Instituto de Matemática

Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFRJ

Um Estudo do Fenômeno de Dissipação Anômala em Equações de Fluidos 2D Forçadas

David Antonio Paternina Salgado

Rio de Janeiro, Brasil

23 de dezembro de 2024

Um Estudo do Fenômeno de Dissipação Anômala em Equações de Fluidos 2D Forçadas

David Antonio Paternina Salgado

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Helena J. Nussenzveig Lopes

Coorientador: Milton C. Lopes Filho

Rio de Janeiro, Brasil

23 de dezembro de 2024

CIP - Catalogação na Publicação

S249e

Salgado, David Antonio Paternina
Um Estudo do Fenômeno de Dissipação Anômala em Equações de Fluidos 2D Forçadas / David Antonio Paternina Salgado. -- Rio de Janeiro, 2024.
128 f.

Orientador: Helena Judith Nussenzveig Lopes.
Coorientador: Milton da costa Lopes Filho.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós Graduação em Matemática, 2024.

1. Dinâmica de Fluidos. 2. Soluções Estatísticas Estacionárias. 3. Dissipação Anômala. 4. Equações de Camassa-Holm Generalizadas. 5. Limite de Banach. I. Nussenzveig Lopes, Helena Judith, orient. II. Lopes Filho, Milton da costa, coorient. III. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

David Antonio Paternina Salgado

Um Estudo do Fenômeno de Dissipação Anômala em Equações de Fluidos 2D Forçadas

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática

Helena J. Nussenzveig Lopes
Orientador

Milton C. Lopes Filho
Coorientador

Juliana Fernades da Silva Pimentel, IM/UFRJ

Fabio Antonio Tavares Ramos, IM/UFRJ

Alexey Maylybaev, IMPA

Gabriela del Valle Planas, UNICAMP

Rio de Janeiro, Brasil
23 de dezembro de 2024

A minha família.

You can't always get what you want,
but if you try sometimes, you might
find you get what you need.
Rolling Stones

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus orientadores, Professora Helena Nussenzveig e Professor Milton Lopes, pela orientação dedicada e pelo valioso acompanhamento ao longo deste percurso. Suas lições, paciência e cuidado na revisão deste trabalho foram fundamentais para o desenvolvimento desta tese.

Aos professores do curso de doutorado — Pedro Gamboa, Graham Smith, Katrin Gelfert, Didier Pilod, Maria José Pacifico, Lacramioara Marianty e Paolo Amorin —, registro minha sincera gratidão pela excelência no ensino e pelas contribuições significativas para minha formação acadêmica.

Agradeço, também, aos professores que compuseram minha banca avaliadora: Juliana Pimentel, Fabio Ramos, Gabriela Planas, Alexey Maylybaev, Ricardo Rosa e Anne Bronzi. Suas correções e sugestões foram essenciais para o aprimoramento deste trabalho.

Expresso minha profunda gratidão aos colegas que estiveram ao meu lado durante essa jornada. Em especial, à Diana Santos, por suas sugestões valiosas para a escrita desta tese e pelo apoio moral nos momentos mais desafiadores.

Reconheço, ainda, a importância dos funcionários do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM-UFRJ), que, com dedicação, garantem as condições necessárias para um ambiente de trabalho produtivo e suporte administrativo eficiente.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro e ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM-UFRJ), que proporcionaram o suporte indispensável para a realização desta tese.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o Fenômeno de Dissipação Anômala de enstrofia potencial para a família de equações de Camassa-Holm Generalizadas (CHG) em um domínio periódico bidimensional, que são obtidas como uma interpolação entre as equações de fluidos de segundo grau e as equações de Camassa-Holm.

Neste contexto, primeiramente, provamos a existência e a unicidade da solução das equações CHG. A existência é verificada por meio do método de Galerkin. Para a unicidade, estabelecemos uma desigualdade diferencial e aplicamos uma desigualdade de tipo Grönwall. Logo, demonstramos que, para valores de β no intervalo $1/2 < \beta \leq 1$, ocorre ausência de dissipação anômala de enstrofia potencial. Por outro lado, para o caso $\beta = 0$, o sistema admite dissipação anômala de enstrofia potencial, mais especificamente dissipação infinita.

A análise do fenômeno de dissipação anômala de enstrofia potencial foi realizada investigando o limite invíscido das médias temporais de longo prazo das soluções das equações CHG e logo identificando as médias temporais de longo prazo com as soluções estatísticas estacionárias no espaço fase de vorticidade potencial.

Palavras-chave: Dinâmica de Fluidos, Soluções Estatísticas Estacionárias, Equações de Camassa-Holm Generalizadas, Limite de Banach, Soluções Estatísticas Renormalizadas para a Equação de Euler-α.

Abstract

In this work, we study the phenomenon of anomalous dissipation of potential enstrophy for the family of Generalized Camassa-Holm equations (GCH) in a two-dimensional periodic domain, which are obtained as an interpolation between second-grade fluid equations and the Camassa-Holm equations.

In this context, we first prove the existence and uniqueness of solutions for the GCH equations. Existence is established using the Galerkin method, while for uniqueness, we develop a differential inequality and apply a Grönwall-type inequality. We then demonstrate that for values of β in the range $1/2 < \beta \leq 1$, there is no anomalous dissipation of potential enstrophy. On the other hand, in the case $\beta = 0$, the system exhibits anomalous dissipation of potential enstrophy, specifically infinite dissipation.

The analysis of the phenomenon of anomalous dissipation of potential enstrophy was carried out by investigating the inviscid limit of the long-term time averages of the solutions to the GCH equations and subsequently identifying these long-term time averages with stationary statistical solutions in the phase space of potential vorticity.

Keywords: Fluid Dynamics, Stationary Statistical Solutions, Generalized Camassa-Holm Equations, Banach Limit, Renormalized Statistical Solutions for the Euler-α Equation.

Lista de abreviaturas e siglas

CHG	Camassa-Holm Generalizada
CH	Camassa-Holm
NS	Navier-Stokes
SQG	Quase-geostrófica superficial

Lista de símbolos

J_α^β	Operador de Bessel-α de ordem $\beta \in \mathbb{R}$
Curl	Operador rotacional
Δ	Operador Laplaciano
$\mathbb{P}$	Projetor de Leray
ν	Parâmetro de viscosidade
γ	Parâmetro de amortecimento
α	Escala de comprimento
$v(x,t)$	Campo de velocidade filtrada
$u(x,t)$	Campo de velocidade não filtrada

Sumário

1 Introdução

A dinâmica dos fluidos é uma área central da matemática aplicada, com diversas aplicações em disciplinas como física, engenharia entre outras. Um dos problemas fundamentais na análise dos sistemas dinâmicos que governam o comportamento dos fluidos é entender como as soluções das equações diferenciais que os descrevem evoluem ao longo do tempo. Em particular, as equações de Navier-Stokes (NS), ver [18, 29], juntamente com suas variantes e generalizações, como as equações de fluidos de segundo grau, ver [8, 20, 23], e as equações de Camassa-Holm (CH), ver [6, 7, 17], que têm sido objeto de estudo. Essas equações são capazes de modelar fenômenos complexos, como turbulência e dissipação de energia, que são características importantes no estudo dos fluidos.

As equações de movimento de fluidos de segundo grau são um modelo matemático que descreve o comportamento de fluidos não-newtonianos, onde a viscosidade depende da taxa de deformação. Essas equações são uma generalização das equações de Navier-Stokes, incorporando termos adicionais que capturam a complexidade do fluxo em fluidos que não seguem a lei de Newton da viscosidade. Descritas pelas equações:

$$\begin{cases} \partial_t v + u\cdot\nabla v + \sum_{j=1}^2 v^j \nabla u^j - \nu\Delta u &= -\nabla p + f \\ \nabla\cdot u &= 0 \\ (\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u &= v \\ u(x,0) &= u_0 \end{cases}$$

para os campos de velocidade $u, v : \mathbb{T}^2 \times [0,\infty) \to \mathbb{T}^2$, onde v é a velocidade filtrada e u a velocidade não filtrada, f é uma força dada independente do tempo e o parâmetro $\nu > 0$ fixo referente à viscosidade. Por outro lado, as equações de Camassa-Holm, introduzidas por Camassa e Holm em 1993, foram originalmente derivadas para modelar a propagação de ondas rasas em fluidos incompressíveis. Estas equações exibem a formação de ondas solitárias e a possibilidade de soluções que desenvolvem descontinuidades finitas em tempo finito, conhecidas como “breaking waves”, ver [4]. Várias generalizações dessas equações foram propostas para modelar fluidos com diferentes propriedades físicas, ver [17], como nosso caso, que consideramos as equações Camassa-Holm com amortecimento e forçamento:

$$\begin{cases} \partial_t v + u\cdot\nabla v + \sum_{j=1}^2 v^j \nabla u^j - \nu\Delta v + \gamma v &= -\nabla p + f \\ \nabla\cdot u &= 0 \\ (\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u &= v \\ u(x,0) &= u_0 \end{cases}$$

para os campos de velocidade $u, v : \mathbb{T}^2 \times [0,\infty) \to \mathbb{T}^2$, f é uma força dada independente do tempo, $\gamma > 0$, parâmetro referente ao amortecimento e $\nu > 0$. Ambos parâmetros fixos.

Neste estudo consideramos as equações de fluidos em um domínio periódico, que são obtidas como uma interpolação entre as equações de Camassa-Holm (sistema regularizado das equações de NS) e as equações de fluidos de segundo grau, com o parâmetro de interpolação β no intervalo $0 \leq \beta \leq 1$, descritas por:

$$\begin{cases} \partial_t v + u \cdot \nabla v + \sum_{j=1}^{2} v^j \nabla u^j - \nu \Delta (\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta)^\beta u + \gamma v & = & -\nabla p + f \\ \nabla \cdot u & = & 0 \\ (\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta) u & = & v \\ u(x, 0) & = & u_0 \end{cases}$$

para os campos de vetores $u, v : \mathbb{T}^2 \times [0, \infty) \to \mathbb{T}^2$, f é uma força dada independente do tempo, os parâmetros $\gamma > 0$, $\nu > 0$ e $0 \leq \beta \leq 1$ fixos. O operador de interpolação, denotado por $(\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta)^\beta$, é definido no toro em termos da série de Fourier como:

$$(\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta)^\beta \phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + 4\pi^2 \alpha^2 |k|^2)^{\frac{\beta}{2}} \widehat{\phi}(k) e^{2\pi i k \cdot x},$$

onde $|\cdot|$ é a norma euclidiana e $\widehat{\phi}(k)$ são os coeficientes de Fourier de ϕ. No caso que o parâmetro de interpolação $\beta = 0$, obtemos as equações segundo grau para fluidos, e no caso $\beta = 1$, obtemos as equações de Camassa-Holm, ambas equações forçadas e com amortecimento.

Este trabalho concentra-se na análise do fenômeno de dissipação anômala de enstrofia potencial, que é definida como a integral do quadrado da vorticidade potencial $q(x, t)$, para as equações da vorticidade potencial das equações de Camassa-Holm Generalizadas (CHG), adotando o método apresentado em [11, 12]. A dissipação anômala refere-se a uma situação em que ocorre dissipação de energia mesmo na ausência de viscosidade, especialmente durante o processo de turbulência. A abordagem considerada para investigar a questão da dissipação anômala consiste em utilizar as médias temporais de longo prazo, com o objetivo de atingir um regime estacionário das equações viscosas, enquanto a viscosidade é levada a zero. Ou seja, se denotamos por $S^{(\nu)}(t, q_0)$ a solução da equação de vorticidade potencial para as equações de CHG no tempo $t \geq 0$ a partir do dado inicial q_0 e consideramos as médias temporais de longo prazo para a dissipação de vorticidade potencial, dada por:

$$\langle |\nabla (\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta)^{\frac{\beta - 1}{2}} S^{(\nu)}(t, q_0)|^2 \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla (\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta)^{\frac{\beta - 1}{2}} S^{(\nu)}(t, q_0)|^2 \, dx \, dt. \quad (1.1)$$

Dizemos que a solução viscosa apresenta dissipação anômala de enstrofia potencial quando o valor:

$$\lim_{\nu \to 0} \nu \langle |\nabla (\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta)^{\frac{\beta - 1}{2}} S^{(\nu)}(t, q_0)|^2 \rangle > 0.$$

Segundo a teoria de Kolmogorov para a turbulência em fluidos, espera-se que, em regimes com altos números de Reynolds, a dissipação de energia permaneça finita à medida que a viscosidade tende a zero. Este comportamento é considerado "anômalo" porque, na ausência de viscosidade, a dissipação de energia não deveria ocorrer. Esse fenômeno foi conjecturado inicialmente por Onsager em 1949, ver os artigos [19, 22, 26], e tem sido um tema central em investigações teóricas e numéricas desde então.

As médias temporais de longo prazo para a dissipação de vorticidade potencial (1.1), são identificadas com uma medida de probabilidade de Borel sobre o espaço fase da vorticidade potencial, denominada solução estatística estacionária, ver [11, 12, 15, 16].

Por outro lado, contrastamos a analise feita no capítulo 3 com o resultado do capítulo 4, onde construímos uma solução das equações de vorticidade potencial para as equações de fluidos de segundo grau, que admite dissipação. A construção desta solução é a partir de uma autofunção do operador $(\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta)$ e uma solução de um P.V.I adequado.

A estrutura desta tese é organizada da seguinte forma: no capítulo 2, apresentamos a fundamentação teórica necessária para o estudo das equações de CHG, abordando a existência e unicidade da solução. A existência da equação CHG é abordada por meio do método de Galerkin, enquanto que a unicidade foi tratada desenvolvendo uma desigualdade diferencial para a diferença de soluções, que satisfazem a equação, e aplicando uma desigualdade de tipo Grönwall.

O Capítulo 3, foca no estudo do fenômeno de dissipação anômala para as equações de vorticidade potencial das equações de CHG. O capítulo dividi-se em 5 seções, na primeira seção estudamos a compacidade relativa da semi-órbita positiva, um fato importante, já que sobre este conjunto serão suportadas as soluções estatísticas estacionárias. Conseguimos a compacidade relativa, estimando a norma de Sobolev fracionária $|| \cdot ||_{H^\beta}$ com $\beta > 0$ e aplicando o Teorema de Rellich-Kondrachov. Na segunda seção estudamos o limite invíscido das equações estacionárias de Camassa-Holm Generalizadas e mostramos que este limite é uma solução estatística renormalizada para a equação invíscida. Na terceira seção introduzimos as soluções estatísticas estacionárias no espaço fase de vorticidade potencial para as equações CHG. Para isso, precisaremos de uma classe de funcionais teste, que também serão introduzidos essa seção. Logo, estabelecemos os “Teorema Compacidade relativa e balanço” para as soluções estatísticas estacionárias no espaço fase de vorticidade potencial, que bordam a existência de uma subsequência convergente de uma sequência de soluções estatísticas estacionárias dadas e uma equação de balanço de enstrofia potencial no sentido das soluções estatísticas estacionárias que definiremos nessa seção. Na quinta seção definimos as médias temporais de longo prazo como um limite de Banach e como este limite de Banach é identificado com as soluções estatísticas estacionárias.

O Capítulo 4, apresentamos uma solução para as equações da vorticidade potencial para as equações de fluidos de segundo grau, que admite dissipação anômala.

Finalmente, o Capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho.

2 Existência e Unicidade das equações de Camassa-Holm Generalizadas

Neste capítulo iremos demonstrar a existência e unicidade da solução para as equações de Camassa-Holm Generalizada (CHG) utilizando o método de Galerkin. Assumiremos condições de fronteira periódicas. Isto é, consideramos um domínio periódico definido por $\mathbb{T}^2 := [0,1]^2$ e a solução periódica em cada direção espacial. O toro $2-$dimensional, pode-se identificar com o espaço $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Assim, para cada $u \in L^2(\mathbb{T}^2)$, u é expandida em uma série de Fourier:

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \widehat{u}(k)e^{2\pi ik\cdot x} \quad \text{com} \quad \widehat{u}(k) = \int_{\mathbb{T}^2} u(x)e^{-2\pi ik\cdot x}\,dx.$$

O capítulo será dividido em 3 seções: Definição da equação de Camassa-Holm Generalizada, demonstração da existência da solução e demonstração da unicidade da solução.

2.1 Equações de Camassa-Holm Generalizadas

As equações de Camassa-Holm Generalizadas neste estudo são definidas como a interpolação entre as equações de Camassa-Holm e a equações de fluidos de segundo grau. Ambos sistemas usados na modelagem de fluidos.

Introduzimos as equações de Camassa-Holm Generalizadas:

$$\begin{cases} \partial_t v + u\cdot\nabla v + \sum_{j=1}^2 v^j \nabla u^j - \nu\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^\beta u + \gamma v &= -\nabla p + f \\ \nabla\cdot u &= 0 \\ (\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u &= v \\ u(x,0) &= u_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

para os campos de vetores $u, v : \mathbb{T}^2\times[0,\infty)\to\mathbb{T}^2$, f é uma força dada independente do tempo, os parâmetros $\gamma > 0$, $\nu > 0$ e $0 \le \beta \le 1$ fixos.

Se consideramos o forçamento e o dado inicial com média zero, obtemos que a média da solução da equação (2.1) permanece invariante. De fato, utilizando integração por partes e que o campo $u(x,t)$ tem divergência nula, temos que o termo não linear na equação (2.1) se anula. Desse modo, obtemos que:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^2}\Big(u(x,t) - \alpha^2\Delta u(x,t)\Big)\,dx + \gamma\int_{\mathbb{T}^2} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{T}^2} f(x)\,dx.$$

por outro lado, pela periodicidade espacial da solução, temos que

$$\int_{\mathbb{T}^2}\Delta u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{T}^2}\nabla\cdot(\nabla u(x,t))\,dx = \int_{\partial\mathbb{T}^2}(\nabla u(x,t))\cdot\vec{n}\,ds = 0.$$

Por conseguinte,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^2} u(x,t)\,dx + \gamma\int_{\mathbb{T}^2} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{T}^2} f(x)\,dx.$$

equivalentemente obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\gamma t}\int_{\mathbb{T}^2} u(x,t)\,dx\right] = e^{\gamma t}\int_{\mathbb{T}^2} f(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Observe que, como assumimos que,

$$\int_{\mathbb{T}^2} f(x)\,dx = 0,$$

então a equação (2.2) é igual a zero. Integrando de 0 a t, temos que

$$\int_{\mathbb{T}^2} u(x,t)\,dx = \left[\int_{\mathbb{T}^2} u_0(x)\,dx\right]e^{-\gamma t}$$

onde $u(x,0) = u_0(x)$ é o dado inicial. Isto é, a média da solução é invariante desde que a média do dado inicial seja zero. Neste trabalho consideraremos forçamentos e dados iniciais com médias espaciais zero, ou seja, assumiremos

$$\int_{\mathbb{T}^2} u_0(x)\,dx = \int_{\mathbb{T}^2} f(x)\,dx = 0.$$

Apresentamos os espaços de funções e operadores que serão utilizados ao longo deste capítulo.

Em seguida, definimos o subespaço linear,

$$\dot{E} = \left\{\varphi \in (L^1(\mathbb{T}^2))^2 \,:\, \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(x)\,dx = 0\right\},$$

Consideramos por $\mathcal{E}$, o subconjunto de $\dot{E}$ definido por:

$$\mathcal{E} := \left\{\varphi \in \dot{E} \,:\, \varphi \text{ é um polinômio trigonométrico com valor vetorial e } \nabla\cdot\varphi = 0\right\}.$$

Seja o espaço H o fecho de $\mathcal{E}$ em $L^2(\mathbb{T}^2)$ e seja o espaço V o fecho em $H^1(\mathbb{T}^2)$.

Observe que H e V herdam os produtos internos e as normas de L^2 e de H^1 respectivamente. Introduzimos a seguinte notação de produto interno e norma para H:

$$(u,v)_H = \int_{\mathbb{T}^2} u\cdot v\,dx \quad \text{e} \quad ||u||_H = (u,u)_H^{\frac{1}{2}}, \tag{2.3}$$

para $u, v \in H$. De igual maneira, introduzimos a notação de produto interno e norma para V:

$$(w,z)_V = (\nabla w, \nabla z)_H = \int_{\mathbb{T}^2} \nabla w\cdot\nabla z\,dx \quad \text{e} \quad ||w||_V = (w,w)_V^{\frac{1}{2}}, \tag{2.4}$$

para $w, z \in V$.

Vamos precisar usar um operador linear especial chamado de *operador de Stokes*, definido por

$$S := -\mathbb{P}\Delta,$$

onde $\mathbb{P} : L^2(\mathbb{T}^2) \to H$ é o projetor ortogonal de Leray-Helmholtz. O domínio $D(S)$ do operador de Stokes é dado por $H^2(\mathbb{T}^2) \cap V$. Note que, devido às propriedades do operador de Leray-Helmholtz em domínios periódicos, temos que:

$$-\mathbb{P}\Delta(u) = -\Delta\mathbb{P}(u).$$

Por conseguinte, o operador de Stokes é redefinido como

$$S(u) := -\Delta u,$$

para toda $u \in D(S)$. Desse modo, o operador de Stokes preserva propriedades relevantes do $-\Delta$, a saber: é um operador auto-adjunto, positivo e tem inversa compacta. Assim que, existe uma família de campos de vetores, $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$, que são autofunções do operador S e, pelo Teorema de regularidade elíptica, essa família de autofunções resultam ser suaves. Além disso, $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal em H. Associada a essa família de autofunções, há uma sequência de autovalores $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que são positivos e não decrescente, satisfazendo

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \ldots$$

Logo, qualquer elemento $u \in H$ pode-se representar como:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}(k) w_k(x) \quad \text{com} \quad \widehat{u}(k) = (u, w_k)_H, \tag{2.5}$$

Além disso, $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forma uma base ortogonal em V. Isto é, se consideramos w_k e w_j duas autofunções do operador de Stokes e calculamos o produto interno em V, temos que

$$(w_k, w_j)_V = (\nabla w_k, \nabla w_j)_H = (-\Delta w_k, w_j)_H = \lambda_k (w_k, w_j)_H = \lambda_k \delta_{k,j},$$

onde $\delta_{k,j}$ é a *função delta Kronecker*. Dessa maneira, vemos que a família de autofunções do operador de Stokes é uma base ortogonal em V.

Dado que $u(\cdot, t)$ para cada t tem média zero, então a desigualdade de Poincaré nos garante que as normas $||\cdot||_{H^1}$ e $||\cdot||_V$ são equivalentes. Isto é, existem constantes positivas C_1 e C_2 tal que:

$$C_1 ||u||_V \leq ||u||_{H^1} \leq C_2 ||u||_V,$$

para toda $u \in V$. Por outro lado, é fácil ver que a norma de $||\cdot||_{H^1}$ é equivalente à norma $||\cdot||_{H^1_\alpha}$ definida por

$$||u||^2_{H^1_\alpha} := ||u||^2_H + \alpha^2 ||\nabla u||^2_H, \tag{2.6}$$

para todo $u \in V$. Além disso, a norma $||\cdot||_{H^1_\alpha}$ é induzida pelo produto interno

$$(u, v)_{H^1_\alpha} = (u, v)_H + \alpha^2 (\nabla u, \nabla v)_H, \tag{2.7}$$

para $u, v \in V$.

Faremos uso de outro operador, conhecido como o *operador de Bessel*$-\alpha$ de ordem s. Este operador denotado J^s_α, é definido no toro por meio dos coeficientes de Fourier. Para $s \in \mathbb{R}$, o operador

$$J^s_\alpha := (\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{s}{2}},$$

aplicado a $u \in \mathcal{E}$ é dado por:

$$J^s_\alpha u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} (1 + 4\pi^2\alpha^2|k|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}(k) e^{2\pi i k\cdot x}, \tag{2.8}$$

onde $|k|$ é a norma euclidiana do vetor $k \in \mathbb{Z}^2$ e $\widehat{u}(k)$ são os coeficientes de Fourier de u:

$$\widehat{u}(k) = \int_{\mathbb{T}^2} u(x)e^{-2\pi i k\cdot x}\, dx.$$

A seguir, abordamos algumas propriedades do operador de Bessel$-\alpha$ de ordem s que serão importantes para o desenvolvimento de nosso trabalho:

O operador de Bessel$-\alpha$ de ordem $s \in \mathbb{R}$ é um operador auto-adjunto, positivo. Para $s < 0$, o operador é compacto e limitado em $L^2(\mathbb{T}^2)$ de norma menor e igual 1. Para $s \geq 0$, o operador J^s_α é invertível e a sua inversa J^{-s}_α é novamente um operador de Bessel, definido pela fórmula:

$$J^{-s}_\alpha u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} (1 + 4\pi^2\alpha^2|k|^2)^{-\frac{s}{2}} \widehat{u}(k) e^{2\pi i k\cdot x}.$$

Além disso, o operador de Bessel$-\alpha$ induz uma serie de espaços, os quais serão utilizados ao longo de nosso trabalho. De fato, para $s \geq 0$, o espaço de Sobolev $H^s_\alpha(\mathbb{T}^2)$ consiste de todos os polinômios trigonométricos u para a qual a norma $||u||_{H^s_\alpha}$ é finita onde

$$||u||_{H^s_\alpha} := ||J^s_\alpha u||_H. \tag{2.9}$$

Por outro lado, o operador J^s_α possui uma propriedade valiosa: ele é linear em s. Isto é, para todo $\beta, \gamma \geq 0$, temos que $J^{\beta+\gamma}_\alpha = J^\beta_\alpha J^\gamma_\alpha$. De fato, para qualquer $\beta, \gamma \geq 0$ e $u \in \mathcal{E}$, temos que

$$\begin{aligned}
J^{\beta+\gamma}_\alpha u(x) &= (\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta+\gamma}{2}} u(x) \\
&= (\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \left[(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u(x)\right] \\
&= J^\beta_\alpha((\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} u(x)) \\
&= J^\beta_\alpha(J^\gamma_\alpha u(x)).
\end{aligned}$$

A partir dessa propriedade e que o operador de Bessel$-\alpha$ é auto-adjunto, podemos redefinir via operador de Bessel$-\alpha$, o produto interno em V dado por (2.7). De fato, aplicando integração por partes, vemos que

$$\begin{aligned}
(u, u)_{H^1_\alpha} &= (u, u)_H + \alpha^2(\nabla u, \nabla u)_H \\
&= (u, v)_H - \alpha^2(\Delta u, v)_H \\
&= (J^2_\alpha u, u)_H.
\end{aligned}$$

Dado que $J_\alpha^{\beta+\gamma} = J_\alpha^\beta J_\alpha^\gamma$ para todo $\beta, \gamma \geq 0$ e o fato que o operador de Bessel$-\alpha$ é auto adjunto. Segue-se que:

$$(u,u)_{H_\alpha^1} = (J_\alpha^2 u, u)_H = (J_\alpha^1 u, J_\alpha^1 u)_H. \tag{2.10}$$

De igual forma como acontece com as normas $||\cdot||_{H^1}$ e $||\cdot||_{H_\alpha^1}$, temos também que para as normas $||\cdot||_{H^s}$ e $||\cdot||_{H_\alpha^s}$ são equivalentes para $s > 0$ onde a norma $||\cdot||_{H^s}$ é induzida pelo operador de Bessel$-\alpha$ com $\alpha = 1$, ver Proposição 22 do Apêndice A.

No estudo dos operadores, um fato importante é encontrar espaços onde tais operadores sejam limitados. Pelo que um aspecto importante neste trabalho, é obter estimativas do operador de Bessel$-\alpha$ de ordem s entre os espaços H^s, as quais, conforme discutido no parágrafo anterior, são transferidas para os espaços H_α^s e vice-versa. Desse modo, destacamos a propriedade: Sejam $s, \sigma \in \mathbb{R}$. O operador J_α^σ é um isomorfismo entre os espaços $H^s(\mathbb{T}^n)$ e $H^{s-\sigma}(\mathbb{T}^n)$, ver o livro de Stein ([28] pag 135). Além disso, fazendo uma modificação ao Teorema de Rellich-Kondrachov, ver o livro de Temam [29], temos que, o espaço $H^s(\mathbb{T}^2)$ está compactamente mergulhado em $L^2(\mathbb{T}^2)$ para todo $s > 0$.

Neste ponto, incorporaremos um operador de interpolação, desenvolvido especificamente para nosso estudo. Seja $I_\beta : D(I_\beta) \subset H \to H$, definido por

$$I_\beta := \nabla J_\alpha^\beta = \nabla(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \tag{2.11}$$

para $0 \leq \beta \leq 1$, onde $D(I_\beta)$ é dado por

$$D(I_\beta) := Dom\Big(\nabla J_\alpha^\beta\Big) = \{u \in V \ : \ \nabla J_\alpha^\beta u \in L^2(\mathbb{T}^2)\}.$$

Note que se $u \in H^{1+\beta}(\mathbb{T}^2) \cap V$, então $u \in D(I_\beta)$. De fato, como as normas V e H^1 são equivalentes, temos como consequência que as normas V e H_α^1 também são equivalentes. Desse modo, se $u \in H^{1+\beta}(\mathbb{T}^2) \cap V$ vemos que

$$\begin{aligned} ||\nabla J_\alpha^\beta u||_H &= ||J_\alpha^\beta u||_V \leq \overline{C_1}||J_\alpha^\beta u||_{H_\alpha^1} \\ &= \overline{C_1}||J_\alpha^1 J_\alpha^\beta u||_{L^2} = \overline{C_1}||J_\alpha^{1+\beta} u||_{L^2} \\ &= \overline{C_1}||u||_{H_\alpha^{1+\beta}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $u \in D(I_\beta)$, temos que $u \in V$ e $\nabla J_\alpha^\beta u \in H$. Assim,

$$\begin{aligned} ||u||_{H_\alpha^{1+\beta}} &= ||J_\alpha^{1+\beta} u||_H = ||J_\alpha^1 J_\alpha^\beta u||_H \\ &= ||J_\alpha^\beta u||_{H_\alpha^1} \leq \overline{C_2}||J_\alpha^\beta u||_V \\ &\leq \overline{C_2}||\nabla J_\alpha^\beta u||_{L^2}. \end{aligned}$$

Portanto, o domínio $D(I_\beta)$ do operador de interpolação é dado por $H^{1+\beta}(\mathbb{T}^2) \cap V$.

Por outro lado, sabemos que $H^{1+\beta}(\mathbb{T}^2)$ está compactamente mergulhado em $H^1(\mathbb{T}^2)$ para todo $\beta > 0$, e dado que as normas $||\cdot||_{H^s}$ e $||\cdot||_{H_\alpha^s}$ são equivalentes para $t > 0$.

Segue-se que, o espaço $H_\alpha^{1+\beta}(\mathbb{T}^2)$ está compactamente mergulhado em $H_\alpha^1(\mathbb{T}^2)$ para $\beta > 0$. Desse modo, concluímos que $D(I_\beta)$ está compactamente mergulhado em V.

Na continuação, introduzimos um subespaço vetorial de V que será importante para nosso trabalho, já que, sobre este, estudaremos o fenômeno de dissipação anômala para as equações de Camassa-Holm generalizadas. Tal subespaço envolve o operador **Curl** em 2D, um operador bem conhecido na literatura matemática, mas que para efeitos de maior claridade lembramos aqui. O operador **Curl** aplicado ao campo de vetores $u = (u_1, u_2) \in V$, definido de $\mathbb{T}^2$ para V, é dado por:

$$\mathbf{Curl}(u) \equiv \partial_{x_2} u_1 - \partial_{x_1} u_2 \equiv \nabla^\perp \cdot u \tag{2.12}$$

onde $\nabla^\perp := (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$. Uma relação interessante a ressaltar, é que a norma L^2 do $\mathbf{Curl}(u)$ e ∇u coincidem. De fato, Calculamos a norma L^2 do operador **Curl** aplicado ao campo $u \in V$ como sendo

$$||\mathbf{Curl}(u)||_{L^2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k^\perp|^2 |\widehat{u}(k)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|^2 |\widehat{u}(k)|^2 = ||\nabla u||_{L^2}^2, \tag{2.13}$$

onde $k^\perp$ é o vetor perpendicular a k em $\mathbb{Z}^2$. Agora, com todo o anterior, definimos nosso subespaço de V por:

$$W := \left\{ u \in V \ : \ \mathbf{Curl} J_\alpha^2 u \in L^2(\mathbb{T}^2) \right\}.$$

Agora, estabelecemos uma definição de solução para nosso sistema (2.1), para este fim, simplificaremos nosso sistema projetando sobre espaços de divergência nula, definidos anteriormente. A maneira de conseguir este objetivo é aplicando o projetor de Leray-Helmohltz denotado por $\mathbb{P}$.

O projetor de Leray é um operador que projeta um campo vetorial no espaço dos campos vetoriais de divergência nula. No contexto do toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, é definido da seguinte forma: para o campo U, temos que

$$\mathbb{P}(U)(x) := \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2 \\ k\neq 0}} \left(\widehat{U}(k) - \frac{\widehat{U}(k)\cdot k}{|k|^2} k \right) e^{ik\cdot x}. \tag{2.14}$$

O qual é um operador linear, auto-adjunto e contínuo em $H^s(\mathbb{T}^2)$, para todo $s \geq 0$. Observamos que o novo termo não linear é denotado por:

$$B(u, v) = \mathbb{P}\left((u\cdot\nabla)v + \sum_{j=1}^{2} v^j \nabla u^j \right). \tag{2.15}$$

Vamos ver que a imagem do operador B em $V \times V$ é V', onde V' representa o espaço dual de V. Definimos, o operador bilinear B de $V \times V$ para V' como sendo

$$\langle B(u, v), w\rangle_{V'\times V} = \int_{\mathbb{T}^2} \left((u\cdot\nabla)v\cdot w + \sum_{j=1}^{2} v^j \nabla u^j \cdot w \right) dx, \tag{2.16}$$

para todo $w \in V$. Este operador pode ser estendido continuamente de $V \times V$ para V'. Para ver que $B(u,v)$ está bem definido e é limitado, basta aplicar a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Ladyzhenskaya ver ([18] pag 17), a qual é definida para o caso 2D por:

$$||u||_{L^4} \leq C||u||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||u||_{H^1}^{\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

para toda $u \in H^1$. De fato, dados $u, v, w \in V$ e aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes $(4,4,2)$. Temos que

$$|\langle B(u,v), w\rangle_{V'\times V}| \leq ||u||_{L^4}||\nabla v||_{L^2}||w||_{L^4} + ||v||_{L^4}||\nabla u||_{L^2}||w||_{L^4}$$

Logo, aplicando a desigualdade de Ladyzhenskaya dada em (2.17). Obtemos que

$$\begin{aligned}|\langle B(u,v), w\rangle_{V'\times V}| \leq C_1||u||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||u||_{H^1}^{\frac{1}{2}}||\nabla v||_{L^2}||w||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||w||_{H^1}^{\frac{1}{2}} \\ + C_2||v||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||v||_{H^1}^{\frac{1}{2}}||\nabla u||_{L^2}||w||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||w||_{H^1}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Por último, aplicando a desigualdade de Poincaré e o fato que a norma H^1 e a norma V são equivalentes. Concluímos que:

$$|\langle B(u,v), w\rangle_{V'\times V}| \leq C_3||u||_V||v||_V||w||_V.$$

Por outro lado, consideramos $u, v \in V$ e $w \in D(I_\beta) \subset V$, e aplicamos a desigualdade de Hölder, obtemos uma estimativa da forma,

$$|\langle B(u,v), w\rangle_{V'\times D(I_\beta)}| \leq \Big(||u||_{L^2}||\nabla v||_{L^2} + ||v||_{L^2}||\nabla u||_{L^2}\Big)||w||_{L^\infty}.$$

Dado que $H^{1+\beta}(\mathbb{T}^2)$ está continuamente mergulhado em $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ para todo $\beta > 0$, segue-se que

$$|\langle B(u,v), w\rangle_{V'\times D(I_\beta)}| \leq C_{\alpha,\beta}||u||_V||v||_V||w||_{D(I_\beta)}.$$

Outro termo importante a ser considerado, é o termo viscoso. Pois ele interpola entre as equações de Camassa-Holm e as equações de fluidos de segundo grau. No contexto do toro, há um fato simples, mas importante e é que o projetor de Leray-Helmohltz comuta tanto com o operador Laplaciano quanto com o operado $(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^\beta$, este último é devido a que a divergência comuta com ele. Nosso operador, $-\Delta(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^\beta u$, de $D(I_\beta)$ para $D(I_\beta)'$ é definido por:

$$\langle -\Delta(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^\beta u, w\rangle_{D(I_\beta)'\times D(I_\beta)} = \int_{\mathbb{T}^2} I_\beta(u)\cdot I_\beta(w)\, dx, \tag{2.18}$$

para todo $w \in D(I_\beta)$. Este operador pode ser estendido continuamente de $D(I_\beta)$ para $D(I_\beta)'$. Para ver que o operador, $-\Delta(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^\beta u$, está bem definido e é limitado. Aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz a (2.18). Isto é,

$$|\langle -\Delta(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^\beta u, w\rangle_{D(I_\beta)'\times D(I_\beta)}| = \left|\int_{\mathbb{T}^2} I_\beta(u)\cdot I_\beta(w)\, dx\right| \leq ||I_\beta(u)||_{L^2}||I_\beta(w)||_{L^2}.$$

para $w \in D(I_\beta)$. Desse forma, obtemos o sistema de equações equivalente a (2.1):

$$\begin{cases} \partial_t v + B(u,v) - \nu\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^\beta u + \gamma v &= \mathbb{P}f \\ (\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u &= v \\ u(x,0) &= u_0 \end{cases} \tag{2.19}$$

Assumiremos que $\mathbb{P}f = f$, caso contrário, adicionaremos a parte do gradiente de f à pressão modificada e renomearemos $\mathbb{P}f$ por f.

2.2 Existência de solução

Nesta seção, introduzimos a definição de solução fraca para as equações de Camassa-Holm generalizadas e demostraremos a existência de soluções para essas equações através do método de Galerkin.

A seguir introduzimos a definição de solução fraca para o sistema (2.19).

Definição 1. *Seja $f \in H$ e $T > 0$. Dizemos que*

$$u \in C\Big([0,T);V\Big) \cap L^2(0,T;D(I_\beta)) \quad \textit{tal que} \quad \frac{du}{dt} \in L^2(0,T;D(I_\beta)')$$

é uma solução fraca para o sistema (2.19) no intervalo $[0,T)$ se satisfaz:

$$\begin{aligned} \Big[(u(t),w)_{H^1_\alpha} - (u(t_0),w)_{H^1_\alpha}\Big] + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^2} B(u,v)(s)\cdot w\,dx\,ds \\ + \nu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^2} \nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u(s)\cdot\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} w\,dx\,ds \\ + \gamma\int_{t_0}^t (u(s),w)_{H^1_\alpha}\,ds = \int_{t_0}^t\int_{\mathbb{T}^2} f\cdot u(s)\,dx\,ds, \end{aligned} \tag{2.20}$$

para todo $w \in D(I_\beta)$, para todo $t > t_0$ e para quase todo $t_0, t \in [0,T)$. Além disso, $u(0) = u_0 \in V$.

Em seguida, enunciamos o Teorema de existência para as equações de Camassa-Holm generalizadas definidas no sistema (2.19).

Teorema 2. *Sejam $f \in V$, $u_0 \in W$, $\nu, \gamma, \alpha > 0$ parâmetros fixos e $0 < \beta \leq 1$. Então para todo $T > 0$, existe uma solução para o sistema (2.19) sobre $[0,T)$ no sentido da Definição 1 e satisfaz a equação de balanço de energia*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u||^2_{H^1_\alpha} + \nu||\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}}u||^2_{L^2} + \gamma||u||^2_{H^1_\alpha} = (f,u)_{L^2} \tag{2.21}$$

no sentido fraco para $t \in (0,T)$. Mais ainda, $u \in L^\infty(0,T;W)$.

Demonstração. O caso $\beta = 1$ corresponde às equações de Camassa-Holm e foi tratado em [21]. A seguir, analisamos o caso quando $0 < \beta < 1$. Devido à extensão da prova do Teorema 2, dividiremos a demonstração em quatro passos:

- Problema aproximado;
- Estimativas de energia;
- Extraindo subsequências convergentes;
- Passando ao limites.

Passo 1: Problema Aproximado

Neste primeiro passo, provamos a existência global de soluções para um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO's) induzido por (2.19), utilizando o método de Galerkin.

Sejam as autofunções do operador de Stokes, $(w_k)_k$, que pelo teorema de regularidade elíptica são funções suaves. Além disso, elas formam uma base ortonormal em H e ortogonal em V. Consideramos o subespaço de dimensão finita gerado pelas primeiras m autofunções do operador de Stokes denotado

$$H_m = span\{w_1, \dots, v_m\}$$

e o operador de projeção ortogonal, P_m, do espaço H sobre o subespaço H_m definido por:

$$\begin{aligned} P_m : H &\longrightarrow H_m \\ v &\longmapsto P_m(v) = v_m := \sum_{k=1}^{m} (v, w_k)_{L^2} w_k. \end{aligned}$$

Lembramos que P_m é auto-adjunto e limitado nas normas dos espaços H e V definidas em (2.3) e (2.4) respectivamente. Além disso, observamos que

$$\lim_{m\to\infty} P_m v = v.$$

O limite pode ser tomado em H e em V. O procedimento de Galerkin aplicado à equação (2.19) induz um problema aproximado de ordem m:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} v_m + P_m B(u_m, v_m) - \nu\Delta(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\beta} u_m + \gamma v_m &= f_m \\ (\mathbb{I} - \alpha^2\Delta) u_m &= v_m \\ u_m(\cdot, 0) &= P_m u_0. \end{aligned} \right. \tag{2.22}$$

Procuramos u_m em $C^1([0,T]; H_m)$, de modo que

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} \eta_k(t) w_k(x) \tag{2.23}$$

com $\eta_k(t) \in C^1([0,T])$ que satisfaz, para toda $\varphi_m \in H_m$, a equação diferencial

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d}{dt} v_m(t), \varphi_m \right)_{L^2} + \int_{\mathbb{T}^2} P_m B(u_m(t), v_m(t)) \cdot \varphi_m \, dx + \gamma (u_m(t), \varphi_m)_{H^1_\alpha} + \\ &\quad + \nu \int_{\mathbb{T}^2} \nabla(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_m(t) \cdot \nabla(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_m \, dx = (f_m, \varphi_m)_{L^2} \end{aligned} \tag{2.24}$$

assim como a condição inicial

$$(u_m(0), \varphi_m)_{L^2} = (u_0, \varphi_m)_{L^2}. \tag{2.25}$$

Dado que a família de autofunções, $(w_k)_k$, são ortonormais em H, então as k-ésimas componentes de u_m e f estão definidas por:

$$\eta_k(t) = (u_m, w_k)_{L^2} \tag{2.26}$$

$$\zeta_k = (f_m, w_k)_{L^2}, \tag{2.27}$$

para $k = 1, 2, \ldots, m$. Assim, o sistema (2.24) e (2.25) é equivalente ao sistema EDO's para $\eta_k(t)$ da forma

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta_k}{dt} & = & F(\eta_k) \\ \eta_k(0) & = & (u_0, w_k)_{L^2} \end{cases} \tag{2.28}$$

onde

$$F(\eta_k) = \frac{1}{1+\alpha^2\lambda_k}\Bigg[\zeta_k - \sum_{l,i=1}^{m}\Big[(1+\alpha^2\lambda_i)\eta_i\eta_l B_{l,i,k} + \sum_{j=1}^{2}(1+\alpha^2\lambda_l)\eta_l^j\eta_i^j B_{l,i,k}^j\Big] \\ - \nu\lambda_k(1+\alpha^2\lambda_k)^\beta\eta_k - \gamma(1+\alpha^2\lambda_k)\eta_k\Bigg]$$

com

$$B_{l,i,k} = (w_l \cdot \nabla)w_i \cdot w_k \quad \text{e} \quad B_{l,i,k}^j = w_l^j(w_k \cdot \nabla)w_i^j,$$

para cada $k = 1, 2, \ldots, m$ e $0 \leq t \leq T$. Como F é uma aplicação não-linear quadrática, ela é localmente Lipschitz continua com relação a η, o qual é o vetor cujas componentes estão definidas em (2.26). Portanto, pelo Teorema de Picard, existe um intervalo $[0, T_m]$ com $0 < T_m \leq T$ e um vetor $\eta(t)$ de classe C^1 tal que $\eta(t)$ é solução única do sistema de EDO's (2.28) nesse intervalo. Consequentemente, a função $u_m \in C^1([0, T_m); H_m)$, definida em (2.23), resolve o problema (2.24).

Passo 2: Estimativa de Energia

No segundo passo, nosso objetivo é garantir que o vetor $\eta(t) = (\eta_k(t))_{k=1}^m$ existe por tempo infinito, para cada m fixo. Isso significa que, baseado no Teorema de continuidade de soluções de EDO's, ver o Teorema 4.1 do livro ([9] cap 1), basta mostrar que o vetor $\eta(t)$ é limitada em relação ao tempo, para m fixo.

Observe que, pela desigualdade de Bessel, temos a relação:

$$|\eta(t)|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\eta_k(t)|^2 = \sum_{k=1} |\eta_k(t)|^2 ||w_k||_{L^2}^2 = ||u_m(t)||_{L^2}^2 \leq ||u_m(t)||_{H_\alpha^1}^2. \tag{2.29}$$

Portanto, o próximo passo será mostrar que a norma $|| \cdot ||_{H_\alpha^1}$ de u_m é limitada no tempo, para todo m fixo. Para isso, usamos o fato que u_m é solução no sentido (2.24). Nesse caso, se tomamos uma função teste como sendo u_m, obtemos a equação de balanço de energia:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m||^2_{H^1_\alpha} + \nu||\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}}u_m||^2_{L^2} + \gamma||u_m||^2_{H^1_\alpha} = (f_m, u_m)_{L^2}. \tag{2.30}$$

De fato, dado que a norma $||\cdot||^2_{H^1_\alpha}$ para u_m está definida por:

$$||u_m||^2_{H^1_\alpha} = \sum_{k=1}^{m}(1+\alpha^2\lambda_k)|\eta_k(t)|^2.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^2}\frac{d}{dt}v_m(x)u_m(x)\,dx &= \sum_{k,j=1}^{m}\int_{\mathbb{T}^2}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)\eta_k'(t)w_k(x)\eta_j(t)w_j(x)\,dx \\
&= \sum_{k,j=1}^{m}\eta_k'(t)\eta_j(t)\int_{\mathbb{T}^2}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)w_k(x)w_j(x)\,dx \\
&= \sum_{k,j=1}^{m}\eta_k'(t)\eta_j(t)(1+\alpha^2\lambda_k)\delta_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{m}\eta_k'(t)\eta_k(t)(1+\alpha^2\lambda_k) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(1+\alpha^2\lambda_k)\frac{d}{dt}|\eta_k(t)|^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m||^2_{H^1_\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Além disso, observamos ao aplicar a integração por partes, que o termo não linear é eliminado. Isto é,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^2}P_mB(u_m,v_m)\cdot u_m\,dx &= \int_{\mathbb{T}^2}B(u_m,v_m)\cdot u_m\,dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^2}(u_m\cdot\nabla)v_m\cdot u_m\,dx + \sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{T}^2}v_m^j\nabla u_m^j\cdot u_m\,dx \\
&= \sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{T}^2}(u_m\cdot\nabla)v_m^ju_m^j\,dx + \sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{T}^2}v_m^j(u_m\cdot\nabla)u_m^j\,dx \\
&= \sum_{j=1}^{2}\left[\int_{\mathbb{T}^2}(u_m\cdot\nabla)v_m^ju_m^j\,dx - \int_{\mathbb{T}^2}(u_m\cdot\nabla)v_m^ju_m^j\,dx\right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Para tratar o termo de viscosidade e amortecimento, também integraremos por partes. A seguir, apresentamos os cálculos detalhados:

Para o termo de viscosidade, temos:

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{T}^2} \Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta} u_m \cdot u_m \, dx &= -\sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}^2} \Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta} u_m^j u_m^j \, dx \\
&= \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}^2} \nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta} u_m^j \nabla u_m^j dx \\
&= \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}^2} \nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_m^j \cdot \nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_m^j dx \\
&= ||\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_m||_{L^2}^2. \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

Para o termo de amortecimento, vemos que:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^2} v_m \cdot u_m \, dx &= \int_{\mathbb{T}^2} (\mathbb{I}-\alpha^2\Delta) u_m \cdot u_m \, dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^2} u_m \cdot u_m \, dx + \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} \nabla u_m \cdot \nabla u_m \, dx \\
&= ||u_m||_{L^2}^2 + \alpha^2 ||\nabla u_m||_{L^2}^2 \\
&= ||u_m||_{H^1_\alpha}^2. \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

Juntando as observações (2.31), (2.32), (2.33) e (2.34) temos (2.30). Por outra parte, como o termo de viscosidade é positivo, isto é $||\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_m||_{L^2}^2 \geq 0$, podemos simplificar a equação (2.30) para:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m||_{H^1_\alpha}^2 + \gamma ||u_m||_{H^1_\alpha}^2 \leq (f_m, u_m)_{L^2}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Poincaré, no lado direito da desigualdade anterior, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m||_{H^1_\alpha}^2 + \gamma ||u_m||_{H^1_\alpha}^2 \leq C||f_m||_{L^2}||u_m||_{H^1_\alpha}$$

onde C é uma constante positiva. Logo, da desigualdade de Young com $\epsilon = \gamma^{\frac{1}{2}}$, obtemos:

$$\frac{d}{dt}||u_m||_{H^1_\alpha}^2 + \gamma ||u_m||_{H^1_\alpha}^2 \leq \frac{C||f||_{L^2}^2}{\gamma}.$$

Em seguida utilizando o Lema de Grönwall, conforme é apresentado no Lemma II.4.9 em [[1], pag 88], concluímos que:

$$||u_m||_{H^1_\alpha}^2 \leq ||u_m(0)||_{H^1_\alpha}^2 e^{-\gamma t} + \frac{C||f||_{L^2}^2}{\gamma^2}.$$

Dado que a projeção P_m é limitada nas normas dos espaços H e V, temos que

$$||u_m(0)||_{H^1_\alpha}^2 = ||u_m(0)||_{L^2}^2 + \alpha^2 ||\nabla u_m(0)||_{L^2}^2 \leq ||u_0||_{H^1_\alpha}^2.$$

Dessa forma, verificamos que

$$||u_m(t)||_{H^1_\alpha}^2 \leq ||u_0||_{H^1_\alpha}^2 + \frac{C||f||^2}{\gamma^2} =: M_1 \qquad (2.35)$$

para todo $t \in [0, T_m]$ e independente de m. Logo, pela relação (2.29), a qual compara a norma do vetor $\eta(t)$ com a norma $||\cdot||^2_{H^1_\alpha}$, concluímos que o vetor $\eta(t)$ é uniformemente limitado em $L^\infty([0, T_m])$ em relação ao tempo e independente de m. Portanto, estendemos o tempo de existência do vetor $\eta(t)$ até $T_m = T$. Desse modo, a função $u_m(x,t)$ é uma solução global para a equação (2.24), tal que $u_m \in L^\infty(0, T; H_m)$ para todo m.

Em seguida vemos, que a solução encontrada no Passo 1, a função $u_m(x,t)$, também é limitada em relação a m. Isto é, a partir da estimativa (2.35), vemos que a sequência de soluções $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada com respeito a m, na norma de $L^\infty(0, T; V)$. Assim,

$$||u_m||^2_{L^\infty(0,T;V)} \leq \sup_{t\in[0,T]} \frac{||u_m||^2_{H^1_\alpha}}{\alpha^2} < \frac{M_1}{\alpha^2} \tag{2.36}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Por outro lado, integrando de 0 até T a equação (2.30), a qual é nossa equação de balanço de energia para u_m, obtemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}||u_m(s)||^2_{H^1_\alpha}\,ds + \nu\int_0^T ||\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}}u_m(s)||^2_{L^2}\,ds&\\ +\gamma\int_0^T ||u_m(s)||^2_{H^1_\alpha}\,ds = \int_0^T (f_m, u_m(s))_{L^2}\,ds.&\end{aligned}$$

Logo, aplicando a desigualdade de Hölder do lado direito da equação anterior, segue-se que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}||u_m(T)||^2_{H^1_\alpha} + \nu\int_0^T ||\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}}u_m(s)||^2_{L^2}\,ds + \gamma\int_0^T ||u_m(s)||^2_{H^1_\alpha}\,ds&\\ \leq \frac{1}{2}||u_0||^2_{H^1_\alpha} + ||f_m||_{L^2}\int_0^T ||u_m(s)||_{L^2}\,ds.&\end{aligned}$$

Dado que o termo de amortecimento é positivo e a partir da desigualdade (2.35), que é uma limitação uniforme de u_m em relação ao tempo e m, notamos que

$$\nu\int_0^T ||\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}}u_m(s)||^2_{L^2}\,ds \leq \frac{1}{2}||u_0||^2_{H^1_\alpha} + ||f||_{L^2}M_1(T) =: M_2(T). \tag{2.37}$$

Portanto, concluímos que a sequência de soluções $(u_m)_m$ formam um conjunto limitado na norma $L^2(0, T; D(I_\beta))$.

Agora, introduzimos um sistema de equações, o qual é a versão aproximada das equações de Vorticidade Potencial formuladas no Apêndice C. Através de este novo sistema aproximado, ganharemos uma nova estimativa para o campo de velocidade u_m, um fato importante, para o próximo passo de nosso estudo da existência do sistema (2.19).

Aplicando o operador $\mathbf{Curl}(\cdot)$, na equação (2.22) e considerando:

$$q_m(x,t) = \mathbf{Curl}(v_m(x,t)) \quad \text{e} \quad g_m(x) = \mathbf{Curl}(f_m)(x),$$

obtemos o sistema aproximado:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}q_m + P_m(u_m\cdot\nabla)q_m - \nu\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}q_m + \gamma q_m &= g_m \\ \mathbf{Curl}((\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u_m) &= q_m \\ \mathbf{Curl}((\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u_m(x,0)) &= q_m(x,0). \end{cases} \tag{2.38}$$

Chamamos o sistema (2.38) de *sistema de vorticidade potencial de ordem* m. Se calculamos o produto interno L^2 de q_m com a equação (2.38) e aplicando a desigualdade de Young, obtemos a desigualdade diferencial

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||q_m||_{L^2}^2 + \nu||\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta-1}{2}} q_m||_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{2}||q_m||_{L^2}^2 \leq \frac{||g_m||_{L^2}^2}{2\gamma}.$$

Como o termo de viscosidade é positivo, simplificamos a desigualdade para

$$\frac{d}{dt}||q_m||_{L^2}^2 + \gamma||q_m||_{L^2}^2 \leq \frac{||g_m||_{L^2}^2}{\gamma}. \tag{2.39}$$

Aplicando o Lema de Grönwall na desigualdade diferencial (2.39), obtemos que

$$||q_m(t)||_{L^2}^2 \leq ||q_m(0)||_{L^2}^2 e^{-\gamma t} + \frac{||g_m||_{L^2}^2}{\gamma^2}(1-e^{-\gamma t}) \leq ||q_m(0)||_{L^2}^2 + \frac{||g||_{L^2}^2}{\gamma^2}. \tag{2.40}$$

Por outro lado, como $u_0 \in W$ sabemos que $\mathbf{Curl}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u_0 \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Pela relação (2.13) temos que,

$$||q_m(0)||_{L^2}^2 = ||\mathbf{Curl}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u_m(0)||_{L^2}^2 = ||\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u_m(0)||_{L^2}.$$

Pela definição da norma $||\cdot||_V$, segue-se que

$$||\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u_m(0)||_{L^2} = ||(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u_m(0)||_V = ||P_m(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u_m(0)||_V.$$

Dado que, o operador de projeção P_m é limitado sobre V, concluímos que

$$||q_m(0)||_{L^2}^2 \leq ||(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u_0||_V = ||\mathbf{Curl}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u_0||_{L^2}^2. \tag{2.41}$$

Logo, $q_m \in L^\infty(0,T,L^2(\mathbb{T}^2))$, e por conseguinte $u_m \in L^\infty(0,T,W)$. Da mesma forma como foi estabelecido para o sistema (2.24), temos que $q_m(x,t)$ é uma solução para o sistema (2.38) que é uniformemente limitada com relação a m, na norma de $L^\infty(0,T;L^2)$. Dado que nosso domínio é periódico, podemos observar que:

$$\begin{aligned}
||u_m(t)||_{H^3}^2 &= C\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}(1+|k|^6)|\widehat{u}_m(k,t)|^2 \\
&= C\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|\widehat{u}_m(k,t)|^2 + C\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|k|^6|\widehat{u}_m(k,t)|^2.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré, segue-se que

$$\begin{aligned}
||u_m(t)||_{H^3}^2 &\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|k|^2|\widehat{u}_m(k,t)|^2 + C\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|k|^6|\widehat{u}_m(k,t)|^2 \\
&= C\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|k|^2|\widehat{u}_m(k,t)|^2 + C(\alpha)\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|k|^2 4^2\pi^4\alpha^4|k|^4|\widehat{u}_m(k,t)|^2 \\
&\leq C(\alpha)\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|k|^2(1+4\pi^2\alpha^2|k|^2)^2|\widehat{u}_m(k,t)|^2 \\
&= C(\alpha)||\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u_m(t)||_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Novamente, pela relação (2.13) temos que

$$||u_m(t)||^2_{H^3} \leq C(\alpha)||\mathbf{Curl}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u_m(t)||^2_{L^2}. \tag{2.42}$$

Portanto, das estimativas (2.37) e (2.42). Concluímos que a sequencia soluções $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ está uniformemente limitada em relação a m na norma dos espaços $L^2(0,T;D(I_\beta))$ e $L^\infty(0,T;H^3\cap V)$. Isto é,

$$||u_m||_{L^2(0,T;D(I_\beta))} \leq M_2 \quad \text{e} \quad ||u_m||_{L^\infty(0,T;H^3\cap V)} \leq M_3. \tag{2.43}$$

Vamos estudar a convergência da sequência de soluções $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ conforme m tende ao infinito da forma fraca de (2.22). No entanto, para passarmos ao limite no termo não linear da forma fraca de (2.22), é necessário obtermos um resultado de convergência forte em um espaço adequado. Para esse propósito, primeiro estabelecemos uma estimativa uniforme para a derivada temporal em relação a m.

A partir do sistema de Galerkin de ordem m definido em (2.22), temos que:

$$\frac{d}{dt}v_m = f_m - P_mB(u_m,v_m) + \nu\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^\beta u_m - \gamma v_m.$$

Dado $\varphi \in D(I_\beta)$, onde o conjunto $D(I_\beta)$ é definido como $H^{\beta+1}\cap V$. Observamos que:

$$||P_m\varphi||_{D(I_\beta)} = ||P_m\varphi||_{H^{\beta+1}\cap V} = ||J_\alpha^{\beta+1}P_m\varphi||_H.$$

Como o operador de Bessel$-\alpha$ comuta com P_m, segue-se que:

$$||J_\alpha^{\beta+1}P_m\varphi||_H = ||P_mJ_\alpha^{\beta+1}\varphi||_H.$$

Lembrando que o operador P_m é limitado sobre H. Temos que,

$$||P_m\varphi||_{D(I_\beta)} \leq ||\varphi||_{D(I_\beta)}. \tag{2.44}$$

Portanto, podemos tomar o produto interno L^2 do sistema de Galerkin com φ_m: conforme definido em (2.24), utilizando φ_m.

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}v_m(t),\varphi_m\right)_{L^2} &= (f_m,\varphi_m)_{L^2} - \int_{\mathbb{T}^2} P_mB(u_m(t),v_m(t))\cdot\varphi_m\,dx - \\ &- \nu\int_{\mathbb{T}^2}\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}}u_m(t)\cdot\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_m\,dx - \gamma(u_m(t),\varphi_m)_{H^1_\alpha}.\end{aligned}$$

No primeiro termo do lado direito da igualdade anterior, aplicamos a desigualdade de Hölder e o fato que $D(I_\beta)$ está continuamente mergulhado em $L^2(\mathbb{T}^2)$. Isto é,

$$|(f_m,\varphi_m)_{L^2}| \leq ||f_m||_{L^2}||\varphi_m||_{L^2} \leq K_1||f_m||_{L^2}||\varphi_m||_{D(I_\beta)}. \tag{2.45}$$

Em relação ao segundo termo, observamos que:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{T}^2} P_m B(u_m, v_m) \cdot \varphi_m \, dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{T}^2} B(u_m, v_m) \cdot \varphi_m \, dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{T}^2} (u_m \cdot \nabla) v_m \cdot \varphi_m \, dx + \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}^2} v_m^j \nabla u_m^j \cdot \varphi_m \, dx\right| \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{T}^2} v_m \cdot (u \cdot \nabla) \varphi_m \, dx\right| + \left|\sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}^2} v_m^j (\varphi_m \cdot \nabla) u_m^j \, dx\right| \\
&\leq ||u_m||_{L^4} ||v_m||_{L^4} ||\varphi_m||_{H^1} + ||u_m||_{H^1} ||v_m||_{L^4} ||\varphi_m||_{L^4}.
\end{aligned}
$$

Na última desigualdade, temos dois termos diferentes que envolvem normas L^4. Para ter controle delas com elementos de $D(I_\beta)$, aplicamos a desigualdade de Ladyzhenskaya, definida em (2.17). Desse modo, o primeiro termo, na desigualdade anterior, é estimado por:

$$
||u_m||_{L^4} ||v_m||_{L^4} ||\varphi_m||_{H^1} \leq C ||u_m||_{L^2}^{\frac{1}{2}} ||u_m||_{H^1}^{\frac{1}{2}} ||v_m||_{L^2}^{\frac{1}{2}} ||v_m||_{H^1}^{\frac{1}{2}} ||\varphi_m||_{H^1}
$$

e o segundo termo por:

$$
||u_m||_{H^1} ||v_m||_{L^4} ||\varphi_m||_{L^4} \leq C ||u||_{H^1} ||v_m||_{L^2}^{\frac{1}{2}} ||v_m||_{H^1}^{\frac{1}{2}} ||\varphi_m||_{L^2}^{\frac{1}{2}} ||\varphi_m||_{H^1}^{\frac{1}{2}}.
$$

Logo, como $D(I_\beta)$ está continuamente mergulhado em $H^1(\mathbb{T}^2)$, segue-se que

$$
\left|\int_{\mathbb{T}^2} P_m B(u_m, v_m) \cdot \varphi_m \, dx\right| \leq K_2 ||u_m||_{H^1} ||v_m||_{H^1} ||\varphi_m||_{D(I_\beta)}. \tag{2.46}
$$

Agora analisamos o termo viscoso, neste caso aplicamos a desigualdade de Hölder, como segue:

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{T}^2} \nabla(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_m \cdot \nabla(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_m \, dx\right| \\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{T}^2} \left|\nabla(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_m \cdot \nabla(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_m\right| dx \\
&\qquad \leq ||\nabla(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_m||_{L^2} ||\nabla(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_m||_{L^2} \\
&\qquad = ||u_m||_{D(I_\beta)} ||\varphi_m||_{D(I_\beta)}.
\end{aligned}
$$

Por último, vemos que o termo de amortecimento é estimado utilizando (2.10), que redefine o produto interno H^1_α em termo do operador de Bessel$-\alpha$ de ordem 1, e aplicando a desigualdade de Hölder. Isto é,

$$
|(v_m, \varphi_m)_{H^1_\alpha}| = \left|\left(J^1_\alpha u_m, J^1_\alpha \varphi_m\right)_{L^2}\right| \leq ||J^1_\alpha u_m||_{L^2} ||J^1_\alpha \varphi_m||_{L^2} = ||u_m||_{H^1_\alpha} ||\varphi_m||_{H^1_\alpha}.
$$

Logo, aplicando o fato que $D(I_\beta)$ está continuamente mergulhado em $H^1_\alpha(\mathbb{T}^2)$. Segue-se que,

$$
|(v_m, \varphi_m)_{H^1_\alpha}| \leq K_3 ||u_m||_{D(I_\beta)} ||\varphi_m||_{D(I_\beta)}. \tag{2.47}
$$

Portanto, das estimativas (2.45), (2.46) e (2.47) temos que:

$$\left|\left(\frac{d}{dt}v_m(t),\varphi_m\right)_{L^2}\right| \leq K\Big[||f_m||_{L^2}+||u_m||_{H^1}||v_m||_{H^1}+||u_m||_{D(I_\beta)}\Big]||\varphi_m||_{D(I_\beta)}.$$

Dado que P_m é um o operador auto-adjunto e $\frac{dv_m}{dt}\in H_m$, segue-se que

$$\left|\left(\frac{d}{dt}v_m(t),\varphi\right)_{L^2}\right| \leq K\Big[||f_m||_{L^2}+||u_m||_{H^1}||v_m||_{H^1}+||u_m||_{D(I_\beta)}\Big]||\varphi_m||_{D(I_\beta)}.$$

Logo, pelas estimativas (2.43), referente à norma $L^\infty(0,T;H^3\cap V)$ da função u_m, e (2.44), referente à função φ_m na norma de $D(I_\beta)$. Obtemos que $\frac{dv_m}{dt}$ é limitada em relação a m na norma do espaço dual de $D(I_\beta)$. Isto é,

$$\left|\left|\frac{dv_m}{dt}\right|\right|_{D(I_\beta)'}\leq K.$$

Por outro lado, pela inclusão dos espaços H^s_α com $s>0$, vemos que $H^2_\alpha\subset H^{1+\beta}_\alpha$ com $0<\beta<1$. Desse modo, temos que $(H^2\cap V)\subset D(I_\beta)$. Assim, com essa informação presente, segue-se que:

$$\left|\left|\frac{dv_m}{dt}\right|\right|_{D(I_\beta)'}\geq\left|\left|\frac{dv_m}{dt}\right|\right|_{(H^2_\alpha\cap V)'}=\left|\left|(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)\frac{du_m}{dt}\right|\right|_{(H^2_\alpha\cap V)'}.$$

Lembrando que o operador $(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)$ é um isomorfismo entre H^2_α e H e que $H'=H$. Segue-se que

$$\left|\left|\frac{dv_m}{dt}\right|\right|_{D(I_\beta)'}\geq\left|\left|\frac{du_m}{dt}\right|\right|_{H}.$$

Observamos que para $\beta=1$, o caso que corresponde ao sistema de equações de Camassa-Holm, que também pode ser abordado com nosso analises. Dessa maneira, obtemos que

$$\left|\left|\frac{du_m}{dt}\right|\right|_{D(I_\beta)'}\leq\left|\left|\frac{dv_m}{dt}\right|\right|_{D(I_\beta)'}\leq K.$$

Portanto, concluímos que a sequência de derivadas $(\frac{du_m}{dt})_{m\in\mathbb{N}}$ está uniformemente limitada em relação a m na norma de $L^2(0,T;D(I_\beta)')$.

Em resumo, vemos em seguida as melhores estimativas obtidas até o aqui:

$$||u_m||_{L^\infty(0,T;W)}\leq M \quad \text{e} \quad \left|\left|\frac{du_m}{dt}\right|\right|_{L^2(0,T;D'(I_\beta))}\leq K$$

para todo $m\in\mathbb{N}$.

Passo 3: Extraindo subsequências convergentes

Na seção anterior, estabelecíamos que a sequência de soluções $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada na norma de $L^\infty(0,T;W)\subset L^2(0,T;D(I_\beta))$, já que $W\subset D(I_\beta)$. Além disso, sua derivada temporal $(\frac{du_m}{dt})_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada na norma de $L^2(0,T;D(I_\beta)')$. Com o objetivo em mente de extrair subsequências convergentes em espaços adequados, primeiro, consideremos a tripla $D(I_\beta)\subset V\subset D(I_\beta)'$ de espaços de Hilbert, lembrando que $D(I_\beta)$ é o espaço $H^{\beta+1}\cap V$ e $D(I_\beta)'$ como sendo o dual de $D(I_\beta)$. Dado que V está continuamente mergulhado em $D(I_\beta)'$ e $D(I_\beta)$ compactamente mergulhado em V, porque $H^{\beta+1}$ está compactamente mergulhado em H^1 para $\beta>0$, então conforme ao Teorema II.5.16 (Teorema de Aubin-Lions-Simon) em [[1], pag 102] o conjunto definido por

$$E_{2,2} := \Big\{u\in L^2(0,T;D(I_\beta))\ :\ \frac{du}{dt}\in L^2(0,T;D(I_\beta)')\Big\}, \tag{2.48}$$

está compactamente mergulhado em $L^2(0,T;V)$. Em consequência, existe uma subsequência $(u_{m_k})_k$ e $u\in L^2(0,T;V)$ tal que $(u_{m_k})_k$ converge fortemente para u na norma $L^2(0,T;V)$. Isto é,

$$||u_{m_k}-u||_{L^2(0,T;V)}\longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad k\longrightarrow\infty. \tag{2.49}$$

Por outro lado, dado que $u_m\in L^\infty(0,T;W)$ e $\frac{du_m}{dt}\in L^2(0,T;W')$. Considerando a tripla de espaços de Hilbert, $W\subset D(S)\subset W'$, onde $D(S)$ é o domínio do operador de Stokes e a nova tripla satisfaz as mesmas condições da primeira tripla. Novamente, conforme ao Teorema II.5.16. Obtemos que o conjunto:

$$E_{\infty,2} := \Big\{u\in L^\infty(0,T;W)\ :\ \frac{du}{dt}\in L^2(0,T;W')\Big\}, \tag{2.50}$$

está compactamente mergulhado em $C(0,T;D(S))$. Em consequência, existe uma subsequência $(u_{m_k})_k$ e $u\in C(0,T;D(S))$ tal que $(u_{m_k})_k$ converge para u em $C(0,T;D(S))$. Além disso, dado que u_m está uniformemente limitada nas normas de $L^\infty(0,T;W)$ e $L^2(0,T;D(I_\beta))$, onde $L^2(0,T;D(I_\beta))$ é um espaço de Hilbert, então, conforme ao Teorema II.2.7 em [[1], pag 53] temos uma subsequência $(u_{m_j})_j\subset(u_{m_k})_{m_k}$ e u em $L^\infty(0,T;W)\cap L^2(0,T;D(I_\beta))$ tal que $(u_{m_j})_j$ converge fraca* e converge fraca para u em $L^\infty(0,T;W)$ e $L^2(0,T;D(I_\beta))$ respectivamente.

Em resumo, temos a seguiste lista de convergências:

- $u_{m_k}\longrightarrow u$ fracamente em $L^2(0,T;D(I_\beta))$;
- $u_{m_k}\longrightarrow u$ fortemente em $L^2(0,T;V)$;
- $u_{m_k}\longrightarrow u$ em $C(0,T;D(S))$.

Parte 4: Passando ao limite

Finalmente, concluímos o Teorema de existência de soluções para as equações de Camassa-Holm generalizadas, mostrando que o limite da subsequência $(u_{m_j})_j$, obtido na parte anterior, satisfaz a equação (2.19) no sentido da Definição 1. Isto vai ser feito, definindo uma serie de operadores, um por cada termo do sistema (2.19). Logo, usando as noções de convergências obtidas também na parte 3, concluiremos que de fato nosso limite u satisfaz a igualdade (2.20) de solução regular. Para simplificar a notação de subíndices na subsequência, denotemos por $(u_m)_m$ a subsequência $(u_{m_j})_j$.

Seja $w \in D(I_\beta)$ fixo, então do sistema (2.24) temos que:

$$\begin{aligned}\Big[(u_m(t), w)_{H^1_\alpha} - (u_m(t_0), w)_{H^1_\alpha}\Big] + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^2} P_m B(u_m, v_m)(s) \cdot w \, dx\, ds \\ + \nu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^2} \nabla(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_m(s) \cdot \nabla(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} w \, dx\, ds \\ + \gamma \int_{t_0}^t (u_m(s), w)_{H^1_\alpha} \, ds = \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^2} P_m f \cdot u(s) \, dx\, ds,\end{aligned} \tag{2.51}$$

para todo $t > t_0$ e para quase todo $t_0, t \in [0, T]$. Examinamos a convergência de cada termo na igualdade anterior.

Dado que u_m converge fortemente para u em $L^2(0, T; V)$, então $u_m(s)$ converge fortemente para $u(s)$ em V, para quase todo ponto s em $[0, T]$. Dado que as normas $||\cdot||_V$ e $||\cdot||_{H^1_\alpha}$ são equivalentes, então $u_m(s)$ converge fracamente para $u(s)$ em H^1_α, para quase todo ponto s em $[0, T]$. Portanto, concluímos que os primeiros termos da equação (2.51) convergem. Isto é,

$$(u_m(t), w)_{H^1_\alpha} \longrightarrow (u(t), w)_{H^1_\alpha} \quad \text{e} \quad (u_m(t_0), w)_{H^1_\alpha} \longrightarrow (u(t_0), w)_{H^1_\alpha} \tag{2.52}$$

quando m tende para infintos.

No termo não linear, devemos verificar que:

$$\left| \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^2} P_m B(u_m, v_m)(s) \cdot w \, dx\, ds - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^2} B(u, v)(s) \cdot w \, dx\, ds \right| \longrightarrow 0$$

quando m tende para infinito. Dado que P_m é auto-adjunto, temos que:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^2} P_m B(u_m, v_m)(s) \cdot w \, dx &= \int_{\mathbb{T}^2} B(u_m, v_m)(s) \cdot P_m w \, dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} B(u_m, v_m)(s) \cdot w_m \, dx.\end{aligned}$$

Agora, dado que $D(I_\beta) \subset V$. Denotemos por

$$\langle B(u_m, v_m)(t), w_m \rangle_{V' \times D(I_\beta)} = \int_{\mathbb{T}^2} B(u_m, v_m)(s) \cdot w_m \, dx,$$

para simplificar os cálculos. De fato, consideremos a seguinte diferença:

$$\begin{aligned}&\langle B(u_m, v_m), w_m \rangle_{V' \times D(I_\beta)} - \langle B(u, v), w \rangle_{V' \times D(I_\beta)} = \\ &= \langle B(u_m, v_m), w_m - w \rangle_{V' \times D(I_\beta)} + \langle B(u_m, v_m), w \rangle_{V' \times D(I_\beta)} - \langle B(u, v), w \rangle_{V' \times D(I_\beta)} \\ &= \langle B(u_m, v_m), w_m - w \rangle_{V' \times D(I_\beta)} + \Big[\langle B(u_m, v_m), w \rangle_{V' \times D(I_\beta)} - \langle B(u, v_m), w \rangle_{V' \times D(I_\beta)}\Big] + \\ &\qquad + \Big[\langle B(u, v_m), w \rangle_{V' \times D(I_\beta)} - \langle B(u, v), w \rangle_{V' \times D(I_\beta)}\Big] \\ &= \langle B(u_m, v_m), w_m - w \rangle_{V' \times D(I_\beta)} + \langle B(u_m - u, v_m), w \rangle_{V' \times D(I_\beta)} + \\ &\qquad + \langle B(u, v_m - v), w \rangle_{V' \times D(I_\beta)}.\end{aligned}$$

Do anterior, vemos que

$$\int_{t_0}^{t}\left[\int_{\mathbb{T}^2} B(u_m,v_m)(s)\cdot w_m\,dx-\int_{\mathbb{T}^2} B(u,v)(s)\cdot w\,dx\right]ds=B_m^{(1)}+B_m^{(2)}+B_m^{(3)}.$$

Portanto, para verificar que a diferença dos termos não lineares descritas anteriormente converge para zero, basta verificar que cada uno dos termos, $B_m^{(i)}$, converge para zero para $i=1,2,3$.

O termo $B_m^{(1)}$ da igualdade anterior está definido como:

$$B_m^{(1)}=\int_{t_0}^{t}\langle B(u_m,v_m)(s),w_m-w\rangle_{V'\times D(I_\beta)}\,ds.$$

Note que,

$$\begin{aligned}\left|B_m^{(1)}\right| &\leq \int_{t_0}^{t}\left|\langle B(u_m,v_m)(s),w_m-w\rangle_{V'\times D(I_\beta)}\right|ds\\ &\leq \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}^2}\left|(u_m\cdot\nabla)v_m(s)\cdot(w_m-w)\right|dx\,ds+\\ &\qquad\qquad+\sum_{j=1}^{2}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}^2}\left|v_m^j(s)\nabla u_m^j(s)\cdot(w_m-w)\right|dx\,ds.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder obtemos que

$$\left|B_m^{(1)}\right|\leq ||w_m-w||_H\int_{t_0}^{t}\Big[||u_m(s)||_{L^\infty}||v_m(s)||_V+||v_m(s)||_H||\nabla u_m(s)||_{L^\infty}\Big]ds.$$

Na desigualdade anterior observamos dois termos em norma L^∞. Já que, a sequência $u_m\in L^\infty(0,T;W)$ e lembrando que $H^3(\mathbb{T}^2)$ mergulhado continuamente em $L^\infty(\mathbb{T}^2)$, pela desigualdade de Morrey, temos então que:

$$||u_m(s)||_{L^\infty}\leq K_3||u_m(s)||_{H^3}\quad\text{e}\quad ||\nabla u_m(s)||_{L^\infty}\leq K_4||u_m(s)||_{H^3}. \tag{2.53}$$

Além disso, pela relação (2.12). Temos que,

$$||\nabla v_m(s)||_{L^2}=||\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u_m(s)||_{L^2}=||\mathbf{Curl}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u_m(s)||_{L^2}. \tag{2.54}$$

Logo, o termo $B_m^{(1)}$ está limitado da forma:

$$\left|B_m^{(1)}\right|\leq C||u_m||_{L^\infty(0,T;H^3)}||u_m||_{L^\infty(0,T;W)}||w_m-w||_H.$$

Dado que w_m converge para w na norma H. Concluímos que o termo $B_m^{(1)}$ converge para zero, Isto é,

$$B_m^{(1)}\longrightarrow 0\ \text{ quando }\ m\longrightarrow 0. \tag{2.55}$$

O segundo termo, $B_m^{(2)}$, definido por:

$$B_m^{(2)}=\int_{t_0}^{t}\langle B(u_m-u,v_m)(s),w\rangle_{V'\times D(I_\beta)}\,ds.$$

Note que,

$$\begin{aligned}\left|B_m^{(2)}\right| &\leq \int_{t_0}^t \left|\langle B(u_m - u, v_m)(s), w\rangle_{V' \times D(I_\beta)}\right| ds\\ &\leq \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^2} \left|\Big[(u_m - u)\cdot\nabla\Big] v_m(s)\cdot w\right| dx\, ds +\\ &\qquad + \sum_{j=1}^{2}\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^2} \left|v_m^j(s)\nabla(u_m^j - u^j)(s)\cdot w\right| dx\, ds\end{aligned}$$

Dado que $w \in D(I_\beta)$. Então, $w \in H^{\beta+1}(\mathbb{T}^2)$. Por conseguinte, $w \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$. Este fato, é devido a que o espaço $H^{\beta+1}$ está continuamente mergulhado em L^∞ para $\beta > 0$, para mais informação ver o livro de Stein [28]. Logo, aplicando a desigualdade de Hölder. Segue-se que

$$\begin{aligned}\left|B_m^{(2)}\right| &\leq \int_{t_0}^t ||(u_m - u)(s)||_{L^2}||v_m(s)||_V ||w||_{L^\infty}\, ds +\\ &\qquad + \int_{t_0}^t ||v_m(s)||_{L^2}||(u_m - u)(s)||_V ||w||_{L^\infty}\, ds.\end{aligned}$$

Logo, aplicamos a desigualdade de Poincaré. Obtemos

$$\left|B_m^{(2)}\right| \leq M||(u_m - u)(s)||_V ||v_m(s)||_V ||w||_{L^\infty}.$$

Dado que a sequência u_m é limitada em $L^\infty(0, T, W)$ e a estimativa (2.54). Concluímos que,

$$\left|B_m^{(2)}\right| \leq M||u_m - u||_{L^2(0,T;V)}||u_m||_{L^\infty(0,T;W)}||w||_{L^\infty}.$$

Tendo em conta, que u_m converge fortemente para u na norma $L^2(0, T; V)$. Segue-se que

$$B_m^{(2)} \longrightarrow 0 \ \text{ quando } \quad m \longrightarrow 0. \tag{2.56}$$

Finalmente, analisamos o terceiro termo $B_m^{(3)}$ definido como:

$$B_m^{(3)} = \int_{t_0}^t \langle B(u, v_m - v)(s), w\rangle_{V' \times D(I_\beta)}\, ds.$$

Notemos que, aplicando integração por partes em $B_m^{(3)}$. Podemos rescrever o termo da seguite maneira:

$$\begin{aligned}B_m^{(3)} &= \int_{t_0}^t \langle B(u, v_m - v)(s), w\rangle_{V' \times D(I_\beta)}\, ds\\ &= \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^2} (u\cdot\nabla)(v_m - v)(s)\cdot w\, dx\, ds +\\ &\qquad + \sum_{j=1}^{2}\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^2} (v_m^j - v^j)(s)(w\cdot\nabla)u^j(s)\, dx\, ds\\ &= -\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^2} (v_m - v)(s)\cdot(u\cdot\nabla)w\, dx\, ds +\\ &\qquad + \sum_{j=1}^{2}\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{T}^2} (v_m^j - v^j)(s)(w\cdot\nabla)u^j(s)\, dx\, ds.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, segue-se que:

$$|B_m^{(3)}| \leq \int_{t_0}^{t} ||(v_m - v)(s)||_{L^2} ||u(s)||_{L^\infty} ||\nabla w||_{L^2}\, ds \\ + \int_{t_0}^{t} ||(v_m - v)(s)||_{L^2} ||w||_{L^2} ||\nabla u(s)||_{L^\infty}\, ds$$

Logo, aplicando a desigualdade de Poincaré e a desigualdade (2.53). Obtemos que

$$|B_m^{(3)}| \leq K_7 ||(v_m - v)||_{L^\infty(0,T;L^2)} ||u||_{L^\infty(0,T,W)} ||\nabla w||_{L^2}.$$

Dado que sequencia $(u_m)_m$ converge para u em $C(0,T;D(S))$. Então, temos que:

$$||v_m - v||_{L^\infty(0,T;L^2)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad m \longrightarrow 0,$$

onde $v_m = (\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta) u_m$. Desse modo, verificamos que

$$B_m^{(3)} \longrightarrow 0 \;\; \text{quando} \quad m \longrightarrow 0. \tag{2.57}$$

Portanto, de (2.55), (2.56) e (2.57) concluímos que a sequência de termos não lineares converge para o termo não linear limite, quando m tende para infinito. Isto é,

$$\int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{T}^2} P_m B(u_m, v_m)(s) \cdot w\, dx\, ds \longrightarrow \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{T}^2} B(u, v)(s) \cdot w\, dx\, ds. \tag{2.58}$$

Para examinar a convergência do termo viscoso, usamos o fato que u_m converge fracamente para u em $L^2(0,T;D(I_\beta))$. Isto é, vamos a construir um funcional, o qual tem a forma fraca do termo viscos, linear e limitado sobre $L^2(0,T;D(I_\beta)$. De fato, consideremos o funcional linear definido por:

$$\begin{aligned} F_2 : L^2(0,T;D(I_\beta)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto F_2(\varphi) = \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{T}^2} I_\beta(\varphi(s)) \cdot I_\beta(w)\, dx\, ds, \end{aligned}$$

onde I_β é o operador de interpolação definido em (2.11). Podemos observar que F_2 está bem definido, pois para cada $\varphi \in L^2(0,T;D(I_\beta))$, notamos que:

$$\begin{aligned} |F_2(\varphi)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{T}^2} I_\beta(\varphi(s)) \cdot I_\beta(w)\, dx\, ds \right| \leq \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{T}^2} \left| I_\beta(\varphi(s)) \cdot I_\beta(w) \right| dx\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} ||\varphi(s)||_{D(I_\beta)} ||w||_{D(I_\beta)}\, ds \\ &\leq ||w||_{D(I_\beta)} (t - t_0)^{1/2} ||\varphi||^2_{L^2(0,T;D(I_\beta))} \\ &\leq T^{1/2} ||w||_{D(I_\beta)} ||\varphi||^2_{L^2(0,T;D(I_\beta))}. \end{aligned}$$

Isto é, $F_2(\varphi) \in \mathbb{R}$. Além disso, vemos que F_2 é um funcional limitado sobre $L^2(0,T;D(I_\beta))$. Desse modo, como u_m converge fracamente para u em $L^2(0,T;D(T))$. Obtemos que

$$|F_2(u_m) - F_2(u)| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad m \longrightarrow \infty.$$

Concluindo que o termo viscoso converge para o termo viscoso limite. Isto é,

$$\nu \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{T}^2} I_\beta(u_m(s)) \cdot I_\beta(w)\,dx\,ds \longrightarrow \nu \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{T}^2} I_\beta(u(s)) \cdot I_\beta(w)\,dx\,ds, \tag{2.59}$$

quando m tende ao infinito.

Para examinar a convergência do termo de amortecimento, usamos o fato que u_m converge fortemente para u em $L^2(0,T;V)$. Isso é,

$$\left| \int_{t_0}^{t} (u_m, w)_{H^1_\alpha}\,ds - \int_{t_0}^{t} (u, w)_{H^1_\alpha}\,ds \right| \longrightarrow 0$$

quando m tende para infinito. Observa-se que, ao aplicar a desigualdade de Hölder, obtém-se que

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^{t} (u_m, w)_{H^1_\alpha}\,ds - \int_{t_0}^{t} (u, w)_{H^1_\alpha}\,ds \right| &= \left| \int_{t_0}^{t} (u_m - u, w)_{H^1_\alpha}\,ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} ||w||_{H^1_\alpha} ||(u_m - u)(s)||_{H^1_\alpha}\,ds \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato que as normas $||\cdot||_{H^1_\alpha}$ e $||\cdot||_V$ são equivalentes. Segue-se que

$$\left| \int_{t_0}^{t} (u_m, w)_{H^1_\alpha}\,ds - \int_{t_0}^{t} (u, w)_{H^1_\alpha}\,ds \right| \leq K ||w||_V ||u_m - u||_{L^2(0,T;V)}$$

Dado que a sequencia $(u_m)_m$ converge fortemente para u em $L^2(0,T;V)$, concluímos que o termo de amortecimento converge ao termo de amortecimento limite quando m tende ao infinito. Isto é,

$$\gamma \int_{t_0}^{t} (u_m, w)_{H^1_\alpha}\,ds \longrightarrow \gamma \int_{t_0}^{t} (u, w)_{H^1_\alpha}\,ds, \tag{2.60}$$

Finalmente, analisamos a convergência do termo de forçamento. Dado que o operador de projeção ortogonal P_m é auto-adjunto, temos que

$$\int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{T}^2} P_m f(x) w(x)\,dx\,ds = \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{T}^2} f(x) P_m w(x)\,dx\,ds$$

Desse modo, calculando a diferença dos termos de forçamento. Vemos que,

$$\left| \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{T}^2} f(x) w_m(x)\,dx\,ds - \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{T}^2} f(x) w(x)\,dx\,ds \right| = \Big| (t_0 - t)(f, w_m - w)_{L^2} \Big|.$$

Já que, w e f não dependem do tempo. Logo, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz do lado direito da igualdade anterior, temos que

$$|(t_0 - t)(f, w_m - w)_{L^2}| \leq T ||f||_H ||w_m - w||_H.$$

Dado que o operador de projeção P_m, convergência forte na norma de H, concluímos:

$$\int_{t_0}^{t} (f_m, w)_{L^2}\,ds \longrightarrow \int_{t_0}^{t} (f, w)_{L^2}\,ds, \tag{2.61}$$

quando m tende para infinito.

Dos resultados (2.52), (2.58), (2.59), (2.60) e (2.61) afirmamos que o limite da sequência $(u_m)_m$ conforme m tende ao infinito satisfaz:

$$\begin{aligned}\left[(u(t),w)_{H^1_\alpha}-(u(t_0),w)_{H^1_\alpha}\right]+\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}^2}B(u,v)(s)\cdot w\,dx\,ds\\+\nu\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}^2}\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}}u(s)\cdot\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}}w\,dx\,ds\\+\gamma\int_{t_0}^{t}(u(s),w)_{H^1_\alpha}\,ds=\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}^2}f\cdot u(s)\,dx\,ds,\end{aligned}$$

para todo $w\in D(I_\beta)$, para todo $t>t_0$ e para quase todo $t_0,t\in[0,T)$.

Para concluir a existência da solução no sentido da Definição 1, devemos verificar que u é uma função continua de $[0,T]$ para V. Isto é, $u\in C([0,T];V)$. De fato, dado que $\frac{du_m}{dt}$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;D(I_\beta)')$, existe uma subsequência denotada, u_m, tal que

$$\frac{du_m}{dt}\overset{*}{\rightharpoonup}\dot{u}\quad\text{em}\quad L^2(0,T;D(I_\beta)'). \tag{2.62}$$

Denotamos o limite por $\dot{u}$, porque não é imediato que de fato $\dot{u}=\dfrac{du}{dt}$ (derivada fraca temporal). No entanto, pela convergência (2.62) temos que

$$\int_0^T\frac{du_m(s)}{ds}\varphi(s)\,ds\longrightarrow\int_0^T\dot{u}(s)\varphi(s)\,ds,$$

para toda φ em $L^2(0,T;D(I_\beta))$. Seja φ um elemento de $C_c^\infty(0,T;D(I_\beta))$, o qual é um subconjunto de $L^2(0,T;D(I_\beta))$. Aplicarmos integração por partes, junto ao fato de que u_m converge fracamente para u em $L^2(0,T;D(I_\beta))$, obtemos que

$$\int_0^T\frac{du_m(s)}{ds}\varphi(s)\,ds=-\int_0^T u_m(s)\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\longrightarrow-\int_0^T u(s)\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds$$

conforme m tende ao infinito. Logo, pela unicidade do limite, podemos observar que:

$$\int_0^T\dot{u}(s)\varphi(s)\,ds=-\int_0^T u(s)\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds,$$

para toda $\varphi\in C_c^\infty(0,T,D(I_\beta))$. Portanto, $\dot{u}=\dfrac{du}{dt}$.

Desse modo, concluímos que $u\in E_{2,2}$ (conjunto definido em (2.48)). Além disso, pelas triplas $D(I_\beta)\subset V,H\subset(D(I_\beta))'$, a qual a primeira inclusão é compacta e a segunda continua, temos conforme ao Teorema II.5.13 (Lema de Lions-Magenes) em ([1] pag 101), deduzimos que u é uma função fracamente continua de $[0,T]$ para H e V. Isso significa que, $u(t)$ coincide com uma função contínua em quase todos os pontos de $[0,T]$. Além disso, satisfaz a seguinte igualdade no sentido das distribuições escalares em $[0,T]$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(t)||_H^2=(\partial_t u(t),u(t))_H\quad\text{e}\quad\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(t)||_V^2=(\partial_t u(t),u(t))_V.$$

Portanto, das identificações anteriores e a definição de norma H^1_α, dada em (2.6), segue-se que $u(x,t)$ satisfaz a igualdade

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{H^1_\alpha} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[||u(t)||^2_H + \alpha^2||u(t)||^2_V\right]$$

no sentido das distribuições em $[0,T]$. Assim, dado que $u(x,t)$ satisfaz a equação (2.19) em sentido fraco e tomando uma função teste adequada, temos a seguinte equação de balanço

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u||^2_{H^1_\alpha} + \nu||\nabla(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}}u||^2_{L^2} + \gamma||u||^2_{H^1_\alpha} = (f,u)_{L^2}. \tag{2.63}$$

Portanto, o limite satisfaz a equação de balanço de energia para o sistema (2.19). □

2.3 Unicidade da solução

Nesta última seção, demonstramos a unicidade da solução obtida no Teorema 2 para as equações de Camassa-Holm generalizadas descritas no sistema (2.19). Para alcançar esse objetivo, consideramos duas soluções do sistema (2.19) com o mesmo dado inicial. Em seguida, estabelecemos um novo sistema de equações para a diferença dessas soluções, agora com dado inicial zero. Utilizando argumentos do método de energia e desenvolvemos uma desigualdade diferencial para essa diferença em uma norma adequada. Por último, analisamos o comportamento da solução dessa desigualdade diferencial.

A seguir, enunciamos nosso Teorema de unicidade.

Teorema 3. *A solução para as equações de Camassa-Holm generalizadas descritas no sistema (2.19) e cuja solução é dada pelo Teorema 2 é única.*

Demonstração. Sejam $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ soluções do sistema (2.19) no intervalo $[0,T]$, com o mesmo dado inicial u_0. Além disso, definimos dois novos campos por:

$$\theta := u^{(1)} - u^{(2)} \quad \text{e} \quad w := v^{(1)} - v^{(2)}. \tag{2.64}$$

Fazendo a diferença entre os dois sistemas determinados por $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$. Obtemos um novo sistema, para a diferença das soluções anteriores.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t w + [B(u^{(1)},v^{(1)}) - B(u^{(2)},v^{(2)})] - \nu\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta}\theta + \gamma w & = & 0 \\ (\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)\theta & = & w \\ w(0,x) & = & 0 \end{array}\right. \tag{2.65}$$

Neste novo sistema, observamos que o termo não linear é de fato a diferença dos termos não lineares induzidos pelas soluções $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ dadas inicialmente. Lembrando que o termo não linear denotado por $B(u,v)$ está definido em (2.15), com uma pequena modificação para não carregar os índices das potencias,

$$B(u^{(i)},v^{(i)}) = \mathbb{P}\left((u^{(i)}\cdot\nabla)v^{(i)} + \sum_{j=1}^{2} v_j^{(i)}\nabla u_j^{(i)}\right)$$

com $i = 1, 2$. Então, nosso objetivo é reescrever esse termo não linear envolvido no sistema (2.65). a partir daqui, para simplificar a notação de subíndices no termo não linear, usaremos a somação de Einstein. Assim que:

$$B(u^{(1)}, v^{(1)}) - B(u^{(2)}, v^{(2)}) = \mathbb{P}\Big((u^{(1)} \cdot \nabla)v^{(1)} + v_j^{(1)} \nabla u_j^{(1)} - \Big[(u^{(2)} \cdot \nabla)v^{(2)} + v_j^{(2)} \nabla u_j^{(2)}\Big]\Big).$$

Isolando os campos $u^{(1)}$ e $v^{(1)}$ das equações (2.64), temos que:

$$u^{(1)} = \theta + u^{(2)} \quad \text{e} \quad v^{(1)} = w + v^{(2)}.$$

Logo, substituindo na igualdade anterior e simplificando termos opostos. Segue-es que:

$$\begin{aligned}
&([\theta + u^{(2)}] \cdot \nabla)(w + v^{(2)}) + (w_j + v_j^{(2)})\nabla(\theta_j + u_j^{(2)}) - \Big[(u^{(2)} \cdot \nabla)v^{(2)} + v_j^{(2)} \nabla u_j^{(2)}\Big] \\
&= (\theta \cdot \nabla)w + (\theta \cdot \nabla)v^{(2)} + (u^{(2)} \cdot \nabla)w + \cancel{(u^{(2)} \cdot \nabla)v^{(2)}} + w_j \nabla\theta_j + \\
&\quad + w_j \nabla u_j^{(2)} + v_j^{(2)} \nabla\theta_j + \cancel{v_j^{(2)} \nabla u_j^{(2)}} - \cancel{(u^{(2)} \cdot \nabla)v^{(2)}} - \cancel{v_j^{(2)} \nabla u_j^{(2)}} \\
&= (\theta \cdot \nabla)w + (\theta \cdot \nabla)v^{(2)} + (u^{(2)} \cdot \nabla)w + w_j \nabla\theta_j + w_j \nabla u_j^{(2)} + v_j^{(2)} \nabla\theta_j.
\end{aligned}$$

O termo não linear é simplificada e renomeado por:

$$B := \mathbb{P}\Big((\theta \cdot \nabla)w + (\theta \cdot \nabla)v^{(2)} + (u^{(2)} \cdot \nabla)w + w_j \nabla\theta_j + w_j \nabla u_j^{(2)} + v_j^{(2)} \nabla\theta_j\Big). \tag{2.66}$$

Desse modo, o sistema (2.65) pode-se rescrever como:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\partial_t w + B - \nu\Delta(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\beta}\theta + \gamma w &=& 0 \\
(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)\theta &=& w \\
w(0, x) &=& 0
\end{array}\right. \tag{2.67}$$

O próximo passo em derivar uma desigualdade diferencial para a norma H_α^1 de θ. Esta será a etapa mais complexa e delicada do processo. Considerando que o sistema de equações (2.67) admite uma solução no sentido fraco, tomamos uma função teste como sendo θ. Desse modo, obtemos a equação de balanço energia para a diferença de soluções. Isto é,

$$\frac{d}{dt}||\theta||_{H_\alpha^1}^2 + (B, \theta)_{L^2} + \nu||\nabla(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\theta||_{L^2}^2 + \gamma||\theta||_{H_\alpha^1}^2 = 0. \tag{2.68}$$

Dado que o termo associado ao parâmetro de viscosidade e ao parâmetro de amortecimento são positivos. Então, simplificamos a equação (2.68) para a desigualdade diferencial:

$$\frac{d}{dt}||\theta||_{H_\alpha^1}^2 \leq |(B, \theta)_{L^2}|. \tag{2.69}$$

Dado que $\mathbb{P}$ é auto-adjunto e $\mathbb{P}\theta = \theta$. Note que,

$$\begin{aligned}
(B, \theta)_{L^2} &= \int_{\mathbb{T}^2} B \cdot \theta \, dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^2} (\theta \cdot \nabla)w \cdot \theta \, dx + \int_{\mathbb{T}^2} (\theta \cdot \nabla)v^{(2)} \cdot \theta \, dx + \\
&\quad + \int_{\mathbb{T}^2} (u^{(2)} \cdot \nabla)w \cdot \theta \, dx + \int_{\mathbb{T}^2} w_j \nabla\theta_j \cdot \theta \, dx + \\
&\quad + \int_{\mathbb{T}^2} w_j \nabla u_j^{(2)} \cdot \theta \, dx + \int_{\mathbb{T}^2} v_j^{(2)} \nabla\theta_j \cdot \theta \, dx.
\end{aligned}$$

Observamos que, ao aplicar integração por partes na primeira integral do lado direito, obtemos que:

$$\int_{\mathbb{T}^2} (\theta \cdot \nabla) w \cdot \theta \, dx = \int_{\mathbb{T}^2} (\theta \cdot \nabla) w_j \theta_j \, dx = - \int_{\mathbb{T}^2} w_j (\theta \cdot \nabla) \theta_j \, dx$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{T}^2} (\theta \cdot \nabla) w \cdot \theta \, dx + \int_{\mathbb{T}^2} w_j (\theta \cdot \nabla) \theta_j \, dx = 0.$$

Por outra parte, ao aplicar integração por partes na segunda integral do lado direito, obtemos que:

$$\int_{\mathbb{T}^2} (\theta \cdot \nabla) v^{(2)} \cdot \theta \, dx = \int_{\mathbb{T}^2} (\theta \cdot \nabla) v_j^{(2)} \theta_j \, dx = - \int_{\mathbb{T}^2} v_j^{(2)} (\theta \cdot \nabla) \theta_j \, dx.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{T}^2} (\theta \cdot \nabla) v^{(2)} \cdot \theta \, dx + \int_{\mathbb{T}^2} v_j^{(2)} (\theta \cdot \nabla) \theta_j \, dx = 0.$$

Portanto, o produto interno L^2 de θ como o termo não linear do sistema (2.67) é simplificado da forma:

$$(B, \theta)_{L^2} = \int_{\mathbb{T}^2} (u^{(2)} \cdot \nabla) w \cdot \theta \, dx + \int_{\mathbb{T}^2} w_j \nabla u_j^{(2)} \cdot \theta \, dx. \tag{2.70}$$

A seguir, estimaremos cada integral na igualdade (2.70) utilizando a norma H^1_α de θ. Para isso, simplificaremos os termos restantes.

Na primeira integral do lado direito de (2.70), observamos que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} (u^{(2)} \cdot \nabla) w \cdot \theta \, dx &= \int_{\mathbb{T}^2} (u^{(2)} \cdot \nabla)(\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta) \theta \cdot \theta \, dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} (u^{(2)} \cdot \nabla) \theta \cdot \theta \, dx - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} (u^{(2)} \cdot \nabla) \Delta \theta \cdot \theta \, dx. \end{aligned}$$

Aplicando integração por partes, segue-se que a primeira integral da igualdade anterior é zero. A integral restante desta igualdada, pode ser rescrita como:

$$-\alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} (u^{(2)} \cdot \nabla) \Delta \theta \cdot \theta \, dx = \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} \Delta \theta \cdot (u^{(2)} \cdot \nabla) \theta \, dx$$

Rescrevendo o termo do lado direito, usando somação de Einstein, e aplicando integração por partes. Temos que

$$\begin{aligned} \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} (\Delta \theta) \cdot (u^{(2)} \cdot \nabla) \theta \, dx &= \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} \partial_i (\partial_i \theta_j) u_k^{(2)} \partial_k \theta_j \, dx \\ &= -\alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} \partial_i \theta_j \partial_i u_k^{(2)} \partial_k \theta_j \, dx - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} \partial_i \theta_j u_k^{(2)} \partial_k \partial_i \theta_j \, dx \\ &= -\alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} \nabla \theta \cdot (\nabla u^{(2)} \cdot \nabla) \theta \, dx - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} \nabla \theta \cdot (u^{(2)} \cdot \nabla) \nabla \theta \, dx. \end{aligned}$$

Observe que, aplicando novamente integração por partes na última integral da igualdade anterior. Vemos que:

$$\int_{\mathbb{T}^2} \nabla \theta \cdot (u^{(2)} \cdot \nabla) \nabla \theta \, dx = 0.$$

Desse modo, a primeira integral do lado direito de (2.70) pode-se rescrever como:

$$\int_{\mathbb{T}^2}(u^{(2)}\cdot\nabla)w\cdot\theta\,dx=-\alpha^2\int_{\mathbb{T}^2}\nabla\theta\cdot(\nabla u^{(2)}\cdot\nabla)\theta\,dx. \tag{2.71}$$

Na segunda integral do lado direito de (2.70), observamos que:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^2}w_j\nabla u_j^{(2)}\cdot\theta\,dx&=\int_{\mathbb{T}^2}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)\theta_j\nabla u_j^{(2)}\cdot\theta\,dx\\&=\int_{\mathbb{T}^2}\theta_j\nabla u_j^{(2)}\cdot\theta\,dx-\alpha^2\int_{\mathbb{T}^2}\Delta\theta_j\nabla u_j^{(2)}\cdot\theta\,dx.\end{aligned}$$

Note que, rescrevendo a última integral do lado direito, usando somação de Einstein, e aplicando integração por partes. Temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^2}\Delta\theta_j\nabla u_j^{(2)}\cdot\theta\,dx&=\int_{\mathbb{T}^2}\partial_i(\partial_i\theta_j)\partial_k u_j^{(2)}\theta_k\,dx\\&=-\int_{\mathbb{T}^2}\partial_i\theta_j\partial_i\partial_k u_j^{(2)}\theta_k\,dx-\int_{\mathbb{T}^2}\partial_i\theta_j\partial_k u_j^{(2)}\partial_j\theta_k\,dx\\&=-\int_{\mathbb{T}^2}\nabla\theta\cdot(\nabla\theta\cdot\nabla)u^{(2)}(x)\,dx-\int_{\mathbb{T}^2}\nabla\theta\cdot(\theta\cdot\nabla)\nabla u^{(2)}(x)\,dx.\end{aligned}$$

Neste caso, o fato de aplicar integração por partes, na última integral, aumenta em mais duas integrais. A diferença significativa deste processo é que conseguimos simplificar o grau da derivada de θ. Desse modo, a segunda integral do lado direito de (2.70) é rescrita como:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^2}w_j\nabla u_j^{(2)}\cdot\theta\,dx=\int_{\mathbb{T}^2}\theta_j\nabla u_j^{(2)}\cdot\theta\,dx+\alpha^2\int_{\mathbb{T}^2}\nabla\theta\cdot(\nabla\theta\cdot\nabla)u^{(2)}(x)\,dx\\+\alpha^2\int_{\mathbb{T}^2}\nabla\theta\cdot(\theta\cdot\nabla)\nabla u^{(2)}(x)\,dx.\end{aligned} \tag{2.72}$$

Por conseguente, das identidades (2.71) e (2.72) temos que:

$$\begin{aligned}|(B,\theta)_{L^2}|\leq\alpha^2\int_{\mathbb{T}^2}\left|\nabla\theta\cdot(\nabla u^{(2)}\cdot\nabla)\theta\right|dx+\int_{\mathbb{T}^2}\left|\theta\cdot(\theta\cdot\nabla)u^{(2)}\right|dx+\\+\alpha^2\int_{\mathbb{T}^2}\left|\nabla\theta\cdot(\nabla\theta\cdot\nabla)u^{(2)}\right|dx+\alpha^2\int_{\mathbb{T}^2}\left|\nabla\theta\cdot(\theta\cdot\nabla)\nabla u^{(2)}\right|dx.\end{aligned} \tag{2.73}$$

Com o objetivo de estimar o produto interno L^2 de θ com o termo não linear (2.66) em relação à norma H^1_α de θ, observamos a partir da desigualdade anterior que, ao combinar as duas primeiras integrais e aplicar a desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados $(2,2,\infty)$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^2}\left|\theta\cdot(\theta\cdot\nabla)u^{(2)}(x)\right|dx+\alpha^2\int_{\mathbb{T}^2}\left|\nabla\theta\cdot(\nabla u^{(2)}:\nabla)\theta(x)\right|dx\\\leq||\nabla u^{(2)}||_{L^\infty}||\theta||_H^2+\alpha^2||\nabla u^{(2)}||_{L^\infty}||\nabla\theta||_H^2.\end{aligned}$$

Colocando em evidencia a norma $||\nabla u^{(2)}||_{L^\infty}$ e aplicando a definição da norma H^1_α definida em (2.6). Segue-se que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^2}\left|\theta\cdot(\theta\cdot\nabla)u^{(2)}(x)\right|dx+\alpha^2\int_{\mathbb{T}^2}\left|\nabla\theta\cdot(\nabla u^{(2)}:\nabla)\theta(x)\right|dx\leq\\\leq||\nabla u^{(2)}||_{L^\infty}\Big(||\theta||_H^2+\alpha^2||\nabla\theta||_H^2\Big)\\=||\nabla u^{(2)}||_{L^\infty}||\theta||^2_{H^1_\alpha}.\end{aligned} \tag{2.74}$$

As integrais restantes da desigualdade (2.73), serão analisadas separadamente, ambas pela desigualdade de Hölder, mas com expoentes conjugados diferentes. Primeiramente, observe que aplicando a desigualdade de Hölder, novamente com os expoentes conjugados $(2, 2, \infty)$, temos que:

$$\alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} \left| \nabla\theta \cdot (\nabla\theta \cdot \nabla) u^{(2)}(x) \right| dx \leq \alpha^2 ||\nabla u^{(2)}||_{L^\infty} ||\nabla\theta||_H^2.$$

Logo, acrescentando do lado direito da desigualdade anterior, o termo

$$\alpha^2 ||\nabla u^{(2)}||_{L^\infty} ||u||_H^2 \geq 0.$$

Obtemos que,

$$\alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} \left| \nabla\theta \cdot (\nabla\theta \cdot \nabla) u^{(2)}(x) \right| dx \leq \alpha^2 ||\nabla u^{(2)}||_{L^\infty} ||\nabla\theta||_{H^1_\alpha}^2. \tag{2.75}$$

Na última integral da desigualdade (2.73), utilizando a desigualdade de Hölder com expoentes conjugados (p, p'), com p sendo suficientemente grande. Isto é,

$$\begin{aligned} \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} \left| \nabla\theta \cdot (\theta \cdot \nabla) \nabla u^{(2)}(x) \right| dx &= \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} \left| \nabla\theta \cdot (\theta \cdot D^2 u^{(2)})(x) \right| dx \\ &\leq \alpha^2 ||\theta \cdot \nabla\theta||_{L^{p'}} ||D^2 u^{(2)}||_{L^p}. \end{aligned}$$

A desigualdade anterior introduz dois novos termos em normas $L^{p'}$ e L^p, sobre os quais inicialmente não possuímos informações. Analisaremos cada uma dessas normas separadamente. Começaremos examinando a norma $L^{p'}$. De fato,

$$\begin{aligned} ||\theta \cdot \nabla\theta||_{L^{p'}} &= \left[\int_{\mathbb{T}^2} |\theta \cdot \nabla\theta(x)|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left[\int_{\mathbb{T}^2} |\theta \cdot \nabla\theta(x)|^{p'-1} |\theta \cdot \nabla\theta(x)| \, dx \right]^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

Vamos assumir, por ora, que as normas L^∞ de θ e $\nabla\theta$ são limitadas, para manter o foco na demonstração em curso. Especificamente, demostraremos que essas normas são limitadas pela norma L^2 da vorticidade potencial do dado inicial e a norma L^2 da divergência do termo de forçamento. Assim,

$$||\theta \cdot \nabla\theta||_{L^{p'}} \leq \left[\left[||\theta||_{L^\infty} ||\nabla\theta||_{L^\infty} \right]^{p'-1} \int_{\mathbb{T}^2} |\theta| |\nabla\theta(x)| \, dx \right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Aplicando a desigualdade de Young nos termos da integral, obtemos que:

$$||\theta \cdot \nabla\theta||_{L^{p'}} \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{p'}}} \left[||\theta||_{L^\infty} ||\nabla\theta||_{L^\infty} \right]^{\frac{p'-1}{p'}} \left[\int_{\mathbb{T}^2} \left[|\theta(x)|^2 + |\nabla\theta(x)|^2 \right] dx \right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Logo, pela definição de norma H^1, segue que:

$$||\theta \cdot \nabla\theta||_{L^{p'}} \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{p'}}} \left[||\theta||_{L^\infty} ||\nabla\theta||_{L^\infty} \right]^{\frac{p'-1}{p'}} ||\theta||_{H^1}^{\frac{2}{p'}}.$$

Dado que as normas H^1 e H^1_α são equivalentes. Temos que, existe uma constante positiva denotada por K tal que:

$$||\theta \cdot \nabla\theta||_{L^{p'}} \leq K\Big[||\theta||_{L^\infty}||\nabla\theta||_{L^\infty}\Big]^{\frac{p'-1}{p'}}||\theta||_{H^1_\alpha}^{\frac{2}{p'}}. \tag{2.76}$$

Da desigualdade anterior, observamos uma limitação pela norma H^1_α de θ que era nosso objetivo inicial. Além disso, surgem as normas L^∞ de θ e $\nabla\theta$. A seguir, veremos que essas normas L^∞ permanecem limitadas. Primeiramente, examinemos a norma L^∞ de θ. De fato, dado que $u^{(1)}, u^{(2)} \in L^\infty(0,T;W)$ e $W \subset H^3 \cap V$ e aplicando desigualdade de Morrey, usada nas desigualdades (2.53), temos que:

$$||\theta||_{L^\infty} = ||u^{(1)} - u^{(2)}||_{L^\infty} \leq C||u^{(1)} - u^{(2)}||_{H^3} \leq C\Big[||u^{(1)}||_{H^3} + ||u^{(2)}||_{H^3}\Big].$$

Pela desigualdade (2.43), demonstradas na seção anterior, obtemos que a norma L^∞ de θ é limitada. Isto é,

$$||\theta||_{L^\infty} \leq C(\gamma, ||q_0||_{L^2}, ||g||_{L^2}). \tag{2.77}$$

De maneira similar, examinamos a norma L^∞ de $\nabla\theta$ e obtemos que

$$||\nabla\theta||_{L^\infty} \leq C_1(\gamma, ||q_0||_{L^2}, ||g||_{L^2}). \tag{2.78}$$

Por conseguinte, combinando (2.76), (2.77) e (2.78), segue que

$$||\theta \cdot \nabla\theta||_{L^{p'}} \leq M||\theta||_{H^1_\alpha}^{\frac{2}{p'}}. \tag{2.79}$$

Por último, examinamos a norma L^p. Em outras palavras, mostraremos que a norma $||D^2u^{(2)}||_{L^p}$ é limitada por um múltiplo constante da norma H^1_α de θ. A ferramenta utilizada para essa análise é a desigualdade de *Gagliardo-Nirenberg-Sobolev*. Lembramos a desigualdade: Se $1 < q < n$, temos que existe q^* chamado de expoente de Sobolev tal que:

$$W^{1,q}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow L^{q^*}(\mathbb{T}^n) \quad \text{onde} \quad q^* = \frac{nq}{n-q} \quad \text{e} \quad C_q = \frac{q}{n-q}.$$

Observe que, tomando o expoente Sobolev $q^* = p$ e $n = 2$, temos que:

$$W^{1,q}(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow L^{p}(\mathbb{T}^2) \quad \text{onde} \quad p = \frac{2q}{2-q} \quad \text{e} \quad C_q = \frac{q}{2-q}.$$

Consequentemente,

$$1 < q = \frac{2p}{2+p} < 2 \quad \text{e} \quad C_q = \frac{p}{2}.$$

Desse modo, obtemos que

$$||D^2u^{(2)}||_{L^p} \leq \left(\frac{p}{2}\right)||D^2u^{(2)}||_{W^{1,\frac{2p}{2+p}}}.$$

Além disso, dado que a área do toro (2D) é finita, podemos aplicar a desigualdade de Hölder com expoentes conjugados $\left(\frac{p+2}{p}, \frac{p+2}{2}\right)$, para obter a inclusão

$$L^2(\mathbb{T}^2) \subset L^{\frac{2p}{2+p}}(\mathbb{T}^2).$$

Por conseguinte, o espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{T}^2) = W^{1,2}(\mathbb{T}^2)$ está continuamente mergulhado em $W^{1,\frac{2p}{p+2}}(\mathbb{T}^2)$. Desse modo, segue que:

$$||D^2u^{(2)}||_{L^p} \leq Np||u^{(2)}||_{H^3}.$$

Das desigualdades (2.40), (2.41) e (2.42) demonstradas na seção anterior, temos que a norma L^p de $D^2u^{(2)}$ é limitada. Isto é,

$$||D^2u^{(2)}||_{L^p} \leq pN(\gamma, ||q_0||_{L^2}, ||g||_{L^2}). \tag{2.80}$$

Revisando tudo o que foi discutido anteriormente tendo presente nosso objetivo de estimar o termo $|(B,\theta)_{L^2}|$. Por (2.73), sabemos que o termo é limitado por quatro integrais. Das quais, as duas primeiras foram estimadas em (2.74) e a terceira integral foi estimada em (2.75). Logo, combinando estas duas estimativas e renomeando a constante, temos que:

$$\alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} \left|\nabla\theta \cdot (\nabla u^{(2)} \cdot \nabla)\theta\right| dx + \int_{\mathbb{T}^2} \left|\theta \cdot (\theta \cdot \nabla)u^{(2)}\right| dx + \\ + \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} \left|\nabla\theta \cdot (\nabla\theta \cdot \nabla)u^{(2)}\right| dx \leq C_1||\theta||^2_{H^1_\alpha}.$$

Por outro lado, a quarta integral da desigualdade (2.73) foi estimada em (2.79) e (2.80). Combinando estas duas estimativas e renomeando as constante envolvida temos que:

$$\alpha^2 \int_{\mathbb{T}^2} \left|\nabla\theta \cdot (\theta \cdot \nabla)\nabla u^{(2)}\right| dx \leq pC_2||\theta||^{\frac{2}{p'}}_{H^1_\alpha}.$$

Portanto, a desigualdade diferencial (2.69) é reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}||\theta(t)||^2_{H^1_\alpha} \leq C_1||\theta(t)||^2_{H^1_\alpha} + C_2p||\theta(t)||^{\frac{2}{p'}}_{H^1_\alpha}. \tag{2.81}$$

O próximo e último passo em nossa análise da unicidade da solução do sistema (2.19), será estudar o comportamento da solução da desigualdade diferencial (2.81). Então, a partir de (2.81) observamos que:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-C_1t}||\theta(t)||^2_{H^1_\alpha}\right] \leq C_2pe^{-C_1t}||\theta(t)||^{\frac{2}{p'}}_{H^1_\alpha}.$$

Dado que (p, p') são expoentes conjugado, vemos que

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-C_1t}||\theta(t)||^2_{H^1_\alpha}\right] \leq C_2pe^{-\frac{C_1t}{p}}\left[e^{-C_1t}||\theta(t)||^2_{H^1_\alpha}\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Como $\frac{C_1t}{p} \geq 0$, segue-se que

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-C_1t}||\theta(t)||^2_{H^1_\alpha}\right] \leq C_2p\left[e^{-C_1t}||\theta(t)||^2_{H^1_\alpha}\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Consideremos a função não negativa:

$$Z(t) = e^{-C_1t}||\theta(t)||^2_{H^1_\alpha}.$$

Temos então, o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{dZ(t)}{dt} & \leq & C_2 p Z^{\frac{1}{p'}}(t) \\ Z(0) & = & 0 \end{cases} \tag{2.82}$$

Observe que se $Z(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$, então a norma H^1_α do campo θ é zero. Consequentemente, o campo θ é nulo. Desse modo, mostramos que as soluções $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ são iguais e concluindo o Teorema 3. De fato, considerando a mudança de variável do tipo Bernoulli:

$$Z = Y^p \quad \text{com} \quad \frac{dZ}{dt} = pY^{p-1}\frac{dY}{dt}.$$

Vemos que, o problema (2.82) é equivalente a:

$$\begin{cases} \dfrac{dY(t)}{dt} & \leq & C_2 \\ Y(0) & = & 0 \end{cases}$$

Integrando de 0 a t e utilizando a condição inicial, $Y(0) = 0$. Temos que a solução para (2.82) é da forma

$$0 \leq Z(t) \leq (C_2 t)^p$$

para todo $0 \leq t \leq \frac{1}{2C_2}$. Logo, fazendo p tender para infinito, obtemos que

$$Z \equiv 0 \quad \text{em} \quad \left[0, \frac{1}{2C_2}\right].$$

Se denotamos por $t_0 = \frac{1}{2C_2}$ e considerarmos a nova condição inicial $Z(t_0) = 0$, estabelecemos o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{dZ(t)}{dt} & \leq & C_2 p Z^{\frac{1}{p'}}(t) \\ Z(t_0) & = & 0. \end{cases}$$

De maneira análoga, como foi solucionado o problema (2.82), obtemos que:

$$0 \leq Z(t) \leq (C_2(t - t_0))^p$$

para todo $t_0 \leq t \leq 2t_0$. Novamente, fazendo p tender ao infinito, obtemos que

$$Z \equiv 0 \quad \text{em} \quad [t_0, 2t_0].$$

Portanto, $Z \equiv 0$ em $\left[0, 2t_0\right]$. De forma indutiva, segue-se que $Z \equiv 0$ em $\left[0, nt_0\right]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demonstrando que $Z \equiv 0$ em $[0, T]$. Assim, concluímos que o Problema (2.19) possui uma única solução em $C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; D(I_\beta))$ $\square$

3 Fenômeno de Dissipação Anômala para a Vorticidade Potencial

Neste capítulo estudaremos o limite invíscido de médias temporais de longo prazo das soluções das equações de Camassa-Holm Generalizadas (CHG) descritas em (2.1) sobre o domínio periódico $\mathbb{T}^2$. O Teorema principal de nosso trabalho dita que a taxa média de dissipação de enstrofia potencial se anula no limite da viscosidade quando tende a zero, um resultado similar é obtido para as equações de Navier-Stokes (NS) com amortecimento em [11] e para as equações quase-geostrófica superficial (SQG) em [12]. Este resultado é possível, já que as soluções estatísticas estacionárias conservam o balanço de enstrofia potencial.

O capítulo será dividido em 5 seções: Compacidade da semi-órbita positiva, Limite invíscido das equações estacionárias de Camassa-Holm Generalizadas, Soluções estatísticas estacionárias no espaço fase de vorticidade potencial, Compacidade relativa e balanço de enstrofia potencial, e por último médias temporais de longo prazo.

3.1 Compacidade da Semi-Órbita Positiva

Nesta seção, abordamos um fato relevante do nosso estudo. O qual é a compacidade da semi-órbita positiva, induzida pela função escalar que é solução do sistema de equações para a vorticidade potencial do sistema (2.1) introduzida no capítulo anterior. Este fato é importante, porque é sobre a semi-orbita positiva que suporta a solução estatística estacionaria. Para levar a cabo este objetivo, será necessário estabelecer algumas estimativas para o campo de velocidade e a vorticidade potencial em diferentes normas.

Consideramos o sistema de equações de Camassa-Holm Generalizadas

$$\begin{cases} \partial_t v + u \cdot \nabla v + \sum_{j=1}^{2} v^j \nabla u^j - \nu\Delta(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\beta} u + \gamma v &= -\nabla p + f \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ v &= (\mathbb{I} - \alpha^2\Delta) u \\ u(x,0) &= u_0 \end{cases}$$

para os campos de vetores $u, v : \mathbb{T}^2 \times [0,\infty) \to \mathbb{T}^2$, f é uma força dada independente do tempo com média zero e $f \in (H^1(\mathbb{T}^2))^2$. O dado inicial u_0 é de divergência nula, média zero e pertence a $H^3(\mathbb{T}^2)$. Os parâmetros $\gamma > 0$, $\nu > 0$ e $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ fixos. Pelos Teoremas 2 e Teorema 3 do capítulo anterior, sabemos que existe uma única solução regular para o sistema de equações (2.1) que satisfaz o equação de balanço de energia:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u||^2_{H^1_\alpha} + \nu||\nabla(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u||^2_{L^2} + \gamma||u||^2_{H^1_\alpha} = (f, u)_{L^2}. \tag{3.1}$$

A partir da equação de balanço de energia, temos de fato que a norma $||\cdot||^2_{H^1_\alpha}$ do campo de velocidade u, para as equações de Camassa-Holm Generalizadas é limitada em tudo tempo. Além disso, a limitação é independente da viscosidade. Isto é,

$$||u(t)||^2_{H^1_\alpha} \leq ||u_0||^2_{H^1_\alpha} + \frac{C||f||^2}{\gamma^2}$$

onde C é uma constante positiva. Por outro lado, Se aplicamos o operador **Curl** para as equações de Camassa-Holm Generalizadas sob condições periódicas, obtemos o sistema de equações equivalente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}q + (u\cdot\nabla)q - \nu\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}q + \gamma q & = & g \\ \nabla\cdot u & = & 0 \\ \mathbf{Curl}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u & = & q \\ q(x,0) & = & q_0 \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Lembrando que o sistema (3.2) foi introduzido no capítulo 2, e foi chamado de *sistema de vorticidade potencial*. A função escalar $q(x,t)$ é chamada de *vorticidade potencial*, a qual é uma aplicação continua de $[0,T]$ para $L^2(\mathbb{T}^2)$. A função escalar g é o forçamento do potencial, definido por $g = \mathbf{Curl}(f)$. O problema da existência e unicidade das equações (3.2) é equivalente ao problema da existência e unicidade das equações (2.1), que foi estabelecido nos Teoremas 2 e 3 do capítulo anterior, que garante $q \in L^\infty(0,T;H^2\cap V)$ é uma solução fraca para o sistema de equações (3.2).

Por outro lado, ao aplicamos o operador **Curl**, definido em (2.12) como $\mathbf{Curl} = \nabla^\perp\cdot$, que comuta com o operador de Bessel$-\alpha$ de ordem 2, obtemos:

$$q = \nabla^\perp\cdot(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u = (\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)\nabla^\perp\cdot u = (\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)\omega. \tag{3.3}$$

De igual forma, como foi abordado o *sistema de vorticidade potencial de ordem m* no capítulo anterior, obtemos uma equação de balanço de enstrofia potencial, dada por:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||q||^2_{L^2} + \nu||q||^2_{H^\beta_\alpha} + \gamma||q||^2_{L^2} = (g,q)_{L^2}. \tag{3.4}$$

Aplicando a desigualdades de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Young com $\epsilon = \gamma^{\frac{1}{2}}$, no lado direito da igualdade (3.4), segue que:

$$|(g,q)_{L^2}| \leq \frac{1}{2\gamma}||g||^2_{L^2} + \frac{\gamma}{2}||q||^2_{L^2}. \tag{3.5}$$

Acoplando a desigualdade (3.5) em (3.4), obtemos a desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt}||q||^2_{L^2} + 2\nu||q||^2_{H^\beta_\alpha} + \gamma||q||^2_{L^2} \leq \frac{1}{\gamma}||g||^2_{L^2}. \tag{3.6}$$

Logo, usando o Lema de Grönwall na desigualdade diferencial (3.6), segue que a enstrofia potencial é uniformemente limitado na norma L^2. Isto é,

$$||q(\cdot,t)||^2_{L^2} \leq \left[||q_0||^2_{L^2} - \frac{1}{\gamma^2}||g||^2_{L^2}\right]e^{-\gamma t} + \frac{1}{\gamma^2}||g||^2_{L^2}. \tag{3.7}$$

A seguir, enunciamos nosso Lema sobre a compacidade relativa da semi-órbita positiva, considerando os parâmetros fixos $\nu > 0$ e $\gamma > 0$.

Lema 4. *Consideremos os parâmetros $0 < \alpha < 1$ e $1/2 < \beta \leq 1$. Sejam $q_0 \in L^2(\mathbb{T}^2)$ e $g \in L^2(\mathbb{T}^2)$ funções escalares. Seja $q(\cdot, t)$ a solução do sistema de vorticidade potencial (3.2). Então, para qualquer $t_0 \geq 0$ fixo a semi-órbita positiva*

$$\mathcal{O}^+(q_0, t_0) = \{q(\cdot, t + t_0) \in L^2(\mathbb{T}^2) \, : \, t \geq 0\}$$

é relativamente compacta em $L^2(\mathbb{T}^2)$.

Demonstração. A função escalar $q(\cdot, t)$, definido no conjunto $\mathcal{O}^+(q_0, t_0)$, é a solução do sistema de vorticidade potencial descrito em (3.2). A existência e unicidade dessa solução são garantidas pelos Teoremas 2 e 3 do capítulo anterior. Além disso, conforme (3.7) e pelo que a função escalar g é independente do tempo, temos que a norma L^2 da vorticidade potencial é uniformemente limitada com relação ao tempo. O Teorema 2 também garante que o campo de velocidade $u(x, t)$, das equações de Camassa-Holm Generalizadas descritas em (2.1) é limitado na norma de $L^\infty(0, T, H^3)$ para qualquer $T > 0$. Além disso, de (3.6), sabemos que as equações para a vorticidade potencial descritas em (3.2) satisfazem a desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt}||q||_{L^2}^2 + 2\nu||q||_{H_\alpha^\beta}^2 + \gamma||q||_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\gamma}||g||_{L^2}^2.$$

Desse forma, integrando de t a $t + 1$ obtemos a seguinte desigualdade:

$$||q(t+1)||_{L^2}^2 + 2\nu \int_t^{t+1} ||q(s)||_{H_\alpha^\beta}^2 \, ds + \gamma \int_t^{t+1} ||q(s)||_{L^2}^2 \, ds \leq \frac{1}{\gamma}||g||_{L^2}^2 + ||q(t)||_{L^2}^2.$$

Dado que a norma L^2 da vorticidade potencial é não negativa e a integral no parâmetro de amortecimento é não negativo, podemos simplificar a desigualdade anterior e rescrever a norma do termo de viscosidade como:

$$\nu \int_t^{t+1} ||q(s)||_{H_\alpha^\beta}^2 \, ds \leq ||q_0||_{L^2}^2 + \frac{1}{\gamma}||g||_{L^2}^2.$$

Consequentemente, da desigualdade (3.7) concluímos que:

$$\int_t^{t+1} ||q(s)||_{H_\alpha^\beta}^2 \, ds \leq M, \tag{3.8}$$

Aqui, a constante M é independente do tempo.

O próximo passo, é obter uma estimativa para a função escalar $q(x, t)$ na norma H_α^β com $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$. O objetivo dessa estimativa é aplicar o Teorema de Rellich-Kondrachov, que garante, H_α^β está compactamente mergulhado em L^2.

Como a equação (3.2) tem solução fraca, tomamos uma função teste da forma $J_\alpha^{2\beta}q(x,t)$ e obtemos que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||q(t)||^2_{H^\beta_\alpha} + \nu||q(t)||^2_{H^{2\beta}_\alpha} + \gamma||q(t)||^2_{H^\beta_\alpha} \leq \left|\Big(g, J^{2\beta}_\alpha q(t)\Big)_{L^2}\right| + \\ + \left|\Big((u\cdot\nabla)q(t), J^{2\beta}_\alpha q(t)\Big)_{L^2}\right|. \tag{3.9}$$

De fato, dado que o operador de Bessel$-\alpha$ de ordem β é auto adjunto, temos que:

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t q(t), J^{2\beta}_\alpha q(t)\Big)_{L^2} &= \Big(J^\beta_\alpha \partial_t q(t), J^\beta_\alpha q(t)\Big)_{L^2} = \Big(\partial_t J^\beta_\alpha q(t), J^\beta_\alpha q(t)\Big)_{L^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||J^\beta_\alpha q(t)||^2_{L^2}\end{aligned}$$

Logo, por (2.9). Temos que

$$\Big(\partial_t q(t), J^{2\beta}_\alpha q(t)\Big)_{L^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||q(t)||^2_{H^\beta_\alpha}. \tag{3.10}$$

Para o termo de viscosidade, temos que:

$$\begin{aligned}\Big(-\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}q(t), J^{2\beta}_\alpha q(t)\Big)_{L^2} &= \Big(-\Delta J^{2(\beta-1)}_\alpha q(t), J^{2\beta}_\alpha q(t)\Big)_{L^2} \\ &= \Big(-\Delta J^{2(2\beta-1)}_\alpha q(t), q(t)\Big)_{L^2}\end{aligned}$$

Aplicando integração por partes, segue que

$$\begin{aligned}\Big(-\Delta J^{2(2\beta-1)}_\alpha q(t), q(t)\Big)_{L^2} &= \Big(\nabla J^{(2\beta-1)}_\alpha q(t), \nabla J^{(2\beta-1)}_\alpha q(t)\Big)_{L^2} \\ &= ||\nabla J^{(2\beta-1)}_\alpha q||^2_{L^2} \\ &= ||q||^2_{H^{2\beta}_\alpha}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Para o termo de amortecimento, vemos que:

$$\Big(q, J^{2\beta}_\alpha q(t)\Big)_{L^2} = \Big(J^\beta_\alpha q, J^\beta_\alpha q(t)\Big)_{L^2}$$

Portanto,

$$\Big(q, J^{2\beta}_\alpha q(t)\Big)_{L^2} = ||q(t)||^2_{H^\beta_\alpha} \tag{3.12}$$

Combinando as identidades (3.10), (3.11) e (3.12), obtemos o lado esquerdo da desigualdade (3.9). Dado que nosso objetivo é obter uma estimativa para a norma H^β_α, devemos estimar os termos restantes da desigualdade (3.9). A seguir, estimaremos o primeiro termo do lado direito da desigualdade (3.9). Note que, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Segue que:

$$|\Big(g, J^{2\beta}_\alpha q(t)\Big)_{L^2}| \leq ||g||_{L^2}||J^{2\beta}_\alpha q(t)||_{L^2} = ||g||_{L^2}||q(t)||_{H^{2\beta}_\alpha}.$$

Nesta última estimativa, aplicamos a desigualdade de Young com $\epsilon = \nu^{\frac{1}{2}}$. Desse modo, obtemos a desigualdade:

$$|\Big(g, J^{2\beta}_\alpha q(t)\Big)_{L^2}| \leq \frac{||g||^2_{L^2}}{2\nu} + \frac{\nu}{2}||q(t)||^2_{H^{2\beta}_\alpha}. \tag{3.13}$$

Em relação ao segundo termo do lado direito da desigualdade (3.9), o qual corresponde ao termo não linear, requer-se uma atenção adicional. Primeiro aplicamos a desigualdade de Hölder com expoentes $(\infty, 2, 2)$. Isto é,

$$\left|\Big((u\cdot\nabla)q(t), J_\alpha^{2\beta}q(t)\Big)_{L^2}\right| \leq ||u(t)||_{L^\infty}||\nabla q(t)||_{L^2}||J_\alpha^{2\beta}q(t)||_{L^2}. \tag{3.14}$$

Aplicando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg de interpolação de espaços de Sobolev (ver [3]) e o fato que $\frac{1}{2}<\beta$, obtemos que:

$$||\nabla q(t)||_{L^2} \leq C||q(t)||_{L^2}^{1-\lambda}||q(t)||_{H^{2\beta}}^{\lambda}. \tag{3.15}$$

Por outra parte, dado que o parâmetro $0<\alpha<1$ e pela Proposição 22 do Apêndice A segue que: para $s>0$ as normas $||\cdot||_{H^s}$ e $||\cdot||_{H^s_\alpha}$ são equivalentes. Isto é,

$$\alpha^\beta||u||_{H^\beta} \leq ||u||_{H^\beta_\alpha} \leq ||u||_{H^\beta}, \tag{3.16}$$

para toda $u\in H^2(\mathbb{T}^2)$. Assim, das desigualdade (3.15) e (3.14), junto com a equivalência de normas (3.16), obtemos que:

$$\left|\Big((u\cdot\nabla)q(t), J_\alpha^{\beta}q(t)\Big)_{L^2}\right| \leq C||u(t)||_{L^\infty}||q(t)||_{L^2}^{1-\lambda}||q(t)||_{H^{2\beta}}^{1+\lambda}.$$

Por último, aplicamos a desigualdade de Young com expoentes:

$$\left(\frac{2}{1-\lambda}, \frac{2}{1+\lambda}\right) \quad \text{e} \quad \epsilon = \left[\frac{\nu\alpha^{2\beta}}{1+\lambda}\right]^{\frac{1+\lambda}{2}}.$$

Concluímos que o segundo termo do lado direito da desigualdade (3.9), da seguinte maneira:

$$\left|\Big((u\cdot\nabla)q(t), J_\alpha^{\beta}q(t)\Big)_{L^2}\right| \leq C||q(t)||_{L^2}^2 + \frac{\nu\alpha^{2\beta}}{2}||q(t)||_{H^{2\beta}}^2, \tag{3.17}$$

onde a constante $C:=C(\lambda,\nu,\alpha,\beta,||u||_{L^\infty})$. Observe que, pela equivalência de normas (3.16), a desigualdade (3.17) pode ser rescrita como:

$$\left|\Big((u\cdot\nabla)q(t), J_\alpha^{\beta}q(t)\Big)_{L^2}\right| \leq C||q(t)||_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2}||q(t)||_{H^{2\beta}_\alpha}^2. \tag{3.18}$$

Logo, combinado as estimativas (3.13) e (3.18), reescrevemos o lado direito de (3.9) da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||q(t)||_{H^\beta_\alpha}^2 + \gamma||q||_{H^\beta_\alpha}^2 + \nu||q(t)||_{H^{2\beta}_\alpha}^2 \leq \frac{||g||_{L^2}^2}{2\nu} + C||q(t)||_{L^2}^2 + \nu||q||_{H^{2\beta}_\alpha}^2.$$

Observe que, na desigualdade anterior, o termo de viscosidade pode ser facilmente cancelado. Além disso, como o termo associado ao parâmetro de amortecimento é positivo, ele também pode ser simplificado na desigualdade. Dessa forma, obtemos a seguinte desigualdade diferencial:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||q(t)||_{H^\beta_\alpha}^2 \leq \frac{||g||_{L^2}^2}{2\nu} + C||q(t)||_{L^2}^2.$$

Pela inclusão continua dos espaços $H^{\beta}_{\alpha}(\mathbb{T}^2)$, temos que $H^{\beta}_{\alpha}(\mathbb{T}^2) \subset L^2(\mathbb{T}^2)$. Por conseguinte,

$$\frac{d}{dt}||q(t)||^2_{H^{\beta}_{\alpha}} \leq \frac{||g||^2_{L^2}}{\nu} + C||q(t)||^2_{H^{\beta}_{\alpha}}. \tag{3.19}$$

Portanto, da desigualdade (3.8) e o Lema de Grönwall uniforme (ver [30]) aplicados na a desigualdade diferencial (3.19), concluímos que, para qualquer $t_0 > 0$, se $t > t_0$, a norma $||q(t)||^2_{H^{\beta}_{\alpha}}$ é uniformemente limitada em relação ao tempo. Dado que $\beta > 0$, aplicamos o Teorema de Rellich-Kondrachov para concluir que o conjunto $\overline{\mathcal{O}^{+}(q_0, t_0)}$ é compacto em $L^2(\mathbb{T}^2)$. □

A partir do Lema anterior, observamos que a norma H^{β}_{α}, com $\beta > 1/2$, da vorticidade potencial é limitada com constante indepedente do tempo. Assim, obtemos informação sobre a norma L^{∞} da vorticidade potencial, que é uma informação importante em nosso trabalho. Desse modo, existe uma constante $R > 0$ tal que para todo $t > 0$

$$||q(t)||_{L^{\infty}(\mathbb{T}^2)} \leq R. \tag{3.20}$$

Portanto, concluímos que norma L^{∞} da vorticidade potencial é limitada.

3.2 Limite Invíscido das Equações Estacionárias de Camassa-Holm Generalizadas

Neste seção abordamos o limite invíscido das soluções estacionárias para as equações de vorticidade potencial paras as equações de Camassa-Holm Generalizadas, servindo como motivação para o que será desenvolvido posteriormente com as soluções estatísticas estacionárias. Mostramos que o limite invíscido é uma solução renormalizada conforme é apresentado em [14].

Dando continuidade à análise, assumimos agora que os parâmetros satisfazem $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$, $\gamma > 0$ e o forçamento $f \in (H^1(\mathbb{T}^2))^2$ com média zero de tal maneira que $g := \mathbf{Curl}(f)$. Além disso, consideramos que $u^{(\nu)} \in D(I_{\beta})$, para ν fixo, é uma solução fraca para o sistema de equações estacionários de Camassa-Holm Generalizadas dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u \cdot \nabla v + \sum_j v_j \nabla u_j - \nu\Delta(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\beta} u + \gamma v &=& -\nabla p + f \\ (\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)u &=& v \\ \nabla \cdot u &=& 0, \end{array} \right. \tag{3.21}$$

que satisfaz a equação do balanço de energia para o sistema (3.21) dada por:

$$\gamma\Big[||u^{(\nu)}||^2_{L^2} + \alpha^2||\nabla u^{(\nu)}||^2_{L^2}\Big] + \nu||\nabla(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\beta/2} u^{(\nu)}||^2_{L^2} = (f, u^{(\nu)})_{L^2}. \tag{3.22}$$

Aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Young com $\epsilon = \gamma^{\frac{1}{2}}$ no lado direito da equação (3.22) e obtemos:

$$\gamma||u^{(\nu)}||^2_{L^2} + \gamma\alpha^2||\nabla u^{(\nu)}||^2_{L^2} + \nu||\nabla(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\beta/2} u^{(\nu)}||^2_{L^2} \leq \frac{1}{2\gamma}||f||^2_{L^2} + \frac{\gamma}{2}||u^{(\nu)}||^2_{L^2}.$$

Como o termo viscoso é não negativo na desigualdade anterior, podemos simplificar a desigualdade. Assim, obtemos:

$$\frac{\gamma}{2}||u^{(\nu)}||_{L^2}^2 + \gamma\alpha^2||\nabla u^{(\nu)}||_{L^2}^2 \leq \frac{1}{4\gamma}||f||_{L^2}^2. \tag{3.23}$$

Portanto, a sequência $\left(\nabla u^{(\nu)}\right)_\nu$ é limitadas em norma $L^2(\mathbb{T}^2)$. Logo, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, existe uma subsequência de $(u^{(\nu)})_\nu$, também denotada por $(u^{(\nu)})_\nu$, e $u^{(0)} \in (L^2(\mathbb{T}^2))^2$ tal que $(u^{(\nu)})_\nu$ convergente fortemente para $u^{(0)}$ quando ν tende a zero.

Por outro lado, seja $q^{(\nu)} \in H_\alpha^\beta(\mathbb{T}^2)$, para ν fixo, uma solução fraca para o sistema de equações estacionária de vorticidade potencial para as equações de Camassa-Holm Generalizadas dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u\cdot\nabla q + \gamma q - \nu\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}q &=& g \\ \mathbf{Curl}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u &=& q \\ \nabla\cdot u &=& 0, \end{array} \right. \tag{3.24}$$

que satisfaz a equação do balanço de enstrofia potencial para o sistema (3.24) dado por:

$$\gamma||q^{(\nu)}||_{L^2}^2 + \nu||q^{(\nu)}||_{H_\alpha^\beta}^2 = (g, q^{(\nu)})_{L^2}. \tag{3.25}$$

Aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Young com $\epsilon = \gamma^{\frac{1}{2}}$ no lado direito de equação (3.25), obtemos que:

$$\gamma||q^{(\nu)}||_{L^2}^2 + \nu||q^{(\nu)}||_{H_\alpha^\beta}^2 \leq \frac{1}{2\gamma}||g||_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{2}||q^{(\nu)}||_{L^2}^2.$$

Como o termo viscoso é não negativo na desigualdade anterior, podemos simplificar a desigualdade. Assim, obtemos:

$$\frac{\gamma}{2}||q^{(\nu)}||_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\gamma}||g||_{L^2}^2. \tag{3.26}$$

Portanto, a sequência $\left(q^{(\nu)}\right)_\nu$ é limitada na norma $L^2(\mathbb{T}^2)$. De acordo com o Teorema II.2.7 em [[1], pag 53], existe uma subsequência, também denotada por $(q^{(\nu)})_\nu$, e $q^{(0)} \in L^2(\mathbb{T}^2)$ tal que $(q^{(\nu)})_\nu$ converge fracamente para $q^{(0)}$ quando ν tende para zero.

O seguinte resultado, mostra que o limite invíscido do par de sequencias de soluções estacionárias $u^{(\nu)}$ e $q^{(\nu)}$ dadas anteriormente, é uma uma solução estacionaria da vorticidade potencial para as equações de Euler$-\alpha$ com amortecimento e forçamento.

Teorema 5. *Sejam $g \in L^2(\mathbb{T}^2)$, $\left(u^{(\nu)}\right)_\nu$ e $\left(q^{(\nu)}\right)_\nu$ sequencias de soluções estacionárias para os sistemas de equações (3.21) e (3.24) respectivamente, tais que $u^{(\nu)}$ converge fortemente para $u^{(0)}$ em $(L^2(\mathbb{T}^2))^2$ e $q^{(\nu)}$ converge fracamente para $q^{(0)}$ em L^2 quando ν tende para zero. Então, o par $(u^{(0)}, q^{(0)})$ é uma solução estacionaria para as equações de Euler$-\alpha$*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u^{(0)}\cdot\nabla q^{(0)} + \gamma q^{(0)} &=& g \\ \mathbf{Curl}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u^{(0)} &=& q^{(0)} \\ \nabla\cdot u^{(0)} &=& 0, \end{array} \right. \tag{3.27}$$

no sentido das distribuições. Isto é, para qualquer função teste $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^2)$, temos que:

$$\int_{\mathbb{T}^2} (u^{(0)} \cdot \nabla)\phi q^{(0)}\, dx + \int_{\mathbb{T}^2} \gamma q^{(0)} \phi \, dx = \int_{\mathbb{T}^2} g\phi\, dx.$$

Demonstração. Dado que $u^{(0)}$ e $q^{(0)}$, são os limites do par de sequencias $(u^{(\nu)})_\nu$ e $(q^{(\nu)})_\nu$ abordaremos a prova desta proposição, examinando a convergência em distribuição de cada um dos termos do sistema de equações (3.27). De fato, Seja ϕ é uma função de teste. Para o termo não linear, primeiro vejamos que a sequencia $\Big((u^{(\nu)} \cdot \nabla)\phi\Big)_\nu$ convergem fortemente na norma L^2 para $(u^{(0)} \cdot \nabla)\phi$ quando ν tende para zero. Observe que:

$$\begin{aligned} ||(u^{(\nu)} \cdot \nabla)\phi - (u^{(0)} \cdot \nabla)\phi||_{L^2}^2 &= ||([u^{(\nu)} - u^{(0)}] \cdot \nabla)\phi||_{L^2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} |([u^{(\nu)} - u^{(0)}] \cdot \nabla)\phi|^2\, dx. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores, temo que:

$$\begin{aligned} ||(u^{(\nu)} \cdot \nabla)\phi - (u^{(0)} \cdot \nabla)\phi||_{L^2}^2 &\leq \int_{\mathbb{T}^2} |u^{(\nu)} - u^{(0)}|^2 |\nabla\phi|^2\, dx \\ &\leq ||\nabla\phi||_{L^\infty}^2 \int_{\mathbb{T}^2} |u^{(\nu)} - u^{(0)}|^2\, dx \\ &\leq ||\nabla\phi||_{L^\infty}^2 ||u^{(\nu)} - u^{(0)}||_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Dado que $\Big(u^{(\nu)}\Big)_\nu$ converge forte para $u^{(0)}$ na norma L^2 e ϕ é uma função teste. Segue-se a convergência de $(u^{(\nu)} \cdot \nabla)\phi$ para $(u^{(0)} \cdot \nabla)\phi$ na norma L^2. Agora, tomando $U^{(\nu)} := (u^{(\nu)} \cdot \nabla)\phi$ com $U^{(0)} \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Vemos que:

$$\begin{aligned} |(U^{(\nu)}, q^{(\nu)})_{L^2} - (U^{(0)}, q^{(0)})_{L^2}| &= \left| \int_{\mathbb{T}^2} U^{(\nu)} q^{(\nu)} - U^{(0)} q^{(\nu)} + U^{(0)} q^{(\nu)} - U^{(0)} q^{(0)}\, dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{T}^2} U^{(\nu)} q^{(\nu)} - U^{(0)} q^{(\nu)}\, dx + \int_{\mathbb{T}^2} U^{(0)} q^{(\nu)} - U^{(0)} q^{(0)}\, dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{T}^2} U^{(\nu)} q^{(\nu)} - U^{(0)} q^{(\nu)}\, dx \right| + \left| \int_{\mathbb{T}^2} U^{(0)} q^{(\nu)} - U^{(0)} q^{(0)}\, dx \right|. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz na primeira integral, temos que:

$$|(U^{(\nu)}, q^{(\nu)})_{L^2} - (U^{(0)}, q^{(0)})_{L^2}| \leq ||q^{(\nu)}||_{L^2} ||U^{(\nu)} - U^{(0)}||_{L^2} + \left| \Big(U^{(0)}, q^{(\nu)} - q^{(0)} \Big)_{L^2} \right|.$$

Dado que a sequencia $(U^{(\nu)})_\nu$ converge forte para $U^{(0)}$ na norma L^2 quando ν tende para zero e pela desigualdade (3.26), obtemos que:

$$||q^{(\nu)}||_{L^2} ||U^{(\nu)} - U^{(0)}||_{L^2} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \nu \longrightarrow 0.$$

Além disso, como a sequencia $(q^{(\nu)})_\nu$ converge fracamente para $q^{(0)}$. Temos que:

$$\left| \Big(U^{(0)}, q^{(\nu)} - q^{(0)} \Big)_{L^2} \right| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \nu \longrightarrow 0.$$

Portanto, das duas convergências anteriores, concluímos que:

$$\lim_{\nu\to 0}\int_{\mathbb{T}^2}(u^{(\nu)}\cdot\nabla)\phi q^{(\nu)}\,dx = \int_{\mathbb{T}^2}(u^{(0)}\cdot\nabla)\phi q^{(0)}\,dx.$$

Para o termo de amortecimento, o trabalho é mais simples, já que a sequencia $(q^{(\nu)})_\nu$ converge fracamente na norma L^2. Em particular, temos que:

$$\lim_{\nu\to 0}\int_{\mathbb{T}^2}\gamma q^{(\nu)}\phi\,dx = \int_{\mathbb{T}^2}\gamma q^{(0)}\phi\,dx,$$

para qualquer função teste ϕ. Portanto, o par $(u^{(0)}, q^{(0)})$ é uma solução fraca estacionaria para o sistema de equações (3.27). □

Solução Estacionaria Renormalizada das Equações Euler$-\alpha$

As soluções renormalizadas são uma extensão das soluções fracas e surgem no estudo de equações diferenciais parciais (EDP's) em contextos onde as noções solução fraca não são adequadas ou suficientes para descrever o comportamento do sistema. Esse tipo de solução é particularmente relevante em problemas onde as soluções podem apresentar singularidades, irregularidades ou comportamentos não suaves, como em modelos de transporte, fluidos incompressíveis ou sistemas com dissipação anômala. A ideia é aplicar uma transformação que suaviza a equação, permitindo manipulações mais controladas. Um aspecto crucial dessa abordagem é que ela garante que, mesmo na presença de irregularidades, a solução renormalizada respeita propriedades físicas e conservativas do sistema, como por exemplo, a conservação do balanço de enstrofia potencial.

Em seguida, introduzimos a definição de solução estacionária renormalizada para as equações de Euler$-\alpha$, utilizando as ideias apresentadas no artigo de Diperna-Lions em [14].

Definição 6. *Seja $g \in L^2(\mathbb{T}^2)$ e u o campo de velocidade tal que $u \in (W^{1,2}_{loc}(\mathbb{T}^2))^2$ e tem divergência nula. A função $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$ é chamada de* ***solução estacionaria renormalizada*** *das equações de Euler$-\alpha$ (3.27) se, a função escalar q, é solução da equação*

$$(u\cdot\nabla)\beta(q) + \gamma q\beta'(q) = g\beta'(q) \tag{3.28}$$

no sentido das distribuições, para todo $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ com β e β' limitadas em $\mathbb{R}$ e nula próxima de zero.

A seguir, enunciamos o Teorema que garante que as soluções fracas estacionárias são, de fato, soluções estacionárias renormalizadas. O objetivo de introduzir este tipo de solução é que elas preservam o balanço de enstrofia potencial, um argumento usado para demonstrar a ausência de dissipação anômala nas equações de Camassa-Holm Generalizadas.

Teorema 7. *Sejam $g \in L^2(\mathbb{T}^2)$, $u^{(0)} \in (H^1(\mathbb{T}^2))^2$ com divergência nula e $q^{(0)} \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Seja $q^{(0)}$ uma solução estacionaria para o sistema de equações (3.27). Então, $q^{(0)}$ é uma solução estacionaria renormalizada para esse sistema. Além disso, o balanço de enstrofia potencial é dado por:*

$$\gamma||q^{(0)}||_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{T}^2} gq^{(0)}\, dx. \tag{3.29}$$

Demonstração. Das hipóteses do nosso Teorema, segue como uma aplicação do Teorema II. 3 de [14], que a função escalar $q^{(0)}$ é uma solução estacionaria renormalizada para o sistema de equações (3.27). Para ter uma ideia completa do Teorema, damos na continuação uma demonstração desta primeira parte do Teorema.

Primeiro, observamos que, em particular $u \in (W^{1,2}_{loc}(\mathbb{T}^2))^2$. Por outro lado, consideramos um molificador estândar φ_ϵ, isto é, uma função φ suave, não negativa, de suporte compacto com integral igual a 1. Assim, conforme o Lema II.1 de [14], temos que:

$$\left[\left((u^{(0)}\cdot\nabla)q^{(0)}\right) * \varphi_\epsilon - (u^{(0)}\cdot\nabla)(q^{(0)} * \varphi_\epsilon)\right] \underset{\epsilon}{\longrightarrow} 0 \quad \text{em} \quad L^1_{loc}(\mathbb{T}^2). \tag{3.30}$$

Denotamos as funções modificadas por:

$$q_\epsilon = q^{(0)} * \varphi_\epsilon, \quad u_\epsilon = u^{(0)} * \varphi_\epsilon \quad \text{e} \quad g_\epsilon = g * \varphi_\epsilon.$$

Realizando a convolução das equação estacionaria de Euler$-\alpha$ descritas em (3.27), obtemos:

$$[(u^{(0)}\cdot\nabla)q^{(0]}] * \varphi_\epsilon + \gamma q_\epsilon = g_\epsilon.$$

Adicionamos o termo $(u^{(0)}\cdot\nabla)q_\epsilon$ na igualdade anterior. Dessa forma, obtemos:

$$(u\cdot\nabla)q_\epsilon + \gamma q_\epsilon - g_\epsilon = -R_\epsilon, \tag{3.31}$$

onde

$$R_\epsilon := \left[\left((u^{(0)}\cdot\nabla)q^{(0)}\right) * \varphi_\epsilon - (u^{(0)}\cdot\nabla)q_\epsilon\right]. \tag{3.32}$$

Pela Teorema 5, sabemos que a equação (3.31) é válida no sentido das distribuições e pela convergência em (3.30) temos que R_ϵ converge para zero quando ϵ tende para zero. Seja $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ tal que β e β' são limitadas em $\mathbb{R}$. Multiplicando a equação (3.31) por $\beta'(q_\epsilon)$, obtemos que:

$$(u^{(0)}\cdot\nabla)\beta(q_\epsilon) + \gamma\beta'(q_\epsilon)q_\epsilon - \beta'(q_\epsilon)g_\epsilon = \beta'(q_\epsilon)R_\epsilon, \tag{3.33}$$

também é válida no sentido das distribuições. Portanto, ao tomar o limite quando ϵ tende para zero, observamos que, pelo limite (3.30) e pelo fato de β' ser limitada, o termo do lado direito da igualdade (3.33) converge para zero. Assim, $q^{(0)}$ satisfaz a equação

$$(u^{(0)}\cdot\nabla)\beta(q^{(0)}) + \gamma q^{(0)}\beta'(q^{(0)}) = g\beta'(q^{(0)}), \tag{3.34}$$

no sentido distribucional. Portanto, a função escalar $q^{(0)}$, também é uma solução estacionaria renormalizada das equações de Euler$-\alpha$.

A segunda parte de nosso Teorema, consiste em provar o balanço de enstrofia potencial dado em (3.29). Para simplificar a notação, denotaremos por:

$$u = u^{(0)}, \quad b = \beta(q^{(0)}) \ \text{ e } \ b_\epsilon = \beta(q^{(0)}) * \varphi_\epsilon,$$

onde β é uma função de classe C^1 com suporte compacto e $b \in L^1(\mathbb{T}^2) \cap L^\infty(\mathbb{T}^2)$. Calculamos a convolução da equação (3.34) com o molificador φ_ϵ e observamos:

$$\nabla \cdot (u \otimes b)_\epsilon + \gamma P_\epsilon = G_\epsilon, \tag{3.35}$$

onde

$$P_\epsilon = (q^{(0)}\beta'(q^{(0)})) * \varphi_\epsilon \quad \text{e} \quad G_\epsilon = (g\beta'(q^{(0)})) * \varphi_\epsilon.$$

Tomando o produto interno L^2 da equação (3.35) com a função b_ϵ, obtemos:

$$\Big(\nabla \cdot (u \otimes b)_\epsilon, b_\epsilon\Big)_{L^2} + \Big(\gamma P_\epsilon, b_\epsilon\Big)_{L^2} = (G_\epsilon, b_\epsilon)_{L^2}. \tag{3.36}$$

A seguir, mostraremos que o termo de convecção na identidade anterior converge para zero quando ϵ tende para zero. De fato, se aplicamos integração por partes nesse termo, podemos rescrever ele da seguente forma:

$$\Big(\nabla \cdot (u \otimes b)_\epsilon, b_\epsilon\Big)_{L^2} = -\Big((u \otimes b)_\epsilon, \nabla b_\epsilon\Big)_{L^2}.$$

Conforme ao artigo ([10]), temos a seguente identidade:

$$(u \otimes b)_\epsilon = u_\epsilon \otimes b_\epsilon + r_\epsilon(u, b) - (u - u_\epsilon) \otimes (b - b_\epsilon) \tag{3.37}$$

onde

$$r_\epsilon(u, b) = \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z)(\delta_{\epsilon z} u(x) \otimes \delta_{\epsilon z} b(x))\, dz \quad \text{e} \quad \delta_{\epsilon z} u(x) = u(x - \epsilon z) - u(x). \tag{3.38}$$

Além disso,

$$\int_{\mathbb{T}^2} (u_\epsilon \otimes b_\epsilon) \cdot \nabla b_\epsilon \, dx = 0. \tag{3.39}$$

Note que,

$$\begin{aligned} (u - u_\epsilon)(x) &= u(x) - \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z) u(x - \epsilon z)\, dz \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z) u(x)\, dz - \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z) u(x - \epsilon z)\, dz \\ &= -\int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z)[u(x - \epsilon z) - u(x)]\, dz \\ &= -\int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z) \delta_{\epsilon z} u(x)\, dz. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(u - u_\epsilon)(x) = -\int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z) \delta_{\epsilon z} u(x)\, dz. \tag{3.40}$$

Calculamos o produto interno L^2 da equação (3.37) com ∇b_ϵ e tendo em mente a identidade (3.39). Obtemos que:

$$\int_{\mathbb{T}^2} (u \otimes b)_\epsilon \cdot \nabla b_\epsilon \, dx = \int_{\mathbb{T}^2} r_\epsilon(u,b) \cdot \nabla b_\epsilon \, dx - \int_{\mathbb{T}^2} (u - u_\epsilon) \otimes (b - b_\epsilon) \cdot \nabla b_\epsilon \, dx. \tag{3.41}$$

Examinando a primeira integral do lado direito de (3.41), vemos que:

$$\left| \int_{\mathbb{T}^2} r_\epsilon(u,b) \cdot \nabla b_\epsilon \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{T}^2} \left| r_\epsilon(u,b) \right| \left| \nabla b_\epsilon \right| dx \leq \frac{C}{\epsilon} \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z) ||\delta_{\epsilon z} u||_{L^2} ||\delta_{\epsilon z} b||_{L^2} \, dz,$$

onde a última desigualdade é devido a $b \in L^1(\mathbb{T}^2) \cap L^\infty(\mathbb{T}^2)$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Logo, pela desigualdade da Proposição 24 no Apêndice B, obtemos que:

$$\left| \int_{\mathbb{T}^2} r_\epsilon(u,b) \cdot \nabla b_\epsilon \, dx \right| \leq C \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z) ||\delta_{\epsilon z} b||_{L^2} \, dz.$$

O qual converge para zero quando ϵ tende para zero. Por outro parte, na segunda integral do lado direito da equação (3.41), aplicamos a desigualdade Hölder. Desse modo, obtemos a seguente estimativa:

$$\left| \int_{\mathbb{T}^2} (u - u_\epsilon) \otimes (b - b_\epsilon) \cdot \nabla b_\epsilon \, dx \right| \leq \frac{C}{\epsilon} ||u - u_\epsilon||_{L^2} ||b - b_\epsilon||_{L^2}.$$

Note que, pela identidade (3.40) e a desigualdade de Minkowski para integrais. Vemos que:

$$||u - u_\epsilon||_{L^2} \leq \int_{\mathbb{T}^2} |\varphi(z)| ||\delta_{\epsilon z} u||_{L^2} \, dz.$$

Logo, aplicando novamente a desigualdade da proposição 24 no Apêndice B. Obtemos que:

$$||u - u_\epsilon||_{L^2} \leq \epsilon ||\nabla u||_{L^2} \int_{\mathbb{T}^2} |z| |\varphi(z)| \, dz.$$

Portanto, a segunda integral do lado direito de (3.41) é estimada por:

$$\left| \int_{\mathbb{T}^2} (u - u_\epsilon) \otimes (b - b_\epsilon) \cdot \nabla b_\epsilon \, dx \right| \leq C_1 ||b - b_\epsilon||_{L^2}.$$

Dado que b_ϵ convergem para b em norma L^2 quando ϵ tende para zero, concluímos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{T}^2} (u \otimes b)_\epsilon \cdot \nabla b_\epsilon \, dx = 0.$$

Por conseguinte, o termo de convecção na equação (3.36) converge para zero quando ϵ tende para zero. A convergência dos termos restantes é mais simples de analisar, já que P_ϵ converge para $q^{(0)}\beta'(q^{(0)})$ em norma L^2 e G_ϵ converge para $g\beta'(q^{(0)})$ em norma L^2 quando ϵ tende para zero. Portanto, concluímos que:

$$\gamma \int_{\mathbb{T}^2} q^{(0)} \beta'(q^{(0)}) \beta(q^{(0)}) \, dx = \int_{\mathbb{T}^2} g \beta'(q^{(0)}) \beta(q^{(0)}) \, dx. \tag{3.42}$$

Dado que β é uma função arbitrária de classe C^1 com suporte compacto, consideramos uma sequência $\beta_n(x)$, que converge pontualmente para x e cuja sequência de derivadas $\beta_n(x)$, convergem para 1. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada e a identidade (3.42), obtemos a identidade (3.29). $\square$

Agora, apresentamos o Teorema que demonstra que o termo viscoso na equação de balanço de enstrofia potencial das equações estacionárias de CHG se anula no limite em que a viscosidade tende a zero.

Teorema 8. *Sejam $(u^{(\nu)})_\nu$ e $(q^{(\nu)})_\nu$ sequências de soluções estacionárias para os sistemas de equações (3.21) e (3.24) respectivamente. Então, o termo de viscoso da equação (3.25), equação de balanço de enstrofia potencial do sistema (3.24), se anula quando a viscosidade tende para zero. Isto é,*

$$\lim_{\nu\to 0} \nu||q^{(\nu)}||^2_{H^\beta_\alpha} = 0. \tag{3.43}$$

Demonstração. A partir da equação de balanço de enstrofia potencial (3.25), obtemos a seguinte relação:

$$\nu||q^{(\nu)}||^2_{H^\beta_\alpha} = (g, q^{(\nu)})_{L^2} - \gamma||q^{(\nu)}||^2_{L^2}, \tag{3.44}$$

onde $g \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Em seguida, aplicamos o limite superior na equação (3.44), o que resulta em:

$$\limsup_{\nu\to 0} \nu||q^{(\nu)}||^2_{H^\beta_\alpha} = \limsup_{\nu\to 0} \left(g, q^{(\nu)}\right)_{L^2} - \gamma \limsup_{\nu\to 0} ||q^{(\nu)}||^2_{L^2}.$$

Neste ponto, utilizando o lema de Fatou e levando em consideração que a sequência $(q^{(\nu)})_\nu$ converge fracamente para $q^{(0)}$ em $L^2(\mathbb{T}^2)$, podemos concluir que:

$$\limsup_{\nu\to 0} \left(g, q^{(\nu)}\right)_{L^2} \leq \left(g, q^{(0)}\right)_{L^2} \quad \text{e} \quad ||q^{(0)}||^2_{L^2} \leq \liminf_{\nu} ||q^{(\nu)}||^2_{L^2}.$$

Consequentemente, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\limsup_{\nu\to 0} \nu||q^{(\nu)}||^2_{H^\beta_\alpha} \leq \left(g, q^{(0)}\right)_{L^2} - \gamma||q^{(0)}||^2_{L^2}.$$

Finalmente, com base na identidade (3.29), concluímos o limite desejado:

$$\lim_{\nu\to 0} \nu||q^{(\nu)}||^2_{H^\beta_\alpha} = 0.$$

Essa conclusão mostra que, quando a viscosidade tende a zero, a dissipação de enstrofia potencial também se anula. □

Em resumo, os Teoremas 5 e 8 estabelecem uma conexão entre as soluções estacionárias para os sistemas de vorticidade potencial das equações de Camassa-Holm Generalizadas e as equações de Euler-α. Essa conexão mantém propriedades fundamentais, como a preservação da equação de balanço de enstrofia potencial.

3.3 Soluções Estatísticas Estacionárias no espaço fase de Vorticidade Potencial

Nesta seção, introduzimos a noção de solução estatística estacionária para as equações de Camassa-Holm Generalizadas, fundamentada nas ideias dos trabalhos [11, 18]. Tal solução estatística estacionária é definida como uma medida de probabilidade de Borel sobre o espaço L^2. Dado que L^2 é um espaço de Hilbert separável, é possível destacar um resultado importante: a σ-álgebra de Borel associada à topologia forte é equivalente à σ-álgebra de Borel associada à topologia fraca. De fato, como a topologia forte é mais refinada que a fraca, todo aberto na topologia fraca também é aberto na topologia forte. Assim, segue que todo conjunto de Borel referente à coleção da topologia fraca é igualmente um conjunto de Borel na topologia forte. Por outro lado, pela **separabilidade de** L^2, qualquer aberto forte pode ser expresso como uma união contável de bolas abertas fortes. Como cada uma dessas bolas abertas fortes é, por sua vez, uma união contável de bolas fechadas fortes convexas, ver ([2], Corolário 3.8), essas bolas fechadas são também fechadas na topologia fraca. Portanto, concluímos que todo conjunto de Borel para a topologia forte é igualmente um conjunto de Borel na topologia fraca.
Outro ponto relevante é que, conforme o Teorema 1.2 de [25], toda medida de probabilidade de Borel em um espaço métrico completo e separável é uma medida regular. Dessa forma, qualquer medida de probabilidade de Borel finita sobre L^2 será uma **medida regular**, o que significa que, para qualquer conjunto de Borel E em L^2, temos:

$$\mu(E) = \sup\left\{\mu(K) \,:\, K \subset E,\ K \text{ compacto em } L^2\right\},$$
$$\mu(E) = \inf\left\{\mu(O) \,:\, E \subset O,\ O \text{ aberto em } L^2\right\}.$$

Uma consequência importante dessa regularidade é que as funções em L^2 podem ser aproximadas por funções contínuas. Além disso, outra definição frequentemente usada nesta seção é a de **suporte de uma medida**. Dizemos que uma medida μ sobre L^2 é carregada por um conjunto mensurável F se este tiver medida total, isto é, $\mu(L^2 \backslash F) = 0$. Assim, definimos o suporte de uma medida μ como o menor conjunto fechado que a carrega. Adicionalmente, utilizamos a definição de **média de uma função em relação a uma medida** μ de probabilidade suportada sobre L^2. Seja $f : L^2 \to \mathbb{R}$ uma função Borel mensurável; então, entendemos a média de f com respeito à medida μ como

$$\int_{L^2} f(q)\, d\mu(q).$$

Finalmente, antes de introduzirmos a noção de solução estatística estacionária, é necessário definir a classe de funcionais teste, denotada por $\mathcal{T}$, que será utilizada neste contexto.
Para isso, consideremos inicialmente $\epsilon > 0$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, [0, \infty))$, onde φ é simétrica e com integral igual a 1. Dado $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$, definimos $\varphi_\epsilon(q) \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ como a convolução da

função q com φ, na forma:

$$\varphi_\epsilon(q) = \epsilon^{-2}\varphi\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right) * q.$$

Ademais, para o caso particular em que $\epsilon = 0$, definimos $\varphi_\epsilon = \mathbb{I}$. Em seguida, dada uma função $\beta \in C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, definimos a aplicação $\sigma_\epsilon : L^2(\mathbb{T}^2) \to L^2(\mathbb{T}^2)$ da seguinte forma:

$$\sigma_\epsilon(q) = \varphi_\epsilon(\beta(\varphi_\epsilon(q)). \tag{3.45}$$

Assim, podemos definir formalmente a classe de funcionais teste, $\mathcal{T}$, conforme segue:

Definição 9. *A classe $\mathcal{T}$ é o conjunto de funcionais $\Psi : L^2(\mathbb{T}^2) \to \mathbb{R}$ para os quais existe $N \in \mathbb{N}$, $w_1, \ldots, w_N \in C_c^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ e $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, tal que:*

$$\Psi(q) := \Psi_\epsilon(q) = \psi\Big((\sigma_\epsilon(q), w_1)_{L^2}, \ldots, (\sigma_\epsilon(q), w_N)_{L^2}\Big),$$

ou

$$\Psi(q) := \Psi_I(q) = \psi\Big((\varphi_\epsilon(q), w_1)_{L^2}, \ldots, (\varphi_\epsilon(q), w_N)_{L^2}\Big)$$

onde $\sigma_\epsilon(q)$ é definido em (3.45).

Observação. *Definimos dois tipos de funcionais teste, cada um associado a diferentes classes de soluções estacionárias: as soluções estacionárias renormalizadas das equações de Euler-α e as soluções estacionárias das equações de Camassa-Holm Generalizadas.*

A classe de funcionais $\mathcal{T}$ é chamada de *funcionais teste cilíndricos.* Notemos que esses funcionais são localmente limitados e sequencialmente fracamente contínuos sobre $L^2(\mathbb{T}^2)$, o que significa que, dada una sequencia $(q_m)_m \subset L^2(\mathbb{T}^2)$ que converge fracamente para $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \Psi(q_n) = \Psi(q). \tag{3.46}$$

Para demonstrar que esses funcionais são localmente limitados, consideremos $\Psi \in \mathcal{T}$ e um conjunto limitado $B \subset L^2(\mathbb{T}^2)$. Concentramos nossa análise nos funcionais teste da forma Ψ_ϵ, pois o caso Ψ_I é significativamente mais simples. Dado que $q \in B$, temos que $\beta(\varphi_\epsilon(q)) \in C_c^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$, o que implica que a aplicação $\sigma_\epsilon(q) \in C_c^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$, e, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que:

$$|(\sigma_\epsilon(q), w_i)_{L^2}| \leq ||\sigma_\epsilon(q)||_{L^2}||w_i||_{L^2},$$

para cada $i = 1, \ldots, N$ e $q \in B$. Assim, como $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ concluímos que os funcionais $\Psi_\epsilon(q)$ são limitado para todo $q \in B$.

Agora, para ver a continuidade sequencialmente fraca de $\Psi_\epsilon \in \mathcal{T}$ em $L^2(\mathbb{T}^2)$, consideremos a sequencia $(q_m)_m \subset L^2(\mathbb{T}^2)$ que converge fracamente para $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Queremos verificar o limite (3.46). Para isso, é suficiente mostrar que a sequencia $((\sigma_\epsilon(q_m), w_i)_{L^2})_m$ converge para $(\sigma_\epsilon(q), w_i)_{L^2}$ para cada $i = 1, \ldots, N$. De fato, para cada $x \in \mathbb{T}^2$ segue que:

$$|\varphi_\epsilon(q_m)(x) - \varphi_\epsilon(q)(x)| = \left|\int_{\mathbb{T}^2} \varphi_\epsilon(x-y)[q_m(y) - q(y)]\, dy\right|.$$

Como φ_ϵ é uma função teste, a convergência fraca da sequência $(q_m)_m$ implica a convergência pontual de $(\varphi_\epsilon(q_m))$ para $(\varphi_\epsilon(q))$ em $\mathbb{T}^2$. Em seguida, dado que $\beta \in C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, temos:

$$\beta(\varphi_\epsilon(q_n))(x) \longrightarrow \beta(\varphi_\epsilon(q))(x) \quad \text{quando} \;\; n \longrightarrow \infty.$$

Além disso, $\beta(\varphi_\epsilon(q_m))$ é limitada para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, como φ_ϵ é simétrica, segue-se que, para cada $i = 1, \ldots, N$:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{T}^2} \varphi_\epsilon(\beta(\varphi_\epsilon(q_m)))(x) w_i(x)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{T}^2} \beta(\varphi_\epsilon(q_m))(x)\varphi_\epsilon(w_i)(x)\, dx.$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada à sequência $(\beta(\varphi_\epsilon(q_m))\varphi_\epsilon(w_i))_m$, obtemos:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{T}^2} \beta(\varphi_\epsilon(q_m))(x)\varphi_\epsilon(w_i)(x)\, dx = \int_{\mathbb{T}^2} \beta(\varphi_\epsilon(q))(x)\varphi_\epsilon(w_i)(x)\, dx.$$

Assim, a sequencia $((\sigma_\epsilon(q_m), w_i)_{L^2})_m$ converge para $(\sigma_\epsilon(q), w_i)_{L^2}$ para cada $i = 1, \ldots, N$. Como $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, temos convergência em cada entrada da função ψ. Portanto, temos o limite

$$\Psi_\epsilon(q_n) \longrightarrow \Psi_\epsilon(q) \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Desse modo, concluímos que os funcionais teste cilíndricos são sequencialmente fracamente contínuos.

Note-se que, como a convergência forte de sequencias implica a convergência fraca, conclui-se que os funcionais teste Ψ também são sequencialmente contínuos em $L^2(\mathbb{T}^2)$. No entanto, é importante observar que a continuidade forte não implica, em geral, a continuidade fraca. Um exemplo ilustrativo dessa distinção é a função norma definida em um espaço de dimensão infinita, a qual mostra que a implicação inversa não se verifica nesse contexto.

A definição de solução estatística estacionária envolve diversos objetos matemáticos, incluindo a classe de funcionais cilíndricos e as derivadas associadas a esses elementos.

A seguir, apresentamos uma análise sobre o cálculo das derivadas dos funcionais teste. De fato, dado que $L^2(\mathbb{T}^2)$ é um espaço de Banach de dimensão infinita, quando falamos em derivada do funcional Ψ, estamos falando de a derivada no sentido Fréchet. Isto é, dizemos que Ψ é *Fréchet diferenciável* em $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$, se existe um funcional linear e contínuo em $L^2(\mathbb{T}^2)$, denotado $D_q\Psi(q) : L^2(\mathbb{T}^2) \to \mathbb{R}$, tal que, para qualquer $\phi \in L^2(\mathbb{T}^2)$

$$\lim_{\phi\to 0} \frac{|\Psi(q+\phi) - \Psi(q) - D_q\Psi(q)(\phi)|}{||\phi||_{L^2}} = 0.$$

Pelo Teorema da representação de Riesz, existe um elemento $\Psi'(q) \in L^2(\mathbb{T}^2)$ tal que:

$$D_q\Psi(q)(\phi) = (\Psi'(q), \phi)_{L^2}, \tag{3.47}$$

para toda $\phi \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Agora calculamos a função $\Psi'_\epsilon(q)$. Como $\varphi_\epsilon : L^2(\mathbb{T}^2) \to L^2(\mathbb{T}^2)$ é uma aplicação linear, segue-se, φ_ϵ é continuamente diferenciáveis e uniformemente limitadas sobre conjuntos limitados de $L^2(\mathbb{T}^2)$. Além disso, temos que sua derivada de Fréchet é da forma:

$$D_q\varphi_\epsilon(q)(\phi) = \varphi_\epsilon(\phi),$$

para todo $\phi \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Prosseguimos agora com o cálculo da derivada de Fréchet da aplicação $\sigma_\epsilon : L^2(\mathbb{T}^2) \to L^2(\mathbb{T}^2)$. Neste caso, como σ_ϵ não é uma aplicação linear, utilizamos o resultado sobre a existência da derivada de Fréchet, que afirma que se as derivada de Gâteaux de uma função existem e são continuas em um espaço vetorial normado, então a derivada de Fréchet da função existe. Desse modo, inicialmente calculamos a derivada de Gâteaux da aplicação σ_ϵ e, em seguida, verificamos a continuidade dessa derivada em L^2. Especificamente, a derivada de *Gâteaux* da função σ_ϵ em $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$ na direção de $\phi \in L^2(\mathbb{T}^2)$, se existir, é definida como o limite:

$$G(q)(\phi) := \lim_{t\to 0} \frac{\sigma_\epsilon(q+t\phi) - \sigma_\epsilon(q)}{t} = \frac{d}{dt}\sigma_\epsilon(q+t\phi)\Big|_{t=0}. \tag{3.48}$$

Assim, ao aplicar a regra da cadeia e considerando que φ_ϵ é linear, concluímos que, para cada $\phi \in L^2(\mathbb{T}^2)$:

$$G(q)(\phi) = \varphi_\epsilon(\beta'(\varphi_\epsilon(q))\varphi_\epsilon(\phi)).$$

Agora, vejamos que para cada $\phi \in L^2(\mathbb{T}^2)$ a aplicação $G(\cdot)(\phi)$ é continua em $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Para isso, consideremos a sequencia $(q_m)_m \subset L^2(\mathbb{T}^2)$ que converge para $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Queremos verificar que

$$\lim_{n\to\infty} ||G(q_m)(\phi) - G(q)(\phi)||_{L^2} = 0. \tag{3.49}$$

De fato, observemos que para cada $m \in \mathbb{N}$:

$$||G(q_m)(\phi) - G(q)(\phi)||_{L^2} = ||\varphi_\epsilon([\beta'(\varphi_\epsilon(q_m)) - \beta'(\varphi_\epsilon(q_m))]\varphi_\epsilon(\phi))||_{L^2}.$$

Logo, aplicamos a desigualdade de Young para convolução, obtemos que:

$$||G(q_m)(\phi) - G(q)(\phi)||_{L^2} \leq ||\varphi_\epsilon||_{L^1}||[\beta'(\varphi_\epsilon(q_m)) - \beta'(\varphi_\epsilon(q))]\varphi_\epsilon(\phi)||_{L^2}.$$

Como $\beta \in C_c^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ temos que a β'' é limitada em $\mathbb{R}$. Dessa forma, aplicando a desigualdade do valor médio para β' temos que:

$$||G(q_m)(\phi) - G(q)(\phi)||_{L^2} \leq C||\varphi_\epsilon||_{L^1}||\varphi_\epsilon(\phi)||_{L^\infty}||\varphi_\epsilon(q_m) - \varphi_\epsilon(q)||_{L^2}.$$

Tomando o limite de $m \to \infty$, obtemos o limite (3.49), e concluímos que, para cada função $\phi \in L^2(\mathbb{T}^2)$, a derivada de Gâteaux $G(q)(\phi)$, é contínua em $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Portanto, a aplicação σ_ϵ é continuamente diferenciável e sua derivada de Fréchet é da forma:

$$D_q\sigma_\epsilon(q)(\phi) = \varphi_\epsilon(\beta'(\varphi_\epsilon(q))\varphi_\epsilon(\phi))$$

para cada $\phi \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Além disso, a partir da estimativa

$$||\sigma_\epsilon(q)||_{L^2} \leq ||\varphi_\epsilon||_{L^1}||\varphi_\epsilon(\phi)||_{L^\infty}||\beta'(\varphi_\epsilon(q))||_{L^2},$$

podemos concluir que a aplicação σ_ϵ é uniformemente limitada sobre conjuntos limitados de $L^2(\mathbb{T}^2)$. Lembrando que os funcionais teste cilíndricos Ψ possuem a forma Ψ_ϵ e Ψ_I, podemos calcular suas derivadas de Fréchet aplicando a regra da cadeia. Desse modo, a derivada do funcional teste $\Psi_\epsilon \in \mathcal{T}$ é da forma:

$$D_q\Psi_\epsilon(q)(\phi) = \sum_{k=1}^{N} \partial_k\psi(y(q))\Big(\varphi_\epsilon(\beta'(\varphi_\epsilon(q))\varphi_\epsilon(\phi)), w_k\Big)_{L^2},$$

onde $\partial_k\psi$ denota a derivada parcial de ψ com respeito à $k-$ésima variável e

$$y(q) = \Big((\sigma_\epsilon(q), w_1)_{L^2}, \dots, (\sigma_\epsilon(q), w_N)_{L^2}\Big). \tag{3.50}$$

Para o funcional teste $\Psi_I \in \mathcal{T}$ a derivada é dada por:

$$D_q\Psi_I(q)(\phi) = \sum_{k=1}^{N} \partial_k\psi(\overline{y}(q))\Big(\varphi_\epsilon(\phi), w_k\Big)_{L^2},$$

onde $\partial_k\psi$ denota a derivada parcial de ψ com respeito à $k-$ésima variável e

$$\overline{y}(q) = \Big((\varphi_\epsilon(q), w_1)_{L^2}, \dots, (\varphi_\epsilon(q), w_N)_{L^2}\Big). \tag{3.51}$$

Portanto, a partir da identificação (3.47), segue-se que $\Psi'_\epsilon(q)$ e $\Psi'_I(q)$ estão definidos como:

$$\Psi'_\epsilon(q) = \sum_{k=1}^{N} \partial_k\psi(y(q))\varphi_\epsilon(\beta'(\varphi_\epsilon(q))\varphi_\epsilon(w_k)) \quad \text{e} \quad \Psi'_I(q) = \sum_{k=1}^{N} \partial_k\psi(\overline{y}(q))\varphi_\epsilon(w_k). \tag{3.52}$$

Note que, as funções $\Psi'_\epsilon(q)$ e $\Psi'_I(q)$ estão definidas a partir de soma finita de funções suaves no toro e de suporte compacto. Portanto, as funções $\Psi'_\epsilon(q)$ e $\Psi'_I(q)$ são suaves no toro e de suporte compacto. Em particular, calculamos as derivadas parciais de $\Psi'_\epsilon(q)$ de ordem menor e igual a 2, isto é,

$$\partial_x^{(m)}\Psi'_\epsilon(q) = \sum_{k=1}^{N} \partial_k\psi(y(q))\partial_x^{(m)}\varphi_\epsilon(\beta'(\varphi_\epsilon(q))\varphi_\epsilon(w_k)), \tag{3.53}$$

para qualquer multi-índice m com $|m| \leq 2$. De forma similar, temos as derivadas parciais da função $\Psi'_I(q)$:

$$\partial_x^{(m)}\Psi'_I(q) = \sum_{k=1}^{N} \partial_k\psi(\overline{y}(q))\partial_x^{(m)}\varphi_\epsilon(w_k). \tag{3.54}$$

Por último, tendo em mente que nossa solução estatística estacionaria é uma medida de probabilidade, reescrevemos o sistema de vorticidade potencial das equações estacionárias de Camassa-Holm Generalizadas como uma aplicação de $L^2(\mathbb{T}^2)$ para $\mathbb{R}$. Esse processo é possível, a partir do produto interno (3.47) para funções mais gerais ϕ.

Se denotemos o sistema de vorticidade potencial das equações estacionárias de Camassa-Holm Generalizadas por:

$$D^{(\nu)}(q) := u \cdot \nabla q - \nu\Delta(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\beta-1}q + \gamma q - g \quad \text{e} \quad u = -(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{-1}\nabla^\perp(-\Delta)^{-1}q, \tag{3.55}$$

então a aplicação que representa este sistema é da forma:

$$q \in L^2(\mathbb{T}^2) \longmapsto \langle D^{(\nu)}(q), \Psi'(q)\rangle_{L^2},$$

que está definida como uma soma de funcionais sobre $L^2(\mathbb{T}^2)$ da forma:

$$\left\langle D^{(\nu)}(q), \Psi'(q)\right\rangle_{L^2} := F_1(q) + \nu F_2(q) + F_3(q), \tag{3.56}$$

onde

(a) $F_1(q) = (q, (u\cdot\nabla)\Psi'(q))_{L^2}$;

(b) $F_2(q) = (q, -\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}\Psi'(q))_{L^2}$;

(c) $F_3(q) = (\gamma q - g, \Psi'(q))_{L^2}$.

Essas aplicações estão bem definidas, já que a função $\Psi'(q)$ é suave com suporte compacto para toda $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Com base em todas as considerações anteriores, enunciamos a definição de solução estatística estacionária no espaço fase de vorticidade potencial.

Definição 10. *Uma solução estatística estacionária para as equações de Camassa-Holm Generalizadas no espaço fase de vorticidade potencial é uma medida de probabilidade de Borel $\mu^{(\nu)}$ em $L^2(\mathbb{T}^2)$ tal que:*

$$\int_{L^2(\mathbb{T}^2)} ||q||^2_{H^\beta_\alpha}\, d\mu^{(\nu)}(q) < \infty, \tag{3.57}$$

$$\int_{L^2(\mathbb{T}^2)} \left\langle D^{(\nu)}(q), \Psi'(q)\right\rangle_{L^2} d\mu^{(\nu)}(q) = 0, \tag{3.58}$$

para qualquer funcional teste $\Psi \in \mathcal{T}$ e satisfaz a desigualdade fraca para a enstrofia potencial dada por:

$$\int_{E_1\le ||q||_{L^2}\le E_2} \left\{\nu||q||^2_{H^\beta_\alpha} + \gamma||q||^2_{L^2} - (g,q)_{L^2}\right\} d\mu^{(\nu}(q) \le 0, \tag{3.59}$$

para $0 < E_1 < E_2 \le \infty$.

Observe que, as condições da Definição 10 tem sentido matemático. Já que, os integrando nas condições (3.57) e (3.59) podem ser vistos como funções Borel mensuráveis definidas para toda $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Isto é, para o integrando da condição (3.57), temos que a função:

$$\begin{array}{rcl} ||\cdot||^2_{H^\beta_\alpha} : L^2(\mathbb{T}^2) & \longrightarrow & \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \\ q & \longmapsto & ||q||^2_{H^\beta_\alpha}, \end{array} \tag{3.60}$$

é o limite de uma sequência de funções contínuas, em particular mensuráveis, dada por,

$$||q||^2_{H^\beta_\alpha} = \lim_{\epsilon\to 0} ||\varphi_\epsilon(q)||^2_{H^\beta_\alpha},$$

para toda $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Além disso, a partir da condição (3.59), a qual é uma forma fraca de desigualdade para a enstrofia potencial, formulamos seguinte proposição sobre o suporte da solução estatística estacionaria.

Proposição 11. *O suporte de qualquer solução estatística estacionária para as equações de Camassa-Holm Generalizadas no espaço fase de vorticidade potencial está incluído em um conjunto limitado de* $L^2(\mathbb{T}^2)$.

Demonstração. Iniciamos a prova, lembrando a definição de suporte de uma medida. Dizemos que o suporte de uma medida é o menor fechado de medida total. Então, basta construir um conjunto limitado e de medida total, para concluir nossa Proposição.

Seja $\mu^{(\nu)}$ uma solução estatística estacionaria para as equações de Camassa-Holm Generalizadas no espaço fase de vorticidade potencial. Sejam $0 < E_1 < E_2$ e o conjunto F definido por:

$$F = \Big\{ q \in L^2(\mathbb{T}^2) \,:\, E_1^2 \leq ||q||^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq E_2^2 \Big\}.$$

Dado que, pela inclusão de espaços de Sobolev fracionários, temos $H^\beta_\alpha(\mathbb{T}^2) \subset L^2(\mathbb{T}^2)$, segue-se que a função $||q||^2_{H^\beta_\alpha}$ é positiva sobre F. Utilizando a condição (3.59) da Definição 10, obtemos que

$$\int_F \gamma ||q||^2_{L^2}\, d\mu^{(\nu)}(q) \leq \int_F (g,q)_{L^2}\, d\mu^{(\nu)}(q).$$

Em seguida, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz ao produto L^2, segue que

$$\int_F \gamma ||q||^2_{L^2}\, d\mu^{(\nu)}(q) \leq ||g||_{L^2} \int_F ||q||_{L^2}\, d\mu^{(\nu)}(q).$$

Em particular, como a medida $\mu^{(\nu)}$ é finita. Obtemos

$$\int_F \gamma ||q||^2_{L^2}\, d\mu^{(\nu)}(q) \leq ||g||_{L^2} \Big[\mu^{(\nu)}(F)\Big]^{\frac{1}{2}} \left[\int_F ||q||^2_{L^2}\, d\mu^{(\nu)}(q) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto,

$$\int_F ||q||^2_{L^2}\, d\mu^{(\nu)}(q) \leq \gamma^{-2} ||g||^2_{L^2} \mu^{(\nu)}(F).$$

Esta última estimativa, pode-se rescrever como:

$$\int_F \Big[||q||^2_{L^2} - \gamma^{-2} ||g||^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} \Big]\, d\mu^{(\nu)}(q) \leq 0, \tag{3.61}$$

onde E_1 e E_2 foram escolhidos de forma arbitraria. Desse modo, se tomarmos em particular, $E_1 = \gamma^{-1}||g||_{L^2}$ e $E_2 = +\infty$. Obtemos que:

$$0 \leq \Big[||q||^2_{L^2} - \gamma^{-2} ||g||^2_{L^2} \Big],$$

para toda $E_1 \leq ||q||^2_{L^2}$. Assim, pela desigualdade (3.61), vemos que $\mu^{(\nu)} \equiv 0$. Portanto, considerando o conjunto F definido por:

$$F := \left\{ q \in L^2(\mathbb{T}^2) \,:\, ||q||_{L^2} \leq \frac{2||g||_{L^2}}{\gamma} \right\}, \tag{3.62}$$

o qual é limitado e de medida total, $\mu^{(\nu)}(F) = 1$. Segue-se que, o suporte da medida $\mu^{(\nu)}$ está contido em F. □

Por outro lado, dado que nossa solução estatística estacionária varia em relação ao parâmetro de viscosidade ν, induzimos uma sequência de medidas de probabilidade de Borel. Já que nosso objetivo, eventualmente, é estudar a convergência fraca dessa sequência de medidas quando a viscosidade tende a zero. Entendemos a convergência fraca de medidas como:

$$\lim_{\nu \to 0} \int_{L^2} P(q)\, d\mu^{(\nu)}(q) = \int_{L^2} P(q)\, d\mu^{(0)}(q),$$

para toda $P(\cdot)$ contínua, de valor real e limitada definida em L^2. É importante distinguir entre funções fortemente contínuas e funções fracamente contínuas. Um fato discutido quando introduzimos a classe de funcionais teste $\mathcal{T}$. Desse modo, nosso próximo lema fornece informação sobre a continuidade fraca e a limitação local da aplicação (3.56) definida no espaço fase de vorticidade potencial.

Lema 12. *Seja $\Psi \in \mathcal{T}$. Então, a aplicação*

$$q \in L^2(\mathbb{T}^2) \longmapsto \langle D^{(\nu)}(q), \Psi'(q)\rangle_{L^2}, \tag{3.63}$$

é localmente limitado e fracamente contínuo em conjuntos limitados de $L^2(\mathbb{T}^2)$.

Demonstração. A partir de (3.56) observamos que, para cada $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$, a aplicação (3.63) pode-se decompor em uma soma de aplicações $F_i : L^2(\mathbb{T}^2) \to \mathbb{R}$ com $i = 1, 2, 3$, conforme descrito nos itens (a), (b) e (c) de (3.56), da seguinte forma:

$$\left\langle D^{(\nu)}(q), \Psi'(q) \right\rangle_{L^2} := F_1(q) + \nu F_2(q) + F_3(q). \tag{3.64}$$

Portanto, é suficiente verificar que as aplicações F_i com $i = 1, 2, 3$ são limitadas e fracamente contínuas em conjuntos limitados de $L^2(\mathbb{T}^2)$. Além disso, como as funções F_i envolvem a função Ψ', precisamos inicialmente demonstrar que Ψ' também é limitada em tais conjuntos. Assim, começaremos verificando que essa função é de fato limitada em conjuntos limitados de $L^2(\mathbb{T}^2)$.

De acordo com a Definição 9, precisamos considerar dois casos: as funções Ψ'_ϵ e Ψ'_I. A seguir, apresentamos a limitação para o caso da Ψ'_ϵ. Seja $\epsilon > 0$ e B um subconjunto limitado de $L^2(\mathbb{T}^2)$. Assim, para todo $q \in B$, temos a seguinte relação:

$$||\partial_x^{(m)} \Psi'_\epsilon(q)||^2_{L^2} = \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{T}^2} |\partial_k \psi(y(q)) \partial_x^{(m)} \varphi_\epsilon(\beta'(\varphi_\epsilon(q))\varphi_\epsilon(w_k))|^2\, dx. \tag{3.65}$$

Conforme descrito na Definição 9, sabemos que $\sigma_\epsilon(q)$ é limitada em conjuntos limitados de $L^2(\mathbb{T}^2)$. Além disso, como ψ é uma função suave, existe uma constante $M > 0$ tal que:

$$|\partial_k \psi(y(q))| \leq M_k,$$

para todo $q \in B$, onde $y(q)$ é definido como em (3.50). Desse forma, podemos concluir que:

$$||\partial_x^{(m)} \Psi'_\epsilon(q)||^2_{L^2} \leq \sum_{k=1}^{N} M_k \int_{\mathbb{T}^2} |\partial_x^{(m)} \varphi_\epsilon(\beta'(\varphi_\epsilon(q))\varphi_\epsilon(w_k))|^2\, dx.$$

Adicionalmente, dado que β é uma função de classe C^2 com suporte compacto, temos que $\beta'(\varphi_\epsilon(q)) \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ de forma uniforme para todo $q \in B$. Com isso, podemos afirmar que:

$$\left|\left|\partial_x^{(m)}\varphi_\epsilon\Big(\beta'(\varphi_\epsilon(q))\varphi_\epsilon(w_k)\Big)\right|\right|_{L^2}^2 \leq \frac{M^2}{\epsilon^{2|m|}}||w_k||_{L^2}^2.$$

Como as funções w_k com $k = 1, \ldots, N$ são suaves de suporte compacto, concluímos que:

$$||\partial_x^{(m)}\Psi'_\epsilon(q)||_{L^2} \leq \frac{K}{\epsilon^{|m|}}, \tag{3.66}$$

onde K é uma constante positiva independente de $q \in B$. Dado que as funções w_k são suaves de suporte compacto, podemos estender essa desigualdade (3.66) utilizando os mesmos argumentos, concluímos que a função $\partial_x^{(m)}\Psi'_\epsilon$ é limitada na norma $L^p(\mathbb{T}^2)$ para $p > 1$. No caso da função Ψ'_I, observamos diretamente da identidade (3.54) que $\partial_x^{(m)}\Psi'_I(q)$ é limitada para toda $q \in B$, pois os termos $\partial_x^{(m)}\varphi_\epsilon(w_k)$ são limitados para todo $k = 1, \ldots, N$.

Em seguida, mostraremos que a função F_1 é limitada em B, considerando o caso quando a função é Ψ'_ϵ. De fato, Lembrando que o operador de Bessel$-\alpha$ de ordem -2 definido por: $J_\alpha^{-2} = (\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{-1}$, é limitado em $L^2(\mathbb{T}^2)$ e que o operador J_α^{-2} comuta com o operador **Curl**. Temos que,

$$||\mathbf{Curl}(u)||_{L^2} = ||(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{-1}q||_{L^2} \leq ||q||_{L^2}.$$

Assim, $\mathbf{Curl}(u) \in L^2(\mathbb{T}^2)$ e consequentemente $u \in H^1(\mathbb{T}^2)$. Por outro lado, como $\nabla\Psi'_\epsilon(q)$ é limitada na norma $L^4(\mathbb{T}^2)$, aplicamos a desigualdade de Ladyzhenskaya 2D, e obtemos:

$$||(u \cdot \nabla)\Psi'_\epsilon(q)||_{L^2} \leq ||u||_{L^4}^{1/2}||\nabla\Psi'_\epsilon(q)||_{L^4}^{1/2}.$$

Dado que, pela imersão de Sobolev, $H^1(\mathbb{T}^2) \subset L^4(\mathbb{T}^2)$, temos que $(u \cdot \nabla)\Psi'_\epsilon(q) \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Logo, para qualquer $q \in B$, aplicamos a desigualdade de Hölder para a função F_1, obtemos:

$$|F_1(q)| = |(q, (u \cdot \nabla)\Psi'_\epsilon(q))_{L^2}| \leq ||q||_{L^2}||(u \cdot \nabla)\Psi'_\epsilon(q)||_{L^2}. \tag{3.67}$$

Por conseguinte, F_1 é limitado sobre o conjunto limitado $B \subset L^2(\mathbb{T}^2)$.

Considerando o caso em que a função é Ψ'_I, é claro que F_1 é limitado sobre o conjunto limitado $B \subset L^2(\mathbb{T}^2)$. Isso se deve ao fato de que as funções $\nabla\varphi_\epsilon(w_k)$ são limitadas para todo $k = 1, \ldots, N$. Portanto, F_1 é localmente limitado sobre $L^2(\mathbb{T}^2)$.

A seguir, examinamos a continuidade fraca da função F_1 sobre B. Ao introduzirmos a forma de Ψ'_ϵ, conforme apresentada em (3.52), na definição de F_1, obtemos a seguinte expressão para F_1:

$$F_1(q) = \sum_{k=1}^{N}\partial_k\psi(y(q))\Big(q, (u \cdot \nabla)\varphi_\epsilon(\beta'(\varphi_\epsilon(q))\varphi_\epsilon(w_k))\Big)_{L^2}.$$

Em seguida, aplicamos integração por partes e usando o fato que o molificador é simétrico, podemos rescrevermos F_1 da seguinte forma:

$$F_1(q) = -\sum_{k=1}^{N}\partial_k\psi(y(q))\Big(\varphi_\epsilon(\beta'(\varphi_\epsilon(q))\varphi_\epsilon((u \cdot \nabla)q)), w_k\Big)_{L^2}.$$

Neste ponto, para concluir a continuidade fraca de F_1, aplicamos o Teorema da convergência dominada de Lebesgue a cada uma das funções que compõem F_1, mantendo a função correspondente w_k fixa, com $k = 1, \dots, N$. A partir disso, o que resta é demonstrar que as sequências que compõem F_1 convergem pontualmente e são uniformemente limitadas. Primeiro, consideramos o caso em que a função é Ψ'_ϵ. Seja a sequência $(q^i)_i \subset L^2(\mathbb{T}^2)$ tal que converge fracamente para $q \in B$. Dado que o operador $(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{-1}$ é compacto, segue-se que a sequência correspondente de campos de velocidade $(u^i)_i$ converge fortemente para o campo $u \in L^2(\mathbb{T}^2)$, a qual corresponde à função limite $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Observemos que, para cada $x \in \mathbb{T}^2$:

$$\varphi_\epsilon((u^i \cdot \nabla)q^i)(x) = -\int_{\mathbb{T}^2} (u^i \cdot \nabla)\varphi_\epsilon(x-y)q^i(y)\, dy,$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. De forma análoga como foi tratada a parte não linear no Teorema 5, temos que

$$\varphi_\epsilon((u^i \cdot \nabla)q^i)(x) \longrightarrow \varphi_\epsilon((u \cdot \nabla)q)(x) \quad \text{quando} \quad i \longrightarrow \infty.$$

Dessa forma, a sequencia $\varphi_\epsilon((u^i \cdot \nabla)q^i)(x)$ converge para $\varphi_\epsilon((u \cdot \nabla)q)(x)$ para todo $x \in \mathbb{T}^2$, e pela desigualdade de Hölder, obtemos:

$$|\varphi_\epsilon((u \cdot \nabla)q)(x)| \leq ||u||_{L^4}||\nabla\varphi_\epsilon||_{L^4}||q||_{L^2}.$$

Assim, $\varphi_\epsilon((u \cdot \nabla)q)$ é uniformemente limitada para todo $q \in B$. Por outro lado, como a função β é de classe C^2 e a função ψ é suave, temos então, que a sequencia $\beta'(\varphi_\epsilon(q^i))$ converge pontualmente para $\beta'(\varphi_\epsilon(q))$ e a sequencia $\partial_k\psi(y(q^i))$ converge pontualmente para $\partial_k\psi(y(q))$. Portanto, o termo

$$\partial_k\psi(y(q^i))\varphi_\epsilon[\beta'(\varphi_\epsilon(q))\varphi_\epsilon((u^i \cdot \nabla)q^i)],$$

converge pontualmente e é uniformemente limitado para cada $k = 1, \dots, N$. Com essa informação em mente, aplicamos o Teorema da convergência dominada de Lebesgue para concluir que:

$$\lim_{i\to\infty} F_1(q^i) = F_1(q). \tag{3.68}$$

Para o caso em que a função é Ψ'_I, aplicaremos novamente o Teorema da convergência dominada de Lebesgue a cada função que compõe F_1. Considerando que a função F_1, avaliada na sequencia fracamente convergente $(q^i)_i$, está definida da seguinte forma:

$$F_1(q^i) = \sum_{k=1}^{N} \partial_k\psi(\overline{y}(q^i))\Big(q^i, (u^i \cdot \nabla)\varphi_\epsilon(w_k)\Big)_{L^2}.$$

Como $\varphi_\epsilon(w_k)$ é uma função teste para cada $k = 1, \dots, N$, de forma análoga como foi demonstrada a convergência da parte não linear no Teorema 5, segue a convergência do termo:

$$\Big(q^i, (u^i \cdot \nabla)\varphi_\epsilon(w_k)\Big)_{L^2} \longrightarrow \Big(q, (u \cdot \nabla)\varphi_\epsilon(w_k)\Big)_{L^2} \quad \text{quando} \quad i \longrightarrow \infty. \tag{3.69}$$

Além disso, como a função ψ é uma função suave e a sequencia $(q^i)_i$ converge fracamente para $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$, obtemos que

$$\partial_k \psi(\overline{y}(q^i)) \longrightarrow \partial_k \psi(\overline{y}(q)) \quad \text{quando} \quad i \longrightarrow \infty. \tag{3.70}$$

Assim, das convergências (3.69) e (3.70), temos que F_1 é fracamente continua sobre B.

Em seguida, mostraremos que a função F_2 é limitada e fracamente continua sobre o conjunto limitado B. Note que, a função F_2 está bem definida pelo fato que $\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}\Psi' \in L^2(\mathbb{T}^2)$, isso é possível, porque Ψ' é uma função suave no toro. Por conseguinte, obtemos a limitação da função F_2, ao aplicar a desigualdade de Hölder. Isto é,

$$|F_2| = |(q, \Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}\Psi')_{L^2}| \leq ||q||_{L^2}||\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}\Psi'||_{L^2} \tag{3.71}$$

para todo $q \in B$. Portanto, F_2 é localmente limitado em $L^2(\mathbb{T}^2)$.

A seguir, examinamos a continuidade fraca de F_2 sobre o conjunto limitado B, considerando o caso em que a função é Ψ'_ϵ. Seja $(q^i)_i \subset L^2(\mathbb{T}^2)$ uma sequencia que converge fracamente para $q \in B$. Observe que, ao incorporarmos a forma de Ψ'_ϵ e avaliando q^i na função F_2, obtemos que

$$F_2(q^i) = \sum_{k=1}^{N} \partial_k \psi(y(q^i))\Big(q^i, (-\Delta)(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}\varphi_\epsilon(\beta'(\varphi_\epsilon(q^i))\varphi_\epsilon(w_k))\Big)_{L^2}.$$

Dado que o operador $-\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}$ é auto-adjunto e usando o fato que o molificador é simétrico, rescrevermos F_2 da forma:

$$F_2(q^i) = \sum_{k=1}^{N} \partial_k \psi(y(q^i))\Big((\varphi_\epsilon(\beta'(\varphi_\epsilon(q^i))(-\Delta)(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}\varphi_\epsilon(q^i)), w_k\Big)_{L^2}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Neste ponto, para concluir a continuidade fraca de F_2, aplicamos o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, novamente. Desse modo, devemos verificar a convergência pontual e a limitação uniforme das funções que componem a F_2. Dado que, no caso anterior, ao analisarmos a continuidade fraca de F_1, verificamos que as sequencias $(\partial_k\psi(y(q^i)))_i$ e $(\beta'(\varphi_\epsilon(q^i)))_i$ convergem pontualmente e são uniformemente limitadas. Basta verificar, que a sequencia $(-\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}\varphi_\epsilon(q^i))_i$ converge pontualmente e é uniformemente limitada. De fato, para qualquer $x \in \mathbb{T}^2$ e utilizando a linearidade do operador $\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta}$, obtemos que:

$$\begin{aligned}|\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}(\varphi_\epsilon(q^i)-\varphi_\epsilon(q))(x)| &= \\ &= \left|\frac{1}{\epsilon^2}\int_{\mathbb{T}^2}\Delta_x(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta_x)^{\beta-1}\varphi\Big(\frac{y-x}{\epsilon}\Big)(q^i-q)(y)\,dy\right|\end{aligned}$$

Dado que φ é uma função suave com suporte compacto e a sequencia $(q^i)_i$ converge fracamente para q, temos que a sequencia $\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}\varphi_\epsilon(q^i)(x)$ convergência para $\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}\varphi_\epsilon(q)(x)$ para todo $x \in \mathbb{T}^2$.

Por outro lado, a limitação uniforme da sequencia $(\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}\varphi_\epsilon(q^i))_i$, segue de aplicar a desigualdade de Hölder. Isto é, para todo $x \in \mathbb{T}^2$, temos:

$$|\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}\varphi_\epsilon(q^i)(x)| = \epsilon^{-2}\left|\Big(\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}\varphi\Big(\frac{\cdot - x}{\epsilon}\Big), q^i\Big)_{L^2}\right| \leq M||q^i||_{L^2},$$

como B é um conjunto limitado de $L^2(\mathbb{T}^2)$ e a sequencia $(q^i)_i$ converge fracamente para $q \in B$, segue que a sequencia $(\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}\varphi_\epsilon(q^i))_i$ é uniformemente limitado. Portanto, para cada $k = 1, \ldots, N$, o termo

$$\partial_k\psi(y(q^i))\varphi_\epsilon[\beta'(\varphi_\epsilon(q^i))\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}\varphi_\epsilon(q^i)],$$

converge pontualmente em $\mathbb{T}^2$ e é uniformemente limitado. Desse modo, aplicando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, concluímos que a função F_2 é fracamente continua sobre o conjunto B. Para o caso em que a função é Ψ_I', simplesmente usamos a convergência fraca da sequencia $(q^i)_i$. De fato, considerando que a função F_2, avaliada na sequencia fracamente converge q^i, está definida da forma:

$$F_2(q^i) = \sum_{k=1}^{N} \partial_k\psi(\overline{y}(q^i))\Big(q^i, \Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}\varphi_\epsilon(w_k)\Big)_{L^2}.$$

Usando o fato que a sequencia $(\partial_k\psi(\overline{y}(q^i)))_i$ é uniformemente limitado e as funções $\varphi_\epsilon(w_k)$ são suaves no toro, obtemos, para cada $k = 1, \ldots, N$, que:

$$|F_2(q^i) - F_2(q)| \leq M\sum_{k=1}^{N}\left|\Big(q^i - q, \Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}w_k\Big)_{L^2}\right|.$$

Assim, pela convergência fraca da sequencia $(q^i)_i$, concluímos a continuidade fraca da aplicação F_2 sobre o conjunto B.

Em seguida, mostraremos que a função F_3 é limitada e fracamente continua sobre o conjunto limitado B. De fato, lembrando que F_3 é da forma:

$$F_3(q) = (\gamma q - g, \Psi')_{L^2}.$$

Vemos que, a limitação da função F_3 é uma consequência direta da desigualdade de Hölder. A continuidade fraca de F_3 também é facilmente verificada. De fato, seja $(q^i)_i$ uma sequencia que converge fracamente para $q \in B$. No caso em que a função é Ψ_ϵ', vemos que

$$F_3(q^i) = \sum_{k=1}^{N} \partial_k\psi(y(q^i))\Big(\varphi_\epsilon(\beta'(\varphi_\epsilon(q^i)\varphi_\epsilon(\gamma q^i - g)), w_k\Big)_{L^2}.$$

Dado que as sequencias $\varphi_\epsilon(q^i)$ e $\varphi_\epsilon(\gamma q^i - g)$ convergem pontualmente no toro e são uniformemente limitadas, segue que a sequencia $\varphi_\epsilon(\beta'(\varphi_\epsilon(q^i)\varphi_\epsilon(\gamma q^i - g))$ converge pontualmente toro e também é uniformemente limitada. Portanto, aplicando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, para cada função w_k fixa, concluímos a continuidade fraca de F_3 sobre o conjunto B. Para o caso em que a função é Ψ_I', vemos que

$$F_3(q^i) = \sum_{k=1}^{N} \partial_k\psi(\overline{y}(q^i))\Big(\gamma q^i - g, \varphi_\epsilon(w_k)\Big)_{L^2}.$$

O qual, pela convergência fraca da sequencia $(q^i)_i$ é fácil ver que F_3 é fracamente continua sobre o conjunto B. De todo o anterior, concluímos que a aplicação:

$$q \in L^2(\mathbb{T}^2) \mapsto \langle D^{(\nu)}(q), \Psi'(q)\rangle_{L^2}$$

é limitada e fracamente continua sobre conjuntos limitados de $L^2(\mathbb{T}^2)$. □

A seguir, enunciamos a definição de solução estatística estacionária renormalizada no espaço fase de vorticidade potencial para as equações de Euler-α, tendo em mente, que para esta definição utilizamos os funcionais teste associados à soluções estacionárias renormalizadas, denotadas por Ψ_ϵ, para as equações de Euler-α dadas na definição 9.

Definição 13. *Uma solução estatística estacionária renormalizada para as equações de Euler$-\alpha$ no espaço fase de vorticidade potencial é uma medida de probabilidade de Borel μ em $L^2(\mathbb{T}^2)$ tal que:*

$$\int_{L^2(\mathbb{T}^2)} \langle D(q), \Psi'_\epsilon(q)\rangle_{L^2}\, d\mu(q) = 0 \tag{3.72}$$

para todo funcional teste $\Psi_\epsilon \in \mathcal{T}$ e onde $D(q)$ é a parte invíscida de (3.55), definida por

$$D(q) := u \cdot \nabla q + \gamma q - g \quad e \quad u = -(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{-1}\nabla^{\perp}(-\Delta)^{-1} q. \tag{3.73}$$

Além disso, o integrando de (3.72) é a soma das aplicações dadas na decomposição (3.64). Isto é,

$$\langle D(q), \Psi'_\epsilon(q)\rangle_{L^2} = (q, (u\cdot\nabla)\Psi'_\epsilon(q))_{L^2} + (\gamma q - g, \Psi'_\epsilon(q))_{L^2}. \tag{3.74}$$

Dizemos que uma solução estatística estacionária renormalizada μ satisfaz o balanço de enstrofia potencial se

$$\int_{L^2(\mathbb{T}^2)} \left\{\gamma ||q||^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} - (g, q)_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right\} d\mu(q) = 0. \tag{3.75}$$

Com esta definição, finalizamos a seção referente ao desenvolvimento das soluções estatísticas estacionárias e seu respectivo limite invíscido.

Observação. *Na definição anterior, utilizamos os funcionais teste $\Psi_\epsilon : L^2(\mathbb{T}^2) \to \mathbb{R}$ para os quais existe $N \in \mathbb{N}$, $w_1, \dots, w_N \in C_c^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$, $\beta \in C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, tal que:*

$$\Psi_\epsilon(q) = \psi\Big((\varphi_\epsilon(\beta(\varphi_\epsilon(q))), w_1)_{L^2}, \dots, (\varphi_\epsilon(\beta(\varphi_\epsilon(q))), w_N)_{L^2}\Big),$$

onde $\varphi_\epsilon(\cdot)$ é um molificador estândar simétrico.

3.4 Compacidade Relativa e Balanço de Enstrofia Potencial

Nesta seção, enunciamos dois Teoremas relevantes para nosso estudo do fenômeno de dissipação anômala de enstrofia potencial paras as equações de Camassa-Holm Generalizadas. O primeiro Teorema, aborda a existência de uma subsequência convergente de uma sequência de soluções estatísticas estacionárias dada. Para este objetivo, utilizamos o *Teorema de Prokhorov*, ver [18, 27], que recordaremos para maior clareza.

Teorema 14 (Teorema de Prokhorov). *Seja $(\rho_n)_n$ uma sequencia de medidas de probabilidades de Borel sobre S uma espaço métrico completo e separável. Então, a sequencia $(\rho_n)_n$ possui uma subsequência fracamente convergente se e somente se, para cada $\epsilon > 0$, existe um conjunto compacto K_ϵ em S tal que $\rho_n(K_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

O Teorema de Prokhorov é uma ferramenta usada na teoria da medida e probabilidade que fornece uma condição suficiente para a compacidade de conjuntos de medidas de probabilidade. O segundo Teorema estabelece que o limite obtido no primeiro Teorema, satisfaz a propriedade de balanço de enstrofia potencial para as equações de Euler$-\alpha$.

Antes de avançarmos, é útil lembrar que, Se X é um espaço métrico completo e separável, então toda medida de probabilidade de Borel μ em X possui a propriedade de que, para cada $\epsilon > 0$, existe um conjunto compacto K_ϵ em X tal que $\mu(K_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$, ver ([25], Teorema 3.2).

A seguir, enunciamos o Teorema sobre a compacidade relativa da família de soluções estatísticas estacionárias para as equações de Camassa-Holm Generalizadas.

Teorema 15. *Seja $(\mu^{(\nu)})_\nu$ uma sequencia de soluções estatísticas estacionárias das equações de Camassa-Holm Generalizadas no espaço fase de vorticidade potencial. Então, existe uma subsequência, denotada também por $(\mu^{(\nu)})_\nu$ e uma solução estatística estacionaria renormalizada μ, para as equações de Euler-α no espaço fase da vorticidade potencial. Tal que*

$$\lim_{\nu \to 0} \int_{L^2(\mathbb{T}^2)} \Lambda(q)\, d\mu^{(\nu)}(q) = \int_{L^2(\mathbb{T}^2)} \Lambda(q)\, d\mu(q), \tag{3.76}$$

para toda função de valor real fracamente continua e localmente limitada Λ.

Demonstração. De acordo com a Proposição 11, o suporte da medida de probabilidade de Borel $\mu^{(\nu)}$ está contido na bola fechada e limitada (3.62), definida por:

$$F = \left\{ q \in L^2(\mathbb{T}^2) \; : \; ||q||_{L^2} \leq \frac{2||g||_{L^2}}{\gamma} \right\}.$$

Dado que o conjunto F é limitado e fracamente fechado em $L^2(\mathbb{T}^2)$, concluímos que F é fracamente compacto em $L^2(\mathbb{T}^2)$, ver ([2], Corolário 3.22). Logo, ao dotarmos F com a topologia fraca de $L^2(\mathbb{T}^2)$, obtemos que a topologia fraca em F é metrizável, ver ([2], Teorema 3.29). Assim, F é um espaço métrico, fracamente compacto, separável e completo. Como a sequencia de medidas de probabilidade de Borel $(\mu^{(\nu)})_\nu$ está contida no espaço métrico F, podemos aplicar o Teorema de Prokhorov, que nos garante a existência de uma subsequência convergente denotada por $(\mu^{(\nu)})_\nu$, e de uma medida de probabilidade de Borel $\mu^{(0)}$ tal que:

$$\lim_{\nu \to 0} \int_F \Lambda(q)\, d\mu^{(\nu)}(q) = \int_F \Lambda(q)\, d\mu^{(0)}(q),$$

para toda função continua e limitada de valor real Λ, definida sobre F. Podemos estender a medida de probabilidade de Borel $\mu^{(0)}$ para $L^2(\mathbb{T}^2)$ dada por:

$$\mu(E) := \mu^{(0)}(E \cap F) \quad \text{para todo } E \subset L^2(\mathbb{T}^2).$$

Observe que $\mu(L^2(\mathbb{T}^2) \backslash F) = 0$, dado que F é fracamente fechado. Portanto, a extensão μ é uma medida de probabilidade de Borel sobre $L^2(\mathbb{T}^2)$.

Em seguida, vamos a demonstrar que a medida μ é uma solução estatística estacionaria renormalizadas para as equações de Euler$-\alpha$. Ou seja, mostramos que a medida de probabilidade de Borel μ, satisfaz a condição (3.72). De fato, seja $\Psi \in \mathcal{T}$. Como o suporte da sequencia $(\mu^{(\nu)})_\nu$ está contida na bola limitada F, e de acordo com o Lema 12, segue-se que a aplicação:

$$q \in L^2(\mathbb{T}^2) \longmapsto \langle D^{(\nu)}(q), \Psi'(q) \rangle_{L^2}, \tag{3.77}$$

é limitada e fracamente continua sobre F. Portanto, pela decomposição (3.64) da aplicação (3.77), obtemos que, para cada $i = 1, 2, 3$ as funções F_i são limitadas e fracamente contínuas sobre F. Além disso, temos as seguintes convergências:

$$\lim_{\nu \to 0} \int_{L^2(\mathbb{T}^2)} F_i(q)\, d\mu^{(\nu)}(q) = \int_{L^2(\mathbb{T}^2)} F_i(q)\, d\mu(q). \tag{3.78}$$

Em particular, como que a sequencia

$$\int_{L^2(\mathbb{T}^2)} F_2(q)\, d\mu^{(\nu)}(q)$$

é limitada, segue-se que:

$$\lim_{\nu \to 0} \nu \int_{L^2(\mathbb{T}^2)} F_2(q)\, d\mu^{(\nu)}(q) = 0. \tag{3.79}$$

Por outro lado, como $\mu^{(\nu)}$ é uma solução estatística estacionaria para as equações de Camassa-Holm Generalizadas, sabemos, por definição, que:

$$\int_{L^2(\mathbb{T}^2)} \left\langle D^{(\nu)}(q), \Psi'(q) \right\rangle_{L^2} d\mu^{(\nu)}(q) = 0.$$

Utilizando a decomposição (3.64) e isolando o termo viscoso, obtemos que:

$$\int_{L^2(\mathbb{T}^2)} F_1(q) + F_3(q)\, d\mu^{(\nu)}(q) = -\nu \int_{L^2(\mathbb{T}^2)} F_2(q)\, d\mu^{(\nu)}.$$

Ao Fazer tender ν para zero, vemos que:

$$\int_{L^2(\mathbb{T}^2)} \left\langle D(q), \Psi'(q) \right\rangle_{L^2} d\mu(q) = \lim_{\nu \to 0} \int_{L^2(\mathbb{T}^2)} F_1(q) + F_3(q)\, d\mu(q) = 0,$$

o que satisfaz a condição (3.72) da Definição 13. Portanto, μ é uma solução estatística estacionária renormalizada das equações de Euler-α no espaço fase de vorticidade potencial.

$\square$

Para o próximo teorema, consideremos a bola fechada definido por:

$$F^\infty(r) := \{q \in F \ : \ ||q||_{L^\infty} \leq r\}$$

para $r > 0$.

A seguir, enunciamos o teorema que estabelece que a solução estatística estacionaria renormalizada para as equações de Camassa-Holm Generalizadas, encontrada no Teorema 15, satisfaz o balanço de enstrofia potencial.

Teorema 16. *Seja $(\mu^{(\nu)})_\nu$ uma sequencia de soluções estatísticas estacionárias das equações de Camassa-Holm Generalizadas no espaço fase de vorticidade potencial. Suponhamos que existe $r > 0$ tal que o suporte da sequencia $(\mu^{(\nu)})_\nu$ está contido no conjunto $F^\infty(r)$. Então, o limite μ de qualquer subsequência fracamente convergente é uma solução estatística estacionaria renormalizada para as equações de Euler$-\alpha$. Além disso, essa solução está suportada no conjunto $F^\infty(r)$ e satisfaz o balanço de enstrofia potencial descrito em (3.75).*

Demonstração. Primeiramente, demonstraremos que a medida de probabilidade de Borel μ está suportada em um conjunto do tipo $F^\infty(r)$ para algum $r > 0$. Com base no Teorema 15, sabemos que o limite μ de qualquer subsequência fracamente convergente da sequencia $(\mu^{(\nu)})_\nu$ é uma medida de probabilidade de Borel em $L^2(\mathbb{T}^2)$ que satisfaz a condição (3.72) da Definição 10. Além disso, assumimos que existe um $r_0 > 0$ tal que

$$supp\, \mu^{(\nu)} \subset F^\infty(r_0), \tag{3.80}$$

para todo $\nu > 0$. Como $F^\infty(r_0)$ é fracamente fechado em $L^2(\mathbb{T}^2)$, segue-se que seu conjunto complementar $U = L^2(\mathbb{T}^2)\backslash F^\infty(r)$ é fracamente aberto. Assim, pelas propriedades da convergência fraca de medidas, temos:

$$\mu(U) \leq \liminf_{\nu \to 0} \mu^{(\nu)}(U).$$

Como $\mu^{(\nu)}$ está suportada em $F^\infty(r_0)$, concluímos que $\mu(U) = 0$. Portanto, a medida μ está suportada em $F^\infty(r_0)$.

Na segunda parte, demonstramos que a medida limite μ satisfaz o balanço de enstrofia potencial descrito em (3.72). Para isso, construímos uma sequência adequada de funcionais teste cilíndricos $\Psi_{m,\epsilon}$, para definir uma sequencia de aplicações da forma:

$$q \in L^2(\mathbb{T}^2) \longmapsto \langle D^{(\nu)}(q), \Psi'_{m,\epsilon}(q)\rangle_{L^2}. \tag{3.81}$$

Logo, aplicando o Teorema da convergência dominada à sequencia (3.81), com relação à medida μ, veremos que a medida μ satisfaz o balanço de enstrofia potencial (3.72).

Para simplificar a notação, assumiremos que $q_\epsilon(x,t) = \varphi_\epsilon(q(x,t))$. De fato, sejam

$\epsilon > 0$ fixo e a sequencia $(w_k)_k \subset C_c^\infty(\mathbb{T}^2)$, o qual é uma base ortonormal em $L^2(\mathbb{T}^2)$. Em base à Definição 9 temos que, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixo, definimos o funcional $\Psi_{m,\epsilon}$ em $\mathcal{T}$ por:

$$\Psi_{m,\epsilon}(q) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} |(\sigma_\epsilon(q), w_k)_{L^2}|^2 \tag{3.82}$$

com $\psi_m(z) := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m |z_k|^2$ para todo $z \in \mathbb{R}^N$. Por (3.52), que define a forma das funções $\Psi'_{m,\epsilon}$ para cada $m = 1, \ldots, m$, temos que:

$$\Psi'_{m,\epsilon}(q) = \sum_{k=1}^{m} (\sigma_\epsilon(q), w_k)_{L^2} \varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon(w_k)).$$

Por outro lado, dado que $\nabla \cdot u = 0$, segue que $(u \cdot \nabla)q = \nabla \cdot (u \otimes q)$. Assim, ao aplicar o molificador $\varphi_\epsilon(\cdot)$, temos que $\varphi_\epsilon((u\cdot\nabla)q) = \nabla\cdot(\varphi_\epsilon(u \otimes q))$. Para simplificar a notação, assumiremos que $\nabla\cdot(\varphi_\epsilon(u\otimes q)) = \nabla\cdot(u\otimes q)_\epsilon$. Além disso, como $q(x,t) := \mathbf{Curl}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u$ com $q \in F^\infty(r_0)$, então $u \in H^3(\mathbb{T}^2)$ e consequentemente $u \otimes q \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$. Em particular, $\nabla\cdot(u\otimes q)_\epsilon \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Desse modo, o termo $\varphi_\epsilon(D(q)) \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Agora, pela simetria do molificador $\varphi_\epsilon(\cdot)$, a sequencia de aplicações (3.81), induzida pelas funções $\Psi'_{m,\epsilon}$, é dada por:

$$\langle D(q), \Psi'_{m,\epsilon}(q)\rangle_{L^2} = \sum_{k=1}^{m} (\sigma_\epsilon(q), w_k)_{L^2} \Big(\varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon(D(q))), w_k\Big)_{L^2}, \tag{3.83}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. A seguir, mostraremos que a sequencia (3.83) é uniformemente limitada com relação a m e $q \in F^\infty(r_0)$. Para isso, utilizamos a decomposição (3.74) da aplicação (3.81) e a identidade de Parseval. De fato, seja $q \in F^\infty(r_0)$. Observemos que:

$$\begin{aligned}\Big|\langle D(q), \Psi'_{m,\epsilon}(q)\rangle_{L^2}\Big| &= \Big|\sum_{k=1}^{m} (\sigma_\epsilon(q), w_k)_{L^2} \Big(\varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon(D(q))), w_k\Big)_{L^2}\Big| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big|(\sigma_\epsilon(q), w_k)_{L^2}\Big| \Big|\Big(\varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon(D(q))), w_k\Big)_{L^2}\Big|.\end{aligned}$$

Dado que $(w_k)_k$ é uma base ortonormal em $L^2(\mathbb{T}^2)$ e pela identidade de Parseval, temos que

$$\Big|\langle D(q), \Psi'_{m,\epsilon}(q)\rangle_{L^2}\Big| \leq \Big|\Big(\sigma_\epsilon(q), \varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon(D(q)))\Big)_{L^2}\Big|.$$

Claramente, este última estimativa não depende de m. Logo, utilizando a decomposição (3.74) da aplicação (3.81), concluímos que:

$$\begin{aligned}|\langle D(q), \Psi'_{m,\epsilon}(q)\rangle_{L^2}| \leq &\Big|\Big(\sigma_\epsilon(q), \varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon((u\cdot\nabla q)))\Big)_{L^2}\Big| \\ &+ \Big|\Big(\sigma_\epsilon(q), \varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon((\gamma q - g)))\Big)_{L^2}\Big|.\end{aligned} \tag{3.84}$$

O próximo passo será estimar os dois termos do lado direito da desigualdade (3.84). Para isso, estabelecemos uma informações útil neste processo. Dado que β é uma função de classe C^2 de valor real com suporte compacto, existe uma constante positiva M, independente de x, tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$|\beta(x)| + |\beta'(x)| + |\beta''(x)| \leq M.$$

A seguir, examinamos o primeiro termo da desigualdade (3.84). Observemos que:

$$\Big(\sigma_\epsilon(q), \varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon((u \cdot \nabla q)))\Big)_{L^2} = \Big(\sigma_\epsilon(q), \varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\nabla \cdot (u \otimes q)_\epsilon)\Big)_{L^2}.$$

Lembrando a definição de $\sigma_\epsilon(\cdot)$ dada em (3.45), vemos que para todo $q \in F^\infty(r_0)$

$$\sigma_\epsilon(q) := \varphi_\epsilon(\beta(q_\epsilon))$$

é uniformemente limitada. Assim, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue-se que

$$\left|\Big(\sigma_\epsilon(q), \varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon((u \cdot \nabla q)))\Big)_{L^2}\right| \leq M||\nabla \cdot (u \otimes q)_\epsilon||_{L^2}. \tag{3.85}$$

O segundo termo do lado direito da desigualdade (3.84), é mais simples de estimar, já que $(\gamma q - g) \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Para este fim, basta aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato que $\sigma_\epsilon(\cdot)$ é uniformemente limitada em $F^\infty(r_0)$. Isto é,

$$\left|\Big(\sigma_\epsilon(q), \varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon((\gamma q - g)))\Big)_{L^2}\right| \leq M||(\gamma q - g)||_{L^2}. \tag{3.86}$$

Dado que $q \in F^\infty(r_0)$, as estimativas (3.85) e (3.86) são independentes de q. Portanto, a sequencia $(\langle D(q), \Psi'_{m,\epsilon}(q)\rangle_{L^2})_m$ é uniformemente limitada para todo $q \in F^\infty(r_0)$.

Para ver a convergência pontual, simplesmente devemos ter em consideração que: A sequencia $(w_k)_k$ é uma base ortonormal em $L^2(\mathbb{T}^2)$ e a identidade de Parseval. Assim, para qualquer $q \in F^\infty(r_0)$ obtemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \langle D(q), \Psi'_{m,\epsilon}(q)\rangle_{L^2} &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} (\sigma_\epsilon(q), w_k)_{L^2} \Big(\varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon(D(q))), w_k\Big)_{L^2} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon(D(q))), (\sigma_\epsilon(q), w_k)_{L^2} w_k\Big)_{L^2} \\
&= \Big(\sigma_\epsilon(q), \varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon(D(q)))\Big)_{L^2}.
\end{aligned}$$

Desse modo, temos a convergência pontual da sequencia $(\langle D(q), \Psi'_{m,\epsilon}(q)\rangle_{L^2})_m$ para todo $q \in F^\infty(r_0)$. Logo, aplicamos o Teorema da convergência dominada, e obtemos que:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{L^2} \langle D(q), \Psi'_{m,\epsilon}(q)\rangle_{L^2}\, d\mu(q) = \int_{L^2} \Big(\sigma_\epsilon(q), \varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon(D(q)))\Big)_{L^2} d\mu(q), \tag{3.87}$$

para todo $\epsilon > 0$. Como μ é uma solução estatística estacionaria renormalizada, segue da condição (3.72) da Definição 13 e a identidade (3.87) que:

$$\int_{L^2} \Big(\sigma_\epsilon(q), \varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon(D(q)))\Big)_{L^2} d\mu(q) = 0, \tag{3.88}$$

para todo $\epsilon > 0$. Dado que $D(q)$ é o termo invíscido das equações estacionárias de Camassa-Holm Generalizadas, a integral em (3.88), pode ser reescrita como

$$H_{\beta,\epsilon} + K_{\beta,\epsilon} = 0, \tag{3.89}$$

onde cada termo é da forma:

$$H_{\beta,\epsilon} := \int_{L^2} \Big(\sigma_\epsilon(q), \varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon((\gamma q - g))) \Big)_{L^2} d\mu(q).$$

e

$$K_{\beta,\epsilon} := \int_{L^2} \Big(\sigma_\epsilon(q), \varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\nabla \cdot (u \otimes q)_\epsilon) \Big)_{L^2} d\mu(q).$$

Com o objetivo é estabelecer o balanço de enstrofia potencial dado em (3.75), demonstraremos que, para uma sequência adequada de funções β, o termo $K_{\beta,\epsilon}$ converge para zero, enquanto o termo $H_{\beta,\epsilon}$ converge para o balanço de enstrofia potencial quando ϵ tende a zero.

Sejam $\epsilon > 0$ fixo e uma sequencia de funções de suporte compacto $(\beta_n)_n$ que convergem uniformemente para:

$$\beta_n(x) \longrightarrow x, \quad \beta_n'(x) \longrightarrow 1, \quad \beta_n''(x) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty \tag{3.90}$$

sobre o conjunto

$$E_2 = \left[-\frac{2||g||_{L^2}}{\gamma}, \frac{2||g||_{L^2}}{\gamma} \right].$$

Podemos construir um exemplo particular desta sequencia de funções β_n da seguinte maneira: primeiro, consideramos a sequencia de funções

$$h_n(x) = x - \frac{x}{n}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, que satisfaz as convergências uniformes de (3.90) em E_2. Em seguida, tomamos a função $\Psi(x)$ do tipo "Bump function" com suporte em um conjunto compacto $K \supset E_2$. Finalmente, definimos a sequencia de funções

$$\beta_n(x) := \Psi(x)h_n(x) \in C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Em particular, a sequencia $(\beta_n)_n$ satisfaz as convergências uniformes de (3.90) sobre E_2. Por outra parte, consideramos as sequencias de composições que convergem uniformemente:

$$\beta_n(q_\epsilon(x)) \longrightarrow q_\epsilon(x), \quad \beta_n'(q_\epsilon(x)) \longrightarrow 1, \quad \beta_n''(q_\epsilon(x)) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty \tag{3.91}$$

De fato, a sequencia $\beta_n(q_\epsilon)$, $\beta_n'(q_\epsilon)$ e $\beta_n''(q_\epsilon)$ estão bem definida devido à desigualdade (3.20), que relaciona a norma L^∞ e a norma L^2 da vorticidade potencial. Além disso, existe uma constante positiva M_1, tal que

$$|\beta_n(q_\epsilon)| + |\beta_n'(q_\epsilon)| + |\beta_n''(q_\epsilon)| \leq M_1. \tag{3.92}$$

Com todo o anterior, vejamos que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\limsup_{n\to\infty} K_{\beta_n,\epsilon}\right) = 0. \tag{3.93}$$

De fato, aplicando integração por partes no integrando de $K_{\beta_n,\epsilon}$, obtemos que:

$$\begin{aligned}\Big(\sigma_\epsilon(q), \varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)\nabla\cdot(u\otimes q)_\epsilon)\Big)_{L^2} &= -\int_{\mathbb{T}^2} \nabla_x\sigma_\epsilon(q)\cdot\varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)(u\otimes q)_\epsilon)\,dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{T}^2} \sigma_\epsilon(q)\varphi_\epsilon(\beta_n''(q_\epsilon)\nabla_x q_\epsilon\cdot(u\otimes q)_\epsilon)\,dx,\end{aligned}$$

onde

$$\nabla_x\sigma_\epsilon(q)(x) = \varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)\nabla q_\epsilon)(x)$$

para todo $x\in\mathbb{T}^2$. Logo, utilizando a identidade (3.37) e (3.38), podemos rescrever o termo:

$$(u\otimes q)_\epsilon = \rho_\epsilon(u,q) + (u_\epsilon\otimes q_\epsilon) \tag{3.94}$$

com

$$\rho_\epsilon(u,q) := r_\epsilon(u,q) - (u-u_\epsilon)\otimes(q-q_\epsilon). \tag{3.95}$$

Dessa forma, a primeira integral do integrando de $K_{\beta_n,\epsilon}$ rescreve-se como:

$$\begin{aligned}\Big(\sigma_\epsilon(q), \varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)\nabla\cdot(u\otimes q)_\epsilon)\Big)_{L^2} &= -\int_{\mathbb{T}^2} \nabla_x\sigma_\epsilon(q)\cdot\varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)\rho_\epsilon(u,q))\,dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{T}^2} \nabla_x\sigma_\epsilon(q)\cdot\varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)(u_\epsilon\otimes q_\epsilon))\,dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{T}^2} \sigma_\epsilon(q)\varphi_\epsilon(\beta_n''(q_\epsilon)\nabla_x q_\epsilon\cdot(u\otimes q)_\epsilon)\,dx \\ &=: \int_{\mathbb{T}^2} I^1_{\beta_n,\epsilon}(q) + I^2_{\beta_n,\epsilon}(q) + I^3_{\beta_n,\epsilon}(q)\,dx.\end{aligned} \tag{3.96}$$

Observe que as funções $I^i_{\beta_n,\epsilon}(q)$ com $i=1,2,3$ são funções continuas para cada $q\in L^2(\mathbb{T}^2)$. Para $\epsilon>0$, podemos ver que as funções $I^i_{\beta_n,\epsilon}$ com $i=1,2,3$ são uniformemente limitadas para todo $q\in F^\infty(r_0)$. Além disso, tomando o limite da sequencia de funções β_n'' como em (3.91), obtemos que

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_\epsilon(q)\varphi_\epsilon(\beta_n''(q_\epsilon)\nabla_x q_\epsilon\cdot(u\otimes q)_\epsilon)(x) = 0$$

para todo $x\in\mathbb{T}^2$. Logo, pelo Teorema da convergência dominada, segue-se que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{T}^2}\sigma_\epsilon(q)\varphi_\epsilon(\beta_n''(q_\epsilon)\nabla_x q_\epsilon\cdot(u\otimes q)_\epsilon)\,dx = 0. \tag{3.97}$$

Por outro lado, tomando novamente o limite da sequencia de funções β_n', como em (3.91), obtemos que

$$\lim_{n\to\infty}\nabla_x\sigma_\epsilon(q)\cdot\varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)(u_\epsilon\otimes q_\epsilon))(x) = \varphi_\epsilon(\nabla q_\epsilon)\cdot\varphi_\epsilon(u_\epsilon\otimes q_\epsilon))(x).$$

Novamente, aplicamos o Teorema da convergência dominada, e obtemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{T}^2}\nabla_x\sigma_\epsilon(q)\cdot\varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)(u_\epsilon\otimes q_\epsilon))\,dx = \int_{\mathbb{T}^2}\varphi_\epsilon(\nabla q_\epsilon)\cdot\varphi_\epsilon(u_\epsilon\otimes q_\epsilon))\,dx.$$

Dado que utilizamos o mesmo molificador para as funções ∇q_ϵ e $u_\epsilon \otimes q_\epsilon$, ao aplicar integração por partes, vemos que:

$$\int_{\mathbb{T}^2} \varphi_\epsilon(\nabla q_\epsilon) \cdot \varphi_\epsilon(u_\epsilon \otimes q_\epsilon))\, dx = -\int_{\mathbb{T}^2} \varphi_\epsilon(u_\epsilon \otimes q_\epsilon)) \cdot \varphi_\epsilon(\nabla q_\epsilon)\, dx.$$

Consequentemente, o em limite é igual a zero. Isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}^2} \nabla_x \sigma_\epsilon(q) \cdot \varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)(u_\epsilon \otimes q_\epsilon))\, dx = 0. \tag{3.98}$$

Para examinar a primeira integral de (3.96), é necessário ter um pouco mais de cuidado, dado que nossas estimativas para as funções $I^i_{\beta_n,\epsilon}$ com $i = 1, 2, 3$ dependem de $\epsilon > 0$. Em particular, para as funções $I^2_{\beta_n,\epsilon}$ e $I^3_{\beta_n,\epsilon}$ o problema foi resolvido já que a convergência pontual ou era zero ou a integral desse limite era zero. No entanto, para a função $I^1_{\beta_n,\epsilon}$, desenvolvemos a estimativa, apresentando a dependência de ϵ, e logo indicamos que termo ajuda a eliminar a dependência de ϵ. Lembremos que, devemos fazer ϵ tender a zero. Por isso, é importante de eliminar a dependência do ϵ na estimativa.

Notemos que,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{T}^2} \nabla_x \sigma_\epsilon(q) \cdot \varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)\rho_\epsilon(u,q))\, dx\right| &\le \int_{\mathbb{T}^2} \left|\nabla_x \sigma_\epsilon(q_\epsilon)\right|\left|\varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)\rho_\epsilon(u,q))\right| dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} \left|\varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)\nabla_x q_\epsilon)\right|\left|\varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)\rho_\epsilon(u,q))\right| dx\end{aligned}$$

Dado que β' é limitada, conforme (3.92), seja C uma constante positiva tal que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{T}^2} \nabla_x \sigma_\epsilon(q) \cdot \varphi_\epsilon(\beta'(q_\epsilon)\rho_\epsilon(u,q))\, dx\right| &\le C\epsilon^{-1} \int_{\mathbb{T}^2} \left|\varphi_\epsilon(\rho_\epsilon(u,q))(x)\right| dx \\ &\le C_1\epsilon^{-1}||\rho_\epsilon(u,q)||_{L^1}\end{aligned}$$

para todo $q \in F^\infty(r_0)$. Logo, pelo Proposição 25 do Apêndice B, temos que

$$||\rho_\epsilon(u,q)||_{L^1} \le M_1\epsilon^2||\nabla u||_{L^2}||q||_{L^2}.$$

Portanto, a primeira integral em (3.96) é estimada da seguinte forma:

$$\left|\int_{\mathbb{T}^2} \nabla_x \sigma_\epsilon(q) \cdot \varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)\rho_\epsilon(u,q))\, dx\right| \le M\epsilon||\nabla u||_{L^2}||q||_{L^2},$$

onde a constante M é positiva e independente da sequencia de funções β_n. Logo, aplicando o Lema de Fatou para a sequencia de funções β_n, temos que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{L^2}\int_{\mathbb{T}^2} \nabla_x \sigma_\epsilon(q) \cdot \varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)\rho_\epsilon(u,q))\, dx\, d\mu(q) \le \epsilon M||\nabla u||_{L^2}||q||_{L^2}.$$

Finalmente, fazemos ϵ tender a zero na desigualdade anterior, e obtemos:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\limsup_{n\to\infty} \int_{L^2}\int_{\mathbb{T}^2} \nabla_x \sigma_\epsilon(q) \cdot \varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)\rho_\epsilon(u,q))\, dx\, d\mu(q)\right) = 0. \tag{3.99}$$

Juntando, (3.97), (3.98) e (3.99), concluímos que o limite (3.93) é zero. Logo, pela identidade (3.89), que relaciona os termos $H_{\beta_n,\epsilon}$ e $K_{\beta_n,\epsilon}$, obtemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\limsup_{n\to\infty} H_{\beta_n,\epsilon}\right) = 0.$$

Por outro lado, como $H_{\beta_n,\epsilon}$ está definido da forma:

$$H_{\beta_n,\epsilon} := \int_{L^2} \Big(\sigma_\epsilon(q), \varphi_\epsilon(\beta_n'(q_\epsilon)\varphi_\epsilon((\gamma q - g)))\Big)_{L^2} \, d\mu(q).$$

Em base à estimativa (3.86) e na convergência pontual do integrando de $H_{\beta_n,\epsilon}$, aplicamos o Teorema da Convergência Dominada para concluir que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \left(\limsup_{n\to\infty} H_{\beta_n,\epsilon} \right) = \int_{L^2} \left\{ \gamma ||q||_{L^2}^2 - (g,q)_{L^2} \right\} \, d\mu(q).$$

Mostrando que a medida limite μ, satisfaz o balanço de enstrofia potencial descrito em (3.75). $\square$

A seguir, finalizamos este capítulo com uma seção destinada ao estudo das médias temporais de logo prazo, e como estas são relacionadas com as soluções estatísticas estacionárias.

3.5 Médias Temporais de Longo Prazo

Nesta seção, estudaremos as soluções estatísticas estacionárias obtidas das médias temporais de longo prazo das soluções das equações de Camassa-Holm Generalizadas. Isso, será possível através da noção de limite generalizado, o qual chamaremos de limite de Banach. Esta relação entre solução estatística estacionaria e médias de longo prazo, nos permitira demonstrar que a dissipação de enstrofia potencial média no tempo desaparece quando a viscosidade tende para zero.

Antes de introduzir a definição de limite de Banach, consideramos o espaço $BC([0,\infty))$ como sendo o espaço de Banach de todas as funções contínuas e limitadas de valor real definidas em $[0,\infty)$ e dotado com a norma supremo.

Definição 17. *O limite de Banach, é um funcional linear e limitado*

$$LIM_{T\to\infty} : BC([0,\infty]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que, para toda $g \in BC([0,\infty])$

(i) $LIM_{T\to\infty}(g) \geq 0$ com $g \geq 0$;

(ii) $LIM_{T\to\infty}(g) = lim_{T\to\infty} g(T)$, sempre que o limite usual existir.

O funcional $LIM_{T\to\infty}$, é construído como uma aplicação do Teorema de Hahn-Banach. Portanto, o limite de Banach não é único, pois depende da extensão escolhida, ver o livro de Foias ([18], pag 225). Esse fato, não é uma restrição já que podemos construir o limite de Banach da melhor maneira. Por exemplo, dada uma função $g_0 \in BC([0,\infty))$

fixa, e uma sequencia $T_i \to \infty$, para a qual $g_0(T_i)$ converge para ℓ. Então, existe um limite de Banach $LIM_{t\to\infty}$, tal que

$$LIM_{T\to\infty}(g_0) = \ell.$$

Isso significa que, pode-se escolher um limite de Banach de tal maneira que obedeça

$$LIM_{T\to\infty}(g) = \limsup_{T\to\infty} g(T). \tag{3.100}$$

para qualquer $g \in BC([0,\infty))$. Este fato será de grande importância para provar nosso teorema principal sobre a dissipação anômala. Além disso, o limite de Banach satisfaz o seguinte desigualdade:

$$\liminf_{T\to\infty} g(T) \leq LIM_{T\to\infty}(g) \leq \limsup_{T\to\infty} g(T),$$

para toda $g \in BC([0,\infty])$, para mais detalhes ver o livro de Foias ([18], pag 226).

O próximo Teorema fornece um resultado crucial para nosso trabalho, pois relaciona as médias temporais de longo prazo com as soluções estatísticas estacionárias.

Teorema 18. *Sejam $\nu > 0$ fixo e $q^{(\nu)}$ uma solução das equações de vorticidade potencial das equações Camassa-Holm Generalizadas com dado inicial $q_0 \in L^2(\mathbb{T}^2)$ e forçamento $g \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Seja $LIM_{T\to\infty}$ um limite de Banach. Então a aplicação*

$$\Phi \longmapsto LIM_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Phi(q^{(\nu)}(\cdot,s))\, ds \tag{3.101}$$

para toda $\Phi \in C(L^2(\mathbb{T}^2);\mathbb{R})$ define uma solução estatística estacionaria $\mu^{(\nu)}$ para as equações de Camassa-Holm Generalizadas no espaço fase de vorticidade potencial. Isto é,

$$LIM_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Phi(q^{(\nu)}(\cdot,s))\, ds = \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \Phi(q)\, d\mu^{(\nu)}(q). \tag{3.102}$$

A solução $\mu^{(\nu)}$ está suportada sobre o conjunto

$$F^\infty = \{q \in F \,:\, ||q||_{L^\infty} \leq R\}, \tag{3.103}$$

onde R é uma constante positiva dada na desigualdade (3.20). Além disso, satisfaz a desigualdade

$$\int_{L^2(\mathbb{T}^2)} \left\{\nu ||q||^2_{H^\beta_\alpha} + \gamma ||q||^2_{L^2} - (g,q)_{L^2}\right\} d\mu^{(\nu)}(q) \leq 0. \tag{3.104}$$

Demonstração. Primeiro, demonstraremos a identidade (3.102), que relaciona o funcional das médias temporais, construído a partir da solução das equações de Camassa-Holm Generalizadas no espaço fase de vorticidade potencial, a uma medida de Borel. Para este objetivo, utilizaremos o Teorema de Representação de Kakutani-Riesz em espaços compactos, ver ([18] p. 221), e o conjunto compacto utilizado neste caso é semi-órbita positiva gerada pela solução das equações de Camassa-Holm Generalizadas no espaço fase de vorticidade potencial a partir de um determinado tempo.

De acordo com o Lema 4, a semi-órbita positiva

$$\mathcal{O}^+(q_0,t_0) = \{q^{(\nu)}(\cdot, s+t_0) \in L^2(\mathbb{T}^2) \,:\, s \geq 0\} \tag{3.105}$$

é relativamente compacta em $L^2(\mathbb{T}^2)$. Podemos considerar a semi-órbita a partir do tempo $t_0 > 0$, tal que $q^{(\nu)}(\cdot, s+t_0) \in F$ para todo $s > 0$, com F definido como em (3.62). Além disso, pela estimativa (3.20), que estima a norma L^∞ com a constante positiva R independente do tempo, concluímos que a semi-órbita positiva está contida em F^∞. Assim, para qualquer $\Phi \in C(L^2(\mathbb{T}^2);\mathbb{R})$, temos que $\Phi \in C(\overline{\mathcal{O}^+(q_0,t_0)})$, o que indica que $\Phi(q^{(\nu)}(\cdot, s+t_0))$ é uma função continua e limitada em $[0,\infty)$. Consequentemente, sua média temporal em $[0,\tau]$ também é contínua e limitada, dada por:

$$T \longmapsto \frac{1}{T}\int_0^T \Phi(q^{(\nu)}(\cdot, s+t_0))\,ds. \tag{3.106}$$

Aplicando o limite de Banach $LIM_{T\to\infty}$ à função (3.106), definimos a aplicação:

$$\Phi \in C(\overline{\mathcal{O}^+(q_0,t_0)}) \longmapsto LIM_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \Phi(q^{(\nu)}(\cdot, s+t_0))\,ds \in \mathbb{R}. \tag{3.107}$$

Essa aplicação é um funcional linear positivo definido em $C(\overline{\mathcal{O}^+(q_0,t_0)})$. Usando o Teorema de representação de Kakutani-Riesz em espaços compactos, podemos garantir que existe uma medida de Borel $\mu^{(\nu)}$ suportada no conjunto $\overline{\mathcal{O}^+(q_0,t_0)}$, que representa esse funcional linear, obtendo assim a representação (3.102).

Dado que o conjunto $\overline{\mathcal{O}^+(q_0,t_0)}$ é compacto, a medida $\mu^{(\nu)}$ é finita e pode ser estendida para todo o espaço $L^2(\mathbb{T}^2)$ da seguinte maneira:

$$\mu^{(\nu)}(X) := \mu^{(\nu)}\Big(X \cap \overline{\mathcal{O}^+(q_0,t_0)}\Big)$$

para qualquer conjunto Boreliano $X \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Para concluir observe que, como foi falado ao inicio do paragrafo, a partir da estimativa (3.7), escolhemos $t_0 > 0$ de tal maneira que a norma L^2 de $q^{(\nu)}(\cdot, s+t_0)$ seja limitada por $2\gamma^{-1}||g||_{L^2}$. Desse forma, o conjunto $\overline{\mathcal{O}^+(q_0,t_0)}$ está contido no conjunto F, conforme definido em (3.62), para todo $s > 0$. Além disso, pela estimativa (3.20), concluímos que o conjunto $\overline{\mathcal{O}^+(q_0,t_0)}$ está contida em F^∞. Consequentemente, o suporte da medida $\mu^{(\nu)}$ está contido no conjunto F^∞.

A seguir, demonstraremos que a medida de Borel $\mu^{(\nu)}$, obtida pelo Teorema de representação de Kakutani-Riesz, é uma solução estatística estacionaria das equações estacionárias de Camassa-Holm Generalizadas no espaço fase da vorticidade potencial. Para este objetivo, consideramos o limite de Banach como sendo um limite superior. De fato, conforme argumentado na primeira parte do Teorema 18, temos que o fecho da semi-órbita positiva (3.105), esta contido no conjunto F^∞. Assim, para qualquer funcional teste $\Psi \in \mathcal{T}$ e $q \in \overline{\mathcal{O}^+(q_0,t_0)}$, que satisfaçam as condições:

$$\partial_t q^{(\nu)} \in H^{-2\beta}(\mathbb{T}^2) \;\text{ e }\; D_q\Psi(q^{(\nu)}) = \Psi'(q^{(\nu)}) \in H^2(\mathbb{T}^2),$$

temos, pela regra da cadeia generalizada, que:

$$\frac{d}{dt}\Psi(q^{(\nu)}(t)) = \langle \Psi'(q^{(\nu)}), \partial_t q^{(\nu)} \rangle_{H^{2\beta}\times H^{-2\beta}}.$$

Dado que $q^{(\nu)}$ é solução para as equações da vorticidade potencial das equações de Camassa-Holm Generalizadas, segue-se que:

$$\langle \Psi'(q^{(\nu)}), \partial_t q^{(\nu)} \rangle_{H^{2\beta}\times H^{-2\beta}} = \langle \Psi'(q^{(\nu)}(t)), D^{(\nu)}(q^{(\nu)}(t)) \rangle_{L^2},$$

onde $D^{(\nu)}$ representa a parte estacionaria das equações de Camassa-Holm Generalizadas no espaço fase da vorticidade potencial, definido em (3.55). Agora, aplicando o limite de Banach à média temporal da função $\frac{d}{dt}\Psi(q^{(\nu)}(\cdot, s+t_0))$, obtemos:

$$LIM_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{d}{ds}\Psi(q^{(\nu)}(\cdot, s+t_0))\, ds = LIM_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \langle D^{(\nu)}(q^{(\nu)}(s+t_0)), \Psi'(q^{(\nu)}(s)) \rangle_{L^2}\, ds.$$

A partir do Lema 12, que garante que o integrando do lado direito da igualdade anterior é fracamente continua e localmente limitado, e a identificação de $\frac{d}{dt}\Psi(q^{(\nu)}(\cdot, t+s))$ dada anteriormente, podemos concluir que o limite:

$$LIM_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{d}{ds}\Psi(q^{(\nu)}(\cdot, s+t_0))\, ds = \limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{d}{ds}\Psi^{(\nu)}(q(\cdot, s+t_0))\, ds = 0. \quad (3.108)$$

Portanto, da identificação (3.102) e do limite acima (3.108), obtemos:

$$\int_{L^2} \langle D^{(\nu)}(q), \Psi'(q) \rangle \, d\mu^{(\nu)}(q) = LIM_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{d}{ds}\Psi(q^{(\nu)}(\cdot, s+t_0))\, ds = 0.$$

O que verifica a condição (3.58) da Definição 10 de solução estatística estacionaria para as equações de Camassa-Holm Generalizadas no espaço fase da vorticidade potencial.

Para verificarmos as condições (3.57) e (3.59) de Definição 10, devemos começar tomando as médias de longo prazo na equação de balanço de enstrofia potencial (3.4). Observamos que, como a função $||q||^2_{H^\beta_\alpha}$ não é uma função continua em $L^2(\mathbb{T}^2)$, sua a media temporal não pertence ao espaço $BC([0,\infty))$. Assim, o primeiro passo é regularizar a equação (3.4) e calcular a médias temporais de longo prazo para a equação da enstrofia potencial regularizada.

Para facilitar os cálculos, introduzimos a seguinte notação:

$$q_\epsilon(x,t) = \varphi_\epsilon(q(x,t)), \quad u_\epsilon(x,t) = \varphi_\epsilon(u(x,t)) \quad \text{e} \quad g_\epsilon(x) = \varphi_\epsilon(g(x)).$$

Em seguida, suavizamos a equação (3.2), conforme realizado no Teorema 7, e calculamos o produto interno L^2 com a função q_ϵ. Dessa forma, obtemos uma equação de balanço de enstrofia potencial para q_ϵ:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||q_\epsilon||^2_{L^2} + \nu||q_\epsilon||^2_{H^\beta_\alpha} + \gamma||q_\epsilon||^2_{L^2} - (g,q)_{L^2} = -(\varphi_\epsilon((u\cdot\nabla))q, q_\epsilon)_{L^2}. \quad (3.109)$$

Considerando que o campo u tem divergência nula e que $((u_\epsilon \cdot \nabla)q_\epsilon, q_\epsilon)_{L^2} = 0$, segue que:

$$\Big((\varphi_\epsilon(u\cdot\nabla)q), q_\epsilon\Big)_{L^2} = \Big((\varphi_\epsilon(u\cdot\nabla)q) - (u_\epsilon\cdot\nabla)q_\epsilon, q_\epsilon\Big)_{L^2},$$

o que pode ser reescrito como:

$$(\nabla\cdot((u\otimes q)_\epsilon - u_\epsilon\otimes q_\epsilon), q_\epsilon)_{L^2}.$$

Utilizando a identidade (3.94), temos que $(u\otimes q)_\epsilon - u_\epsilon\otimes q_\epsilon = \rho_\epsilon(u,q)$. Portanto, a equação (3.109) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||q_\epsilon||^2_{L^2} + \nu||q_\epsilon||^2_{H^\beta_\alpha} + \gamma||q_\epsilon||^2_{L^2} - (g,q)_{L^2} = (\rho_\epsilon(u,q), \nabla q_\epsilon)_{L^2}, \tag{3.110}$$

onde $\rho_\epsilon(u,q)$ é definido conforme a equação (3.95):

$$\rho_\epsilon(u,q) := r_\epsilon(u,q) - (u-u_\epsilon)\otimes(q-q_\epsilon).$$

Agora, integramos a equação (3.110) no tempo, de 0 a T, e obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T &\Big[\nu||q_\epsilon(s+t_0)||^2_{H^\beta_\alpha} + \gamma||q_\epsilon(s+t_0)||^2_{L^2} - (g_\epsilon, q_\epsilon(s+t_0))_{L^2}\Big]\,ds \\ &= \frac{1}{2T}||q_\epsilon(s+t_0)||^2_{L^2}\Big|_T^0 + \frac{1}{T}\int_0^T (\rho_\epsilon(u,q)(s+t_0), \nabla q_\epsilon(s+t_0))_{L^2}\,ds.\end{aligned} \tag{3.111}$$

Ao aplicarmos o limite de Banach à equação (3.111), obtemos:

$$\begin{aligned}LIM_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T &\Big[\nu||q_\epsilon(s+t_0)||^2_{H^\beta_\alpha} + \gamma||q_\epsilon(s+t_0)||^2_{L^2} - (g_\epsilon, q_\epsilon(s+t_0))_{L^2}\Big]\,ds \\ &= LIM_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \Big(\rho_\epsilon(u,q)(s+t_0), \nabla q_\epsilon(s+t_0)\Big)_{L^2}\,ds.\end{aligned}$$

Sabendo que o limite de Banach $LIM_{T\to\infty}$ foi escolhido de forma a coincidir com o limite superior, concluímos que:

$$LIM_{T\to\infty}\frac{1}{2T}||q_\epsilon(s)||^2_{L^2} = \limsup_{T\to\infty}\frac{1}{2T}||q_\epsilon(s)||^2_{L^2} \le 0.$$

Assim, pela identificação (3.102), demonstrada na primeira parte do nosso Teorema, obtemos que:

$$\begin{aligned}LIM_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T &\Big[\nu||q_\epsilon(s+t_0)||^2_{H^\beta_\alpha} + \gamma||q_\epsilon(s+t_0)||^2_{L^2} - (g_\epsilon, q_\epsilon(s+t_0))_{L^2}\Big]\,ds \\ &= \int_{L^2}\Big[\nu||q_\epsilon||^2_{H^\beta_\alpha} + \gamma||q_\epsilon||^2_{L^2} - (g_\epsilon, q_\epsilon(s))_{L^2}\Big]\,d\mu^{(\nu)}(q).\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}\int_{L^2}&\Big[\nu||q_\epsilon||^2_{H^\beta_\alpha} + \gamma||q_\epsilon||^2_{L^2} - (g_\epsilon, q_\epsilon(s))_{L^2}\Big]\,d\mu^{(\nu)}(q) \\ &= LIM_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \Big(\rho_\epsilon(u,q)(s+t_0), \nabla q_\epsilon(s+t_0)\Big)_{L^2}\,ds.\end{aligned} \tag{3.112}$$

Agora, vamos demonstrar as condições (3.57) e (3.59) da Definição 10 com base na equação (3.112). Iniciaremos pela condição (3.57). Para isso, é necessário mostrar que a média temporal de longo prazo da função $(\rho_\epsilon(u,q)(s), \nabla q_\epsilon(s))_{L^2}$, conforme a identidade (3.112), é uniformemente limitada em relação ao tempo e a ϵ. Esse controle permitirá fazer $\epsilon \to 0$ no lado esquerdo da equação, garantindo a convergência para uma função mensurável, o que será viabilizado pelo teorema da convergência dominada. Com isso, finalmente obteremos a condição (3.57) da Definição 10.

De fato, fixemos $\epsilon > 0$. Para qualquer $q \in F^\infty$, sabemos que $q \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Dessa forma, $\mathbf{Curl}(u)(x,s) = (\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{-1} q(x,s)$ tem norma L^2 limitada, pois o operador $(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{-1}$ é limitado em L^2. Assim, pela relação (2.13), que relaciona a norma L^2 de ∇u com a norma L^2 de $\mathbf{Curl}(u)$, temos:

$$||\nabla u(s)||_{L^2} \leq ||q(s)||_{L^2}.$$

Aplicando a Proposição 26 do Apêndice B, obtemos a seguinte estimativa para $\rho_\epsilon(u,q)(s)$:

$$||\rho_\epsilon(u,q)(s)||_{L^2} \leq M_2 \epsilon ||q(s)||_{L^\infty} ||q(s)||_{L^2}.$$

Além disso, é fácil ver que:

$$||\nabla q_\epsilon(s)||_{L^2} \leq \frac{M}{\epsilon} ||q(s)||_{L^2}.$$

Dado que as normas L^2 e L^∞ da função $q(\cdot, t)$ podem ser limitadas independentemente do tempo, ver as desigualdades (3.7) e (3.20), temos que as estimativas anteriores também não dependem do tempo. Assim, ao aplicarmos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para a função $\Big(\rho_\epsilon(u,q)(s), \nabla q_\epsilon(s)\Big)_{L^2}$, obtemos uma limitação independente de $\epsilon > 0$ e do tempo:

$$\left|\Big(\rho_\epsilon(u,q)(s), \nabla q_\epsilon(s)\Big)_{L^2}\right| \leq ||\rho_\epsilon(u,q)(s)||_{L^2} ||\nabla q_\epsilon(s)||_{L^2} \leq B, \tag{3.113}$$

onde B é uma constante positiva independente de $\epsilon > 0$ e do tempo. Por outro lado, como o limite de Banach foi escolhido como um limite superior, temos:

$$\begin{aligned} LIM_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T & \Big(\rho_\epsilon(u,q)(s+t_0), \nabla q_\epsilon(s+t_0)\Big)_{L^2} ds \\ &= \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Big(\rho_\epsilon(u,q)(s+t_0), \nabla q_\epsilon(s+t_0)\Big)_{L^2} ds. \end{aligned}$$

A partir da desigualdade (3.113), concluímos que:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Big(\rho_\epsilon(u,q)(s+t_0), \nabla q_\epsilon(s+t_0)\Big)_{L^2} ds \leq B.$$

Essa relação, junto com a equação (3.112), nos leva à desigualdade:

$$\int_{L^2} \left[\nu ||q_\epsilon||^2_{H^\beta_\alpha} + \gamma ||q_\epsilon||^2_{L^2} - (g_\epsilon, q_\epsilon)_{L^2}\right] d\mu^{(\nu)} \leq B. \tag{3.114}$$

Aplicando as desigualdade Cauchy-Schwarz e a desigualdade Young à função $(g_\epsilon, q_\epsilon)_{L^2}$, obtemos:

$$\int_{L^2} \nu ||q_\epsilon||^2_{H^\beta_\alpha} \, d\mu^{(\nu)} + \frac{\gamma}{2} \int_{L^2} ||q_\epsilon||^2_{L^2} \, d\mu^{(\nu)} \leq B + \frac{||g_\epsilon||^2_{L^2}}{\gamma} \mu^{(\nu)}(L^2(\mathbb{T}^2)).$$

Dado que a medida $\mu^{(\nu)}$ é finita, podemos normalizá-la para garantir que sua medida total seja igual a 1. Por outro lado, como o molificador φ_ϵ não incremente a norma L^2 da função g e a função $||q_\epsilon||^2_{L^2}$ é continua e não negativa em L^2, segue que:

$$\int_{L^2} ||q_\epsilon||^2_{H^\beta_\alpha} \, d\mu^{(\nu)} \leq B(\nu) + \frac{||g||^2_{L^2}}{\nu\gamma},$$

onde o lado direito desta desigualdade é finito e independente de $\epsilon > 0$. Como a função $||q||^2_{H^\beta_\alpha}$ é Borel mensurável não negativa, aplicamos o Lema de Fatou a essa última desigualdade e concluímos a condição (3.57) da Definição 10. Ou seja:

$$\int_{L^2} ||q||^2_{H^\beta_\alpha} \, d\mu^{(\nu)} < \infty.$$

Dando continuidade à demonstração da condição (3.59) da Definição 10, o próximo passo envolve a verificação da desigualdade (3.104). Para lograr este objetivo, utilizaremos a identidade (3.112) e mostraremos que o limite de Banach da média temporal de longo prazo para a função $(\rho_\epsilon(u,q)(s), \nabla q_\epsilon(s))_{L^2}$ tende a zero.
Inicialmente, seja $\epsilon > 0$ fixo. Observamos que, para qualquer $q \in F^\infty$, temos $q \in L^\infty \cap H^\beta$. Como resultado, $\nabla q_\epsilon \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$, e a seguinte limitação é válida:

$$||\nabla q_\epsilon||_{L^\infty} \leq \frac{M}{\epsilon}. \tag{3.115}$$

Além disso, de acordo com a Proposição 25 do Apêndice B, temos que:

$$||\rho_\epsilon(u,q)||_{L^1} \leq M_1 \epsilon^{\frac{3}{2}} ||\nabla u||_{L^2} ||q||_{H^\beta}. \tag{3.116}$$

É importante destacar que essas estimativas são independentes do tempo, já que $q \in F^\infty$. Assim, ao aplicarmos a desigualdade de Hölder à função $(\rho_\epsilon(u,q), \nabla q_\epsilon)_{L^2}$, obtemos a seguinte estimativa:

$$|(\rho_\epsilon(u,q), \nabla q_\epsilon)_{L^2}| \leq ||\nabla q_\epsilon||_{L^\infty} ||\rho_\epsilon(u,q)||_{L^1}.$$

Utilizando as desigualdades (3.115) e (3.116), deduzimos que:

$$|(\rho_\epsilon(u,q), \nabla q_\epsilon)_{L^2}| \leq C\epsilon^{\frac{1}{2}},$$

onde C é uma constante positiva independente do tempo. Aplicando o limite de Banach (que foi escolhido como o limite superior) e utilizando o Lema de Fatou, concluímos que:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} \left| \Big(\rho_\epsilon(u,q)(s), \nabla q_\epsilon(s)\Big)_{L^2} \right| ds \leq C\epsilon^{\frac{1}{2}}, \tag{3.117}$$

para todo $\epsilon > 0$. Fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T}\Big(\rho_\epsilon(u,q)(s),\nabla q_\epsilon(s)\Big)_{L^2}ds\right]\leq 0.$$

Portanto, com base na relação (3.112), obtemos a desigualdade (3.104):

$$\int_{L^2}\left[\nu||q_\epsilon||^2_{H^\beta_\alpha}+\gamma||q_\epsilon||^2_{L^2}-(g_\epsilon,q_\epsilon)_{L^2}\right]d\mu^{(\nu)}(q)\leq 0,$$

para todo ϵ. Como as funções $||q||^2_{H^\beta_\alpha}$, $||q||^2_{L^2}$ e $(g,q)_{L^2}$ são Borel mensurável, definimos a seguinte sequência de funções mensuráveis em L^2:

$$F_\epsilon(q)=\nu||q_\epsilon||^2_{H^\beta_\alpha}+\gamma||q_\epsilon||^2_{L^2}-(g_\epsilon,q_\epsilon)_{L^2},$$

Essa sequência converge pontualmente e é uniformemente limitada em relação a ϵ. Portanto, aplicando o teorema da convergência dominada, concluímos a desigualdade (3.104):

$$\int_{L^2}\left[\nu||q||^2_{H^\beta_\alpha}+\gamma||q||^2_{L^2}-(g,q)_{L^2}\right]d\mu^{(\nu)}(q)\leq 0.$$

Finalmente, para verificar a condição (3.59) da Definição 10, adotamos uma abordagem similar à que usamos para a desigualdade (3.104), mas agora localizada no conjunto

$$E:=\Big\{q\in L^2\ :\ E_1^2\leq ||q||^2_{L^2}<E_2^2\Big\},$$

onde $E_1, E_2 \in \mathbb{R}$ são tais que $0 < E_1 < E_2$. Consideramos uma função suave $\chi'(y)$, não negativa e de suporte compacto definida em $[0,\infty)$. Em seguida, definimos a função

$$\chi(y):=\int_0^y\chi'(\tau)\,d\tau,$$

que é limitada em $[0,\infty)$. A composição de $\chi(\cdot)$ com a função contínua $||q_\epsilon(t)||^2_{L^2}$ nos permite calcular sua derivada em relação ao tempo, que é dada por:

$$\frac{d}{dt}\chi(||q_\epsilon(t)||^2_{L^2})=\chi'(||q_\epsilon(t)||^2_{L^2})\frac{d}{dt}||q_\epsilon(t)||^2_{L^2}.$$

Utilizando a equação (3.110), que representa o balanço de enstrofia potencial regularizado, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||q_\epsilon||^2_{L^2}+\left[\nu||q_\epsilon||^2_{H^\beta_\alpha}+\gamma||q_\epsilon||^2_{L^2}-(g_\epsilon,q_\epsilon)_{L^2}\right]=\Big(\rho_\epsilon(u,q),\nabla q_\epsilon\Big)_{L^2}.$$

Multiplicamos essa equação por $2\chi'(||q_\epsilon||^2_{L^2})$ e obtemos:

$$\begin{aligned}\chi'(||q_\epsilon||^2_{L^2})\frac{d}{dt}||q_\epsilon||^2_{L^2}+2\chi'(||q_\epsilon||^2_{L^2})\left[\nu||q_\epsilon||^2_{H^\beta_\alpha}+\gamma||q_\epsilon||^2_{L^2}-(g_\epsilon,q_\epsilon)_{L^2}\right]&\\ =2\chi'(||q_\epsilon||^2_{L^2})\Big(\rho_\epsilon(u,q),\nabla q_\epsilon\Big)_{L^2}&.\end{aligned}$$

Agora, ao tomar a média temporal, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{2}{T}\int_0^T\chi'(||q_\epsilon||^2_{L^2})\left[\nu||q_\epsilon||^2_{H^\beta_\alpha}+\gamma||q_\epsilon||^2_{L^2}-(g_\epsilon,q_\epsilon)_{L^2}\right]ds&=\frac{1}{T}\chi(||q_\epsilon(t)||^2_{L^2})\Big|_T^0\\ &+\frac{2}{T}\int_0^T\chi'(||q_\epsilon||^2_{L^2})\Big(\rho_\epsilon(u(s),q(s)),\nabla q_\epsilon(s)\Big)_{L^2}ds.\end{aligned}$$

Aplicando o limite de Banach, que foi escolhido para coincidir com o limite superior, o lado esquerdo da equação anterior é identificado com a medida $\mu^{(\nu)}$, enquanto o lado direito é limitado por um múltiplo de $\epsilon^{\frac{1}{2}}$, conforme observado em (3.117) e pela limitação da função $\chi'(\cdot)$. Assim, temos:

$$\int_{L^2} \chi'(||q_\epsilon||_{L^2}^2)\Big[\nu||q_\epsilon||_{H_\alpha^\beta}^2 + \gamma||q_\epsilon||_{L^2}^2 - (g_\epsilon, q_\epsilon)_{L^2}\Big]\, d\mu^{(\nu)}(q) \leq C\epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Novamente, dado que a função $\chi'(\cdot)$ é limitada, podemos proceder de maneira análoga ao caso da condição (3.57). Usamos o Teorema da convergência dominada para garantir que o lado esquerdo da desigualdade converge, sem dificuldades, quando fazemos $\epsilon \to 0$. Dessa forma, obtemos:

$$\int_{L^2} \chi'(||q||_{L^2}^2)\Big[\nu||q||_{H_\alpha^\beta}^2 + \gamma||q||_{L^2}^2 - (g, q)_{L^2}\Big]\, d\mu^{(\nu)}(q) \leq 0. \tag{3.118}$$

Agora, escolhemos uma sequencia $(\chi'_n)_n$ tal que converge pontualmente, ou seja,

$$\chi'_n(y) \longrightarrow \mathbf{1}_E \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty \tag{3.119}$$

para todo $y \in \mathbb{R}$, com valores $0 \leq \chi'(y) \leq 2$. Desse modo, definimos a sequência de funções mensuráveis:

$$G_n(q) := \chi'_n(||q||_{L^2}^2)\Big[\nu||q||_{H_\alpha^\beta}^2 + \gamma||q||_{L^2}^2 - (g, q)_{L^2}\Big].$$

Observe que a sequencia $G_n(q)$ é uniformemente limitada e, pela convergência (3.119), é pontualmente convergente, com limite dado por:

$$\mathbf{1}_E\Big[\nu||q||_{H_\alpha^\beta}^2 + \gamma||q||_{L^2}^2 - (g, q)_{L^2}\Big]$$

para todo $q \in L^2$. Logo, aplicamos o Teorema da convergência dominada junto com a desigualdade (3.118), e obtemos que:

$$\int_{E} \Big[\nu||q||_{H_\alpha^\beta}^2 + \gamma||q||_{L^2}^2 - (g, q)_{L^2}\Big]\, d\mu^{(\nu)}(q) \leq 0$$

para qualquer $0 < E_1 < E_2 \leq \infty$, que é nossa condição (3.59) da Definição 10. □

Encerramos este capítulo com o nosso principal resultado sobre a dissipação anômala nas equações de Camassa-Holm Generalizadas, no espaço fase da vorticidade potencial, considerando os parâmetros $\gamma > 0$ e $1/2 < \beta \leq 1$ fixos.

Teorema 19. *Sejam $g \in L^2(\mathbb{T}^2)$ e $q_0 \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Para cada $\nu > 0$, seja $q^{(\nu)}(x,t)$ a solução das equações da vorticidade potencial para as equações de Camassa-Holm Generalizadas. Então,*

$$\lim_{\nu \to 0} \nu \left[\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T ||q^{(\nu)}(s+t_0)||_{H_\alpha^\beta}^2\, ds\right] = 0. \tag{3.120}$$

Demonstração. Vamos argumentar por contradição. Suponhamos que o limite (3.120) seja diferente de zero. Então, existe um $\delta > 0$ e uma sequencia de viscosidades $\nu_k \to 0$, tal que, para cada ν_k, existe uma sequencia de tempos $T_j \to \infty$ onde

$$\frac{\nu_k}{T_j} \int_0^{T_j} ||q^{(\nu_k)}(s+t_0)||^2_{H^\beta_\alpha} \, ds \geq \delta, \tag{3.121}$$

para todo t_j. Como $q^{(\nu_k)}$ é uma solução das equações da vorticidade potencial, a função $q^{(\nu_k)}(x, s+t_0)$ satisfaz a equação de balanço de enstrofia potencial (3.4). Ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||q^{(\nu_k)}(s+t_0)||^2_{L^2} + \nu_k ||q^{(\nu_k)}(s+t_0)||^2_{H^\beta_\alpha} + \gamma ||q^{(\nu_k)}(s+t_0)||^2_{L^2} = (g, q^{(\nu_k)}(s+t_0))_{L^2},$$

para cada $\nu_k > 0$. Se calcularmos a média temporal dessa equação no intervalo $[0, T_j]$ e compararmos com a desigualdade (3.121), obtemos

$$\begin{aligned}\delta \leq \frac{\nu_k}{T_j} \int_0^{T_j} ||q^{(\nu_k)}(s+t_0)||^2_{H^\beta_\alpha} \, ds = \frac{1}{2T_j} ||q^{(\nu_k)}(s+t_0)||^2_{L^2} \Bigg|^0_{T_j} \\ + \frac{1}{T_j} \int_0^{T_j} \left[(g, q^{(\nu_k)}(s+t_0))_{L^2} - \gamma ||q^{(\nu_k)}(s+t_0)||^2_{L^2} \right] ds.\end{aligned}$$

Assim, calculando o limite superior, segue-se que

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[(g, q^{(\nu_k)}(s+t_0))_{L^2} - \gamma ||q^{(\nu_k)}(s+t_0)||^2_{L^2} \right] ds \geq \delta. \tag{3.122}$$

Observe que a função $\left[(g, q)_{L^2} - \gamma ||q||^2_{L^2}\right]$ é contínua em $(\overline{\mathcal{O}^+(q_0)})$, e, com base na observação feita na definição de limite de Banach (3.100), escolhemos um limite de Banach que satisfaça

$$\begin{aligned}LIM_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T} \int_0^T \left[(g, q^{(\nu_k)}(s+t_0))_{L^2} - \gamma ||q^{(\nu_k)}(s+t_0)||^2_{L^2} \right] ds \right) \\ = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[(g, q^{(\nu_k)}(s+t_0))_{L^2} - \gamma ||q^{(\nu_k)}(s+t_0)||^2_{L^2} \right] ds.\end{aligned}$$

Ao aplicarmos o Teorema 18 com esse limite de Banach, concluímos que existe uma solução estatística estacionária para as equações de Camassa-Holm Generalizadas no espaço fase de vorticidade potencial, denotada por $\mu^{(\nu_k)}$, a qual é suportada no conjunto F^∞ definido em (3.103) e satisfaz a desigualdade

$$\int_{L^2} \left[(g, q)_{L^2} - \gamma ||q||^2_{L^2} \right] d\mu^{(\nu_k)}(q) \geq \delta > 0 \tag{3.123}$$

para todo $\nu_k > 0$. Isso gera uma sequência de soluções estatísticas estacionárias que variam com a viscosidade, denotadas por $(\mu^{(\nu_k)})_{\nu_k}$, a qual satisfaz a desigualdade (3.123). Aplicando o Teorema 15, temos que existe uma subsequência de $(\mu^{(\nu_k)})_{\nu_k}$, denota da mesma forma, que converge fracamente para μ, uma solução estatística estacionária renormalizada para as equações de Euler-α. Agora, aplicando o Teorema 16, vemos que essa solução estatística estacionária renormalizada está suportada no conjunto F^∞ e satisfaz o balanço de enstrofia potencial, isto é,

$$\int_{L^2} \left[\gamma||q||_{L^2}^2 - (g,q)_{L^2}\right] d\mu(q) = 0. \tag{3.124}$$

Nosso próximo objetivo será obter uma contradição entre o balanço de enstrofia potencial de μ, dado em (3.124), e o limite de Banach escolhido em (3.122). Como $g \in L^2(\mathbb{T}^2)$, a função $(g,q)_{L^2}$ é fracamente contínua e localmente limitada para todo $q \in L^2$. Dessa forma, pela convergência fraca da subsequência $(\mu^{(\nu_k)})_{\nu_k}$ e pela identidade (3.76), obtemos

$$\lim_{\nu_k \to 0} \int_{L^2} (g,q)_{L^2}\, d\mu^{(\nu_k)}(q) = \int_{L^2} (g,q)_{L^2}\, d\mu(q). \tag{3.125}$$

Além disso, dado que a função $||q||_{L^2}^2$ é mensurável e não negativa para todo $q \in L^2$, aplicamos o Teorema de Fatou à subsequência de medidas e concluímos que

$$\int_{L^2} ||q||_{L^2}^2\, d\mu(q) \leq \liminf_{\nu_k \to \infty} \int_{L^2} ||q||_{L^2}^2\, d\mu^{(\nu_k)}(q). \tag{3.126}$$

Utilizando essa informação em conjunto com (3.125) e (3.126), vemos que:

$$\begin{aligned} \int_{L^2} \left[\gamma||q||_{L^2}^2 - (g,q)_{L^2}\right] d\mu(q) &\leq \liminf_{\nu_k \to \infty} \int_{L^2} \left[\gamma||q||_{L^2}^2 - (g,q)_{L^2}\right] d\mu^{(\nu_k)}(q) \\ &= -\liminf_{\nu_k \to \infty} \int_{L^2} \left[(g,q)_{L^2} - \gamma||q||_{L^2}^2\right] d\mu^{(\nu_k)}(q). \end{aligned}$$

Observamos que, como a subsequência $(\mu^{(\nu_k)})_{\nu_k}$ satisfaz a desigualdade (3.123), podemos inferir que:

$$\int_{L^2} \left[\gamma||q||_{L^2}^2 - (g,q)_{L^2}\right]\, d\mu(q) \leq -\delta < 0.$$

Essa conclusão entra em contradição com o fato de que a medida μ deve satisfazer o balanço de enstrofia potencial dado pela equação (3.124). Portanto, podemos afirmar que o limite apresentado na expressão (3.120) é de fato zero. □

A partir do Teorema 19, podemos concluir que, para o caso em que o parâmetro de interpolação se encontra no intervalo $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$, não ocorre dissipação anômala de enstrofia potencial para a média temporal de longo prazo das soluções das equações de Camassa-Holm Generalizadas.

4 Exemplo de dissipação anômala de enstrofia potencial para o sistema de vorticidade potencial das equações de fluidos de segundo grau

Neste capítulo, desenvolvemos uma solução para as equações de vorticidade potencial em fluidos de segundo grau, destacando o fenômeno de dissipação anômala de enstrofia potencial, mais precisamente a dissipação infinita. Essa solução contrasta com os resultados obtidos no Capítulo 3, que investiga o regime do parâmetro de interpolação β. Nesse contexto, a formulação de vorticidade potencial para a família de equações de Camassa-Holm Generalizadas não apresenta dissipação anômala.

Lembrando um pouco, o termo "dissipação anômala" refere-se ao fato de que, no limite de viscosidade nula, ainda temos dissipação remanescente, mesmo que a equação limite conserve energia. Uma abordagem para investigar a questão da dissipação anômala consiste em utilizar as medias temporais de longo prazo, com o objetivo de atingir um regime estacionário das equações viscosas, enquanto a viscosidade é levada a zero. Se denotamos por $S^{(\nu)}(t,\omega_0)$ a solução de uma equação viscosa no tempo $t \geq 0$ a partir do dado inicial ω_0 e consideramos as médias temporais de longo prazo para a dissipação de enstrofia, dada por:

$$\langle |\nabla S^{(\nu)}(t,\omega_0)|^2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla (S^{(\nu)}(t,\omega_0))|^2 \, dx\, dt.$$

Dizemos que a solução viscosa apresenta dissipação anômala de enstrofia quando o valor $\epsilon := \lim_{\nu\to 0} \nu \langle |\nabla S^{(\nu)}(t,\omega_0)|^2\rangle$ for positivo.

Os autores dos trabalhos [11] e [12], investigaram a dissipação anômala de enstrofia para as equações de Navier-Stokes com amortecimento e forçamento, assim como a dissipação anômala de energia para as equações SQG critica com amortecimento e forçamento, utilizando soluções estatísticas estacionárias. Eles concluíram a ausência desse fenômeno. Analogamente, no Capítulo 3 deste trabalho, demonstramos um resultado similar para as equações de Camassa-Holm Generalizadas no toro ($\mathbb{T}^2$), descritas pelas equações:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t v + u\cdot\nabla v + \sum_{j=1}^2 v^j \nabla u^j - \nu\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^\beta u + \gamma v & = & -\nabla p + f \\ \nabla\cdot u & = & 0 \\ (\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u & = & v \\ u(x,0) & = & u_0 \end{array}\right. \tag{4.1}$$

onde α, ν e γ são parâmetros não negativos e $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$. Constatou-se que também não apresenta dissipação anômala de enstrofia potencial nesse sistema. Vale ressaltar que o sistema de equações (4.1) forma uma família parametrizada por $0 \leq \beta \leq 1$. No extremo $\beta = 1$, obtemos o sistema de equações de Camassa-Holm, amplamente utilizado em estudos de turbulência [5, 7, 6]. No outro extremo, $\beta = 0$ representa as equações de fluidos de segundo grau [13, 24].

A seguir, desenvolvemos uma solução para as equações de segundo grado de fluidos que apresenta dissipação de enstrofia potencial. Consideramos, primeiramente, as equações de fluidos incompressíveis de segundo grau no toro ($\mathbb{T}^2$):

$$\begin{cases} \partial_t v + u \cdot \nabla v + \sum_{j=1} v_j \nabla u_j - \nu \Delta u &= -\nabla p + f \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ (\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta) u &= v \\ u(x,0) &= u_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

onde α e ν são parâmetros não negativos. Ao aplicarmos o operador **Curl**, definido em (2.12), às equações (4.2), obtemos o sistema equivalente de equações dado por:

$$\begin{cases} \partial_t q + u \cdot \nabla q - \nu \Delta \omega &= g \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ \mathbf{curl}(u) &= \omega \\ \mathbf{Curl}((\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta) u) &= q \end{cases} \tag{4.3}$$

onde $g = \mathbf{Curl}(f)$. Agora, vamos construir uma solução para o sistema (4.3) que tem dissipação anômala de enstrofia potencial. Seja $\psi(x) \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ uma autofunção do operador $(\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta)$, cuja média da autofunção em $\mathbb{T}^2$ é zero e com um autovalor $\lambda > 1$. Isto é,

$$(\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta) \psi(x) = \lambda \psi(x). \tag{4.4}$$

Definimos um forçamento $g(x) = c\psi(x)$ e uma função $\eta(t)$ que sera a solução do problema de valor inicial (P.V.I).

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\eta(t) + \frac{\nu(\lambda-1)}{\lambda\alpha^2}\eta(t) &= c \\ \eta(0) &= 1 \end{cases} \tag{4.5}$$

Neste caso, como o (P.V.I) é uma EDO linear de primeira ordem, tem solução $\eta(t)$ da forma:

$$\eta(t) = \left(1 - \frac{\lambda\alpha^2 c}{\nu(\lambda-1)}\right) e^{-\nu\frac{(\lambda-1)}{\lambda\alpha^2}t} + \frac{\lambda\alpha^2 c}{\nu(\lambda-1)}. \tag{4.6}$$

Agora, definimos a função $q(x,t)$ como:

$$q(x,t) := \eta(t)\psi(x). \tag{4.7}$$

Em seguida, consideramos a função φ, que será denominada como *função corrente*, definida por:

$$\varphi(x,t) = \frac{\alpha^2}{\lambda(1-\lambda)} q(x,t). \tag{4.8}$$

Dando continuidade à nossa análise, apresentamos o seguinte Teorema que garante que a função escalar $q(x,t)$ definida em (4.7) é uma solução para o sistema de equações (4.3).

Teorema 20. *A função $q(x,t)$ definida em (4.7), é uma solução para as equações*

$$\begin{cases} \partial_t q + (u\cdot\nabla)q - \nu\Delta\omega &= g \\ \nabla\cdot u &= 0 \\ \boldsymbol{Curl}((\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u) &= q \\ q(\cdot,0) &= \psi(x) \end{cases} \tag{4.9}$$

com o campo de velocidade $u(x,t) = \nabla^{\perp}\varphi(x,t)$ e $\omega(x,t) = \boldsymbol{Curl}(u(x,t))$.

Demonstração. Para demonstrar que o campo de velocidade $u(x,t)$ satisfaz as equações do sistema (4.9), inicialmente verificamos que:

$$\nabla\cdot u(x,t) = \nabla\cdot\nabla^{\perp}\varphi(x,t) = 0,$$

o que mostra que o campo de velocidade é incompressível. Além disso, devemos mostrar que $u(x,t)$ satisfaz a equação

$$\mathbf{Curl}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u(x,t) = q(x,t). \tag{4.10}$$

De fato, dado que o operador **Curl** e o operador $(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)$ comutam, segue que

$$\mathbf{Curl}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u(x,t) = (\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)\mathbf{Curl}(u(x,t)). \tag{4.11}$$

Por outro lado, como o campo de velocidade está definido por $u(x,t) = \nabla^{\perp}\varphi(x,t)$, ao aplicar a operador **Curl**, a essa igualdade, temos:

$$\mathbf{Curl}(u(x,t)) = \mathbf{Curl}(\nabla^{\perp}\varphi(x,t)). \tag{4.12}$$

Logo, aplicando a identidade (2.12), que define o operador **Curl** em duas dimensões, ao lado direito da igualdade (4.12), obtemos:

$$\mathbf{Curl}(u(x,t)) = \nabla^{\perp}\cdot(\nabla^{\perp}\varphi(x,t)) = \Delta\varphi(x,t). \tag{4.13}$$

Substituindo a igualdade (4.13) em (4.11), temos que:

$$\mathbf{Curl}((\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u(x,t)) = (\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)\Delta\varphi(x,t).$$

A última parte da demonstração da identidade (4.10), consiste em mostrar que:

$$(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)\Delta\varphi(x,t) = q(x,t).$$

Como $\varphi(x,t)$, que foi denotada como função corrente, é dada por (4.8), segue que:

$$(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)\Delta\varphi(x,t) = (\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)\left(\left(\frac{\alpha^2}{\lambda(1-\lambda)}\right)\Delta q(x,t)\right). \tag{4.14}$$

Dado que a função $\psi(x)$ é uma autofunção do operador $(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)$ com autovalor $\lambda > 1$, temos que a função $q(x,t) = \eta(t)\psi(x)$ é também uma autofunção com o mesmo autovalor λ. Isto é,

$$(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)q(x,t) = \lambda q(x,t).$$

Desse modo, isolando o termo $\Delta q(x,t)$ da identidade anterior, obtemos:

$$\Delta q(x,t) = \frac{(1-\lambda)}{\alpha^2} q(x,t). \tag{4.15}$$

Substituindo a igualdade (4.15) no lado direito de (4.14), segue que:

$$(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)\Delta\varphi(x,t) = (\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)\left(\frac{q(x,t)}{\lambda}\right) = q(x,t),$$

o que conclui a demonstração da equação (4.10).

Agora, verificamos que a função $q(x,t)$ satisfaz a equação:

$$\begin{cases} \partial_t q(x,t) + (u\cdot\nabla)q(x,t) - \nu\Delta\omega(x,t) &= g(x,t) \\ q(\cdot,0) &= \psi(x). \end{cases} \tag{4.16}$$

Observemos que o termo não linear da equação (4.16) se anula devido à configuração do campo de velocidade $u(x,t)$ e nossa função corrente $\varphi(x,t)$. De fato, dado que o campo de velocidade $u(x,t) := \nabla^{\perp}\varphi(x,t)$ e de nossa função corrente $\varphi(x,t)$, definida em (4.8), segue que:

$$u(x,t) = \left(\frac{\alpha^2}{\lambda(1-\lambda)}\right)\nabla^{\perp} q(x,t). \tag{4.17}$$

Substituindo a nova configuração do campo de velocidade $u(x,t)$, dada em (4.17), no termo não linear do sistema (4.16), obtemos:

$$\begin{aligned}(u\cdot\nabla)q(x,t) &= \left(\left(\frac{\alpha^2}{\lambda(1-\lambda)}\right)\nabla^{\perp} q(x,t)\cdot\nabla\right)(q(x,t)) \\ &= \left(\frac{\alpha^2}{\lambda(1-\lambda)}\right)\nabla^{\perp} q(x,t)\cdot\nabla q(x,t) \\ &= 0,\end{aligned}$$

mostrando que o termo não linear se anula. Além disso, o termo viscoso do sistema (4.16), definido por $\nu\Delta\omega(x,t)$, pode ser reescrito como um múltiplo escalar da função $q(x,t)$. Para isso, começamos reescrevendo $\omega(x,t)$, que se refere ao $\mathbf{Curl}(u(x,t))$. Pela identidade (4.13), que expressa a função $\omega(x,t)$ em termos de nossa função corrente, temos:

$$\omega(x,t) = \Delta\varphi(x,t).$$

Logo, aplicamos a identidade (4.8), que define nossa função corrente, obtemos:

$$\omega(x,t) = \frac{\alpha^2}{\lambda(1-\lambda)}\Delta q(x,t).$$

Como a função $q(x,t)$ é uma autofunção do operador $(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)$, obtemos a identidade (4.15), o que nos permite rescrever a função $\omega(x,t)$ como:

$$\omega(x,t) = \frac{q(x,t)}{\lambda}. \tag{4.18}$$

Finalmente, substituindo a forma equivalente a função $\omega(x,t)$, dada pela equação (4.18), no termo viscoso do sistema (4.16). Aplicando novamente (4.13), concluímos que:

$$\nu\Delta\omega(x,t) = \nu\frac{(1-\lambda)}{\lambda\alpha^2}q(x,t). \tag{4.19}$$

Desse modo, verificamos que $q(x,t)$ satisfaz o sistema (4.16). Agora basta verificar que a função $q(x,t)$ também satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \partial_t q(x,t) + \nu\frac{(\lambda-1)}{\lambda\alpha^2}q(x,t) &= g(x,t) \\ q(\cdot,0) &= \psi(x). \end{cases} \tag{4.20}$$

Como função $\eta(t)$ satisfaz o sistema (4.5), temos que a função

$$q(x,t) := \eta(t)\psi(x) = \left(\psi(x) - \frac{\lambda\alpha^2 g(x)}{\nu(\lambda-1)}\right)e^{-\nu\frac{(\lambda-1)}{\lambda\alpha^2}t} + \frac{\lambda\alpha^2 g(x)}{\nu(\lambda-1)} \tag{4.21}$$

satisfaz o sistema (4.20). Portanto, a tripla $(q(x,t), u(x,t), \omega(x,t))$ é uma solução do sistema (4.9). $\square$

Em seguida, definimos matematicamente o fenômeno de dissipação anômala de enstrofia potencial para o sistema (4.9). Este fenômeno consiste em calcular as médias temporais de longo prazo do termo viscoso do sistema (4.9) e, logo fazemos tender para zero o parâmetro de viscosidade. Inicialmente, calculamos o produto L^2 da função $q(x,t)$ com o sistema (4.9). Isso resulta na equação:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||q||^2_{L^2} - \nu(\Delta\omega, q)_{L^2} = (g,q)_{L^2}. \tag{4.22}$$

Lembrando que, como o campo de velocidade $u(x,t)$ possui divergência nula, o termo não linear se anula. Logo, integramos de 0 até T a equação (4.22)

$$||q(T)||^2_{L^2} + 2\nu\int_0^T(-\Delta\omega(t), q(t))_{L^2}\,dt = ||q(0)||^2_{L^2} + 2\int_0^T(g, q(t))_{L^2}\,dt. \tag{4.23}$$

Denotamos por ϵ, o fenômeno de dissipação anômala de enstrofia potencial do sistema (4.9), definido por:

$$\epsilon := \lim_{\nu\to0^+}\left[\lim_{T\to\infty}\frac{\nu}{T}\int_0^T(-\Delta\omega(s), q(s))_{L^2}\,ds\right] > 0. \tag{4.24}$$

Desse modo, estamos interessados em estudar quando o limite (4.24) é positivo.

A seguir, apresentamos o resultado principal deste Capítulo o qual mostra que nosso sistema (4.9) admite solução que apresenta dissipação anômala de enstrofia potencial.

Teorema 21. *Sejam as funções $q(x,t)$ definida em (4.7) e $\varphi(x,t)$, denotada como função corrente, definida em (4.8). Então o sistema (4.9) admite uma solução que tem dissipação anômala de enstrofia potencial. Isto é,*

$$\lim_{\nu \to 0^+} \left[\lim_{T \to \infty} \frac{\nu}{T} \int_0^T (-\Delta\omega(s), q(s))_{L^2}\, ds \right] > 0. \tag{4.25}$$

Demonstração. Para demonstrar que o limite dado por (4.25) é positivo, reescrevemos o integrando de (4.25) utilizando identidades previamente estabelecidas na demonstração do Teorema 20. Essa reformulação nos permite uma análise mais precisa da dissipação, levando em consideração a estrutura da vorticidade potencial.

Das hipóteses do Teorema 21, segue como uma aplicação do Teorema 20, que a função escalar $q(x,t)$ é uma solução para o sistema (4.9), com o campo de velocidade $u(x,t) := \nabla^{\perp}\varphi(x,t)$ e $\omega(x,t) = \mathbf{Curl}(u(x,t))$. Além disso, pela identidade (4.19), o termo viscoso do sistema (4.9) pode ser reescrito como um múltiplo escalar da vorticidade potencial. Ou seja,

$$\nu\Delta\omega(x,t) = \nu\frac{(1-\lambda)}{\lambda\alpha^2} q(x,t).$$

Desse modo, o integrando de (4.25) pode ser reescrito como:

$$(-\nu\Delta\omega(t), q(t))_{L^2} = \nu\frac{(\lambda-1)}{\lambda\alpha^2} ||q(t)||^2_{L^2}. \tag{4.26}$$

As médias temporais de longo prazo para (4.26) estão definidas por:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\nu}{T}\int_0^T (-\Delta\omega(t), q(t))_{L^2}\, ds = \nu\frac{(\lambda-1)}{\lambda\alpha^2} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T ||q(t)||^2_{L^2}\, dt.$$

Note que, da definição de $q(x,t)$, dada em (4.21), temos que

$$\begin{aligned} ||q(t)||^2_{L^2} = (q(t), q(t))_{L^2} = {} & \frac{\lambda^2\alpha^4}{\nu^2(\lambda-1)^2}||g||^2_{L^2} + \left|\left|\psi - \frac{\lambda\alpha^4}{\nu(\lambda-1)}g\right|\right|^2_{L^2} e^{-2\nu\frac{(\lambda-1)}{\lambda\alpha^2}t} \\ & + 2\left(\frac{\lambda\alpha^2}{\nu(\lambda-1)}g, \psi - \frac{\lambda\alpha^2}{\nu(\lambda-1)}g\right)_{L^2} e^{-\nu\frac{(\lambda-1)}{\lambda\alpha^2}t}. \end{aligned}$$

Desse modo, a media temporal de longo prazo para a função $||q(t)||$ é simplesmente:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T ||q(t)||^2_{L^2}\, dt = \frac{\lambda\alpha^2||g||^2_{L^2}}{(\lambda-1)\nu^2}. \tag{4.27}$$

A partir das identidades (4.26) e (4.27), segue que o limite (4.25) é dado por:

$$\lim_{\nu\to 0^+}\left[\lim_{T\to\infty}\frac{\nu}{T}\int_0^T (-\Delta\omega(s), q(s))_{L^2}\, ds\right] = \lim_{\nu\to 0^+}\frac{\lambda\alpha^2||g||^2_{L^2}}{(\lambda-1)\nu} = +\infty.$$

Assim, concluímos que o sistema (4.9) exibe o fenômeno de dissipação anômala de enstrofia potencial. □

Para finalizar este Capítulo, cabe mencionar que na literatura matemática a "dissipação anômala" é associada a dissipação de energia no limite invíscido, neste trabalho fazemos um abuso de notação ao chamar de "dissipação anômala" ao fenômeno de dissipar enstrofia potencial no limite invíscido. Desse modo, destacamos nosso Teorema 21 que evidencia a presença de dissipação remanescente na formulação de vorticidade potencial nas equações de fluidos de segundo grau ou no caso particular da formulação de vorticidade potencial da família de equações de Camassa-Holm Generalizadas com os parâmetros $\beta = 0$ e $\gamma = 0$, que contrasta com o resultado obtido no Capítulo 3, no qual encontramos um regime do parâmetro de interpolação β onde a vorticidade potencial é conservado. Finalmente observamos a relevância desse comportamento anômalo na dinâmica na família de equações.

5 Conclusões

Neste trabalho, estudamos o sistema de equações de Camassa-Holm Generalizadas (CHG), uma família de sistemas que interpola entre as equações de Camassa-Holm e as equações de fluidos de segundo grau, utilizando um parâmetro de interpolação $0 \leq \beta \leq 1$. Um dos principais desafios superados ao longo do estudo foi garantir a existência e unicidade das soluções para a família de equações de CHG. Destacando, a forma em que foi encarada a unicidade, pois, as estimativas para o termo não linear das equações de CHG, não permitiam a aplicação direta de uma desigualdade do tipo Grönwall, como é possível no caso das equações de Camassa-Holm.

O objetivo principal deste trabalho é estudar o fenômeno de dissipação anômala de enstrofia potencial nas equações de Camassa-Holm Generalizadas (CHG), destacando nosso resultado principal no Teorema 19 do Capítulo 3, que mostra o regime do parâmetro de interpolação $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ onde não ocorre dissipação anômala de enstrofia potencial. Em contraste, o Teorema 21 do Capítulo 4, apresentamos uma solução para as equações de fluidos de segundo grau que exibe dissipação anômala de enstrofia potencial. Esses resultados evidenciam a dinâmica interessante dentro da família de equações CHG, revelando um comportamento contrastante entre os diferentes regimes do parâmetro de interpolação.

Dada a limitação que temos em nosso resultado principal sobre o parâmetro de interpolação, apresentamos um trabalho futuro como sendo: o estudo do fenômeno de dissipação anômala com o parâmetro $\beta = \frac{1}{2}$ nas equações de CHG, denotando β neste caso, como nosso expoente critico.

Referências

[1] Franck Boyer and Pierre Fabrie. *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*, volume 183. Springer, New York, 2012.

[2] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, New York, 2011.

[3] Haïm Brezis and Petru Mironescu. Gagliardo-Nirenberg inequalities and non-inequalities: the full story. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 35(5):1355–1376, 2018.

[4] Roberto Camassa and Darryl D Holm. An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Physical review letters*, 71(11):1661, 1993.

[5] Shiyi Chen, Ciprian Foias, Darryl D Holm, Eric Olson, Edriss S Titi, and Shannon Wynne. Camassa-Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow. *Physical Review Letters*, 81(24):5338–5341, 1998.

[6] Shiyi Chen, Ciprian Foias, Darryl D Holm, Eric Olson, Edriss S Titi, and Shannon Wynne. The Camassa-Holm equations and turbulence. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 133(1-4):49–65, 1999.

[7] Shiyi Chen, Ciprian Foias, Darryl D Holm, Eric Olson, Edriss S Titi, and Shannon Wynne. A connection between the Camassa-Holm equations and turbulent flows in channels and pipes. *Physics of Fluids*, 11(8):2343–2353, 1999.

[8] Doina Cioranescu and Vivette Girault. Weak and classical solutions of a family of second grade fluids. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32(2):317–335, 1997.

[9] Earl A Coddington and Norman Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1955.

[10] Peter Constantin, Weinan E, and Edriss S Titi. Onsager's conjecture on the energy conservation for solutions of Euler's equation. *Comm. Math. Phys.*, pages 207–209, 1994.

[11] Peter Constantin and Fabio Ramos. Inviscid limit for damped and driven incompressible Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^2$. *Communications in Mathematical Physics*, 275(2):529–551, 2007.

[12] Peter Constantin, Andrei Tarfulea, and Vlad Vicol. Absence of anomalous dissipation of energy in forced two dimensional fluid equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 212:875–903, 2014.

[13] Vincenzo Coscia and Giovanni P Galdi. Existence, uniqueness and stability of regular steady motions of a second-grade fluid. *International journal of non-linear mechanics*, 29(4):493–506, 1994.

[14] Ronald J DiPerna and Pierre-Louis Lions. Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces. *Inventiones mathematicae*, 98(3):511–547, 1989.

[15] Ciprian Foiaş. Statistical study of Navier-Stokes equations, i. *Rendiconti del Seminario matematico della Università di Padova*, 48:219–348, 1972.

[16] Ciprian Foias. Statistical study of Navier-Stokes equations, ii. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, 49:9–123, 1973.

[17] Ciprian Foias, Darryl D Holm, and Edriss S Titi. The three dimensional viscous Camassa-Holm equations, and their relation to the Navier-Stokes equations and turbulence theory. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 14:1–35, 2002.

[18] Ciprian Foias, Oscar Manley, Ricardo Rosa, and Roger Temam. *Navier-Stokes equations and turbulence*, volume 83. Cambridge University Press, 2001.

[19] Philip Isett. A proof of Onsager's conjecture. *Annals of Mathematics*, 188(3):871–963, 2018.

[20] Dunn J.E and Fosdick R.L. Thermodynamics, stability, and boundedness of fluids of complexity 2 and fluids of second grade. *Archive for Rational mechanics and Analysis*, 56:191–252, 1974.

[21] Yang Linge, Ji Yanshan, and Guo Boling. The relation of two-dimensional viscous Camassa-Holm equations and the Navier-Stokes equations. *Acta Mathematica Scientia*, 29(1):65–73, 2009.

[22] Lars Onsager. Statistical hydrodynamics. *Il Nuovo Cimento (1943-1954)*, 6(Suppl 2):279–287, 1949.

[23] Marius Paicu and Geneviève Raugel. Dynamics of second grade fluids: the lagrangian approach. In *Recent Trends in Dynamical Systems: Proceedings of a Conference in Honor of Jürgen Scheurle*, pages 517–553. Springer, 2013.

[24] Marius Paicu and Geneviève Raugel. Dynamics of second grade fluids: the lagrangian approach. In *Recent Trends in Dynamical Systems: Proceedings of a Conference in Honor of Jürgen Scheurle*, pages 517–553. Springer, 2013.

[25] Kalyanapuram Rangachari Parthasarathy. *Probability measures on metric spaces*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005. Reprint of the 1967 original.

[26] Roman Shvydkoy. Lectures on the Onsager conjecture. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 3(3):473–496, 2010.

[27] Oleg Georgievich Smolyanov and Sergei Vasil'evich Fomin. Measures on linear topological spaces. *Russian Mathematical Surveys*, 31(4):3–56, 1976.

[28] Elias M Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton University Press, 1970.

[29] Roger Temam. *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*, volume 41. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1983.

[30] Roger Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68. Springer Science & Business Media, 2012.

Apêndices

APÊNDICE A – Normas Equivalentes

Neste apêndice, apresentamos a equivalência das normas induzidas pelos operadores $J^\beta = (\mathbb{I} - \Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ e $J_\alpha^\beta = (\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ para todo $\beta > 0$. Para $u \in \mathcal{E}$, denotamos as normas induzidas pelos operadores J^β e J_α^β como

$$||u||_{H^\beta} := ||J^\beta u||_{L^2} \quad \text{e} \quad ||u||_{H_\alpha^\beta} := ||J_\alpha^\beta u||_{L^2}.$$

A seguir, demonstraremos que as normas J^β e J_α^β são equivalentes.

Proposição 22. *A norma $||\cdot||_{H_\alpha^\beta}$ e a norma $||\cdot||_{H^\beta}$ são equivalentes:*

$$\alpha^\beta ||u||_{H^\beta} \leq ||u||_{H_\alpha^\beta} \leq ||u||_{H^\beta},$$

para todo $\alpha, \beta > 0$.

Demonstração. Se $0 < \alpha < 1$, então $(1 + \alpha^2|\xi|^2) \leq 1 + |\xi|^2$. Assim,

$$||(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u||_{L^2} \leq ||(\mathbb{I} - \Delta)^{\frac{\beta}{2}} u||_{L^2}.$$

Por outro lado, temos que $1 < 1/\alpha^2$. Logo,

$$\left(1 + |\xi|^2\right) \leq \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2}|\xi|^2\right) = \frac{1}{\alpha^2}\left(1 + \alpha^2|\xi|^2\right).$$

Por tanto, concluímos que

$$\alpha^\beta ||(\mathbb{I} - \Delta)^{\frac{\beta}{2}} u||_{L^2} \leq ||(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u||_{L^2}.$$

Se $1 < \alpha$, então $1 + |\xi|^2 \leq (1 + \alpha^2|\xi|^2)$. Assim,

$$||(\mathbb{I} - \Delta)^{\frac{\beta}{2}} u||_{L^2} \leq ||(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u||_{L^2}$$

Por outro lado, temos que $1/\alpha^2 < 1$. Logo,

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(1 + \alpha^2|\xi|^2\right) = \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2}|\xi|^2\right) \leq \left(1 + |\xi|^2\right)$$

Por tanto, conclímos que

$$||(\mathbb{I} - \alpha^2\Delta)^{\frac{\beta}{2}}||_{L^2} \leq \alpha^\beta ||(\mathbb{I} - \Delta)^{\frac{\beta}{2}} u||_{L^2}.$$

$\square$

APÊNDICE B – Desigualdades Importantes

Em seguida mostramos alguns desigualdades do capítulo 3 que são importantes para atingir nosso objetivo.

Proposição 23. *Sejam $\epsilon > 0$, $q \in H^{\beta}(\mathbb{T}^2)$ e $\frac{1}{2} < \beta < 1$. Então,*

$$||\delta_{\epsilon z} q||_{L^2} \leq C(\epsilon|z|)^{\frac{1}{2}} ||q||_{H^{\beta}} \quad \forall z \in \mathbb{T}^2 \tag{B.1}$$

Demonstração. Aplicando o Teorema de Plancherel, temos que:

$$\begin{aligned} ||\delta_{\epsilon z} q||_{L^2} &= \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |\widehat{\delta_{\epsilon z} q}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |\widehat{q}(k - \epsilon z) - \widehat{q}(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |(e^{-i\epsilon z \cdot k} - 1)|^2 |\widehat{q}(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Lembrando que a desigualdade:

$$|e^{-i\epsilon z \cdot k} - 1| = 2 \sin\left(\frac{\epsilon x \cdot z}{2}\right) \leq C(\epsilon|z||k|)^{1/2},$$

para todo $\epsilon > 0$. Dessa modo, obtemos

$$\begin{aligned} ||\delta_{\epsilon z} q||_{L^2} &\leq C \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \epsilon|z||k||\widehat{q}(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C(\epsilon|z|)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |k||\widehat{q}(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \\ &\leq C(\epsilon|z|)^{\frac{1}{2}} ||q||_{H^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Pela inclusão do espaços de Sobolev, temos que $H^{\beta}(\mathbb{T}^2) \subset H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)$ para $\beta > 1/2$. Dessa forma, concluímos a desigualdade (B.1) da Proposição 23. □

Proposição 24. *Sejam $\epsilon > 0$ e $u \in H^1(\mathbb{T}^2)$. Então,*

$$||\delta_{\epsilon z} u||_{L^2} \leq \epsilon|z|||\nabla u||_{L^2} \quad \forall z \in \mathbb{T}^2 \tag{B.2}$$

Demonstração. Aplicando o Teorema de Plancherel, temos que:

$$\begin{aligned} ||\delta_{\epsilon z} u||_{L^2} &= \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |\widehat{\delta_{\epsilon z} u}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |\widehat{u}(k - \epsilon z) - \widehat{u}(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |(e^{-i\epsilon z \cdot k} - 1)|^2 |\widehat{u}(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Lembrando que a desigualdade:

$$|e^{-i\epsilon z \cdot k} - 1| = 2 \sin\left(\frac{\epsilon x \cdot z}{2}\right) \leq \epsilon|z||k|,$$

para todo $\epsilon > 0$. Dessa modo, obtemos

$$
\begin{aligned}
||\delta_{\epsilon z} q||_{L^2} \leq \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} (\epsilon|z||k|)^2 |\widehat{u}(k)|^2\right]^{\frac{1}{2}} &\leq \epsilon|z| \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|^2 |\widehat{u}(k)|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \\
&\leq \epsilon|z| ||\nabla u||_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, concluímos a desigualdade (B.2) da Proposição 24. □

Proposição 25. *Se $u \in H^1(\mathbb{T}^2)$ e $q \in H^\beta(\mathbb{T}^2)$, então*

$$
||\rho_\epsilon(u,q)||_{L^1} \leq M_1 \epsilon^{\frac{3}{2}} ||\nabla u||_{L^2} ||q||_{H^\beta}. \tag{B.3}
$$

Demonstração. Lembrando que ρ_ϵ é definido como:

$$
\rho_\epsilon(u,q) := r_\epsilon(u,q) - (u - u_\epsilon) \otimes (q - q_\epsilon).
$$

com

$$
r_\epsilon(u,q) = \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z)(\delta_{\epsilon z} u(x) \otimes \delta_{\epsilon z} q(x))\, dz \quad \text{e} \quad \delta_{\epsilon z} u(x) = u(x - \epsilon z) - u(x).
$$

Aplicando a desigualdade de Minkowski, segue-se que:

$$
\begin{aligned}
||\rho_\epsilon(u,q)||_{L^1} &= \int_{\mathbb{T}^2} |\rho_\epsilon(u,q)(x)|\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{T}^2} |r_\epsilon(u,q)(x)|\, dx + \int_{\mathbb{T}^2} |(u - u_\epsilon) \otimes (q - q_\epsilon)(x)|\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z_1) ||\delta_{\epsilon z_1} u||_{L^2} ||\delta_{\epsilon z_1} q||_{L^2}\, dz_1 + ||(u - u_\epsilon)||_{L^2} ||(q - q_\epsilon)||_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Pela fórmula (3.40), podemos rescrevemos a diferença $(u - u_\epsilon)$ e $(q - q_\epsilon)$. Isto é,

$$
\begin{aligned}
||\rho_\epsilon(u,q)||_{L^1} \leq &\int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z_1) ||\delta_{\epsilon z_1} u||_{L^2} ||\delta_{\epsilon z_1} q||_{L^2}\, dz_1 \\
&+ \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z_1) j(z_2) ||\delta_{\epsilon z_2} u(x)||_{L^2} ||\delta_{\epsilon z_3} q||_{L^2}\, dz_2\, dz_3.
\end{aligned}
$$

Logo, pelas Proposições 23 e 24. Temos que

$$
||\rho_\epsilon(u,q)||_{L^1} \leq \epsilon^{\frac{3}{2}} ||\nabla u||_{L^2} ||q||_{H^\beta} \left[\int_{\mathbb{T}^2} |z_1|^{\frac{3}{2}} \varphi(z_1)\, dz_1 + \int_{\mathbb{T}^2}\int_{\mathbb{T}^2} |z_2|^{\frac{3}{2}} \varphi(z_2) |z_3|^{\frac{3}{2}} \varphi(z_3)\, dz_2\, dz_3\right]
$$

Dado que o domínio é limitado e φ possui suporte compacto, obtemos a estimativa (B.3). □

Proposição 26. *Sejam $u \in H^1(\mathbb{T}^2)$ e $q \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$. Então,*

$$
||\rho_\epsilon(u,q)||_{L^2} \leq M_2 \epsilon ||q||_{L^\infty} ||\nabla u||_{L^2} \tag{B.4}
$$

Demonstração. Lembrando que ρ_ϵ é definido como:

$$\rho_\epsilon(u,q) := r_\epsilon(u,q) - (u-u_\epsilon)\otimes(q-q_\epsilon).$$

onde

$$r_\epsilon(u,q) = \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z)(\delta_{\epsilon z}u(x)\otimes\delta_{\epsilon z}q(x))\,dz$$

com

$$\delta_{\epsilon z}u(x) = u(x-\epsilon z) - u(x) \quad \text{e} \quad \delta_{\epsilon z}q(x) = q(x-\epsilon z) - q(x).$$

Aplicando a desigualdade de Minkowski, segue-se que:

$$||\rho_\epsilon(u,q)||_{L^2} \leq ||r_\epsilon(u,q)||_{L^2} + ||(u-u_\epsilon)(q-q_\epsilon)||_{L^2}.$$

Logo, estimando a norma L^2 de $r_\epsilon(u,q)$. Obtemos que

$$\begin{aligned} ||r_\epsilon(u,q)||_{L^2} &= \left[\int_{\mathbb{T}^2} |r_\epsilon(u,q)(x)|^2\,dx\right]^{1/2} \\ &= \left[\int_{\mathbb{T}^2} \left|\int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z)\delta_{\epsilon z}u(x)\delta_{\epsilon z}q(x)\,dz\right|^2 dx\right]^{1/2} \end{aligned}$$

Dado que $q \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$, vemos que $||\delta_{\epsilon z}q||_{L^\infty} \leq 2||q||_{L^\infty}$. Por conseguinte,

$$||r_\epsilon(u,q)||_{L^2} \leq M||q||_{L^\infty}\int_{\mathbb{T}^2}\varphi(z)||\delta_{\epsilon z}u||_{L^2}\,dz. \tag{B.5}$$

Por outro lado, pela identidade (3.40), rescrevemos a diferença $(u-u_\epsilon)$ e estimar a norma L^2. Isto é,

$$\begin{aligned} ||u-u_\epsilon||_{L^2} &= \left[\int_{\mathbb{T}^2}\left|\int_{T^2}\varphi(z)\delta_{\epsilon z}u(x)\,dz\right|^2 dx\right]^{1/2} \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^2}\varphi(z)||\delta_{\epsilon z}u||_{L^2}\,dz \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} ||(u-u_\epsilon)(q-q_\epsilon)||_{L^2} &= \left[\int_{\mathbb{T}^2}|(u-u_\epsilon)(x)|^2|(q-q_\epsilon)(x)|^2\,dx\right]^{1/2} \\ &\leq 2||q||_{L^\infty}\left[\int_{\mathbb{T}^2}|(u-u_\epsilon)(x)|^2\,dx\right]^{1/2} \\ &= 2||q||_{L^\infty}||u-u_\epsilon||_{L^2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$||(u-u_\epsilon)(q-q_\epsilon)||_{L^2} \leq M||q||_{L^\infty}\int_{\mathbb{T}^2}\varphi(z)||\delta_{\epsilon z}u||_{L^2}\,dz. \tag{B.6}$$

Juntando (B.5) e (B.6). Obtemos a seguinte estimativa em norma L^2 para $\rho_\epsilon(u,q)$:

$$||\rho_\epsilon(u,q)||_{L^2}^2 \leq M||q||_{L^\infty}\int_{\mathbb{T}^2}\varphi(z)||\delta_{\epsilon z}u||_{L^2}\,dz.$$

Logo, pelas Proposições 24. Temos que

$$||\rho_\epsilon(u,q)||_{L^2}^2 \leq M_2\epsilon||q||_{L^\infty}||\nabla u||_{L^2}.$$

Dessa forma, obtemos a estimativa (B.4). $\square$

APÊNDICE C – Equações da Vorticidade Potencial para as Equações de Camassa-Holm Generalizadas

Em seguida, mostraremos a formulação das equações da vorticidade potencial para as equações de Camassa-Holm generalizadas. Este sistema é importante para nosso trabalho já que, sobre ele estudaremos o fenômeno de dissipação anômala.

Consideramos o sistema de equações de Camassa-Holm generalizado como foi previamente estabelecido em (2.1):

$$\begin{cases} \partial_t v + u \cdot \nabla v + \sum_{j=1} v_j \nabla u_j - \nu \Delta (\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta)^\beta u + \gamma v &= -\nabla p + f \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ v &= (\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta) u. \end{cases} \tag{C.1}$$

Lembrando que em dimensão 2, o operador de vorticidade **Curl**, é definido em (2.12) como sendo:

$$\mathbf{Curl}(\cdot) = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1}).$$

Aplicando o operador **Curl** às equações (C.1), e considerando a vorticidade potencial definido por $q = \mathbf{Curl}(v)$, temos que

$$\begin{cases} \mathbf{Curl}\Big(\partial_t v + u \cdot \nabla v + \sum_{j=1} v_j \nabla u_j - \nu \Delta (\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta)^\beta u + \gamma v &= -\nabla p + f\Big) \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ \mathbf{Curl}((\mathbb{I} - \alpha^2 \Delta) u) &= q. \end{cases}$$

Suponhamos que $g = \mathbf{Curl}(f)$. É claro que $\mathbf{Curl}(\nabla p) = 0$ e que o termo de amortecimento esta definido por:

$$\mathbf{Curl}(\gamma v(x,t)) = \gamma q(x,t). \tag{C.2}$$

Dado que os operadores ∂_t e **Curl** comutam, temos que

$$\mathbf{Curl}(\partial_t v) = \partial_t(\mathbf{Curl}(v)) = \partial_t q. \tag{C.3}$$

A seguir, examinamos o termo não linear:

$$\mathbf{Curl}\left(u \cdot \nabla v + \sum_{j=1} v_j \nabla u_j\right) = \mathbf{Curl}\Big(u \cdot \nabla v\Big) + \sum_{j=1}^{2} \mathbf{Curl}\Big(v_j \nabla u_j\Big).$$

Analisando cada termo por separado, vemos que o primeiro termo pode-se rescrever:

$$\begin{aligned}
-\partial_{x_2}(u_1\partial_{x_1}v_1 + u_2\partial_{x_2}v_1) &= -\partial_{x_2}u_1\partial_{x_1}v_1 - u_1\partial_{x_2}\partial_{x_1}v_1 - \partial_{x_2}u_2\partial_{x_2}v_1 - \partial^2_{x_2}v_1u_2\\
&= -\partial_{x_2}u_1\partial_{x_1}v_1 - \underline{u_1\partial_{x_1}(\partial_{x_2}v_1)} - \partial_{x_2}u_2\partial_{x_2}v_1 - \underline{u_2\partial_{x_2}(\partial_{x_2}v_1)}\\
&= (u\cdot\nabla)(-\partial_{x_2}v_1)\ -\ \partial_{x_2}u_1\partial_{x_1}v_1 - \partial_{x_2}u_2\partial_{x_2}v_1
\end{aligned}$$

Por outro lado, continuamos analisando a segunda componente do vetor **Curl**:

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1}(u\cdot\nabla)v_2 &= \partial_{x_1}(u_1\partial_{x_1}v_2 + u_2\partial_{x_2}v_2)\\
&= \partial_{x_1}u_1\partial_{x_1}v_2 + \underline{u_1\partial_{x_1}(\partial_{x_1}v_2)} + \partial_{x_1}u_2\partial_{x_2}v_2 + \underline{u_2\partial_{x_2}(\partial_{x_1}v_2)}\\
&= (u\cdot\nabla)(\partial_{x_1}v_2)\ +\ \partial_{x_1}u_1\partial_{x_1}v_2 + \partial_{x_1}u_2\partial_{x_2}v_2.
\end{aligned}$$

A segunda parte do termo não linear pode-se rescrever:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2}\nabla^{\perp}\cdot\Big(v_j\nabla u_j\Big) &= \sum_{j=1}^{2}\Big[-\partial_{x_2}(v_j\partial_{x_1}u_j) + \partial_{x_1}(v_j\partial_{x_2}u_j)\Big]\\
&= \sum_{j=1}^{2}\Big[-\partial_{x_2}v_j\partial_{x_1}u_j - \underline{v_j\partial_{x_2}(\partial_{x_1}u_j)} + \partial_{x_1}v_j\partial_{x_2}u_j + \underline{v_j\partial_{x_1}(\partial_{x_2}u_j)}\Big]\\
&= \sum_{j=1}^{2}\Big[-\partial_{x_2}v_j\partial_{x_1}u_j + \partial_{x_1}v_j\partial_{x_2}u_j\Big]\\
&= -\partial_{x_2}v_1\partial_{x_1}u_1 + \partial_{x_1}v_1\partial_{x_2}u_1 - \partial_{x_2}v_2\partial_{x_1}u_2 + \partial_{x_1}v_{x_2}\partial_{x_2}u_2\\
&= \partial_{x_2}v_1\partial_{x_2}u_2 + \partial_{x_1}v_1\partial_{x_2}u_1 -\ \partial_{x_2}v_2\partial_{x_1}u_2 - \partial_{x_1}v_2\partial_{x_1}u_1,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade é pelo fato que o campo u tem divergência nula. Por todo o anterior, temos que

$$\mathbf{Curl}\left(u\cdot\nabla v + \sum_{j=1} v_j\nabla u_j\right) = (u\cdot\nabla)\mathbf{Curl}(v) = (u\cdot\nabla)q \tag{C.4}$$

Para o termo viscoso, observe que:

$$(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta}u(x,t) = (\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{-1}(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u(x,t)$$

Desse modo, o termo viscoso das equações de Camassa-Holm generalizadas pode-se rescrever como:

$$(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta}u(x,t) = (\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}v(x,t).$$

Logo, aplicamos o fato que o operador **Curl** comuta com o operador de Bessel$-\alpha$, e obtemos que:

$$\mathbf{Curl}\Big((\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta}u(x,t)\Big) = (\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}q(x,t). \tag{C.5}$$

Juntando (C.2), (C.3), (C.4) e (C.5) obtemos o sistema de equações:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\partial_t q + u\cdot\nabla q - \nu\Delta(\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)^{\beta-1}q + \gamma q &=& g\\
\mathbf{Curl}((\mathbb{I}-\alpha^2\Delta)u) &=& q\\
\nabla\cdot u &=& 0.
\end{array}\right. \tag{C.6}$$

O sistema (C.6) é chamado de **Equações da Vorticidade Potencial**.