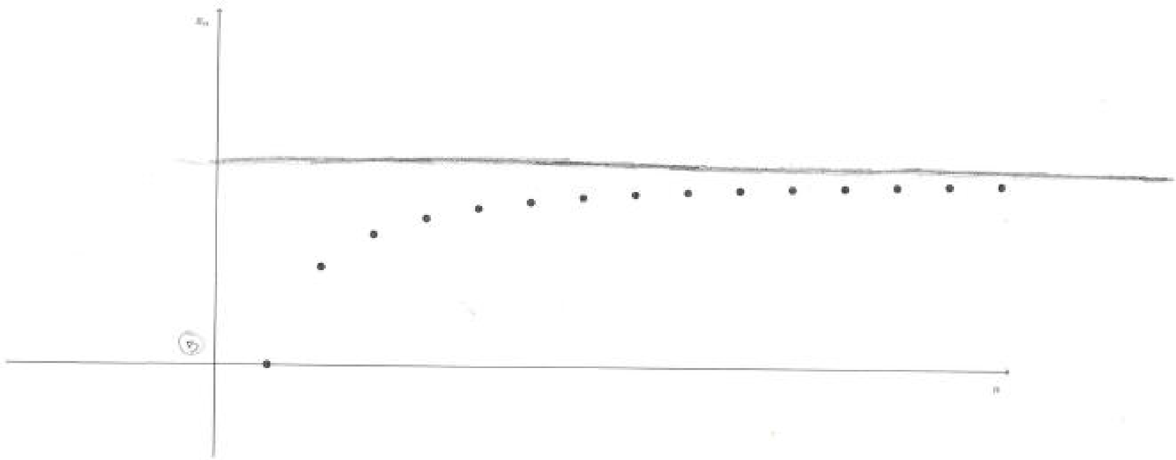
A2: Eu achava muito estranho
E: Assim...
A2: uma parábola ir para mais infinito porque parece que ela vai...

Nesse relato podemos identificar que para A2, por vezes as *representações visuais podem induzir a um pensamento equivocado*. Seu gesto com a mão é de uma função que vai crescendo, sempre, mas em sua fala, afirma que é difícil entender que a parábola vai pra infinito. Talvez na verdade sua dificuldade seja em entender que a função possua uma imagem real para todo x, seja ele qual for. A3 retoma a fala:

A3: Abrindo né? É porque, assim olhando pra figura.
E: Aqui vocês têm que se prender ao que vocês estão vendo. Vocês não vão pensar na forma algébrica. Só na parte gráfica
A3: Olhando pra figura eu diria que tem um assíntota aqui.
A2: Parece que é convergente.

Nesse momento A3 desenha com a mão sobre o papel utilizando o *gesto para reforçar uma ideia*. O diálogo segue:

Figura 27 – Sequência com linha desenhada pelo participante.



Fonte: Arquivo Pessoal.

A3: E que está se aproximando dela, mas que não vai encostar nunca.
A4: Mas você não pode afirmar né? A3: Claro!
A4: Você tem que ver... A...
E: Onde você acha que essa assíntota estaria?
A4: Ela pode ser só uma parábola que está de lado
A3: Sei lá, aqui.

Aqui elementos da imagem conceitual evocados revelam o conhecimento matemático em construção. O desenho feito por A3 é apresentado a seguir.

O diálogo prossegue com a discussão sobre a convergência ou não da sequência, explicitando um descontentamento sobre a ausência da representação algébrica daquelas funções. Afinal, como já mencionamos, durante a apresentação do conteúdo na sala de aula de análise a representação trabalhada foi a linguagem algébrico-formal. As propriedades foram deduzidas algebricamente e conjecturas forma demonstradas.

A2:É, talvez ela seja y=ax
A4: É.
A3: Sei lá, por aqui.
A2: L de xis mais um.
E: [TRECHO INAUDÍVEL] passando por esse ponto aqui?
A3: Acho que...
A4: Não depende do crescimento que for né? Tem coisas que convergem e não convergem.
A2: ln de xis menos um.

A3: é, eu acho que seria algo desse tipo.

Podemos ver que novamente os participantes retomam a questão da forma algébrica da sequência o que pode indicar um *uso de representações visuais como uma representação alternativa à representação verbal-simbólica*.

6.7 Sétimo episódio: reafirmando práticas

A pesquisadora busca retomar a proposta inicial da atividade, que é explorar a representação visual.

E: O que eu estou falando é o seguinte: pegando o desenho, vocês acham o que dessa sequência?
A3: Eu acho que seria...
A2: converge
A3: ... uma assíntota assim e ela convergindo pra lá, entendeu? [Fazendo gesto com a mão representando uma curva que se assemelha ao gráfico apresentado]
A4: Não, sim, mas... eu tô falan...
A2: Fala!
A4: Não, é isso. Eu também acho isso. Mas eu também acho que também depende.
A3: Do que?
A4: Se, dependendo do tipo, de.... de... Porque a gente está vendo só o desenho. Entendeu?
A3: Ah sim, não.

Neste instante A4 reitera a cultura a que vem sendo introduzido no curso de Análise Real, e na universidade, de um modo geral. Ao trazer à tona essa prática que está sendo introduzido, explicita aspectos da sua aprendizagem, como enculturação em uma nova prática matemática. No entanto, para retornar à atividade, a pesquisadora intervém novamente:

E: Aqui, agora, é para se focar no desenho.

A4 reafirma e esclarece seu entendimento:

A4: Mas tem desenhos parecidos com isso que vão para mais infinito. Só isso que eu queria falar.
A3: Ah, sim, é. Tá.
A4: O desenho em si não fala nada entendeu?
A3: Tá.

Em síntese, nesse trecho podemos mais uma vez notar o discurso de que por vezes os desenhos podem levar a pensamentos equivocados. Vale ressaltar que A4 afirma ainda que: “o desenho em si não fala nada” , o que mostra um detrimento do uso de diagramas quando comparado à representação verbal-simbólica. Aqui pode haver uma relativização: o que o desenho ou a visualização falam, para futuros matemáticos, e principalmente para futuros profissionais que se preparam para lecionar na escola básica?
A pesquisadora provoca os estudantes novamente:

E: O que mais vocês podem falar dessa sequência?
A4: É monótona, crescente.
A3: Crescente. Pô, é monótona também porque só cresce?
A2: É limitada.

Nesse momento, ao falar que a sequência é crescente A4 utiliza a mão para fazer um gesto, que acompanha o desenho da sequência, o que mostra que apesar de A4 afirmar que o desenho não diz nada, o uso de representações visuais faz parte do seu repertório de estratégias para fazer e dar sentido ao conhecimento matemático. A3 ao afirmar que a sequência é monótona também utiliza a mão para fazer um desenho no ar que se assemelha ao desenho da sequência apresentada no papel, utilizando o *gesto para confirmar/questionar uma ideia*.

A3: Ela é limitada. Tipo eu posso afirmar, que por baixo pelo zero e por cima pela assíntota que a gente não sabe quem é?
E: Não vou dizer se está certo.

A interação a seguir torna mais clara a incorporação de valores relacionados ao fazer matemática.

A3: Não, eu tô perguntando se tipo, olhando pro desenho eu posso afirmar isso? Porque aqui não dá pra afirmar se ela para, se começa do zero.
A5: Porque não sabe se veio inferiormente né?
A3: É.
E: Vocês tem que deduzir isso do desenho.
A3: É, do desenho parece que sim.
A5: é.
A4: É, parece que sim.
A3: E aí? Em todas as paradas, nisso eu concordo.

Nesse trecho podemos ver que mais uma vez os estudantes relativizam a "indução de informações" por incorporarem a impossibilidade de "dedução de informações" a partir da representações gráficas. Estes são elementos de aprendizagem das regras e normas da matemática nas universidades. A incorporação de tais valores e regras se devem a um repertório vasto de exemplos com características que moldam, suas visões nesse sentido. É o que nos sugere desenvolvimento a seguir.
Posteriormente A4 reafirma as dúvidas expressas pelos colegas narrando um fato ocorrido em sua vida acadêmica.

A4: Porque assim, o meu primeiro professor de matemática desenhou um triângulo, e falou assim: o que é isso aqui? Aí todo mundo falou que era um triângulo. Ele falou que não, é um quadrado. Aí todo mundo falou: por que? Aí ele falou assim, é um quadrado [fazendo gesto com a mão como se representasse o professor escrevendo no quadro]. Pronto, entendeu? O que importa é o que está escrito, não o desenho.

Nesse relato o discurso do professor que ensina matemática de valorização da representação verbal-simbólica desautoriza os sentidos, em particular o visual, o que pode explicar a necessidade incorporada por A4 de analisar a representação verbal-simbólica da sequência.
A entrevistadora então reforça que por vezes é possível desenhar representações visuais que sugerem características que os objeto não possuem, mas que essa não foi a intenção no caso dos exemplos apresentados. Após a explicação da entrevistadora, ela retoma a proposta da atividade.

E: ... Mas nesse caso aqui a gente só quer analisar o que que a gente pode dizer do comportamento da sequência a partir desse gráfico. Tá? Então vocês conseguem dizer mais alguma coisa?

Entrevistados 2 e 3 falam mas não é possível distinguir o que. Os demais evocam o que lhes parece ser sugerido pelas representações apresentadas pela pesquisadora.

A5: Eu notei que ela é limitada inferiormente, né? É o que parece.
A3: É, pensei nisso. E superiormente também.
A5: Não, aí você não sabe.
A4: É.
A3: Mas olhando para o desenho
A4: O desenho não rebate.

Depois dessa fala os participantes permanecem em silencio. Por entender que os entrevistados haviam esgotado o debate sobre a função, a entrevistadora decide então seguir para a próxima sequência. A folha apresentada a seguir foi a representação gráfica da sequência $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$. O gráfico é o apresentado na figura 25.

E: Agora a sequência número 6.
A3: Ó, ihhh, pô, essa daqui parece aquela que a gente desenhou. Só que seria o contrário.
A3: Não, não faz sentido.
E: O que vocês podem dizer dessa sequência?
A4: Olha, esse aqui é o maior número, esse aqui é o menor. Agora não consigo ver se está chegando mais próximo do zero.

Ao fazer tal inferência, A4 utiliza o lápis para mostrar no papel os pontos que está se baseando para fazer tais afirmações, nesse momento podemos entender que A4 utilizou do d*iagrama para justificar uma afirmação*.

A3: Cara, parece que não. Parece que ela está mantendo uma constante, tá ligado? Do terceiro [TRECHO INAUDÍVEL] em diante.
A1: Parece que daqui para cá está decrescendo, mas
A3: É, parece que parou nesse terceiro número né? E de baixo pra cima também está...
A2: A partir de algum momento ela é oscilante.
E: O que você quer dizer com oscilante?

Como não havia ficado claro anteriormente qual o conceito de sequência oscilante, a entrevistadora pede que o estudante explique o que é uma sequência oscilante.

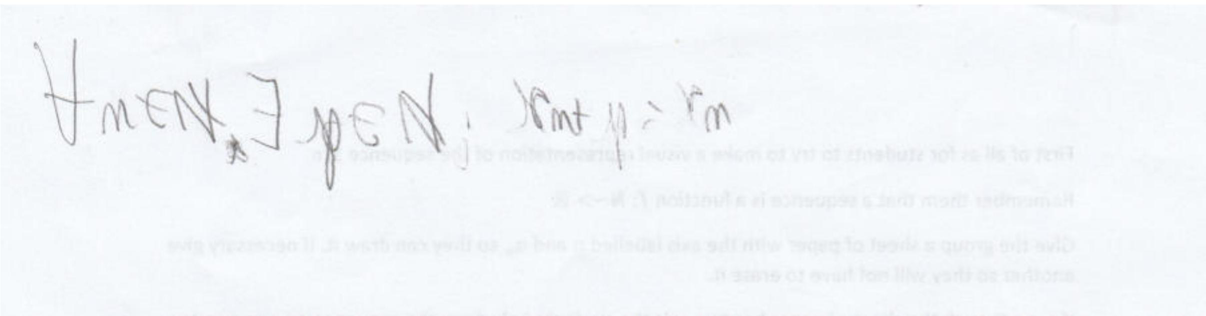
A3: É, oscilante, é isso que eu ia te perguntar? Eu posso desenhar uma onda tipo seno?

Aqui A3 retoma, novamente, a "função que carrega a sequência" que ele quer discutir. A fala de A3 pode ser um indício que nem os outros participantes estavam cientes do que A2 denominava sequência oscilante.

A2: Eu diria que para todo ene natural, existe pê natural tal que xis ene mais pê igual a xis ene.
A3: É muita informação.
A2: Círculo.
E: Eu não... escreve aqui para mim.

Com intuito de entender melhor o que A2 estava dizendo, a pesquisadora pediu que o participante escrevesse numa folha de papel o que havia sido dito. Ao ler, a entrevistadora entendeu que na verdade estava se referindo as sequências periódicas.

Figura 28 – Definição apresentada por um estudante para sequência oscilante.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Vale ressaltar que na definição apresentada, podemos notar uma grande quantidade de símbolos matemáticos, e ausência de palavras para explicar. O que pode ser outro indício do forte apelo à matemática verbal-simbólica ao qual os licenciandos são apresentados durante a graduação. Enquanto A2 escrevia, os demais colegas olhavam o que estava sendo feito. Ao finalizar a escrita, A3 segurou o papel e começou a fazer perguntas sobre aquela definição. A discussão se segue com A3 tentando fazer sentido da definição, e A1, A2 e A4 tentam explicar. Um exemplo dado pelos participantes foi a função $f(x) = seno(x)$, um vez que essa função é comumente apresentada como um primeiro exemplo de sequência periódica.

6.8 Oitavo episódio: evocando construções teóricas

Finalizada a discussão, a entrevistadora busca retomar a proposta da pesquisa, ao pedir que os participantes falassem o que eles poderiam falar sobre as propriedades daquela sequência.

E: E agora? O que que vocês podem dizer?
A3: Tá, essa aqui...
A4: Não converge.
E: Hã?
A4: Não converge...
E: Não converge?
A3: Não.
E: Por que você acha?
A4: Duas subsequências aqui... indo para lugares diferentes... [Aqui fala mostrando com o lapis os caminhos seguidos pela sequência]

Podemos notar nesse momento, que mesmo que a fala esteja sendo baseada no desenho, em sua justifica existem traços da definição verbal-simbólica como critério para não convergência de uma sequência, a saber o fato que duas subsequências convergindo para valores diferentes implica na não convergência da sequência. Aqui, um outro elemento indicando aprendizagem do que fora trabalhado em sala de aula: argumento dedutivo, fundamentado não na definição de convergência e de limite, mas em um teorema estudado. O que quer dizer que a representação visual pode ser *recurso para evocar resultados teóricos*.

A1: É
A2: É, tipo, um, zero, um, zero
A4: Exato.

No momento que A4 afirma que a sequência não converge, ele utiliza de um *gesto para corroborar uma hipótese*. Novamente após a fala dos entrevistados, a entrevistadora busca retomar o ritmo da discussão perguntando se havia mais alguma coisa que os participantes poderiam falar sobre a sequência.

E: Mais alguma coisa que vocês podem dizer sobre ela?
A2: É, como se fosse menos k a k.
E: Eu não entendi.
A2: Em módulo ela é constante, né? Parece.
E: Em módulo ela parece constante.
A1: Isso aí eu já não posso dizer.
A3: Cara, é o que eu acho.
A4: Como é aquela parada do módulo? Tinha uma parada do módulo? Que converge.
A2: É, de série. É.
A4: É, totalmente... É, como é?
A2: Série absolutamente convergente.
A3: Isso!
A3: Ela converge em módulo.
A4: Converge para isso aqui. Para esses aqui, para esses números aqui. [Fala isso fazendo um gesto com o lápis sobre o papel]
A3: Aí no caso seria absolutamente convergente? Por conta disso? Se o módulo é convergente.
A4: Mas não é convergente.
A3: É, se fosse o módulo talvez sim.
A4: Só o módulo.
A3: Enfim.... [Fala entregando a folha para a entrevistadora]
E: É tudo o que vocês podem dizer dessa sequência? Vocês falaram que ela não converge, né? [Pergunta mostrando a sequência para todos].
A2: Não é monótona.

E: Não é monótona. Mais alguma coisa?
A3: É limitada
A4: E o módulo dela... converge.
E: O módulo dela converge.
A3: Com toda certeza é limitada. Tanto inferior quanto superiormente.
A2: Sim.

Em seguida, mais uma vez a entrevistadora faz um uso equivocado de palavras que faz com que os entrevistados acreditem que ela estava validando as informações dadas por eles, entretanto mais um vez ela reitera que as informações fornecidas não seriam categorizadas como certas ou erradas, mas que apenas compões o corpo de dados da pesquisa. Em seguida, informa que vai apresentar o último exemplo.

E: Olha só. Agora vou apresentar o último exemplo.
A3: Ixie... Ih caraca.
A4: Calma, não tem dois.
A3: Não, coloca uns dois dedos aqui, vê, ó, o módulo converge.
E: Hum? O módulo converge? Mas e essa sequência?
A2: Não.
E: Mais alguma coisa que vocês podem dizer sobre ela?
A3: Oscilante.
E: Oscilante. O que mais?
A3: Tô pegando.
A4: [TRECHO INAUDÍVEL]
E: Limitada.
A3: Cara, isso parecia, parece, tipo, eu chutaria tipo menos n elevado a n.
A2: Hã?
A4: Não.
A3: É cara.
A4: Menos n elevado a n...

Ao falar menos ene elevado a ene, podemos interpretar A3 utiliza as mãos para sinalizar que o segundo ene a que se referia estaria numa posição mais acima na notação, uma vez que se encontraria no expoente Podemos notar que novamente os entrevistados voltam à questão da forma algébrica. Isso pode ser interpretado como um sinal da importância atribuída à representação verbal-simbólica.

A3: É.

A4: Não.
A3: Que aí quando for ímpar tá no negativo.
A2: Elevado a uma parada que cresce absurdamente.
A4: Não cara, ele ia crescer... Bizarramente. Ia ser menos um elevado a n. [A4 faz gesto com a mão, um movimento crescente, com a ponta do dedo descrendo uma trajetória que se parece que o gráfico de função exponencial no ar]
A2: Cresce mais do que fatorial.
A3: Pô, show, isso.

Podemos aqui ver mais uma vez a tentativa por parte dos participantes de retornar a forma algébrica da função, apesar de para reforçarem suas hipóteses, utilizarem gestos e desenhos. Vale notar que todos os participantes ao explicarem suas ideias e hipóteses utilizaram de alguma forma de representação diferente da verbal-simbólica. Resultados teóricos se articulam à argumentação.

E: Gente, sem pensar na forma algébrica.
A4: Mas ele perguntou.
A3: Não, é, é, eu falei ene mas deveria ser uma constante qualquer. É...
41E: Sem pensar na forma algébrica.
A3: Tu entendeu o que eu quis dizer?
A2: Cara, menos ene e ene.
A3: Mas não necessariamente menos ene, tipo, ele falou menos um. Daria. Por que aí se fosse menos um elevado a um número ímpar dá negativo, tá ligado? E a um par está em cima que é positivo. E eles aparentemente tem a mesma distância
A2: Ah... menos um elevado a ene vezes k.
A3: É.
A4: É.
A3: Aí o que eu pensei. Aparentemente tem a mesma distância do eixo x. Então por isso.
A2: Xis.
A3: é, enfim. Por isso também que o módulo converge. Vai estar aqui em cima. E aí?

Mais uma vez os participantes utilizam a forma algébrica da função para fundamentar suas hipóteses e ideias. Em seguida os participantes engajam em uma discussão que no momento ninguém percebe estar incorreta. Os participantes confundem o conceito de série absolutamente convergente. Elon (2017) define que uma séria $\sum a_n$é absolutamente convergente quando a séria $\sum |a_n|$ é convergente, ou seja, uma série é absolutamente convergente quando a série formada pelo valor absoluto dos termos da série também é convergente. Tal conceito não se aplica ao conceito de sequências. A entrevistadora não interveio, a menos quando solicitaram dela uma validação e ela informou que naquele momento não responderia se as afirmações feitas estavam matematicamente corretas ou não.

6.9 Nono episódio: complementarizando

Em seguida a atividade proposta teve a intenção de promover reflexões dos participantes sobre as representações de sequência exploradas para reelaborar, ao *complementarizar* (Scheiner e Pinto, 2018) características dos contextos diversos ? as sequências convergentes, aspectos da noção de limite de sequência. Os processos que buscamos explorar foram o de provocar os estudantes para evocarem identidades parciais entre os diferentes contextos estudados, para projetar gradativamente e seletivamente estes domínios conceituais como um contexto híbrido novo, refletindo a estrutura do conceito de limite de sequência. Para iniciar a atividade, a entrevistadora informou que apresentaria todas as sequências abordadas naquela entrevista.

E: Tá. Agora eu vou apresentar para vocês todos os exemplos que a gente viu agora.
A3: Tem a forma algébrica aí? Delas?
E: Não vou falar. Eu tenho, em outro momento eu até posso apresentar para vocês. No momento, por questões de pesquisa,

Mais uma vez os participantes retomam a questão da forma algébrica, talvez como forma de validação ou de busca por informações anteriormente apresentadas (como a forma visual das sequências não foi apresentada, talvez os participantes estivessem buscando formas alternativas de acessar o conhecimento anteriormente abordado com outros professores e em outras disciplinas). Nesse momento, a entrevistadora foi interrompida por A3, quando esse a informa que uma sequência não havia sido apresentada anteriormente (a sequência 4). Ao confirmar com os demais participantes, a pesquisadora removeu as demais representações de sequências e deixou apenas a que os entrevistados ainda não haviam analisado.

A3: Bom, é convergente.
A4: É.
A5: É.
E: Por que ela é convergente?
A5: Parece.
A3: Porque tanto por baixo quanto por cima está indo pro mesmo lugar.

Ao fazer tal afirmação, A3 utiliza a lapiseira que está em sua mão para descrever sobre o papel (mas sem escrever) o que ele percebe o comportamento da sequência e *estabelece relações entre objetos*, ou seja, que os termos da sequência estão se agrupando em determinada região do gráfico. Trazendo aqui uma noção geométrica relacionada a acumulação de pontos no plano, ou seja a limites:

A2: Assíntota.
A3: Tem uma assíntota aqui no meio, tá ligado?

A2 ao mencionar assíntota também realiza com a mão um gesto. Tal gesto consiste na mão descrevendo uma trajetória retilínea, que podemos interpretar como sendo um *gesto para reforçar uma ideia/hipótese*. Novamente, ao mencionar a assíntota, A3 utiliza gestos com a mão e com a lapiseira para descrever o comportamento da função, ou seja, ele está utilizando *gestos para reforçar uma ideia/hipótese*.

A4: E ela é absolutamente convergente porque o módulo dela converge pro mesmo lugar, inclusive.

A4 faz um gesto com a mão que podemos identificar como sendo uma forma de representar uma reflexão com relação ao eixo x, um vez que o gesto com os dedos dá a ideia de reflexão horizontal. Podemos então entender que A4 está utilizando *gestos para representar/reforçar uma ideia/hipótese*.

A3: Módulo?
A5: É.
A4: Não, aqui é zero.
A3: Aqui é zero.

Nesse momento A4 percebe que sua afirmação não é verdadeira, uma vez que toda a sequência está na parte positiva do eixo a_n.

A4: Mas tudo bem cara.
A3: O módulo vai ser ela mesma.
A4: Não, pera. Não é negativo, por isso eu tô...
A5: É, não [TRECHO INAUDÍVEL]
A4: Não é negativo filho. É positivo.
A3: Sim cara.
A4: Mas o módulo não vai fazer crescer, não.

A4 fala novamente fazendo gesto com a mão que parece representar uma reflexão horizontal.]

A3: Tá, vai continuar sendo ela.
A4: Tá bom.
A1: Não deixa de ser.
A3: Então continua... Você está certo.
A4: É, tô certo.
A2: Você pensou que isso fosse o zero.
A4: É.

A2 ao falar fez um gesto com a mão sobre o papel que podemos entender como *gesto para representar uma ideia/hipótese*. Da mesma forma, A4 faz também um *gesto para corroborar uma hipótese* com a mão. A fim de reforçar ainda mais sua afirmação, A4, toma da mão de A3 a lapiseira e mostra no papel, dessa vez utilizando a lapiseira como instrumento para apontar, a que se referia como sendo a linha que para ele estaria representado o eixo das abscissas e em seguida devolve a lapiseira.

A3: Entendi, arrasta aqui... Tá, é limitada inferiormente e superiormente. Convergente. Não é monótona. Não é isso?
A4: Isso
A2: Isso.
A4: Não é monótona.
E: Tá, o que mais vocês podem dizer?
A3: Convergente, não é monótona.

Nesse momento os participantes estão apenas falando sem realizar quaisquer movimentos que pudessem ser interpretados como tendo qualquer impacto nas suas respostas. Os participantes passam então a discutir se a sequência poderia ser periódica, mas que nesse momento eles estavam denominando por oscilante.

A2: Mas também não é oscilante.
A3: Ah é, isso que eu ia falar. Também não parece oscilante. Não sei.... É, pode ser...

Ao falar que não sabe, A3 faz gestos com a mão que contém a lapiseira para cima e para baixo, se assemelhando a uma curva senoidal. Podemos interpretar que nesse momento A3 estava utilizando g*estos para verificar propriedades*.

A4: O que?

A3: Oscilante.
A2: Creio que não.
A3: Parece...
A4: Não não, se converge...

Nesse momento a um longo momento de pausa, que parece ser causado pelo pensamento introspectivo dos participantes. Nesse momento, vários conceitos foram evocados, revisitados e trazidos em discussão.

A4: Porque não tem como

A4 fala fazendo um movimento com as mãos em formato de C, se mantendo a mesma altura da esquerda para direita, mas tem sua fala interrompida por A3 que fala mais alto.

A3: Se eu limitasse até aqui [fala apontando para o papel, mas não é possível identificar no vídeo a qual parte da representação estava se referindo] por exemplo, eu poderia falar que ela é monótona.
A4: Oi?
A1: Não pelo seguinte, se você somar o pê aqui
A3: Não, não vai voltar
A1: Não vai voltar para o mesmo lugar.

A1 fala utilizando o dedo mindinho para apontar a que pontos na representação estava se referindo. Dessa forma podemos entender que A1 estava utilizando *gestos para justificar uma hipótese* assim como para *reforçar uma ideia*.

A3: É, pode crer.
A2: Nunca volta.
A1: Nunca volta.
A não ser que você chega ao... ao limite.
A2: É.
A3: E aí?
A4: isso aí.
A3: Acabou?
A1: Eu acho que sim.
E: Ok.

Ao falar que a sequência não poderia ser oscilante (periódica) porque ela é convergente, podemos ver que os participantes utilizaram o diagrama para explorar propriedades e verificar ideias. Em seguida a pesquisadora retoma o encaminhamento anteriormente feito, que era o de apresentar todas as sequências que haviam sido trabalhadas durante a entrevista. A pesquisadora então faz a seguinte proposta:

E: Olha só, agora olhando para todas essas representações, o que vocês podem falar sobre elas?

As sequências trabalhadas foram, nessa ordem, $a_n = 1/n$; $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $a_n = 2$; $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$;$a_n = \frac{-1}{n} + 1$; $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$; $a_n = (-1)^n$.

A3: É, todas são limitadas.
E: Uhum...
A3: hum...
A4: Eu ainda tô bolado com aquela ali.
A3: Com essa?
A4: Com a três, é.
E: Oi?
A4: A três para mim não significa nada.

Nesse extrato podemos mais uma vez os participantes utilizando a representação gráfica para *verificar propriedades*. Como as sequências haviam sido expostas na mesa, e ainda não havia sido formalizada uma ordem, A4 chamou de sequência três a sequência $a_n = \frac{-1}{n} + 1$. Notado esse problema, a pesquisadora então mostrou aos participantes qual era a ordem que deveria ser utilizada, para que as informações dadas pelos participantes coincidisse com a nomenclatura previamente feita pela entrevistadora. A discussão segue com os entrevistados fazendo sentido da organização proposta pela pesquisadora.

A4: É, eu estava falando do cinco.
A5: É limitada [TRECHO INAUDÍVEL].
A3: Dois, três, quatro, cinco. É...
E: No que elas são semelhantes? Podem falar o que vocês quiserem.
A3: Eu ia falar [TRECHO INAUDÍVEL]
A4:Fala
E: Põe pra fora.

Com objetivo de relaxar o grupo e descontrair, pois já estavam sendo entrevistados por volta de trinta minutos a entrevistadora falou em tom de brincadeira “põe pra fora” .

A3: Todas são pontinhos.
A4: Todas são pontinhos. É.
E: Todas são pontinhos, isso não é idiota.
A4: Não, isso é verdade. Você pode [TRECHO INAUDÍVEL]
A3: É, não é uma função contínua né? Contínua não é aquela que escreve sem tirar a caneta do papel?

Nesse momento A3 foi capaz de resgatar parte da discussão feita no início da entrevista sobre a questão do domínio da "função que carrega a sequência" , que nesse caso é o conjunto dos números naturais. Além disso, podemos ver na fala de A3 o *uso de diagramas visuais para verificação de propriedades e para resgatar conhecimentos prévios*.Quando A3 fala "Contínua não é aquela que escreve sem tirar a caneta do papel" o entrevistado faz um gesto com a mão como se desenhando no ar, talvez utilizando *gestos para estruturar uma conjectura*. Além disso podemos ver também o uso de uma justificativa gráfica para uma propriedade verbal simbólica.

A5: Mas e aquele intervalo? Quer dizer, quer dizer que tem intervalos aí então?
A3: é.
A4: Todas elas são limitadas inferiormente. Isso eu posso garantir. Agora eu não posso garantir que essa aqui é limitada superiormente. E eu vou ser chato com isso.
A3: Eu ia falar que é.
E: Pelo desenho você acha que você não pode dizer isso?
A4: Não, claro que não.

Nesse momento podemos ver um esforço dos participantes em buscar somente através das representações gráficas da sequência apresentar algumas propriedades das sequências, ou seja, nesse momento podemos notar nos participantes o uso de *diagramas e representações visuais para verificação de propriedades*. Por outro lado, podemos ver ainda intrínseco no discurso de A4 uma certa ressalva com relação ao que se pode afirmar baseado nos gráficos por conta do que acontece com o gráfico da função quadrática, onde o gráfico por crescer de forma bastante acentuada faz parecer que a função tem um comportamento assintótico. Em seguida a entrevista é brevemente interrompida por um estudante da universidade pedindo um carregador de celular emprestado. Em seguida a pesquisadora retoma a entrevista como segue.

E: Quais são as similaridades? Vocês podem falar o que vocês quiserem.
A3: Quais são o que?
E: Quais são as similaridades? O que que elas, o que tem em comum.
A3: Tem em comum?
A1: todas elas?

E: O que vocês quiserem. Se vocês quiserem selecionem um exemplo...
A3: Eu diria que a 1, a 2, a 4, e a 5 convergem para um determinado k.
A2: Essa não? [Fala apontando para o papel]
A3: Eu falei, é a 4.
A5: Essa aqui é a 4 não?
A2: Essa aqui
A3: Ah, não, pode crer. A 3 também.

Apesar de as sequências terem uma numeração escrita, podemos notar que a organização ainda gera um pouco de dúvida nos entrevistados. Mais uma vez os entrevistados são capazes de extrair das representações visuais mais algumas propriedades das sequências, e nesse momento o que surge é o *uso de diagramas e representações visuais para verificar a convergência de sequências*.

A4: Aquela ali a gente não sabe.
A3: Qual.
A2: Como assim?
A4: A 6 é. Não sabe
A3: Não, a 6 e a 7 não.
E: Não o que?
A3: Não converge.
A4: E a 5 também não.
A3: A 5 vou ser chato e fala que converge.

As sequências 5, 6 e 7 foram apresentadas nas figuras 24, 25 e 26.

Mais uma vez A4 acredita que o gráfico da sequência 5 não converte por seu gráfico se assemelha com o gráfico da função $f(x) = x^2$. Já A3 afirma que a função vai ser convergente talvez por acreditar que todos os pontos estão se aproximando de um determinado valor. Notando uma diminuição na fala dos participantes, a pesquisadora retoma o turno de fala a fim de incentivar os participantes.

E: Tá. Vocês podem dizer mais alguma coisa? O que elas têm de diferente?
A3: Ah velho.
A4: Algumas só são com relação ao módulo
A3: Cara, eu posso ser abusado e falar que essa parece a inversa daquela? A inversa não mas, mas essa parece ser o módulo dessa. [Fala apontando para as sequências 1 e 5]
A5: A inversa não.
A4: Não, não.

A2: Não.
A3: Não, não. Pode crer. As duas são positivas. Pensei que... É porque o risco que eu fiz estava me confundindo. [A3 estava se referindo a linha feita na Figura 27].
A5: É.

Apesar de tanto A3 quanto os demais colegas concordarem que a afirmação foi equivocada, podemos notar que A3 utiliza de *diagramas e representações visuais para analisar/verificar propriedades*.

A1: Uma é crescente e a outra decrescente.
A3: é, isso.
A5: é.
A3: Isso eu posso afirmar.

A1 fala se referindo as sequências 1 e 5. Podemos notar na fala de A1 o uso de *diagramas e representações visuais para explorar propriedades*.

A4: Tem alguma [TRECHO INAUDÍVEL] os dois.
A3: Cara. As duas parecem e essas duas também. [Fala apontando para as sequências 2 e 4].
A1: Parecem que são um deslocamento da função;

Novamente podemos ver na fala de A1 o uso de *diagramas para explorar propriedades*. Apesar de até o momento nada ter sido falado sobre o tópico, A1 menciona uma translação da sequência, o que pode ser confirmado através da forma algébrica mencionada anteriormente. O diálogo continua.

A5: Aquelas duas lá não são iguais, são diferentes.
A2: Não.... são... parece que deslocou para cima entendeu? No caso essa daqui foi deslocada para cima, entendeu?
A5: Sim, sim.
A3: Vamos supor que aqui fosse, sei lá, menos três. Deslocou três pra cima.
A5: Tô entendendo.

Enquanto A3 explica para A5 o porquê de achar que as são uma a translação da outra, ele sempre aponta para o papel, talvez utilizando as *representações visuais como uma base para explicação.*

A4: É verdade. Ali, naquela ali a gente tem uma que é absolutamente convergente. [TRECHO INAUDÍVEL] não necessariamente. Na outra também. Ai, saco.

A4 fala de longe e a pesquisadora nota que depois seria difícil interpretar sobre quais funções A4 estava se referindo, ela então pede que A4 utilize a numeração escrita nas sequências para auxiliar na análise de dados. Em seguida, A3 mostra novamente de que forma as sequências estão organizadas. Talvez por conta da intervenção da pesquisadora, A4 não fala mais sobre a sequência e quem retoma o turno de fala é A2.

A2: Essa aqui parece uma coisa maluca, tipo o número de ouro. [Fala apontando para a sequência número 4]
A3: Então o 7 para cá que aí os ímpares estão aqui. Qual o número de ouro?
A2: Essa parece aquela coisa maluca lá, número de ouro, sequência de Fibonacci que converge para um número que ela vai fazendo assim e pá.
E: Gente, sem pensar na forma algébrica.
A3: Mas não tem como.

Novamente os participantes recorrem para a forma algébrica, e quando pedidos para que não o fizessem, A3 afirma não ser possível. Podemos interpretar tal comportamento como um refúgio, uma vez que como representações visuais de sequências não foram muito utilizadas pela professora, os estudantes não se sintam tão confiantes em fazer afirmações nesse âmbito, o que não acontece com as formas verbais-algébricas, que foram amplamente utilizadas em diversas disciplinas.

E: Só na forma gráfica.
A2: Mas eu não falei a forma algébrica, só falei um exemplo.
Podemos notar na fala de A2 a relevância, que não é notada, dada à representação verbal-simbólica, uma vez que os participantes de forma talvez involuntária acabam voltando a ela.
A4: O que elas têm de diferente.
A1: A 4 parece a 3 deslocada, a gente [TRECHO INAUDÍVEL] para cima..
A2: Essa aqui parece essa [Fala apontando para as sequências 6 e 7]
A5: É, parece.
A3: Cara, essa parece que foi espelhada e deslocada. [Fala apontando para a sequência 5]
A5: Não, não essa aqui é constante essa daí, está vendo? Essa aqui é constante. [Fala apontando para a sequência 5]
A4: É, ela faz assim. [Faz um gesto enquanto fala de zig zag na vertical com a mão]
A2: É, a menos desses iniciais aqui.
A5: É.

Após a retomada do turno de fala por A4 voltando para a questão proposta naquele momento, os participantes se engajam no processo de analisar as representações visuais e nesse momento podemos notar que os participantes foram capazes de *descrever propriedades a partir das representações visuais/diagramas*. Nesse momento todos os participantes tiveram um turno de fala, o que pode ser um sinal de maior confiança para falar. Ao notar que os participantes não tinham mais nada a acrescentar, a entrevistadora então muda o foco das perguntas da questão da convergência para o que os participantes identificariam como sendo uma sequência mais geral.

E: Tem uma dessas representações que vocês acham que é mais geral do que outras?
A3:Como assim?
A4: Como assim, mais geral?
E: Que ela seja uma representação de sequência mais geral.

Esta foi uma questão que não foi bem formulada. Nesse momento os entrevistados demonstraram certo desconforto com a questão da entrevistadora, uma vez que o conceito de sequência mais geral não foi muito explicado pela pesquisadora. Essa foi uma escolha feita a fim de evitar qualquer viés que pudesse comprometer a resposta dos entrevistados. Sendo assim, a pesquisadora propôs a seguinte questão.

E: Tem uma dessas representações que vocês acham que é mais geral do que outras?
A3:Como assim?
A4: Como assim, mais geral?
E: Que ela seja uma representação de sequência mais geral.

A expressão dos participantes demonstra certa dúvida nesse momento, mas alguns participantes decidem tentar.

A5: Essa daqui. [Fala apontando para a sequência 1]
A2: É.
A3: Ah... Qual?
A4: é, a 3 e a 1. Aliás,
A5: Essa aqui.
A4: A 5 e a 1.
A3: 5 e a 1.
E: A 5 e a 1 são mais gerais?
A4: É, elas têm mais características.

Ter uma característica comum é um bom entendimento como "geral" . Esta característica poderia ser, por exemplo, a existência de assíntotas horizontais, ou os termos da sequência se aglomerando em um ponto no plano, a partir de certo momento. Mas aí neste caso não haveria uma, dentre as sequencias exploradas, com esta característica. Os participantes fazem afirmações, mas sem demonstrar muita confiança. Ao notar um traço de uma informação subjacente que justificaria a resposta dos alunos, a pesquisadora volta as suas perguntas a fim de explicitar esses pontos.

E: Quais características?
A4: Uma é decrescente, converge.

A entrevistadora entende que neste momento A4 está buscando exemplos de generalidade em cada um dos exemplos, quando na verdade a entrevistadora está pedindo um exemplo que seja mais geral que os demais.

E: Não, eu quero que você dê um exemplo que seja mais geral. Me dê um exemplo que você ache que seja mais geral que os outros?
A3: A Constante?
A1: [TRECHO INAUDÍVEL] as monótonas.
A3: Eu pensei na constante. Eu diria a constante.
E: Por que?
A3: Monótona, convergente, limitada, se ela é monótona não é oscilante.
A4: Mas as outras também são
A3: Sim, mas ela pediu um exemplo geral. A que possui mais coisa é ela.

A fala de A3 indica que para ele, a função mais geral é a constante, uma vez que agrega diversas características diferentes.

A4: Mais geral, mais geral?
E: Vocês podem discordar dele.
A4: Eu discordo de A3.
E: Qual você acha que é mais geral?
A4: A 1 e a 5. Eu acho mais geral.
A3: Tá, mais um exemplo. Eu vou ser chato com isso.
A4: Como assim um exemplo? Eu não entendi.
A3: Ela quer um. Das sete que tem, que você fale um que você acha

A4: Você quer que eu escolha [TRECHO INAUDÍVEL] mas tem que escolher só um.
A3: é.
A4: Ah tá, então a um eu acho mais geral.
E: Vocês podem discordar. A2, você concorda?
A1: Eu acho que a mais geral seria a 2.
E: 2?
A3: 2?
A4: Dois é aquela lá.
A3: A 2, porque você juntou a 1 com a 3.
A1: É a que tem mais variação. Aqueles exemplos que vocês escolheram são muito.... específicos.
A3: Pode crer.

Nesse momento os participantes estão voltados a entender o que em suas concepções torna uma representação mais geral que outras. Os participantes verificaram, após incentivo da pesquisadora, que as visões do que seria uma representação mais geral poderia ter diferentes baseadas nas concepções do indivíduo.

A2: Não é monótona, não é...
A1: Sim, exatamente.
A2: Só é convergente.
A1: Só não pode ser aquelas mesmas coisas.
A3: É, me sinto convencido.
A2: Não é monótona, não é oscilante.
A1: Você tem a parte negativa, [TRECHO INAUDÍVEL] convergir.
A4: Eu sei agora, você tem que ter duas características, né?
A3: Sim, mas ele conseguiu juntar a 1 e a 5 como você queria em uma só.
A4: Não, mas não tem as mesmas características.
A2: É, e essa aqui né? [Fala apontando para a sequência 4]
A3: [TRECHO INAUDÍVEL]
A1: Porque eu, ainda falando da 2, porque ela tem negativos.
A2: A, sim.

Ao explicar seu ponto de vista, A1 mostra para os participantes uma versão de mais geral que talvez fosse diferente das que tinham antes, o que é sugerido pelas frases de confirmação feita pelos colegas. Para A1 uma representação mais geral seria aquela que agregasse uma maior quantidade de características, o que segundo ele, não acontecia com as representações selecionadas anteriormente pelos colegas. Nesse momento A5 se atenta para um outro fato.

A5: Uma coisa também, não sei se tem a ver, os espaços. A4: Como assim?
A3: Entre
A5: Os intervalos
A1: Para mim eles parecem igualmente espaçados.
A4: A, talvez uma divisão, assim... não faz diferença.
A3: É, tipo, aquelas primeiras estão mais perto.
A4: Não, é impressão sua. A lá, é ilusão de ótica.
A3: É.
A2: Vamos brincar de ligar os pontos.
A3: Calcular a distância.

A distância no eixo horizontal é a mesma, afinal o domínio de uma sequência é o conjunto dos números naturais que são igualmente espaçados, mas talvez por conta das distâncias variarem de acordo com cada sequência, a representação visual pode ter levado A5 a acreditar que o espaçamento fosse diferente. Os colegas verificaram que tal fato não era verdade, mas não utilizaram nenhum método verbal ou visual para justificar o porquê a afirmação não era verdadeira. Entendendo que os participantes apresentaram suas ideias de forma satisfatória e que já possuíam um arsenal de ideias e representações, a pesquisadora iniciou a parte final da entrevista. O objetivo era que os participantes, em grupo, produzissem um diagrama que representasse, na visão deles, uma sequência mais geral.

E: Não? Então agora, é a última coisa que eu vou pedir para vocês fazerem hoje, vocês conseguem criar para mim uma sequência que vocês definam como mais geral?
A3: Putz.
E: Que agora vocês falaram que, você disse que a 1
A3: Mas eu não sei qual seria a definição de mais geral. Ele me convenceu quando disse que tipo, se eu fosse fazer uma sequência qualquer eu chegaria mais próximo daquela.

Mais uma vez os participantes se deparam com um conceito que não está muito claro para eles que é a de uma sequência mais geral, e novamente, existe um pouco de hesitação ao falar ou produzir um registro.

E: Então tá, vou mudar a minha pergunta. Vocês conseguem fazer uma representação que junte todas as ideias de todas essas aqui?
A2: Não,
A3: Aí não.
A2: Porque não tem como ser [TRECHO INAUDÍVEL] do que isso.
E: Não? Mas você acha que você não consegue juntar as ideias de forma nenhuma?

A2: Sim, talvez com a constante, por exemplo.
A4: Pode desenhar todas juntas né?

Nesse trecho há traços na fala de A4 que podem indicar que em sua visão a representação gráfica de uma sequência que será mais geral será aquela que agregará mais características. Como por diversas vezes os participantes se voltaram à forma algébrica, a entrevistadora decidiu intervir de forma a tentar quebrar com essa ligação, explicando que pensar na forma algébrica poderia estar limitando as possibilidades de representações por conta da falta de uma representação algébrica única.

E: Pensa no seguinte:
A4: Botar o primeiro ponto da 1, o segundo da 2, o terceiro da 3.
E: Nem toda sequência ela tem uma fórmula geral. Algébrica. Perdendo isso de vista.
A4: Aqui aqui.

A4 que anteriormente havia mencionado que uma representação mais geral poderia ser uma que fosse formada por pontos que pertencessem a todas as sequências, continua com sua ideia.

E: Tirando isso, falando só da sequência na representação gráfica. Vocês não acham que, pode deixar depois eu pego, vocês acham que vocês conseguem juntar todas essas ideias numa única sequência?
A4: Eu consigo.
E: Consegue?
A3: Ele consegue.
A4: O primeiro ponto
E: Não! Desenha aí! Pode desenhar, por favor.
A4: Vou desenhar.

A4 foi o único participante que demonstrou qualquer menção de produzir um registro baseado na solicitação da pesquisadora. Os demais estudantes ficaram apenas olhando.

A3: Sinta-se a vontade.
A4: Me dá todas as sequências.
A5: Quer todas aqui?
A4: Quero?
A3: Tu vai pegar um ponto de cada?

A4: Um ponto de cada. Aí cada subsequência vai ter todas as características possíveis. É a coisa mais geral possível.
A3: É, faz sentido, mas...
A1: Isso se os valores de x forem diferentes.
A3: Em cada unidade.
A1: Em cada um dos pontos.
A4: Não, mas aí vocês está [TRECHO INAUDÍVEL]
A5: [TRECHO INAUDÍVEL]
A1: Tipo, xis 1 do gráfico 1 se diferente do xis 1 do gráfico 2
A4: Mas quando você está lidando com as subsequências você ignora os outros. Você só lida com os da subsequência que você escolheu.
A1: Ok.
A4: Aí tem todas as características possíveis. Quando você vê como um todo é uma bagunça. Tô com preguiça de desenhar.
A3: Ah, para.

A4 então passa a desenha uma sequência que tem como elementos pontos de todas as sequências trabalhadas. Para A4 a sequência mais geral será aquela que agregará o maior número de características, mesmo que olhando ao todo não se possa notar isso. Em sua fala podemos notar que para A4 basta selecionar determinados pontos, seguindo um padrão, para que as características sejam percebidas.

Enquanto A4 desenha A5 auxilia organizando as sequências que haviam sido apresentadas pela pesquisadora, A1 e A2 olham a distância e A3 mexe no celular. Alguns momentos depois, A1 questiona o que estava sendo feito.

A1: O que está esperando ele desenhar?
E: Um exemplo, uma representação que traga, una todas as ideias de todas as sequências que foram apresentadas.
A4: Aí a minha ideia foi, botar o primeiro do primeiro, o primeiro do segundo, tarará. E assim pra sempre. Aí vai ter todas as características.
A3: [TRECHO INAUDÍVEL]
A4: [TRECHO INAUDÍVEL] a dois e a um.
A2: Essa daí não vai ter nenhuma cara.
A4: Não, vai ter subsequências que vão ter, você pode escolher qual subsequência você quer e tirar todas as características.
A2: Mas a sequência em si não tem.
A4: Em si não tem nenhuma. O que torna mais geral ainda. Porque além de ter todas as caracte-

rísticas não tem nenhuma.
A2: Mas será que não vai ser convergente?
A1: Como é que você vai conseguir...
A4: Não, não vai ser convergente.

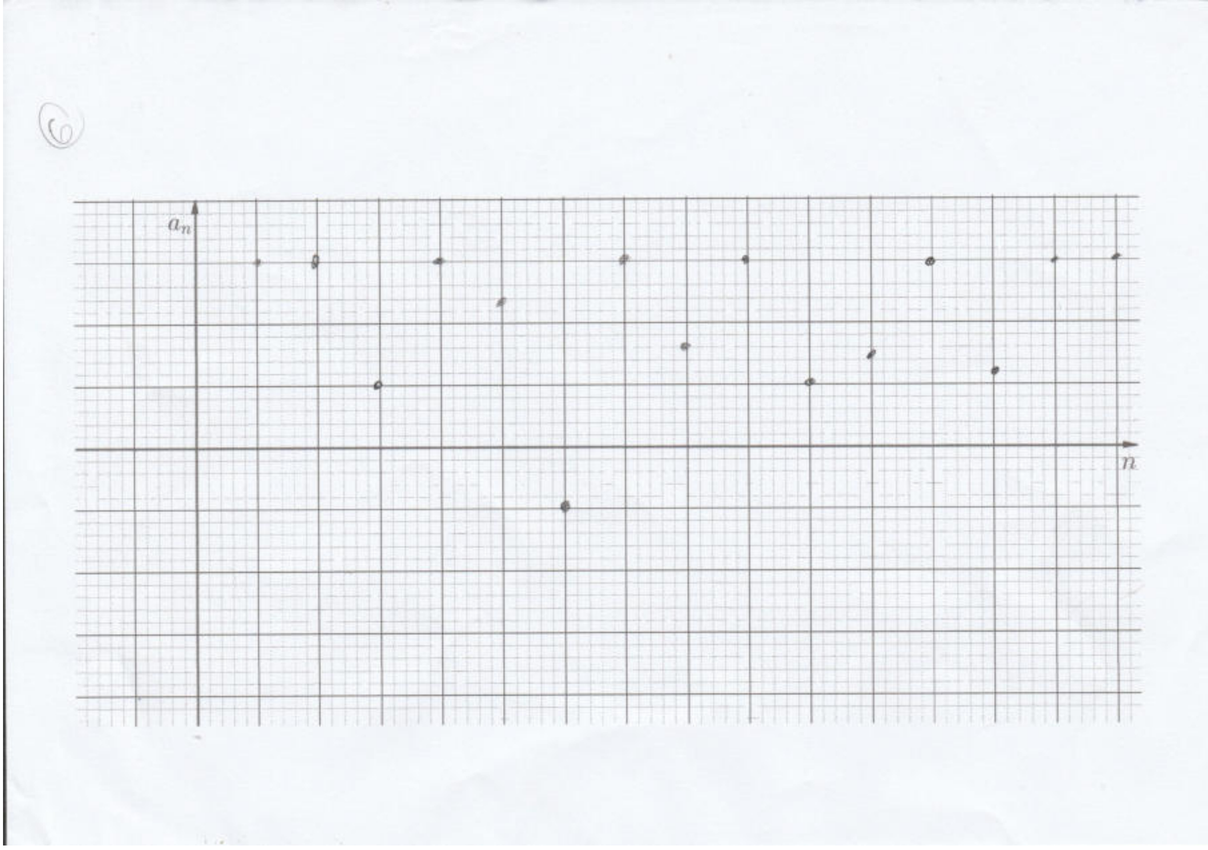
A4 retoma um ponto discutido anteriormente, que é o da convergência da sequência. Aqui podemos ver o uso de *diagramas para resgatar conhecimentos anteriores e para exploração de propriedades.*

A2: Não porque com oscilante.
A4: Mas as subsequências vão ser.
A1: Exatamente.
A4: Oi?
A1: Mas...
A2: A menos daquela vai ser [TRECHO INAUDÍVEL]. A menos daquelas duas oscilantes vai ser convergente.
A3: Entendi.

A fim de concluir o que os participantes entenderam como critério de convergência de uma sequência graficamente, a entrevistadora utiliza a representação gráfica feita pelos estudantes para questionar qual seria graficamente o critério de convergência para a sequência produzida.

E: O que que vocês acham que deveria acontecer ali naquele desenho para que elas convergissem. Para que ela convergisse. A gente está falando agora dessa sequência.
A2: Existe um épsilon.
E: Não, falando no desenho.
A3: Maior que zero.
A2: Para todo.
E: Esquece que a gente sabe álgebra.
A4: Ó, nesse desenho, não, não converge.
A1: A gente vai ter que.... Falando pelo desenho
E: Voltamos a cinco séculos atrás.
A1: Pra convergir tem que que passar uma reta paralela a x
A4: Cara, tecnicamente, olha só, tecnicamente você pode você pode
A3: E todas elas se aproximarem
A1: E todas elas irem se aproximando cada vez que
A4: Olha só, calma, todas elas, calma, todas elas têm um ponto, é, são limitadas superiormente, você concorda?
A3: Certo

Figura 29 – Sequência mais geral produzida pelos participantes.



Fonte: Arquivo Pessoal.

A4: Se você escolher o mesmo ponto para ela ser limitada superiormente elas vão convergir para esse ponto máximo.
A3: Mas inferiormente também
A2: Não, elas podem convergir para um outro ponto também. Mais em baixo
A3: É. Acabou contigo.
A2: Pode convergir para dois lugares diferentes. Eu acho.
A4: É, se eu pegar [TRECHO INAUDÍVEL] elas vão para lugares diferentes então, não converge. Se eu pegasse... sei lá
A1: Você ia ter que limitar o domínio para ela ser convergente pro lugar que você quer.
A3: [TRECHO INAUDÍVEL]
A4: Calma
A1: Se conseguir.
A4: É isso.
A1: Pra x um e x dois você consegue, mas pro resto... Talvez.
A4: Aí a cinco
E: Vocês conseguem dizer alguma coisa dessa sequência?
A2: seja épsilon maior que zero.

A3: Para todo épsilon maior que zero existe um... Fala aí cara.
A2: n zero.
A4: Aqui eu tô falando, se você for, todas elas convergem para o algum lugar. O teu ponto superior. Se você...
A1: [TRECHO INAUDÍVEL]
A4: é, porque tem as negativas né? Que não convergem at all, assim...
A1: Tipo assim, se você pegar essa daqui
A4: Se você pegar o módulo delas
A1: está convergindo para onde?
A3: Pra nada.
A1: Só pegar essa parte aqui.
A4: Tá, você está falando, você pega as oscilantes então e você pega o módulo delas.
E: A gente pode pegar pedaços e falar que nesse pedaço a sequência converge? A5: Pode ser uma subsequência?
A1: É, se for uma subsequência... Mas nem toda subsequência convergindo pro mesmo lugar então....
A3: A sequência não converge.
A4: É, mas você pode forçar isso.

Mais uma vez vemos no discurso dos participantes um argumento verbal-simbólico sendo utilizado. Ao falar que nem toda subsequência convergindo pro mesmo lugar fará com que a sequência não seja convergente é um argumento verbal-simbólico utilizado para justificar a não convergência de uma sequência. Além disso, podemos inferir também que o uso do termo módulo vem erroneamente sendo usado, uma vez que se referem ao módulo quando querem fazer um reflexão horizontal de alguns pontos, mas nem sempre com relação ao eixo x.

E: Forçar como?
A4: Ué, você movendo.
A1: Como forçar essa, esse ponto xis um e xis dois convergirem pro mesmo lugar dessa xis três e xis cinco?
A4: Você pega todas que convergem e leva pro mesmo lugar, e as que não convergem que são as que, são mais e menos, mais e menos, você pega o módulo delas. Você põe o ponto, convergindo.
E: Sem falar em álgebra.
A4: Mas eu não estou falando em álgebra.
E: Você está falando módulo.
A4: Quem, eu falei em módulo?
E: Falou.
A3: Falou em que?
E: Módulo

A5: Módulo.

Talvez os participantes pudessem ter a ideia de que o módulo faz uma reflexão com o eixo das abscissas, mas ao utilizar o termo módulo ao invés de reflexão eles estão fazendo a escolha de utilizar termos algébricos à geométricos.

A1: Que senão seria, a mesma coisa que dizer que você consegue fazer aquela sequência... Posso? [Pergunta se pode pegar uma das sequências apresentadas anteriormente]
E: Claro.
A1: Que nessa...
A3: Vamos falar menos ela quando ela é negativa e ela quando é positiva.
A1: .... aqui converge.
E: Qual é essa?
A1: Ahhh.... sete.
A4: Não, essa não converge.
A1: Então, eu tô dizendo que você conseguiria fazer a mesma coisa para ela convergir.
A4: Não, só tô usando a um.
A3: [TRECHO INAUDÍVEL]
A1: Então, olha só. Da mesma forma você consegue manipular essa daqui pra fazer ela convergir.
A4: Sim, sim. Mas [TRECHO INAUDÍVEL] uma regra, não dá pode roubar.
A3: [TRECHO INAUDÍVEL]
A4: É, pera, tem alguma característica daquela
E: Como é que você quer roubar? Desculpa, não entendi.
A4: Não, usando álgebra, é.
A3: Usando álgebra
E: Não, usando, esquece a álgebra.
A4: é, então. Exato.
A3: É, porque a regra do jogo é assim.

Nesse momento os participantes não deixam claro de que forma eles pensaram que poderiam manipular a sequência de forma a fazê-la convergir, mas talvez não tenham se dado conta que na verdade estavam utilizando estratégias geométricas para fazê-la, uma vez que não tinham a forma algébrica das sequências e portanto não seriam capazes de fazer manipulações algébricas da forma correta para fazer com que a sequência convergisse.

E: A gente conseguiria fazer essa aqui convergir? [Fala apontando para a sequência criada]
A3: Eu acho que não
A4: Se você pegar só os pares dessa aqui e botar aqui sim.

E: Botar aqui onde?

A4: Botar nesse gráfico aqui. Por exemplo, esse aqui, é esse aqui .

E: Mas como você vai fazer isso? Repetindo isso aqui e depois colando isso aqui depois? Ou você colocando isso aqui depois?

A4: Não, olha só. Eu não entendi o que você falou.

E: Então fala para mim como você pretende fazer ela convergir porque eu não entendi.

A4: Olha só... Todos os.... os... as....

E: Os pares aqui, que estão acima do gráfico.

A4: Exato. Você vai botar nesse gráfico. Os ímpares você ignora. Por construção.

E: Tá.

A4: Os outros são os que convergem, você constrói de uma maneira que eles convirjam a um ponto que você escolheu, esse ponto que você escolheu.

E: Você consegue desenhar? O que você está pensando, aqui?

A4: Cara, mais ou menos

E: É que fica mais fácil pra eu entender.

A1: No caso você quer selecionar o x que você vai querer usar.

A4: é, você vai selecionar.

E: Então, desenha aí pra mim.

A1: No caso o n

A4: Você só pode ter um de cada um né, então... É tipo... é estranho

E: Só pode ter um de cada um por quê?

A4: Um ponto de cada vez porque... como a parada é.... uma função, você não pode ter um n com dois valores. [TRECHO INAUDÍVEL]

E: Pensa que você está querendo fazer convergir uma sequência.

A4: Cara, vocês, vocês entenderam o que eu quis dizer?

E: Tenta desenhar

A3: Mais ou menos

E: Por favor

A4: Fica difícil. [TRECHO INAUDÍVEL] fica muito grande

E: Faz mais juntinho os pontos, ao invés de fazer tão separado.

A3: Usa os quadrinhos pequenos.

A4: Tá, eu vou fazer meio que... De qualquer jeito mas...

Os participantes ainda discutem um pouco enquanto A4 faz uma nova tentativa, dessa vez criando uma sequência que seja convergente.

A4: Tá bem bizarro.

E: Tá, mas explica pra mim o que você fez por favor.

A4: Olha só, eu botei, eu botei meio que a moda... que eu quis.

A3: A lá vontê.

A4: A lá vontê.

E: aham.

A4: Todas as sequências que você mostrou

E: Aham.

A4: Eu botei aqui.

E: Aham.

A4: E as que não convergem, eu excluí os pontos que... eu achei que iam.... é...

A3: Dar problema.

A4: É, não... Fazer dar.... é, [TRECHO INAUDÍVEL], exato. E eu escolhi um ponto... é, no caso o 1... agora não, cinco

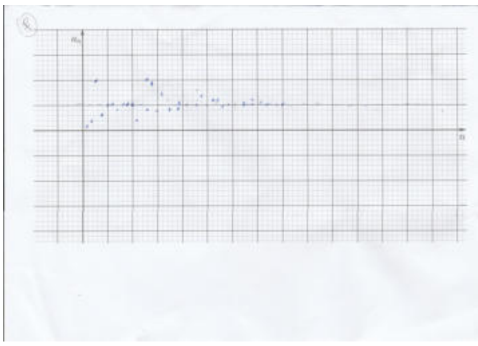
A3: y igual a um, sei lá

A1: n.

A4: Tanto faz, n. Para ser o ponto de convergência. E todos os que são constantes eu botei nesse ponto. E todos que estão crescendo eu botei pra variar pra esse ponto e todos que estão fazendo assim, eu botei pra ir pra esse ponto e todos que estão fazendo assim. Mesmo que a... [TRECHO INAUDÍVEL] chato, estão convergindo pra esse ponto.

A sequência produzida é apresentada na Figura 30.

Figura 30 – Sequência mais geral convergente produzida pelos participantes.



Fonte: Arquivo Pessoal.

A pesquisadora então agradece a participação de todos e reforça o combinado de se encontrarem novamente na próxima aula. É interessante perceber a tentativa dos estudantes ? excluindo o que poderia “dar problema” e incluindo o que é “permitido acontecer” , e propondo uma estrutura para o conceito de limite de sequências contextualizado na sequência convergente da Figura 30. Se retomarmos a proposta do estudante Chris quando escreveu sua definição formal de limite de sequências, arriscamos a dizer que há similaridades.

6.10 Síntese dos resultados da análise

A análise do material produzido é sintetizada utilizando procedimentos metodológicos da Análise Temática, já iniciado nas sessões anteriores. Ao longo da apresentação da transcrição das entrevistas, rótulos ou categorias foram destacadas em itálico, identificando modos como os participantes usavam modalidades de representação dos objetos matemáticos distintas da algébrico simbólica, Destacamos o uso de representações visuais e de gestos. Na tabela a seguir, temos a categorização inicial, a partir de 50 rótulos ao longo do texto analisado.

Modalidade de representações	Rótulos ou categorias iniciais
Representações visuais	Sugerir propriedades (a serem conhecidas)
	Contextualizar
	Recurso para evocar sentidos
	Recurso para explorar propriedades
	Recurso para formulação de hipóteses
	Recurso para explicitar propriedades (conhecidas a priori)
	Recurso para particularizar (localizar pontos específicos)
	Recurso para fazer inferências
	Explorar propriedades da expressão algébrica
	Reforça aspectos do conceito
	Faz emergir aspectos do conceito
	Representação a posteriori do compartilhamento do objeto
	Acesso aos aspectos construídos pelo outro sobre o objeto matemático
	Oportunidade para conhecer elementos da construção
	Acesso a concepções do outro
	Inferir aspectos da imagem conceitual
	Evidenciar dúvidas que não emergem ao trabalhar com a representação algébrica
	Sugerir propriedades
	Confirmar propriedades
	Leitura de propriedades visuais
	Oportunidade para conhecer elementos da construção
	Dar sentido ao conhecimento
	Recurso para transmitir ideia
	Reforçar hipóteses
	Sustentar argumentação
	Representar um objeto
	Justificar uma afirmação
	Verificar ideias
	Base para explicação
	Problematizadora de conceitos trabalhados na disciplina

Modalidade de representações	Comunicar ideias
Gestos	Expressar pensamento
	Transmitir/comunicar informação/ideia
	Apoiar hipóteses
	Sustentar argumentação
	Explicar
	Tornar ideia mais clara
	Representar comportamento
	Representar não variação
	Representar curvas
	Apoiar uma idéia
	Recurso para representar ideias
	Reforçar uma ideia
	Representar uma propriedade
	Questionar uma ideia
	Explorar propriedades
	Justificar uma hipótese
	Estruturar uma conjectura
	Confirmar propriedades
	Representar um conceito

A segunda etapa da metodologia é reagrupar os rótulos de modo a constituir subtemas que correspondam a modos como os estudantes fizeram uso de visualização. Isto porque além de muitos rótulos terem sido idênticos, alguns podem ser agrupados por corresponderem a uma mesma forma de uso do recurso visual. A estratégia que vamos utilizar é a de produção de uma nova tabela identificando com cores o que consideramos um mesmo modo de uso. Feito isto, produzimos uma segunda tabela:

Modalidade de representações	Rótulos ou categorias iniciais		Gestos	Rótulos ou categorias iniciais
Representações visuais	Sugerir propriedades (a serem conhecidas)			Comunicar ideias
	Contextualizar			Expressar pensamento
	Recurso para evocar sentidos			Transmitir/comunicar informação/ideia
	Recurso para explorar propriedades			Apoiar hipóteses
	Recurso para formulação de hipóteses			Sustentar argumentação
	Recurso para explicitar propriedades (conhecidas a priori)			Explicar
	Recurso para particularizar (localizar pontos específicos)			Tornar ideia mais clara
	Recurso para fazer inferências			Representar comportamento
	Explorar propriedades da expressão algébrica			Representar não variação
	Reforça aspectos do conceito			Representar curvas
	Faz emergir aspectos do conceito			Confirmar/questionar ideias
	Representação a posteriori do compartilhamento do objeto			Recurso para representar ideias
	Acesso aos aspectos construídos pelo outro sobre o objeto matemático			Reforçar uma ideia
	Oportunidade para conhecer elementos da construção			Representar uma propriedade
	Acesso a concepções do outro			Questionar uma ideia
	Inferir aspectos da imagem conceitual			Explorar propriedades
	Evidenciar dúvidas que não emergem ao trabalhar com a representação algébrica			Justificar uma hipótese
	Sugerir propriedades			Estruturar uma conjectura
	Confirmar propriedades			Confirmar propriedades
	Leitura de propriedades visuais			
	Oportunidade para conhecer elementos da construção			
	Dar sentido ao conhecimento			
	Recurso para transmitir ideia			
	Reforçar hipóteses			
	Sustentar argumentação			
	Representar um objeto			
	Justificar uma afirmação			
	Verificar ideias			
	Base para explicação			

Por fim utilizamos o Excel para agrupar os rótulos por cores. A partir de cada agrupamento por cor identificamos subtemas e determinamos a partir desses os temas identificados. A tabela final é apresentada a seguir.

Os temas identificados foram *recurso para comunicar/transmitir ideias, recurso para representação dinâmico contínua, recurso para argumentar e recurso para explicar*. Esta última tabela sintetiza a análise do conteúdo das entrevistas que foi realizada, e torna possível respondermos a questão de pesquisa colocada. Que será feiro no capítulo a seguir.

Modalidade de representações	Rótulos ou categorias iniciais
Representações visuais	Sugerir propriedades (a serem conhecidas)
	Recurso para evocar sentidos
	Recurso para formulação de hipóteses
	Recurso para fazer inferências
	Recurso para transmitir ideia
	Representar um objeto
	Acesso aos aspectos construídos pelo outro sobre o objeto matemático
	Oportunidade para conhecer elementos da construção
	Acesso a concepções do outro
	Inferir aspectos da imagem conceitual
	Oportunidade para conhecer elementos da construção
	Reforçar hipóteses
	Sustentar argumentação
	Base para explicação
	Recurso para explicitar propriedades (conhecidas a priori)
	Justificar uma afirmação
	Contextualizar
	Recurso para explorar propriedades
	Faz emergir aspectos do conceito
	Sugerir propriedades
	Recurso para particularizar (localizar pontos específicos)
	Evidenciar dúvidas que não emergem ao trabalhar com a representação algébrica
	Explorar propriedades da expressão algébrica
	Reforça aspectos do conceito
	Representação a posteriori do compartilhamento do objeto
	Confirmar propriedades
	Leitura de propriedades visuais
	Dar sentido ao conhecimento
	Verificar ideias
	Problematizadora de conceitos trabalhados na disciplina

Modalidade de representações	Rótulos ou categorias iniciais
Gestos	Comunicar ideias
	Expressar pensamento
	Transmitir/comunicar informação/ideia
	Apoiar hipóteses
	Sustentar argumentação
	Confirmar/questionar ideias
	Reforçar uma ideia
	Estruturar uma conjectura
	Explicar
	Tornar ideia mais clara
	Justificar uma hipótese
	Representar comportamento
	Representar não variação
	Representar curvas
	Recurso para representar ideias
	Representar uma propriedade
	Questionar uma ideia
	Explorar propriedades
	Confirmar propriedades
	Representar um conceito

Temas
Recursos para comunicar/transmitir ideias
Recursos para argumentar
Recursos para explicar
Representação dinâmico-contínuas ou dinâmico-discretas

7 Conclusão

Ao longo do desenvolvimento desse trabalho pude notar que a matemática constitui uma área de pesquisa importante em diversos aspectos. Acredito que ainda há tanto a se pesquisar nessa área quanto havia quando Aristóteles e Platão fizeram suas primeiras indagações acerca dessa complexa e majestosa disciplina. Buscando responder a questão "de que modos diagramas e outras representações visuais podem auxiliar na produção/construção do conhecimento matemático formal em que a abstração é reconhecida como desempenhando um papel central?" iniciei uma revisão da literatura sobre o que se sabia sobre a produção do conhecimento matemático e sobre a abstração, e projetei uma pesquisa empírica, que foi desenvolvida.

Pode-se notar que entre diversos autores (SPINELLI, 2011; DAVIS; HERSH, 1986, MITCHELMORE; WHITE, 2008; NOGUEIRA; PAVANELLO, 2008) não existe uma definição única e definitiva do que é abstração; mas todos concordam que a abstração está presente no aprendizado e produção do conhecimento matemático, mesmo que implicitamente. Hiebert e Carpenter (1992), por exemplo, usam estratégias que se assemelham a processos de abstração embora não as denomine usando esse termo. Tais decisões podem se dever a incompreensões e conflitos no entendimento do termo abstração; por exemplo, esse ter sido utilizado equivocadamente como sinônimo de generalização. A literatura de pesquisa destaca que fazer tal afirmação é no mínimo focar apenas um dos aspectos de um processo muito mais complexo.

Seguindo a vertente proposta por Scheiner (2016) e Scheiner e Pinto (2019) no que se refere ao entendimento de processos envolvidos na construção do conhecimento matemático, propusemos uma pesquisa empírica para investigar e analisar o uso de diagramas e representações visuais. Seu objetivo é entender os diversos processos em que os estudantes se engajam ao extrair sentido e dar sentido aos conceitos matemáticos. Visando conhecer e analisar modos com que diagramas e outras representações visuais podem auxiliar na produção/construção do conhecimento matemático formal, a pesquisa empírica planejou observação em sala de aula, análise dos exames escritos, apresentações feitas pelos estudantes em sala, e uma entrevista coletiva, em que o objetivo foi o de analisar de que formas o uso de representações visuais permeou o conhecimento matemático que emergia. A análise temática foi utilizada para responder a questão de pesquisa colocada a partir do material empírico produzido.

Da observação em sala de aula destacamos que, na prática investigada, diagramas e visualização foram usadas pela professora poucas vezes. O uso de diagramas e representações visuais foi um pouco explorado ao se abordar enumerabilidade de conjunto, onde por vezes a relação entre os conjuntos era primeiramente apresentada na forma de diagrama para em seguida ser demonstrada. Ao abordar esse tema, os estudantes reproduziram diagramas similares ao apresentado pela professora em suas avaliações escritas, como mostrado na Figura 6. Nos demais tópicos trabalhados pela professora, o uso de diagramas e representações visuais foi quase nenhum, e isso se refletiu nas demonstrações produzidas por ela e pelos alunos, que não lançaram mão de tais recursos.

Quanto às entrevistas realizadas, as atividades propostas promoveram o uso de visualização, não só como representação alternativa à linguagem simbólica algébrica e ilustração, mas de múltiplas formas, que passamos a descrever. Destacam-se os gestos, que também estão bastante presentes quando estudantes estão engajados em diferentes momentos da produção de conhecimento matemático.

Da análise temática do material produzido ao longo da entrevista, destacamos 48 momentos em que representações visuais e gestos se colocaram na produção do pensamento matemático, de diversos modos que organizamos em dois eixos (representações visuais e gestos) e quatro temas. Os temas identificados no primeiro eixo, o das representações visuais, foram: uso de diagramas e representações visuais para comunicar/transmitir ideias, como recurso para explorar propriedades e para a formulação de hipóteses, como recursos para elaborar a argumentação e para explicar. No caso dos gestos, além dos modos anteriores, identificamos seu uso como recurso para representação dinâmico-contínua, acrescentando às representações anteriores a possibilidade de movimento.

O uso de representações visuais e de gestos como recurso para comunicar/transmitir ideias surge em diferentes momentos e formas durante a entrevista. É utilizada como modo de expressar o pensamento, representar objetos matemáticos, utilizando uma representação alternativa à simbólico algébrica e possibilitando inclusive, com gestos, representações dinâmicas e contínuas. Por exemplo, foi utilizado para representar a ideia de "não variação" de forma visual, ou seja de funções constantes; para comunicar ideias, como sobre o comportamento de funções no infinito ou próximo de um ponto. Gestos foram utilizados para representar um conceito e para comunicar uma ideia ou expressar um pensamento quando os utiliza para mostrar que uma afirmação feita por um dos colegas ainda no primeiro episódio. Em síntese, é o uso de visualização ou de gestos na comunicação, como representações alternativa às expressões algébricas para curvas, por vezes apresentadas posteriormente ao compartilhamento do conceito matemático formalizado, como uma ilustração ou uma representação a posteriori. Diagramas visuais e gestos foram usados também como recurso para explorar propriedades e para a formulação de hipóteses. Neste caso, diferente do anterior, as representações são ponto de partida ou mediam o entendimento do conceito matemático. Para exemplificar, em um instante inicial e surpreendente pelo obstáculo que representou nos dois primeiros episódios, os participantes da entrevista se envolvem em debate sobre a representação de $a_n = \frac{1}{n}$. Apesar da sequência ser representada como função real, tal representação permitiu inferências sobre o comportamento da função mostrando os estudantes engajados em processos de exploração das propriedades da representação feita. Assim, a partir da visualização, o objeto a ser entendido foi contextualizado pelos participantes, que sugeriram propriedades das sequências estudadas, fizeram emergir aspectos do conceito, evocaram sentidos, fizeram inferências. Por exemplo, ao mencionar o fato de que o gráfico não deveria ser uma linha contínua, o diagrama utilizado contribuiu para reforçar aspectos do conceito de sequências. A tomada de consciência pelos participantes de mais um aspecto da função a ser trabalhada na atividade, que define uma sequência real e portanto o domínio é o conjunto dos números naturais. Em síntese, esse modo diz respeito ao uso da visualização ou de gestos como contexto para fazer sentido da matemática a partir de explorações, inferências, relações entre propriedades representadas visualmente ou por meio de gestos.

Por fim, a visualização e gestos foram utilizada como recurso para elaborar argumentação e explicar. Foram utilizados ao longo da entrevista para apoiar e estruturar hipóteses e conjecturas, sustentar a argumentação, confirmar ou questionar ideias, tornar ideias mais claras. Houve instantes em que a teoria estudada foi evocada a partir da visualização, para justificar a interpretação a ser atribuída de acordo com a teoria, ou também estabelecer relações. Este modo requer ser tratado com cuidado, pois destacamos momentos em que ideias foram verificadas visualmente, diagramas foram usados para justificar afirmações e explicações possam ter sido identificadas com demonstrações. Em síntese, o uso de visualizações e gestos dessa forma é um modo de estabelecer relações entre conceitos e suas propriedades; modo dentre os que costumamos nos referir como intuitivos, para elaborar argumentações a serem formalizadas posteriormente.

Antes de concluir vale comentar alguns resultados que emergem na pesquisa. Primeiro, a partir das representações feitas pelos participantes, a pesquisadora teve acesso a aspectos construídos pelos estudantes sobre os objetos matemáticos. Esse pode ser utilizado por um professor como forma alternativa de acesso ao conhecimento do estudante e suas imagens de conceito. Além disso, a produção de representações visuais de conceitos pode fazer emergir diversos questionamentos acerca do conteúdo. Portanto, o uso de representações visuais pode ser utilizado também como um recurso para problematizar conceitos. O uso das representações pode servir para salientar dúvidas que não haviam surgido ou sido expostas quando trabalhada apenas de forma algébrica.

Em segundo, o uso de representações visuais como forma de complementarização se deu quando a apresentadora apresentou todas as sequências trabalhadas na entrevista até aquele momento e pedia que eles refletissem acerca das características notadas ao longo da proposta. Ao fazer isso, a pesquisadora permitiu que participantes estabelecessem relações entre as sequências apresentadas, sendo capaz de produzir uma hipótese geométrica de sequências representadas no plano cartesiano que poderia representar uma sequência convergente.

Terceiro, o uso de gestos e representações visuais foi utilizado pelos participantes desde o primeiro momento da entrevista. Ao serem solicitados a apresentar uma representação gráfica para a sequência $a_n = \frac{1}{n}$, em uma das primeiras interações dos entrevistados com a pesquisadora relacionado ao tema da entrevista, um dos participantes já inicia sua fala utilizando de gestos; o que pode ser entendido como uma tentativa de dar sentido como proposto por Pinto (1998).

Ao adotar a perspectiva de Frege, quando apresentei aos estudantes diferentes formas de representar uma sequência (a representação utilizando o plano cartesiano) houve um rompimento com o que havia sido aprendido anteriormente, ou seja, ao se mudar o pensamento$_F$, os estudantes por vezes não reconheceram a referência$_F$. Esta inferência é devido às dificuldades em resgatar as propriedades do objeto que os estudantes tiveram. Em síntese, a partir da análise temática dos dados provenientes da entrevista que o uso de representação visuais e diagramas esteve presente em diversas fases do processo de construção do conhecimento. Os dados mostram que o uso de tais recursos pode servir tanto como introdução, onde os estudantes são capazes de analisar características superficiais, como pode engajar os estudantes em discussões mais complexas, que foi o caso da discussão da forma do gráfico, se deveria ser formado por pontos ou se deveria ser uma linha contínua, onde não apenas discute a característica de funções contínuas e discretas, como também faz uma análise acerca do domínio das sequências.

Por fim, sabe-se que o rigor matemático é necessário para mostrar que resultados são verdadeiros dentro da cultura matemática que permanece até hoje. Não estamos aqui defendendo que representações visuais substituam as demonstrações formais, nem sejam equiparadas a elas, uma vez que como abordado no sexto episódio, representações podem levar a pensamentos equivocados, dependendo de sua construção. Defendemos, por outro lado, que o uso informal de gestos e representações visuais são utilizados nas mais diversas etapas da construção do conhecimento matemático e que portanto deve ter seu valor reconhecido. Talvez por não ser explicitamente utilizado, pudemos notar certa resistência dos participantes em fazer inferências a partir apenas das representações visuais das sequências, uma vez que eles sempre tentavam discutir sobre a forma algébrica das mesmas. Tal fato pode ser um indicativo de que as representações visuais podem ser uma representação alternativa à representação verbal-simbólica.

Entretanto não se pode deixar de analisar o peso que lhe tem sido reservado em detrimento de modos intuitivos de investigação e comunicação, nos diferentes níveis da educação matemática. Embora diagramas não representem em sua totalidade os conceitos matemáticos em contextos formais, ou não correspondam à modelagem dos fenômenos em sua totalidade, eles atuam e são recursos em diversos níveis do processo de construção do conhecimento matemático. No espaço pedagógico da sala de aula, por vezes explicitam aspectos do pensamento matemático que os estudantes por vezes têm dificuldade em expressar com palavras. Sendo então um recurso importante para os professores conhecerem seus alunos.

Historicamente, o rigor matemático como conhecido hoje é extremamente recente, sendo desenvolvido a partir do século XIX. Entretanto muito do que se estuda atualmente data de uma época muito anterior a essa. Desta forma, é possível que um enfoque dado às práticas rigorosas que utilizam apenas representações simbólico-algébricas e demonstrações formais completas estejam extinguindo a capacidade de novos matemáticos produzirem novos conhecimentos não só para si quanto para todo o campo da matemática?

Referências

[1] ARTIGUE, M., BATANERO, C., KENT, P. *Mathematics thinking and learning at post-secondary level* Second handbook of research on mathematics teaching and learning, Information Age Publishing, pp.1011-1049, 2007.

[2] BRANDT, C. F., ROSSO, A. J. *Abstração Reflexionante na Construção do Sistema de Numeração Decimal* Educação Matemática Pesquisa, 12, 310-334, 2010.

[3] DREYFUS, T. *Constructing abstract Mathematical knowledge in context* 12th International Congress on Mathematical Education, Korea, 2012.

[4] DUBINSKY, E. *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking* In. D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 95 - 123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991

[5] DUVAL, R. *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics* Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131, 2006.

[6] ELY, M.; VINZ, R.; DOWNING, M.; ANZUL, M. *On writing qualitative research: Living by words* , Londres, Routledge, 1997.

[7] FERRARI, P. L. *Abstraction in mathematics* Phil. Trans. R. Soc. Lond. B 358, 1225-1230, 2003.

[8] FREUDENTHAL, H, *Weeding and sowing: Preface to science of mathematical education.* Spinger, Netherlands, 1978.

[9] GUEUDET, G. *Investigating the secondary-tertiary transition* Educ Stud Math, 67:237 - 254, 2008.

[10] HIEBERT, J.,; CARPENTER, T. P. Learning and teaching with understanding. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 65-97, 1992.

[11] MATTOS, C. L. G. *Abordagem etnográfica na investigação científica* Etnografia e Educação: Conceitos e usos [online] Campina Grande: EDUEPB, pp 49-83, Available from SciELO Books <http://books.scielo.org>, 2011.

[12] MITCHELMORE, M. C., WHITE, P. *Abstraction in Mathematics: Conflict, Resolution and Application* Mathematics Education Research Journal, 7(1), 50-68. 1995.

[13] MITCHELMORE, M. C., WHITE, P. *Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation* Educational Studies in MAthematics , 41, 209-238. 2000.

[14] MITCHELMORE, M. C., WHITE, P. *Abstraction in mathematics and mathematics learning* Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology os Mathematical Education, 3, pp. 329-226. 2004.

[15] MITCHELMORE, M. C., WHITE, P. *Abstraction in mathematics learning* Editorial of Mathematical Education Research Journaul, 19, pp. 1-9. 2007.

[16] NASSER, L.; SOUSA, G. *Desempenho em cálculo: investigando a transição do ensino médio para o superior* Boleton GEPEM. 70. 43-55, 2017.

[17] PIAGET, J.; et al. *Studies in reflecting abstraction (Recherhes sur l'abstraction réfléchissante)*, Filadelfia, Psychology Press.

[18] NOGUEIRA, C. M., PAVANELLO, R. M. *A Abstração Reflexionante e a Produção do Conhecimento Matemático* Bolema(30), 111 - 130. 2008.

[19] PINTO, D. M. *A CULTURA MATEMÁTICA MOBILIZADA POR LICENCIANDOS NO CONTEXTO DE UMA DISCIPLINA DE ANÁLISE REAL* Dissertação de Mestrado, PEMAT-UFRJ, 2016.

[20] PINTO, M. M. F. *Students' understanding of real analysis* Doctorate teses, University of Warwick, 1998.

[21] PINTO, M. M., SCHEINER, T. *COGNITIVE PROCESSES UNDERLYING MATHEMATICAL CONCEPT CONSTRUCTION: THE MISSING PROCESS OF STRUCTURAL ABSTRACTION* 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education, 5, pp. 105-112. 2015.

[22] SCHEINER, T., PINTO, M. M. *IMAGES OF ABSTRACTION IN MATHEMATICS EDUCATION: CONTRADICTIONS, CONTROVERSIES AND CONVERGENCES* (A. R. C. Csikos, Ed.) Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, pp. 155-162. 2016.

[23] SCHEINER, T. *New light on old horizon: ways of mathematical concept construction, their underlying cognitive processes, and their interrelationship with strategies of making sense* Educ Stud Math, 165-183, 2016.

[24] SCHEINER, T., PINTO, M. M. F. *Emerging Insights from the Evolving Framework of Structural Abstraction in Knowing and Learning Advanced Mathematics* Conference Program SIGMAA on RUME 2017.

[25] SPINELLI, W. *A construção do conhecimento entre o abstrair e o contextualizar: o caso do ensino de matemática* Tese de Doutorado. São Paulo. 2011.

[26] TALL, D., VINNER, S. *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity* Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169, 1981.

[27] ZAZKIS, D., WEBER, K., MEJÍA-RAMOS, J. P. *Bridging the gap between graphical arguments and verbal-symbolic proofs in a real analysis context* Educational Studies in Mathematics, Published online: 03 May 2016.

Apêndices

APÊNDICE A – Apresentação das pesquisas relatadas na Revisão de Literatura

Anexos

ANEXO A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
PROGRAMADE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezados alunos:

Meu nome é Ana Clara Buçard Teixeira. Estou realizando uma pesquisa vinculada à minha dissertação que tem como objetivos: entender de que modo os diagramas e outras representações visuais podem auxiliar no processo de produção do conhecimento matemático formal, além de servir de aporte para a elaboração de propostas de ensino que proporcionem uma melhor compreensão dos conteúdos matemáticos.

Para sua realização, será necessária a observação das aulas da disciplina de Introdução à topologia, análise das avaliações aplicadas pelo professor da disciplina e entrevistas semi-estruturadas..

Neste sentido, gostaria de contar com a sua participação. Se você tiver alguma dúvida em relação ao estudo antes ou durante seu desenvolvimento, ou desistir de fazer parte dele, poderá entrar em contato comigo pessoalmente ou através do e-mail ana.teixeira@uniriotec.br. Se você estiver de acordo em participar, posso garantir que as informações fornecidas serão confidenciais, sendo que os nomes dos/as participantes não serão utilizados em nenhum momento. As informações coletadas poderão ser utilizadas em publicações como livros, periódicos ou divulgação em eventos científicos.

Sua participação poderá contribuir para a melhoria no processo ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Atenciosamente,

____

Ana Clara Buçard Teixeira

Consentimento Pós-informação

Eu,..., fui esclarecido(a) sobre a pesquisa realizada pela mestranda Ana Clara Buçard Teixeira e concordo em participar da mesma. Nome do participante

Nome do participante: ____

Assinatura do participante: ____

Assinatura da responsável: ____

Local e data: ____

ANEXO B – Transcrição

	Áudio	Descrição dos fatos
1	Entrevistador: Gente, aquele mesmo esquema, tá. Podem ficar tranquilos, o que acontece aqui fica entre eu, a câmera e a minha orientadora. Se qualquer coisa sair vai ser tudo... tudo... anônimo, a menos que vocês falem Ana põe meu nome lá. Eu ponho o nome. A3: Claro que não mané. E: Se vocês quiserem eu não tenho o menor problema com isso, mas eu prometi para vocês que ia... A1: Vai fazer [TRECHO INAUDÍVEL] A3: É, exatamente!! A1: [TRECHO INAUDÍVEL] ninguém fala que vai querer [TRECHO INAUDÍVEL] A2: [TRECHO INAUDÍVEL] E: Olha só pessoal. Agora a primeira pergunta que eu vou fazer para vocês A3: Isso é para a gente? E: Não, é para fazer como um grupo. Eu quero que vocês discutam como grupo, tá? Como vocês poderiam representar, graficamente A3: Já está gravando isso? E: Já. Não cara, relaxa, fica tranquilo, A3: Tô zuando. E: tranquilo.... Que é o que eu falei, vai ficar entre a gente A3: Tá suave..	Primeiro momento A pesquisadora retoma a proposta do projeto. A3 começa a rir e olha para alguns colegas. Em seguida A4 dá um tapinha no ombro de A3.
2	E: E não tem problema. Eu quero que vocês pensem numa representação gráfica para a sequência [de termo geral] $\frac{1}{n}$. Vocês coloquem nesse pedaço de papel, uma... A3: Esqueci minha lapiseira. E: Ah, tem uma aqui . Mas é para pensar como um grupo, tá?	Segurando uma das folhas colocadas em cima da mesa, a pesquisadora propõe representar graficamente uma sequencia dada pela sua expressão algébrica. A fala da pesquisadora é interrompida pela fala de A3. A3 começa dizendo que esqueceu a lapiseira – querendo talvez se assegurar da sua impossibilidade de trabalhar, participar da atividade. A pesquisadora entrega uma lapiseira ao aluno A3, retoma o turno de

		fala, e coloca novamente a proposta de trabalhar em grupo.
	A4: Mas como assim? E: Como vocês podem representar graficamente a sequência 1/n	Não fica claro o que A4 perguntava. No entanto ele não contesta a resposta da pesquisadora.
	A4: 1/x é assim né? A3: Mas tá chegando no zero, né? A5: É, é. A4: Indo pra mais infinito A3: Mas, pra baixo? A4: Não, isso aqui.	A4 faz um gesto com o braço esquerdo que se assemelha ao gráfico da função exponencial. Fazendo um **gesto** com a mão, A4 questiona a forma da representação 1/x. Sugere estar se referindo a uma função real, em contraste com a função definida em N que a sequência proposta representa. A3 está representando em um gráfico o que A4 representou gestualmente. Com esta representação (gestual e gráfica), o grupo propõe os seguintes sentidos (ou ideias) – chegando no zero, indo para mais infinito próximo do zero. Sem cortar o eixo horizontal. A2 e A1 acompanham a discussão dos colegas, concordando com as representações de ambos
	E: Aí olha só, vocês podem ir fazendo aí, A3: Vai passar no um. E: .... que eu tenho mais folhas aqui. A2: Assíntota horizontal A4: É. Vai passar no um, vai para mais infinito, aí vai para zero.	A pesquisadora intervém buscando garantir a continuidade da atividade. Os alunos A4, A3 e A2 continuam a discussão da sequência proposta pela pesquisadora, trazendo as ideias de assíntotas horizontal, limites no infinito valendo zero neste caso.
	A3: É o gráfico da ln de x, não é isso? A2: Não. A5: Não. A4: Não, ln de xis é assim A2: É um sobre x. A1: É um sobre ene. A5: Um sobre ene. A1: Isso. Um sobre ene.	A3 relaciona as características encontradas e pergunta se é o gráfico de $y = ln$. Os demais colegas A2 e A5 dizem que não e A4 justifica com um gesto representando a função ln x, graficamente. A2 relembra que a função é 1/x (e não ln x) Sua fala chama a atenção de A1 e A5 para o fato de que a proposta era representar 1 sobre enee não 1 sobre x.

	A2: Que é a derivada de ln. A3: É, a derivada. A4: Não, você [TRECHO INAUDÍVEL] E: Quem queria o ln conseguiu né? Para agradar todo mundo. A3: Onde que é o xis cara? A4: Aqui ó, botaram o xis aqui. A3: Não cara, esse é o y. A4: Não vai para zero. A3: Esse é o y e esse é o xis cara. A1: É, cuidado com o zero. A3: Vai para lá. A5: Ele está indo pra zero. A3: Tá indo pra zero, só que nunca vai chegar. A5: É. A4: É aqui também. A3: Aqui também? A4: É A3: Pode escrever? E: Cês querem outro? Podem usar.. NÂO! Não! Pode deixar esse aí e pega outra. Faz outra, não tem problema. A3: Ihh A3: Mas ele não [TRECHO INAUDÍVEL] A4: É um. Passa no um. A3: No um. É aqui A5: Ele passa no um. A4: Não! A3: No um [TRECHO INAUDÍVEL] A4: Isso, agora [TRECHO INAUDÍVEL] A3: Eu falei que não mas fiz o gráfico da Ln. A4: Não, o da ln é assim. A3: Não, o da exponencial. A exponencial é assim. A1: Cuidado com isso. Quando o xis for negativo o y tem que ser negativo também.	A2 justifica para o A3 porque o gráfico que estavam fazendo não era o gráfico de ln. A3 registra na folha o gráfico que todo o grupo discute como fazer. No entanto, não incorporam a observação já feita por A1 e A5 de que o gráfico era de 1 sobre ene e não 1 sobre x. O grupo decide fazer outro desenho da mesma sequência porque no primeiro desenho eles colocam o gráfico interceptando o eixo y, passando por (0,1). Continua a discussão sobre os gráficos do logaritmo e da exponencial. Ao trazer novamente a forma do gráfico da exponencial observação de A1 sobre o sinal da expressão 1 sobre xis quando xis é negativo
3	A4: Tá, mas pera aí. Esse ene aí tá pertencendo a que? A1: É uma boa pergunta! É natural?	
4	E: Eu pedi para vocês representarem visualmente a SEQUÊNCIA um sobre ene. O que, qual vocês acham..? O grupo se olha e dizem todos mais ou menos ao mesmo tempo que vai ser natural.	Após a afirmação de A1 que se xis for negativo então y tem que ser negativo baseado na suposição de ser uma função real, leva os alunos a dialogarem sobre a natureza do domínio da função, onde todos se engajam para tentar resolver.

	A4: Calma, então... Não tem... Ele vai diminuir, aqui não tem essa parte A3: Não tem? A4: Porque o primeiro elemento é um, o segundo é meio, ele vai subindo pra cá entendeu? Não tem essa parte. A5: O que ele tem que fazer? A4: Não, ele não vai pra antes de um. Não é uma sequência? E: É uma sequência. A4: Então, ele não vai para menos de um. Ele começa no um. A1: Sim. A4: Então começa no um. A3: Começa daqui pra cá.	
	A4: Não. Ele começa aqui e vem pra cá. E: Por que? A4: Porque quando ene cresce, A3: Pode crer, ele tende a zero. A1: Como ene é natural. A3: Exato. Grupo murmura frases de concordância.	Nesse momento A3 entrega à entrevistadora a folha de número dois que contém a discussão até esse momento.
	A3: Pô, vai acabar as folhas aqui. E: Não! Eu trouxe bastante justamente por isso. A3: ele começa no 1 e vem para cá A4: é só, isso. A3: fechado no um. A4: é A1: é A3: fechado no um A4: é, Tecnicamente você não teria nem a linha você teria só as bolinhas A2: é, sim A3: é. ½ 2, meio, 3 um terço, A3: Certo, é faz sentido	Mais uma vez A3 levanta um ponto, que na sua visão é contrário ao bom desenvolvimento da entrevista, que é o uso demasiado de folhas de papel. Discurso esse que parece reforçar a inferência feita anteriormente. A4 retoma a discussão feita em ___ de que ene é natural e portanto o gráfico buscado não é uma linha como antes se pensava, mas o fato do domínio ser natural implica que seu gráfico é formado por pontos.
	E: é mas olha só pode mandar para cá A3: ai caraca… A4: É po... E: vocês estão vendo que os eixos estão ... A3: estão desproporcionais E: Não estão desproporcionais não A3: Não, desproporcional não, o y e o xis está muito grande A3:tem alguma coisa para cá	A entrevistadora percebeu que os alunos estavam interpretando os eixos de forma errada, pois os dados que estavam sendo pontos no eixo horizontal eram as imagens da sequência, então, na expectativa de resgatar o conhecimento dos alunos sobre planos cartesianos, a entrevistadora faz uma série de perguntas que buscam associar os

	E: Olha só eles estão... descritos A3: a sequência para cá e E: Isso A4: Aqui é o dois fica no meio. A2: É, isso. E: aqui eu faço também outra pergunta né ? A2: Vai para lá A4: É, isso aqui é assim, é assim	conhecimentos prévios com o conteúdo abordado na entrevista.
5	E: uma sequência vocês acham que uma sequência é uma função A2: sim. E: Sim? A2: uma função bijetiva E: Bijetiva? A2: uhum E: Tá. por que ela é bijetiva? A4: não, bijetora não é E: toda sequência é uma função bijetiva? E: sim? A2: por definição . E: por definição? qual a definição de sequência? A2: uma bijeção de ene em n E: bijeção de ene em n? A3: Não. A2: É. A4: não necessariamente. Você tem a sequência 1 sobre ene. E: Então você tem por exemplo a sequência xn A2: Ah, não, desculpa. De ene em erre, né? A4: é. E: Ok. A2: De ene em erre, verdade. E: Ok, de ene em erre. Beleza E: então a sequência que leva todos os xis ene s no elemento um então ela não é uma sequência? A4: não, é uma sequência sim E: é uma sequência A5: É constante A4: É não é bijetiva. É só injetiva. E: Injetiva? Hum.... isso aqui é injetivo? A4: É, todas os ns tem alguém. A3: Tem alguém E: qual a definição de injeção? A1: Só pode ter um !? A4: Só pode ter um correspondente	Notando que os entrevistados estão equivocados com relação às propriedades de uma sequência, ela começa a fazer perguntas par auxiliá-los a representar graficamente a sequência utilizando como plano de fundo a representação de funções. Nesse momento os entrevistados estão menos falantes que nos outros momentos, podendo isso ser uma evidência da falta de convicção dos conceitos abordados. Quando se diz bijeção de ene em ene, ele está se referindo a uma bijeção do conjunto dos números naturais no conjunto dos números naturais. De ene em erre, se quer dizer uma função cujo domínio é o conjunto dos números Naturais e o contradomínio é o conjunto dos números reais. Nesse momento os entrevistados entram em um consenso de que uma junção é bijetiva quando cada elemento do domínio está associado a apenas um elemento no contradomínio.

	E: Essa é a definição de função. A1: É. A3: Isso A4: Certo. A1: É... A3:Cada um tem um não é isso? A1: Para cada xis 1 diferente de X2 f de xis 1 diferente de f de xis 2 é isso A5: Verdade, é, é. E: Então, X1 diferente X2 implica f de x1 diferente de f de xis 2	Novamente os alunos demoram a responder, o que corrobora com a hipótese anterior de que os mesmos não possuem domínio das definições abordadas. Nesse momento A2 começa a falar em voz baixa com A1, mas devido aos demais ruídos da entrevista não é possível determinar o assunto da fala. A entrevistadora escreve a definição dada pelos entrevistados no quadro.
6	E: beleza, tá. Então essa aqui é definição de injeção. então isso aqui deixa de ser uma sequência? porque isso aqui é injetivo? A2: Não. A5: Não. E: Não, porque n1 e n2, um é diferente de dois mas os dois estão indo no um. então isso aqui não é injetivo Então não é necessariamente é injetivo também. Tá? É só uma função. A2: É só uma função né? E: É só função de ene em erre. A2: Tô confundindo com conceitos de enumerabilidade. E: Hã? A2: Estou confundindo com a enumerável. enumerável que é uma bijeção. E: É uma bijeção com N A2: Não precisa ser uma bijeção. E: Isso. Exatamente. A2: Mas sobrejetiva nunca vai ser. Porque é de ene em erre, não tem como ser sobrejetiva. Porque R não é enumerável E: Sim, só que.... Eu tenho a ligeira impressão que você consegue cobrir por exemplo o zero um. A2: Só com os naturais? E: Não, não. Calma. Esquece. estou falando besteira. Deixa eu pensar e depois eu falo melhor. Então olha só. vocês estão dizendo para mim que uma sequência pode ser vista como uma função de ene em erre.	Neste momento os entrevistados param de discutir e focam a atenção na fala da entrevistadora. Após a escrita da definição de função injetiva, a entrevistadora escreve no quadro a definição da sequência constante xn=1. Os demais entrevistados permanecem em silêncio analisando a fala da entrevistadora e de A2.

7	A1: Certo. E: Como vocês representariam essa função nesse papel aí? No caso, eu estou falando agora, né, da função um sobre ene. A2: Bem, no caso é injetiva. E: Nesse caso aqui, sim. Você pode ir até um pouco mais né? É bijetiva. A2: Não, ela não cobre os reais todos. A3: Alguém quer tentar, eu não faço a menor ideia. A2: Não, ela não cobre os reais todos. A3: É a mesma coisa, só que pra cá? A4: Pra cá é. E: É verdade. Tá certo A3: Um, um meio, um terço, um quarto. A2: Não tem como cobrir os reais todos. De ene em erre. A3: Quanto é 5? A2: Não entendi. A3: cinco terços dá quanto? [TRECHO INAUDÍVEL] A3: É isso mesmo? E: Não sei. A4: Ué? E: Não tem certo e errado não gente. A3: Ah.. para... tem que ter. E: Não, não tem certo e errado. Nesse caso aqui não tem certo e errado. A3:ok.	Esclarecidas as propriedades de uma sequência, a entrevistadora retoma a ideia inicial, de buscar na representação de uma função elementos que auxiliem a representação gráfica de uma sequência. Após a pergunta da entrevistadora, A4 pega um dos papéis entregues, olha e faz um comentário para A3. Em seguida A3 estende a lapiseira a A4 indicando para ele tentar. Em seguida A4 pega a lapiseira de A3 e começa a escrever sobre o papel que está sobre a mesa de A3. Nesse momento A3 retoma a folha que A4 estava escrevendo e começa a escrever. Os demais entrevistados permanecem hora de cabeça baixa, hora olhando o que estava sendo feito. Os entrevistados buscam na entrevistadora uma validação para o trabalho até então realizado. Os entrevistados esboçam sorrisos.
7	E: Agora vou perguntar para vocês o seguinte: vocês conseguem fazer a sequência... Façam essa sequência aqui ó. E: A sequência menos um elevado a ene sobre ene. [TRECHO INAUDÍVEL] A3: Sempre tendendo a zero. Sendo, tipo, A2: Não, começa no negativo. Começa no negativo. A3: Desculpa. A4: menos meio. Menos um terço. Um quarto E: Nada que vocês queiram mudar? A3: Calma, deixa a gente pensar. E: Já falei que não existe certo e errado nesse negócio aqui não. A1: Pensar melhor né?	A entrevistadora se levanta para escrever no quadro. A sequência apresentada foi $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ Quem começa a escrever no papel o esboço do gráfico é A3. Os demais, com exceção de A4 não demonstram interesse em opinar acerca da produção. Nesse momento a entrevistadora levanta do esboço que foi entregue e pergunta se alguém quer mudar alguma coisa. Todos os entrevistados analisam

	E: É que no outro vocês fizeram várias versões. Aqui vocês acham que essa já está boa? A3: Tá, eu acho que sim. Faz sentido. Quando for ímpar vai ser negativo A5: [TRECHO INAUDÍVEL] for par. A3: É, vai ser isso mesmo. E: Beleza. Então nada a ser alterado? A4: Isso é um teste de personalidade? E: Hã? A4: Isso é um teste de personalidade? E: Não! Não! Meu objetivo aqui é só ver a compreensão de vocês a convergência de sequências. Só isso. Então olha só,	Nesse momento a entrevistadora guarda o esboço entregue pelos entrevistados e pega algumas folhas. Uma delas é colocada na mesa numa parte que ficaria o mais próximo de todos os entrevistados ao mesmo tempo.
8	A3: Aí vai virar e falar [TRECHO INAUDÍVEL] assim? A4: Não, vai chegar com um boleto assim: qual a sequência é essa aqui? E: Agora vou apresentar para vocês uma sequência A3: Vixi... E a gente tem que dizer qual é. E: Não, a gente não vai olhar para a... pra fórmula algébrica dela não. Eu só quero que vocês me digam o que que vocês acham que essa sequência está representando. A sequência número 3.	Todos riem A entrevistadora anuncia colocando uma folha no centro do lado da mesa mais próximo à todos os alunos.
9	A4: Três? E: É. Três só pra eu poder saber quando eu tiver fazendo a análise do áudio, saber a que que eu tô me referindo aqui com vocês. A3: Tá. Tem como [TRECHO INAUDÍVEL]? A4: é uma constante. A5: É, vai ser constante. A3: É uma constante, mas seriam só os naturais. Né? A4: Não sei. Não necessariamente. Pode ser pi... A3: Verdade. Não, mas aí vai ser constante. E: Sequência Constante? A4: Quando ene... número [TRECHO INAUDÍVEL]. E: Não entendi o que você quis dizer. A4: Levando ene naturais, em um número qualquer constante. E: Todos os elementos da sequência A4: Vão em um só. E: Vocês podem dizer mais alguma coisa sobre essa sequência? A3: Eu não sei se existe mas... E: Hã? A2: Converge. E: Converge A1: Mais infinito quando k positivo	Os entrevistados começam a se questionar a cerca dos possíveis valores para a imagem da sequência.

	E: Oi? A1: ou k positivo. E: Com k positivo? A3: [TRECHO INAUDÍVEL] E: O que que você acha que define graficamente a convergência de uma sequência? A5: [TRECHO INAUDÍVEL] constante A3: Tipo, eu não sei lidar quem é o xis e quem é o y. Sei lá, parece que tem que se aproximar de um certo y. A4: É, você consegue achar um número... um número muito grande assim... você consegue achar um menor ou maior A3: É A4: [TRECHO INAUDÍVEL] no outro também. E: Vocês conseguem dizer mais alguma coisa dessa sequência? A3: E aí? [TRECHO INAUDÍVEL] Não sei mais nada A2: Limitada né? A3: Limitada? E: Uhum... E: Por que você acha? A2: Monótona. A5: É verdade. A2: Monótona crescente e decrescente. A5: Mas não pode ser monótona porque é, porque está dizendo que é constante. A1: [TRECHO INAUDÍVEL] constante. A3: Sim, e constante. Por isso é monótona, limitada. E: Mas qual é a definição de monótona? A3: Tá, se é constante é limitada. A2: Ela é oscilante né? E: Oscilante? A2: É, tem uma parada assim. ... Constante é um caso particular... de oscilante. E: Constante é uma para... Constante é um caso particular ..? A2: Da oscilante. E: Por que você acha isso? A2: Não, ainda eu não acho. Tinha um exercício disso. A3: Cê é louco. Pra que falar disso cara. O cara já sabe o exercício. A4: Para de chorar cara E: aqui não tem certo e errado gente. Pode botar pra fora. A3: é mas... E: Ele falou que era monótona...	Nesse momento A3 vira o rosto para A2 a fim de falar com ele, entretanto não e possível compreender o que ele fala. Mas a fala dos entrevistados demostra o início da uma racionalização do que seria a indicação gráfica da convergência de uma sequência. Nesse momento o entrevistado não esclarece o que é uma sequência ocilante, abrindo margem para diferentes interpretações.

	A5: [TRECHO INAUDÍVEL] se ela oscila não seria monótona né? Uma hora está em cima e outra está em baixo. E: É, você falou que ela era monótona e agora você falou que ela era oscilante. Ela pode ser as duas coisas? A2: Aí não sei. Ela não vai ser monótona não. Não sei. A4: Monótona é que só cresce? A5: É, só cresce, é. A4: [TRECHO INAUDÍVEL] A5: Ou então, então... A3: É, a constante é monótona, não é? A2: É, A5: Ela pode ser também cons... Pode ser também... E: Gente, não adianta olhar pra mim que eu não vou dizer se tá certo ou tá errado. A4: Não, mas aí dá uma dica. E: Agora, agora não estou mais dando aula. Agora eu só estou entrevistando vocês. A4: A monótona é a que não muda né? A direção do... A2: É A4: do crescimento. A2: Pois é. A4: Então, [TRECHO INAUDÍVEL]. Nesse caso seria aqueles casos particulares. Tipo, vazio. A2: É. A4: Tipo, é tudo mas não é nada. A2: É crescente e é decrescente E: Certo. A3: Aí! E: Certo é só que é certo que eu entendi o que vocês queriam. Não é certo de está certo, porque eu já falei, eu já falei que hoje agora, a partir de agora A4: Então fala ok assim E: Ok, é ok. Obrigada A2: Supimpa.	A4 fala isso colocando a mão sobre o ombro de A3. Nesse momento A3 e A4 começam a discutir sobre alguma coisa que está no papel mas que não pode ser ouvido no áudio. Novamente os entrevistados olham para a entrevistadora em busca de pistas ou validações para as afirmativas apresentadas.
10	E: Supimpa! Então vamos lá! A sequência número cinco. A3: Ixie. E: Quê que vocês podem falar dessa sequência? A4: Ah, essa sequência. A2: Essa aí é o ln de x. A1: É ln de x. A4: A mesma coisa. Tem... Ela é... A3: Mas tem um espaço bem grande aqui.	Pergunta levantando o desenho recém entregue aos entrevistados.

	A2: Ln converge ou vai para mais infinito? A3: Mas é convergente também. E: Não foquem A2: É E: Na forma algébrica. Eu quero é que vocês digam o que vocês estão vendo e o que que vocês em...	
	A2: Parece que converge. E: Parece que converge, por que? A3: Parece porque ela está indo e mantendo o y. A4; Não mas o... A2: Mas as vezes ela vai [TRECHO INAUDÍVEL] (acertando?) A4: Oi?	Nesse momento A3 faz um movimento com a mão com uma curva que se assemelha ao gráfico da função ln (x).
	A2: Eu achava muito estranho E: Assim... A2: uma parábola ir para mais infinito porque parece que ela vai... A3: Abrindo né? É porque, assim olhando pra figura.	A2 faz o movimento com a mão que se assemelha a parte positiva da função x^2
	E: Aqui vocês têm que se prender ao que vocês estão vendo. Vocês não vão pensar na forma algébrica. Só na parte gráfica A3: Olhando pra figura eu diria que tem um assíntota aqui. A2: Parece que é convergente. A3: E que está se aproximando dela, mas que não vai encostar nunca. A4: Mas você não pode afirmar né? A3: Claro! A4: Você tem que ver... A... E: Onde você acha que essa assíntota estaria?	A3 faz um movimento com a mão de uma linha sobre o diagrama entregue. Pergunta olhando para A4.
	A4: Ela pode ser só uma parábola que está de lado A3: Sei lá, aqui. A2:É, talvez ela seja y=ax A4: É. A3: Sei lá, por aqui. A2: L de xis mais um. E: [TRECHO INAUDÍVEL] passando por esse ponto aqui? A3: Acho que... A4: Não depende do crescimento que for né? Tem coisas que convergem e não convergem. A2: ln de xis menos um. A3: é, eu acho que seria algo desse tipo. E: O que eu estou falando é o seguinte: pegando o desenho, vocês acham o que dessa sequência? A3: Eu acho que seria... A2: converge A3: ... uma assíntota assim e ela convergindo pra lá, entendeu? A4: Não, sim, mas... eu tô falan...	E começa a desenhar na folha que havia sido entregue.

	A2: Fala! A4: Não, é isso. Eu também acho isso. Mas eu também acho que também depende. A3: Do que? A4: Se, dependendo do tipo, de.... de... Porque a gente está vendo só o desenho. Entendeu? A3: Ah sim, não. E: Aqui, agora, é para se focar no desenho. [TRECHO INAUDÍVEL] A4: Mas tem desenhos parecidos com isso que vão para mais infinito. Só isso que eu queria falar. A3: Ah, sim, é. Tá. A4: O desenho em si não fala nada entendeu? A3: Tá.	
11	E: O que mais vocês podem falar dessa sequência? A4: É monótona, crescente. A3: Crescente. Pô, é monótona também porque só cresce? A2: É limitada. A4: E tem aquela parada quando... A2: Não, não A2: É limitada. A3: Ela é limitada. Tipo eu posso afirmar, que por baixo pelo zero e por cima pela assíntota que a gente não sabe quem é? E: Não vou dizer se está certo. A3: Não, eu tô perguntando se tipo, olhando pro desenho eu posso afirmar isso? Porque aqui não dá pra afirmar se ela para, se começa do zero. A5: Porque não sabe se veio inferiormente né? A3: É. E: Vocês tem que deduzir isso do desenho. A3: É, do desenho parece que sim. A5: é. A4: É, parece que sim. A3: E aí? Em todas as paradas, nisso eu concordo. A4: [TRECHO INAUDÍVEL] O seguinte, quando você vê o desenho, pode não significar nada. A5: Que é limitada inferiormente o desenho mostra né? Pelo menos é o que parece, né? E: Tá, o meu papel é só analisar a interpretação do desenho.	Nesse momento A2, A3 e A4 falam ao mesmo tempo. Quando fala assíntota faz gesto com a mão simulando aspas. E pergunta olhando para entrevistadora. Pergunta olhando para todos os colegas.
12	A4: Porque assim, o meu primeiro professor de matemática desenhou um triângulo, e	

	falou assim: o que é isso aqui? Aí todo mundo falou que era um triângulo. Ele falou que não, é um quadrado. Aí todo mundo falou: por que? Aí ele falou assim, é um quadrado. Pronto, entendeu? O que importa é o que está escrito, não o desenho. E: Nesse caso aqui a gente só quer olhar para o desenho. Que tipo de informação a gente consegue A3: Tu quer ser polêmico. A4: Eu não quero ser polêmico. E: Não, olha só, é que existem desenhos, principalmente na parte de geometria que eles confundem mais do que te ajudam. Isso acontece de fato. Você faz um desenho de acordo com aquilo que você quer que aconteça e o desenho te induz a acreditar que aquilo é verdade quando nem sempre é. Mas nesse caso aqui a gente só quer analisar o que que a gente pode dizer do comportamento da sequência a partir desse gráfico. Tá? Então vocês conseguem dizer mais alguma coisa?	Nesse momento faz gesto como se estivesse escrevendo num quadro. A3 fala olhando para A4.
13	Entrevistados 2 e 3 falam mas não é possível distinguir o que. A5: Eu notei que ela é limitada inferiormente, né? É o que parece. A3: É, pensei nisso. E superiormente também. A5: Não, aí você não sabe. A4: É. A3: Mas olhando para o desenho A4: O desenho não rebate.	
14	E: Agora a sequência número 6. A3: Ó, ihhh, pô, essa daqui parece aquela que a gente desenhou. Só que seria o contrário. A3: Não, não faz sentido. E: O que vocês podem dizer dessa sequência? A4: Olha, esse aqui é o maior número, esse aqui é o menor. Agora não consigo ver se está chegando mais próximo do zero. A3: Cara, parece que não. Parece que ela está mantendo uma constante, tá ligado? Do terceiro [TRECHO INAUDÍVEL] em diante. A1: Parece que daqui para cá está decrescendo, mas A3: É, parece que parou nesse terceiro número né? E de baixo pra cima também está	Entrevistadora pega o desenho de volta e entrega uma nova folha Fala olhando para A4. Fala utilizando um lápis para mostrar no papel.
15	A2: A partir de algum momento ela é oscilante. E: O que você quer dizer com oscilante?	 Como não havia ficado claro anteriormente qual o conceito de sequência oscilante, a

	A3: É, oscilante, é isso que eu ia te perguntar? Eu posso desenhar uma onda tipo seno? A2: Eu diria que para todo ene natural, existe p natural tal que xis ene mais pê igual a xis ene. A3: É muita informação. A2: Círculo. E: Eu não... escreve aqui para mim. A2: Para todo n natural existe p tal que xis ene mais pê igual a xis ene. E: tá. A2: Que no caso da constante né, tipo p é igual a zero. E: Consegue explicar para A3 o que você entendeu, do que A2 falou? A1: Tá, você pode pegar uma sequência xis ene e sempre somar um pê de tal forma A3: Pê é constante? A1: Pë.... A2: É. A1: É, pegar um pê constante de tal forma que toda vez que você vai somar esse p sempre volta no valor de xis ene. A3: Isso não faz sentido nenhum. Eu entendi o que você quis dizer, mas só não consigo imaginar isso sabe? A4: Ele está falando se somar esse número sempre vai voltar A3: É, vai voltar pra cá. Tá ligado? Eu não tinha pensado num exemplo prático disso. A4: E isso não acontece aqui por exemplo. A3: É, e nos primeiros não acontecem. E: Vocês conseguem pensar num exemplo prático disso? A2: É, de tempos em tempos aquele valor se repete. A cada p minutos entendeu? A cada p você A3: Ah, tô ligado. Não vai ser sempre. Vai ser a cada, A2: A cada p... isso. Tipo seno. A3: Poderia pensar por exemplo no.. é.. no seno? Tipo, ele vai voltar sempre no zero. A2: Sim. A3: Depois de um determinado.... A2: O ponto está sempre no mesmo período de tempo. A3: entendi. É, faz sentido. Agora foi.	entrevistadora pede que o aluno explique o que é uma sequência oscilante. Falando enquanto escreve. Entrevistadora fala olhando para A1. A2 e A3 aqui utilizam as mão para fazerem gesstos que indicam continuidade e ciclos. ?? Aqui A2 utiliza a mão num movimento de ir pra cima e para baixo, representando uma onda. A3 também faz um gesto aqui voltando do final para o início (horizontalmente). Pergunta olhando para A2.
16	E: E agora? O que que vocês podem dizer? A3: Tá, essa aqui... A4: Não converge. E: Hã? A4: Não converge... E: Não converge? A3: Não. E: Por que você acha?	

	A4: Duas subsequências aqui... indo para lugares diferentes... A1: É A2: É, tipo, um, zero, um, zero, A4: Exato.	
17	E: Mais alguma coisa que vocês podem dizer sobre ela? A2: É, como se fosse menos k a k. E: Eu não entendi. A2: Em módulo ela é constante, né? Parece. E: Em módulo ela parece constante. A1: Isso aí eu já não posso dizer. A3: Cara, é o que eu acho. A4: Como é aquela parada do módulo? Tinha uma parada do módulo? Que converge. A2: É, de série. É. A4: É, totalmente... é, como é? A2: Série absolutamente convergente. A3: Isso! [TRECHO INAUDÍVEL] A3: Ela converge em módulo. A4: Converge para isso aqui. Para esses aqui, para esses números aqui. A3: Aí no caso seria absolutamente convergente? Por conta disso? Se o módulo é convergente. A4: Mas não é convergente. A3: É, se fosse o módulo talvez sim. A4: Só o módulo. A3: Enfim.... E: É tudo o que vocês podem dizer dessa sequência? Vocês falaram que ela não converge, né? A2: Não é monótona. E: Não é monótona. Mais alguma coisa? A3: É limitada A4: E o módulo dela... converge. E: O módulo dela converge. A3: Com toda certeza é limitada. Tanto inferior quanto superiormente. A2: Sim.	A4 utiliza o lápis para mostrar no papel.
18	E: Certo. A3: Certo certo, ou certo ok? E: Certo ok. A4: É ok. E: Certo ok. Sempre que eu falar certo é ok gente. Não tem certo e errado aqui. Já falei isso. A3: tá. Beleza. A4: É, não tem certo. E: Olha só. Agora vou apresentar o último exemplo.	
19	A3: Ixie... Ih caraca. A4: Calma, não tem dois.	

	A3: Não, coloca uns dois dedos aqui, vê, ó, o módulo converge. E: Hum? O módulo converge? Mas e essa sequência? A2: Não. E: Mais alguma coisa que vocês podem dizer sobre ela? A3: Oscilante. E: Oscilante. O que mais? A3: Tô pegando. A4: [TRECHO INAUDÍVEL] E: Limitada.	Aqui A3 utiliza o dedo para medir a distância dos pontos ao eixo.
20	A3: Cara, isso parecia, parece, tipo, eu chutaria tipo menos ene elevado a ene. A2: Hã? A4: Não. A3: É cara. A4: Menos ene elevado a... A3: É. A4: Não. A3: Que aí quando for ímpar tá no negativo. A2: Elevado a uma parada que cresce absurdamente. A4: Não cara, ele ia crescer... Bizarramente. Ia ser menos um elevado a ene. A2: Cresce mais do que fatorial. A3: Pô, show, isso. E: Gente, sem pensar na forma algébrica. A4: Mas ele perguntou. A3: Não, é, é, eu falei ene mas deveria ser uma constante qualquer. É... E: Sem pensar na forma algébrica. A3: Tu entendeu o que eu quis dizer? A2: Cara, menos ene e ene. A3: Mas não necessariamente menos n, tipo, ele falou menos um. Daria. Por que aí se fosse menos um elevado a um número ímpar dá negativo, tá ligado? E a um par está em cima que é positivo. E eles aparentemente tem a mesma distância A2: Ah... menos um elevado a ene vezes k. A3: É. A4: É. A3: Aí o que eu pensei. Aparentemente tem a mesma distância do eixo xis. Então por isso A2: Xis. A3: é, enfim. Por isso também que o módulo converge. Vai estar aqui em cima. E aí? A4: [TRECHO INAUDÍVEL] eu esqueci. A3: E aí? A4: Eu sei que isso significa alguma coisa, não lembro o que. Está escrito no caderno. A3: o que? A4: O módulo converge e você pode falar alguma coisa	Faz barulho de foguete com a boca e faz uma curva subindo muito rapidamente. A3 fala gesticulando em direção a A4. A3 fala olhando para A2 A3 fala olhando para A5
21	A3: O que a gente pode falar quando o módulo converge? Eu não sei.	Pergunta para a entrevistadora.

	E: Agora não posso dizer nada. A4: Ela não vai falar nada cara. Para de chato. A3: Pô, mas é uma pergunta da nossa matéria. E: Eu não posso, não, não posso. Agora não. A5: Não é absolutamente convergente? E: Agora, agora não. Quarta feira vocês respondo o que vocês quiserem. A4: Seria, mas teria que ser convergente para você falar que é absolutamente convergente. E: Quarta feira eu deixo vocês usarem todo meu conhecimento de topologia. Agora não. Mais alguma coisa? A3: Eu não. Vocês têm? A2: Não. A3: Alguém dá mais?	Respondendo a A5. A3 pergunta olhando para todos os outros colegas.
22	E: Tá. Agora eu vou apresentar para vocês todos os exemplos que a gente viu agora. A3: Tem a forma algébrica aí? Delas? E: Não vou falar. Eu tenho, em outro momento eu até posso apresentar para vocês. No momento, por questões de pesquisa, A3: Esse aqui a gente não viu. A4: É, não viu. E: Esse aqui? A3: É. E: Não? A3: Não. E: Eu pulei o exemplo 4? A5: É, não viu esse não.	
23	A3: Bom, é convergente. A4: é. A5: É. E: Por que ela é convergente? A5: Parece. A3: Porque tanto por baixo quanto por cima está indo pro mesmo lugar. A2: Assíntota. A3: Tem uma assíntota aqui no meio, tá ligado?	
24	A4: E ela é absolutamente convergente porque o módulo dela converge pro mesmo lugar, inclusive. A3: Módulo? A5: É. A4: Não, aqui é zero. A3: Aqui é zero. A4: Mas tudo bem cara. A3: o módulo vai ser ela mesma. A4: Não, pera. Não é negativo, por isso eu tô... A5: é, não [TRECHO INAUDÍVEL]	Neste momento os alunos já havia sido apresentados ao conceito de séries e séries absolutamente convergentes. Aqui A4 confunde as definições de sequências convergentes com séries convergentes e absolutamente convergentes.

	A4: Não é negativo filho. É positivo. A3: Sim cara. A4: Mas o módulo não vai fazer crescer. A3: Tá, vai continuar sendo ela. A4: Tá bom. A1: Não deixa de ser. A3: Então continua... Você está certo. A4: é, tô certo. A2: Você pensou que isso fosse o zero. A4: é. A3: Entendi, arrasta aqui... Tá, é limitada inferiormente e superiormente. Convergente. Não é monótona. Não é isso? A4: Isso A2: Isso. A4: Não é monótona. E: Tá, o que mais vocês podem dizer? A3: Convergente, não é monótona. A2: Mas também não é oscilante. A3: Ah é, isso que eu ia falar. Também não parece oscilante. Não sei.... É, pode ser... A4: O que? A3: Oscilante. A2: Creio que não. A3: Parece... A4: Não não, se converge... A4: Porque não tem como A3: Se eu limitasse até aqui por exemplo, eu poderia falar que ela é monótona. A4: Oi? A1: Não pelo seguinte, se você somar o p aqui A3: Não, não vai voltar A1: Não vai voltar para o mesmo lugar. A3: É, pode crer. A2: Nunca volta. A1: Nunca volta. A não ser que você chega ao... ao limite. A2: É. A3: E aí? A4: isso aí. A3: Acabou? A1: Eu acho que sim. E: Ok.	
25	A3: Ok E: Tô aprendendo. A4: Boa, boa. E: Viu? Até o fim da pesquisa eu sabia que ia conseguir. Agora estão todas as que a gente viu. A3: Será que tem algum [TRECHO INAUDÍVEL] ?	
26	E: Olha só, agora olhando para todas essas representações, o que vocês podem falar sobre elas? A2: [TRECHO INAUDÍVEL] A3: É, todas são limitadas.	

	E: Uhum... A3: hum... A4: Eu ainda tô bolado com aquela ali. A3: Com essa? A4: Com a três, é. E: Oi? A4: A três para mim não significa nada. A3: Qual é a três?	
	E: Três? A três é essa aqui ó. A3: Não, é a que eu desenhei. A4: Não. E: Tá, deixa só eu arrumar a ordem aqui. A5: [TRECHO INAUDÍVEL] Tá vendo? E: Quatro é aqui. É só porque a ordem está assim ó, um, dois, três, A4: limitada inferiormente? A5: Limitada inferiormente entendeu? A4: Ah tá. Não, dois, três. E: Quatro, cinco, A3: Não, isso aqui é um três. A4: Ah, esse é o cinco. E: Seis, sete.	Nesse momento tanto entrevistadora quanto entrevistados não entram num consenso a cerca da posição das representações, então a entrevistadora reorganiza as representações seguindo a numeração escrita em cada uma delas.
	A4: É, eu estava falando do cinco. A5: É limitada [TRECHO INAUDÍVEL]. A3: Dois, três, quatro, cinco. É.. E: No que elas são semelhantes? Podem falar o que vocês quiserem. A3: Eu ia falar [TRECHO INAUDÍVEL] A4:Fala	Falando das representações apresentadas.
	E: Põe pra fora. A3: Todas são pontinhos. A4: Todas são pontinhos. É. E: Todas são pontinhos, isso não é idiota. A4: Não, isso é verdade. Você pode [TRECHO INAUDÍVEL] A3: É, não é uma função contínua né? Contínua não é aquela que escreve sem tirar a caneta do papel?	Entrevistadora fala em tom amistoso
	E: Eu não respondo nada.	Fala de forma amigável.
	A3: Tô falando... com eles. E: É que você está olhando para mim e de mim não vai sair nada. A3: É uma reação. Mas é sério, contínua não é aquela que escreve sem tirar do papel? A5: Mas e aquele intervalo? Quer dizer, quer dizer que tem intervalos aí então? A3: é. A4: Todas elas são limitadas inferiormente. Isso eu posso garantir. Agora eu não posso garantir que essa aqui é limitada superiormente. E eu vou ser chato com isso. A3: Eu ia falar que é. E: Pelo desenho você acha que você não pode dizer isso? A4: Não, claro que não.	Fala rindo. A3 por diversos momentos demonstrou buscar na entrevistadora, entretanto, a fim de manter a integridade da pesquisa, a pesquisadora optou por se responder apenas o essencial. Nesse momento a confusão da noção de continuidade se dá pois o mesmo está confundindo o conceito de continuidade quando o domínio é o conjunto dos números reais e quando o domínio é um conjunto discreto (como é o caso de sequências, cujo domínio é o conjunto dos números naturais) A4 fala essa aqui se referindo a sequência 5

27	Estranho: Licença e desculpa incomodar, mas algum de vocês tem carregador de iphone para me emprestar urgente? A3: Cara, eu até tenho mas vou usar ele daqui a pouco. Estranho: Valeu.	
28	E: Quais são as similaridades? Vocês podem falar o que vocês quiserem. A3: Quais são o que? E: Quais são as similaridades? O que que elas, o que tem em comum. A3: Tem em comum? A1: todas elas? E: O que vocês quiserem. Se vocês quiserem selecionem um exemplo... A3: Eu diria que a 1, a 2, a 4, e a 5 convergem para um determinado k. A2: Essa não? A3: Eu falei, é a 4. A5: Essa aqui é a 4 não? A2: Essa aqui A3: Ah, não, pode crer. A 3 também.	
29	A4: Aquela ali a gente não sabe. A3: Qual. A2: Como assim? A4: A 6 é. Não sabe A3: Não, a 6 e a 7 não. E: Não o que? A3: Não converge. A4: E a 5 também não. A3: A 5 vou ser chato e fala que converge.	
30	E: Tá. Vocês podem dizer mais alguma coisa? O que elas têm de diferente? A3: Ah velho. A4: Algumas só são com relação ao módulo A3: Cara, eu posso ser abusado e falar que essa parece a inversa daquela? A inversa não mas, mas essa parece ser o módulo dessa. A5: A inversa não. A4: Não, não. A2: Não. A3: Não, não. Pode crer. As duas são positivas. Pensei que... É porque o risco que eu fiz estava me confundindo. A5: É.	Se referindo as sequências 1 e 3
31	A1: Uma é crescente e a outra decrescente. A3: é, isso. A5: é. A3: Isso eu posso afirmar. A4: Tem alguma [TRECHO INAUDÍVEL] os dois. A3: Cara. As duas parecem e essas duas também.	Fala apontando para as sequências 2 e 4.
32	A1: Parecem que são um deslocamento da função; A5: Aquelas duas lá não são iguais, são diferentes.	A5 fala apontando em direção das sequências 2 e 4.

	A2: Não.... são... parece que deslocou para cima entendeu? No caso essa daqui foi deslocada para cima, entendeu? A5: Sim, sim. A3: Vamos supor que aqui fosse, sei lá, menos três. Deslocou três pra cima. A5: Tô entendendo. A4: É verdade. Ali, naquela ali a gente tem uma que é absolutamente convergente. [TRECHO INAUDÍVEL] não necessariamente. Na outra também. Ai, saco. E: Só tenta falar para mim de qual você está falando para depois quando eu for fazer a transcrição eu saber de qual diagrama você está falando. A3: Está assim, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.	A4 fala apontando inicialmente para a sequência 2 para em seguida apontar para a sequência 3 A3 explica a ordem das representações
33	A2: Essa aqui parece uma coisa maluca, tipo o número de ouro. A3: Então o 7 para cá que aí os ímpares estão aqui. Qual o número de ouro? A2: Essa parece aquela coisa maluca lá, número de ouro, sequência de Fibonacci que converge para um número que ela vai fazendo assim e pá. E: Gente, sem pensar na forma algébrica. A3: Mas não tem como. E: Só na forma gráfica. A2: Mas eu não falei a forma algébrica, só falei um exemplo. A3: [TRECHO INAUDÍVEL]	Aqui os entrevistados recorrem à forma algébrica, talvez como forma de validação de suas hipóteses.
34	A4: O que elas têm de diferente. A1: A 4 parece a 3 deslocada, a gente [TRECHO INAUDÍVEL] para cima.. A2: Essa aqui parece essa A5: É, parece. A3: Cara, essa parece que foi espelhada de e deslocada. A5: Não, não essa aqui é constante essa daí, está vendo? Essa aqui é constante. A4: É, ela faz assim. A2: É, a menos desses iniciais aqui. A5: É.	A2 fala apontando para os diagramas 6 e 7 Apontando para o diagrama 5 Apontando para o diagrama 5 e em seguida para o diagrama 6. Faz movimento para cima e para baixo com o dedo indicador.
35	E: Tem uma dessas representações que vocês acham que é mais geral do que outras? A3:Como assim? A4: Como assim, mais geral? E: Que ela seja uma representação de sequência mais geral. A5: Essa daqui. A2: É. A3: Ah... Qual? A4: é, a 3 e a 1. Aliás, A5: Essa aqui. A4: A 5 e a 1. A3: 5 e a 1. E: A 5 e a 1 são mais gerais?	A5 fala e aponta para a sequência 1. Novamente A5 aponta para a sequência 1.

36	A4: É, elas têm mais características. E: Quais características? A4: Uma é decrescente, converge. E: Não, eu quero que você dê um exemplo que seja mais geral. Me dê um exemplo que você ache que seja mais geral que os outros? A3: A Constante? A1: [TRECHO INAUDÍVEL] as monótonas. A3: Eu pensei na constante. Eu diria a constante. E: Por que? A3: Monótona, convergente, limitada, se ela é monótona não é oscilante. A4: Mas as outras também são A3: Sim, mas ela pediu um exemplo geral. A que possui mais coisa é ela. A4: Mais geral, mais geral? E: Vocês podem discordar dele. A4: Eu discordo de A3. E: Qual você acha que é mais geral? A4: A 1 e a 5. Eu acho mais geral. A3: Tá, mais um exemplo. Eu vou ser chato com isso. A4: Como assim um exemplo? Eu não entendi. A3: Ela quer um. Das sete que tem, que você fale um que você acha A4: Você quer que eu escolha [TRECHO INAUDÍVEL] mas tem que escolher só um. A3: é. A4: Ah tá, então a um eu acho mais geral. E: Vocês podem discordar. A2, você concorda? A1: Eu acho que a mais geral seria a 2. E: 2? A3: 2? A4: Dois é aquela lá. A3: A 2, porque você juntou a 1 com a 3. A1: É a que tem mais variação. Aqueles exemplos que vocês escolheram são muito.... específicos. A3: Pode crer. A2: Não é monótona, não é.... A1: Sim, exatamente. A2: Só é convergente. A1: Só não pode ser aquelas mesmas coisas. A3: É, me sinto convencido. A2: Não é monótona, não é oscilante. A1: Você tem a parte negativa, [TRECHO INAUDÍVEL]Xconvergir. A4: Eu sei agora, você tem que ter duas características, né? A3: Sim, mas ele conseguiu juntar a 1 e a 5 como você queria em uma só. A4: Não, mas não tem as mesmas características. A2: É, e essa aqui né?	A entrevistadora entende que neste momento A4 está buscando exemplos de generalidade em cada um dos exemplos, quando na verdade a entrevistadora está pedindo um exemplo que seja mais geral que os demais - A3 fala olhando para A1. Nesse momento a entrevistadora acena positivamente com a cabeça para responder A4. A3 pergunta apontando para a sequência mencionada, talvez como uma tentativa de confirmação A2 fala apontando para a sequência 4.

	A3: [TRECHO INAUDÍVEL] A1: Porque eu, ainda falando da 2, porque ela tem negativos. A2: A, sim. A5: Uma coisa também, não sei se tem a ver, os espaços. A4: Como assim? A3: Entre A5: Os intervalos A1: Para mim eles parecem igualmente espaçados. A4: A, talvez uma divisão, assim... não faz diferença. A3: É, tipo, aquelas primeiras estão mais perto. A4: Não, é impressão sua. A lá, é ilusão de ótica. A3: É. A2: Vamos brincar de ligar os pontos. A3: Calcular a distância.	A2 fala isso enquanto pega uma lapiseira para começar a escrever sobre um dos diagramas apresentados.
37	E: Algo mais que vocês queiram acrescentar? A3: Não. Eu não. E: Não? Então agora, é a última coisa que eu vou pedir para vocês fazerem hoje, vocês conseguem criar para mim uma sequência que vocês definam como mais geral? A3: Putz. E: Que agora vocês falaram que, você disse que a 1 A3: Mas eu não sei qual seria a definição de mais geral. Ele me convenceu quando disse que tipo, se eu fosse fazer uma sequência qualquer eu chegaria mais próximo daquela. E: Então tá, vou mudar a minha pergunta. Vocês conseguem fazer uma representação que junte todas as ideias de todas essas aqui? A2: Não, A3: Aí não. A2: Porque não tem como ser [TRECHO INAUDÍVEL] do que isso. E: Não? Mas você acha que você não consegue juntar as ideias de forma nenhuma? A2: Sim, talvez com a constante, por exemplo. A4: Pode desenhar todas juntas né? E: Pensa no seguinte: A4: Botar o primeiro ponto da 1, o segundo da 2, o terceiro da 3. E: Nem toda sequência ela tem uma fórmula geral. Algébrica. Perdendo isso de vista. A4: Aqui aqui.	Entrevistadora fala você apontando para A3 A3 fala ele apontando para A1. Fiz besteira dando esta instrução? Guiei os entrevistados para aquilo que eu esperava que acontecesse?
38	E: Tirando isso, falando só da sequência na representação gráfica. Vocês não acham que, pode deixar depois eu pego, vocês	

	acham que vocês conseguem juntar todas essas ideias numa única sequência? A4: Eu consigo. E: Consegue? A3: Ele consegue. A4: O primeiro ponto E: Não! Desenha aí! Pode desenhar, por favor. A4: Vou desenhar. A3: Sinta-se a vontade. A4: Me dá todas as sequências. A5: Quer todas aqui? A4: Quero? A3: Tu vai pegar um ponto de cada? A4: Um ponto de cada. Aí cada subsequência vai ter todas as características possíveis. É a coisa mais geral possível. A3: É, faz sentido, mas... A1: Isso se os valores de xis forem diferentes. A3: Em cada unidade. A1: Em cada um dos pontos. A4: Não, mas aí vocês está [TRECHO INAUDÍVEL] A5: [TRECHO INAUDÍVEL] A1: Tipo, x1 do gráfico 1 se diferente do x1 do gráfico 2 A4: Mas quando você está lidando com as subsequências você ignora os outros. Você só lida com os da subsequência que você escolheu. A1: Ok. A4: Aí tem todas as características possíveis. Quando você vê como um todo é uma bagunça. Tô com preguiça de desenhar. A3: Ah, para.	A4 começa a batucar em A3, demonstrando certa ansiedade. A4 começa a descrever como ele imagina a que será a sequência, entretanto a entrevistadora o interrompe para pedir que ao invés de falar, que ele apresente no pedaço de papel fornecido o que ele imagina da sequência A1 diz ok, entretanto sua expressão não demonstra grande concordância.
39	E: Por favor. É a última coisa de hoje. A3: Bora que a gente tem teste ainda. A gente tem teste do XP. E: Eu faço o que vocês pedirem na próxima aula. A3: Ele não vai dar aula hoje vai? A1: Vai. Por isso que ele vai dar os temas das palestras. E: Já está acabando. É só isso e a gente encerra por hoje. A3: De boa. A4: três é. E: As duas são minhas? A3: São	A entrevistadora pergunta sobre duas lapiseiras
40	A5: Essa aqui é 5. Quer pegar a sequência? A4: Vou colocar uma de cada assim, tá bom? A5: Essa aqui é quatro. Dois, quatro. A4: Dois, três, quatro. A5: É a 6 A4: Seis aí em baixo. A5: Seis.	A5 oferece as sequências apresentadas pela entrevistadora e quando obtem resposta positiva, começa a colocar as sequências de forma que A4 possa ver. A5 fala olhando para as sequências e enquanto escreve, A4 também olha para as sequências, como se em busca de um referencial.

	A4: De baixo é o que? A5: Sete. A4: A sete é aqui em cima. A2: [TRECHO INAUDÍVEL] A4: Aí a um, a segunda não dá com um. Pega a segunda	Enquanto A4 desenha, os demais olham a distância e A3 mexe no celular.
41	A1: O que está esperando ele desenhar? E: Um exemplo, uma representação que traga, una todas as ideias de todas as sequências que foram apresentadas. A4: Aí a minha ideia foi, botar o primeiro do primeiro, o primeiro do segundo, tarará. E assim pra sempre. Aí vai ter todas as características. A3: [TRECHO INAUDÍVEL] A4: [TRECHO INAUDÍVEL] a dois e a um. A2: Essa daí não vai ter nenhuma cara. A4: Não, vai ter subsequências que vão ter, você pode escolher qual subsequência você quer e tirar todas as características. A2: Mas a sequência em si não tem. A4: Em si não tem nenhuma. O que torna mais geral ainda. Porque além de ter todas as características não tem nenhuma. A2: Mas será que não vai ser convergente? A1: Como é que você vai conseguir... A4: Não, não vai ser convergente. A2: Não porque com oscilante. A4: Mas as subsequências vão ser. A1: Exatamente. A4: Oi? A1: Mas... A2: A menos daquela vai ser [TRECHO INAUDÍVEL]. A menos daquelas duas oscilantes vai ser convergente. A3: Entendi. A4: [TRECHO INAUDÍVEL] A3: [TRECHO INAUDÍVEL] A2: Não, é porque [TRECHO INAUDÍVEL] então A1: [TRECHO INAUDÍVEL]	Nesse momento os três entrevistados começam a falar ao mesmo tempo, o que impossibilita a compreensão.
42	E: O que que vocês acham... A2: [TRECHO INAUDÍVEL] E: O que que vocês acham que deveria acontecer ali naquele desenho para que elas convergissem. Para que ela convergisse. A gente está falando agora dessa sequência. A2: Existe um épsilon. E: Não, falando no desenho A3: Maior que zero. A2: Para todo. E: Esquece que a gente sabe álgebra. A4: Ó, nesse desenho, não, não converge. A1: A gente vai ter que.... Falando pelo desenho E: Voltamos a cinco séculos atrás.	Nesse momento a entrevistadora dá ênfase, em sua fala, ao fato de que agora o foco é a sequência geral criada por eles. A entrevistadora faz uma brincadeira com os entrevistados, na tentativa de reforçar a

	A1: Pra convergir tem que que passar uma reta paralela a x A4: Cara, tecnicamente, olha só, tecnicamente você pode você pode A3: E todas elas se aproximarem A1: E todas elas irem se aproximando cada vez que A4: Olha só, calma, todas elas, calma, todas elas têm um ponto, é, são limitadas superiormente, você concorda? A3: Certo A4: Se você escolher o mesmo ponto para ela ser limitada superiormente elas vão convergir para esse ponto máximo. A3: Mas inferiormente também A2: Não, elas podem convergir para um outro ponto também. Mais em baixo A3: É. Acabou contigo. A2: Pode convergir para dois lugares diferentes. Eu acho. A4: É, se eu pegar [TRECHO INAUDÍVEL] elas vão para lugares diferentes então, não converge. Se eu pegasse... sei lá A1: Você ia ter que limitar o domínio para ela ser convergente pro lugar que você quer. A3: [TRECHO INAUDÍVEL] A4: Calma A1: Se conseguir. A4: É isso. A1: Pra xis um e xis dois você consegue, mas pro resto... Talvez. A4: Aí a cinco	ideia de que as propostas não deveriam se basear em ferramentas algébricas, mas puramente gráficas
43	E: Eu só estava olhando porque ela tem problema na tomada e a bateria não dura muito. Se mexer um pouquinho ela pode parar de gravar. E aí eu ia ficar muito triste. Se essas informações preciosas que vocês estão me dando... A1: [TRECHO INAUDÍVEL] E: hã? A3: Nem eu E: O que que foi? A3: Isso não vai para o currículo. E: Por que não gente? A3: Pô, as besteiras que eu falei... E: Vocês podem estar revolucionando .... A1: depois dessas besteiras. A4: Aqui, essa é a subsequência de todas as subsequências. A1: [TRECHO INAUDÍVEL]	
44	E: Vocês conseguem dizer alguma coisa dessa sequência? A2: seja épsilon maior que zero. A3: Para todo épsilon maior que zero existe um... Fala aí cara. A2: ene zero.	A2 fala em tom de brincadeira

	A4: Aqui eu tô falando, se você for, todas elas convergem para o algum lugar. O teu ponto superior. Se você... A1: [TRECHO INAUDÍVEL] A4: é, porque tem as negativas né? Que não convergem at all, assim... A1: Tipo assim, se você pegar essa daqui, A4: Se você pegar o módulo delas A1: está convergindo para onde? A3: Pra nada. A1: Só pegar essa parte aqui. A4: Tá, você está falando, você pega as oscilantes então e você pega o módulo delas. E: A gente pode pegar pedaços e falar que nesse pedaço a sequência converge? A5: Pode ser uma subsequência? A1: É, se for uma subsequência... Mas nem toda subsequência convergindo pro mesmo lugar então.... A3: A sequência não converge. A4: É, mas você pode forçar isso. E: Forçar como? A4: Ué, você movendo. A1: Como forçar essa, esse ponto xis um e xis dois convergirem pro mesmo lugar dessa xis três e xis cinco? A4: Você pega todas que convergem e leva pro mesmo lugar, e as que não convergem que são as que, são mais e menos, mais e menos, você pega o módulo delas. Você põe o ponto, convergindo. E: Sem falar em álgebra. A4: Mas eu não estou falando em álgebra. E: Você está falando módulo. A4: Quem, eu falei em módulo? E: Falou. A3: Falou em que? E: Módulo A5: Módulo.	Fala apontando para a sequência criada por A4 como exemplo de sequência mais geral e que no momento da fala estava em sua mão Fala apontando para um pedaço da sequência que foi feita, mas devido a posição da câmera e do papel, não é possível ver a que parte ele estava se referindo. XIS um, xis dois, etc se referem aos pontos da sequência criada
45	A1: Que senão seria, a mesma coisa que dizer que você consegue fazer aquela sequência... Posso? E: Claro. A1: Que nessa... A3: Vamos falar menos ela quando ela é negativa e ela quando é positiva. A1: .... aqui converge. E: Qual é essa? A1: Ahhh.... sete. A4: Não, essa não converge. A1: Então, eu tô dizendo que você conseguiria fazer a mesma coisa para ela convergir. A4: Não, só tô usando a um. A3: [TRECHO INAUDÍVEL]	Sinaliza que quer pegar as sequências que haviam sido apresentadas no inicio do segundo momento.

	A1: Então, olha só. Da mesma forma você consegue manipular essa daqui pra fazer ela convergir. A4: Sim, sim. Mas [TRECHO INAUDÍVEL] uma regra, não dá pode roubar. A3: [TRECHO INAUDÍVEL] A4: É, pera, tem alguma característica daquela E: Como é que você quer roubar? Desculpa, não entendi. A4: Não, usando álgebra, é. A3: Usando álgebra E: Não, usando, esquece a álgebra. A4: é, então. Exato. A3: É, porque a regra do jogo é assim.	
46	E: A gente conseguiria fazer essa aqui convergir? A3: Eu acho que não A4: Se você pegar só os pares dessa aqui e botar aqui sim. E: Botar aqui onde? A4: Botar nesse gráfico aqui. Por exemplo, esse aqui, é esse aqui . E: Mas como você vai fazer isso? Repetindo isso aqui e depois colando isso aqui depois? Ou você colocando isso aqui depois? A4: Não, olha só. Eu não entendi o que você falou. E: Então fala para mim como você pretende fazer ela convergir porque eu não entendi. A4: Olha só... Todos os.... os... as.... E: Os pares aqui, que estão acima do gráfico. A4: Exato. Você vai botar nesse gráfico. Os ímpares você ignora. Por construção. E: Tá. A4: Os outros são os que convergem, você constrói de uma maneira que eles convirjam a um ponto que você escolheu, esse ponto que você escolheu.	Fala se referindo a sequência criada. Fala apontando para, possivelmente, a sequência 7 (A7 pegou a sequência do bolo de sequência apresentadas) Falando primeiro da sequência feita por eles e depois da sequência mencionada por A4.
47	E: Você consegue desenhar? O que você está pensando, aqui? A4: Cara, mais ou menos E: É que fica mais fácil pra eu entender. A1: No caso você quer selecionar o xis que você vai querer usar. A4: é, você vai selecionar. E: Então, desenha aí pra mim. A1: No caso o n A4: Você só pode ter um de cada um né, então... É tipo... é estranho E: Só pode ter um de cada um por quê? A4: Um ponto de cada vez porque... como a parada é.... uma função, você não pode ter um enecom dois valores. [TRECHO INAUDÍVEL] E: Pensa que você está querendo fazer convergir uma sequência.	A1 e A2 respondem que sim com a cabeça.

	A4: Cara, vocês, vocês entenderam o que eu quis dizer? E: Tenta desenhar A3: Mais ou menos E: Por favor A4: Fica difícil. [TRECHO INAUDÍVEL] fica muito grande E: Faz mais juntinho os pontos, ao invés de fazer tão separado. A3: Usa os quadrinhos pequenos. A4: Tá, eu vou fazer meio que... De qualquer jeito mas...	
48	A3: [TRECHO INAUDÍVEL] E: Hã? A3: Muito cotcholi. E: Muito o que? A3: Cotcholi. E: O que que é isso? A3: Chabi. E: Não conheço esse vocabulário, essa língua. Eu sei um pouco de espanhol, falo inglês, tô aprendendo francês, mas essa língua aí não entrou no meu dicionário. A3: Cotcholi, o nome já é meio, né.... A1: [TRECHO INAUDÍVEL] E: É... Me diz, me dá depois onde eu posso aprender essa língua aí. Por favor. Essa aí, eu não tenho conhecimento nenhum. A3: O cotcholi é.... existe o he, she, it E: Aham… A3: Entendeu? O cotcholi é o it. E: Boa! A1: [TRECHO INAUDÍVEL] A3: Exatamente. E: Tá ótimo. A3: Essa parte tu exclui. E: Ahhh.... certamente. Gente, eu vou ter que transcrever, eu vou escolher com muito carinho o que eu vou transcrever então podem ficar tranquilos A1: Ahhh que bom.... A3: Mano, eu quero muito aprender inglês velho. Quero ir pra Califórnia. A3: Maneiro cara... E: Sabe qual o melhor jeito de você aprender? Falando. A3: Tá, mas... A4: Vendo vídeo, acho que é a melhor coisa. A1: Tem uns sites A3: Eu só assisto vídeos E: É, filme eu só vejo legendado. A1: Tem sites... que você consegue conversar com pessoas de outros países. E: Oi? A1: Tem sites que você conversar com pessoas de outros países. Quando eu estava aprendendo inglês eu usava muito isso.	

	A3: Mas é falado? E: Eu usava o livemocha. A1: Falar... você pode ver a pessoa. A4: é mas tem aquele problema né? Tem pessoas que ficam peladas A1: É. A3: Aí é ruim. A1: Mas tem site que está censurando isso. E: Eu usava o livemocha, que é um site pra se aprender outras línguas A4: Ó, E: E aí você conversava.	
49	A4: Tá bem bizarro. E: Tá, mas explica pra mim o que você fez por favor. A4: Olha só, eu botei, eu botei meio que a moda... que eu quis. A3: A lá vontê. A4: A lá vontê. E: aham. A4: Todas as sequências que você mostrou E: Aham. A4: Eu botei aqui. E: Aham. A4: E as que não convergem, eu excluí os pontos que... eu achei que iam.... é... A3: Dar problema. A4: É, não... Fazer dar.... é, [TRECHO INAUDÍVEL], exato. E eu escolhi um ponto... é, no caso o 1... agora não, cinco A3: y igual a um, sei lá A1: ene. A4: Tanto faz, ene. Para ser o ponto de convergência. E todos os que são constantes eu botei nesse ponto. E todos que estão crescendo eu botei pra variar pra esse ponto e todos que estão fazendo assim, eu botei pra ir pra esse ponto e todos que estão fazendo assim. Mesmo que a... [TRECHO INAUDÍVEL] chato, estão convergindo pra esse ponto.	Fazendo gesto com a mão pra cima e para baixo e movendo para esquerda do vídeo Faz gesto com a mão crescendo e indo pra esquerda do vídeo.
50	E: Hãm? Ótimo, muito obrigada, pela paciência de vocês hoje. Por hoje é isso. Muito, muito, muito obrigada de verdade mesmo, assim. Vocês não tem noção. A1: Muito de nada. E: O quanto eu agradeço por vocês estarem aqui, e quarta feira de novo. Pretendo, e aí vocês escolhem. A3: Aí quarta você traz o Bis né? E: Hã? A1: Oi? A3: I não, essa parte não podia falar. E: Que?	

	A3: Falei quarta feira tu traz o Bis né? I não, essa parte não era. E: Não, mas eu posso. A3: Não! É brincadeira. A5: Depois de [TRECHO INAUDÍVEL]. A1: Não, mas se quiser.... E: É permitido pelo comitê de ética que eu ressarça vocês de alguma forma. Isso é permitido. A1: Hummm.... A3: Aí eu vi vantagem. E: Mas olha só. É... Eu quero saber de vocês. Vocês preferem, para vocês assim tá bom... Ou vocês querem inverter a ordem? A1: Acho que assim no final é melhor. A4: É melhor, vai chegar gente atrasado. Tipo eu. E: Então... A3: Aí eu venho direto do estágio também. E: Então está ótimo. Então começo a aula fazendo exercícios e quem chegando vai entrando no bonde. Agora por favor. Estudem definição, porque quando eu chegar na sala, quarta feira, vou começar daí. A1: ok. E: Gente, muito obrigada de coração. A5: Obrigada você.	