



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE ECONOMIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS

Pedro Ribeiro Dager Aguiar

A RELAÇÃO DOS CONTRATOS FUTUROS DO S&P500 E DO BARRIL DE PETRÓLEO
SOBRE AS AÇÕES DA PRIO: UM ESTUDO ECONOMÉTRICO DE MODELOS TIPO
ARIMAX-EGARCH

Rio de Janeiro

2024

Pedro Ribeiro Dager Aguiar

A RELAÇÃO DOS CONTRATOS FUTUROS DO S&P500 E DO BARRIL DE PETRÓLEO
SOBRE AS AÇÕES DA PRIO: UM ESTUDO ECONOMETRICO DE MODELOS TIPO
ARIMAX-EGARCH

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto de Economia da Universidade
Federal do Rio de Janeiro como exigência para
obtenção do título de Bacharel em Ciências
Econômicas.

Orientadora: Professora Dra. Susan Schommer

Rio de Janeiro

2024

CIP - Catalogação na Publicação

R282r Ribeiro Dager Aguiar, Pedro
A RELAÇÃO DOS CONTRATOS FUTUROS DO PETRÓLEO BRUTO
E DO ÍNDICE S&P500 SOBRE AS AÇÕES DA EMPRESA
PETRORIO: UM ESTUDO ECONÔMETRICO DE MODELOS TIPO
ARIMAX-EGARCH / Pedro Ribeiro Dager Aguiar. -- Rio
de Janeiro, 2024.
41 f.

Orientadora: Susan Schommer.
Trabalho de conclusão de curso (graduação) -
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto
de Economia, Bacharel em Ciências Econômicas, 2024.

1. Mercado de Petróleo. 2. Modelo ARIMAX-EGARCH.
3. Hipótese de mercado eficiente. 4. Distribuição
Skew-Student. 5. Commodities. I. Schommer, Susan,
orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

PEDRO RIBEIRO DAGER AGUIAR

A RELAÇÃO DOS CONTRATOS FUTUROS DO S&P500 E DO BARRIL DE PETRÓLEO
SOBRE AS AÇÕES DA PRIO: UM ESTUDO ECONOMÉTRICO DE MODELOS TIPO
ARIMAX-EGARCH

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao
Instituto de Economia da Universidade Federal do
Rio de Janeiro, como requisito para a obtenção do
título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Rio de Janeiro, 08/03/2024.

SUSAN SCHOMMER - Presidente

Professora Dra. do Instituto de Economia da UFRJ

ANTONIO LUIS LICHIA

Professor Dr. do Instituto de Economia da UFRJ

GETÚLIO BORGES DA SILVEIRA FILHO

Professor Dr. do Instituto de Economia da UFRJ

RESUMO

O presente estudo investiga a relação *intraday* entre as cotações correntes das ações da empresa PRIO e o mercado futuro do petróleo bruto e do índice S&P500, em frequências de 5 e 15 minutos. Assim, buscando expandir a abrangência de análises relativas aos movimentos de ativos financeiros ligados à produção de commodities e os preços futuros dessas commodities. A análise tem por objetivo investigar vários modelos univariados para ajustar as séries, além de distribuições apropriadas. Conclui-se que o modelo que melhor absorve as características particulares das variáveis (pela avaliação de testes especificação e consideração dos AIC's resultantes) para ambas as frequências é um modelo ARIMAX-EGARCH com uma distribuição *Skew-Student* para os erros. Os coeficientes referentes aos contratos futuros do petróleo bruto e do índice S&P500 mostraram-se estatisticamente significantes e positivas, indicando resultados convergentes em ambas frequências, e que o impacto do índice S&P500 mostrou-se mais elevado do que o do petróleo bruto.

Palavras-chave: Mercado de Petróleo; Modelo ARIMAX-EGARCH; PRIO.

ABSTRACT

The present study investigates the intraday relationship between the current stock quotes of the company PRIO and the futures market of crude oil and the S&P500 index, at frequencies of 5 and 15 minutes. Thus, aiming to expand the scope of analysis regarding the movements of financial assets linked to commodity production and the future prices of these commodities. The analysis aims to investigate several univariate models to fit the series, as well as appropriate distributions. It is concluded that the model that best absorbs the particular characteristics of the variables (through the evaluation of specification tests and consideration of the resulting AICs) for both frequencies is an ARIMAX-EGARCH model with a Skew-Student distribution for the errors. The coefficients related to crude oil and S&P500 futures contracts were statistically significant and positive, indicating convergent results at both frequencies, and that the impact of the S&P500 index was higher than that of the crude oil.

Keywords: Petroleum Market; ARIMAX-GARCH model; PRIO.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Gráficos dos logarítmos das séries em nível.....	22
Figura 2 - Gráficos dos retornos das séries.....	23
Figura 3 - Gráficos dos retornos ao quadrado das séries.....	23
Figura 4 - Densidade da distribuição de resíduos - frequência de 15 minutos.....	27
Figura 5 - Densidade da distribuição de resíduos - frequência de 5 minutos.....	30

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coeficientes das variáveis exógenas nos modelo.....	29
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADF	<i>Augmented Dickey-Fuller</i>
AIC	<i>Akaike Information Criterion</i>
AR	<i>Autoregressive</i>
ARCH	<i>Autoregressive Conditional Heteroskedasticity</i>
ARIMA	<i>Autoregressive Integrated Moving Average</i>
ARIMAX	<i>Autoregressive Integrated Moving Average with Exogenous Inputs</i>
ARMA	<i>Autoregressive Moving Average</i>
ARMAX	<i>Autoregressive Moving Average with Exogenous Inputs</i>
BIC	<i>Bayesian Information Criterion</i>
CLc1	Código da cotação do futuro de petróleo bruto com vencimento mais curto negociado na NYMEX
CME	<i>Chicago Mercantile Exchange</i>
CRB	<i>Commodity Research Bureau</i>
DF	Dickey-Fuller
EGARCH	<i>Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity</i>
ESc1	Código da cotação do futuro do índice S&P500 com vencimento mais curto negociado na CME
GARCH	<i>Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity</i>
HQIC	<i>Hannan-Quinn Information Criterion</i>
IBOVESPA	Índice da Bolsa de Valores do Estado de São Paulo
KPSS	Teste de Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin
MA	<i>Moving Averages</i>
NYMEX	<i>New York Mercantile Exchange</i>
NYSE	<i>New York Stock Exchange</i>
PBR	Código das ações ordinárias da empresa Petrobras negociadas na bolsa de Nova Iorque
PETR4	Código das ações preferenciais da empresa Petrobras negociadas na bolsa B3
PGARCH	<i>Power Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity</i>
PRIO3	Código das ações ordinárias da empresa PRIO negociadas na bolsa B3
VALE5	Código das ações preferenciais da empresa Vale negociadas na bolsa B3

S&P500	<i>Standard & Poor's 500</i>
TGARCH	<i>Threshold Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity</i>

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 REFERENCIAL TEÓRICO	13
3 DADOS E METODOLOGIA	15
3.1 MODELOS ECONOMETRICOS E METODOLOGIA	15
3.1.1 Modelos ARMA	15
3.1.2 Modelos ARIMA	16
3.1.3 Modelos ARMAX	16
3.1.4 Modelos ARCH e GARCH	16
3.1.5 Modelos EGARCH e alternativos ao GARCH	17
3.1.6 Modelos de distribuição	18
3.1.7 Método de avaliação dos modelos	18
3.1.8 Teste de raiz unitária	19
3.1.9 Teste de Heterocedasticidade Condicional	20
3.2 BASE DE DADOS	21
4 RESULTADOS	22
4.1. FREQUÊNCIA DE 15 MINUTOS	24
4.1.1 Testando a estacionariedade das séries	24
4.1.2 Ajustando um modelo ARIMAX	24
4.1.3 Testando o ARIMAX gerado para heterocedasticidade	25
4.1.2 Ajustando um modelo ARIMAX-GARCH	25
4.1.2 Ajustando um modelo ARIMAX-EGARCH	26
4.2. FREQUÊNCIA DE 5 MINUTOS	27
4.2.1 Testando a estacionariedade das séries	27
4.2.2 Ajustando um modelo ARIMAX	27
4.2.3 Testando o ARIMAX gerado para heterocedasticidade	28
4.2.4 Ajustando um modelo ARIMAX-GARCH	28
4.2.5 Ajustando um modelo ARIMAX-EGARCH	28
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	30
REFERÊNCIAS	32
APÊNDICE A – RESULTADOS DO MODELO ARIMAX COM FREQUÊNCIA DE 15 MINUTOS	35
APÊNDICE B – RESULTADO DO TESTE ARCH-LM DO MODELO ARIMAX COM FREQUÊNCIA DE 15 MINUTOS	36

APÊNDICE C – AJUSTE DO MODELO ARIMAX-GARCH DO MODELO DE FREQUÊNCIA 15 MINUTOS.....	37
APÊNDICE D – AJUSTE DO MODELO ARIMAX-EGARCH DO MODELO DE FREQUÊNCIA 15 MINUTOS.....	38
APÊNDICE E – COEFICIENTES DOS MODELOS DA FREQUÊNCIA DE 15 MINUTOS, LADO-A-LADO	39
APÊNDICE F – TESTES DE ESPECIFICAÇÃO DO MODELO ARIMAX-EGARCH PARA 15 MINUTOS.....	40
APÊNDICE G – RESULTADOS DO MODELO ARIMAX COM FREQUÊNCIA DE 5 MINUTOS.....	41
APÊNDICE H – RESULTADO DO ARCH-LM DO MODELO ARIMAX COM FREQUÊNCIA DE 5 MINUTOS	42
APÊNDICE I – AJUSTE DO MODELO ARIMAX-GARCH DO MODELO DE FREQUÊNCIA 5 MINUTOS.....	43
APÊNDICE J – AJUSTE DO MODELO ARIMAX-EGARCH DO MODELO DE FREQUÊNCIA 5 MINUTOS.....	44
APÊNDICE K – COEFICIENTES DOS MODELOS DA FREQUÊNCIA DE 5 MINUTOS, LADO-A-LADO	45
APÊNDICE L – TESTES DE ESPECIFICAÇÃO DO MODELO ARIMAX-EGARCH PARA 5 MINUTOS.....	46

1 INTRODUÇÃO

A relação do movimento dos preços das ações de empresas ligadas a produção (como atividade fim) de *commodities* e o preço das respectivas *commodities*, vem sendo investigada por diferentes estudos, buscando melhor capacitar as modelagens presentes e representar de forma mais eficiente as diferentes flutuações dos mercados de ativos financeiros. Modelagens, essas, que podem manifestar defasagens na assimilação de informações dos mercados financeiros internacionais no contexto nacional.

Para o aprofundamento da investigação do objeto, Santos *et al.* (2015) ressalta que alterações no preço internacional do petróleo afetam tanto o valor do ativo de empresas ligadas a essa *commodity*, quanto o valor de mercado dessas companhias. Isso pois, uma empresa cuja atividade fim seja a venda de *commodities* tem seu fluxo de caixa alterado dada a variação do preço da respectiva *commodity*. Igualmente, estendendo para uma perspectiva futura, os preços futuros das *commodities* irão afetar o fluxo de caixa futuro da empresa, alterando, por fim, projeções correntes que são utilizadas para auferir o valor justo da empresa.

Dessa forma, Huang *et al.* (1996) estabelecem que, na hipótese de mercados eficientes, preços futuros do petróleo e as cotações das ações estarão contemporaneamente correlacionados. Ou seja, assumindo a disponibilização e assimilação completa da informação pelo mercado, o preço internacional futuro do barril de petróleo afetaria o preço das ações ordinárias da empresa PRIO (código na bolsa de valores B3: PRIO3), antiga PetroRio.

Contudo, como tratam-se de mercados de usuários diferentes, não é evidente a completa integração dos mercados. Portanto, a informação disponibilizada no mercado internacional pode não estar sendo totalmente absorvida pelo mercado nacional de forma simultânea ao mercado estrangeiro. Sendo de interesse captarmos qual a magnitude dessa transmissão.

A empresa PRIO é uma produtora brasileira independente de produção de óleo e gás. Iniciou sua trajetória em 2015, primeiramente com nome de PetroRio. Em 2023, a empresa produziu aproximadamente 90 mil de barris de petróleo por dia, com uma receita líquida de US\$ 2,6 bilhões.

Vale ressaltar que a escolha da variável PRIO3 representa tanto uma alteração no escopo de análise (evidente, por se tratar de outro ativo) em relação a Santos *et al.* (2015) mas também uma forma de melhor destrinchar os impactos de cada fator analisado, dado que as ações da Petrobras por serem também negociadas na bolsa de Nova Iorque (Código na NYSE: PBR), poderiam indicar para uma assimilação de informações mais eficiente do que de um ativo que fosse negociado apenas na bolsa B3 (como as ações da empresa PRIO).

De forma geral, o presente estudo busca quantificar o impacto dos contratos futuros do barril de petróleo e do S&P500 nas ações da PRIO. Assim, agregando ao escopo de análises referentes às ações de empresas produtoras de *commodities* e os contratos futuros de suas respectivas *commodities*, assim como da influência do principal mercado acionário do mundo (representado pelo índice S&P500). Análises essas que se tornam essenciais para o melhor entendimento das relações de mercados futuros acionários e de *commodities*. Para isso, busca-se o ajuste de modelos econométricos apropriados às características financeiras dos ativos, além da seleção de uma empresa com características específicas como variável dependente, com intuito de remover possíveis ruídos advindos de ativos negociadas em bolsas internacionais.

Ou seja, idealiza-se, ao final do estudo: (i) investigar os coeficientes dos modelos estabelecidos, para que possamos determinar os fatores de maior relevância no movimento da cotação de PRIO3; (ii) através da metodologia aplicada, seja possível contribuir para futuras modelagens de séries de características semelhantes; (iii) dada a escolha de PRIO3 como variável dependente, se estabeleçam contribuições referentes aos efeitos (ou a ausência deles) da assimilação de informações de *commodities* (em específico o petróleo) em empresas do mercado acionário brasileiro.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

É notável que a bibliografia existente não se contenta com apenas uma forma de modelagem, englobando diferentes métodos, áreas de conhecimento e escopos de análise.

De forma mais abrangente, podemos ressaltar Nogueira e Ferreira (2010), que se utilizaram de modelos autorregressivos para analisar o Índice Bovespa (IBOVESPA; índice composto pelas principais ações negociadas no Balcão da B3) e o *Commodity Research Bureau* (CRB; índice ponderado das principais *commodities* negociadas no mercado internacional), encontrando uma correlação direta dos índices em diferentes períodos de observação.

A partir disso, podemos tentar encontrar relações mais específicas, excluindo da análise empresas nacionais que não possuem como atividade primária a produção de *commodities* como atividade fim. Para isso, estudos de caso tornam-se fundamentais para tal, como em: Regina *et al.* (2012), que desenvolve um estudo de caso (utilizando um método de correlação linear) referente às empresas Petrobras (as ações preferenciais, PETR4) e Vale (representada por VALE5 na B3), e os preços internacionais de suas respectivas *commodities*: barril de petróleo bruto *West Texas* e o minério de ferro. Os resultados, porém, diferem-se dos esperados pela hipótese que seria desenvolvida, já que a correlação linear encontrada foi baixa (curiosamente, a correlação linear mais alta encontrada foi em relação a ação da Vale e o Petróleo bruto West Texas, que não representa sua atividade fim).

Por outro lado, Keller (2015) utiliza um modelo contabilométrico (também baseado na análise de correlações lineares) para auferir a existência de uma flutuação conjunta entre o preço de VALE5 e o preço do minério de ferro, encontrando uma forte correlação linear. Vale notar que o próprio autor ressalta a divergência dos resultados encontrados no estudo com os de Regina *et al.* (2012), indicando que a divergência seria possivelmente resultante da mudança de correlação entre períodos diferentes.

Similarmente, Da Silva (2011) encontra tendências de flutuações conjuntas do mercado futuro internacional do barril de petróleo e das ações preferenciais da Petrobras negociadas na B3, utilizando-se de diferentes modelos econométricos e frequências (tanto intradiárias quanto mensais). Todos indicando para a mesma conclusão de forte relação das cotações.

Por fim, focado na relação *intraday* e oportunidades de arbitragem, podemos ressaltar Santos *et al.* (2015) O artigo analisa a relação dos preços correntes das ações preferenciais da Petrobras (PETR4), dos contratos futuros do índice de S&P500 (Standard & Poor's 500; índice composto por quinhentos ativos cotados nas bolsas de Nova Iorque) e dos contratos futuros do

petróleo negociado no mercado internacional através de realizações de testes de Causalidade de Granger e a aplicação de modelos de autorregressão vetorial para capturar as relações de interdependência das séries temporais em frequências de 5 e 15 minutos. Como resultado, foi apontado que (na frequência de 5 minutos) o contrato futuro Granger causa a ação PETR4 e há uma correlação positiva entre a variação do preço do contrato futuro e a variação de preço da ação no período seguinte. Já para a frequência de 15 minutos, tanto os contratos futuros do petróleo, quanto do S&P500, Granger causam PETR4.

De forma resumida, o estudo corrente baseia-se na seguinte análise presente em Santos *et al.* (2015):

Desta maneira, nosso objetivo neste artigo é aferir causalidade entre os mercados supracitados (...). (SANTOS *et al.*, 2015, p. 5).

3 DADOS E METODOLOGIA

O presente estudo apresenta duas análises diferentes com dois grupos de dados. Primeiramente, foram modelados os dados das cotações de PRIO3, as cotações do contrato futuro mais curto do petróleo bruto (denominado pelo código “CLc1”) e as cotações do contrato futuro mais curto do índice S&P500 (denominado pelo código “ESc1”) para a frequência de 15 minutos. Posteriormente, foram modelados esses mesmos dados para a frequência de 5 minutos.

3.1 MODELOS ECONOMÉTRICOS E METODOLOGIA

Por questão de simplicidade da modelagem, primeiro tentou-se ajustar um modelo ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*) com duas variáveis explicativas para remover, caso presente, a correlação serial na série. Contudo, nota-se que um fator comum em séries financeiras é a presença de heterocedasticidade condicional, ou seja, a volatilidade de ativos financeiros não costuma ser constante ao longo do tempo. Nesse sentido, Brooks (2008) indica que a utilização de modelos lineares (como o ARMA (*Autoregressive Moving Average*)) podem apresentar resultados limitados quanto a capacidade de captura de fatores comuns a séries financeiras (tendência de retornos apresentarem “caudas” longas e um excesso de picos na média; volatilidade aparece em grupos, ou seja, retornos longos tendem a ser seguidos de mais retornos longos, e vice-versa; tendência da volatilidade de elevar-se mais em uma queda de preço que em um aumento de preço, ambos de mesma magnitude). Assim, recomenda-se a utilização de modelos tipo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) e GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) para modelar processos que não possuam homocedasticidade condicional. Sendo assim, primeiramente, foi realizada a modelagem de um ARMAX (*Autoregressive Moving Average with Exogenous Inputs*) para a média e, utilizando os resíduos desse modelo, ajustou-se um modelo GARCH.

3.1.1 Modelos ARMA

De forma geral, podemos definir um modelo ARMA(p,q) de acordo com a equação:

$$Y_t = \mu + (\Phi_1 Y_{t-1} + \dots + \Phi_p Y_{t-p}) + (\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}) + \varepsilon_t \quad (1)$$

Sendo a parte autoregressiva de ordem p - AR(p) - e a parte de médias móveis de ordem q - MA(q). A partir desse modelo, podemos capturar tanto valores defasados de Y_t , por meio da perna AR, quanto valores defasados do erro (ε_t). Há de se notar, contanto, que esse modelo possui como condição que o processo AR seja estacionário, e o processo MA seja inversível.

3.1.2 Modelos ARIMA

Os modelos ARIMA incluem o termo “I” (de “Integrado”) ao modelo ARMA. A adição desse termo serve para descrever séries cuja equação característica possui raiz em seu círculo unitário. Os parâmetros de um ARIMA se dão por: ARIMA (p,d,q); sendo “ p ” e “ q ” os mesmos do modelo ARMA e “ d ” o número de diferenciações. Para simplificação da análise, Brooks (2008) ressalta que é comum diferenciar a série de acordo com a necessidade (até rejeitar a hipótese nula de presença de raiz unitária) e construir um modelo ARMA em cima da série já diferenciada. Isso pois, um ARMA (p,q) com a série diferenciada “ d ” vezes é equivalente a um ARIMA (p,d,q) na série original.

Portanto, na parte prática desse estudo, utilizar-se-á a notação de tipo ARIMA (p,d,q) apenas para ressaltar o número de diferenças estabelecidas, a modelagem, em si, será feita com as séries já diferenciadas.

3.1.3 Modelos ARMAX

Os modelos ARMAX, por sua vez, estendem os modelos ARMA, adicionando regressores exógenos. De acordo com Monte *et al.* (2015), podemos definir um modelo ARMAX genérico como:

$$Y_t = \mu + \left(\sum_{i=1}^p \Phi_i Y_{t-i} \right) + \left(\sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \right) + \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k X[t,k] \right) + \varepsilon_t \quad (2)$$

Sendo o termo *Lambda* um vetor de coeficientes da matriz de componentes exógenos regressivos e X a matriz de componentes exógenos.

3.1.4 Modelos ARCH e GARCH

Engle (1982) propôs o modelo não linear ARCH, considerando que a variância do erro tem distribuição normal e dependente dos termos de erros quadráticos defasados. De acordo com Kobunda e Júnior (2019) o formato de ARCH (p) pode ser definido como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \sigma_t u_t, \quad u_t \sim \text{i.i.d} \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2\end{aligned}\quad (3)$$

sendo o parâmetro “p” o número de defasagens do retorno, e o erro “ u_t ” são as variáveis aleatórias com média 0 e variância 1.

Mais à frente, Bollerslev (1986) propôs uma extensão do modelo anterior, com intuito de ampliar o conjunto de informação utilizado e obter uma formulação mais parcimoniosa Tibulo (2014). Assim, Brooks (2008) define o modelo GARCH (p,q) como:

$$\sigma_t^2 = \omega + \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \right) + \left(\sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \right) \quad (4)$$

Sendo o parâmetro “q” referente à parte ARCH do modelo, ou seja, dependente das defasagens do erro quadrado. E o parâmetro “p” referente a generalização, ou seja, as defasagens da variância condicional.

3.1.5 Modelos EGARCH e alternativos ao GARCH

Proposto por Nelson (1991), o modelo EGARCH (*Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) permite a absorção de impactos assimétricos e a possibilidade de coeficientes negativos, através da adição de um termo de especificação logarítmica. Assim, de acordo com Kobunda e Júnior (2019) podemos definir o modelo EGARCH (p,q,r) como:

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i [|u_{t-i}| - E(|u_{t-i}|)] + \sum_{k=1}^r \gamma_k u_{t-k} \quad (5)$$

Sendo $u_t = (\varepsilon_t) / (\sigma_t)$. O fato de ter sido aplicado o logaritmo na variância impede que ela seja negativa, assim, os parâmetros do modelo tornam-se responsáveis pelo impacto negativo. O parâmetro *Gamma*, por sua vez, é relacionado à assimetria dos efeitos, sendo:

- (i) $\gamma_k = 0$, para todo k , os impactos na volatilidade de um choque positivo são iguais (desde que tratam-se da mesma magnitude) de um choque negativo. Esse fenômeno é chamado de “Impacto Simétrico”;
- (ii) $\gamma_k \neq 0$, o impacto é Assimétrico. Sendo $\gamma_k < 0$, há presença do “Efeito Alavancagem”, característica comum às séries financeiras, em que choques negativos geram impactos de maior magnitude do que choques positivos.

Apesar de tratarmos apenas de modelos EGARCH nesse estudo (por serem suficientes ao propósito da análise corrente), diversas opções de modelos alternativos estão disponíveis para ajustar diferentes características. Dentre os mais relevantes, podemos citar: TGARCH (*Threshold Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), que impõe um aumento de volatilidade após um choque negativo; PGARCH (*Power Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) que permite a captura de um processo de memória longa, além da assimetria; etc.

3.1.6 Modelos de distribuição

É notável que uma característica das séries financeiras de alta frequência é a presença de uma distribuição de “cauda longa”, ou seja, curtose alta. De acordo com Lambert e Laurent (2002) para melhor acomodar essa característica, modelos GARCH comumente têm sido combinados com uma distribuição Student para os erros, conforme proposto por Bollerslev (1986). Esse tipo de ajuste resulta em um modelo mais bem acomodado que com uma distribuição normal, ou gaussiana.

Porém, a densidade Student não ajusta para outro fator considerável desse tipo de série: a assimetria, dado que a distribuição Student é, por *design*, simétrica. Nesse sentido, Fernandez e Steel (1998) propuseram a adição de um fator de “deslocamento”, resultando em uma distribuição do tipo “*Skew-Student*”. Essa alteração permite a chance de capturarmos valores extremos, comumente presente em finanças, que não seria observada na distribuição Student.

3.1.7 Método de avaliação dos modelos

Para avaliação dos modelos ajustados é comum usarmos algum tipo de critério de informação. De acordo com Brooks (2008) esses critérios se baseiam em dois fatores: um termo que é uma função da soma dos resíduos quadrados e alguma penalidade pela adição de novas variáveis explicativas ou defasagens adicionais (reduzindo os graus de liberdade do modelo). Portanto, a análise pelo critério de informação escolhido será de auferir qual modelo minimiza o valor do parâmetro, em um balanço de maior capacidade explicativa da série e, ao mesmo tempo, maior grau de liberdade possível.

Os três critérios mais comumente utilizados são: AIC (Akaike (1974)); BIC (Schwarz (1978)); HQIC. Podemos representá-los como:

$$AIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2k}{T} \quad (6)$$

$$BIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{k}{T} \ln T \quad (7)$$

$$HQIC = \ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2k}{T} \ln(\ln(T)) \quad (8)$$

Sendo *Sigma* chapéu ao quadrado a variância residual. A variável “k”, por sua vez, é o total de parâmetros estimados no modelo e “T” é o tamanho da amostra. Fica claro que o BIC apresenta a maior punição para a adição de novos termos no modelo e o AIC a menor, enquanto que o HQIC apresenta um meio-termo entre os três critérios.

No presente estudo, optar-se-á pelo uso do critério AIC, dada a sua utilização mais frequente, porém ressalta-se sua tendência de selecionar um modelo mais amplo.

3.1.8 Teste de raiz unitária

Apesar de podermos ressaltar alguns testes diferentes para verificar a estacionariedade da série (não presença de raiz unitária), os mais utilizados são: Teste de Dickey-Fuller (DF); Teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF); Phillips-Perron; KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin).

O teste DF foi inicialmente desenvolvido por Dickey e Fuller (Fuller (1976); Dickey e Fuller (1979)). Desenvolveu-se um teste de estacionariedade baseado em um processo AR(1) definido por:

$$Y_t = \Phi Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (9)$$

Brooks (2008) explicita que o interesse do teste é investigar a hipótese de que $\Phi = 1$, contra a alternativa de que $\Phi < 1$. Ou seja, podemos estabelecer que a hipótese nula e a hipótese não nula são:

- (i) H_0 : série contém raiz unitária
- (ii) H_1 : série é estacionária

O teste ADF, por sua vez, é uma extensão do anterior, adicionando defasagens para a variável testada. Assim, podemos definir o modelo aumentado por:

$$\Delta Y_t = \mu + \alpha Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \lambda_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (10)$$

O teste busca avaliar a hipótese nula de que $\alpha = 0$, contra a hipótese de que $\alpha < 1$. Ou seja, definimos que:

- (i) H_0 : série contém raiz unitária
- (ii) H_1 : série é estacionária

Dessa forma, uma rejeição da hipótese nula indicaria que $\alpha < 1$ e, portanto, a série é estacionária.

3.1.9 Teste de Heterocedasticidade Condicional

A não modelagem da heterocedasticidade em séries financeiras pode limitar consideravelmente a capacidade de análise e previsão do modelo, por não captar importantes características das variáveis. Engle (1982) ressalta que os modelos econométricos da época, em geral, não levavam em consideração que a variância condicional pudesse depender do período ‘t-1’ e que o *approach* padrão de ajuste para heterocedasticidade era insatisfatório para a utilização em modelos de séries temporais. Assim, pouco se considerava a correção quando tratando de modelos desse tipo.

Existem diferentes testes para verificar a presença de heterocedasticidade no modelo (conforme ressaltado acima, a correção já era feita antes mesmo da aplicação em modelos de séries temporais). Podemos destacar o teste de Breusch-Pagan (conforme proposto em Breusch e Pagan (1979)), que é mais abrangente quanto a heterocedasticidade.

Contudo, na parte prática, seguiremos com o “teste ARCH-LM_h” proposto em Engle (1982), sendo ele o mais apropriado para o escopo desse trabalho. De acordo com Kobunda e Júnior (2019) o teste considera uma regressão caracterizada por:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + u_t \quad (11)$$

A partir disso, definimos o teste de acordo com a Equação 12. De tal forma que a hipótese nula seja de homocedasticidade, contra a hipótese não-nula de heterocedasticidade condicional:

$$\begin{aligned} H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_h = 0 \\ H_1 : \alpha_1 \neq 0, \text{ ou } \alpha_2 \neq 0, \text{ ou } \dots \text{ ou } \alpha_h \neq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

3.2 BASE DE DADOS

Todos os dados foram retirados da plataforma Refinitiv, considerando as cotações de fechamento, com início em 1 de novembro de 2022 às 10:30h e término em 27 de abril de 2023 às 16:30h. As datas de início e final foram escolhidas de acordo com a disponibilidade dos dados na plataforma, capturando o período mais extenso disponível. Nota-se que como as ações da PRIO3 são negociadas na B3 e os contratos futuros são negociados em bolsas estrangeiras, optou-se por capturar apenas valores em períodos que os três ativos estivessem sendo negociados. Além disso, optou-se por excluir os 30 minutos iniciais e finais de funcionamento da B3, para não incluir pequenas flutuações na análise.

O processo de coleta de dados seguiu o seguinte fluxo: extração, limpeza e tratamento de dados. Sendo assim, podemos definir o processo como: (i) extração dos dados para frequências de 5 e 15 minutos; (ii) retirada de dias com a maioria dos valores ausentes para alguma das variáveis; (iii) *input* de valores para cotações não disponíveis em horários pontuais.

Em relação ao ponto (ii), primeiro fez-se a retirada de acordo com a frequência de 5 minutos, dado que essa seria a amostra com o maior número de valores indisponíveis (isso inclui: feriados, fins de semana, horários de não-negociação dos ativos e outros *missing values*). Assim, seguiu-se a retirada dos mesmos dias para a amostra com frequência de 15 minutos, com intuito de manter o mesmo escopo de análise e dar mais robustez aos resultados finais. Ao final, foram retiradas da análise as seguintes datas: 02/11/2022, 15/11/2022, 16/12/2022,

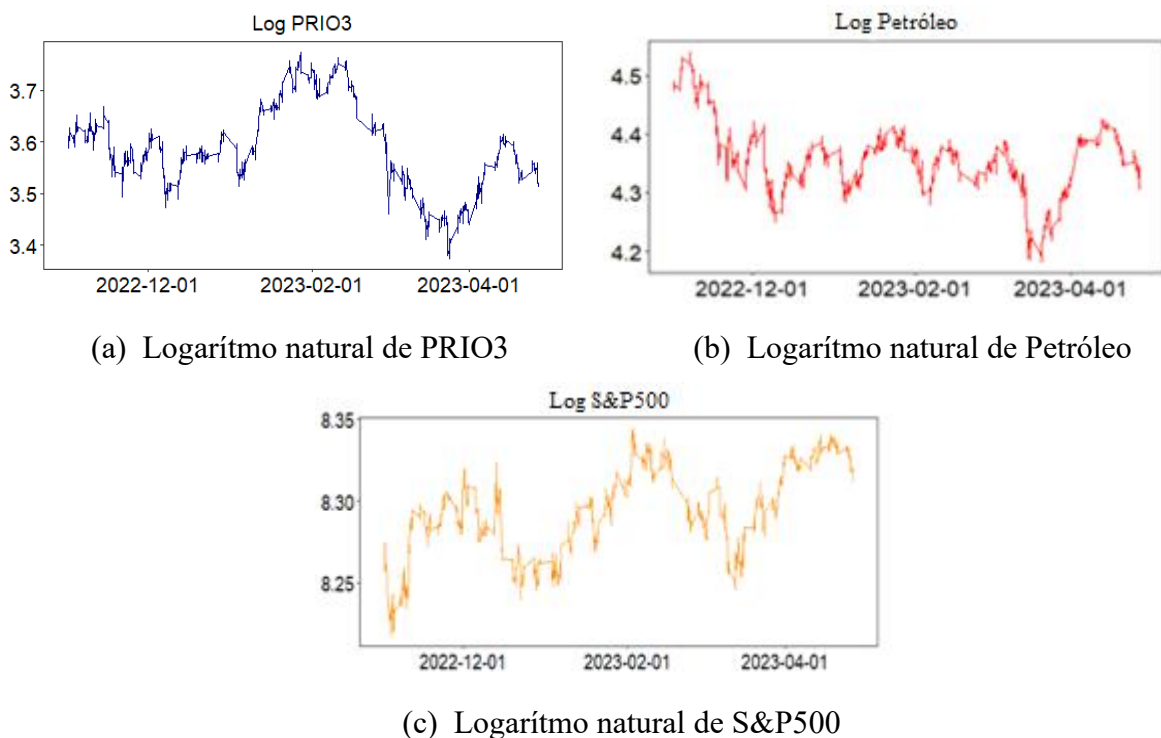
26/12/2023, 30/12/2022, 02/01/2023, 20/02/2023, 21/02/2023, 22/02/2023, 17/03/2022, 07/04/2023, 21/04/2023.

Adiante, em relação ao ponto (iii), optou-se apenas por imputar o último valor disponível antes do *missing value*. Outros métodos foram analisados, porém como o número de total de *inputs* não representava uma fração grande da amostra, a escolha se deu pela simplicidade do método. Na amostra de frequência de 5 minutos, o número de *inputs* foi de 221 (20 para PRIO3, 148 para Petróleo e 53 para S&P500) para um total de 25.404 observações na amostra. Enquanto que para a frequência de 15 minutos, o número de *inputs* foi de 80 (7 para PRIO3, 54 para Petróleo e 19 para S&P500) para um total de 8.700 observações na amostra.

4 RESULTADOS

Os gráficos das séries em logaritmo natural podem ser representados de acordo com a Figura 1. Fica aparente que as três, a princípio, parecem ser não-estacionárias e apresentam tendência estocástica, ou seja, deve ser realizado um teste para verificar a estacionariedade e, se necessário, a ordem de integração das séries.

Figura 1 - Gráficos dos logaritmos das séries em nível



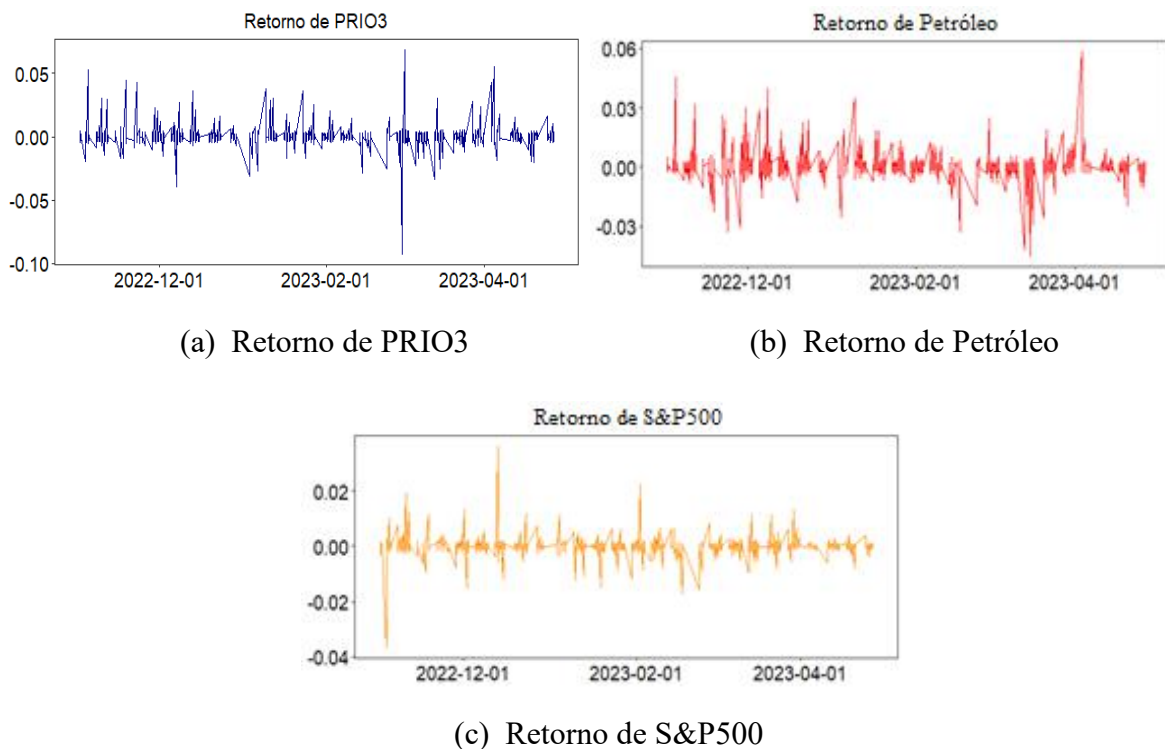
Fonte: Autoria própria, a partir de dados da plataforma Refinitiv

Os retornos das séries podem ser definidos por:

$$r_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} \quad (10)$$

Considerando que “ r_t ” é o retorno da série e “ p_t ” as cotações dos ativos. Sendo assim, os gráficos dos retornos das séries podem ser representados de acordo com a Figura 2:

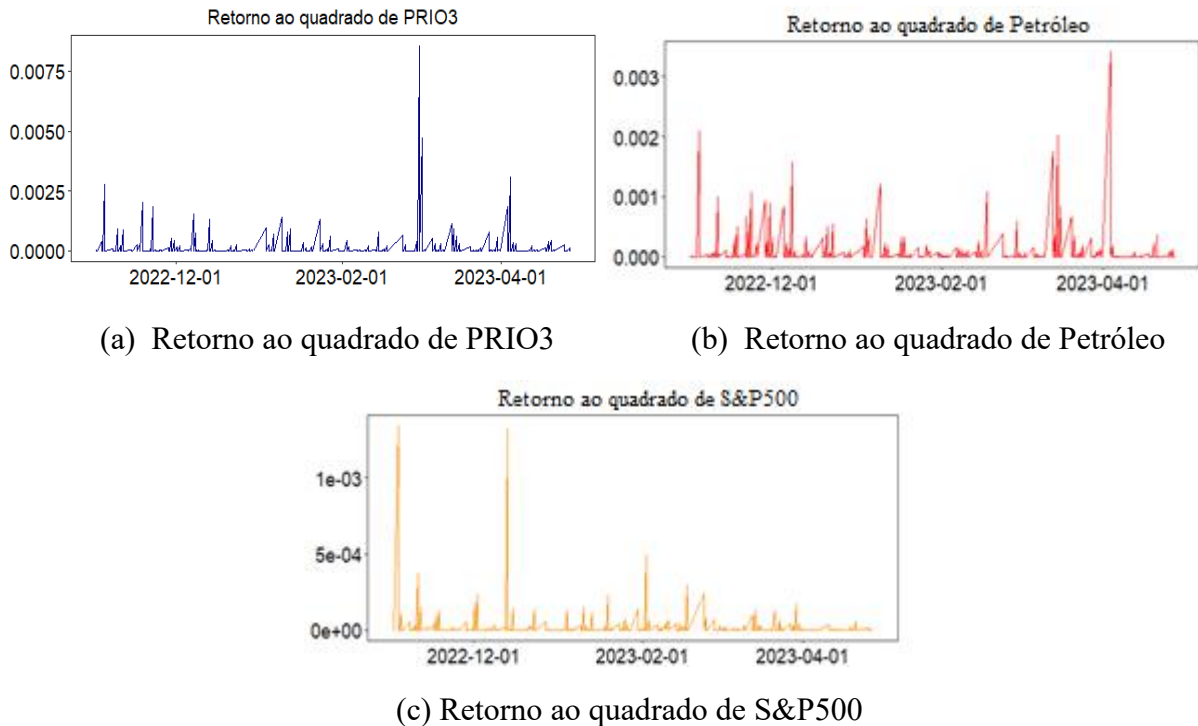
Figura 2 - Gráficos dos retornos das séries



Fonte: Autoria própria, a partir de dados da plataforma Refinitiv

Nota-se, de acordo com as Figuras 2 e 3 (gráficos dos retornos ao quadrado das séries), que as séries não parecem apresentar variância constante ao longo do tempo, fator comum em séries financeiras (retorno volátil) e parecem apresentar “agrupamento de volatilidade” (períodos voláteis seguidos por períodos de menos volatilidade). Portanto, torna-se necessário a realização de testes para confirmar essa hipótese e, caso confirmado, realizar procedimentos que ajustem o modelo de acordo com essas características.

Figura 3 - Gráficos dos retornos ao quadrado das séries



Fonte: Autoria própria, a partir de dados da plataforma Refinitiv

4.1. FREQUÊNCIA DE 15 MINUTOS

4.1.1 Testando a estacionariedade das séries

As três séries foram testadas em nível para a presença de raiz unitária através do teste ADF, todas apresentaram valores da estatística-teste maiores que os valores críticos a 5% de confiança, portanto, não podemos rejeitar a Hipótese Nula, indicando para a não estacionariedade das séries em nível. Também foi verificada a possibilidade de estacionariedades com *drift*, *trend* ou ambos, não sendo possível rejeitar H_0 .

Assim, realizou-se um processo de diferenciação nas três séries e o teste ADF foi auferido novamente. Desta vez, sendo possível rejeitar a Hipótese Nula, indicando que as séries eram estacionárias em primeira ordem de integração ($I(1)$).

4.1.2 Ajustando um modelo ARIMAX

Através da função “*auto.arima*” do pacote “*forecast*” no R, foram inseridas as séries já diferenciadas, e indicando as variáveis exógenas Petróleo e S&P500. Assim, identificou-se um

modelo de ordem (p,d,q) ideal com parâmetros: (1,0,0). Contudo, como no momento do *input* das séries elas já estavam diferenciadas, o modelo indicado é de ordem (1,1,0).

Os coeficientes e o sumário do modelo, por sua vez, seguem conforme o **APÊNDICE A**. Nota-se que o *Lag* 1 do fator AR apresenta significância estatística, impactando negativamente PRIO3 no período corrente. A variável Petróleo aparece como “ext.reg1”, também apresentando significância estatística, porém uma relação positiva. Da mesma forma, a variável S&P500, representada por “ext.reg2”, apresenta significância estatística, e é o maior dos coeficientes no modelo.

4.1.3 Testando o ARIMAX gerado para heterocedasticidade

Podemos rodar o teste ARCH-LM_h através da função “*arch.test*” pertencente ao pacote “*aTSA*” no R.

Dado que os p-valores encontrados (conforme **APÊNDICE B**) na segunda parte do processo (“*Lagrange-Multiplier test*”) são iguais a zero para todas as defasagens analisadas, rejeitamos a hipótese nula, indicando que há heterocedasticidade presente no modelo, conforme esperado, por ser uma característica frequente em séries financeiras. Segue-se a necessidade de ajustar um GARCH para tratar da heterocedasticidade identificada.

4.1.2 Ajustando um modelo ARIMAX-GARCH

Para ajustarmos o modelo para tratar da heterocedasticidade presente, propõe-se a realização de um modelo ARIMAX para média, adicionando um GARCH para ajustar os resíduos. Com a função “*ugarchspec*” (para especificar os parâmetros do modelo) e “*ugarchfit*” (para rodar o modelo a partir dos parâmetros previamente definidos) do pacote “*rugarch*” do R, podemos definir indicar os modelos de forma conjunta (sendo o ARIMAX referente ao modelo da média – o parâmetro “*mean.model*” –, o GARCH para a variância do modelo – “*variance.model*” – e a distribuição *Skew-Student* (SSTD) para os erros – “*distribution.model*”).

Avaliou-se o melhor modelo pelo critério AIC (haja vista que os modelos que apresentassem heterocedasticidade ou correlação em série não estariam inclusos para consideração), encontrando um modelo ARIMA(1,1,0)-GARCH(1,1). Observando os resultados (**APÊNDICE C**), nota-se que ambos coeficientes referentes às variáveis exógenas (“mxreg1” representa Petróleo; “mxreg2” representa S&P500) são positivamente relacionados

à cotação de PRIO3 contemporaneamente, sendo o impacto do índice S&P500 de maior magnitude do que do petróleo bruto.

Entretanto, os dois maiores coeficientes no modelo são referentes a própria estrutura do modelo: *skew* e *shape*.

Vale notar que os regressores externos são inseridos no modelo da média, portanto, o coeficiente representa um impacto direto no preço (enquanto os coeficientes do GARCH impactam a volatilidade da cotação).

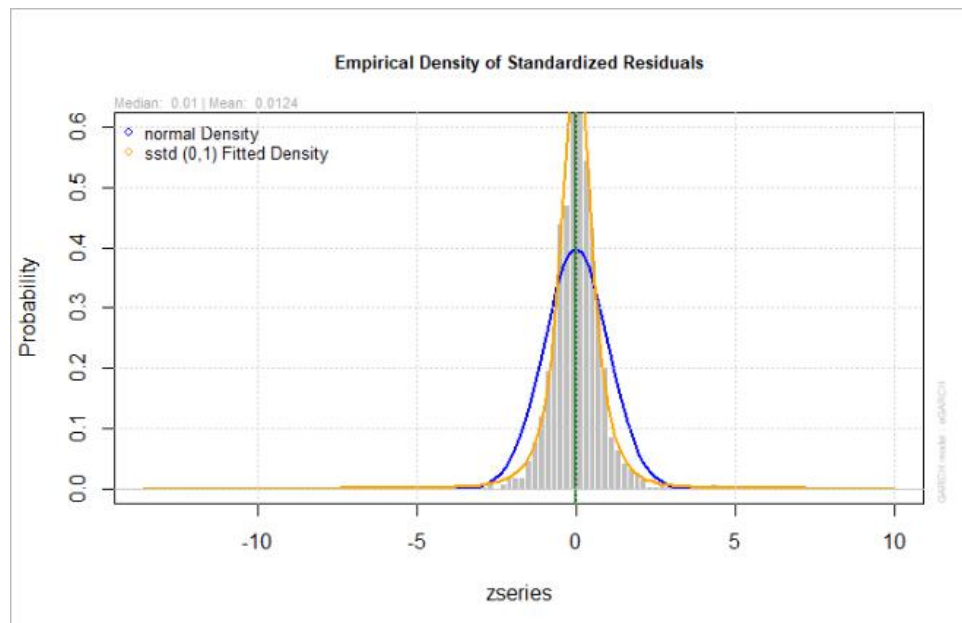
4.1.2 Ajustando um modelo ARIMAX-EGARCH

A partir do **APÊNDICE D**, observa-se que os resultados dos coeficientes dos regressores praticamente não se alteram no modelo encontrado ARIMA(1,1,0)-EGARCH(1,1). Tanto “mxreg1” quanto “mxreg2” reduzem um pouco, passando de 0,295 para 0,293, e 0,300 para 0,294, respectivamente.

Adiante, a adição do parâmetro *Gamma*, referente à assimetria do modelo demonstra-se estatisticamente significativo. Contudo, seu valor positivo (0,334) indica que não há Efeito Alavancagem (conforme indicado na metodologia). Podemos ver o comparativo dos coeficientes dos três modelos estimados no **APÊNDICE E**

Na seguinte figura (Figura 4), apresenta-se a densidade empírica dos resíduos do modelo, comparando a distribuição *Skew-Student* utilizada, contra uma distribuição normal. Nota-se que a SSTD (linha amarela) captura melhor os picos, além de apresentar uma “cauda” mais longa.

Figura 4 - Densidade da distribuição de resíduos - frequência de 15 minutos



Fonte: Autoria Própria

A partir do **APÊNDICE F**, podemos notar que o modelo estimado parece estar propriamente estimado, dado que se adequou à característica heterocedástica inicial dos dados (teste “ARCH LM” indica para um modelo homocedástico), e também não apresenta correlação em série dos resíduos (teste de “Ljung-Box”).

4.2. FREQUÊNCIA DE 5 MINUTOS

4.2.1 Testando a estacionariedade das séries

De forma semelhante aos testes ADF realizados previamente, as três variáveis com frequência de 5 minutos não rejeitaram H_0 , indicando para a não estacionariedade em nível das séries (mesmo testando para estacionariedade com *drift*, *trend* ou ambos).

Similarmente, ao diferenciarmos as séries e rodarmos os testes novamente, foi possível rejeitar a hipótese de presença de raiz unitária. Sendo assim, igualmente as séries de frequência de 15 minutos, as séries de frequência de 5 minutos também são estacionárias em primeira ordem de integração ($I(1)$).

4.2.2 Ajustando um modelo ARIMAX

Seguindo os mesmos procedimentos da frequência de 15 minutos, identificou-se um modelo com parâmetros (p,d,q) iguais a $(0,1,3)$. Os coeficientes e o sumário seguem no **APÊNDICE G**. Podemos notar que diferentemente do ARIMAX previamente ajustado, a frequência de 5 minutos identifica, de forma estatisticamente significativa, coeficientes para os *Lags* 1 e 3 de MA. Ou seja, os erros do período $t-1$ e $t-3$ afetam de forma negativa os valores correntes de PRIO3.

Similarmente à maior frequência, identificamos coeficientes estatisticamente significantes para as séries exógenas (“ext.reg1” refere-se ao coeficiente dos contratos futuros do Petróleo Bruto, enquanto “ext.reg2” refere-se ao coeficiente dos contratos futuros do índice S&P500). Nota-se que “ext.reg2” tem um impacto maior na cotação corrente de PRIO3, sendo o fator de maior influência no modelo.

4.2.3 Testando o ARIMAX gerado para heterocedasticidade

De forma semelhante ao subcapítulo prévio, os resultados do teste ARCH-LM_h rejeitam um modelo homocedástico (seguem os resultados no **APÊNDICE H**). No teste do Multiplicador de Lagrange, os p-valores em zero novamente confirmam a rejeição da hipótese nula e, portanto, apontam para a heterocedasticidade no modelo.

4.2.4 Ajustando um modelo ARIMAX-GARCH

Ao analisarmos os resultados do modelo ARIMAX(1,1,3)-GARCH(1,1), de acordo com o **APÊNDICE I**, similarmente ao modelo ARIMAX, as variáveis exógenas apresentam uma relação positiva com a variável dependente. Tanto o impacto dos contratos futuros do petróleo (“mxreg1”) quanto do índice S&P500 (“mxreg2”) afetam positivamente as cotações de PRIO3, sendo o maior efeito de S&P500. Os impactos, contudo, são menores (para ambas as variáveis) quando comparadas ao modelo original ARIMAX (sendo a maior redução no coeficiente “mxreg1”).

Outra observação considerável são os impactos da assimetria (representada pelo coeficiente “skew”) e do modelo de distribuição (representado pelo coeficiente “shape”), que são estatisticamente significantes e representam os maiores determinantes do modelo.

4.2.5 Ajustando um modelo ARIMAX-EGARCH

Ao analisarmos os coeficientes do novo modelo (APÊNDICE J) nota-se que a mudança nos coeficientes das variáveis exógenas é pequena, o coeficiente referente aos contratos futuros do petróleo bruto não se altera (analisando três casa decimais), enquanto o coeficiente dos contratos futuros do índice S&P500 eleva-se de 0,349 para 0,353.

A variável *Gamma* (referente à assimetria dos choques no modelo), por sua vez, é estatisticamente significativa, porém, por ser positiva (0,197), indica para a não presença de Alavancagem na série. No APÊNDICE K encontra-se o comparativo dos coeficientes dos modelos estimados.

Todos os coeficientes referentes às variáveis exógenas são apresentados na Tabela 1. Fica claro que os coeficientes se assemelham nas diferentes frequências analisadas, sendo que a variável S&P500 apresenta um impacto positivo mais elevado que Petróleo em todos os modelos estimados.

Tabela 1 – Coeficientes das variáveis exógenas no modelo

Modelo	Frequência	Variável	Coeficiente
ARIMAX	15 Minutos	Petróleo	0,407***
		S&P500	0,462***
	5 Minutos	Petróleo	0,416***
		S&P500	0,480***
ARIMAX-GARCH	15 Minutos	Petróleo	0,295***
		S&P500	0,300***
	5 Minutos	Petróleo	0,289***
		S&P500	0,349***
ARIMAX-EGARCH	15 Minutos	Petróleo	0,293***
		S&P500	0,294***
	5 Minutos	Petróleo	0,289***
		S&P500	0,353***

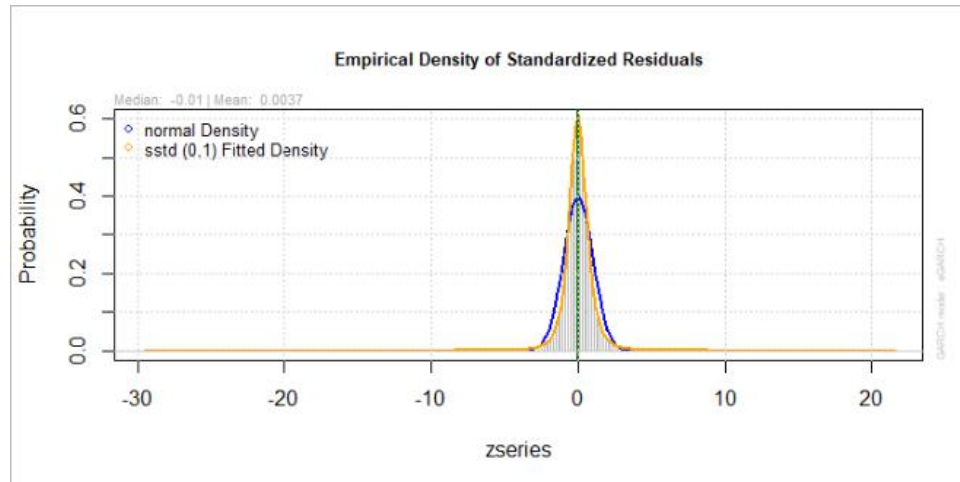
Nota: *** (1%); ** (5%); * (10%)

Fonte: Autoria Própria

Adianta, podemos observar a comparação na densidade de distribuição de resíduos do modelo com uma distribuição normal contra a distribuição *Skew-Student* (linha amarela) na

Figura 5, notando, de forma semelhante à frequência anterior, a curtose elevada na distribuição utilizada:

Figura 5 - Densidade da distribuição de resíduos - frequência de 5 minutos



Fonte: Autoria Própria

Nota-se, a partir do **APÊNDICE L**, que o modelo na frequência de 5 minutos também parece estar propriamente estimado, apresentando homocedasticidade e não correlação em série dos resíduos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através do ajuste de modelos apropriados, análises de distribuição e a realização de testes de especificação, foi possível identificar o impacto das séries dos contratos futuros do Petróleo Bruto e do Índice S&P500. Encontrou-se que o modelo ideal para as frequências 5 e 15 minutos foi um ARIMAX-EGARCH com uma distribuição de erros *Skew-Student*, dado que apresentavam o melhor ajuste (através da análise do AIC) para as características das séries. Os modelos também apresentaram semelhança em relação aos parâmetros utilizados para determinar a estimação com melhor AIC (e que não apresentasse heterocedasticidade ou correlação em série nos resíduos:

- (i) Frequência de 15 minutos: para a parte ARIMA foi utilizado (1,1,0) e para a parte GARCH, (1,1);
- (ii) Frequência de 5 minutos: (1,1,0) para a parte ARIMA, e (1,1) para a parte GARCH.

Mais especificamente, ambas variáveis exógenas afetam positivamente a cotação corrente de PRIO3 tanto na frequência de 15 minutos, quanto na de 5 minutos. Comparativamente, os coeficientes de ambas frequências indicam resultados similares.

Assim, conclui-se que tanto as cotações dos contratos futuros do Petróleo Bruto, quanto do índice S&P500 afetam positivamente o preço corrente de PRIO3 de forma estatisticamente significativa. Observando que o impacto do coeficiente referente a S&P500 é maior na frequência de 5 minutos, enquanto Petróleo é maior na frequência de 15 minutos (nos últimos modelos estimados). Essa diferença, contudo, não é uma alteração de grande magnitude, podendo ser atribuída a adição de outras variáveis no modelo.

Adicionalmente, a estrutura do modelo demonstrou-se importante para o ajuste das séries em ambas frequências, sendo os coeficientes *Skew* (referente a assimetria na distribuição dos erros) e *Shape* (referente ao modelo de distribuição dos erros) os de maior impacto na variável dependente em todas as especificações que apareciam. Como podemos observar pelas Figuras 4 e 5 (referentes à densidade da distribuição de resíduos com a distribuição *Skew-Student* contra a distribuição normal), a mudança na distribuição permitiu a melhor captura de valores extremos, adicionando uma “cauda” mais longa (curtose elevada).

Adiante, a adição dos parâmetros *Gamma*, através do modelo EGARCH, apresentaram poder explicativo estatisticamente significativo, incorporando a assimetria dos choques no modelo, mas não demonstrando presença de Efeito Alavancagem. Assim, introduzindo um modelo mais apropriado do que um ajuste apenas com GARCH.

REFERÊNCIAS

- AKAIKE, H. A New Look at the Statistical Model Identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.19, p. 716-723, 1974.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**. v. 31, n. 3, p. 307-327, 1986.
- BREUSCH, T. S.; PAGAN, A. R. A Simple Test for Heteroscedasticity and Random Coefficient Variation. **Econometrica**, v. 47, n. 5, p. 1287-1294, 1979.
- BROOKS, C. **Introductory Econometrics for Finance**. 2.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- DA SILVA, B. **Relações entre o preço internacional do petróleo e as ações da Petrobras**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ciências Contábeis do Programa Multiinstitucional e Inter-Regional de Pós-Graduação) - Universidade de Brasília, Brasília; da Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa; e da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. Disponível em: https://ppgcont.unb.br/images/PPGCCMULTI/mest_dissert_203.pdf. Acesso em: 5 dez. 2023.
- DICKEY, D. A.; FULLER, W. A. Distribution of Estimators for Time Series Regressions with a Unit Root. **Journal of the American Statistical Association**, v. 74, n. 336, p. 427-431, 1979.
- ENGLE, R. F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. **Econometrica**, v. 50, p. 987-1007, 1982.
- FERNANDEZ, C.; STEEL, M. F.; On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness. **Journal of the American Statistical Association**. V. 93, n. 441, p. 359-371, 1998.
- FULLER, W. A. **Introduction to Statistical Time Series**, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, New York, 1976

HUANG, R. D.; MASULIS, R. W.; STOLL, H. R. Energy shocks and financial markets, **Journal of Futures Markets**, v. 6, n. 1, p. 1-27, 1996. Disponível em: SSRN: <http://ssrn.com/abstract=900741>. Acesso em: 5 dez. 2023.

KELLER, R. **Análise contabilométrica sobre a correlação entre o valor das ações das empresas VALE5 e CSN e o preço da *Commodity* minério de ferro**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso - Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/140655/000989993.pdf?sequence=1>. Acesso em: 5 dez. 2023

KOBUNDA, C. N.; JÚNIOR, E. C. Análise da volatilidade do Ibovespa entre 2001 e 2016: uma estimação por meio de modelos ARCH. **Revista de Economia**, v. 40, n. 72, p. 176-192, 2019. Disponível em: <https://revistas.ufpr.br/economia/article/view/63969/39490>. Acesso em: 5 dez. 2023.

LAMBERT, P.; LAURENT, S. **Modeling Skewness Dynamics in Series of Financial Data Using Skewed Location-scale Distributions**. Artigo - Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain, Bélgica; Department of Quantitative Economics, Maastricht University, Bélgica, 2002. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/228947200_Modeling_skewness_dynamics_in_series_of_financial_data_using_skewed_location-scale_distributions. Acesso em: 5 dez. 2023.

MONTE, E. Z.; ALBUQUERQUE, T. T.; REISEN, V. A. Previsão da concentração de ozônio na Região da Grande Vitória, Espírito Santo, Brasil, utilizando o modelo ARMAX-GARCH. **Revista Brasileira de Meteorologia**, v.30, n.3, p. 285-294, 2015.

NELSON, D. B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*: **Journal of the Econometric Society**, v. 59, n. 2, p. 347-370, 1991. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/pdf/2938260.pdf?refreqid=fastly-default%3A083cc3c4fcd0948988a8831ccc46e90e&ab_segments=&origin=&initiator=&acceptTC=1. Acesso em: 7 dez. 2023

NOGUEIRA, I. V.; FERREIRA, B. P. Análise da influência dos preços internacionais

das Commodities sobre a Bolsa de Valores de São Paulo. **RACE - Revista de Administração, Contabilidade e Economia**, v. 9, p. p. 91-114, Novembro 2010. Disponível em: https://periodicos.unoesc.edu.br/race/article/view/195/pdf_96. Acesso em: 5 dez. 2023.

REGINA, S. P.; SANTOS, F. O.; LIMA, H. C.; SOUZA, W. A. Avaliação da Correlação entre o Preço das Ações e das *Commodities*: Estudo de Caso da Petrobras e Vale. **ReAC – Revista de Administração e Contabilidade**. Faculdade Anísio Teixeira (FAT), Feira de Santana-Ba, v. 4, n. 3, p. 66-77, 2012.

SANTOS, D.; LUCAS, E. C.; SILVA, V. A.; MEDEIRO, B. N. Influência Intradiária Do Preço Internacional Do Petróleo Nas Ações da Petrobras. **Journal of Financial Innovation**, v. 1, n.1, p. 4-17, 2015.

SCHWARZ, G. Estimating the Dimension of a Model. **The Annals of Statistics**, v. 6, p.461-464, 1978.

TIBULO, C. **Modelos de séries temporais aplicados a dados de umidade relativa do ar**, 2014. Dissertação (Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Área de Concentração em Gerência de produção) – Universidade Federal de Santa Maria, Cidade Universitária Professor José Mariano da Rocha Filho, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/8334/TIBULO%2c%20CLEITON.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 5 dez. 2023

APÊNDICE A – RESULTADOS DO MODELO ARIMAX COM FREQUÊNCIA DE 15 MINUTOS

ARIMAX Model Summary	
Dependent variable:	

ar1	-0.069*** (0.019)
intercept	-0.00002 (0.0001)
ext.reg1	0.407*** (0.021)
ext.reg2	0.462*** (0.044)

Observations	2,899
Log Likelihood	11,026.410
sigma2	0.00003
Akaike Inf. Crit.	-22,042.820
=====	
Note:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Fonte: Autoria Própria

APÊNDICE B – RESULTADO DO TESTE ARCH-LM DO MODELO ARIMAX COM FREQUÊNCIA DE 15 MINUTOS

```
ARCH heteroscedasticity test for residuals
alternative: heteroscedastic

Portmanteau-Q test:
  order    PQ p.value
[1,]      4  1.02  0.9063
[2,]      8 14.61  0.0673
[3,]     12 15.35  0.2228
[4,]     16 16.14  0.4434
[5,]     20 16.27  0.6996
[6,]     24 17.28  0.8363

Lagrange-Multiplier test:
  order    LM p.value
[1,]      4 30430      0
[2,]      8 12579      0
[3,]     12  8273      0
[4,]     16  6109      0
[5,]     20  4863      0
[6,]     24  4007      0
```

Fonte: Autoria Própria

APÊNDICE C – AJUSTE DO MODELO ARIMAX-GARCH DO MODELO DE FREQUÊNCIA 15 MINUTOS

```

*-----*
*           GARCH Model Fit           *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model      : sGARCH(1,1)
Mean Model       : ARFIMA(1,0,0)
Distribution      : sstd

Optimal Parameters
-----

```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	-0.000045	0.000073	-0.6261	0.53125
ar1	-0.102344	0.017536	-5.8362	0.00000
mxreg1	0.295457	0.018345	16.1053	0.00000
mxreg2	0.300372	0.038146	7.8744	0.00000
omega	0.000008	0.000000	61.1704	0.00000
alpha1	0.237885	0.023582	10.0875	0.00000
beta1	0.574286	0.035857	16.0161	0.00000
skew	0.990532	0.024136	41.0395	0.00000
shape	2.685484	0.083068	32.3287	0.00000

```

Robust Standard Errors:
-----

```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	-0.000045	0.000074	-0.61271	0.54007
ar1	-0.102344	0.016751	-6.10959	0.00000
mxreg1	0.295457	0.026087	11.32598	0.00000
mxreg2	0.300372	0.049735	6.03944	0.00000
omega	0.000008	0.000000	67.72257	0.00000
alpha1	0.237885	0.022646	10.50449	0.00000
beta1	0.574286	0.039584	14.50793	0.00000
skew	0.990532	0.024425	40.55328	0.00000
shape	2.685484	0.096100	27.94456	0.00000

Fonte: Autoria Própria

APÊNDICE D – AJUSTE DO MODELO ARIMAX-EGARCH DO MODELO DE FREQUÊNCIA 15 MINUTOS

```

*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model      : eGARCH(1,1)
Mean Model       : ARFIMA(1,0,0)
Distribution      : sstd

Optimal Parameters
-----

```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	-0.000063	0.000075	-0.8508	0.39488
ar1	-0.102124	0.016759	-6.0937	0.00000
mxreg1	0.293109	0.018279	16.0354	0.00000
mxreg2	0.294234	0.039821	7.3889	0.00000
omega	-2.145658	0.386879	-5.5461	0.00000
alpha1	-0.030179	0.026677	-1.1313	0.25794
beta1	0.794845	0.036811	21.5925	0.00000
gamma1	0.334442	0.045255	7.3901	0.00000
skew	0.986056	0.024422	40.3752	0.00000
shape	2.689375	0.145829	18.4420	0.00000

```

Robust Standard Errors:
-----

```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	-0.000063	0.000079	-0.80288	0.42204
ar1	-0.102124	0.016307	-6.26274	0.00000
mxreg1	0.293109	0.025891	11.32108	0.00000
mxreg2	0.294234	0.054360	5.41273	0.00000
omega	-2.145658	0.341456	-6.28385	0.00000
alpha1	-0.030179	0.025650	-1.17658	0.23936
beta1	0.794845	0.031959	24.87073	0.00000
gamma1	0.334442	0.035510	9.41816	0.00000
skew	0.986056	0.024806	39.75064	0.00000
shape	2.689375	0.149530	17.98547	0.00000

Fonte: Autoria Própria

APÊNDICE E – COEFICIENTES DOS MODELOS DA FREQUÊNCIA DE 15 MINUTOS, LADO-A-LADO

ARIMAX

ARIMAX Model Summary

Dependent variable:

ar1

-0.069***
(0.019)

intercept

-0.00002
(0.0001)

ext.reg1

0.407***
(0.021)

ext.reg2

0.462***
(0.044)

Observations

2,899

Log Likelihood

11,026.410

sigma2

0.00003

Akaike Inf. Crit.

-22,042.820

Note:

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

ARIMAX-GARCH

GARCH Model Fit

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model

sGARCH(1,1)

Mean Model

ARFIMA(1,0,0)

Distribution

sstd

Optimal Parameters

Estimate

Std. Error

t value

Pr(>|t|)

mu

-0.000045

0.000073

-0.6261

0.53125

ar1

-0.102344

0.017536

-5.8362

0.00000

mxreg1

0.295457

0.018345

16.1053

0.00000

mxreg2

0.300372

0.038146

7.8744

0.00000

omega

0.000008

0.000000

61.1704

0.00000

alpha1

0.237885

0.023582

10.0875

0.00000

beta1

0.574286

0.035857

16.0161

0.00000

skew

0.990532

0.024136

41.0395

0.00000

shape

2.685484

0.083068

32.3287

0.00000

Robust Standard Errors:

Estimate

Std. Error

t value

Pr(>|t|)

mu

-0.000045

0.000074

-0.61271

0.54007

ar1

-0.102344

0.016751

-6.10959

0.00000

mxreg1

0.295457

0.026087

11.32598

0.00000

mxreg2

0.300372

0.049735

6.03944

0.00000

omega

0.000008

0.000000

67.72257

0.00000

alpha1

0.237885

0.022646

10.50449

0.00000

beta1

0.574286

0.039584

14.50793

0.00000

skew

0.990532

0.024425

40.55328

0.00000

shape

2.685484

0.096100

27.94456

0.00000

ARIMAX-EGARCH

GARCH Model Fit

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model

eGARCH(1,1)

Mean Model

ARFIMA(1,0,0)

Distribution

sstd

Optimal Parameters

Estimate

Std. Error

t value

Pr(>|t|)

mu

-0.000063

0.000075

-0.8508

0.39488

ar1

-0.102124

0.016759

-6.0937

0.00000

mxreg1

0.293109

0.018279

16.0354

0.00000

mxreg2

0.294234

0.039821

7.3889

0.00000

omega

-2.145658

0.386879

-5.5461

0.00000

alpha1

-0.030179

0.026677

-1.1313

0.25794

beta1

0.794845

0.036811

21.5925

0.00000

gamma1

0.334442

0.045255

7.3901

0.00000

skew

0.986056

0.024422

40.3752

0.00000

shape

2.689375

0.145829

18.4420

0.00000

Robust Standard Errors:

Estimate

Std. Error

t value

Pr(>|t|)

mu

-0.000063

0.000079

-0.80288

0.42204

ar1

-0.102124

0.016307

-6.26274

0.00000

mxreg1

0.293109

0.025891

11.32108

0.00000

mxreg2

0.294234

0.045360

5.41273

0.00000

omega

-2.145658

0.341456

-6.28385

0.00000

alpha1

-0.030179

0.025650

-1.17658

0.23936

beta1

0.794845

0.031959

24.87073

0.00000

gamma1

0.334442

0.035510

9.41816

0.00000

skew

0.986056

0.024806

39.75064

0.00000

shape

2.689375

0.149530

17.98547

0.00000

Fonte: Autoria Própria

APÊNDICE F – TESTES DE ESPECIFICAÇÃO DO MODELO ARIMAX-EGARCH PARA 15 MINUTOS

```

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals
-----
                                statistic p-value
Lag[1]                          1.506  0.2198
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]        1.508  0.4331
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]        3.162  0.3916
d.o.f=1
H0 : No serial correlation

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
-----
                                statistic p-value
Lag[1]                          0.3314  0.5648
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]        0.9165  0.8783
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]        3.6813  0.6432
d.o.f=2

Weighted ARCH LM Tests
-----
                                Statistic Shape Scale P-Value
ARCH Lag[3]                    0.1716 0.500 2.000 0.6787
ARCH Lag[5]                    0.5674 1.440 1.667 0.8636
ARCH Lag[7]                    3.7802 2.315 1.543 0.3794

```

Fonte: Autoria Própria

APÊNDICE G – RESULTADOS DO MODELO ARIMAX COM FREQUÊNCIA DE 5 MINUTOS

ARIMAX Model Summary	
Dependent variable:	
ma1	-0.030*** (0.011)
ma2	-0.011 (0.011)
ma3	-0.021** (0.011)
intercept	-0.00000 (0.00003)
ext.reg1	0.416*** (0.012)
ext.reg2	0.480*** (0.026)
Observations	8,467
Log Likelihood	36,679.730
sigma2	0.00001
Akaike Inf. Crit.	-73,345.470
Note: *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01	

Fonte: Autoria Própria

APÊNDICE H – RESULTADO DO ARCH-LM DO MODELO ARIMAX COM FREQUÊNCIA DE 5 MINUTOS

Portmanteau-Q test:			
	order	PQ	p.value
[1,]	4	0.182	0.996
[2,]	8	0.846	0.999
[3,]	12	1.997	0.999
[4,]	16	3.545	0.999
[5,]	20	4.634	1.000
[6,]	24	4.700	1.000
Lagrange-Multiplier test:			
	order	LM	p.value
[1,]	4	251817	0
[2,]	8	125680	0
[3,]	12	82693	0
[4,]	16	60589	0
[5,]	20	47459	0
[6,]	24	39483	0

Fonte: Autoria Própria

APÊNDICE I – AJUSTE DO MODELO ARIMAX-GARCH DO MODELO DE FREQUÊNCIA 5 MINUTOS

* GARCH Model Fit *				

Conditional Variance Dynamics				

GARCH Model	:	sGARCH(1,1)		
Mean Model	:	ARFIMA(1,0,3)		
Distribution	:	sstd		
Optimal Parameters				

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	-0.000009	0.000021	-0.413213	0.679450
ar1	0.674446	0.205535	3.281411	0.001033
ma1	-0.739689	0.205891	-3.592618	0.000327
ma2	0.013338	0.018033	0.739647	0.459514
ma3	0.000329	0.016113	0.020417	0.983711
mxreg1	0.289458	0.010907	26.539754	0.000000
mxreg2	0.349838	0.022392	15.623688	0.000000
omega	0.000001	0.000000	2.525927	0.011539
alpha1	0.125141	0.013394	9.342786	0.000000
beta1	0.799562	0.012820	62.368389	0.000000
skew	1.024716	0.014999	68.319396	0.000000
shape	3.125607	0.101592	30.766224	0.000000
Robust Standard Errors:				
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	-0.000009	0.000028	-0.309116	0.757233
ar1	0.674446	0.250977	2.687287	0.007204
ma1	-0.739689	0.251342	-2.942955	0.003251
ma2	0.013338	0.020522	0.649942	0.515729
ma3	0.000329	0.017907	0.018371	0.985343
mxreg1	0.289458	0.016124	17.951552	0.000000
mxreg2	0.349838	0.031521	11.098618	0.000000
omega	0.000001	0.000003	0.236187	0.813287
alpha1	0.125141	0.017702	7.069148	0.000000
beta1	0.799562	0.067360	11.869920	0.000000
skew	1.024716	0.022464	45.615818	0.000000
shape	3.125607	0.147328	21.215250	0.000000

Fonte: Autoria Própria

APÊNDICE J – AJUSTE DO MODELO ARIMAX-EGARCH DO MODELO DE FREQUÊNCIA 5 MINUTOS

```

*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model      : eGARCH(1,1)
Mean Model       : ARFIMA(1,0,0)
Distribution      : sstd

Optimal Parameters
-----

```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	-0.000008	0.000024	-0.32437	0.74566
ar1	-0.060858	0.010084	-6.03522	0.00000
mxreg1	0.289847	0.010879	26.64308	0.00000
mxreg2	0.353273	0.021031	16.79809	0.00000
omega	-0.825960	0.021939	-37.64739	0.00000
alpha1	-0.007335	0.008964	-0.81825	0.41321
beta1	0.930607	0.001782	522.19396	0.00000
gamma1	0.197026	0.011692	16.85152	0.00000
skew	1.026182	0.015196	67.52883	0.00000
shape	3.146860	0.112391	27.99914	0.00000

```

Robust Standard Errors:
-----

```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	-0.000008	0.000023	-0.33102	0.74063
ar1	-0.060858	0.010291	-5.91401	0.00000
mxreg1	0.289847	0.015883	18.24889	0.00000
mxreg2	0.353273	0.026682	13.23991	0.00000
omega	-0.825960	0.009022	-91.54494	0.00000
alpha1	-0.007335	0.011522	-0.63657	0.52441
beta1	0.930607	0.000626	1487.67524	0.00000
gamma1	0.197026	0.013361	14.74671	0.00000
skew	1.026182	0.016088	63.78677	0.00000
shape	3.146860	0.136374	23.07529	0.00000

Fonte: Autoria Própria

APÊNDICE K – COEFICIENTES DOS MODELOS DA FREQUÊNCIA DE 5 MINUTOS, LADO-A-LADO

ARIMAX

ARIMAX Model Summary

Dependent variable:

ma1

-0.030***
(0.011)

ma2

-0.011
(0.011)

ma3

-0.021**
(0.011)

Intercept

-0.00000
(0.00003)

ext.reg1

0.416***
(0.012)

ext.reg2

0.480***
(0.026)

observations

8,467

log Likelihood

36,679.730

sigma2

0.00001

Akaike Inf. Crit.

-73,345.470

Note:

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

ARIMAX-GARCH

GARCH Model Fit

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : sGARCH(1,1)

Mean Model : ARFIMA(1,0,3)

Distribution : sstd

Optimal Parameters

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

mu -0.000009 0.000021 -0.413213 0.679450

ar1 0.674446 0.205535 3.281411 0.001033

ma1 -0.739689 0.205891 -3.592618 0.000327

ma2 0.013338 0.018033 0.739647 0.459514

ma3 0.000329 0.016113 0.020417 0.983711

mxreg1 0.289458 0.010907 26.539754 0.000000

mxreg2 0.349838 0.022392 15.623688 0.000000

omega 0.000001 0.000000 2.525927 0.011539

alpha1 0.125141 0.013394 9.342786 0.000000

beta1 0.799562 0.012820 62.368389 0.000000

skew 1.024716 0.014999 68.319396 0.000000

shape 3.125607 0.101592 30.766224 0.000000

Robust Standard Errors:

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

mu -0.000009 0.000028 -0.309116 0.757233

ar1 0.674446 0.250977 2.687287 0.007204

ma1 -0.739689 0.251342 -2.942955 0.003251

ma2 0.013338 0.020522 0.649942 0.515729

ma3 0.000329 0.017907 0.018371 0.985343

mxreg1 0.289458 0.016124 17.951552 0.000000

mxreg2 0.349838 0.031521 11.098618 0.000000

omega 0.000001 0.000003 0.236187 0.813287

alpha1 0.125141 0.017702 7.069148 0.000000

beta1 0.799562 0.067360 11.869920 0.000000

skew 1.024716 0.022464 45.615818 0.000000

shape 3.125607 0.147328 21.215250 0.000000

ARIMAX-EGARCH

GARCH Model Fit

Conditional Variance Dynamics

GARCH Model : eGARCH(1,1)

Mean Model : ARFIMA(1,0,0)

Distribution : sstd

Optimal Parameters

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

mu -0.000008 0.000024 -0.32437 0.74566

ar1 -0.060858 0.010084 -6.03522 0.00000

mxreg1 0.289847 0.010879 26.64308 0.00000

mxreg2 0.353273 0.021031 16.79809 0.00000

omega -0.825960 0.021939 -37.64739 0.00000

alpha1 -0.007335 0.008964 -0.81825 0.41321

beta1 0.930607 0.001782 522.19396 0.00000

gamma1 0.197026 0.011692 16.85152 0.00000

skew 1.026182 0.015196 67.52883 0.00000

shape 3.146860 0.112391 27.99914 0.00000

Robust Standard Errors:

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

mu -0.000008 0.000023 -0.33102 0.74063

ar1 -0.060858 0.010291 -5.91401 0.00000

mxreg1 0.289847 0.015883 18.24889 0.00000

mxreg2 0.353273 0.026682 13.23991 0.00000

omega -0.825960 0.009022 -91.54494 0.00000

alpha1 -0.007335 0.011522 -0.63657 0.52441

beta1 0.930607 0.000626 1487.67524 0.00000

gamma1 0.197026 0.013361 14.74671 0.00000

skew 1.026182 0.016088 63.78677 0.00000

shape 3.146860 0.136374 23.07529 0.00000

Fonte: Autoria Própria

APÊNDICE L – TESTES DE ESPECIFICAÇÃO DO MODELO ARIMAX-EGARCH PARA 5 MINUTOS

```

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals
-----
                statistic p-value
Lag[1]                2.068  0.1505
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]  2.304  0.1288
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]  3.356  0.3472
d.o.f=1
H0 : No serial correlation

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
-----
                statistic p-value
Lag[1]                0.1659  0.6837
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]  0.4570  0.9641
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]  0.6925  0.9956
d.o.f=2

Weighted ARCH LM Tests
-----
                Statistic Shape Scale P-Value
ARCH Lag[3]      0.1716 0.500 2.000  0.6787
ARCH Lag[5]      0.3661 1.440 1.667  0.9222
ARCH Lag[7]      0.5150 2.315 1.543  0.9770

```

Fonte: Autoria Própria