

ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA DE TÚNEIS PELO

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

MÁRCIO DE SOUZA SOARES DE ALMEIDA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

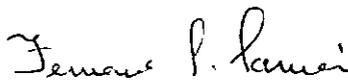
Aprovada por:



HUMBERTO LIMA SORIANO  
(Presidente)



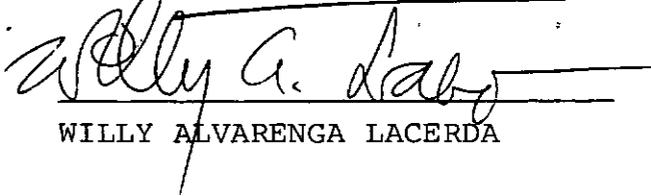
DIRCEU DE ALENCAR VELLOSO



FERNANDO L. LOBO B. CARNEIRO



MAURO LÚCIO G. WERNECK



WILLY ALVARENGA LACERDA

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 1977

ALMEIDA, MÁRCIO DE SOUZA SOARES DE

Análise Elasto-Plástica de Túneis pelo Méto-  
do dos Elementos Finitos [Rio de Janeiro] 1977

XIII, 246p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc,  
Engenharia Civil, 1977)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. - COPPE

1.Túneis I.COPPE/UFRJ II.Título(série)

a meus pais  
ã minha esposa

## Agradeço

ao professor Fernando Emmanuel Barata, o incentivo transmitido no ensino da mecânica dos solos;

ao professor Márcio Miranda Soares, as discussões esclarecedoras durante o estágio na COPPETEC e no decorrer do curso de mestrado;

aos professores Francisco Rezende Lopes e Cláudio Mahler, a assistência e as sugestões na parte inicial do trabalho;

ao professor Humberto Lima Soriano, a orientação final do trabalho;

aos professores Dirceu Velloso, Willy Lacerda e Mauro Werneck, as sugestões para a redação;

ao geólogo Nei Maranhão, as discussões sobre a problemática geral de túneis;

ao engenheiro Jorge Fujii, o companheirismo nas jornadas junto ao computador;

à minha esposa, engenheira Maria Cascão Ferreira de Almeida, o constante estímulo, a inexcédível compreensão;

a meus pais, por maiores razões do que as que poderiam ser expressas;

a todos aqueles que, por outros modos, colaboraram para que este trabalho pudesse realizar-se.

## RESUMO

Neste trabalho desenvolveu-se um programa de elementos finitos para para cálculo de deslocamentos e tensões no maciço e nos elementos de suporte de túneis. A análise foi realizada em estado plano de deformação e comportamento elasto-plástico para o material do maciço. São também abordadas as características básicas dos demais métodos de dimensionamento de túneis.

Paralelamente, deu-se ênfase ao estudo da teoria da plasticidade e ao comportamento tensão-deformação dos solos, tendo sido escolhido o modelo elasto-plástico de Drucker-Prager para idealizar o comportamento inelástico do maciço.

Na análise por elementos finitos utilizou-se o elemento isoparamétrico quadrático no método dos deslocamentos e, para reproduzir a não-linearidade física, o método das "tensões iniciais" (incremental e iterativo). O programa permite simular as diversas fases construtivas de túneis.

Com o objetivo de demonstrar a validade plástica do modelo elasto-plástico e do processo de simulação adotado, o programa foi aplicado a túneis de seções típicas, tendo sido obtidos resultados satisfatórios, os quais o credenciam para utilização em projetos de túneis. Este programa, como elaborado, permite ser utilizado em outros problemas geotécnicos nos quais possa ser admitido estado plano de deformação.

## ABSTRACT

In this paper a finite element program for the elasto-plastic plane strain analysis was developed. Its purpose is to compute the displacements and stresses in soil and rock masses, and in tunnel supporting elements. Basic characteristics of other tunnel design methods have also been discussed.

At the same time, emphasis was given to the study of plasticity concepts and stress-strain behavior of soils. Drucker-Prager's model has been chosen to simulate the inelastic behavior of the medium.

In the finite element analysis the isoparametric quadratic displacement method was used. In order to reproduce the physical non-linearity, the "initial stress" method (incremental and iterative) was applied. The program permits to analyse each step of excavation according to the construction methods.

In order to show the validity of both the elasto-plastic model and the simulation process used, the program was applied to typical tunnel cross-sections. Since reasonable results were obtained the program will be seemingly useful in tunnel design. The program could also be used in other geotechnical problems where the plane strain condition is valid.

ÍNDICE

Capítulos	Páginas
I- Introdução .....	1
I-1- Importância e necessidade do estudo .....	1
I-2- Objetivos .....	3
II- Alguns aspectos envolvidos no projeto de túneis .....	7
II-1- Aspectos relativos ao maciço e ao túnel .....	7
II-1-1- Dimensões e forma da cavidade .....	7
II-1-2- Profundidade do túnel e estado de tensões iniciais do maciço .....	9
II-1-3- Reologia dos materiais .....	11
II-1-4- Método construtivo .....	12
II-1-5- Efeitos tridimensionais na frente de esca vação .....	13
II-1-6- Presença de água .....	15
II-1-7- Presença de materiais sujeitos à expansão .....	17
II-1-8- Critérios de segurança .....	19
II-2- Métodos de dimensionamento de túneis .....	20
II-2-1- Métodos de ruptura .....	20
II-2-2- Métodos de apoios elásticos .....	22
II-2-3- Método das zonas plásticas .....	24
II-2-4- Método dos elementos finitos .....	26
III- Conceitos de plasticidade aplicados à mecânica dos solos .....	29
III-1- Comportamento inelástico dos solos .....	30
III-2- Condição de escoamento inicial .....	34
III-3- Lei de endurecimento .....	40

III-4- Lei de escoamento plástica .....	43
IV- Revisão dos modelos tensão-deformação para uso no método dos elementos finitos .....	49
IV-1- Modelos elásticos .....	51
IV-1-1- Modelos elásticos lineares .....	51
IV-1-2- Modelos elásticos não lineares .....	51
IV-1-2-1- Iterativos .....	52
IV-1-2-2- Incrementais .....	55
IV-2- Modelos elasto-plásticos .....	69
IV-2-1- Modelo elasto-plástico perfeito com lei de escoamento associada .....	70
IV-2-2- Modelos elasto-plásticos com encruamento ou amolecimento e lei de escoamento associada .....	71
IV-2-3- Modelos elasto-plásticos com encruamento ou amolecimento, lei de escoamento associada a superfície de escoamento fechada .....	74
IV-2-4- Modelo elasto-plástico encruável com lei de escoamento não associada .....	79
IV-2-5- Modelos elasto-plásticos com encruamento ou amolecimento e lei de escoamento associada ou não associada .....	80
IV-3- Comentários sobre os modelos de comportamento do solo e escolha do modelo a ser utilizado .....	81
V - O método dos elementos finitos aplicado a túneis . Análise elasto-plástica .....	87
V-1- O método dos elementos finitos aplicado a tú-	

neis. Revisão da literatura .....	87
V-2- O elemento isoparamétrico .....	90
V-2-1- Resolução do problema global .....	91
V-2-2- Características básicas do elemento .....	93
V-2-3- Matriz de rigidez do elemento .....	95
V-2-4- Forças nodais equivalentes .....	97
V-2-5- Integração numérica .....	101
V-2-6- Cálculo de deformações e tensões .....	102
V-3- Modelo elasto-plástico implementado no método dos elementos finitos .....	105
V-3-1- Determinação de tensões para análise elasto- plástica .....	105
V-3-2- Técnica utilizada para análise não linear ..	108
V-3-3- Análise elasto-plástica. Sequência de cálcu- lo usada para programação .....	112
V-4- Simulação da escavação .....	117
VI- Programa TUNELPLAST .....	125
VI-1- Apresentação do programa .....	125
VI-2- Estrutura do programa .....	126
VII- Aplicações do programa .....	130
VII-1- Efeito da localização das fronteiras .....	130
VII-2- Um exemplo de estudo paramétrico .....	137
VII-3- Análise elasto-plástica de cavidade circular ..	140
VII-4- Túnel revestido .....	146
VIII- Conclusões e sugestões .....	152
VIII-1- Conclusões .....	152
VIII-2- Sugestões para pesquisa .....	155

VIII-2-1- Relativas à aplicação do método dos elementos finitos a túneis .....	155
VIII-2-2- Relativas ao comportamento tensão-deformação dos solos .....	156
Referências bibliográficas .....	158
Apêndice I- Comparações de valores obtidos pelo método dos elementos finitos com soluções teóricas.	169
Apêndice II-Manual de utilização do programa .....	177
Apêndice III-Exemplo de utilização do manual de entrada e saída dos resultados .....	193
Apêndice IV- Listagem do programa .....	206

SIMBOLOGIA I

## Símbolos latinos

- $\tilde{b}$  - vetor da componente das forças de massa
- $\tilde{B}$  - matriz que relaciona deslocamentos e deformações
- $c$  - coesão
- $\tilde{D}$  - matriz de elasticidade
- $\tilde{D}_{ep}$  - matriz elasto-plástica
- $E$  - módulo de elasticidade
- $E_i, E_t, E_{ur}$  - módulos elásticos inicial, tangente e de descarregamento-recarregamento
- $E_{dp}$  - módulo de elasticidade transformado para estado plano de deformação
- $\tilde{F}$  - vetor de forças nodais globais
- $F$  - parâmetro (modelo hiperbólico)
- $F$  - função de escoamento
- $G$  - módulo de elasticidade transversal
- $G$  - parâmetro (modelo hiperbólico)
- $g$  - função de potencial plástico
- $g$  - número de graus de liberdade do ponto nodal
- $h$  - parâmetro de endurecimento ou enfraquecimento
- $I_1, I_2, I_3$  - invariantes do tensor das tensões
- $\tilde{J}$  - jacobiano
- $J_2$  - segundo invariante dos desvios das tensões
- $k$  - parâmetro (modelo de Roscoe)
- $k$  - parâmetro (modelo de Drucker-Prager)
- $\tilde{k}^e$  - matriz de rigidez do elemento
- $\tilde{K}$  - matriz de rigidez global
- $\tilde{K}_0$  - matriz de rigidez elástica inicial
- $\tilde{K}_t$  - matriz de rigidez tangente

K - módulo volumétrico

K,  $K_{ur}$  - parâmetros (modelo hiperbólico)

L - parâmetro (modelo exponencial)

m - parâmetro (modelo exponencial)

M - parâmetro (modelo de Roscoe)

$\tilde{N}$  - vetor das funções de interpolação

n - parâmetro (modelo hiperbólico)

p - parâmetro (modelo exponencial)

p - tensão volumétrica (modelo de Roscoe) =  $(\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$

$P_a$  - pressão atmosférica

$\tilde{p}$  - vetor das componentes das forças de superfície

$p_x, p_y$  - forças de superfície nas direções x e y

q - parâmetro (modelo exponencial)

q - tensão desvio (modelo de Roscoe) =  $\sigma_1 - \sigma_3$

$R_f$  - índice de ruptura (modelo hiperbólico)

$S_u$  - resistência não drenada

t - espessura

u - deslocamento na direção x

v - deslocamento na direção y

W - trabalho interno de deformação

SIMBOLOGIA II

## Símbolos gregos

- $\gamma$  - peso específico  
 $\gamma_w$  - peso específico da água  
 $\gamma_{xy}$  - deformação por cisalhamento  
 $\gamma_{oct}$  - deformação octaédrica por cisalhamento  
 $\underline{\delta}$  - vetor das componentes dos deslocamentos nodais (sistema global)  
 $\underline{\delta}^e$  - vetor da componente dos deslocamentos dos nós do elemento  
 $\delta_{ij}$  - delta de Kronecker  
 $\underline{\varepsilon}$  - vetor das componentes das deformações  
 $\underline{\varepsilon}_{ij}$  - componentes do tensor das deformações ( $i, j = 1, 2, 3$ )  
 $\underline{\varepsilon}_0$  - vetor das componentes das deformações iniciais  
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  - deformações nas direções x e y  
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  - deformações principais  
 $\varepsilon_{oct}$  - deformação octaédrica  
 $\varepsilon^p$  - deformação plástica  
 $\varepsilon^e$  - deformação elástica  
 $\xi, \eta$  - abcissa e ordenada no sistema de coordenadas naturais do elemento  
 $\nu$  - coeficiente de Poisson  
 $\nu_t$  - coeficiente de Poisson tangente  
 $\nu_{dp}$  - coeficiente de Poisson transformado para estado plano de deformação  
 $\underline{\sigma}$  - vetor das componentes das tensões  
 $\underline{\sigma}_0$  - vetor das componentes das tensões iniciais  
 $\sigma_{ij}$  - componentes do tensor das tensões ( $i, j = 1, 2, 3$ )  
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  - tensões normais nas direções x, y e z  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - tensões principais  
 $\sigma_{oct}$  - tensão normal octaédrica

$\sigma_m$  - tensão média ( $=I_1/3$ )

$\sigma_b, \sigma_d$  - tensões volumétrica e distorcional (modelo de Clough e Woodward)

$\sigma_e$  - tensão de escoamento na tração ou compressão simples

$(\sigma_1 - \sigma_3)_f, (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$  - tensão desvio na ruptura e tensão máxima (modelo hiperbólico)

$\tau_{xy}$  - tensão cisalhante no plano xy

$\tau_{oct}$  - tensão cisalhante octaédrica

$\alpha$  - parâmetro (modelo de Drucker-Prager)

$\lambda$  - constante positiva (lei de escoamento)

$\phi$  - ângulo de atrito interno

## C A P Í T U L O I

INTRODUÇÃOI-1- Importância e necessidade do estudo

De forma ampla, túnel pode ser definido como uma cavidade subterrânea destinada a transportes, condução de água ou exploração de recursos minerais.

No primeiro caso, temos os túneis rodoviários e ferroviários; no segundo, os destinados à alimentação e descarga de usinas hidrelétricas e obras subterrâneas de abastecimento d'água; finalmente, os diversos tipos de túneis de mineração

De acordo com o tempo de duração, Panet (1973) distingue dois tipos de obras subterrâneas: as temporárias, da alçada da engenharia de minas, e as permanentes, que dizem respeito à engenharia civil. A construção de uma mina se estende, usualmente, por todo o período de exploração, findo o qual, a existência da obra passa a ter sentido secundário. Por esta razão, admite-se trabalhar em condições próximas da instabilidade, e o método construtivo é modificado de acordo com o comportamento observado. O engenheiro civil, encarregado do estudo de uma escavação permanente, tem um enfoque diferente, pois deve assegurar grande duração à obra, o mais rápido tempo de escavação possível, e riscos de colapso praticamente nulos.

Como se vê, o engenheiro civil e o de minas abordam o estudo de estabilidade de obras subterrâneas com pontos de vistas bastante diversos. Neste trabalho nos preocuparemos apenas com o estudo de obras subterrâneas de engenharia civil.

O projeto de obras subterrâneas apresenta sensível dife-

rença em relação aos demais projetos de engenharia civil, face às dificuldades nas determinações de cargas atuantes, propriedades geomecânicas e estado inicial de tensões entre outros aspectos descritos no item II-1 deste trabalho.

Até pouco tempo, os métodos de estudo de estabilidade de túneis e dimensionamento dos elementos de suporte eram ainda empíricos e pouco satisfatórios. Isto resultava em um projeto pouco econômico, de difícil e lenta execução, ou em um projeto inseguro, colocando em risco a estabilidade da obra. Por vezes estas situações ainda ocorrem atualmente. Por outro lado, a solução túnel era encarada excepcionalmente em projetos, sendo mais comum, por exemplo, atravessar um maciço através de cortes.

Hoje em dia assiste-se ao aperfeiçoamento simultâneo dos métodos construtivos e de projeto de túneis. Somente no Brasil existem atualmente cerca de 300 quilômetros de túneis em estudo, projeto ou construção, incluindo obras metropolitanas (Rodovia, nº 324, 1976).

Em nosso país, algumas obras em túneis têm surgido nos últimos anos, como as da rodovia Rio-Santos e as da rodovia dos Imigrantes. Os onze túneis escavados nesta última rodovia, com extensão total de 3818 metros, introduziram consideráveis inovações nos métodos construtivos neste tipo de obra (Construção Pesada, nº 65, 1976). Novos projetos em andamento, como o da Ferrovia do Aço, somam-se aos túneis metropolitanos em projeto e execução nas principais cidades do país.

A exigência crescente de transportes, comunicações, água, esgotos e outros serviços públicos, e a preocupação de evitar a degradação do meio ambiente, colocam as obras subterrâneas

mo solução apropriada para preservar os espaços ainda disponíveis.

A necessidade cada vez maior destas obras foi salientada numa conferência internacional promovida pela "Organization for Economic Cooperation and Development" (O.E.C.D.), realizada em Washington em 1970, na qual ficou internacionalmente estabelecido que: "túnel refere-se à construção por qualquer método, de uma cavidade aberta, de geometria pré-dimensionada, cuja locação e usos finais estão na superfície, e cuja área de seção transversal é maior do que  $2 \text{ m}^2$ " (Souto Oliveira, 1970).

Esta conjuntura justifica o interesse de intensificar os esforços de pesquisa sobre a análise da estabilidade de túneis, para os quais este trabalho se propõe contribuir.

#### I-2- Objetivos do trabalho

O objetivo deste trabalho é desenvolver um programa de computador, utilizando o método dos elementos finitos, para cálculo de tensões, deslocamentos e deformações no maciço e nos elementos de suporte de túneis.

No desenvolvimento do trabalho e na elaboração do programa dá-se ênfase ao comportamento tensão-deformação do maciço e às características construtivas peculiares à obra, essas através da simulação de escavação utilizada. Com relação ao primeiro aspecto, considera-se apenas a não-linearidade física do material do maciço e sua plasticidade, pois, no estudo de túneis, a não-linearidade geométrica tem importância secundária.

O trabalho volta-se principalmente para túneis em maciços terrosos, não obstante serem considerados, por vezes, alguns aspectos relativos a túneis em maciços rochosos. O programa desenvolvido, no entanto, pode ser aplicado a túneis em so-

los, e rochas desde que observadas as condições citadas em parágrafos seguintes.

No capítulo II são comentados alguns dos aspectos considerados mais importantes no projeto de túneis; ali será justificada a utilização do método dos elementos finitos neste trabalho.

O capítulo III aborda conceitos de plasticidade para aplicação à mecânica dos solos, necessários ao entendimento dos modelos elasto-plásticos de comportamento dos solos.

O capítulo IV faz uma revisão dos modelos tensão-deformação utilizados no método dos elementos finitos. Descrevem-se modelos elásticos lineares e não-lineares e modelos elasto-plásticos. Por fim, justifica-se a escolha do modelo elasto-plástico de Drucker-Prager, utilizado neste trabalho. Este modelo incorpora uma generalização do critério de Mohr-Coulomb, utiliza a coesão e o ângulo de atrito como parâmetros plásticos e o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson como parâmetros elásticos.

O capítulo V expõe os fundamentos teóricos utilizados para o desenvolvimento do programa de computador correspondente à análise elasto-plástica. Inicialmente é efetuada uma breve revisão da literatura sobre o método dos elementos finitos aplicado a túneis. São descritas as características do elemento finito utilizado e detalhados o modelo elasto-plástico e a técnica de análise não-linear incorporados à formulação global. Finalmente é explanado o processo de simulação da escavação empregado.

O capítulo VI descreve a estrutura do programa de computador desenvolvido e o fluxograma de sub-rotinas.

O capítulo VII apresenta aplicações do programa a túneis

revestidos e não revestidos utilizando análises elástica linear e elasto-plástica, e os resultados são comentados.

No capítulo VIII são apresentadas as conclusões do trabalho e feitas sugestões para pesquisas futuras.

Em apêndices comparam-se soluções teóricas disponíveis com análises elástica linear e elasto-plástica desenvolvida. São apresentados ainda o manual de utilização do programa, exemplo de codificação de uma rede de elementos finitos e listagem do programa.

O programa de computador desenvolvido permite a simulação de qualquer seqüência de escavação e utilização de elementos de suporte, como: revestimento de concreto, camboteamento metálico, estroncas e chumbadores. Considera-se o maciço como um meio contínuo, o que é perfeitamente admissível em túneis escavados em solos e em maciços rochosos sem descontinuidades.

Nos maciços rochosos com descontinuidades (diáclases, falhas, etc.), essas são muitas vezes responsáveis pela deformabilidade destes maciços. Para este último caso, quando as dimensões dos blocos ou espaçamento entre juntas são desprezíveis em face do tamanho da abertura, o meio pode ser considerado como contínuo.

Alguns especialistas em túneis (ver, p. ex., Ferreira 1976), sugerem duas hipóteses para o meio ser considerado contínuo equivalente: a) espaçamento médio entre diáclases inferior a  $1/10$  do diâmetro ou da dimensão característica (outros reduzem esse valor para  $1/50$ ); b) espaçamento superior a  $1/3$  da dimensão característica.

Para regiões do maciço onde se prevêem concentrações de tensões e existam descontinuidades isoladas ou com uma resistênça

cia ao cisalhamento muito baixa, a consideração de meio contínuo deixa de ser válida, sendo necessário um modelo de cálculo que simule as descontinuidades. O modelo de Drucker-Prager pode também ser utilizado para a análise elásto-plástica de maciços rochosos, conforme mostram, por exemplo, Reyes e Deere (1966) e Baker e outros (1969).

Como a variável tempo não entra na formulação do modelo utilizado, a deformação lenta do revestimento não pode ser levada em conta. Por esta mesma razão, na simulação construtiva do túnel não se pode abordar de forma direta, simultaneamente, revestimentos provisório e permanente. Esta técnica construtiva, característica de métodos modernos, como o novo método austríaco de abertura de túneis (NATM), pode ser considerada de forma indireta conforme é sugerido na item V-4.

Relativamente à utilização dos parâmetros do solo, podem ser efetuadas análises a pressões totais e efetivas. A análise a pressões totais pode ser feita, a curto prazo, com parâmetros não drenados. A análise em termos de pressões efetivas, com parâmetros drenados, pode ser efetuada desde que sejam conhecidas as pressões neutras. Estas podem ser determinadas através de análise em separado de percolação, no caso de regime estacionário, ou de medidas experimentais. Essas duas análises devem ser efetuadas principalmente no caso de materiais de baixa permeabilidade e alta compressibilidade. A situação intermediária, onde ocorre dissipação de pressões neutras, não pode ser diretamente considerada, necessitando de análise, em conjunto, de tensões e de dissipação de pressões neutras, através de formulação adequada.

## C A P Í T U L O I I

ALGUNS ASPECTOS ENVOLVIDOS NO PROJETO DE TÚNEISII-1- Aspectos relativos ao maciço e ao túnel

Em projetos de túneis o comportamento mecânico do maciço tem importância, mas, outros aspectos, não menos relevantes, devem ser abordados.

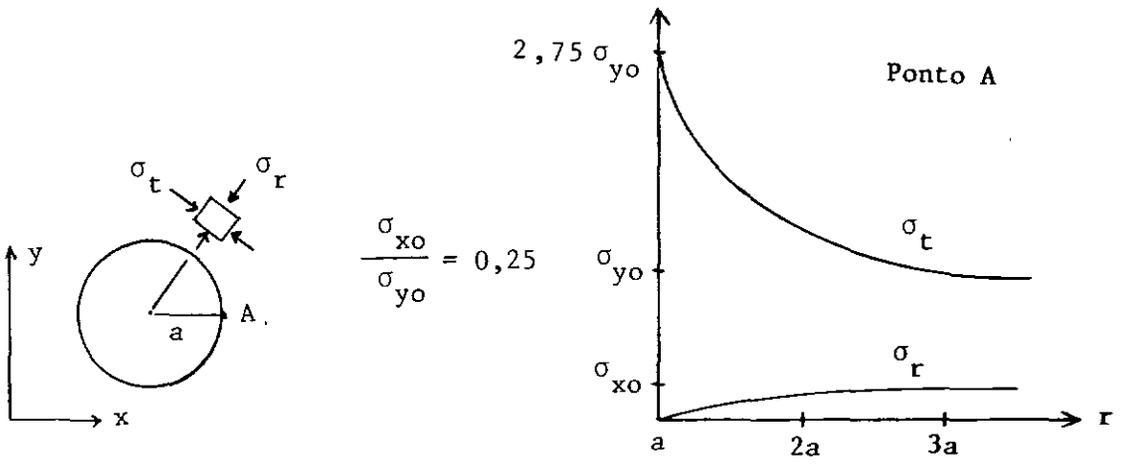
Esses aspectos serão discutidos a seguir, para os casos de túneis em solos, apesar de, por vezes, serem efetuadas considerações relativas a túneis em maciços rochosos.

II-1-1- Dimensões e forma da cavidade

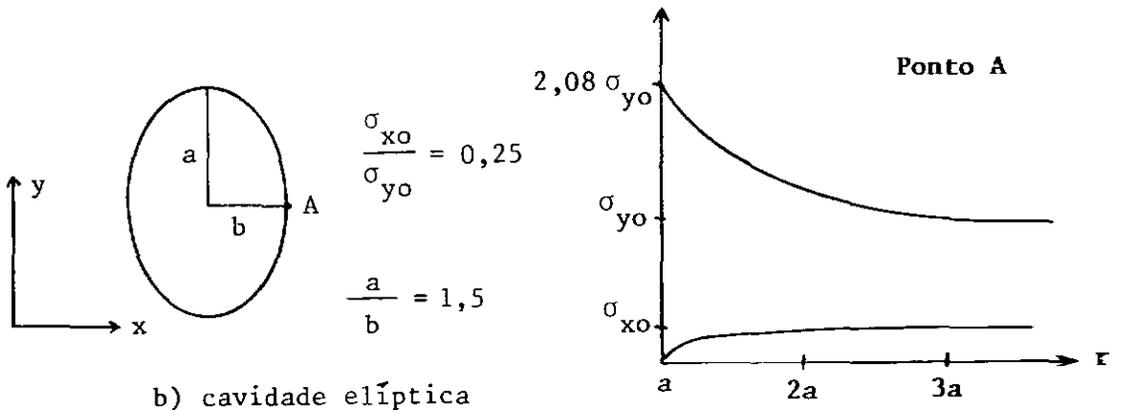
A forma e as dimensões da cavidade têm importância significativa com relação ao estado de tensões em suas vizinhanças. Quanto à forma, cavidades de contornos suaves (circular ou elíptica) são preferíveis quando comparadas às de contornos quebrados (retangular ou em forma de ferradura). Nestas últimas existirão concentrações de tensões nos pontos angulosos.

Pode-se concluir, com base na teoria da elasticidade, que, para um coeficiente de empuxo no repouso ( $K_0$ ) menor que 1, a melhor forma de seção é a elíptica, com o maior eixo na direção da maior tensão inicial (Fig. II-1).

Para túneis revestidos, é também vantajoso que a seção transversal se aproxime da circular. No caso de maciços de pouca resistência, sua baixa capacidade de carga impõe a cons-



a) cavidade circular



b) cavidade elíptica

Fig. II-1-Distribuição de tensões ao redor de cavidades

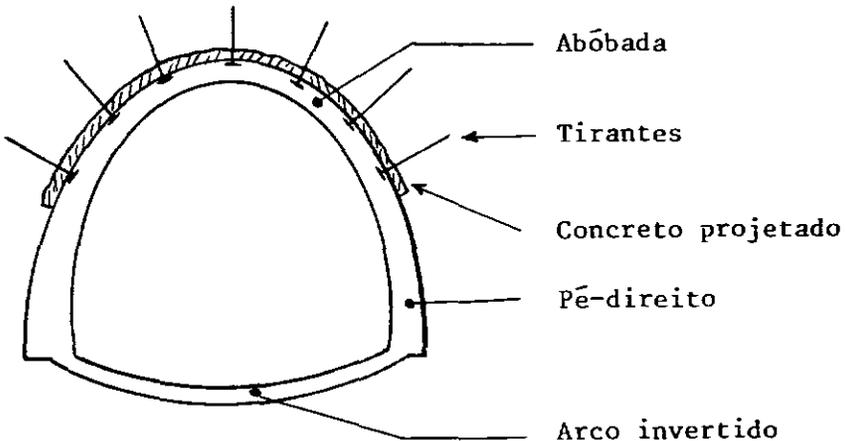


Fig. II-2-Seção transversal de um túnel revestido

trução de um arco invertido (Fig. II-2). A curvatura dos pés-direitos contribui para o melhor funcionamento destes, com respeito à mobilização do atrito no contato revestimento-macijo. Assim, o comportamento do túnel com relação ao estado de tensões melhora quando são utilizados em conjunto o encurvamento dos pés-direitos e, se necessário o arco invertido. Não é essencial que a seção do túnel seja circular. As características de fundação indicarão a necessidade de um arco invertido, de estrocas ou sistema de ancoragem. Quando o macijo ao redor do túnel for completamente auto-suportante com um adequado fator de segurança, e o revestimento tiver apenas objetivos secundários, será possível dispensar o arco invertido (Howells, 1971).

#### II-1-2- Profundidade do túnel e estado de tensões iniciais do macijo.

As soluções teóricas disponíveis com base na teoria da elasticidade (Terzaghi e Richart, 1952), consideram as tensões iniciais constantes ao redor da cavidade. Kulhawy (1975 a) verificou, através do método dos elementos finitos, que a consideração de tensões iniciais geostáticas é importante para profundidades menores que 150 metros, no caso de rocha.

Para um macijo com superfície horizontal, a tensão vertical num ponto ( $\sigma_{v_0}$ ) é proveniente do peso do terreno sobrejacente.

$$\sigma_{v_0} = \int_0^h \gamma \, dz \quad (II-1)$$

onde  $\gamma$  é o peso específico do terreno e  $h$  a profundidade abaixo do nível do terreno.

Considerando o maciço como um material homogêneo, elástico e isotrópico, de coeficiente de Poisson  $\nu$ , a razão entre as tensões horizontal e vertical será igual a

$$K_o = \frac{\sigma_{vo}}{\sigma_{ho}} = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (\text{II-2})$$

De acordo com Terzaghi e Richart (1952), entre as condições de validade da eq. II-2 se incluem: camadas depositadas horizontalmente sem variação horizontal de dimensão, e com temperatura constante desde o início do tempo de deposição; e camadas que nunca tenham sido submetidas a qualquer carga temporária. Entretanto, não sendo os solos e rochas materiais elásticos, o valor de  $K_o$  é função da história geológica do maciço, sendo, portanto, de difícil determinação.

As correlações mais utilizadas para areias e argilas normalmente adensadas são respectivamente  $K_o = 1 - \text{sen } \phi'$  e  $K_o = 0,95 - \text{sen } \phi'$ . Para argilas sobreadensadas utilizam-se outras correlações empíricas nas quais entra a razão de pré-adensamento e o índice de plasticidade (Brooker e Ireland, 1965).

Para rochas profundas é usual a consideração de tensões iniciais hidrostáticas ( $K_o=1$ ), partindo-se da consideração que, para uma lenta relaxação das rochas, os desvios de tensões se dissipam pouco a pouco (Panet, 1973). No entanto, medidas locais de tensões iniciais mostram que estas nem sempre podem ser explicadas pela gravidade. As tensões de origem tectônica, de difícil determinação, podem ser enquadradas neste caso.

Visando ao cálculo de tensões iniciais para o caso de escavações subterrâneas, Panet (1973) analisou o estado de tensões iniciais em talude infinito. Foram examinadas três hipóteses: meio elástico, meio próximo do estado de equilíbrio limite e meio sob relaxação completa de tensões a volume constan

te. Panet (1973) observou diferenças sensíveis de orientação e valores de tensões principais para os três casos examinados. Foi analisado também o estado de tensões iniciais sob uma montanha elástica em estado de deformação plana.

Do que foi dito fica visível a dificuldade de determinação do estado inicial de tensões antes da escavação. As medidas *in situ* se apresentam como a melhor forma de estimativa do estado de tensões, sendo sua técnica e interpretação delicadas e de pouco uso entre nós. São mais utilizadas as correlações empíricas, ensaios de laboratório nos quais são impedidas as deformações laterais, e análise do ponto de vista geológico. A utilização de ensaios de laboratório em materiais não normalmente adensados é incorreta, pois, ao se retirar a amostra do solo, suas condições são alteradas às vezes de forma irreversível.

### II-1-3- Reologia dos materiais

O comportamento reológico do solo torna-se muito complexo devido à sua característica trifásica, às heterogeneidades, à presença de descontinuidades (juntas e falhas), à anisotropia e à influência do tempo nas deformações (fluência). As deformações e tensões no revestimento, mesmo após a execução deste, podem muitas vezes aumentar com o tempo, em ntensidade dependente do tipo de solo ou rocha e do nível de tensões.

Os comportamentos tensão-deformação-tempo dos materiais do maciço e do revestimento têm influência marcante no estado de tensões e deformações decorrentes da escavação e na escolha do método construtivo utilizado. Adicionalmente os parâmetros do

solo são função do método e velocidade de execução, o que torna iterativo o processo do projeto.

A reologia dos materiais atravessados pela escavação é de difícil ou mesmo impossível consideração nos métodos clássicos de cálculo de pressões em túneis (ver item II-2). O método dos elementos finitos se apresenta como de utilidade muito grande, pois permite considerar o comportamento reológico do solo de forma mais completa.

É importante, segundo as possibilidades, que nos ensaios se apliquem trajetórias de tensões tão próximas quanto possível das que existirão no campo, e que o estado de tensões inicial seja anisotrópico.

#### II-1-4- Método construtivo

O tempo utilizado na escavação e instalação dos suportes constitui aspecto da maior importância e que influirá de forma direta no carregamento a que o túnel estará submetido. Considerando que o solo tem comportamento não linear, o estado de tensões decorrente da escavação será determinada pela sequência em que esta se realiza (ver item V-4). Os métodos de ruptura (item II-1) consideram este fator de forma indireta e empírica, mas sempre incompleta e simplista. O método de escavação influirá nas deformações induzidas ao maciço, que condicionarão a mobilização da resistência na vizinhança da cavidade.

A intensidade do carregamento a que o túnel estará sub-

metido dependerá ainda da ocasião de colocação do revestimento, de sua rigidez e do possível vazio que exista entre este e o terreno.

Devido aos aspectos descritos acima, o carregamento que atuará sobre o revestimento não é um valor pré-determinado e fixado a priori, conforme considerado nos métodos de ruptura.

#### II-1-5- Efeitos tridimensionais na frente de escavação

É normal a consideração de que um túnel de grande extensão possa ser dividido, para efeito de cálculo, em trechos típicos. Cada uma dessas seções transversais típicas será analisada bidimensionalmente, admitindo-se estado plano de deformação. Na frente de escavação, contudo, ocorre uma transformação radical no estado de tensões, e não será possível um equilíbrio que não seja em três dimensões (Fig. II-3). As tensões cisalhantes que atuam em planos perpendiculares ao eixo do túnel podem ser consideradas nulas adiante e atrás da frente de escavação. Por razões de assimetria, porém, isto não ocorrerá nas proximidades da frente de escavação (Lombardi, 1975).

Para uma seção transversal a uma distância  $\underline{d}$  da frente de escavação, a parede do túnel terá sofrido deslocamentos verticais  $\delta$ , que atingem um valor máximo  $\delta_m$  a uma determinada distância da frente. Para o caso de túnel de seção circular (diâmetro D), a análise tridimensional através do método dos elementos finitos conduz à variação de  $\frac{\delta}{\delta_m}$  com  $\frac{d}{D}$  conforme mostra a Fig. II-4 (Daemen e Faihurst, 1972, citados por Rocha, 1976). Observa-se o rápido crescimento de  $\frac{\delta}{\delta_m}$ , o que demonstra a vantagem da colocação do suporte a uma pequena distância

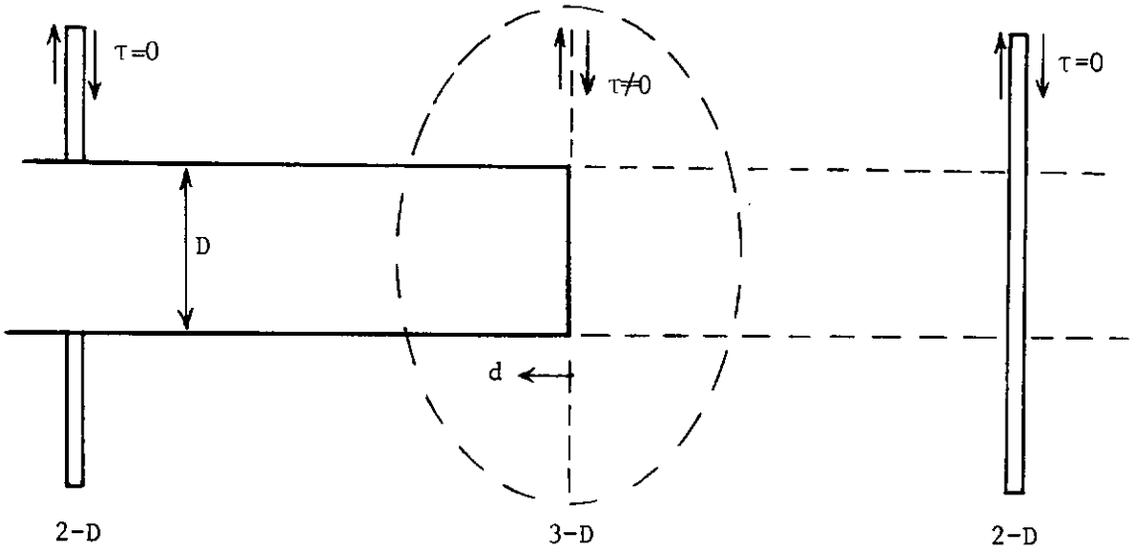


Fig. II.3-Influência da frente de escavação no estado de tensões

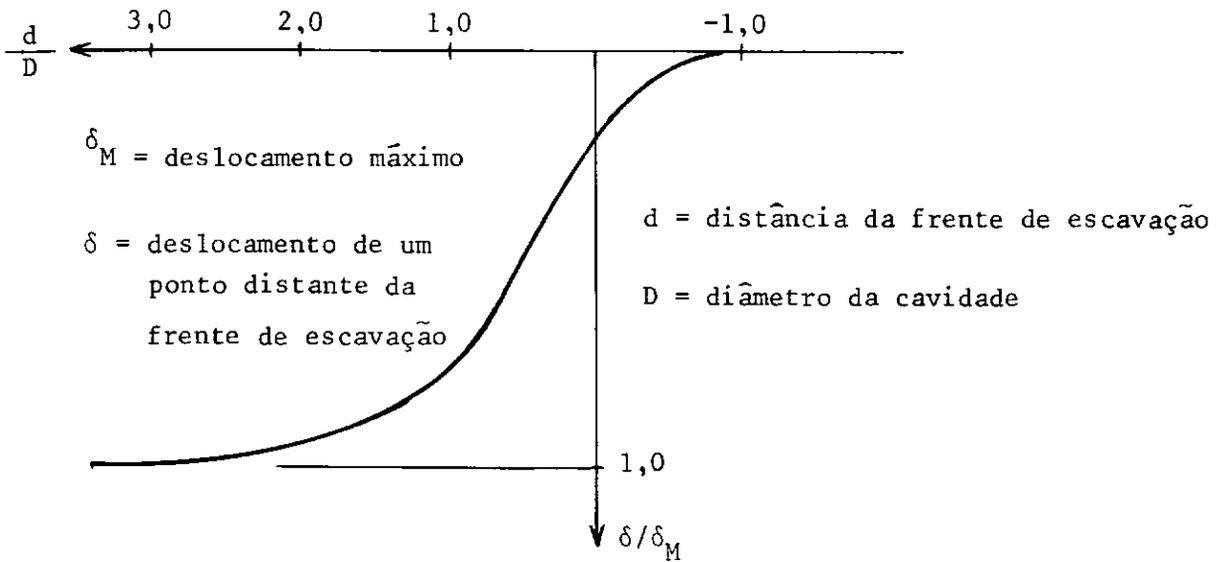


Fig. II.4-Influência do avanço da frente sobre os deslocamentos verticais  $\delta$ .

da frente de escavação.

#### II-1-6- Presença de água

Túneis abaixo do nível d'água, com revestimento impermeável, estarão submetidos à pressão de água no revestimento, conforme mostra a Fig. II-5. A pressão de água deve ser adicionada à pressão externa do maciço, no caso de túneis abaixo do nível d'água.

Se o túnel atravessa uma camada permeável, ele atuará como um dreno subsuperficial e a água percolará em direção ao túnel, se não existir revestimento ou se este for permeável (Fig. II-6). Se a parte inferior do túnel não for revestida, e o gradiente hidráulico se aproximar do gradiente crítico, poderá ocorrer diminuição ou perda total da capacidade de carga das sapatas do túnel. No caso da força de percolação por unidade de volume ser de valor suficiente para vencer o atrito entre as partículas, poderá ocorrer a erosão interna, com o conseqüente carreamento do solo para dentro do túnel. (Terzaghi, 1946).

Devido às razões acima, torna-se importante o controle de água em obras subterrâneas.

O rebaixamento do nível d'água é um dos métodos usados para evitar problemas de água, principalmente nos casos de túneis pouco profundos. Esse procedimento tem como vantagens a realização da escavação a seco e menores empuxos atuantes. Neste caso pode-se contar com as pressões neutras negativas (sucção), provenientes das pressões capilares, para a estabilidade provisória da escavação. Uma desvantagem é a ocorrência de recalques em prédios vizinhos. Outras soluções utilizadas,

Nível do terreno

Nível d'água

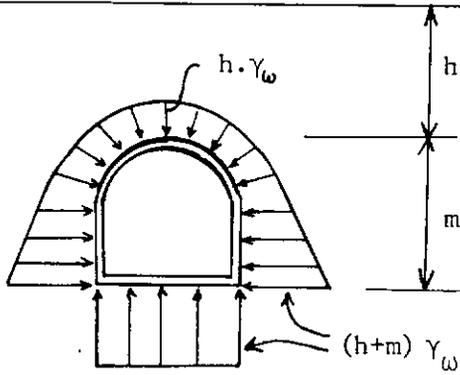


Fig. II-5-Pressão de água atuante sobre revestimento impermeável

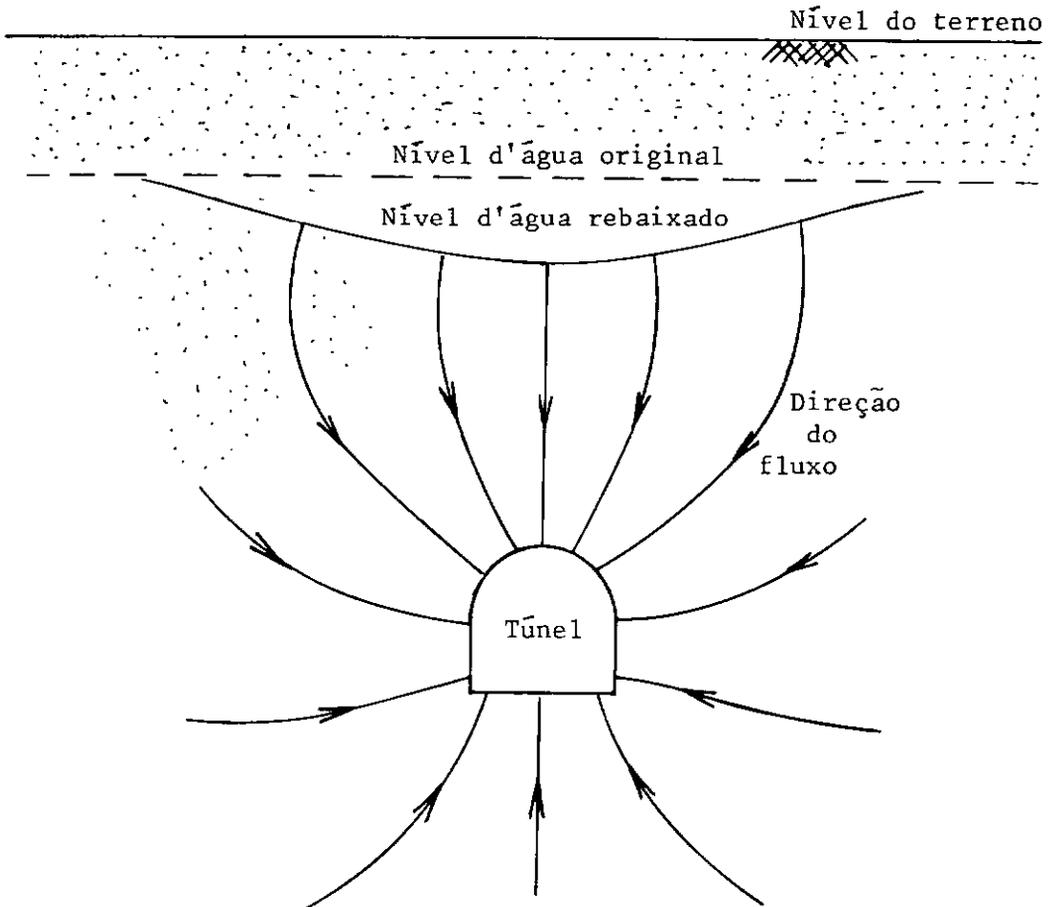


Fig. II-6-Influência da percolação em túnel em material granular.

principalmente junto às fundações vizinhas, são o congelamento do solo (para solos finos), injeções químicas, ou ar comprimido, para solos não permeáveis ao ar.

No caso de utilização de ar comprimido, a pressão do ar deve ser igual ou maior que a pressão de água, para que não ocorra fluxo. Podem acontecer problemas em túneis altos onde existe diferença sensível entre as pressões de água do chão e do teto do túnel, e a pressão de ar comprimido é igual em toda a cavidade. Este problema é particularmente crucial quando a pressão de água precisa ser limitada em razão do perigo de ruptura por levantamento do solo, além dos limites permissíveis de pressão, com vistas ao trabalho humano dentro da escavação.

#### II-1-7- Presença de solos ou rochas com capacidade de inchamen to.

Sob certas condições, alguns solos e rochas aumentam de volume em presença de água. O fenômeno de inchamento pode ser encontrado em argilas e alguns tipos de rochas alteradas e decompostas.

Terzaghi (1946) foi um dos primeiros a se preocupar com o fenômeno de inchamento associado a escavações subterrâneas. Após a escavação, a água é drenada das partes do maciço mais carregadas para as regiões da cavidade com menor intensidade de carga, como a parte inferior e, em menor extensão, as laterais. Esta migração de água tem como consequência o aumento da umidade dos solos ou rochas e o inchamento desses materiais, além da diminuição da resistência ao cisalhamento.

Se este inchamento é contrariado com a colocação do revestimento, podem desenvolver-se grandes pressões de expansão, de grandezas dificilmente calculáveis. Essas pressões serão tanto maiores quanto mais rígido for o revestimento e mais rápida sua colocação. O inchamento está fortemente associado à natureza físico-química dos materiais escavados.

Terzaghi (1946) sugere, como medida de proteção contra o inchamento, deixar um espaço vazio entre o solo e o revestimento definitivo.

Einstein e Bishoff (1975) realizaram um trabalho bastante interessante e completo relativo ao inchamento em túneis. Descrevem eles pormenorizadamente o fenômeno do inchamento com todas as suas características físico-químicas, particularizando-o para anidritos, folhelhos e margas. A seguir descrevem o mecanismo do inchamento associado a túneis, o procedimento a usar em projeto (baseado em ensaios de laboratório) e os procedimentos construtivos que reduzem o inchamento, relatando, inclusive, alguns casos estudados.

Baldovin e Santovito (1973) relatam os estudos efetuados para a construção de um túnel em argilas com alta capacidade de inchamento. Alguns trechos apresentaram materiais argilosos com quantidade significativa de bentonita. Os ensaios de laboratório e as correlações entre pressão de inchamento e parâmetros geotécnicos do solo, propostas na literatura, não foram adequados para definir quantitativamente o fenômeno. Apenas a utilização de ensaios *in situ* tornou possível prever pressões de inchamento reais, que alcançaram  $35 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$  no caso estudado.

Silva Filho (1976) relata resultados de estudos realizada

dos para determinar as causas da alta expansibilidade manifestada por algumas formações sedimentares da Região Sul do Brasil. Concluiu que a causa reside na presença de argila montmorilonítica. O autor apresenta algumas soluções para combater o problema, como a proteção da superfície da rocha com gunitagem, medida adotada com sucesso em túneis e taludes da região.

#### II-1-8- Critérios de segurança

Para o dimensionamento dos elementos de suporte ou para se concluir que a cavidade aberta é estável sem a necessidade de suportes, é necessária a adoção de determinado critério de segurança. Com esse objetivo devem ser fixados valores de deslocamentos, tensões e deformações que não devem ser excedidos.

Restringir os deslocamentos das paredes do túnel é uma forma de limitar os recalques da superfície do terreno, principalmente para túneis a pequena profundidade. Os deslocamentos e deformações admissíveis podem ser fixados a partir da experiência adquirida em casos reais, em conjunto com resultados de ensaios triaxiais dos materiais constituintes do maciço.

Rocha (1976) recomenda que o dimensionamento dos elementos de suporte seja feito com relação à ruptura, fixando-se os valores das tensões admissíveis. Sugere também que não seja considerada a coesão no contato revestimento-maciço. Assim, quando se utiliza o método dos elementos finitos, é interessante que o contato seja simulado através do elemento de junta, com atrito igual ao do maciço.

Com relação aos coeficientes de segurança a serem adotados para os materiais do maciço, o mesmo autor sugere que, na falta de maiores informações, sejam adotados os seguintes valo

res: para suporte inicial - 2 para o módulo de elasticidade e coesão e 1,5 para o ângulo de atrito; para suporte final - 3 para o módulo de elasticidade e coesão e 1,5 para o ângulo de atrito.

Nos casos em que a escavação, é efetuada com a utilização de explosivos (rochas resistentes), o autor sugere que se adotem, para o maciço na vizinhança da cavidade, 1/2 a 1/4 do módulo que seria atribuído ao maciço intacto.

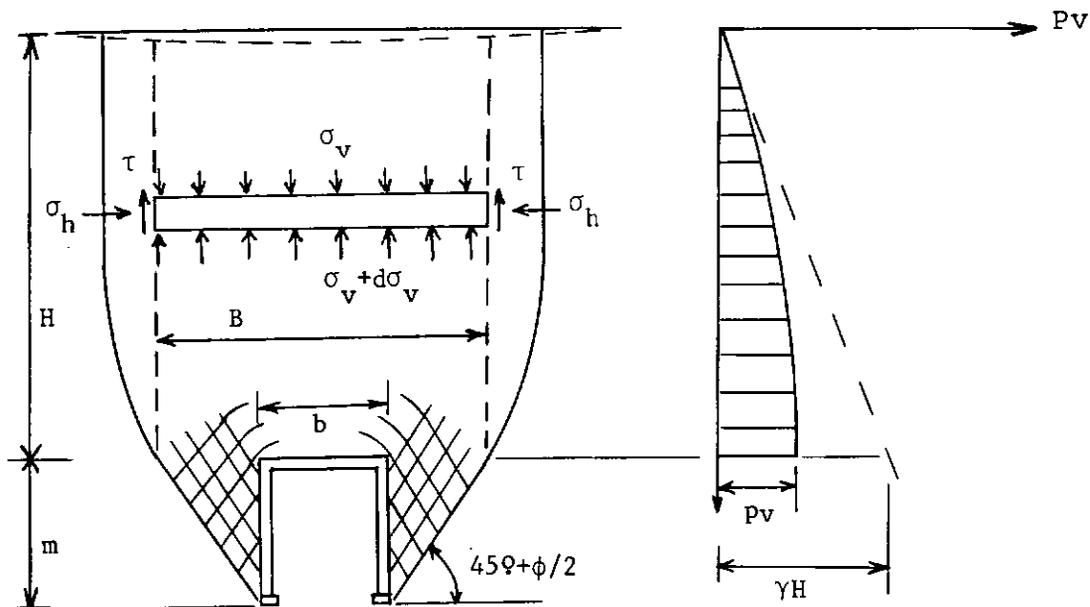
## II-2- Métodos de dimensionamento de túneis

A classificação dos métodos de dimensionamento de túneis proposta abaixo procura abranger as proposições de Kovari (1972) e Zagottis (1975).

- Métodos de ruptura
- Métodos de apoios elásticos
- Método das zonas plásticas
- Método dos elementos finitos

### II-2-1- Métodos de ruptura

Para os métodos de ruptura, o carregamento atuante sobre o túnel é proveniente do peso do volume de rocha que se se para do maciço. Está implícita em tais métodos a hipótese de que, durante a construção, surgem deslocamentos do maciço capazes de permitir o aparecimento dos estados de ruptura correspondentes a cada método. Consideram, desta forma, apenas os esforços decorrentes da deformação do maciço (esforços ativos), admitindo que o revestimento permaneça indeformável e indeslo-



$$P_v = \frac{B\gamma}{2K \tan \phi} \left( 1 - e^{-K \tan \phi \frac{2H}{B}} \right)$$

Fig. II-7-Teoria de Terzaghi (Terzaghi, 1943)

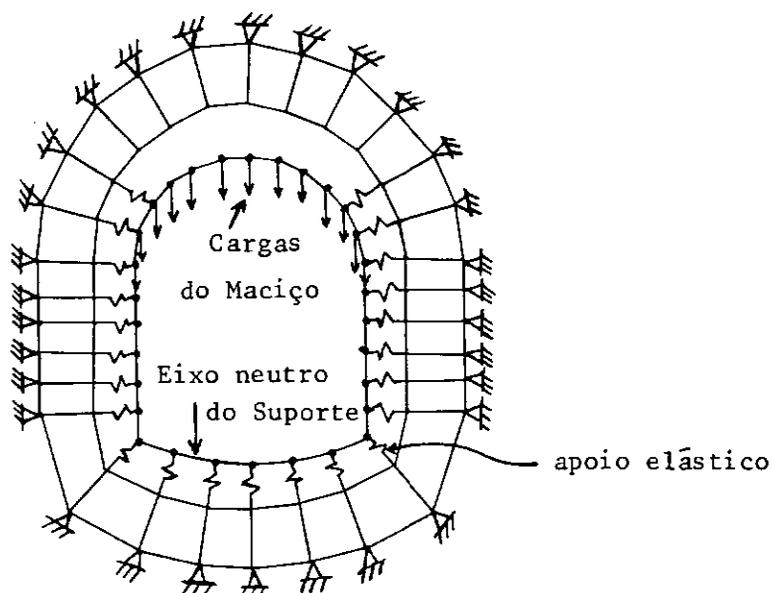


Fig. II-8-Modelo para cálculo de túnel pelo método dos apoios elásticos.

(Dixon, 1971)

cável após a construção. Esta situação é válida apenas para os túneis com revestimentos rígidos, executados pelos sistemas clássicos. Os métodos de ruptura não consideram os esforços decorrentes da interação maciço-revestimento (esforços reativos), oriundos das deformações e dos deslocamentos do revestimento após a construção. Por esta razão esses métodos são atualmente pouco utilizados em projetos, principalmente no caso de túneis com revestimentos flexíveis. Entre esses métodos existem os que consideram o efeito da profundidade, como as teorias de Terzaghi (Terzaghi, 1943) e Bierbaumer (ver Szechy, 1966). A teoria de Terzaghi, mais utilizada, é particularmente adequada para materiais granulares (Fig. II-7). Os métodos que desprezam o efeito da profundidade, como os de Protodyakonov e Kommerell (ver Szechy, 1966), são mais adequados para túneis profundos. Outros métodos de ruptura são descritos por Szechy (1966).

Markovic e Popovic (1970) compararam resultados de instrumentação de um túnel rodoviário com vários métodos de ruptura e concluíram que a teoria de Protodyakonov foi a que proporcionou resultados mais aproximados. Observaram também os autores acima que o carregamento atuante no revestimento é radial, e não horizontal e vertical como assumido pelas teorias.

Os esforços finais para o dimensionamento do revestimento podem ser calculados utilizando-se os conceitos de resistência dos materiais, considerando a estrutura submetida ao carregamento atuante (esforços ativos).

#### II-2-2- Métodos de apoios elásticos

Como a tendência atual é a utilização de revestimentos

flexíveis, é importante a consideração dos esforços provenientes da interação maciço-revestimento (esforços reativos). Esses esforços podem ser considerados através da hipótese de Winkler, que é a principal característica dos métodos de apoios elásticos, entre os quais se destacam os de Zurabov-Bougayeva, Davidov e outros descritos por Szechy (1966). A consideração da deformação do revestimento através de apoios elásticos diminui em média os esforços solicitantes no revestimento. Em geral tais métodos consideram apenas molas normais à superfície externa do revestimento, as quais procuram simular o comportamento do maciço. Não são consideradas molas situadas na zona superior, pois não é permitido que apareçam tensões de tração nas mesmas.

Os métodos de apoios elásticos podem ser calculados manualmente ou através de computador, utilizando-se procedimentos da análise matricial de estruturas, que tornam os cálculos rápidos e simples. Isto permite também uma análise geral, isto é, para qualquer forma de revestimento e para qualquer esforço ativo. Os esforços ativos aplicados ao sistema podem ser calculados a partir dos métodos de ruptura, ou mais corretamente, considerando o diagrama de cargas proporcional às deformações do revestimento, como nos métodos de Davidov e Zurabov-Bougayeva.

A utilização de programas de computador permite também a consideração de apoios elásticos tangenciais, o que melhora sensivelmente o comportamento estrutural do revestimento. Em geral se adotam para os apoios elásticos tangenciais 30% da rigidez dos apoios elásticos normais (Zagottis, 1975).

Dixon (1971) analisou a interação do maciço com a estru

tura de suporte através de um pórtico plano poligonal com apoios elásticos (Fig. II-8). A idealização estrutural do meio foi efetuada de forma a aproximá-lo de seu comportamento real, definindo para o elemento de suporte, o maciço e a conexão entre eles, tipos diferentes de elementos que simulam seus comportamentos.

### II-2-3- Método das zonas plásticas

O método das zonas plásticas utiliza a teoria introduzida por Fenner e desenvolvida por Kastner para aplicação a problemas de estática de túneis. O sistema estático considerado é um cilindro circular submetido a pressões interna e externa constantes. A pressão externa é proveniente do maciço e a pressão interna se relaciona à resistência oferecida pelo revestimento. Essa hipótese de carregamento é justamente uma limitação do método, que só se aproxima razoavelmente do real quando a profundidade do túnel é muito maior que sua altura (Zagor~~is~~<sup>is</sup>, 1975).

O material do maciço é considerado elasto-plástico perfeito. No domínio elástico o estado de tensões é determinado de acordo com as equações da teoria da elasticidade para cavidades circulares. No domínio plástico o material obedece ao critério de escoamento de Coulomb.

A partir das considerações acima, é calculada a fronteira das regiões elástica e plástica no maciço. Para um estado de tensões iniciais hidrostático, a zona plástica terá forma circular, cujo raio pode ser determinado analiticamente, assim como as tensões no contorno da cavidade (ver Szechy, 1966), representadas na Fig. II-9.

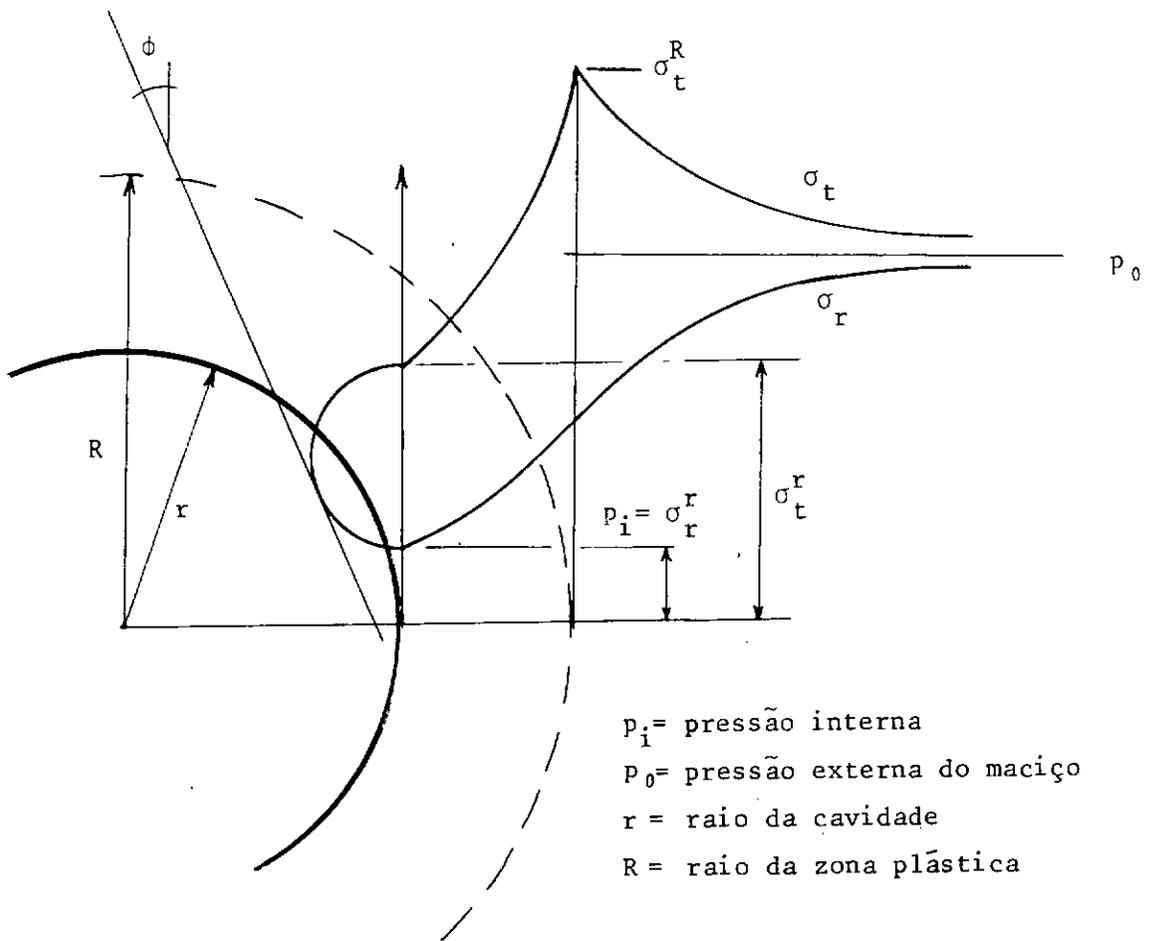


Fig. II-9-Método das zonas plásticas

Como a extensão da zona plástica depende consideravelmente da relação entre as tensões iniciais horizontal e vertical, Kastner também desenvolveu uma teoria de forma a levar em consideração valores de  $K_0$  diferentes de 1.

Apesar das críticas que podem ser feitas ao método das zonas plásticas, o mérito de Kastner no estudo do problema de túneis é reconhecido, pois ele chamou a atenção de alguns aspectos interessantes a considerar nos maciços rochosos e com isto mostrou o caminho para os mais recentes desenvolvimentos (Kovari, 1972).

## II-2-4- O método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos é um processo de cálculo numérico para a obtenção de soluções aproximadas de certos problemas físicos. Trata-se de uma técnica de interpolação que permite aproximar qualquer função contínua por um modelo de cálculo discreto, que consiste na definição de um conjunto de valores da função num número finito de pontos do seu domínio (pontos nodais), e de um conjunto de subdomínios (elementos finitos), onde se aproxima a função a estudar. Em cada elemento finito a definição da função é feita unicamente em relação aos valores da função no número discreto de pontos nodais existentes nesse elemento (Fig. II-10). São estudadas condições para que a função adotada nos subdomínios atenda a condições de convergência, o que garantirá que refinando-se a malha a solução convirja para a solução exata.

O método possibilita a idealização satisfatória da sequência de escavação e construção o que possibilita a comparação entre os valores calculados e observados para cada etapa. Esta análise mais elaborada tem, todavia, a inconveniência de maior número de dados de entrada, com o conseqüente acréscimo de custo e tempo para interpretação dos resultados. Este procedimento, no entanto, é bastante racional e de grande valia principalmente quando estão em jogo importantes decisões de projeto.

Uma vantagem do método é possibilitar, com facilidade, o estudo paramétrico para o problema. É necessário para tal que os dados de entrada combinados sejam os mais significativos, de forma que o número de casos estudados esteja dentro dos

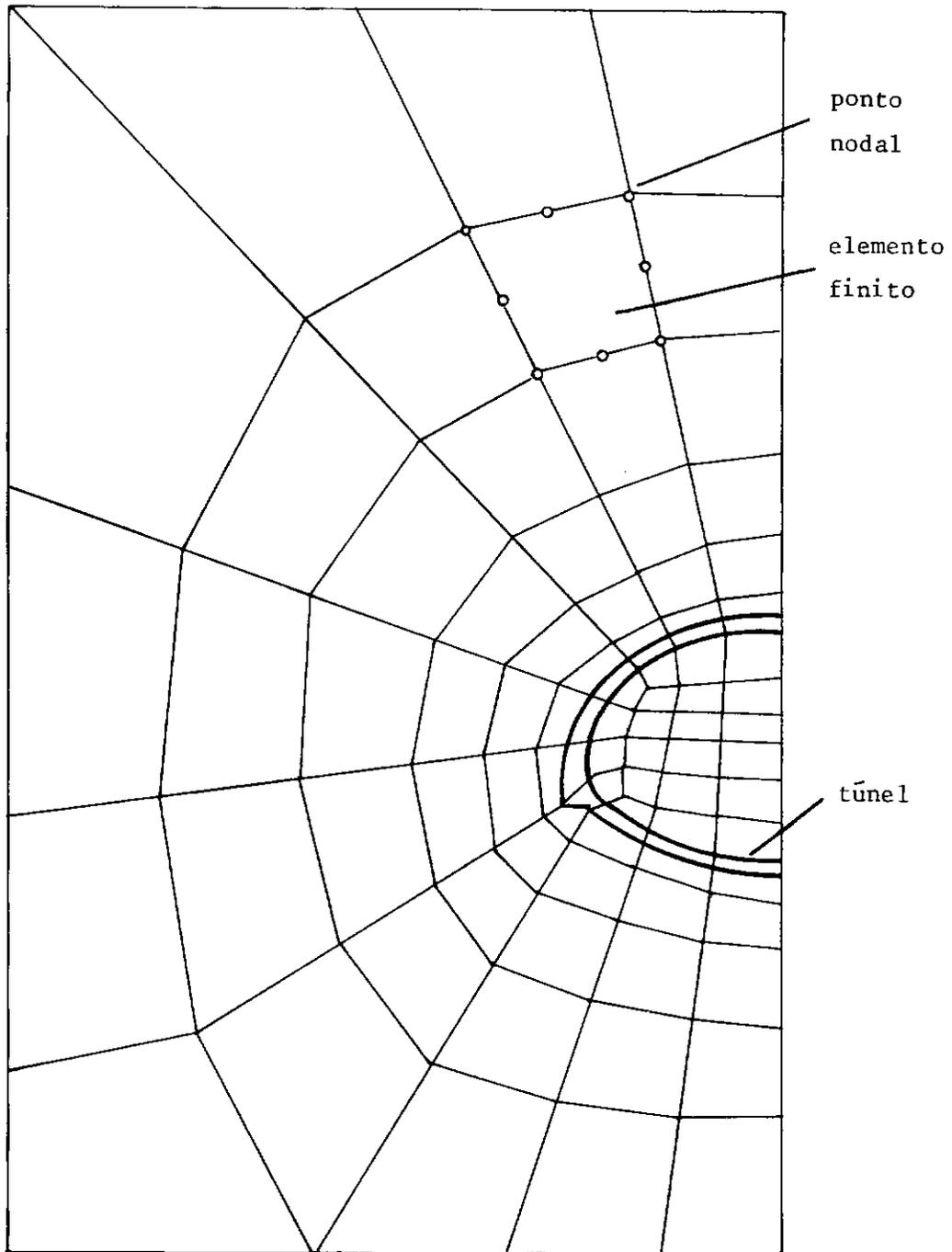


Fig. II-10-Discretização do maciço e túnel para cálculo pelo método dos elementos finitos.

limites práticos.

Outra vantagem do método é permitir a consideração de materiais anisótropos e heterogêneos e comportamentos não-lineares.

O insuficiente conhecimento das leis constitutivas dos materiais (e não a impossibilidade de as incluir no método), bem como a imprecisão decorrente dos parâmetros de entrada dos materiais do maciço, são as maiores limitações do uso do método dos elementos finitos no projeto de túneis. É importante frisar que os métodos anteriores, de hipóteses mais simples, utilizando os mesmos parâmetros, terão imprecisões conseqüentemente maiores. Existem também limitações devidas ao equipamento computacional disponível e eventualmente ao custo de certas análises. Isto acontece principalmente ao simular as etapas de escavação, como descrito acima, e quando se utilizam leis constitutivas mais complexas que o comportamento elástico linear.

Em qualquer caso é necessário que as análises (de computador, instrumentação e conhecimento prático de túneis) se complementem, e que a importância da obra e os resultados justifiquem o custo despendido.

Pelas razões expostas acima pode-se verificar as vantagens do método dos elementos finitos sobre os anteriores, razão pela qual o utilizaremos neste trabalho.

No Capítulo V são descritos os aspectos básicos da teoria do método dos elementos finitos para aplicação a túneis.

## C A P Í T U L O    I I I

CONCEITOS DE PLASTICIDADE APLICADOS À MECÂNICA DOS SOLOS

Os problemas de mecânica dos solos são usualmente tratados através das teorias da elasticidade linear e da plasticidade.

A teoria da elasticidade linear é utilizada em problemas relacionados com a determinação de tensões e deformações do solo quando não existe ruptura envolvida. São exemplos destes , o cálculo de distribuição de pressões sob fundações em cargas de trabalho, a determinação de tensões e deformações ao redor de cavidades e escavações e o cálculo de recalques de fundações.

A teoria da plasticidade é utilizada para a solução de problemas de estabilidade em geral, como os de capacidade de car-ga de fundações, estabilidade de taludes e empuxos de terra. Esses problemas caracterizam-se pela determinação das condições de ruptura da massa de solo.

Como outros ramos da mecânica dos sólidos, a teoria da plasticidade requer a consideração de equações de equilíbrio , equações de compatibilidade e relações entre tensões e deformações. As equações de equilíbrio e de compatibilidade são inde-pendentes das propriedades dos materiais e, portanto, são váli-das para comportamentos elásticos e plásticos. A diferença en-tre as duas teorias está na relação entre tensões e deforma-ções, ou lei constitutiva dos materiais.

A teoria da elasticidade linear é baseada na lei de Hooke, que estabelece uma relação linear entre tensões e deformações. Na teoria da plasticidade, as relações entre tensões e deformações são mais complexas.

Deve-se observar que a análise em separado dos problemas,

como descrito acima, é artificial, pois, no campo, o solo se deforma continuamente, a partir do seu estado inicial até a ruptura, passando pelas fases elástica e plástica. A análise conjunta dos comportamentos elástico e plástico torna-se possível com a utilização do método dos elementos finitos.

Como os conceitos da teoria da elasticidade são do conhecimento dos engenheiros em geral, o resumo a seguir se limitará a conceitos básicos da teoria da plasticidade para aplicação à mecânica dos solos.

Essa colocação de conceitos é necessária para um melhor entendimento dos modelos elasto-plásticos que adiante serão revistos, assim como para a utilização da teoria da plasticidade no método dos elementos finitos.

### III-1- O comportamento tensão-deformação dos solos.

Para a esplanção dos conceitos da teoria da plasticidade é de grande auxílio a descrição prévia do comportamento tensão-deformação de um solo genérico submetido a um estado de tensão uniaxial, como o ensaio de compressão simples. Posteriormente será efetuada a generalização de conceitos para estados de tensão complexos.

A Fig. III-1 representa uma curva tensão-deformação para um ensaio de compressão simples. No início da aplicação da carga, as tensões e deformações permanecem proporcionais até o ponto A, chamado de limite de proporcionalidade. O domínio elástico estende-se geralmente até B, a partir de onde se iniciam as deformações plásticas ou irreversíveis. Até B as equações da teoria da elasticidade são válidas, embora de A a B o material seja elástico não linear, devendo-se, portanto, considerar a variação do módulo de elasticidade. A tensão correspondente ao ponto B é chamada de tensão de escoamento inicial. A partir de

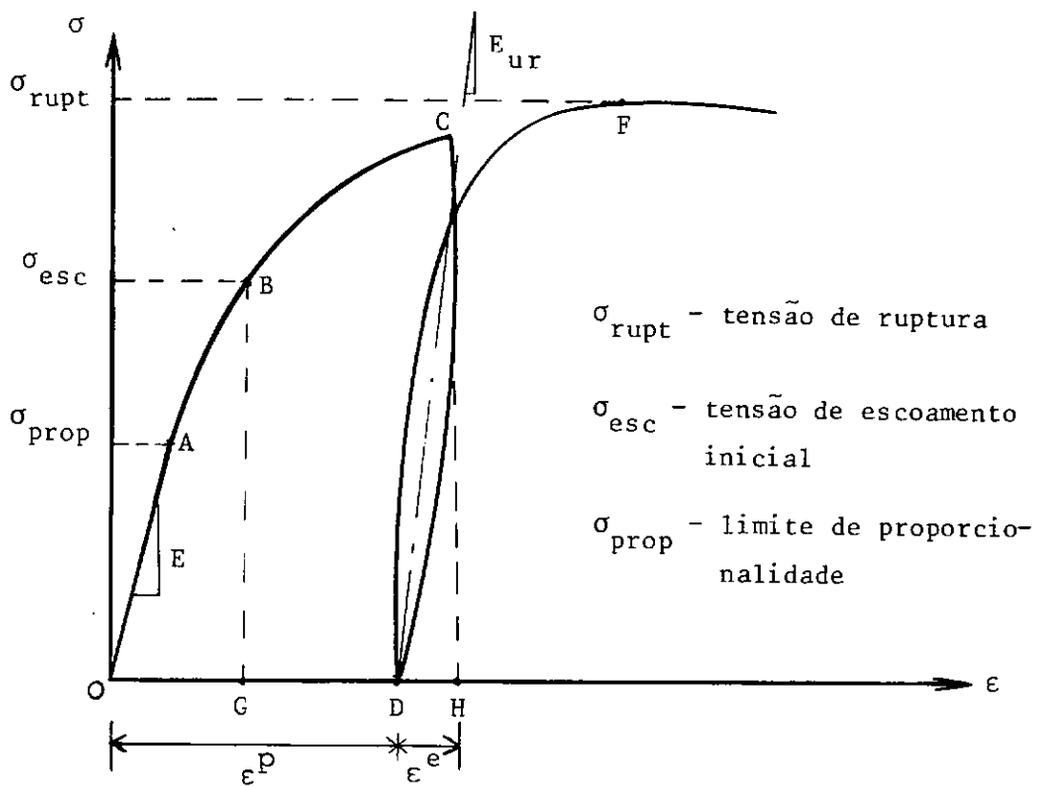


Fig. III.1-Curva tensão-deformação genérica de um solo com encruamento. ("Strain-hardening")

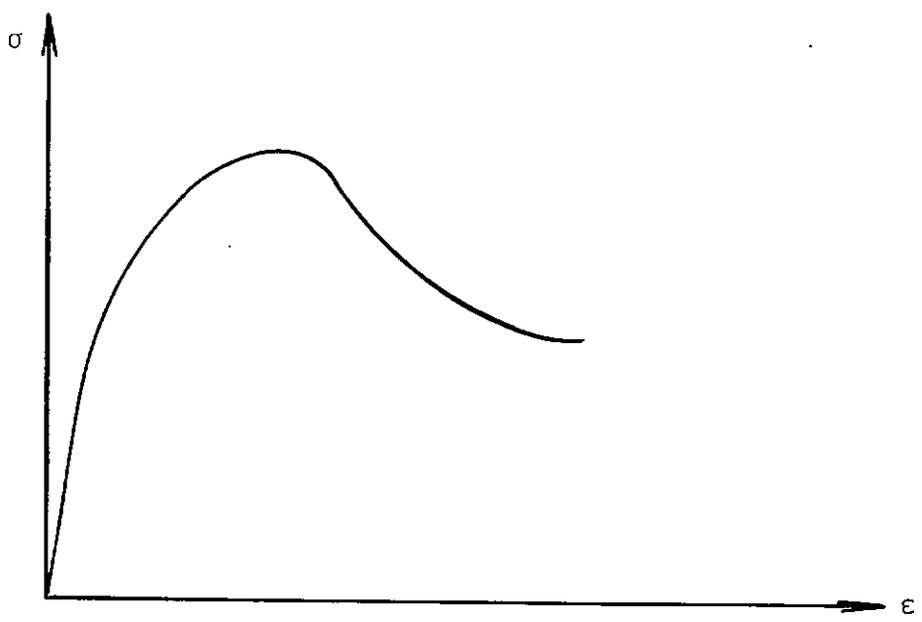


Fig. III-2-Curva tensão-deformação de um solo com amolecimento. ("Strain-softening")

B inicia-se o escoamento do material ou o domínio plástico. Se a partir de um ponto C, nesta região, descarregamos o corpo de prova, a curva seguirá a linha descendente CD. No final do descarregamento obtém-se a deformação plástica OD. Recarregando-se o corpo de prova a partir de D, obteremos uma trajetória que se desvia da anterior. O laço nas trajetórias de descarregamento e recarregamento é invariavelmente negligenciado nas análises, sendo substituído por uma linha reta. Neste caso, o módulo elástico de descarregamento-recarregamento  $E_{ur}$  é sensivelmente maior que o módulo elástico inicial E. Com a continuação do carregamento, a curva se apresenta como um prolongamento de BC, com a tensão de escoamento aumentando. No ponto F é atingida a máxima tensão, ocorrendo a ruptura ou colapso do material. O aumento das tensões após o início do escoamento é chamado de encruamento ou endurecimento ( *strain-hardening* ).

A forma da curva tensão-deformação dependerá do tipo do solo, do tipo de carregamento aplicado e de sua velocidade, e de outros fatores inerentes aos ensaios. Outra curva tensão-deformação típica de solos é mostrada na Fig. III-2, onde se observa uma diminuição de tensões após a resistência de pico. Este comportamento é chamado de enfraquecimento ou amolecimento ( *strain-softening* ).

É importante analisar as energias em jogo nos domínios elástico e plástico. O trabalho realizado por unidade de volume para o carregamento de O até B é dado pela área OBG (FIG, III-1). Ao se efetuar o descarregamento, o mesmo trabalho é restituído, não havendo dissipação de energia no processo. Quando se efetua o carregamento até C, o trabalho correspondente será fornecido pela área OACH. Quando se realiza o descarregamento, o trabalho restituído pelo material é dado pela área CDH, dissipando

do-se no processo o trabalho correspondente à área OACD. Pode-se concluir que, com o aparecimento de deformações plásticas, a dissipação de energia passa a ser diferente de zero.

Pelo exposto acima observa-se que o comportamento do solo é de um modo geral elástico não-linear e plástico.

Na teoria da plasticidade clássica o solo é idealizado como elasto-plástico perfeito ou rígido plástico (Fig. III-3). Para o comportamento rígido-plástico o módulo de elasticidade tem valor infinito.

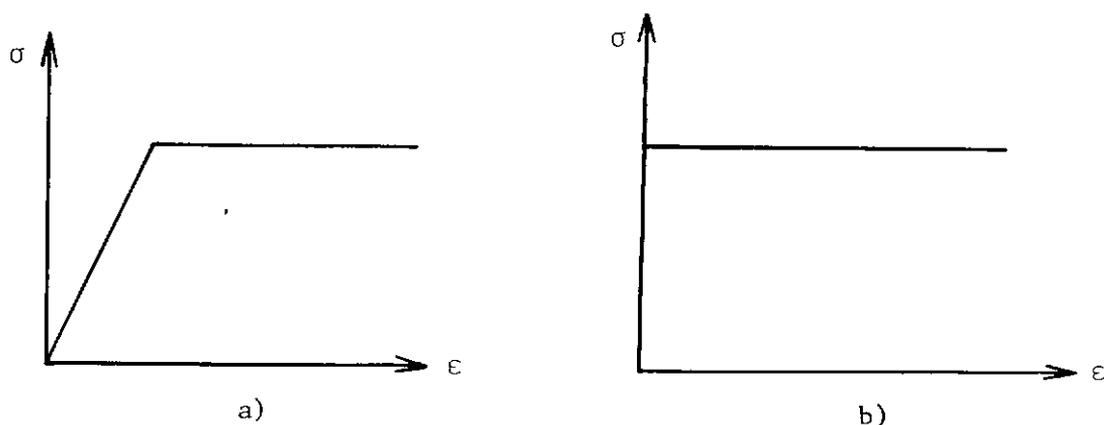


Fig. III-3-Modelos elasto-plásticos utilizados em aplicações clássicas da teoria da plasticidade:

a) elasto-plástico perfeito; b) rígido-plástico.

Como vimos, em tração ou compressão simples, o limite elástico do material é representado apenas pelo valor da tensão de escoamento. Entretanto, no caso de estados de tensões multiaxiais, um simples valor de tensão não pode ser usado para definir a fronteira-limite da região elástica. Assim, é necessária uma generalização da condição de escoamento do estado de tensão uniaxial para o multiaxial, que veremos a seguir.

O comportamento plástico de um material pode ser definido completamente quando se especifica:

- a) uma condição de escoamento inicial, definindo o limite elástico do material;
- b) uma lei de endurecimento ou enfraquecimento, usada para estabelecer as condições dos estados plásticos subsequentes, necessária para materiais com endurecimento ou enfraquecimento;
- c) uma lei de escoamento plástico, relacionando os incrementos de deformações com as tensões e incrementos de tensões.

Para materiais elasto-plásticos perfeitos não é necessária a definição do item b, pois a condição de escoamento inicial será suficiente.

### III-2 Condição de escoamento (yield condition)

É necessário caracterizar a transição da fase elástica para a fase plástica. Isto será efetuado através de uma condição de escoamento inicial.

Coulomb, em 1773, propôs, a partir de observações em empuxos de terra, a seguinte equação, correlacionando tensões normais  $\sigma$  e cisalhantes  $\tau$  na ruptura:

$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad (\text{III-1})$$

onde  $c$  e  $\phi$  são a coesão e o ângulo de atrito interno do solo. Mohr, em 1880, baseado em vários tipos de ensaios, obteve uma envoltória curva no plano  $\tau, \sigma$ . Para um intervalo limitado de pressões, a envoltória de Mohr pode ser considerada uma reta. Assim, denomina-se de critério de Mohr-Coulomb a utilização da equação de Coulomb para representar a envoltória de Mohr (Fig. III-4).

O critério de Mohr-Coulomb é, na realidade, um critério de ruptura, pois considera apenas o estado de colapso final do material. Pode ser definido como um critério de escoamento ape

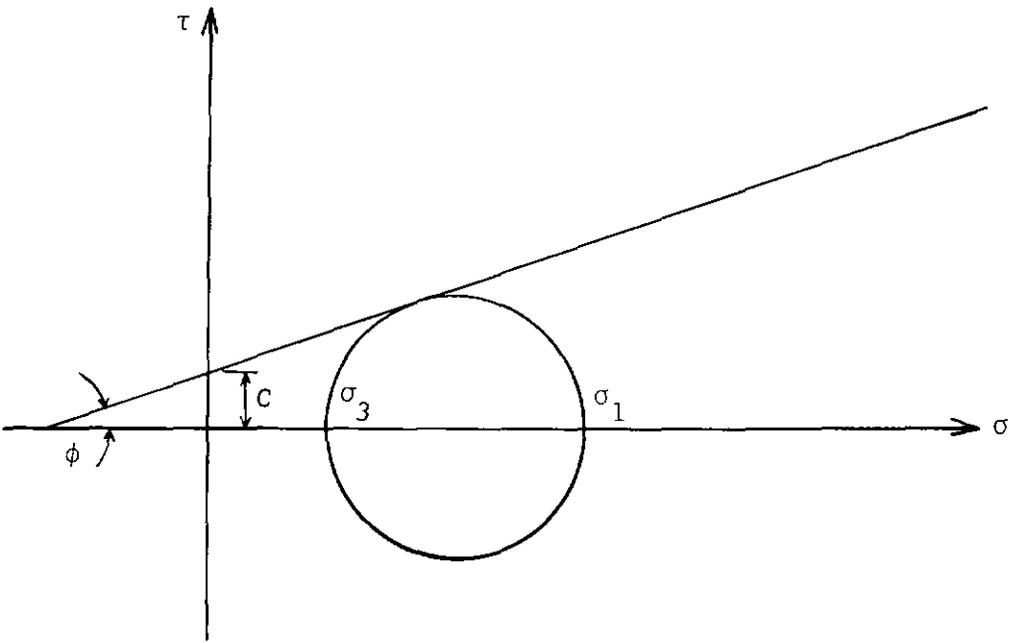


Fig. III-4-Critério de Mohr-Coulomb

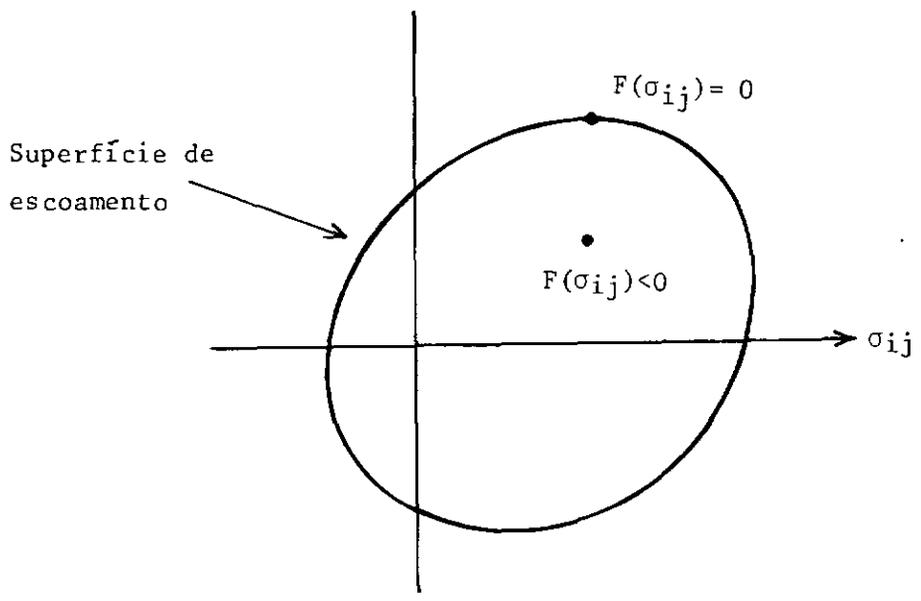


Fig. III-5-Representação da função de escoamento no espaço das tensões  $\sigma_{ij}$

nas para materiais plásticos perfeitos, nos quais a ruptura e o início do escoamento coincidem.

O critério de Mohr-Coulomb pode ser também representado por:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2c \cos \phi + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi \quad \text{(III-2)}$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  são as tensões principais maior e menor, respectivamente. Este critério independe, portanto, da tensão principal intermediária  $\sigma_2$ . Soares (1971) discute a aplicação do critério de Mohr-Coulomb aos solos.

A condição de escoamento pode ser definida através da função de escoamento  $F$ , dependente do estado de tensões  $\underline{\sigma}$ , onde o til significa notação matricial. O escoamento plástico ocorrerá quando

$$F(\underline{\sigma}) = 0 \quad \text{(III-3)}$$

Estados de tensões para os quais  $F(\underline{\sigma}) < 0$  correspondem a comportamentos elásticos, e  $F(\underline{\sigma}) > 0$  não tem significado.

Como o estado de tensão em um ponto fica definido através dos seis componentes do tensor das tensões, temos para a condição de escoamento

$$F(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) = 0$$

Estando ligada ao comportamento físico do material, a função de escoamento deve independer do referencial adotado e, portanto, pode ser representada em função das tensões principais  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ , ou, ainda, em função dos invariantes das tensões  $F(I_1, I_2, I_3) = 0$ .

Quando representamos a função de escoamento no espaço das tensões  $\underline{\sigma}$ , temos a superfície de escoamento (*yield surface*). Ela é o lugar geométrico dos pontos que representam estados de tensões correspondentes ao início das deformações plásticas e constitui a fronteira do domínio que limita internamente esta -

dos de tensões correspondentes às deformações elásticas (Velloso, 1967). Os pontos sobre a superfície (Fig. III-5) representam a fase plástica ( $F=0$ ) e os pontos internos representam a fase elástica ( $F<0$ ).

Uma interpretação geométrica muito útil da superfície de escoamento foi sugerida por Westergaard e Haig, independentemente, em 1920. Nessa interpretação, as tensões principais formam o sistema de coordenadas de um espaço tridimensional, e qualquer ponto neste espaço corresponde a um estado de tensão. O vetor de posição em qualquer ponto  $P$  ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) pode ser dividido em uma componente  $OA$  ao longo da reta  $OZ$ , a qual faz ângulos iguais com os eixos coordenados (reta hidrostática,  $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ ), e em uma componente  $OB$  no plano perpendicular a  $OZ$ , que passa através da origem (plano  $\pi$ ). A componente  $OA$  representa tensões hidrostáticas, e a componente  $OB$  representa tensões desviatórias (Fig. III-6).

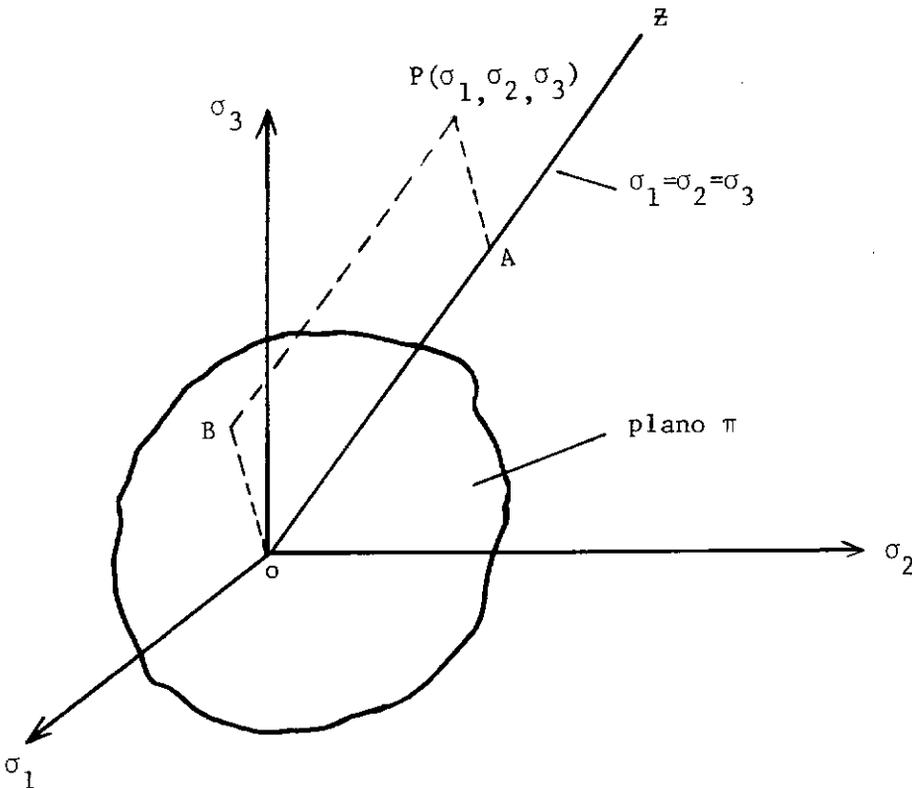


Fig. III-6- Espaço de Haig-Westergaard

O critério de Mohr-Coulomb pode também ser representado no espaço das tensões principais  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Obteremos desta forma uma pirâmide hexagonal reta igualmente inclinada em relação aos três eixos  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  (Fig. III-7b). A base da pirâmide é um hexágono irregular de lados iguais, pois que as tensões de escoamento na tração diferem da correspondente na compressão.

Os critérios de Tresca e Von Mises são também usados em mecânica dos solos e se aplicam, por exemplo, a argilas saturadas sob condições não drenadas.

Em 1913, Von Mises sugeriu o critério da energia de distorção máxima, dado pela equação

$$F = J_2 - \frac{\sigma_e^2}{3} = 0 \quad (III-4)$$

onde  $J_2$  é o segundo invariante dos desvios das tensões, e  $\sigma_e$  é a tensão de escoamento na tração ou compressão simples. Pode também ser representado por

$$F = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 2\sigma_e^2 = 0 \quad (III-5)$$

Tresca, em 1864, propôs o critério da tensão cisalhante máxima, expresso em sua forma mais geral por

$$F = \left[ (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sigma_e^2 \right] \left[ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_e^2 \right] \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_e^2 \right] = 0 \quad (III-6)$$

O critério de Tresca é um caso particular do critério de Coulomb para  $\phi = 0$ , e é representado no espaço das tensões principais por um prisma reto de base hexagonal regular (Fig. III-7b), tendo por eixo a reta hidrostática. O critério de Von Mises é representado nesse mesmo espaço por um cilindro reto regular de base circular.

Para incluir a influência da pressão hidrostática nos critérios de escoamento, Drucker e Prager (1952) e Drucker (1953) propuseram os critérios de Von Mises e Tresca estendidos. O primeiro, também chamado de critério de Drucker-Prager, é repre -

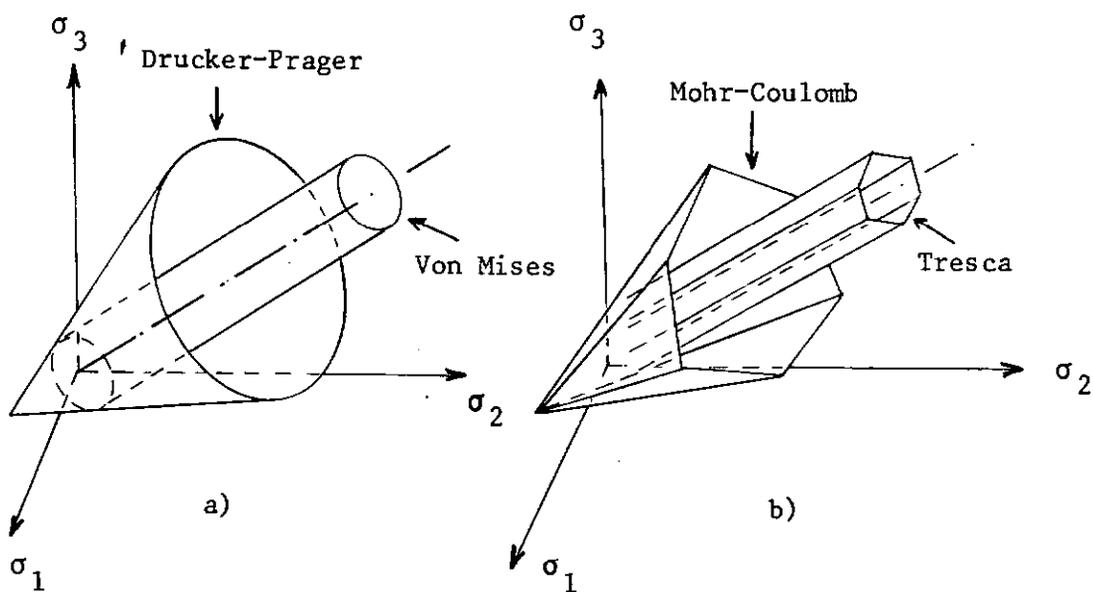


Fig. III-7-Algumas superfícies de escoamento no espaço das tensões principais: a) Drucker-Prager e Von Mises; b) Mohr-Coulomb e Tresca.

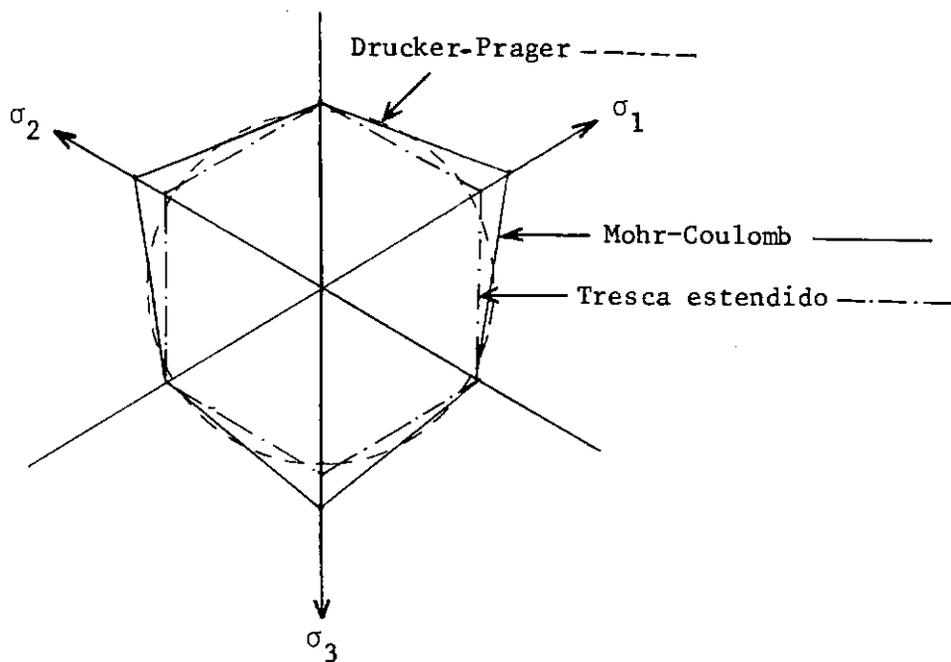


Fig. III-8- Seção do Plano  $\pi$  com as superfícies de escoamento de Drucker-Prager, Tresca estendido e Von Mises

sentado no espaço das tensões principais por um cone reto circular igualmente inclinado em relação aos três eixos principais (Fig. III-7a) e cuja equação é

$$F = \alpha I_1 - J_2^{1/2} - k = 0 \quad (III-7)$$

onde  $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  é o primeiro invariante das tensões e

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$$

é o segundo invariante dos desvios das tensões, e  $\alpha$  e  $k$  são constantes físicas que, para o caso de estado plano de deformação, se expressam por

$$\alpha = \frac{\text{tg } \phi}{\sqrt{9 + 12 \text{tg}^2 \phi}} \quad \text{e} \quad k = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \text{tg}^2 \phi}} \quad (III-8)$$

onde  $c$  e  $\phi$  são a coesão e o ângulo de atrito do material.

O critério de Tresca estendido é uma pirâmide reta de base hexagonal regular.

A Fig. III-8 mostra a interseção das superfícies de escoamento de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager e Tresca estendido com o plano  $\pi$ . Bishop (1966), observando os três critérios através de dados experimentais, concluiu que o critério de Mohr-Coulomb é o que melhor prevê a ruptura ou o escoamento do solo. Apesar disso, o critério de Drucker-Prager é muito usado por sua simplicidade, pois é função apenas de dois invariantes das tensões, enquanto o critério de Mohr-Coulomb necessita de ser definido em função de três invariantes. Entretanto, pode ser mostrado (Chen, 1975) que, para o caso de deformação plana na ruptura, os critérios de Drucker-Prager e Tresca estendido reduzem-se ao critério de Mohr-Coulomb em duas dimensões.

### III-3 - Lei de endurecimento

Para um material que apresente uma curva tensão-deformação

com endurecimento após o início do escoamento, como a da Fig.III-1, haverá uma nova tensão de escoamento para um novo carregamento, que será representado por outra superfície de escoamento. Definem-se assim as superfícies de escoamentos subsequentes, correspondentes aos diversos carregamentos ocorridos. Para este caso é usual chamar a função e a superfície de escoamento de função e superfície de carregamento.

No caso geral, então, pode-se dizer que a posição da superfície de escoamento será dependente do valor instantâneo de um parâmetro  $h$  de endurecimento, que pode ser a deformação plástica volumétrica ( *strain-hardening* ), o trabalho plástico realizado ( *work-hardening* ), ou o índice de vazios, como é usual em solos. Em outras formulações mais complexas, a função de escoamento pode também ser dependente da deformação plástica. Portanto, no caso geral

$$F = F(\sigma, \epsilon^P, h) \quad (\text{III-9})$$

Para um material elasto-plástico perfeito a função de escoamento depende apenas do estado de tensões (eq. III-3).

De um modo geral, no entanto, a superfície de escoamento varia em tamanho e forma, de acordo com o estado de tensão. O aumento em tamanho significará um endurecimento do solo com a deformação ( *strain-hardening* ) e uma diminuição em tamanho significará um enfraquecimento do solo com a deformação ( *strain-softening* ). Em aplicações de plasticidade à mecânica dos solos, admite-se que durante o escoamento plástico a superfície de carregamento expande-se ou contrai-se em relação à origem, mantendo a mesma forma, centro e orientação da superfície de escoamento. Esse comportamento é chamado de endurecimento ou enfraquecimento isotrópico (Fig. III-9a). Outra consideração menos comum é a de que, durante o escoamento, a superfície de carregamento translada-se, mantendo o

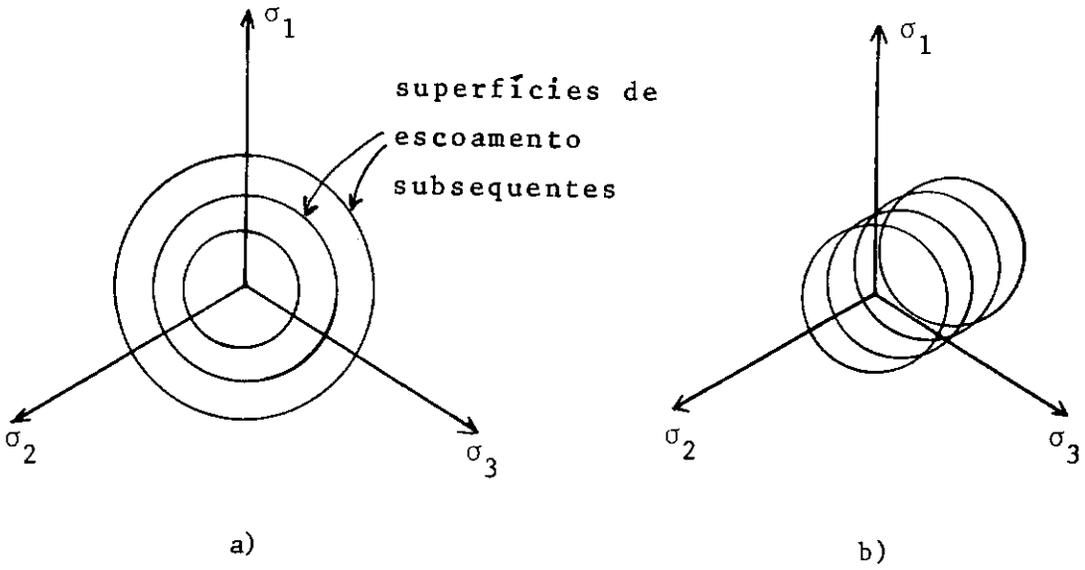


Fig. III-9-Leis de endurecimento: a) isotrópico; b) cinemático.

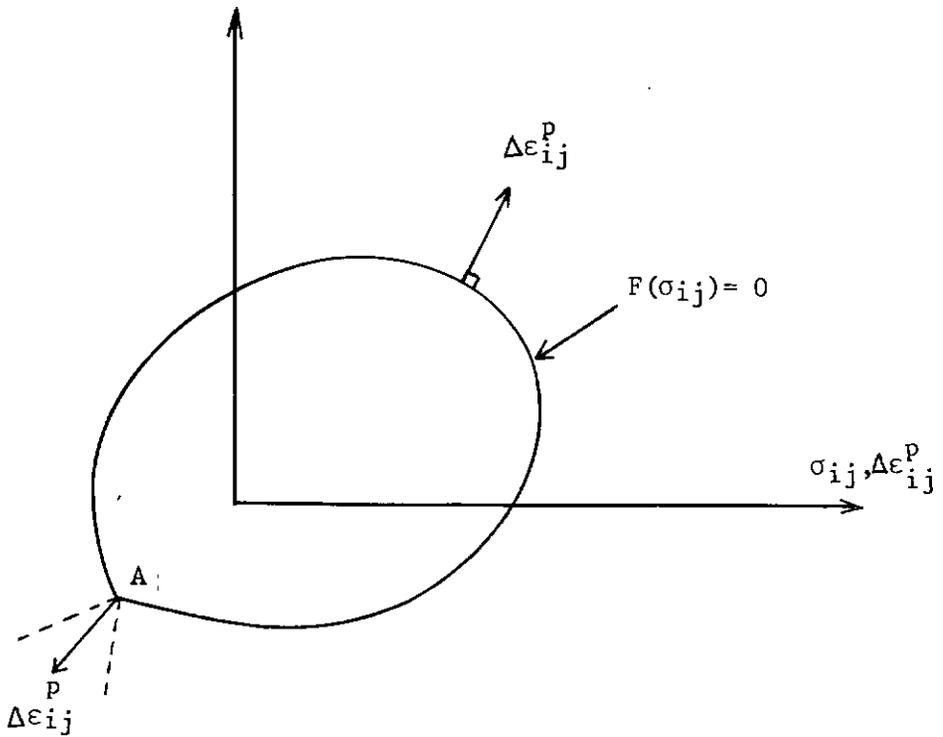


Fig. III-10-Representação da lei do escoamento plástico associada no espaço de tensões  $\sigma_{ij}$

tamanho, forma e orientação da superfície de escoamento. Isto é chamado de endurecimento cinemático (Fig. III-9b), o que permite a consideração do efeito Baushinger.

Análises teóricas e experimentais mostram que, se uma amostra é tracionada além de seu ponto de escoamento, sendo depois descarregada e a seguir comprimida, a tensão de escoamento em compressão será menor do que a tensão de escoamento original em tração. Este fenômeno é conhecido como efeito Baushinger. Na maioria das situações esse efeito é desprezado.

#### III-4- Lei do escoamento plástico ( flow rule )

Em sua forma mais geral (equação III-9), o critério de escoamento estabelece as condições de transição não só do estado elástico para o estado plástico, mas também do estado plástico para outro. Informações adicionais na forma de relações constitutivas entre incremento de deformações plásticas, tensões e incrementos de tensões, são necessárias para descrever o comportamento plástico de um material. Essas relações são fornecidas pela lei do escoamento plástico que veremos a seguir.

Como Drucker (1950), suporemos agora que temos um dado estado de tensões. Aumentamos então as tensões e, lentamente, as retiramos. Drucker postulou que, para um material com endurecimento, o trabalho plástico por unidade de volume realizado em todo o ciclo de aplicação de tensões é zero ou positivo, ou

$$d\sigma \cdot d\varepsilon^P \geq 0 \quad \text{(III-10)}$$

onde o sinal de igualdade é usado apenas para  $d\varepsilon^P = 0$ , e  $d\sigma$  é o incremento de tensão a partir do estado de tensão  $\sigma$  que produz um incremento de deformação plástica  $d\varepsilon^P$ . Da mesma forma, o trabalho realizado por um material plástico perfeito será

$$d\sigma \cdot d\varepsilon^P = 0 \quad \text{(III-11)}$$

Pelas considerações acima e postulando a existência de u ma função de carregamento e a lineariedade entre elementos infi nitesimais de tensões e deformações plásticas, chega-se a lei do escoamento plástico

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{III-12}) \quad (\text{III-12})$$

relacionando velocidades de deformações plásticas com o gradi- ente da função de escoamento. Nessa equação  $\dot{\lambda}$  é um fator de pro- porcionalidade escalar maior que zero que varia durante o pro- cesso de deformação. A equação pode também ser apresentada em termos dos incrementos de deformação plástica, visto que

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P \Delta t = \Delta \underline{\underline{\epsilon}}^P \quad \text{e} \quad \dot{\lambda} \Delta t = \lambda, \quad \text{decorre}$$

$$\Delta \underline{\underline{\epsilon}}^P = \lambda \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{---} \quad (\text{III-13})$$

As equações III.10 e III.12 formam o postulado da estabi- lidade de Drucker, para o qual os dois requisitos seguintes de- vem ser satisfeitos (Fig. III-10):

- a) as superfícies de escoamento e carregamento devem ser con- vexas com respeito à origem dos espaços das tensões;
- b) o incremento de deformação plástica deve ser normal à su- perfície de escoamento no espaço de tensões instantâneo e estar situado entre normais no caso de ser um ponto singu- lar (ponto A da Fig. III-10).

Uma descrição mais detalhada do postulado de Drucker e das condições de convexidade e normalidade pode ser vista em Drucker (1950), ou ainda em Velloso (1967) ou Zagottis(1974).

Apenas para os materiais elasto-plásticos perfeitos e en- cruáveis, chamados por Drucker de materiais estáveis, é que de- ve ser aplicado o postulado de Drucker e as condições de convexi

dade e normalidade. Os materiais que apresentam amolecimento são ditos materiais instáveis e para eles as propriedades descritas anteriormente não são válidas.

A lei do escoamento plástico como originalmente definida parte da hipótese da existência de uma função de potencial plástico  $g(\underline{\sigma})$ . Esta função representa a superfície de potencial plástico, a qual tem sempre os vetores de deformação plástica perpendiculares a ela. Define-se assim a lei do escoamento plástico não-associada por

$$\dot{\underline{\epsilon}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}}$$

Quando as funções  $F$  e  $g$  são idênticas, temos a lei de escoamento associada, que corresponde à equação III-12, como pode ser visto em Bland (1957).

Uma das conseqüências da lei de escoamento plástico associada, quando se utiliza qualquer extensão do critério de Coulomb juntamente com um modelo elasto-plástico perfeito, é a dilatação que acompanha o cisalhamento de um solo com um ângulo de atrito  $\phi > 0$ .

O conceito de dilatação é explicado por Chen (1975), utilizando modelo físico análogo ao ensaio de cisalhamento direto. Com o mesmo modelo são exemplificadas as leis de escoamento associada e não-associada.

Seja uma camada de solo granular denso submetida à ação de duas forças: uma normal ( $N$ ) ao plano  $l-l$ , e outra tangencial ( $T$ ) ao mesmo plano. A força  $N$  permanece constante e a força  $T$  aumenta gradativamente até um valor que provocará o deslizamento do bloco. Neste momento uma parcela da resistência ao cisalhamento mobilizada } decorre da coesão e a outra decorre do ângulo de atrito, a qual se divide em duas partes: a primeira corresponde

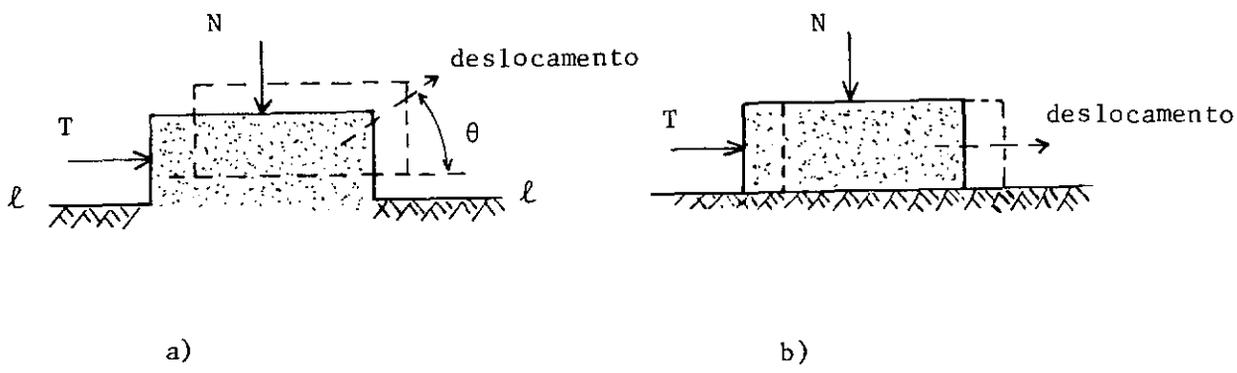


Fig. III-11- a) cisalhamento plástica ( $\phi \neq 0$ );  
b) cisalhamento por atrito.

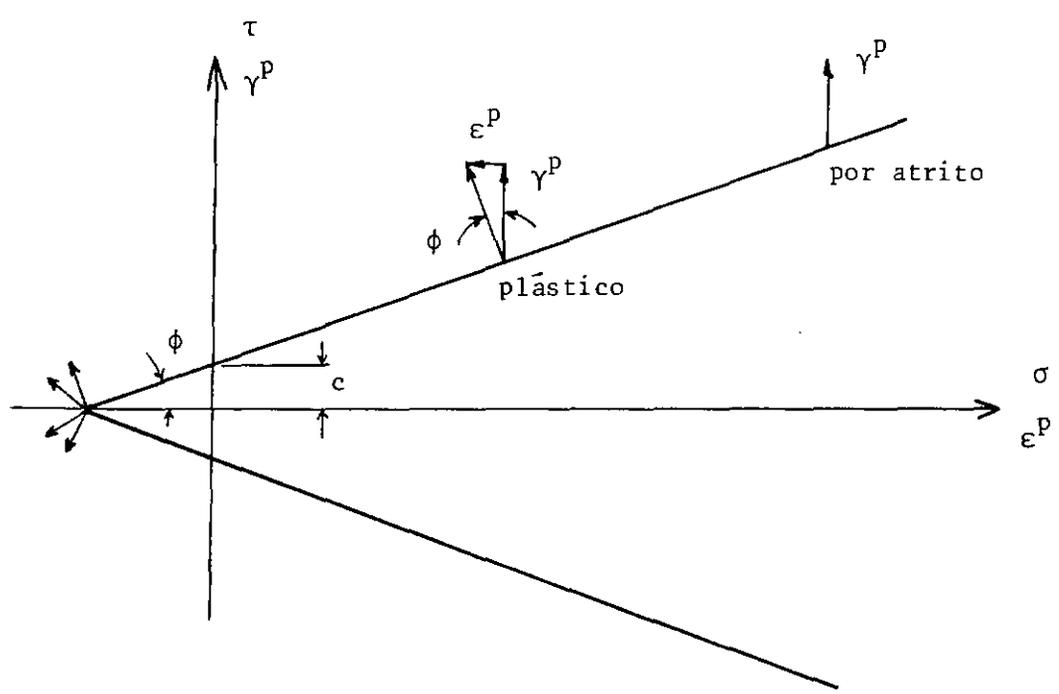


Fig. III-12- Critério de Coulomb e ilustração de cisalhamentos plástica e por atrito

ao atrito propriamente dito entre partículas, e a segunda resulta do entrosamento ( *interlocking* ) entre partículas. É esta última parte que acarreta um aumento de volume durante o cisalhamento. Nessa situação o vetor deslocamento fará um ângulo  $\theta$  com o plano de cisalhamento (Fig. III-11a).

Se o solo for idealizado como perfeitamente plástico com o critério de escoamento de Coulomb, e se representarmos, no mesmo gráfico de tensões (  $\tau, \sigma$  ) de Coulomb, as deformações plásticas normal (  $\epsilon^P$  ) e tangencial (  $\gamma^P$  ) nas direções correspondentes às tensões, teremos a Fig. III-12. Quando os eixos correspondentes são superpostos, pela lei do escoamento plástico a deformação plástica resultante deve ser perpendicular à curva de escoamento. Podemos concluir, então, que  $\theta = \phi$ .

Se agora idealizarmos um solo que tenha apenas atrito entre partículas, sendo o entrosamento ignorado (  $\theta = 0$  ), teremos um cisalhamento por atrito, representado na Fig. III-11b. Nesse caso, a lei de Coulomb continuará ainda válida; mas, como existe apenas  $\gamma^P$ , não haverá normalidade do vetor deformação plástica em relação à superfície de escoamento, exceto para um deslizamento sem atrito (  $\phi = 0$  ). A variação de volume nesse caso será nula. Para a situação da Fig. III-12, em que  $\theta = \phi$ , teremos uma lei de escoamento associada, e, quando  $\theta = 0$ , uma lei de escoamento não associada.

Se um escoamento plástico não associado é considerado, utiliza-se em geral a mesma forma de descrição para as superfícies de escoamento e de potencial plástico, mas coloca-se um ângulo  $\theta$  em lugar de  $\phi$  para a definição da última. Se utilizarmos, por exemplo, o critério de Mohr-Coulomb e desejarmos um escoamento que não apresente variação de volume, a superfície usada para a função de potencial plástico  $g$  será a utilizada pela e-

quação de Mohr-Coulomb com  $\phi = 0$ , ou, seja, o critério de Tresca (Fig. III-7b). Se por outro lado utilizarmos o critério de Drucker-Prager, para  $\phi = 0$  teremos o critério de Von Mises (Fig. III-7a).

Os solos reais não são puramente plásticos ( $\phi = \phi$ ) nem trabalham apenas por atrito ( $\phi = 0$ ). Assim, a comparação de experiências práticas com os modelos descritos acima fornecerá algumas diferenças, como, por exemplo, a dilatação excessiva que a teoria prevê quando comparada com a observada na prática. Por outro lado, alguns solos diminuem de volume ao invés de aumentar durante o processo de cisalhamento (areias fofas e a maioria dos solos argilosos).

## C A P Í T U L O IV

REVISÃO DOS MODELOS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA USO NO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS FINITOS.

Diversos modelos tensão-deformação têm sido propostos na literatura. As formulações são baseadas em conceitos clássicos da mecânica dos meios contínuos, como as teorias da elasticidade e plasticidade. Tais teorias não são novas, mas a adaptação destas à análise numérica fazem-nas mais poderosas e versáteis.

São vários os fatores que influem no comportamento tensão deformação dos solos. Duncan(1972) os divide em dois grupos descritos a seguir.

Os fatores composicionais, que exercem influência fundamental sobre o comportamento do solo, incluem: umidade, granulometria, composição mineralógica, arranjo das partículas, densidade, etc. Esses fatores são normalmente considerados apenas a nível de ensaio para determinação dos parâmetros e não diretamente na formulação do modelo. Já os fatores ambientais, entram algumas vezes na formulação e incluem todos aqueles responsáveis pelo tipo e condições do carregamento a que o solo está sujeito, tais como a grandeza, a variação de tensões (carregamento primário, descarregamento ou recarregamento), a velocidade de aplicação da carga e assim por diante.

Devido à complexidade do comportamento tensão-deformação, existem numerosos trabalhos sobre o assunto. Um modelo apropriado a determinado tipo de solo e problema pode ser inadequado em outra situação.

O objetivo deste capítulo, cujo desenvolvimento julgamos útil esquematizar no quadro a seguir, é fazer um breve resumo dos principais ou mais representativos modelos tensão-deforma-

Modelos Elásticos	Modelos elásticos lineares						
	Modelos elásticos não-lineares	Modelos iterativos					
		Modelos incrementais	com E e $\nu$	Modelo bilinear			
				Modelo multilinear			
				Ajuste de curvas através de funções	Representação hiperbólica da curva tensão-deformação		
					Representação hiperbólica do coeficiente de Poisson		
					Representação exponencial do coeficiente de Poisson		
					Representação da curva tensão-deformação através de funções <i>spline</i>		
		com G e K	K constante e G variável				
	K e G variáveis e determinados independentemente						
Modelos Elasto-Plásticos	Modelo elasto-plástico perfeito com lei de escoamento associada						
	Modelos elasto-plásticos com encruamento ou amolecimento e lei de escoamento associada						
	Modelos elasto-plásticos com encruamento ou amolecimento, lei de escoamento associada e superfície de escoamento fechada						
	Modelo elasto-plástico encruável com lei de escoamento não-associada						
	Modelos elasto-plásticos com encruamento ou amolecimento e lei de escoamento associada ou não associada						

ção; na descrição de cada modelo é dada ênfase às características teóricas básicas, número de parâmetros e ensaios para definir o modelo, além dos tipos de aplicações realizadas.

#### IV-1- Modelos elásticos

##### IV-1-1- Modelos elásticos lineares

O comportamento elástico linear constitui, sem dúvida, o modelo mais simples. Verifica-se que é uma aproximação suficiente, do ponto de vista prático, para grande número de problemas, muitas vezes em face da pouca informação geotécnica disponível. Devido à sua simplicidade, este modelo foi aplicado à grande maioria dos problemas de engenharia geotécnica.

Em razão do comportamento não-linear apresentado pelos solos e rochas, a análise elástica linear, na falta de um modelo mais elaborado, pode servir para estudo paramétrico, obtenção de dados para projeto e interpretações simples de observações de campo, consideradas as suas limitações.

##### IV-1-2- Modelos elásticos não-lineares

Alguns modelos elásticos propostos na literatura procuram levar em consideração a não linearidade observada nas curvas tensão-deformação dos solos. Como os programas de elementos finitos são formulados com base no comportamento elástico linear, a análise elástica não-linear deve ser aproximada, utilizando-se sucessivas análises elásticas lineares. Existem dois grupos distintos de modelos elásticos não-lineares: os iterativos, que utilizam módulos secantes, e os incrementais. Estes últimos podem ser formulados com base no módulo de elasticidade  $E$  e coeficiente de Poisson  $\nu$ , ou utilizando os módulos de elasticidade transversal  $G$  e volumétrico  $K$ . Em qualquer caso, a não-linearidade é introduzida através dos termos da matriz de elasticidade, que passam a ser dependentes do estado de tensão.

As características básicas de cada um desses modelos serão descritas a seguir.

#### IV-1-2-1- Modelos elásticos iterativos

Para aplicações a elementos finitos, escolhe-se inicialmente um conjunto de valores de módulos secantes para todos os elementos. Aplica-se então toda a carga à estrutura e calculam-se os valores das tensões e deformações para cada elemento. Estas são testadas para verificar se satisfazem à relação especificada entre o valor do módulo secante utilizado e o nível de tensões alcançado. Caso a relação não se verifique, novos valores de módulos são calculados em cada elemento, de acordo com os novos valores das tensões, que retornam ao valor nulo. A carga é aplicada novamente e o processo se repete, até que os valores dos módulos de uma iteração sejam aproximadamente iguais aos da última (Fig. IV-1a). O valor do coeficiente de Poisson utilizado na análise é normalmente considerado constante.

Para a aplicação desse modelo, devem ser definidos parâmetros empíricos adicionais que possibilitem o cálculo do valor do módulo secante para um determinado nível de tensões, em função da curva apropriada da família de curvas tensão-deformação.

Hoyaux e Ladanyi (1970) utilizaram um modelo iterativo para a análise do estado de tensões ao redor de um túnel circular em argila mole normalmente adensada. Com relação ao comportamento tensão-deformação, foram considerados dois tipos de argila: uma insensível, com comportamento elástico bilinear, e uma sensível, também com comportamento elástico bilinear mas com queda brusca de resistência após o pico (Fig. IV-2b). Admitiu-se ainda que a resistência não drenada  $S_u$  é controlada pelo critério de Tresca, e cresce linearmente com a profundidade. A resistên-

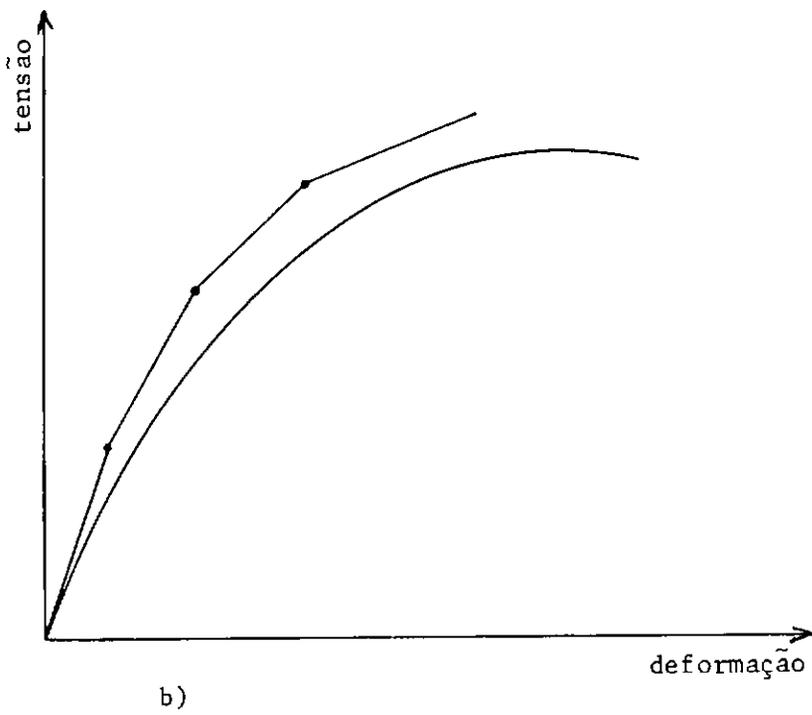
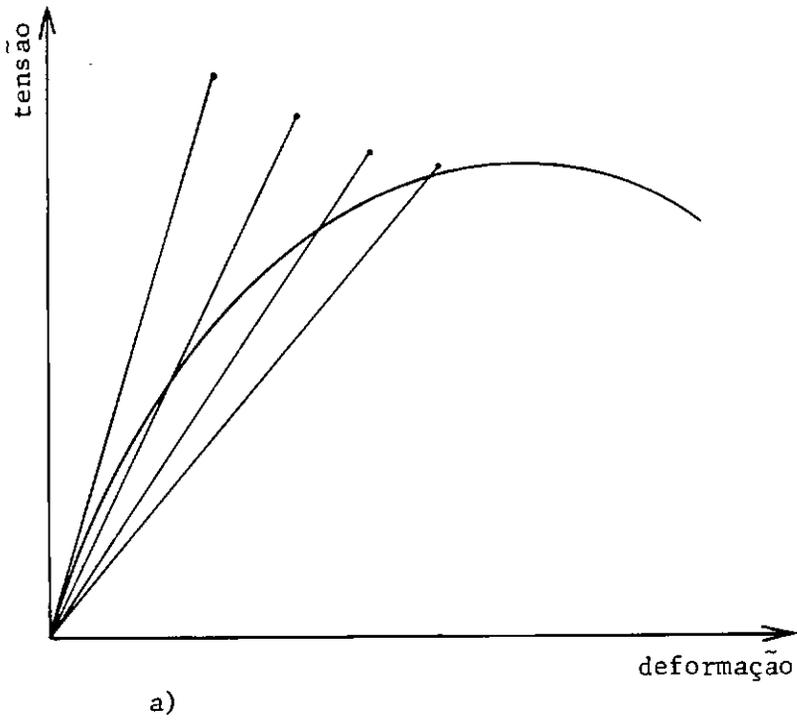


Fig. IV-1- Modelos elásticos não-lineares:  
a) iterativos; b) incrementais.

cia pós-pico  $S'_u$  da argila sensível foi considerada igual à metade da resistência indeformada  $S_u$ . Para simular a incompressibilidade da argila em comportamento não drenado foi utilizado o valor de 0,48 para o coeficiente de Poisson. O valor 0,5 seria mais rigoroso, mas acarreta uma divisão por zero nos termos da matriz de elasticidade para estado plano de deformação.

Girijavallabhan e Reese (1968) aplicaram um modelo iterativo para a análise de sapata circular sobre argila mole. A formulação foi desenvolvida para tensões e deformações no plano octaédrico, de acordo com sugestão de Newmark (1960). Se  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões principais num ponto temos:

$$\sigma_{oct} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \quad (IV-1)$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2}$$

onde a tensão normal octaédrica  $\sigma_{oct}$  é a componente responsável pela variação de volume, e a tensão cisalhante octaédrica  $\tau_{oct}$ , a componente responsável pela variação de forma.

Sendo  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  as deformações principais, temos:

$$\varepsilon_{oct} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \quad (IV-2)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{oct} = \frac{1}{3} \left[ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right]^{1/2}$$

As deformações octaédricas  $\varepsilon_{oct}$  e  $\gamma_{oct}$  se relacionam às tensões octaédricas  $\sigma_{oct}$  e  $\tau_{oct}$  por:

$$\sigma_{oct} = 3 K \varepsilon_{oct} \quad (IV-3)$$

$$\tau_{oct} = G \gamma_{oct}$$

onde  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (IV-4)$$

Para ensaio de compressão triaxial não drenado em argila mole ( $\nu \cong 0,5$ ), obtemos a partir de (IV-1), (IV-2) e (IV-4) as relações

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{2}}{3} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (\text{IV-5})$$

$$\gamma_{\text{oct}} \cong \sqrt{2} \varepsilon_1$$

e

$$E \cong 3 G \quad (\text{IV-6})$$

A partir do gráfico  $(\sigma_1 - \sigma_3) \times \varepsilon_1$ , obtido em laboratório, e utilizando a equação (IV-5), pode-se calcular a relação entre  $\tau_{\text{oct}}$  e  $\gamma_{\text{oct}}$ . Calcula-se, assim, a variação de  $G$  para um determinado  $\gamma_{\text{oct}}$  e coloca-se em gráfico.

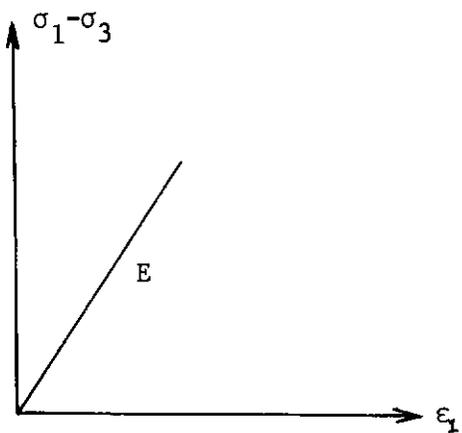
Desta forma, estabelecido o estado de deformação  $\gamma_{\text{oct}}$  num elemento, são calculados o valor de  $G$  e, a partir da equação (IV-6), o valor do módulo secante  $E$ .

Com esse procedimento alcançou-se, para a relação pressão-recalque da sapata, boa concordância entre os valores calculados e experimentais.

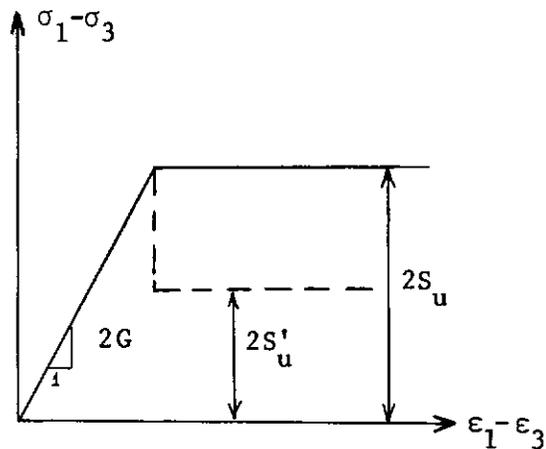
Girijavallabhan e Reese analisaram também, de forma análoga, problemas de muros de arrimo em areias compacta e fofa. A concordância entre os resultados numéricos e experimentais de laboratório foi satisfatória.

#### IV-1-2-2- Modelos elásticos incrementais

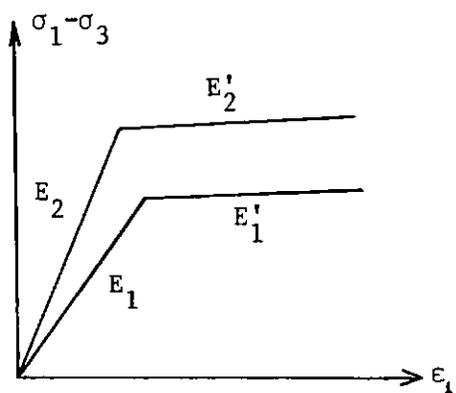
Nesses modelos, a carga a ser aplicada é dividida em incrementos, realizando-se uma análise elástica linear para cada carregamento aplicado. Os parâmetros elásticos são calculados com base nos valores das tensões do último incremento. O valor



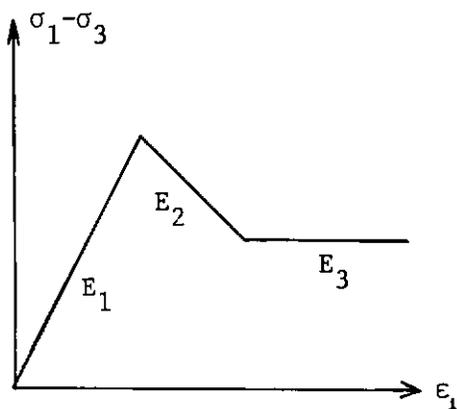
a) Elástico linear



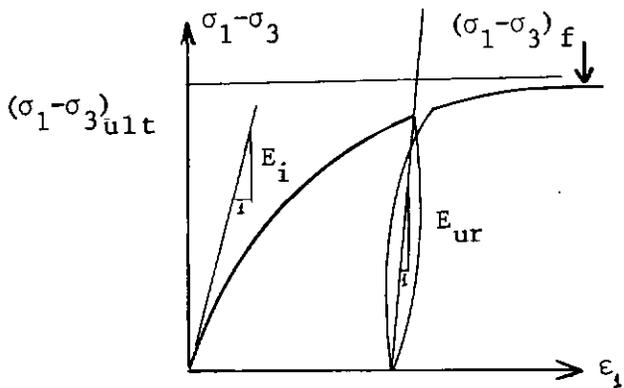
b) Elástico bilinear iterativo  
Hoyaux e Ladanyi (1970)



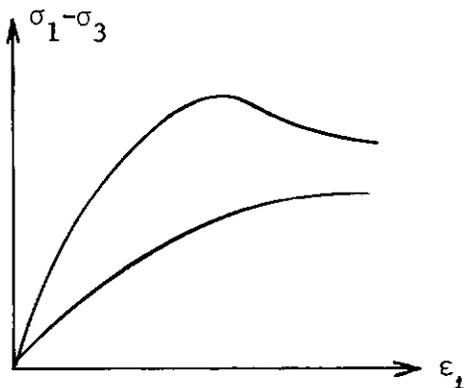
c) Elástico bilinear incremental-  
d'Appolonia e Lambe (1970)



d) Elástico trilinear - Lo e  
Lee (1973)



e) Hiperbólico  
Duncan e Chang (1970)



f) "Spline"  
Desai (1972)

Fig. IV-2- Modelos elásticos

do módulo para cada elemento é calculado determinando-se a tangente à curva tensão-deformação hipotética, a partir do estado de tensões do incremento anterior, no caso de modelo puramente incremental (Fig. IV-1).

Quando se deseja acompanhar uma curva tensão-deformação que demonstre comportamento plástico perfeito ou amolecimento a pós o pico, a utilização deste modelo introduz dificuldades. Isto acarretaria a utilização de módulos tangentes nulos ou negativos, e conseqüentemente de coeficientes de rigidez nulos ou negativos, o que carece de significado físico

Modelos elásticos incrementais com módulo de elasticidade tangente (E) e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

#### Modelo bilinear

d'Appolonia e Lambe (1970) analisaram recalques imediatos de sapatas assentes sobre argila mole utilizando um modelo elástico bilinear. Pretendiam, assim, cobrir todo o domínio de aplicação de cargas, desde a fase elástica até a plástica. Nesse modelo, definem-se parâmetros elásticos E e  $\nu$  antes e depois do escoamento (Fig. IV-2c). Adicionalmente pode-se definir uma variação do módulo de Young com a profundidade. Desta forma, são necessários cinco parâmetros para a análise. Para cada incremento de carga devem ser verificados os elementos que apresentam escoamento. Para estes elementos o módulo de Young é reduzido para 0,0001 vezes o valor inicial. O coeficiente de Poisson foi modificado de 0,499, antes do escoamento, para um valor de 0,4999995, após o escoamento, com o objetivo de manter constante o módulo volumétrico. Se fosse utilizado um coeficiente

de Poisson de 0,5, o módulo volumétrico seria infinito. O modelo foi testado comparando-se curvas tensão-deformação, obtidas em ensaios de deformação plana na extensão e compressão, com previsões numéricas.

Dunlop e Duncan (1970) utilizaram um modelo análogo ao de D'Appolonia e Lambe para a análise do desenvolvimento de ruptura ao redor de taludes escavados em argilas, sob condições não drenadas.

### Modelo multilinear

Lo e Lee (1973) aplicaram um modelo trilinear para a análise do estado de tensões em taludes com comportamento (*strain softening*, idealizado de acordo com a Fig. IV-2d.

Inicialmente são aplicadas as forças equivalentes para a simulação da escavação, considerando o material elástico linear com módulo  $E_1$ . As tensões cisalhantes calculadas são comparadas com o valor da resistência de pico de cada elemento, e são localizados os elementos em que a resistência foi ultrapassada. Nesses casos as tensões em excesso são removidas. Calculam-se forças nodais equivalentes a essas tensões, as quais são aplicadas em sentido oposto. Na nova matriz de rigidez utilizada, os termos correspondentes aqueles elementos têm módulo de elasticidade igual a  $E_2$  (positivo). Se a análise fosse efetuada com o valor  $-E_2$  (negativo), os deslocamentos e deformações seriam negativos no sentido das forças aplicadas, o que não tem significado. O incremento de tensões calculado deve ser diminuído do estado de tensões anterior para que se situe sobre a parte descendente da curva tensão-deformação. Calculam-se as forças nodais

equivalentes a esse excesso de tensões e assim subseqüentemente até que as tensões a serem redistribuídas tornem-se desprezíveis. Caso o nível de tensões após várias redistribuições caia abaixo do valor residual, deve-se calcular o excesso de tensões que corresponderão a novos valores de forças nodais. Daí por diante se utilizará o módulo de elasticidade  $E_s$ , com procedimento semelhante ao anterior.

Lo e Lee utilizaram um procedimento análogo para uma curva tensão-deformação com queda brusca de resistência após o pico (*strain-softening*), semelhante a de Hoyaux e Ladanyi (1970).

As análises conjuntas de elementos finitos e de estabilidade de taludes convencional proporcionaram resultados razoáveis quando comparadas a casos reais publicados por outros autores.

#### Ajuste de curvas através de funções.

As curvas tensão-deformação de laboratório podem ser expressas por funções matemáticas, tais como hipérboles, parábolas, funções exponenciais, etc. Essas funções podem ser utilizadas também para expressar a variação da deformação radial com a deformação axial, o que possibilitará o cálculo do coeficiente de Poisson. Tais procedimentos foram utilizados para desenvolver modelos de comportamento dos solos propostos por vários autores, os quais serão vistos adiante.

Outra forma de incorporar o comportamento tensão-deformação não linear em um programa de elementos finitos é utilizar diretamente os pontos das curvas obtidos em laboratório. A forma digital, como esta é chamada, substitui a curva de laboratório por segmentos de reta, unindo aqueles pontos. Assim, por

exemplo, os parâmetros  $E$  e  $\nu$ , podem ser obtidos através de tais curvas por interpolação linear. Utilizando-se várias pressões confinantes nos ensaios, deve-se também interpolar os valores desejados entre duas curvas, para diferentes pressões confinantes.

a) Representação hiperbólica da curva tensão-deformação.

Kondner e Zelasko (1963) verificaram que as curvas tensão-deformação de vários solos podiam ser bem aproximadas através de hipérbóles expressas pela equação

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\epsilon}{\frac{1}{E_i} + \frac{\epsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}} \quad (IV-7)$$

onde  $E_i$  é o módulo tangente inicial e  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$  o valor assintótico da curva tensão-deformação (Fig. IV-2e).

Duncan e Chang (1970) desenvolveram uma formulação a partir desta idéia, com base em ensaios em vários tipos de solos. Foi incluída no modelo a variação de  $E_i$  com a pressão confinante  $\sigma_3$ , representada por

$$\bar{E}_i = K \cdot p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (IV-8)$$

onde  $K$  e  $n$  são números adimensionais determinados experimentalmente e  $p_a$  é a pressão atmosférica, introduzida na equação para tornar o valor de  $n$  adimensional.

Define-se ainda um parâmetro  $R_f$  por

$$R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \quad (IV-9)$$

sendo  $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$  definido pelo critério de Mohr-Coulomb.

Derivando a eq. IV-7 com relação a  $\epsilon$  e substituindo as eqs. IV-8 e IV-9 juntamente com o critério de Mohr-Coulomb, chega-se ao valor do módulo tangente instantâneo  $E_t$  para a curva tensão-deformação no carregamento primário.

$$E_t = \left[ 1 - \frac{R_f (1 - \text{sen}\phi) \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)}{2 c \cos\phi + 2\sigma_3 \text{sen}\phi} \right] K p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (\text{IV-10a})$$

Os comportamentos no descarregamento e recarregamento são independentes da resistência mobilizada, sendo definidos pela equação

$$E_{ur} = K_{ur} p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (\text{IV-10b})$$

onde o valor de  $n$  é igual ao correspondente do carregamento primário e  $K_{ur}$  é determinado a partir de ensaios envolvendo um ou mais ciclos de descarregamento-carregamento. O fator determinante quanto à utilização de  $E_t$  ou  $E_{ur}$  está no cálculo do valor anterior de  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$  máximo. Se este valor aumentar, deve-se usar o módulo  $E_t$ ; se diminuir utiliza-se  $E_{ur}$ .

Estudos adicionais de Duncan e co-autores mostraram que um melhor ajuste da curva tensão-deformação à curva de ensaio é obtido quando são utilizados os pontos onde 70 e 95% da resistência  $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$  são mobilizadas.

Hansen (1963) propôs duas equações parabólicas adicionais para a curva tensão-deformação, análogas à eq. IV-7. Uma delas é válida para variação parabólica da curva tensão-deformação para pequenas deformações, e a outra possibilita o comportamento *strain-softening*.

b) Representação hiperbólica do coeficiente de Poisson.

Kulhawy e Duncan (1970) acrescentaram ao modelo anterior uma relação empírica para o coeficiente de Poisson tangente, que reflete a sua não-linearidade e a dependência da pressão confinante durante o carregamento primário. Para tal foi considerada hiperbólica a variação da deformação radial  $\epsilon_3$  com a deformação axial  $\epsilon_1$ , expressa pela equação

$$\epsilon_1 = \frac{-\epsilon_3}{v_i - d\epsilon_3}$$

onde  $v_i$  é o coeficiente de Poisson para a deformação nula e  $d$  um parâmetro representando a variação do coeficiente de Poisson com a deformação radial.

A variação de  $v_i$  com a pressão confinante  $\sigma_3$  foi representada por

$$v_i = G - F \log_{10} \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)$$

onde  $G$  é o valor de  $v_i$  para  $\sigma_3 = 1$  atm e  $F$  é uma constante que exprime a variação de  $v_i$  com  $\sigma_3$ .

Pelas equações acima pode-se chegar à equação do coeficiente de Poisson tangente, expressa por

$$v_t = \frac{G - F \log_{10} (\sigma_3/p_a)}{(1 - d \cdot \epsilon_a)^2}$$

onde

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{K p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \left[ 1 - \frac{R_f (\sigma_1 - \sigma_3) (1 - \text{sen} \phi)}{2 c \cos \phi + 2 \sigma_3 \text{sen} \phi} \right]}$$

O modelo não considera a variação do coeficiente de Poisson para o descarregamento. Os parâmetros  $c$ ,  $\phi$ ,  $R_f$ ,  $K$  e  $n$  são os mesmos da eq. IV-10 e os parâmetros  $d$ ,  $F$  e  $G$  são determinados a partir de medidas de variação de volume em ensaios triaxiais. Com a variação do coeficiente de Poisson incorporada ao modelo de Duncan e Chang são necessários nove parâmetros (os oito descritos acima mais o valor de  $K_{ur}$ ). Todos esses parâmetros são de fácil determinação em ensaios triaxiais convencionais. Wong e Duncan (1974) explicam detalhadamente como obtê-los em ensaios de laboratório, mostrando inclusive a avaliação de  $\nu_1$  e  $E_{ur}$ , a partir de ensaios de adensamento. Esses autores consideram também a curvatura da envoltória de Mohr quando se utiliza um grande intervalo de pressões. Adicionalmente comentam sobre os fatores que afetam a obtenção dos parâmetros para as condições drenada e não-drenada.

### c) Representação exponencial do coeficiente de Poisson

Outra formulação utilizada para a representação do coeficiente de Poisson tangente é a exponencial, proposta por Lade (1972).

$$\nu_t = L m \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^q \varepsilon_1^{m-1}$$

Os parâmetros  $L$ ,  $m$  e  $q$  são obtidos através de gráficos  $-\varepsilon_3 \times \nu_1$ , e  $p \times (\sigma_3/p_a)$ , ambos em escala duplo-logarítmica. O parâmetro  $p$  é o valor da deformação radial  $\varepsilon_3$  para a deformação axial  $\varepsilon_1 = 1\%$ , e  $L$  é o valor de  $p$  para  $\sigma_3 = p_a$ . Os expoentes  $m$  e  $q$  expressam a variação de  $\varepsilon_3$  com  $\varepsilon_1$  e de  $p$  com  $(\sigma_3/p_a)$ , respectivamente. Observa-se que o valor de  $m$  é praticamente independente de  $\sigma_3$ .

Lacerda e outros (1974) utilizaram as formulações hiperbólica e exponencial para a análise do comportamento de solos compactado e indeformado em ensaios triaxiais rápidos não drenados. Com relação ao comportamento tensão-deformação, observaram que, embora a formulação hiperbólica funcione bem para quase todos os tipos de solos, nem sempre é satisfatória, principalmente para pequenas deformações. Com relação ao coeficiente de Poisson, a formulação exponencial proporcionou resultados superiores aos da formulação hiperbólica.

d) Representação da curva tensão-deformação através de funções *spline*.

Desai (1971) utilizou uma função [exponencial] cúbica para aproximar a curva tensão-deformação de um solo coesivo e comparou previsões de recalques de sapatas por elementos finitos com dados experimentais. A função polinomial proposta pelo autor é baseada no conceito matemático de interpolação usando funções *spline*, que representam analiticamente uma curva. Para tal, deve ser fornecido um determinado conjunto de pares de pontos da curva a ser representada. Para cada pressão confinante deverá haver então um conjunto de pontos da curva tensão-deformação, que definirá a função *spline*. Utilizada a sub-rotina para resolução de equações simultâneas, que sempre existe em um programa de elementos finitos, a função *spline* e sua primeira derivada podem ser completamente definidas. A primeira derivada da função polinomial permitirá obter a variação do módulo de elasticidade tangente para cada pressão confinante de ensaio. Para uma pressão confinante intermediária, o valor do

módulo poderá ser obtido através de interpolação linear.

Desai (1971) ajustou funções polinomiais a curvas tensão-deformação de areias densa e fofa, e folhelho, este inclusive com comportamento *strain-softening*. Em todos os casos obteve um ajuste perfeito. O autor não considerou curvas tensão-deformação com descarregamento e recarregamento, pois devem existir dificuldades matemáticas para tal representação. Para a utilização desse modelo são necessários, além dos pares de pontos da curva tensão-deformação (Fig. IV-2f), um valor para o coeficiente de Poisson, considerado constante na análise.

Modelos elásticos incrementais com módulos volumétricos (K) e de elasticidade transversal (G).

Em muitas situações o valor de  $K$  é aproximadamente independente da deformação, enquanto o valor de  $G$  diminui com o aumento da deformação. Portanto, em análises em que o valor de  $E$  é reduzido enquanto o valor de  $\nu$  é mantido constante, ambos os valores de  $G$  e  $K$  são reduzidos na mesma proporção do valor de  $E$ . Assim, a análise através do módulo de elasticidade tangente, mesmo quando se utiliza um coeficiente de Poisson próximo de 0,5, não garante uma representação precisa da compressibilidade do solo.

A utilização dos módulos  $G$  e  $K$  tem como vantagem principal sobre a utilização de  $E$  e  $\nu$  a melhor representação da compressibilidade volumétrica do solo, principalmente após a ruptura.

K constante e G variável.

Clough e Woodward (1967) partiram da lei de Hooke generalizada para estado plano de deformação em termos de E e  $\nu$ :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \\ \tau_M \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_M \end{Bmatrix}$$

onde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  e  $\tau_M$  denotam as tensões principais, maior e menor e a tensão cisalhante máxima, respectivamente, e  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_3$  e  $\gamma_M$  as deformações correspondentes.

Através de operações convenientemente realizadas nesta equação matricial, na qual introduziram as relações

$$\sigma_b = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad \text{e} \quad \sigma_d = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

sendo

$$\sigma_b = K (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \quad \text{e} \quad \sigma_d = G (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$$

chegaram à expressão para K e G em função de E e  $\nu$ :

$$K = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{IV-11})$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV-12})$$

Passaram então a utilizar a seguinte relação em termos de K e G:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \\ \tau_M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K+G & K-G & 0 \\ K-G & K+G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_M \end{Bmatrix}$$

O módulo volumétrico foi considerado constante durante toda a análise, tendo sido calculado a partir dos valores do módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson iniciais.

A não linearidade foi considerada modificando-se o valor de  $G$ , para cada incremento e substituindo-o na matriz de elasticidade anterior.

O valor de  $G$  para um determinado incremento foi calculado em função do coeficiente de Poisson do incremento anterior através da eq. IV-12. Isto foi feito resolvendo a eq. IV-11, para o coeficiente de Poisson, em função do módulo de elasticidade tangente  $E_t$ .

A utilização deste modelo para a barragem de Otter Brook conduziu a uma concordância razoável entre os valores de deslocamentos calculados e medidos.

#### K e G variáveis e determinados independentemente

A partir de vários ensaios triaxiais em areias Domashuk e Wade (1969) propuseram um modelo em que os valores de  $G$  e  $K$  são determinados independentemente, a partir de ensaios apropriados. Para a determinação do módulo volumétrico  $K$  foram utilizados ensaios de compressão isotrópica, nos quais existem apenas tensões normais. O módulo volumétrico foi calculado para cada valor de tensão média  $\sigma_m$ , sendo idealizado pelo autor através de dois segmentos de reta com diferentes inclinações, por meio da expressão:

$$K = K_i + m \sigma_m$$

onde  $K_i$  é o módulo volumétrico inicial e  $m$  é a inclinação da reta que dá a variação do módulo volumétrico com a tensão média ( $m = dK/d\sigma_m$ ). Para cada inclinação da curva idealizada deve ser fornecido um par de valores  $m$  e  $K_i$ . Foram realizados ensaios para várias densidades relativas da areia, e os autores observaram que os valores acima dependem também desta característica.

O módulo de elasticidade transversal  $G$  foi obtido a partir de ensaios triaxiais drenados, com a média das tensões normais mantida constante, nos quais ocorrem apenas tensões cisalhantes.

A resultante dos desvios das tensões  $S_d$ , que para o ensaio triaxial é definida pelos autores por

$$S_d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

foi representada em função dos desvios das deformações

$$\varepsilon_d = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$$

através de equação hiperbólica similar à proposta por Kondner e Zelasko (1963):

$$S_d = \frac{\varepsilon_d G_i}{1 + b \cdot \varepsilon_d \cdot G_i}$$

onde  $G_i$  é o valor inicial da tangente à curva relacionando  $S_d$  e  $\varepsilon_d$ , e  $b$  é o inverso do valor último de  $S_d$ . A inclinação instantânea desta última curva foi obtida derivando-se a equação anterior em relação a  $\varepsilon_d$ ;

$$G = G_i (1 - b s_d)^2$$

Observou-se que o valor de  $b$  depende da densidade relativa e da média das tensões normais.

As equações analíticas para os valores de  $G$  e  $K$  foram verificadas com as curvas experimentais dos ensaios, obtendo-se boa concordância.

Para a utilização deste modelo são necessários nove parâmetros:  $K_{i1}$ ,  $K_{i2}$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  e 3 constantes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $\sigma^*$ , para o cálculo do módulo volumétrico; e  $b$  e  $G_i$  para o cálculo do módulo de elasticidade transversal.

#### IV-2- Modelos elasto-plásticos

Os modelos elasto-plásticos procuram levar em consideração o comportamento não linear e inelástico observado nos solos e rochas. Nas aplicações do método dos elementos finitos à geotecnica com base na elastoplasticidade são utilizados dois enfoques: a teoria de Hencky, usada nas primeiras aplicações, e a teoria incremental, atualmente mais empregada (Desai e Abel, 1972). Na primeira, as deformações plásticas são unicamente definidas através do estado de tensões, enquanto na última, mais geral, as deformações plásticas dependem de uma combinação de fatores, tais os incrementos de tensões e deformações e o estado de tensões. A teoria incremental pode adicionalmente considerar a dependência da trajetória de tensões, dilatância e amolecimento (*strain-softening*). Em qualquer dos casos acima observa-se que as deformações plásticas são dependentes do nível de tensões, enquanto as deformações elásticas fornecidas pela lei de Hooke são dependentes apenas dos incrementos de tensões. Evidências teóricas e experimentais indicam que o comportamento não line-

ar dos solos pode ser melhor representado quando se utilizam relações tensão-deformação elasto-plásticas nas quais são considerados os dois tipos de deformações (Duncan, 1972).

Os modelos elasto-plásticos são mais variados e complexos que os modelos elásticos, podendo ser caracterizados pelo tipo de função de escoamento, pelos comportamentos encruável, plástico perfeito ou com amolecimento, e pelo tipo de lei de escoamento utilizada (associada ou não associada). Nos itens a seguir serão descritos alguns tipos de modelos elasto-plásticos mais importantes.

#### IV-2-1- Modelo elasto-plástico perfeito com lei de escoamento associada.

Dos modelos elasto-plásticos este é, possivelmente, o mais simples aplicável a solos e rochas. Suas bases foram estabelecidas por Drucker e Prager (1952) e Drucker (1953).

O modelo considera que o material tem um comportamento elasto-plástico perfeito (Fig. IV-4a). O domínio plástico é definido através do critério de escoamento de Drucker-Prager, representado por um cone no espaço das tensões principais (Fig. III-7), cuja equação é

$$F = \alpha I_1 + J_2^{1/2} - k \quad (\text{III-7})$$

onde  $\alpha$  e  $k$  são constantes físicas dependentes da coesão e do ângulo de atrito, e para estado plano de deformação se expressam por

$$\alpha = \frac{\text{tg } \phi}{\sqrt{9 + 12 \text{tg}^2 \phi}}$$

e

$$k = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \text{tg}^2 \phi}}$$

$I_1$  e  $J_2$  são, respectivamente, o primeiro invariante das tensões e o segundo invariante dos desvios das tensões.

Este modelo conduz necessariamente a um aumento de volume com as deformações plásticas para materiais com ângulo de atrito maior que zero. Com efeito, utilizando-se a equação da lei do escoamento plástico associado, escrita abaixo em notação indicial

$$d \varepsilon_{ij}^P = d \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$

e aplicando-a ao critério de escoamento de Drucker-Prager (eq. III-7), obtemos para deformação plástica volumétrica

$$d \varepsilon_{ii}^P = 3 \alpha \lambda \quad (\text{IV-13})$$

Quando  $\phi > 0$ ,  $\alpha > 0$ , e sendo  $\lambda$  uma constante positiva, conclui-se que a deformação plástica deve ser acompanhada por um aumento de volume, propriedade conhecida por dilatação, como já vimos.

Provavelmente, a primeira aplicação deste modelo ao método dos elementos finitos foi feita por Reyes e Deere (1966) a túneis circulares profundos em rocha. Baker e outros (1969) e Shieh e Sandhu (1970) também aplicaram-no à análise de túneis e taludes. Zienkiewicz e outros (1969) aplicaram este modelo para a análise de túneis revestidos, não-revestidos e sapatas corridas, comparando o resultado da última ao cálculo pela análise limite, o qual se situou próximo ao limite inferior (*lower bound*).

#### IV-2-2- Modelos elasto-plásticos com encruamento ou amolecimento, lei de escoamento associada e superfícies de escoamento abertas.

Höeg (1972) analisou fundações axi-simétricas em argilas marinhas muito moles através de modelo elasto-plástico com lei de escoamento associada. Foram considerados comportamentos elasto-

plástico perfeito e elasto-plástico com amolecimento (Fig. IV-4b). O fator de capacidade de carga resultante da análise, para o comportamento elasto-plástico perfeito, foi comparado com o valor convencional mostrando, boa concordância. Para o comportamento *strain-softening* a análise foi realizada para vários parâmetros de amolecimento. Observou-se que um moderado grau de *strain-softening* acarreta grande aumento da deformação e uma redução no valor teórico capacidade de carga, que para um determinado caso chegou a 40%. Foi também analisado um aterro sobre argila marinha levemente pré-adensada, e os resultados comparados com os da instrumentação foram satisfatórios. Para o estudo acima foi utilizado o critério de escoamento de Von Mises. Análises com o critério de Tresca proporcionaram resultados bastante parecidos.

Ebecken e outros (1976) realizaram estudo similar, utilizando no entanto elementos finitos isoparamétricos *serendipity*. Verificaram diferenças nos valores da capacidade de carga para os critérios de Tresca e Von Mises, ressaltando a conveniência do elemento utilizado para a análise elasto-plástica, em que a plastificação é verificada nos pontos de integração (ver item V-1).

Gates (1972) propôs o modelo representado graficamente na Fig. IV-4c para a análise de materiais com comportamento *strain-softening*. O comportamento não-linear inicial da curva tensão-deformação é considerado elástico bilinear. O primeiro ponto de mudança de inclinação da curva tensão-deformação é calculado com o critério de Drucker-Prager, a partir de  $c_1$  e  $\phi_1$ . Em seguida, o módulo de elasticidade diminui e os valores de  $c_2$  e  $\phi_2$  são aumentados levemente em relação a  $c_1$  e  $\phi_1$ . O mesmo critério de escoamento é usado para determinar a transição da fase elástica para o domínio plástico onde ocorre uma diminuição brusca de re

sistência (*strain-softening*). Neste momento as tensões caem para uma nova superfície de escoamento representativa da resistência residual, na qual a coesão é nula e o ângulo de atrito reduz-se consideravelmente. Para este novo nível de tensões o material tem comportamento plástico-perfeito. Qualquer descarregamento na análise é considerado como elástico.

A queda da resistência de pico para a residual significa a passagem de uma superfície de escoamento para outra situada internamente. Ambas as superfícies têm a forma de um cone, conforme o critério de Drucker-Prager. A nova superfície terá seu vértice na origem, pois a coesão nula não permite que se desenvolvam tensões de tração.

Para a passagem de uma superfície para a outra interna, Gates fez algumas considerações para tornar a trajetória única.

Prevost e Høeg (1975a) desenvolveram um modelo com endurecimento e enfraquecimento considerados simultaneamente. Foi utilizado o critério de escoamento de Von Mises e lei de escoamento associada (Fig. IV-4 d).

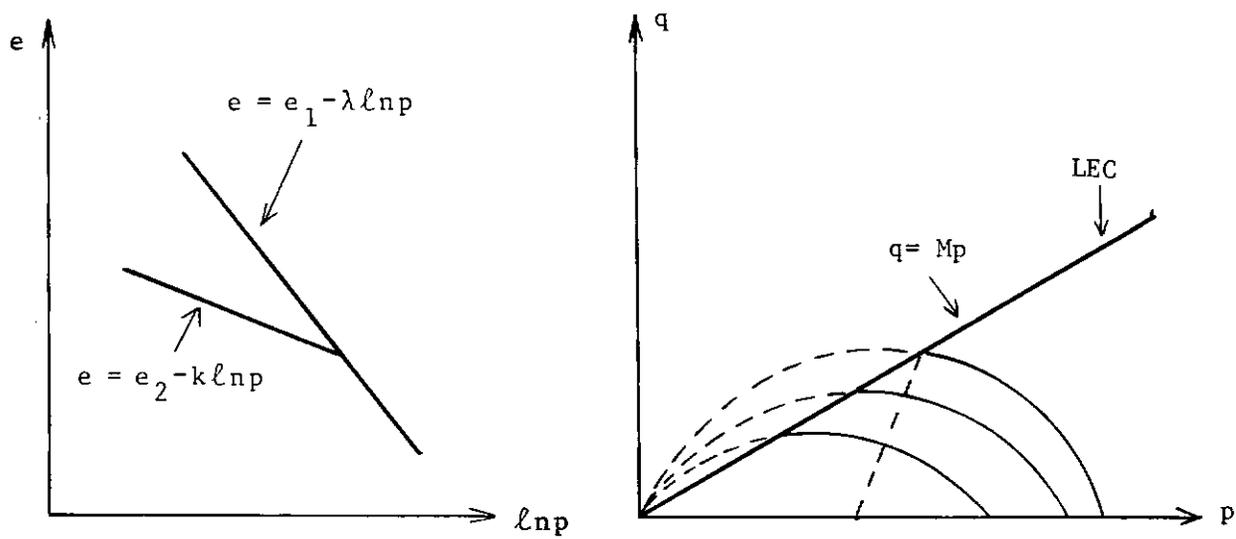
O modelo foi aplicado ao problema de expansão não-drenada de cavidade cilíndrica em meio saturado para estado plano de deformação. Para um estado de tensões iniciais considerado hidrostático, a cavidade é submetida a pressões internas. Os autores, após desenvolverem uma solução analítica para o problema, realizaram uma aplicação numérica, obtendo resultados sem a preocupação de comparações experimentais.

Apesar de as deformações elásticas entrarem na formulação global do modelo, na aplicação acima foram consideradas desprezíveis.

IV-2-3- Modelos elasto-plásticos encruáveis com lei de escoamento associada e superfície de escoamento fechada (modelo de Roscoe ou modelo do estado crítico).

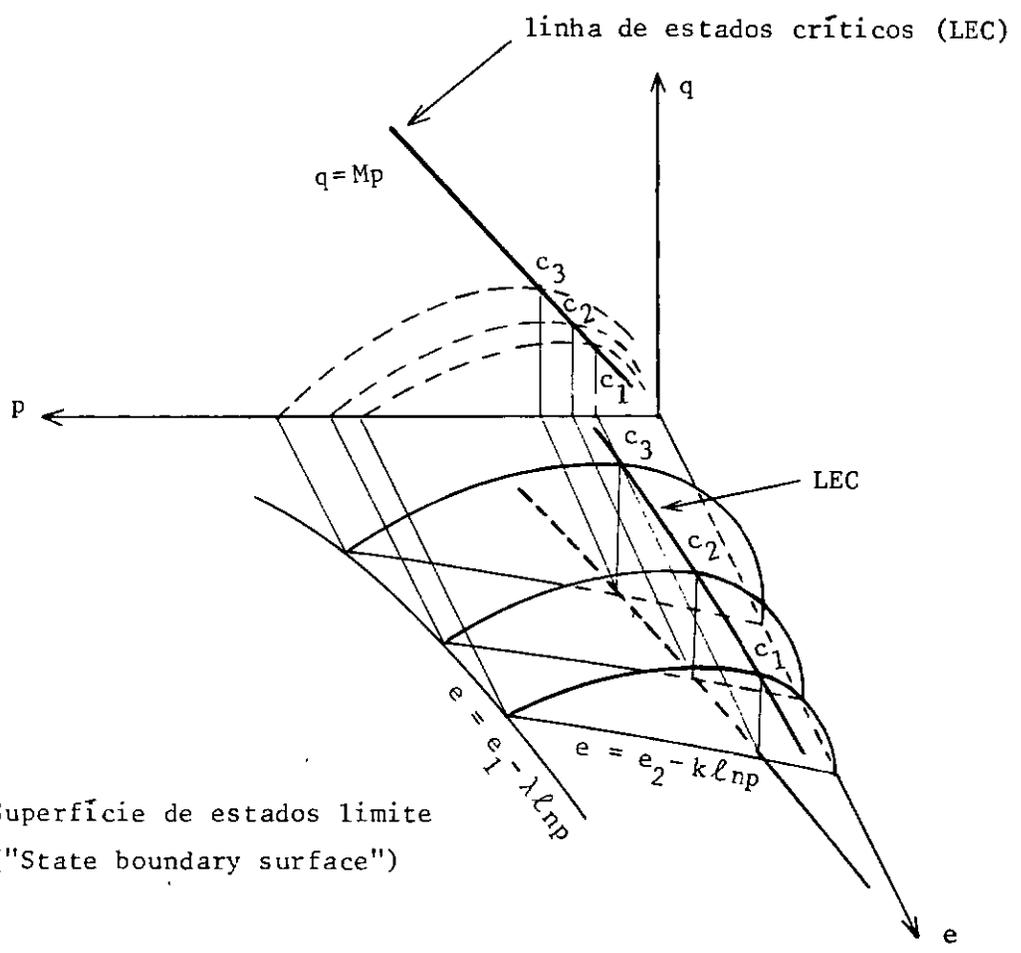
Quando se submete, por exemplo, uma amostra de argila saturada a um estado de tensão hidrostático sob condições drenadas, observa-se uma variação de volume não recuperável e um comportamento encruável. A partir da constatação acima, Drucker e outros (1957) sugeriram um modelo elasto-plástico encruável com superfícies de escoamentos subsequentes e fechadas, representadas por cones no espaço das tensões principais e limitadas por calotas esféricas. Desta forma, um ponto em escoamento sobre o eixo hidrostático estará também sobre a superfície de escoamento. Assim, conforme o solo endurece, o cone e a calota se expandem. Os autores obtiveram boa concordância qualitativa da teoria com o comportamento de uma argila em ensaios triaxiais. Em trabalho posterior, Drucker (1966) observou que superfícies de escoamentos subsequentes não se aproximam da superfície de ruptura.

Os trabalhos acima deram origem a estudos desenvolvidos na Universidade de Cambridge, impulsionados, sobretudo por Roscoe, visando a um modelo mais realístico para os solos. O início destes estudos data de 1958, e até os dias de hoje este modelo tem sido objeto de pesquisas experimentais e estudos teóricos aprofundados (ver por exemplo, Parry, 1971). O modelo de Cambridge foi desenvolvido, de forma mais ampla, para argilas normalmente adensadas (*cam-clay*), e também para areias. Neste resumo serão apresentadas as características básicas do modelo desenvolvido para argilas, de acordo com o trabalho de Roscoe, Shofield e Wroth (1958).



a) Resposta idealizada do solo a tensões hidrostáticas

b) Caminhos de tensões até a ruptura



c) Superfície de estados limite ("State boundary surface")

Fig. IV-3- Modelo de Roscoe

O conceito de estado crítico, no qual se sustenta o modelo de Roscoe, baseia-se na constatação experimental de Hvorslev de que um solo, quando carregado distorcionalmente a grandes deformações, alcança uma linha de estados críticos na qual o índice de vazios passa a ser constante, ou seja, não existem variações adicionais de volume.

O índice de vazios crítico é definido pela equação

$$e = e_1 - \lambda \ln p$$

para compressão virgem, sendo  $e_1$  o índice de vazios para  $p=1$ ,  $p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}$  e  $\lambda$  uma constante do solo. Pode-se demonstrar que esta equação relaciona deformações plásticas volumétricas e tensões volumétricas, sendo, portanto, uma lei de escoamento empírica e diferente da usada na teoria da plasticidade clássica. Para descarregamento e recarregamento define-se uma equação similar à anterior, em que a constante  $\lambda$  é substituída por  $k$ . Assim,  $k$  é uma constante que define as deformações volumétricas recuperáveis (Fig. IV-3a).

O modelo admite que apenas as deformações volumétricas são parcialmente recuperáveis, ou seja, as deformações distorcionalis elásticas são nulas. Conseqüentemente, nos pontos que estão em estados de tensão elásticos, a única deformação que ocorre é a volumétrica.

É postulado que existe apenas uma única superfície de estados-limite (*state boundary surface*), no espaço tridimensional  $p, q$  e  $e$ , conforme mostra a Fig. IV-3 c. A linha de estados críticos corresponde a estados de ruptura, e a função que define a ruptura não é uma superfície de escoamento nem uma seqüência de superfícies de carregamento, sendo definida pela expressão:

$$q = M p$$

onde  $q = \sigma_1 - \sigma_3$  e  $M$  é a inclinação da linha de ruptura no espaço bidimensional  $q, p$ . Conforme descrito acima, o modelo faz distinção entre escoamento plástico e ruptura. O critério de escoamento é similar ao de Drucker-Prager, sendo no entanto representado como uma elipse no espaço  $p, q$ , com um dos eixos principais da elipse coincidente com o eixo hidrostático  $p$ , conforme mostra a Fig. IV-3b.

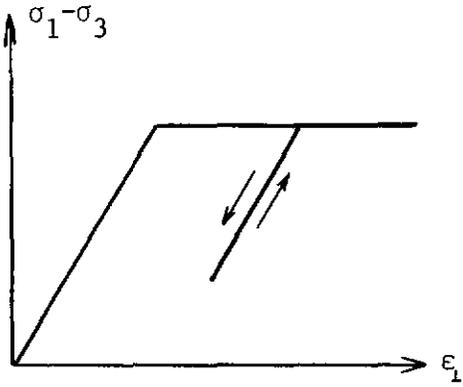
Embora o modelo de Drucker-Prager e o modelo de Roscoe incorporem funções de ruptura similares, para o primeiro (existente) dilatação dura na ruptura, enquanto que para o último a dilatação é nula.

Para a formulação do modelo o solo foi considerado estável de acordo com os postulados de Drucker, sendo o princípio da normalidade também incorporado ao modelo.

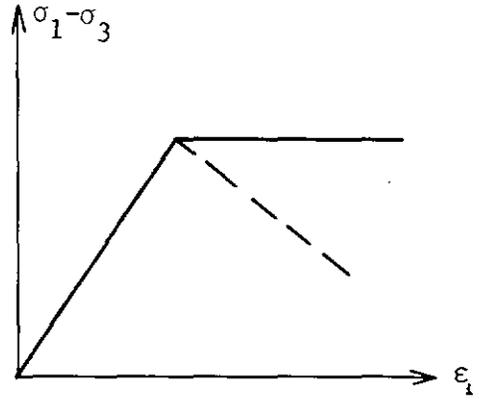
Para a definição do modelo devem ser determinados  $\lambda, k$  e  $M$ , o que pode ser realizado através de ensaios triaxiais.

No modelo de Roscoe, para aplicações a estados de tensão tridimensionais em análise numérica, em lugar de  $p$  e  $q$  podem ser usados  $I_1$  e  $J_2^{1/2}$ , conforme sugerido por Roscoe e Burland (1968).

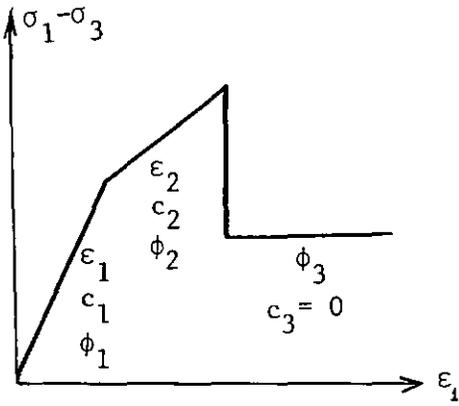
Vários autores, como Smith e Kay (1971), Zienkiewicz e Naylor (1971) e Prevost e Heg (1975b) têm realizado aplicações do modelo do estado crítico ao método dos elementos finitos, sendo que o primeiro apresentou o modelo com lei de escoamento não-associada aplicada aos comportamentos dilatante e contrátil. Foge ao âmbito deste trabalho a descrição global dos modelos baseados nos conceitos desenvolvidos inicialmente em Cambridge. Acredita-se que tais modelos sejam os que o comportamento real dos solos.



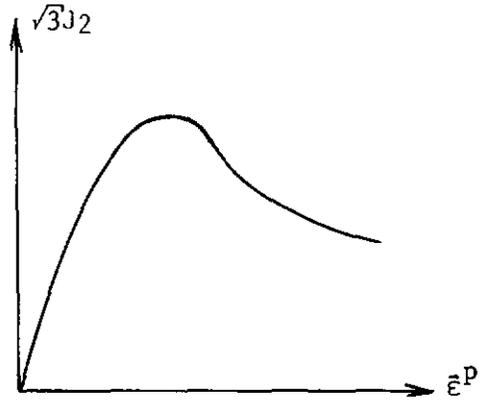
a) Drucker e Prager (1952)  
Reyes e Deere (1966)



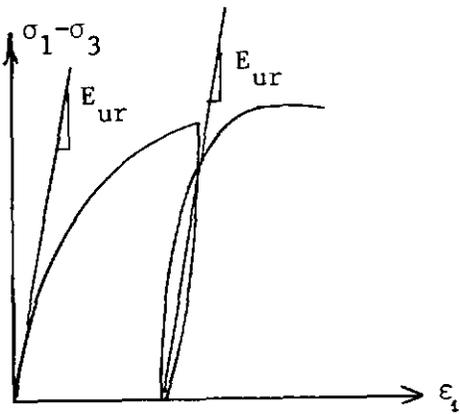
b) Høeg (1972)



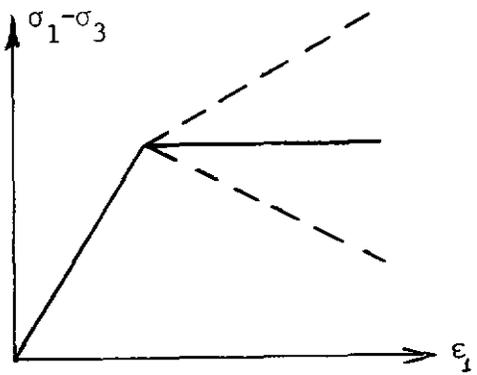
c) Gates (1972)



d) Prevost e Høeg (1972)



e) Lade e Duncan (1975)



f) Nayak e Zienkiewicz (1972)

f) Fig. IV-4- Modelos elasto-plásticos

IV-2-4- Modelo elasto-plástico encruável com lei de escoamento não-associada

Baseados em resultados de ensaios triaxiais cúbicos em areias, Lade e Duncan (1975) desenvolveram uma formulação que incorpora um novo critério de escoamento, um novo critério de ruptura, uma lei de escoamento não-associada e uma lei de encruamento empírica.

Os critérios de escoamento e ruptura são expressos por

$$f = \frac{I_1^3}{I_3} \quad \text{para escoamento}$$

$f = k_1$  para ruptura

As superfícies de escoamento correspondem a  $\frac{I_1^3}{I_3} < k_1$  e a superfície de ruptura a  $\frac{I_1^3}{I_3} = k_1$ . O valor da constante  $k_1$  depende da densidade da areia. Tanto as superfícies de escoamento como a de ruptura são cônicas, com o vértice na origem do espaço das tensões principais, e a evolução das superfícies de escoamento para a de ruptura é gradual e simétrica em relação ao eixo hidrostático.

As deformações elásticas são calculadas através da lei de Hooke generalizada, utilizando o módulo  $E_{ur}$  definido por Duncan e Chang (1970) e dado pela equação IV-10b (Fig. IV-4 e). As deformações plásticas são calculadas utilizando uma lei de escoamento não-associada, com a função de potencial plástico dada por uma expressão similar ao critério de ruptura.

É utilizada uma lei de encruamento isotrópica que relaciona o trabalho plástico ao nível de tensões  $f = I_1^3 / I_3$ .

Para a completa descrição do modelo são necessários nove parâmetros, que podem ser determinados a partir de ensaios triaxiais convencionais.

Foram comparadas as curvas tensão-deformação e deformação

volumétrica-deformação axial, calculadas através da formulação e obtidas de ensaios triaxiais cúbicos, e observou-se concordância bastante razoável. Para os ensaios de cisalhamento por torção, as deformações volumétricas calculadas se afastaram um pouco dos resultados de ensaio. Uma das justificativas de algumas diferenças observadas foi o critério de escoamento não refletir variações do ângulo de atrito de acordo com o nível das pressões confinantes.

#### IV-2-5- Modelo elasto-plástico com amolecimento ou encruamento e lei de escoamento associada ou não.

Nayak e Zienkiewicz (1972) apresentaram os conceitos de elasto-plasticidade de forma bastante ampla para aplicação ao método dos elementos finitos. A formulação permite optar pelos critérios de escoamento de Tresca, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager ou Von Mises. Podem ser utilizados estados planos de tensão, de deformação ou axi-simétrico. Foram comparadas diversas técnicas de cálculo para análise não-linear, incluindo Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado, rigidez tangente e outros (ver item V-3-2). Foi utilizado o elemento isoparamétrico quadrático no qual a plasticidade é registrada nos pontos de integração. O modelo permite a análise de materiais elasto-plásticos perfeitos, com encruamento e amolecimento (Fig. IV-4 f), e leis de escoamento associada e não-associada, embora não tenham sido apresentados exemplos de aplicação de lei de escoamento não-associada. Os autores não incluíram aplicações do modelo à mecânica dos solos, embora tenham deixado claro que isto possa ser feito.

Comparações entre leis de escoamento associadas e não-associadas foram um dos objetivos do trabalho apresentado por Zienkiewicz e outros (1975). Para uma sapata corrida flexível

foram observadas pequenas diferenças para as cargas de colapso nas duas situações acima, utilizando-se o critério de escoamento de Mohr-Coulomb. A aplicação do modelo do estado crítico com o critério de escoamento de Mohr-Coulomb ao exemplo acima também proporcionou resultados semelhantes ao anterior. Foram igualmente analisados um aterro e uma escavação e obtiveram-se as mesmas conclusões. Para o aterro foram calculados fatores de segurança de acordo com os vários métodos de equilíbrio-limite. O fator de segurança obtido com o método dos elementos finitos foi inferior aos anteriores. Os autores apresentaram ainda exemplo de túnel idealizado como visco-plástico associado e não-associado. Foi observado que a utilização da lei de escoamento não-associada acarreta, no revestimento, deslocamentos e tensões menores do que a da lei de escoamento associada.

#### IV-3- Comentários sobre os modelos de comportamento do solo e escolha do modelo a ser utilizado.

Neste capítulo foram revistos os mais importantes modelos de comportamento do solo. As tabelas IV-1 e IV-2 apresentam um sumário destes modelos, descrevendo suas características básicas, parâmetros necessários para definição e aplicações realizadas. Os modelos não devem ser comparados com base no número de parâmetros apenas, porque alguns são mais gerais que outros e requerem, portanto, número maior de parâmetros. Dentre os descritos, os modelos elásticos não-lineares são os que têm tido aplicação mais ampla em mecânica dos solos. Embora se tenham obtido resultados satisfatórios em diversos tipos de aplicações, algumas objeções podem ser levantadas quanto à validade de esses modelos simularem o comportamento do solo. Por exemplo, o processo de deformação seguido durante o carregamen-

Tabela IV-1- Modelos elásticos não-lineares

Autores	Descrição do Modelo	Parâmetros	Aplicações
Girijavallabhan e Reese (1968)	Modelo elástico iterativo (E secante e $\nu$ constante). Valores de E de terminados indiretamente da curva de laboratório, a partir de $G = \tau_{oct} / \gamma_{oct}$	E, $\nu$	Sapata circular em argila e muro de arrimo (experimentais de laboratório)
Hoyaux e Ladanyi (1970)	Modelo elástico iterativo bilinear, para argilas sensíveis e insensíveis ( $\nu = 0,48$ )	E, $\nu, S_u / \gamma H$ mais $S'_u / \gamma H$ para argilas sensíveis	Túneis não revestidos em argilas moles
D'Appollonia e Lambe (1970)	Modelo elástico incremental bilinear (tipo E, $\nu$ ), com E variando com a profundidade e $\nu$ igual a 0,499 antes da ruptura e igual a 0,4999995 após a ruptura	2 valores de E, 2 valores de $\nu$ , coeficiente de variação do E com a profundidade	Análise de recalques iniciais de sapatas assentes sobre argila mole
Lo e Lee (1973)	Modelo elástico incremental trilinear (3 valores de E um para cada trecho da curva tensão-deformação, $\nu = \text{constante}$ ), para análise de materiais com enfraquecimento	3 valores de E, $\nu = \text{constante}$	Análise de estabilidade de taludes
Duncan e Chang (1970)	Modelo elástico incremental com ajuste hiperbólico da curva tensão-deformação. Descarregamento elástico e efeito da pressão confinante incluída ( $\nu = \text{constante}$ )	K, $R_f, n, \phi, \nu$	Várias aplicações
Desai (1970)	Modelo elástico incremental (tipo E e $\nu = \text{constante}$ ). Polinômios <i>spline</i> usados para ajuste da curva tensão-deformação e para variação de E com $\sigma_3$	Conjunto de pontos do ensaio e polinômio <i>spline</i>	Análise de recalques de sapatas em argilas e comparação com dados experimentais
Clough e Woodward (1967)	Modelo elástico não-linear (tipo G e K = constante). G calculado em função de E e $\nu$	$E_0, \nu_0$ iniciais e $E_t$	Análise da construção incremental de barragens e comparação com observações de campo
Domashuk e Wade (1969)	Modelo elástico não-linear (tipo G e K). G e K dependentes da pressão confinante e determinados independentemente	9 parâmetros	Solos arenosos

Tabela IV-2- Modelos elasto-plásticos

Autores	Descrição do Modelo	Parâmetros	Aplicações
Reyes e Deere (1966) Baker e outros (1969)	Modelo elasto-plástico perfeito, incremental com lei de escoamento associada e critério de escoamento de Drucker-Prager para estado plano de deformação.	$E, \nu$ $c, \phi$	Túneis circulares não revestidos, taludes escavados
Heg (1972)	Modelo elasto-plástico associado, com amolecimento, ou plástico-perfeito, para carregamento axi-simétrico com critérios de escoamento de Von Mises e Tresca para análise não-drenada de argilas.	$E, \nu$ $S_u$ e parâmetro de amolecimento $H$ .	Fundações e aterros axi-simétricos em argila marinha levemente pré-adensada
Prevost e Heg (1972)	Modelo elasto-plástico associado com endurecimento e enfraquecimento considerados simultaneamente, critério de escoamento de Von Mises e estado plano de deformação.	2 constantes experimentais mais parâmetros de endurecimento e enfraquecimento.	Expansão não-drenada em cavidade cilíndrica em meio saturado
Gates (1972)	Modelo elástico bilinear, e <i>strain-softening</i> com plasticidade perfeita com lei de escoamento associada e critério de Drucker-Prager.	$E_1, c_1, \phi_1$ $E_2, c_2, \phi_2$ $\phi_3$ e $\nu$	Ruptura progressiva em taludes
Roscoe e Burland (1968)	Modelo elasto-plástico com encruamento, com superfície de escoamento elíptica na região anterior à ruptura e lei de escoamento associada.	$M, \lambda, k$	Descrição de comportamento tensão-deformação de argilas normalmente adensadas
Lade e Duncan (1975)	Modelo elasto-plástico encruável para areias com critérios de escoamento e ruptura independentes e lei de escoamento não-associada.	9 parâmetros de terminados em ensaios triaxiais convencionais	Ensaio triaxiais e de torção
Nayak e Zienkiewicz (1972)	Modelo elasto-plástico com amolecimento e encruamento, com lei de escoamento associada ou não, e alternativa para vários critérios de escoamento.	$E, \nu, c, \phi$ (ou $\sigma_{esc}$ ) e parâmetro de endurecimento	Várias aplicações numéricas

to primário do solo é, em geral, irreversível e, portanto, elástico não-linear e plástico (Fig. III-1). Por outro lado, todos os modelos elásticos não-lineares devem prever um comportamento contrátil quando o coeficiente de Poisson é mantido menor que 0,5. Os modelos elasto-plásticos podem variar de contráteis a dilatantes .

Com relação ao modelo elástico incremental hiperbólico, um dos que tem sido mais utilizado entre nós, Lade e Duncan(1975) observaram ser ele inadequado para a previsão do comportamento do solo em altos níveis de tensão, da influência da tensão principal intermediária, da dependência da trajetória de tensões e do aumento de volume devido a tensões cisalhantes. Realmente, num material elástico as deformações volumétricas são causadas apenas por tensões volumétricas, enquanto, na realidade, perto da ruptura ocorrerão variações de volume devidas a aplicações de tensões cisalhantes. Este processo, que não pode ser corretamente representado num modelo elástico não-linear, é mais acentuado em areias densas e argilas pré-adensadas, pois que as tensões cisalhantes acarretarão um aumento de volume ao invés de diminuição. A utilização de um módulo volumétrico negativo num material elástico não-linear para simular este comportamento não teria sentido físico.

Não obstante as várias objeções, previsões feitas com os modelos elásticos não-lineares têm concordado razoavelmente com observações experimentais, conforme relatado anteriormente.

Os modelos elasto-plásticos são os que tratam mais rigorosamente as várias facetas do comportamento dos solos, especialmente o modelo de Roscoe e Burland(1968), apesar de se restringir a argilas normalmente adensadas.

Uma das deficiências dos modelos elasto-plásticos é a existência de poucas observações experimentais, a não ser o modelo de Roscoe e Burland, que tem sido exhaustivamente testado.

De uma forma geral, pode-se dizer que os modelos elásticos não-lineares podem ser defendidos por sua simplicidade de aplicação prática, enquanto os modelos elasto-plásticos seriam justificados dos pontos de vista teórico e experimental.

Neste trabalho escolheremos o comportamento tensão-deformação elasto-plástico devido aos altos níveis de tensões que muitas vezes ocorrem em escavações subterrâneas. Isto visa também a uma maior divulgação deste modelo entre nós, o qual tem sido objeto de poucas aplicações.

Dentre os modelos elasto-plásticos descritos adotaremos pelo de Drucker e Prager (1952). Este tem sido aplicado a túneis por vários autores, como Reyes e Deere (1966), Zienkiewicz e outros (1969), Baker, Sandhu e Shieh (1969), e Chang e outros (1972).

A escolha deste modelo simples é um primeiro passo para a adoção de modelos elasto-plásticos mais completos como o de Roscoe e co-autores.

Algumas críticas têm sido levantadas na literatura com relação ao modelo escolhido. Pariseau e outros (1970) fazem ressalvas quanto à dilatação excessiva prevista pelo modelo, consequência do princípio da normalidade e da lei de escoamento associada, os quais aqueles autores acreditam serem pouco apropriadas. DiMaggio e Sandler (1971) observam que a histerese em carregamento e descarregamento hidrostático, verificada experimentalmente, não pode ser prevista usando o mesmo módulo volumétrico no carregamento e descarregamento, e uma superfície de

escoamento que não atravessa o eixo hidrostático. Adicionalmente, o modelo não reflete variações do módulo de elasticidade e do ângulo de atrito com a pressão confinante.

Não obstante as objeções levantadas acima, acreditamos ser este modelo elasto-plástico simples apropriado para a análise de túneis e escavações subterrâneas, principalmente em projetos. Com efeito, na maioria das situações, devido à grande extensão da obra, as informações obtidas com relação ao comportamento dos materiais do maciço são relativamente escassas, não justificando a utilização de modelos mais elaborados. Os parâmetros elásticos e plásticos necessários à aplicação deste modelo ( $E, \nu, c, \phi$ ) são facilmente obtidos em ensaios convencionais de laboratório, e em número inferior aos necessários para os modelos elásticos não-lineares mais elaborados, como o hiperbólico.

## C A P Í T U L O    V

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO A TÚNEIS. ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA.

Este capítulo tem por objetivo descrever os aspectos considerados para o desenvolvimento do programa de elementos finitos para cálculo de túneis com modelo elasto-plástico para o maciço.

Após uma breve revisão da literatura sobre o método dos elementos finitos aplicado a túneis, é descrito o elemento finito utilizado e são detalhados o modelo elasto-plástico escolhido e a técnica utilizada para a simulação da escavação.

V-1- O método dos elementos finitos aplicado a túneis. Revisão da literatura.

Não sendo muitos os trabalhos sobre aplicações do método dos elementos finitos a túneis, serão a seguir mencionados aqueles que, a nosso ver, sejam os mais importantes.

Reyes e Deere (1966) foram os pioneiros na utilização do método dos elementos finitos na análise elasto-plástica de túneis. O modelo elasto-plástico perfeito de Drucker-Prager foi escolhido para estudar a distribuição de tensões e deslocamentos no contorno de cavidades circulares não revestidas em maciços rochosos infinitos. Foram utilizados valores diferentes de tensões iniciais e parâmetros plásticos para comparações.

Goodman (1966) analisou a distribuição de tensões em túneis circulares em maciços rochosos heterogêneos. Observou que, quando um túnel circular é escavado através de contato vertical entre duas rochas com módulos elásticos diferentes, as tensões aumentam na rocha mais rígida e diminuem na rocha mais fraca. Os

resultados mostraram também as variações de tensões e deslocamentos para várias orientações do contato.

Zienkiewicz e outros (1968) analisaram o comportamento de um túnel revestido a pequena profundidade, admitindo o maciço não suportar quaisquer tensões de tração. Por processo elástico iterativo as tensões de tração são eliminadas redistribuindo-se forças equivalentes àquelas tensões. O processo é repetido até que as tensões de tração sejam desprezíveis. Esta análise foi comparada à análise elástica linear, na qual é permitida a ocorrência de tensões de tração. Os resultados da primeira análise, na qual ocorrem zonas fissuradas, foram comparadas à análise elástica linear com as regiões tracionadas, observando-se diferenças sensíveis nos estados de tensões para os dois casos.

Baker e outros (1969) utilizaram o modelo de Drucker-Prager para o estudo de problemas em mecânica das rochas. Foram analisados um talude, e um túnel igual ao de Reyes e Deere. Foi utilizada técnica numérica diferente visando a acelerar o processo iterativo.

Hoyaux e Ladanyi (1970) analisaram a distribuição de tensões e deslocamentos em túneis não revestidos escavados em solos argilosos, com o objetivo de avaliar a necessidade de suportes de acordo com as deformações esperadas. O modelo tensão-deformação idealizado para o material do maciço está descrito no item IV-2-1. A análise foi efetuada aplicando-se forças de massa ao maciço com a cavidade já escavada. Foi estudada a influência da profundidade do túnel e observada uma profundidade crítica na qual a plastificação alcança a superfície do terreno.

Kulhawy (1974) estudou cavidades em rochas homogêneas elásticas lineares utilizando elemento quadrilátero de deforma-

ção linear. A escavação foi simulada de acordo com o procedimento de Clough e Duncan (1969). Foram investigados o número de elementos finitos necessários e as dimensões da rede, de forma a fornecer resultados dentro de limites razoáveis. Para este último caso, o autor concluiu, com base em comparações com a teoria da elasticidade, que uma distância mínima de seis vezes o raio da abertura é suficiente, fornecendo um erro menor que 10% do valor teórico, tanto em termos de deslocamentos como de tensões.

Em trabalho subsequente, Kulhawy (1975a) investigou o significado de alguns fatores influentes na escavação de cavidades em rocha homogênea, elástica linear e não-linear. Os resultados mostraram que os fatores mais importantes que afetam as tensões e os deslocamentos finais são: a forma da abertura, a grandeza e a orientação das tensões iniciais, a variação destas em relação à profundidade, o módulo elástico da rocha e sua dependência do nível de tensões.

Em outros trabalhos, Kulhawy (1975 b e c) estudou maciços rochosos contendo descontinuidades elásticas e inelásticas. Foi mostrada a necessidade de avaliar a orientação das descontinuidades e a rigidez relativa da descontinuidade.

Chang e co-autores (1972 e 1974) têm se dedicado ao desenvolvimento de programa de computador que permite a consideração de aspectos importantes em escavações subterrâneas. O modelo de cálculo considera o material elasto-plástico com critério de escoamento de Drucker-Prager, não resistente à tração, dependente do tempo ( *creep* ) e com descontinuidades. O modelo tem sido aplicado principalmente a escavações subterrâneas em rochas entre as quais se incluem casas de força e metropolitano de Washington, proporcionando inclusive resultados consistentes com obser

vações de campo.

Rocha (1976) concluiu a partir de vários cálculos através do método dos elementos finitos que as solicitações internas no revestimento (momentos fletores e esforços normais) e os deslocamentos crescem à proporção que o módulo elástico do maciço de cresce. Esse crescimento é em regra relevante apenas para módulos inferiores a  $10.000 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$ . Essas conclusões referem-se ao módulo de elasticidade do revestimento de concreto de  $150.000 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$ , espessuras do revestimento de 10 e 20 cm, valores de  $K_0$  de 0,5, 1,0, 2,0 e 5,0 e profundidades de 20,40 e 80 m. Com relação à espessura do revestimento, observou-se que um aumento no seu valor de 10 para 20 cm acarreta um incremento muito grande no valor dos momentos fletores e um aumento moderado no valor dos esforços normais. O valor de  $K_0$  influenciou de forma significativa tanto as solicitações internas e externas quanto os deslocamentos. Com relação às condições da parte inferior do túnel (soleira), a articulação ou engastamento do arco invertido aos pés-direitos proporcionam situações bem diversas com relação aos momentos fletores no revestimento.

Nos itens seguintes serão considerados os diversos aspectos inerentes à utilização do método dos elementos finitos no projeto de túneis, conforme proposto nesta tese.

#### V-2- O elemento isoparamétrico

Neste item descrevem-se algumas características básicas do elemento utilizado, necessárias àqueles que se utilizarão do programa de computador desenvolvido. Para um estudo mais detalhado do método dos elementos finitos indicamos Zienkiewicz (1971), Desai e Abel (1972), Cook (1974) e Brebbia e Ferrante (1975).

Neste trabalho será utilizado o elemento isoparamétrico quadrático da família *serendipity*. Este elemento foi desenvolvido visando a uma melhor representação de geometrias complexas, o que facilita a discretização do problema a ser analisado. Por esta razão, o emprego deste elemento no projeto de túneis torna-se extremamente atraente, devido aos contornos curvos apresentados pelos mesmos. São poucos, no entanto, os trabalhos relativos a túneis nos quais é utilizado o elemento isoparamétrico, sendo de nosso conhecimento apenas os de LNEC (1971), Zienkiewicz e Corneau (1974) e Pereira (1977).

#### V-2-1- Resolução do problema global.

Em linhas gerais, são as seguintes as etapas de cálculo realizadas em uma análise de elementos finitos utilizando o método dos deslocamentos:

- a) idealização do contínuo em um modelo discreto para análise;
- b) cálculo das matrizes de rigidez e das forças nodais equivalentes dos elementos;
- c) montagem da matriz de rigidez e do vetor de forças globais;
- d) introdução das condições de contorno em termos de deslocamentos;
- e) cálculo dos deslocamentos através da resolução do sistema de equações;
- f) cálculo de tensões e deformações;
- g) interpretação dos resultados.

A primeira e a última etapas são realizadas pelo homem e necessitam de bom senso e experiência. As etapas restantes são efetuadas pelo programa de computador anteriormente desenvolvido.

Com relação à primeira etapa, não existe uma regra geral

para a concepção de uma malha de elementos finitos. Podem ser da  
das algumas sugestões.

Em regiões de altos gradientes de tensões deve ser concentr  
trado maior número de elementos. Devem ser evitados elementos de  
formas muito irregulares, principalmente naquelas regiões.

Quando as variações de deslocamentos no contínuo são de orde  
dem igual ou inferior à ordem das funções que definem os campos  
de deslocamentos nos elementos, estes poderão ser mais irregulares  
res e em menor número.

É interessante que um problema seja resolvido utilizando-se,  
por exemplo, duas malhas com números de pontos nodais diferentes,  
sendo a malha mais refinada proveniente da subdivisão da malha  
grosseira. Se as diferenças dos resultados numéricos forem peque  
enas, a solução aproximada estará perto da solução exata. Caso contr  
trário, uma malha mais refinada será necessária.

Em meios semi-infinitos, nos quais se situam os problemas  
geotécnicos é importante a pesquisa das fronteiras que definirão  
a extensão do maciço a ser modelado. Tal pesquisa deve ser feita  
por tentativas, conforme descrito acima, ou comparando-se com soluções  
s teóricas como no item VII-1.

São também valiosos os testes de convergência para problem  
mas com soluções exatas conhecidas. A curva de convergência para  
a solução numérica, em função do número de nós, deverá tender assinto  
toticamente para a solução exata por baixo, quando se utiliza um eleme  
mento conforme no método dos deslocamentos. (ver apêndice I).

Escolhida a malha, nós e elementos devem ser numerados para  
identificação. É importante uma numeração adequada dos pontos noda  
dais, de forma a se obter uma largura de banda menor tamanho possí  
sível. A largura da banda dependerá da maior diferença entre os  
nós extremos de um elemento. Sendo  $D$  a maior diferença existente  
entre todos os elementos da estrutura, a largura de banda é então

dada por

$$B = (D+1)g$$

onde  $g$  é o número de graus de liberdade de cada nó (igual a 2 para o presente estudo). A minimização da largura de banda conduzirá a um tempo de solução menor.

#### V-2-2- Características básicas do elemento.

O nome isoparamétrico deve-se à representação da geometria do elemento, em termos das coordenadas naturais  $\xi, \eta$  dos seus pontos nodais, usando as mesmas funções que definem os deslocamentos no interior do mesmo.

Um elemento bidimensional retangular pode ser mapeado de forma distorcida, no espaço cartesiano  $x, y$ , usando as funções de interpolação definidas em termos das coordenadas naturais, intrínsecas ou normalizadas,  $\xi, \eta$ , como mostra a Fig. V-1.

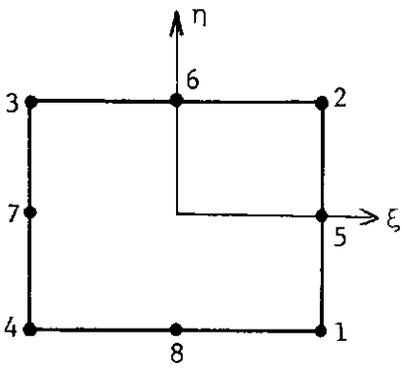
O mapeamento consiste em utilizar as funções de interpolação para a obtenção de qualquer ponto no interior do elemento em termos das coordenadas nodais que, traduzido em notação matricial, fica

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N & 0 \\ \sim & \sim \\ 0 & N \\ \sim & \sim \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ \sim_i \\ y_i \\ \sim_i \end{Bmatrix} \quad (V-2)$$

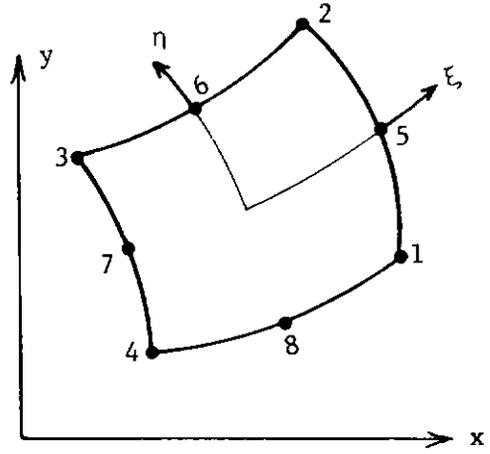
onde  $x$  e  $y$  são as coordenadas de um ponto no interior do elemento em função das coordenadas nodais  $x_i$  e  $y_i$ , e

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_8 \end{bmatrix} . \quad (V-3)$$

os valores das funções de interpolação foram obtidos por Zienkiewicz por inspeção.

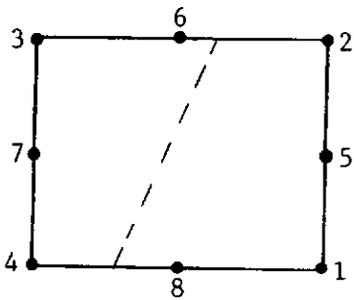


a) elemento original

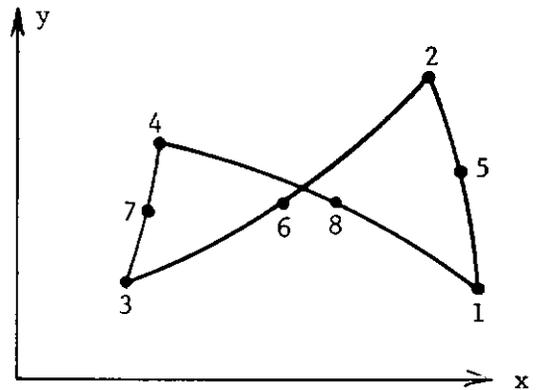


b) elemento isoparamétrico

Fig. V-1- 0 elemento isoparamétrico



a) elemento original



b) elemento isoparamétrico irregular

Fig. V-2- Elemento isoparamétrico distorcido de forma irregular

$$\begin{aligned}
 N_i &= (1+\xi\xi_i) (1+\eta\eta_i) (\xi\xi_i+\eta\eta_i-1)/4 & \text{N\u00f3s } i=1,2,3,4 \\
 N_i &= (1+\xi\xi_i) (1-\eta^2)/2 & i=6,8 \\
 N_i &= (1-\xi^2) (1+\eta\eta_i) & i=5,7
 \end{aligned}
 \tag{V-4}$$

Pode-se observar que as fun\u00e7\u00f5es dadas pela equa\u00e7\u00e3o V-4 t\u00eam o valor 1 para o n\u00f3 considerado e zero para os demais.

As fun\u00e7\u00f5es de interpola\u00e7\u00e3o acima satisfazem os crit\u00e9rios de converg\u00eancia necess\u00e1rias para aplica\u00e7\u00e3o do m\u00e9todo, conforme pode ser visto em Zienkiewicz (1971).

As fun\u00e7\u00f5es de interpola\u00e7\u00e3o podem tamb\u00e9m ser utilizadas para exprimir leis de varia\u00e7\u00f5es das propriedades do materiais e das for\u00e7as de massa, no interior do elemento, e das for\u00e7as de superf\u00edcie, no contorno do elemento.

\u00c9 importante observar que na gera\u00e7\u00e3o do elemento distorcido haja uma correspond\u00eancia biun\u00edvoca entre pontos do elemento original e do isoparam\u00e9trico correspondente. Como mostra a Fig.V-2, todos os pontos do segmento tracejado no elemento original se reduzir\u00e3o a um \u00fanico ponto no espa\u00e7o x, y. Esta n\u00e3o correspond\u00eancia biun\u00edvoca acarretar\u00e1 problemas ao se verificar os crit\u00e9rios de conformidade e completude do elemento.

### V-2-3- Matriz de rigidez do elemento.

A partir da aplica\u00e7\u00e3o do princ\u00edpio de energia potencial total m\u00ednima, utilizado no m\u00e9todo dos deslocamentos, obtemos a express\u00e3o da matriz de rigidez do elemento.

$$\underline{k}^e = \int_v \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d(\text{vol})
 \tag{V-5}$$

onde  $\underline{D}$  \u00e9 a matriz de elasticidade definida no item V-2-6, e  $\underline{B}$  \u00e9 a matriz que relaciona deslocamentos e deforma\u00e7\u00f5es, dada pela eq. V-6, cuja dedu\u00e7\u00e3o ser\u00e1 vista no item V-2-6.

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{N}'_{,x} & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{N}'_{,y} \\ \underset{\sim}{N}'_{,y} & \underset{\sim}{N}'_{,x} \end{bmatrix} \quad (V-6)$$

onde a vírgula na notação indica derivada em relação ao índice .

Como  $\underset{\sim}{N}$  é definida em termos das coordenadas  $\xi, \eta$ , e para a eq. V-6 as derivadas são relativas às coordenadas globais  $xy$ , é necessária uma transformação.

Empregando a regra da cadeia podemos escrever

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{N}'_{,\xi} \\ \underset{\sim}{N}'_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_{,\xi} & y'_{,\xi} \\ x'_{,\eta} & y'_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{N}'_{,x} \\ \underset{\sim}{N}'_{,y} \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{J} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{N}'_{,x} \\ \underset{\sim}{N}'_{,y} \end{Bmatrix} \quad (V-7)$$

onde  $\underset{\sim}{J}$  é o jacobiano da transformação. Fazendo-se as substituições  $x = \underset{\sim}{N} \overset{\sim}{X}_i$  e  $y = \underset{\sim}{N} \overset{\sim}{Y}_i$ , conforme mostra a eq. V-2, obtêm-se

$$\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} \cdots N_{8,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} \cdots N_{8,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix} \quad (V-8)$$

Invertendo a eq. V-7 obtemos:

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{N}'_{,x} \\ \underset{\sim}{N}'_{,y} \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{N}'_{,\xi} \\ \underset{\sim}{N}'_{,\eta} \end{Bmatrix} \quad (V-9)$$

Com a eq. V-9 podemos exprimir a matriz  $\underset{\sim}{B}$  em função de  $\xi$  e  $\eta$ . Para obtenção da matriz de rigidez através da eq. V-5, o elemento de volume sobre a qual a integração será realizada necessita de ser expresso em termos de coordenadas naturais. Para tal, deve ser efetuada uma modificação adequada nos limites de integração. Na elasticidade bidimensional o elemento de volume se reduz ao elemento de área de espessura  $t$ , que pode ser escrito em termos de  $\xi$  e  $\eta$  por

$$d(\text{vol}) = d(\text{área}) t = dx dy t = \det \underset{\sim}{J} d\xi d\eta t$$

No estado plano de deformação a integração é realizada para uma espessura  $t$  unitária, e a expressão da matriz de rigidez (eq. V-5), fica

$$\tilde{k}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{B}^T \tilde{D} \tilde{B} \det \tilde{J} d\xi d\eta \quad (V-10)$$

Devido à dificuldade de integração explícita da eq. V-10, utiliza-se o método de integração numérica de Gauss-Legendre, recomendado por Zienkiewicz e que será visto no item V-2-5.

As matrizes de rigidez de cada elemento  $\tilde{k}^e$  devem ser arranjadas devidamente para a montagem da matriz de rigidez global  $\tilde{K}$ . A relação entre os sistemas de numeração dos elementos e da estrutura determina a localização em  $\tilde{K}$ , das contribuições dos coeficientes de  $\tilde{k}^e$ . As matrizes de rigidez dos elementos podem ser adicionadas, para a formação da matriz de rigidez global, desde que sejam expandidas. A expansão consiste na adição apropriada de linhas e colunas de zeros às matrizes  $\tilde{k}^e$ , de forma a transformá-las na mesma ordem de  $\tilde{K}$ . Todo este processo, chamado de expansão e acumulação, explica analiticamente a montagem da matriz de rigidez. Para efeito de programação, no entanto, a contribuição  $\tilde{k}^e$  em  $\tilde{K}$  é direta sem necessidade de expansão.

#### V-2-4- Forças nodais equivalentes.

Através da minimização da energia potencial total, a nível de elemento, chega-se às forças equivalentes de cada elemento, dadas pelas equações abaixo:

$$\tilde{F}_p^e = \int_v \tilde{N}^T \tilde{p} d(\text{área}) \quad (V-11a)$$

$$\tilde{F}_{\sigma_0}^e = - \int_v \tilde{B}^T \tilde{\sigma}_0 d(\text{vol}) \quad (V-11b)$$

$$\tilde{F}_{\epsilon_0}^e = \int_v \tilde{B}^T \tilde{D} \tilde{\epsilon}_0 d(\text{vol}) \quad (V-11c)$$

$$\tilde{F}_b^e = \int_v \tilde{N}^T \tilde{b} d(\text{vol}) \quad (V-11d)$$

onde

$\tilde{F}_p^e$  = forças equivalentes a forças de superfície  $p$

$\tilde{F}_{\sigma_0}^e$  = forças equivalentes a tensões iniciais  $\sigma_0$

$\tilde{F}_{\epsilon_0}^e$  = forças equivalentes a deformações iniciais  $\epsilon_0$

$\tilde{F}_b^e$  = forças equivalentes a forças de massa  $b$

As forças equivalentes acima são calculadas para cada elemento  $e$  da estrutura.

A energia potencial total da estrutura é a soma da energia potencial total de cada elemento. Nesse estágio deve ser explicitamente incluída a energia potencial das cargas concentradas  $\bar{F}$ , aplicadas diretamente aos pontos nodais da estrutura. Através deste procedimento chega-se ao sistema de equilíbrio da estrutura

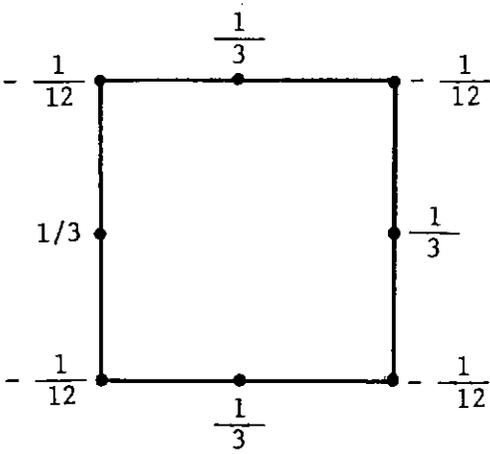
$$\tilde{K} \tilde{\delta} = \tilde{F} \quad (V-12)$$

onde  $\tilde{K}$  é a matriz de rigidez global da estrutura, e cuja montagem foi abordada no item anterior,  $\tilde{\delta}$  é o vetor de deslocamentos nodais incógnitas da estrutura, e  $\tilde{F}$  é o vetor de forças global

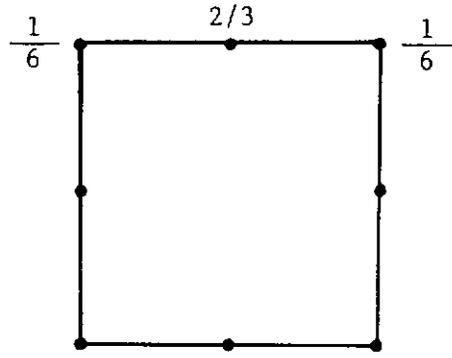
$$\tilde{F} = \bar{F} + \tilde{F}_p + \tilde{F}_{\sigma_0} + \tilde{F}_{\epsilon_0} + \tilde{F}_b$$

A montagem de  $\tilde{F}$  é efetuada através das contribuições das forças equivalentes dos elementos, acrescentando-se as forças aplicadas diretamente aos pontos nodais  $\bar{F}$ .

Em elementos refinados como o isoparamétrico, é interessante introduzir variações de  $p$ ,  $\sigma_0$ ,  $\epsilon_0$  e  $b$  no interior do elemento. Para as variações de  $\sigma_0$  e  $\epsilon_0$  no interior do elemento, utiliza-se função de interpolação de um grau menor que a lei de variação dos deslocamentos, por questões de consistência. Para o elemento isoparamétrico quadrático, esta lei será linear, podendo ser dada pela função de interpolação do elemento isoparamétrico linear. Para  $p$  e  $b$  é usual se utilizar a lei de variação dada pelas funções de interpolação que descrevem o campo de des

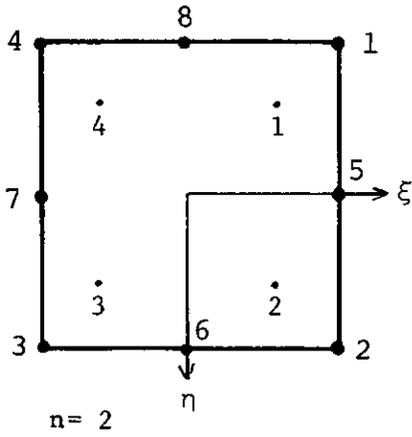


a)

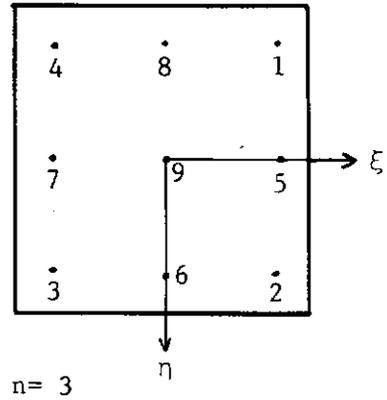


b)

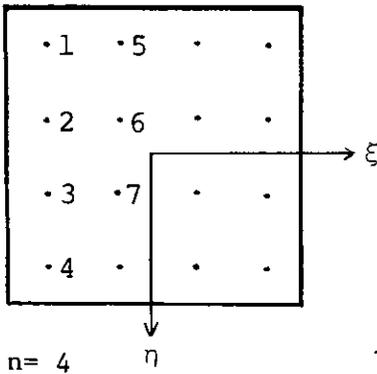
Fig. V-3- Forças nodais equivalentes: a)  $\tilde{a}$  força de massa constante b)  $\tilde{a}$  força de superfície constante.



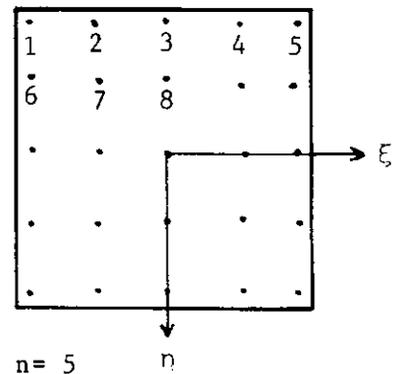
$n=2$



$n=3$



$n=4$



$n=5$

Fig. V.4-Distribuição dos pontos de integração no elemento

locamentos.

Exemplificando, para forças de superfície  $\underline{p}$

temos:

$$\underline{p} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{xi} \\ p_{yi} \end{Bmatrix}$$

onde  $p_{xi}$  e  $p_{yi}$  são os valores das forças nodais conhecidas a priori.

Para espessura unitária o elemento de área  $d(\text{área})$  se transforma no elemento de linha  $ds$ , e a eq. V-11a fica

$$\underline{F}_p^e = \int_s N^T \underline{p} ds = \int_s \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{xi} \\ p_{yi} \end{Bmatrix} ds$$

Quanto à integração de linha tem-se:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Para os lados de  $\eta = \pm 1$

$$ds = \sqrt{x_{i,\xi}^2 + y_{i,\xi}^2} d\xi$$

Para os lados de  $\xi = \pm 1$

$$ds = \sqrt{x_{i,\eta}^2 + y_{i,\eta}^2} d\eta$$

Devem-se fazer as substituições

$$x_{i,\xi} = \sum_i N_{i,\xi} x_i \quad \text{e} \quad y_{i,\xi} = \sum_i N_{i,\xi} y_i$$

e analogamente com relação a  $x_{i,\eta}$  e  $y_{i,\eta}$ , onde  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas dos pontos nodais e os  $N_i$  particularizados para o lado de interesse.

Para efeito de programação é interessante que o carregamento seja fornecido isoladamente para cada lado. Isto tem o ob

jetivo de evitar confusão para os pontos nodais do canto, com cargas verticais de um lado e horizontais de outro adjacente.

Para o elemento utilizado, as forças nodais equivalentes às forças de massa e de superfície constantes, são distribuídas de forma consistente de acordo com o esquema da Fig. V-3.

#### V-2-5- Integração numérica

Para os cálculos da matriz de rigidez e cargas nodais equivalentes vistas anteriormente, são necessários os cálculos das integrais dadas pelas eqs. V-10 e V-11. Zienkiewicz recomenda que estas sejam calculadas numericamente pelo método de Gauss Legendre. Detalhes matemáticos da integração por tal método podem ser achados em Sheid (1968) e aplicações a elementos finitos isoparamétricos encontram-se em Zienkiewicz (1971) e Cook (1974). O objetivo deste item é tecer algumas considerações necessárias para aqueles que se utilizarão do programa de computador desenvolvido.

O processo de integração de Gauss-Legendre baseia-se na adoção de determinados pontos de integração no interior do elemento, cujas coordenadas naturais e fatores de peso são tabelados.

A determinação do número adequado de pontos de integração é de certa importância e requer alguns comentários. Normalmente utiliza-se o mesmo número de pontos de integração  $n$  em cada direção, sendo portanto o esforço computacional proporcional à  $n^2$  para análises bidimensionais. Os integrandos das equações V-10 e V-11, bem como todos os coeficientes necessários à sua obtenção, são calculados em todos os pontos de integração adotados.

Devido à dificuldade de determinação da ordem dos integrandos que ocorrem nas equações V-10 e V-11, para um elemento

destorcido, o número de pontos de integração não pode ser matematicamente definido para uma integração exata (Mahler e outros, 1976). Se o sistema  $\xi \eta$  é ortogonal e paralelo ao sistema  $x y$ , o integrando é um polinômio do segundo grau. Neste caso, portanto, bastam dois pontos de integração em cada direção para que se obtenha uma integração exata. Para elementos destorcidos de forma suave, como o da Fig. V-1, são suficientes três pontos de integração em cada direção. Para elementos mais destorcidos maior número de pontos de integração serão necessários.

O programa de computador desenvolvido permite a escolha de 2, 3, 4 e 5 pontos de integração no elemento. A Fig. V-4 mostra a distribuição dos pontos de integração no elemento.

Zienkiewicz (1971) recomenda que o sinal do jacobiano seja testado nos pontos de integração. Se o jacobiano for negativo em qualquer ponto de integração, um erro devido à não-unicidade do mapeamento é indicado, o que ocorrerá por exemplo na Fig. V-2. O programa de computador acusa este erro através de mensagem.

#### V-2-6- Cálculo de deformações e tensões

Resolvendo o sistema dado pela eq. V-12, obtemos os deslocamentos nodais de toda a estrutura ( $\tilde{\delta}$ ).

Os deslocamentos dos pontos nodais de um elemento ( $\tilde{\delta}^e$ ) podem ser convenientemente agrupados sob a forma

$$\tilde{\delta}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ v_1 \\ \vdots \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (V-13)$$

onde  $u_i$  é o deslocamento do nó  $i$  na direção  $x$ , e  $v_i$  é o deslocamento

mento do nó  $i$  na direção  $y$ .

Para efeito de programação os deslocamentos  $u_i$  e  $v_i$  do nó  $i$  são reunidos, e o vetor  $\delta^e$  fica

$$\tilde{\delta}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_i \\ v_i \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ v_0 \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (V-14)$$

Entretanto, visando à formulação descrita a seguir, utilizaremos a eq. V-13 por apresentar maior simplicidade no desenvolvimento.

Através do conceito de isoporametria podemos escrever a eq. V-15, análoga à eq. V-2.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (V-15)$$

onde  $\tilde{N}$  é dado pelas eqs. V-3 e V-4, e  $u$  e  $v$  são os deslocamentos num ponto qualquer do elemento.

No estado plano de deformação, pode-se escrever para um determinado ponto do elemento

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,x} \\ u_{,x} + v_{,x} \end{Bmatrix} \quad (V-16)$$

Substituindo (V-15) em (V-16) obtemos

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{,x} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{N}_{,y} \\ \tilde{N}_{,y} & \tilde{N}_{,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} \quad (V-17)$$

A equação V-17 pode ser escrita

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{B} \tilde{\delta}^e$$

sendo  $\underline{B}$  a matriz que relaciona deslocamentos nodais a deformações em qualquer ponto do elemento.

A relação entre tensões e deformações é dada pela lei de Hooke generalizada, que pode ser escrita na forma matricial

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\underline{\epsilon} + \underline{\sigma}_0 \quad (V-18)$$

onde  $\underline{\sigma}_0$  é o vetor das componentes das tensões iniciais e  $\underline{D}$  é a matriz de elasticidade.

Para material elástico isotrópico e estado plano de deformação, a equação acima expandida fica

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{x_0} \\ \sigma_{y_0} \\ \tau_{xy_0} \end{Bmatrix} \quad (V-19)$$

sendo a tensão  $\sigma_z$  calculada em termos de  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  por

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$E$  é o módulo de elasticidade e  $\nu$  coeficiente de Poisson.

Para parâmetros  $E$  e  $\nu$  obtidos a partir de ensaios triaxiais, deve-se utilizar diretamente a equação acima. Caso os parâmetros sejam obtidos em ensaios de deformação plana, a equação acima deve ser utilizada com os seguintes valores de  $E$  e  $\nu$ :

$$E = E_{dp} (1 - \nu_{dp}^2)$$

$$\nu = \nu_{dp} (1 - \nu_{dp})$$

onde  $E_{dp}$  e  $\nu_{dp}$  são os parâmetros obtidos em ensaio de deformação plana.

Como o campo de deslocamentos é quadrático, as deformações e, conseqüentemente, as tensões, sendo obtidas das derivadas primeiras dos deslocamentos, serão funções lineares.

Sendo conforme o elemento utilizado, existirá continuidade de deslocamentos entre elementos. No entanto, as deformações

e tensões serão descontínuas entre elementos. Assim, para a de terminação destas nos pontos nodais, torna-se necessária a de terminação das médias obtidas em um ponto comum a dois ou mais elementos.

Cook (1974) recomenda que, para maior precisão no cálculo das tensões, estas sejam calculadas nos pontos de integração, em vez de o serem nos pontos nodais, como usualmente é feito.

Para efeito de cálculo no programa, as tensões são consideradas positivas quando de tração, e negativas quando de compressão, convenção oriunda da teoria da elasticidade, e contrária à utilizada em Mecânica dos Solos.

### V-3-1- Determinação de tensões para análise elasto-plástica

O incremento de deformação total pode ser dividido nas parcelas elástica e plástica

$$d \underline{\underline{\epsilon}} = d \underline{\underline{\epsilon}}^e + d \underline{\underline{\epsilon}}^p \quad (V-20)$$

O incremento de deformação elástica é dado pela lei de Hooke generalizada

$$d \underline{\underline{\epsilon}}^e = \underline{\underline{D}}^{-1} d \underline{\underline{\sigma}} \quad (V-21a)$$

o que também pode ser escrito

$$d \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} d \underline{\underline{\epsilon}}$$

que expandido fica

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x^e \\ d\epsilon_y^e \\ d\epsilon_z^e=0 \\ d\gamma_{xy}^e \end{Bmatrix} \quad (V-21b)$$

O incremento de deformação plástica será fornecido pela lei de escoamento plástica associada (eq. III-13)

$$d\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}^P = \lambda \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \lambda \underline{\underline{a}}$$

onde  $\underline{\underline{a}}^T = \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right]$

e F é a função de escoamento de Drucker-Prager, representada em estado plano de deformação pela eq. III-7 e Fig. V-5

$$F = \alpha I_1 + J_2^{1/2} - k \quad (\text{III-7})$$

onde

$$\alpha = \frac{\text{tg } \phi}{\sqrt{9+12\text{tg}^2\phi}} ; \quad k = \frac{3c}{\sqrt{9+12\text{tg}^2\phi}} ; \quad I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$e \quad J_2^{1/2} = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 \right] + \tau_{xy}^2$$

A eq. V-20 combinada com as eqs. V-21 e V-22 fornece

$$d\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{D}}^{-1} d\tilde{\underline{\underline{\sigma}}} + \lambda \underline{\underline{a}} \quad (\text{V-23})$$

Pré-multiplicando ambos os lados da eq. V-23 por  $\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}}$  e simplificando obtemos

$$\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} d\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{a}}^T d\tilde{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{a}} \lambda \quad (\text{V-24})$$

Para o critério de Drucker-Prager,  $F = F(\underline{\underline{\sigma}})$  e a diferenciação total da função de escoamento durante a deformação plástica produz

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)^T d\tilde{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{a}}^T d\tilde{\underline{\underline{\sigma}}} = 0 \quad (\text{V-25})$$

Substituindo V-25 em V-24 temos

$$\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} d\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{a}} \lambda$$

o que fornece o escalar  $\lambda$

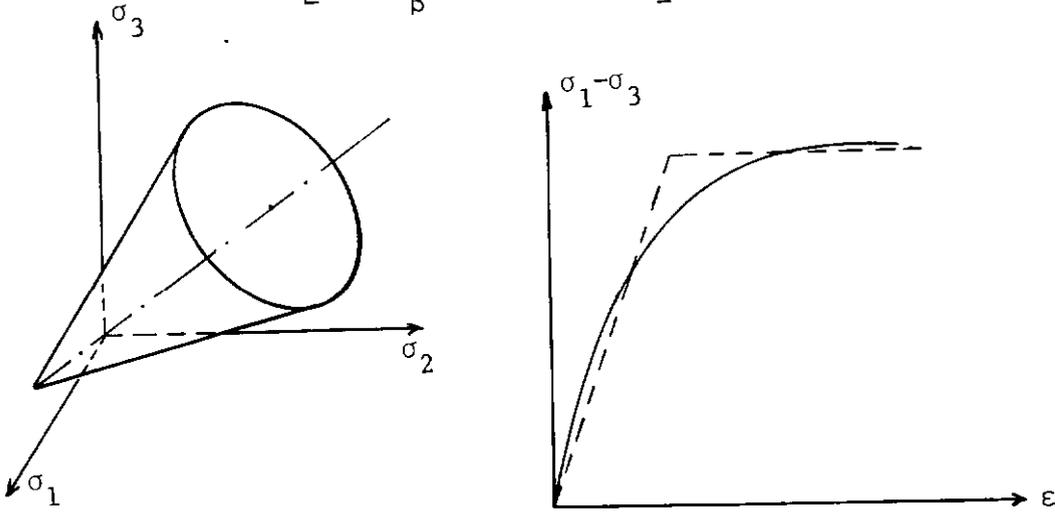
$$\lambda = \frac{1}{\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{a}}} \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} d\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{\beta} \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} d\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (\text{V-26})$$

Substituindo V-26 em V-23 temos

$$d\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{D}}^{-1} d\tilde{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{1}{\beta} \underline{\underline{a}} \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{D}} d\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}$$

Pré-multiplicando ambos os lados por  $\underline{\underline{D}}$  e rearranjando obtemos

$$d\tilde{\sigma} = \left[ \underline{D} - \frac{1}{\beta} \underline{D} \underline{a} \underline{a}^T \underline{D} \right] d\tilde{\epsilon} = \underline{D}_{ep} d\tilde{\epsilon} \quad (V-27)$$



a) representação no espaço das tensões principais

b) curva tensão-deformação idealizada

Fig. V-5- O modelo elasto-plástico perfeito de Drucker-Prager

Para o caso da função de escoamento de Drucker-Prager (eq. III-7)

$$\underline{a} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \\ \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha + s_x/2 J_2^{1/2} \\ \alpha + s_y/2 J_2^{1/2} \\ \alpha + s_z/2 J_2^{1/2} \\ \tau_{xy}/J_2^{1/2} \end{Bmatrix} \quad (V-28)$$

onde  $s_x = \sigma_x - I_1/3$  ;  $s_y = \sigma_y - I_1/3$  ;  $s_z = \sigma_z - I_1/3$

Substituindo  $\underline{a}$  e  $\underline{D}$  dados pelas equações V-28 e V-21b em V-27 obtemos

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\epsilon_z = 0 \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

onde

$$D_{11} = 2G (1 - h_2 - 2h_1 \sigma_x - h_3 \sigma_x^2)$$

$$D_{22} = 2G (1 - h_2 - 2h_1 \sigma_y - h_3 \sigma_y^2)$$

$$D_{33} = 0$$

$$D_{44} = 2G (0,5 - h_2 - 2h_1 \sigma_y - h_3 \sigma_y^2)$$

$$D_{12} = D_{21} = -2G [h_2 + h_1 (\sigma_x + \sigma_y) + h_3 \sigma_x \sigma_y]$$

$$D_{13} = D_{31} = -2G [h_2 + h_1 (\sigma_x + \sigma_z) + h_3 \sigma_x \sigma_z]$$

$$D_{14} = D_{41} = -2G [h_1 \tau_{xy} + h_3 \sigma_x \tau_{xy}]$$

$$D_{23} = D_{32} = -2G [h_2 + h_1 (\sigma_y + \sigma_z) + h_3 \sigma_y \sigma_z]$$

$$D_{24} = D_{42} = -2G [h_1 \tau_{xy} + h_3 \sigma_y \tau_{xy}]$$

$$D_{34} = D_{43} = -2G [h_1 \tau_{xy} + h_3 \sigma_z \tau_{xy}]$$

$$e \quad h_1 = h_0 \left[ J_2^{1/2} (1 + 9\alpha^2 K/G) \right] \quad e \quad h_0 = \frac{3K\alpha/2G - I_1/6J_2^{1/2}}{3 \nu K k}$$

$$h_2 = \frac{2h_0 - I_1/6J_2^{1/2}}{(1 + 9\alpha^2 K/G)} - \frac{3 \nu K k}{E J_2^{1/2} (1 + 9\alpha^2 K/G)}$$

$$h_3 = 1 \left[ 2J_2 (1 + 9\alpha^2 K/G) \right]$$

### V-3-2- Técnica utilizada para análise não linear

Basicamente são três as técnicas utilizadas para análises não linear geométrica e física: processos incrementais, processos iterativos e processos incrementais e iterativos ou mistos. Estas técnicas são descritas com algum detalhe em Cook (1974),

Desai e Abel (1972) e Zienkiewicz (1971). A análise elasto-plástica para pequenas deformações é um problema de não-linearidade física. As técnicas descritas a seguir são enfocadas deste ponto de vista.

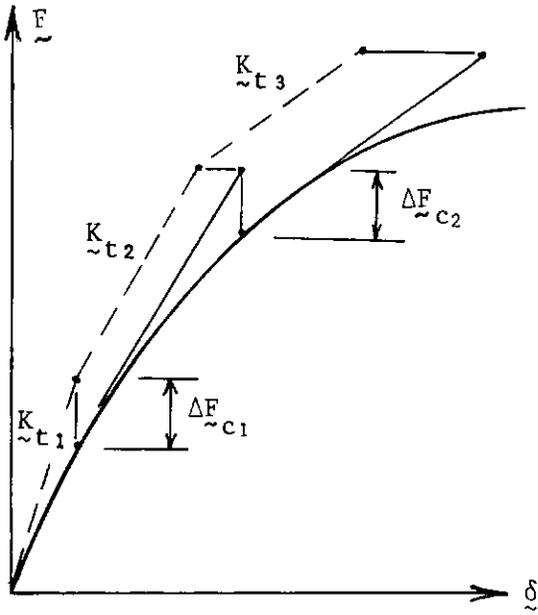
No domínio elástico haverá uma relação linear entre o carregamento aplicado e os deslocamentos ocorridos, e o incremento de tensões será elástico. Quando a estrutura começar a plastificar, os incrementos de tensões serão elasto-plásticos e calculados a partir da eq. V-22. Observa-se que a matriz elasto-plástica  $\underline{D}_{ep}$  é dependente do estado de tensões e, portanto, a relação entre o carregamento aplicado e os deslocamentos será não-linear no domínio plástico. Por esta razão é necessário que o carregamento seja aplicado em incrementos, preferencialmente pequenos. Devido ao exposto acima, na análise elasto-plástica são normalmente utilizadas apenas as técnicas incremental e mista.

Na técnica puramente incremental ou de rigidez tangente a cada incremento é efetuada uma análise linear, utilizando-se matriz de rigidez tangente  $\underline{K}_{ti}$  correspondente a configuração do sistema no início do incremento  $i$ . Esta técnica é esquematizada graficamente na Fig.V-6a através das linhas tracejadas.

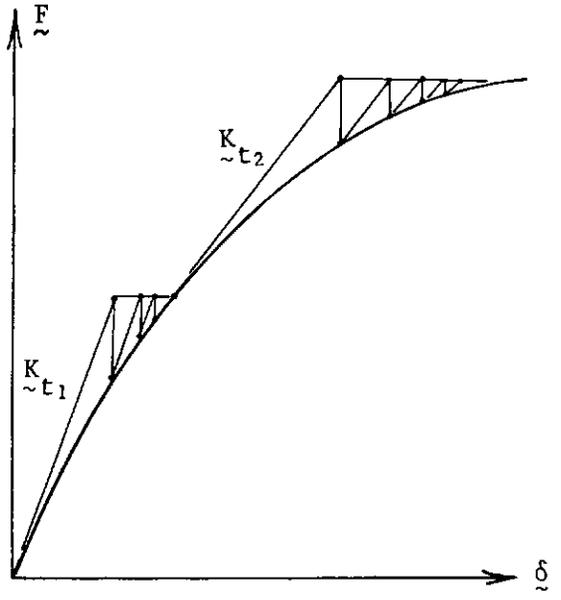
Pode ser efetuada uma melhoria no cálculo acima aplicando uma carga corretiva  $\Delta F_{ci}$  ao início de cada incremento  $i$ . Esta técnica é chamada de incremental com uma iteração e é esquematizada na Fig.V-6a através de linhas contínuas.

Nas técnicas mistas descritas a seguir, a carga é aplicada incrementalmente, mas após cada incremento são realizadas várias iterações, até a convergência. Tais técnicas proporcionam maior precisão às custas de maior esforço computacional.

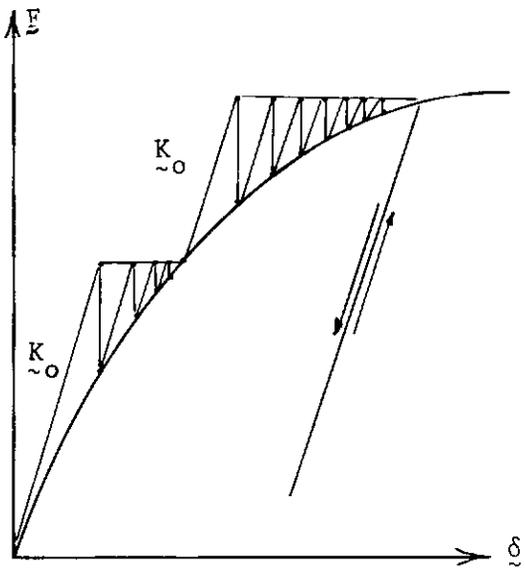
O método incremental com uma iteração, visto anteriormen



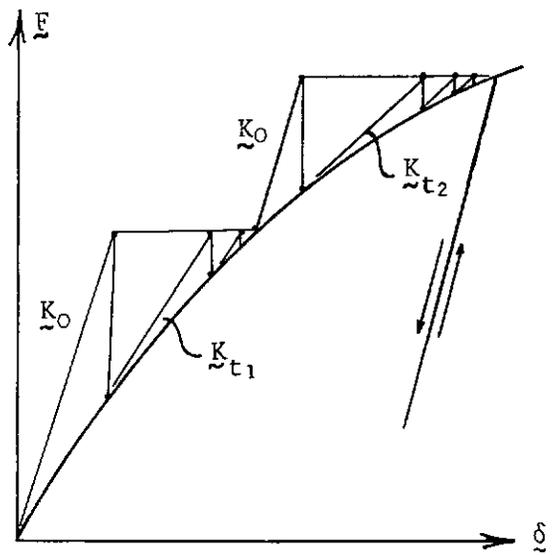
a) incrementais



b) Newton-Raphson modificado (mista)



c) "tensões iniciais" (mista)



d) Chang e outros (1974) (mista)

Fig. V-6- Técnicas para análise não-linear

te (Fig. V-6a), pode ser melhorado se, para cada incremento, forem realizadas várias iterações. Uma matriz de rigidez tangente  $K_{ti}$  pode ser calculada no início do incremento  $i$  e utilizada nas iterações subseqüentes deste incremento. Este método, também chamado de Newton-Raphson modificado, é esquematizado na Fig. V-6b. Nayac e Zienkiewicz (1972) sugerem, para efeito de redução no tempo computacional, que a nova matriz de rigidez tangente de cada incremento seja calculada na primeira ou segunda iteração. Neste caso, a matriz de rigidez do início de cada incremento será igual à da última iteração do incremento anterior.

Neste trabalho utilizaremos a técnica na qual calcula-se a matriz de rigidez elástica  $K_0$  uma única vez, para o primeiro incremento, e a mesma é utilizada no decorrer de todo o cálculo. Este método, de rigidez constante nos incrementos e iterações, é chamado de método das "tensões iniciais" (Zienkiewicz e outros, 1969). É também uma particularização do método de Newton-Raphson modificado, necessitando, porém de um maior número de iterações para que seja alcançada a convergência. Uma vantagem desta técnica é que o descarregamento em um ponto no estado plástico é considerado automaticamente como elástico (Fig.V-6c).

Outra técnica interessante é a proposta por Chang e outros (1974) e aplicada a análise elasto-plástica de túneis. É uma técnica mista e considera o descarregamento automaticamente como elástico, como no caso anterior. A técnica é ilustrada na Fig. V-6d. Para cada incremento é utilizada a matriz elástica inicial ( $K_0$ ), obtendo-se uma solução elástica. As forças corretivas são aplicadas utilizando-se a matriz de rigidez

calculada para a primeira iteração do incremento ( $K_{t1}$ ), em função do estado de tensão atual. Esta matriz de rigidez é utilizada nas iterações subseqüentes do incremento.

### V-3-3- Análise elástica - Sequência de cálculo usada para programação

Inicialmente deve-se dividir o valor de forças  $F$  a ser aplicado em um determinado número de incrementos. É interessante que seja alcançado o domínio plástico com o menor número de incrementos possível. A partir do momento em que se inicia a plastificação, é necessário que os incrementos sejam pequenos, conforme foi justificado no ítem anterior. Assim, os valores dos incrementos de força  $\Delta F$  devem diminuir à medida que novos incrementos vão sendo aplicados.

A seguir será descrita a seqüência de cálculo para um incremento genérico de força  $\Delta F$ .

Conforme comentado no ítem anterior, será utilizado o método das "tensões iniciais" ou de Newton-Raphson Modificado, no qual a matriz de rigidez é mantida constante em toda a análise (incrementos e iterações). Desta forma será necessário o cálculo da matriz de rigidez apenas uma única vez (no primeiro incremento).

O algoritmo descrito a seguir é basicamente o proposto por Zienkiewicz e outros (1969). São acrescentados a ele melhoras no cálculo sugeridas por Nayak e Zienkiewicz (1972), para utilização do elemento isoparamétrico. Neste algoritmo as tensões e deformações devem ser calculadas diretamente nos pontos de integração.

- 1 - Aplicar  $\Delta F_i$  e calcular os incrementos de deslocamentos  $\Delta \delta_i$  e atualizar deslocamentos
 
$$\delta_i = \delta_{i-1} + \Delta \delta_i \quad ;$$
- 2 - Calcular a norma dos deslocamentos, conforme será visto na subseção A a seguir.
- 3 - A partir dos deslocamentos  $\Delta \delta_i$ , calcular os incrementos de deformações e tensões elásticas nos pontos de integração,  $\Delta \epsilon_i'$  e  $\Delta \sigma_i'$ . Atualizar deformações e tensões:  $\epsilon_i' = \epsilon_{i-1}' + \Delta \epsilon_i'$  e
 
$$\sigma_i' = \sigma_{i-1}' + \Delta \sigma_i'$$
- 4 - Para cada elemento, calcular, nos seus pontos de integração, a função de escoamento correspondente ao nível de tensões atual:  $F(\sigma_i')$  = F. A função de escoamento correspondente ao nível de tensões anterior será denotado por
 
$$F(\sigma_{i-1}') = F_0$$
- 5 - Percorrer os pontos de integração (P.I.) de cada elemento nos quais são realizados os seguintes testes:
  - a) se  $F < 0$ , o P.I. está no domínio elástico, e as deformações e tensões calculadas estão corretas. Testar outro P.I.
  - b) se  $F \geq 0$ , o P.I. está em estado plástico, e existem duas alternativas: c) e d)
  - c) se  $F \geq 0$  e  $F_0 = 0$ , vá para e)
  - d) se  $F \geq 0$  e  $F_0 < 0$ , calcular o valor da tensão intermediária ( $\sigma_i'$ ) para a qual o escoamento começa; este cálculo será visto na subseção B a seguir.

- e) calcular a matriz  $\underline{D}_{ep} = \underline{D}_{ep}(\underline{\sigma}'_i)$  e  $\Delta\underline{\sigma}_i = \underline{D}_{ep} \Delta\underline{\varepsilon}'_i$
- f) calcular as tensões desequilibradas necessárias para o posterior cálculo das forças residuais:  $\Delta\underline{\sigma}''_i = \Delta\underline{\sigma}'_i - \Delta\underline{\sigma}_i$
- g) atualizar tensões  $\underline{\sigma}_i = \underline{\sigma}'_i - \Delta\underline{\sigma}''_i$ . Para o caso a)  $\Delta\underline{\sigma}''_i = 0$  e então  $\underline{\sigma}_i = \underline{\sigma}'_i$
- h) fazer a correção de tensões  $\underline{\sigma}_i = \underline{\sigma}'_i + \delta\underline{\sigma}$ ; o cálculo de  $\delta\underline{\sigma}$  será visto na subseção C a seguir.

- 6 - Caso a norma dos deslocamentos seja superior a uma tolerância pré-fixada, calcular as forças residuais para os elementos em que existem P.I. com tensões desequilibradas ( $\Delta\underline{\sigma}''_i$ ), através de

$$\underline{\Delta F}^e = \int_v \underline{B}^T \Delta\underline{\sigma}''_i d_{vol} ,$$

onde  $\underline{\Delta F}^e$  é o valor da força daquele elemento e  $\underline{\Delta F}$  é o valor de forças global. Voltar para 1.

- 7 - Repetir as etapas de 1 a 6 o número de vezes necessárias a que a norma dos deslocamentos seja inferior à tolerância pré-fixada.
- 8 - Caso a norma dos deslocamentos seja inferior a tolerância pré-fixada, calcula-se  $\underline{\Delta F}$  a aplicar no próximo incremento e voltar para 1.
- 9 - Repetir as etapas de 1 a 8 para todos os incrementos.

#### A) Cálculo da norma dos deslocamentos

Será utilizada a norma euclidiana modificada, fornecida pela expressão

$$\left\| \gamma \right\| = \frac{1}{m} \left\| \frac{\Delta \delta_i}{\delta_i} \right\| = \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\Delta \delta_i}{\delta_i} \right\|^2 \Bigg|^{1/2}$$

onde  $\Delta \delta_i$  e  $\delta_i$  são os incrementos de deslocamentos e o deslocamento total acumulado, e  $m$  o número de graus de liberdade da estrutura. A norma é chamada de modificada devido a introdução do termo  $m$ , para que o valor obtido independa do número total de graus de liberdade da estrutura. O valor de  $\left\| \gamma \right\|$  deve ser comparado com uma tolerância pré-estabelecida ou com uma percentagem da norma  $\left\| \delta_i \right\|$  dos deslocamentos. Para as aplicações realizadas utilizou-se uma tolerância de 0,0005 a 0,004.

B) Cálculo das tensões intermediárias  $\sigma_i^!$  para a qual o escoamento se inicia.

Durante transição da fase elástica para a fase plástica, deve ser determinado o ponto onde o escoamento se inicia.

Caso seja ultrapassado o ponto de transição de uma iteração ou incremento  $i$  para o seguinte, teremos

$$F(\sigma_{i-1}^!) = F_0 < 0$$

$$F(\sigma_i^!) = F(\sigma_{i-1}^! + \Delta \sigma_i^!) = F > 0$$

Deve ser calculado um fator  $r$  de tal forma que

$$F(\sigma_{i-1}^! + r \Delta \sigma_i^!) = 0$$

O fator  $r$  define o ponto de transição da fase elástica para a plástica e pode ser calculado de forma aproximada ( $r=r_1$ )

através de interpolação linear

$$r_1 = - F_0 / F - F_0$$

Devido a não-linearidade da função  $F$ , teremos

$$F(\sigma'_{i-1} + r_1 \Delta \sigma'_i) = F_2 \neq 0$$

Pode-se obter uma melhor estimativa de  $r$  considerando a diferenciação da função de escoamento

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T d\sigma$$

introduzindo para a condição de estado plano de deformação

$$\tilde{a}^T = \left( \frac{\partial F}{\partial \delta} \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \end{bmatrix}$$

considerando

$$d\sigma = \Delta r_1 \Delta \sigma'$$

e para pequenas variações

$$dF = - F_2$$

obtem-se

$$F_2 = \tilde{a}^T \Delta \sigma' \Delta r_1$$

e uma melhor aproximação de  $r$  é obtida por

$$r = r_1 - F_2 / \tilde{a}^T \Delta \sigma'$$

### C) Cálculo da correção de tensões

Nayak e Zienkiewicz (1972) propõem que as tensões totais calculadas no fim de um incremento ou iteração sejam corrigidos por

$$\delta \sigma = \tilde{a} p$$

onde  $p$  é um escalar.

De acordo com consideração análoga a da subseção anterior, pode-se fazer

$$dF = -F_3 = \underset{\sim}{a}^T \delta \underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{a} p$$

onde  $F_3 = F(\underset{\sim}{\sigma})$ . Obtem-se então

$$\delta \underset{\sim}{\sigma} = -\underset{\sim}{a} \left( \frac{F_3}{\underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{a}} \right)$$

#### V-4- Simulação da escavação

Túneis e cavidades subterrâneas são escavados através de diversos procedimentos, que dependerão principalmente do tipo de material do maciço e do tamanho da abertura. Para a simulação de etapas de escavação deve-se dispor de técnica numérica que permita o acompanhamento de tipos de escavação variados. São três os tipos de métodos mais usados em elementos finitos para simulação de escavações: método da escavação instantânea, método da relaxação e métodos incrementais.

No método da escavação instantânea ou *gravity turn on* aplicam-se inicialmente forças de massa à malha de elementos finitos sem abertura. Na segunda etapa as mesmas forças são aplicadas à malha de elementos finitos com a abertura. Os deslocamentos, tensões e deformações resultantes da escavação são fornecidas pela diferença entre as duas análises. Este processo não segue a seqüência de escavação, o que é uma falha no caso de escavações com mais de uma etapa. Ishihara (1970) demonstrou que as análises para as escavações instantânea e sequencial somente são equivalentes para materiais isotrópicos elástico-lineares, cujas tensões iniciais principais são relacionadas

pelo coeficiente de Poisson (eq. II-2).

No método da relaxação, a geometria final da abertura é usualmente estabelecida na malha inicial de elementos finitos. Os elementos do maciço ao redor da cavidade são tensionados e subseqüentemente relaxados de forma a alcançar um equilíbrio final no estado de tensões. Este método não segue a seqüência construtiva e só considera as tensões existentes nos elementos remanescentes da escavação.

Basicamente são dois os métodos de escavação incremental, os quais permitem seguir a seqüência de escavação. A simulação da escavação é efetuada aplicando-se forças de escavação na fronteira de escavação ao mesmo tempo em que é anulada a rigidez de cada elemento removido. A diferença entre os dois métodos reside em como são calculadas as forças de escavação em cada etapa.

No método proposto por Clough e Duncan (1969), a partir das tensões atuantes na fronteira potencial de escavação são calculadas as forças equivalentes nos pontos nodais dos elementos da fronteira. Essas forças são aplicadas à malha com o sinal invertido. Os deslocamentos, tensões e deformações calculados são então adicionados aos existentes anteriormente. Para a fronteira seguinte novas forças de escavação são calculadas a partir do novo estado de tensão. Este processo é repetido para as diversas etapas de escavação. Apesar deste método ter sido utilizado largamente durante algum tempo, proporciona resultados dependentes do número de etapas, para um material isotrópico e elástico linear (Christian e Wong, 1973). Por esta razão, está atualmente em desuso, desde a apresentação da técnica proposta por Chandrasekaran e King (1974), que indepen-

de do número de etapas, para o material referido acima. Este último método, descrito a seguir, será utilizado neste trabalho.

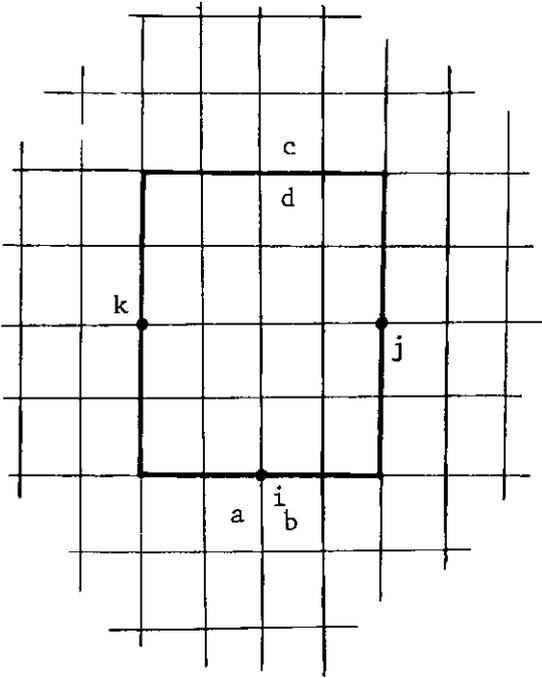
Suponhamos, por exemplo, o túnel da Fig. V-7a que será escavado em duas etapas delimitadas por  $kj$ . A partir do estado de tensões do maciço calculam-se as forças  $\underline{F}_1$  e  $\underline{F}_2$  equivalentes às tensões iniciais correspondentes às etapas 1 e 2 (Fig. V-7b).

Para a primeira etapa de escavação aplica-se  $-\underline{F}_1$  aos pontos nodais da fronteira respectiva, anulando-se a rigidez dos elementos retirados (Fig. V-7c). A seguir são calculadas as variações de forças em todas as fronteiras subsequentes de escavação. No exemplo da Fig. V-7 deve ser calculada a variação de força  $\Delta \underline{F}_2^1$  correspondente à fronteira 2. As componentes de  $\Delta \underline{F}_2^1$  são calculadas efetuando-se o produto das matrizes de rigidez dos elementos da fronteira de escavação, que serão retirados, pelos deslocamentos dos pontos nodais do elemento. Exemplificando: a componente de  $\Delta \underline{F}_2^1$  no nó  $i$  será obtida multiplicando-se as linhas apropriadas das matrizes de rigidez dos elementos  $a$  e  $b$  pelo vetor deslocamento de cada elemento, correspondente à primeira etapa de escavação.

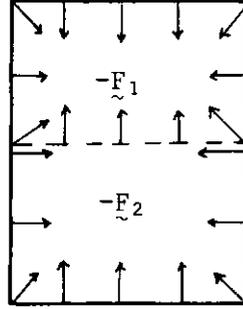
Calcula-se  $\underline{F}_2^1 = \underline{F}_2 + \Delta \underline{F}_2^1$  e, para a segunda etapa de escavação, aplica-se  $-\underline{F}_2$  na fronteira 2, desprezando-se a rigidez dos elementos escavados. As tensões, deformações e deslocamentos resultantes de cada etapa vão sendo acumulados de forma a se obterem os valores finais do processo de escavação.

Para  $n$  etapas de escavação o procedimento acima será aplicado sucessivamente até a etapa  $n$ .

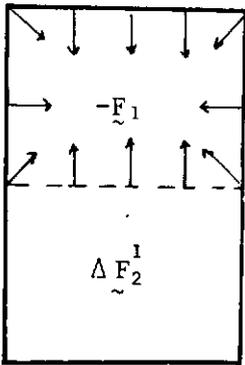
Para o cálculo das forças equivalentes às tensões iniciais,  $\underline{F}_1$  e  $\underline{F}_2$  no exemplo acima, deve ser efetuada a integra-



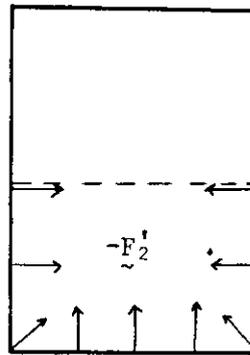
a) rede de elementos finitos



b) forças equivalentes às tensões iniciais nas fronteiras 1 e 2 de escavação



c) escavação da 1a. etapa (aplicando-se  $-F_1$ ) e cálculo da variação de forças  $\Delta F_2^1$  proveniente da 1a. etapa de escavação



d) escavação da 2a. etapa aplicando-se

$$-F_2^1 = -(F_2 + \Delta F_2^1)$$

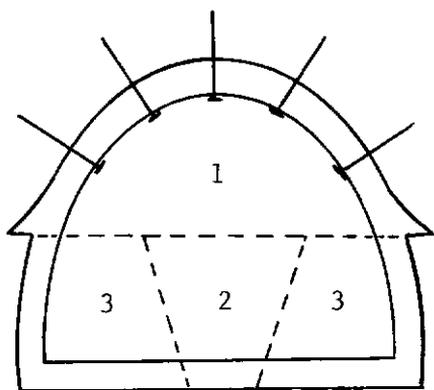
Fig. V-7- Simulação de escavação em duas etapas de túnel não revestido

ção dada pela eq. V-11b. Este cálculo deve ser efetuado tanto para o elemento interno como para o externo à escavação. Observa-se que o valor correto da força de escavação será fornecido pela média das forças equivalentes às tensões iniciais dos elementos interno e externo à escavação (elementos c e d da Fig. V-7a). Deve-se frisar que o ponto nodal pertencente a duas fronteiras consecutivas (ponto nodal j, Fig. V-7a) terá sua força de escavação proveniente da primeira etapa aplicada na segunda.

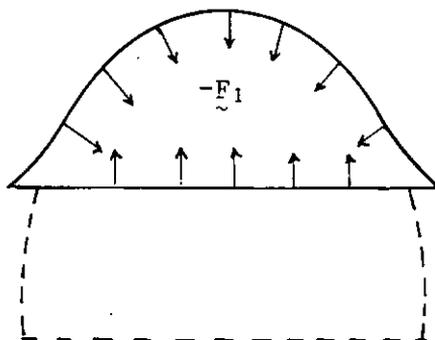
Caso se deseje simular a construção de um túnel revestido, com camboteamento metálico ou estroncas, a técnica de escavação permanece a mesma, mas deve-se dar a rigidez apropriada aos elementos que passarão a trabalhar como cada um daqueles materiais. A aplicação de chumbadores ou tirantes pode ser simulada de forma aproximada pela aplicação de carga concentrada correspondente. A Fig. V-8 ilustra um exemplo fictício de um túnel escavado em três etapas com construção do revestimento por partes e utilização de chumbadores. Para este caso admite-se que a instalação do revestimento não é imediata, mas ocorre posteriormente como, por exemplo, na etapa seguinte de escavação.

Se o revestimento for instalado imediatamente após a escavação, o procedimento para simular este fato pode ser efetuado como ilustra a Fig. V-9, no caso de duas etapas de escavação. Túneis escavados através de couraça (*shield*) seriam simulados desta forma pois que o revestimento é instalado imediatamente após a escavação, a qual é efetuada usualmente em uma etapa (Fig. V-10).

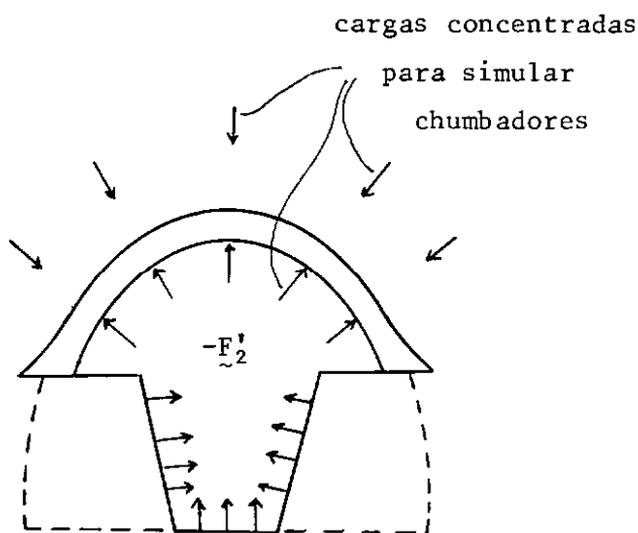
Os casos descritos acima dizem respeito a revestimento



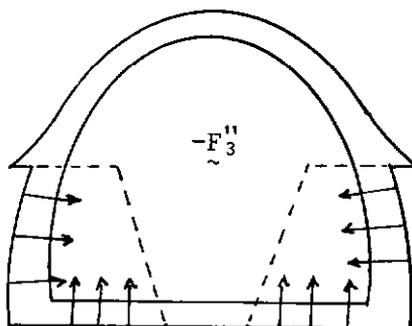
a) Seção transversal do túnel escavado em três etapas



b) 1a. etapa de escavação - aplica forças de escavação ( $-F_1$ ) e anula rigidez dos elementos retirados

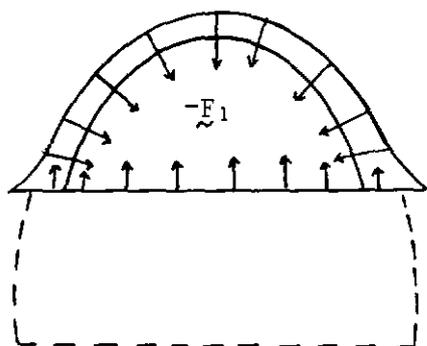


c) 2a. etapa de escavação - atribui rigidez de concreto aos elementos do revestimento, anula rigidez dos elementos retirados, aplica forças de escavação ( $-F'_2$ ) e cargas concentradas aos chumbadores

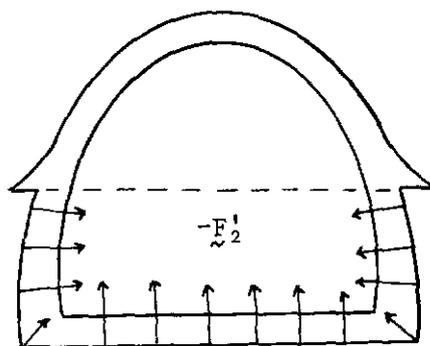


d) 3a. etapa de escavação - atribui rigidez de concreto aos elementos do revestimento, anula rigidez dos elementos retirados e aplica forças de escavação ( $-F''_3$ )

Fig. V-8- Túnel aberto em etapas com execução do revestimento por partes e utilização de chumbadores.



a) 1a. etapa - escavação e instalação do revestimento na abóbada



b) 2a. etapa - escavação e instalação do revestimento nos pés direitos e soleira

Fig. V-9- Construção do túnel em duas etapas com instalação imediata do revestimento em cada uma delas

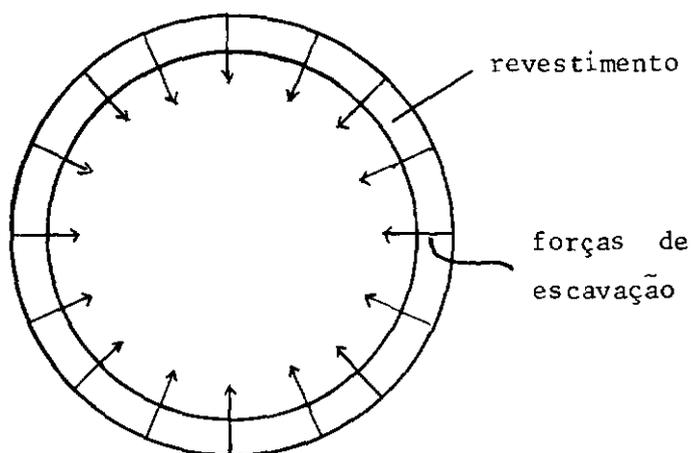


Fig. V-10- Túnel escavado em uma etapa com instalação imediata do revestimento após a escavação. Escavação por couraça ("shield").

único, ou seja, situações em que, após a instalação do revestimento, sua espessura não é aumentada. Para túneis com revestimentos provisório e permanente, a simulação construtiva torna-se mais complexa. Este processo construtivo é, inclusive, uma das características de métodos modernos de abertura de túneis como o novo método austríaco de escavação de túneis (NATM), introduzida por Rabewicz (1964). Uma análise aproximada seria aplicar parte da força de escavação quando da instalação do revestimento provisório e o restante da força para o revestimento definitivo. As percentagens da força total a serem aplicadas em cada etapa seriam estimadas com base nas espessuras dos revestimentos provisório e permanente e comportamento do material do maciço, inclusive com relação ao tempo (deformação-lenta). Com relação a este último aspecto, a análise seria mais rigorosa se considerasse modelos visco-elástico ou visco-plástico para o material do maciço e, eventualmente, do revestimento. Este assunto, no entanto, está aberto à pesquisas, com relação a experiência de campo e, também, com vistas à aplicação de métodos de dimensionamento.

## C A P Í T U L O VI

PROGRAMA TUNELPLASTVI-I- Apresentação do programa

O programa TUNELPLAST foi desenvolvido para análises elástica linear e elasto-plástica de túneis pelo método dos elementos finitos.

Codificado em linguagem FORTRAN IV-G, pode ser utilizado em computadores BURROUGHS 6700, IBM 360 e 370 e similares.

Procurou-se estruturá-lo em forma modular, o que possibilita maior flexibilidade para a inserção de sub-rotinas específicas. Esta versatilidade permite, também, aplicações a fundações e escavações em geral e continuidade de pesquisas no ramo da engenharia geotécnica.

Apresenta-se neste trabalho documentação suficiente para utilização e entendimento pelo usuário. O programa consta de vinte e cinco sub-rotinas com objetivos específicos, cujas finalidades vão descritas no item seguinte. Para o melhor entendimento do programa, os diversos grupos de operações realizadas ao longo deste são explicados através de comentários. O manual de utilização do programa, exemplo de codificação de uma rede e listagem do programa são apresentados nos apêndices II, III e IV, respectivamente.

Para boa utilização do programa é necessário que o usuário tenha conhecimento do método dos elementos finitos e esteja a par do conteúdo deste trabalho.

VI-2- Estrutura do programa

O fluxograma do programa principal e sub-rotinas é apresentado na Fig. V-1. A seguir são explicados sucintamente os objetivos de cada uma destas partes.

Programa principal - inicializa variáveis e chama sub-rotinas.

ENTRA - lê e imprime dados da malha de elementos finitos e propriedades dos materiais; calcula a largura de banda da matriz de rigidez;

GERAUT - faz geração automática de todos os pontos nodais para o caso particular de rede circular de elementos finitos;

TENIN - calcula, lê e imprime tensões iniciais;

NIVESC - lê e imprime características das etapas de escavação;

ESCAVA - lê e imprime características adicionais de cada etapa de escavação;

MUDRIG - lê e imprime elementos que têm rigezas modificadas em cada etapa;

CARGAS - lê e imprime cargas concentradas e forças de superfície (cargas distribuídas) em cada etapa;

FORMK - monta matriz de rigidez global e introduz condições de contorno de deslocamento;

DECOB - decompõe a matriz de rigidez em banda triangular superior pelo método de Choleski;

RESOB - resolve o sistema de equações para cálculo dos deslocamentos a partir da matriz triangular obtida pela sub-rotina DECOB;

- TENS - calcula tensões e deformações em pontos nodais para análise elástica linear;
- SAÍDA - imprime deslocamentos, tensões e deformações a cumulados para cada etapa de análise;
- MASSA - calcula forças equivalentes a forças de massa;
- EQLOAD - calcula forças equivalentes a tensões (forças de escavação e forças residuais);
- DLOAD - calcula forças equivalentes a forças de superfície;
- ISOPA - calcula matriz de rigidez do elemento isoparamétrico;
- INTEG - calcula coordenadas naturais e fatores de peso dos pontos de integração do elemento (opção para 2, 3, 4 e 5 pontos de integração);
- FUNIN - calcula jacobiano, determinante do jacobiano e matriz deslocamento - deformação para os pontos no dais ou pontos de integração do elemento;
- FMOD - modifica forças de escavação para as etapas seguintes;
- TINPI - interpola tensões de pontos nodais para pontos de integração;
- COPIN - calcula coordenadas globais dos pontos de integração para saída dos resultados;
- EPLAST - algoritmo incremental e iterativo para análise elasto-plástica;
- TENSP - calcula tensões elásticas em pontos de integração para análise elasto-plástica;
- MATEP - calcula matriz elasto-plástica e incrementos de tensões elasto-plásticas;

COPON - calcula as coordenadas dos pontos nodais do elemento;

As sub-rotinas EPLAST, TENSP, MATEP, GERAUT, TENIN, TINPI, COPON, COPIN, CARGAS, SAÍDA, e INTEG foram codificadas pelo autor. As sub-rotinas FMOD, NIVESC, ESCAVA e MUDRIG foram elaboradas por Tsutsumi (1975) e modificadas pelo autor. As sub-rotinas TENS, ISOPA, FUNIN, MASSA, ENTRA e CARGA têm por origem Wilson (1963) e foram modificadas por Tsutsumi e pelo autor deste trabalho. A sub-rotina FORMK é de autoria de Zienkiewicz (1971). No trecho referente a condições de apoio, esta foi modificada pelo autor para incluir a restrição total dos pontos nodais internos à escavação. Como os coeficientes de rigidez destes pontos são nulos, aquela medida deve ser tomada para que a matriz não seja singular. As sub-rotinas EQLOAD e DLOAD foram extraídas de Ebecken (1973), sendo que a primeira foi modificada por Pereira (1977) para o cálculo de forças de escavação e pelo autor deste trabalho para o cálculo de forças residuais para análise elasto-plástica. DECOB e RESOB são oriundas de Weaver (1967).

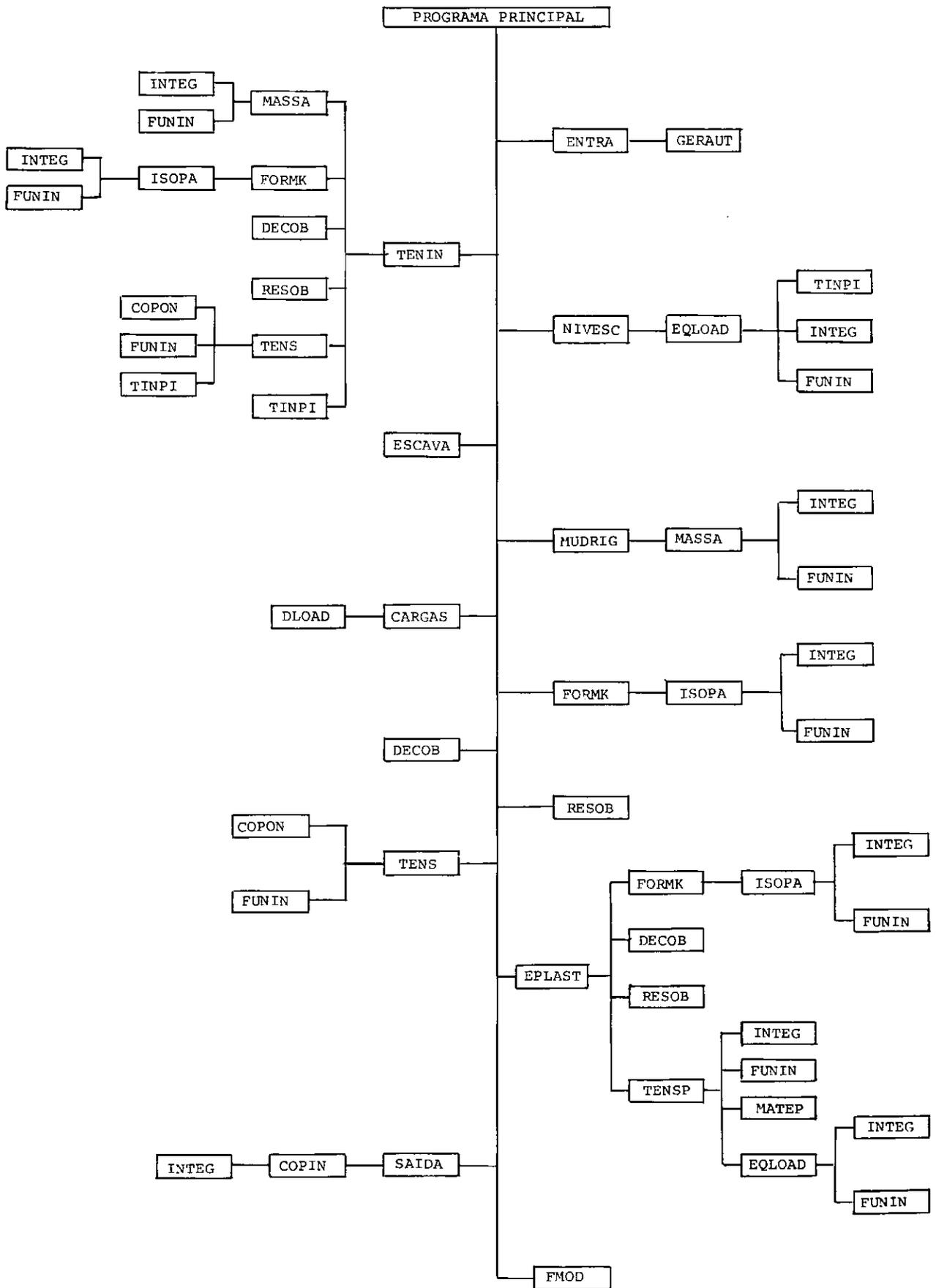


Fig.VI-1- Fluxograma de subrotinas

## C A P Í T U L O    V I I

APLICAÇÕES DO PROGRAMA

Este capítulo apresenta aplicações do programa desenvolvido para análises elástica linear e elasto-plástica de túneis revestidos e não revestidos. Os resultados obtidos são comentados e alguns comparados com os de outros autores.

No apêndice I são apresentadas comparações de resultados do método dos elementos finitos com soluções teóricas disponíveis, para viga em balanço com carga aplicada na extremidade (análise elástica linear) e para um cilindro submetido à pressão interna (análise elasto-plástica).

VII-1- Efeito da localização das fronteiras

Como o método dos elementos finitos envolve uma aproximação do comportamento físico real do sistema, a localização de fronteiras finitas necessita de ser pesquisada, de forma a proporcionar resultados dentro de uma aproximação aceitável.

Nesta pesquisa analisaremos os deslocamentos e tensões provenientes da abertura da cavidade circular mostrada na Fig. VII-1, utilizando malhas com fronteiras variando de 3 a 9 vezes o raio da cavidade.

Os resultados do método dos elementos finitos são comparados com a solução da teoria da elasticidade fornecida por Terzaghi e Richart (1952), para tensões, e por Kruse (1970), para deslocamentos.

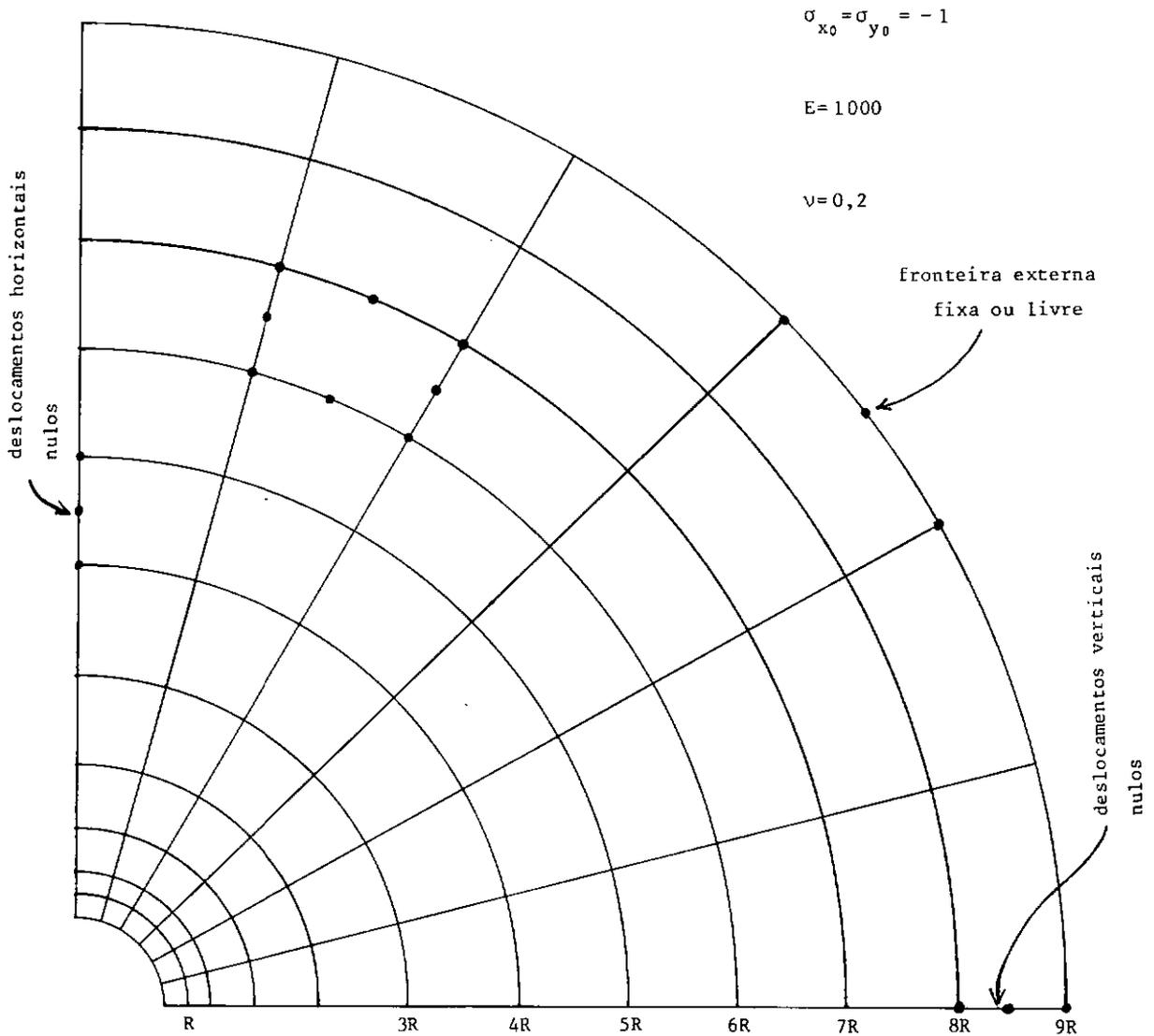


Fig. VII-1- Rede de elementos finitos utilizada para a análise da influência das fronteiras

Como os deslocamentos radiais  $u_r$  são usualmente medidos e têm maior interesse prático, serão utilizados para comparação. No cálculo dos deslocamentos da cavidade circular, utiliza-se a equação de deslocamentos da placa submetida a um estado de tensão biaxial.

$$u_r = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \left( r + \frac{a^2}{r} \right) + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \left( r + \frac{4a^2}{r} - \frac{a^4}{r^3} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$- \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left[ \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \left( r - \frac{a^2}{r} \right) - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \left( r - \frac{a^4}{r^3} \right) \cos 2\theta \right] \quad (\text{VII-1})$$

onde  $r$  e  $\theta$  são coordenadas polares,  $E$  e  $\nu$  parâmetros elásticos,  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  as tensões iniciais no maciço e  $a$  o raio da abertura.

Os deslocamentos radiais no maciço induzidos pela escavação ( $u_e$ ) serão fornecidos pela diferença entre os deslocamentos da placa com a abertura ( $u_a$ ) e os deslocamentos da placa sem a abertura ( $u_o$ )

$$u_e = u_a - u_o \quad (\text{VII-2})$$

Para o contorno da cavidade ( $r=a$ ) os deslocamentos serão dados por

$$(u_e)_{r=a} = \frac{\sigma_x a^2}{2 E r} \left[ (1+\nu) \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) + 4(1-\nu^2) \cos 2\theta \right]$$

$$\frac{\sigma_x + a^2}{2 E r} \left[ (1+\nu) \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) - 4(1-\nu^2) \cos 2\theta \right]$$

Para o exemplo analisado (Fig. VII-1) o deslocamento radial teórico será igual em todos os pontos do contorno da cavidade e

$$(u_e)_{r=a} = 0,012$$

Foram analisadas duas situações de restrição de deslocamentos dos pontos nodais da fronteira externa:

- a) pontos nodais fixos;
- b) pontos nodais livres.

Os resultados em termos de tensões verticais  $\sigma_y$  e cisalhantes  $\tau_{xy}$  no contorno da cavidade para a situação a são mostradas nas Figs. VII-2 e VII-3. Pode-se observar que a locali

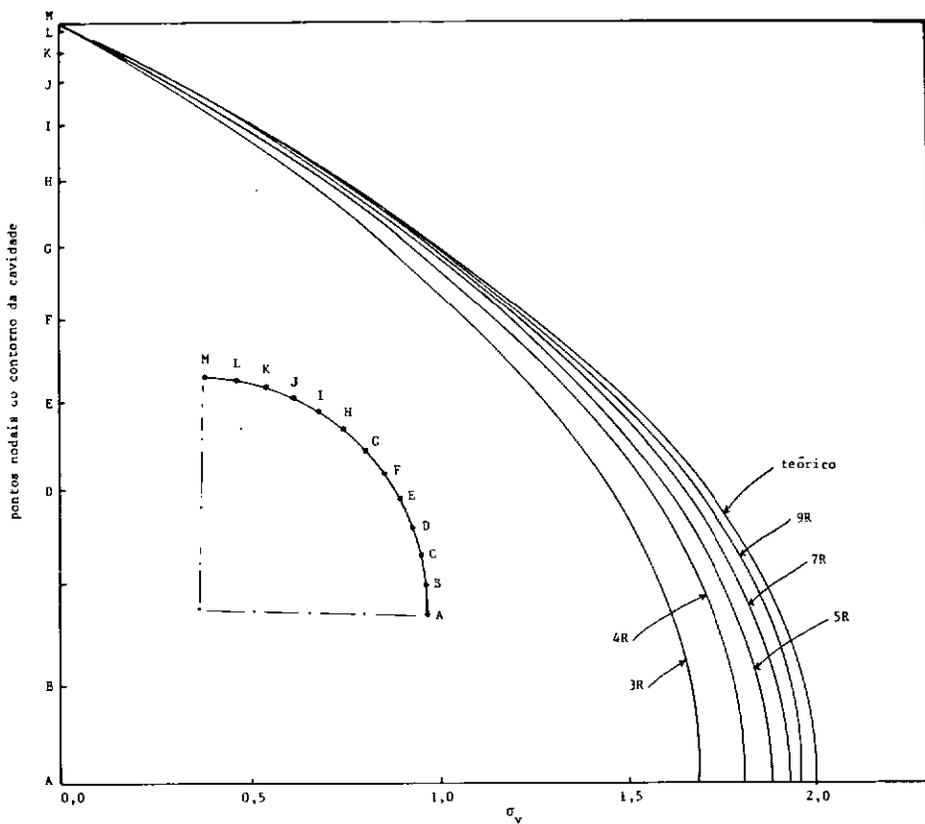


Fig. VII-2- Tensões verticais ao longo do contorno da cavidade

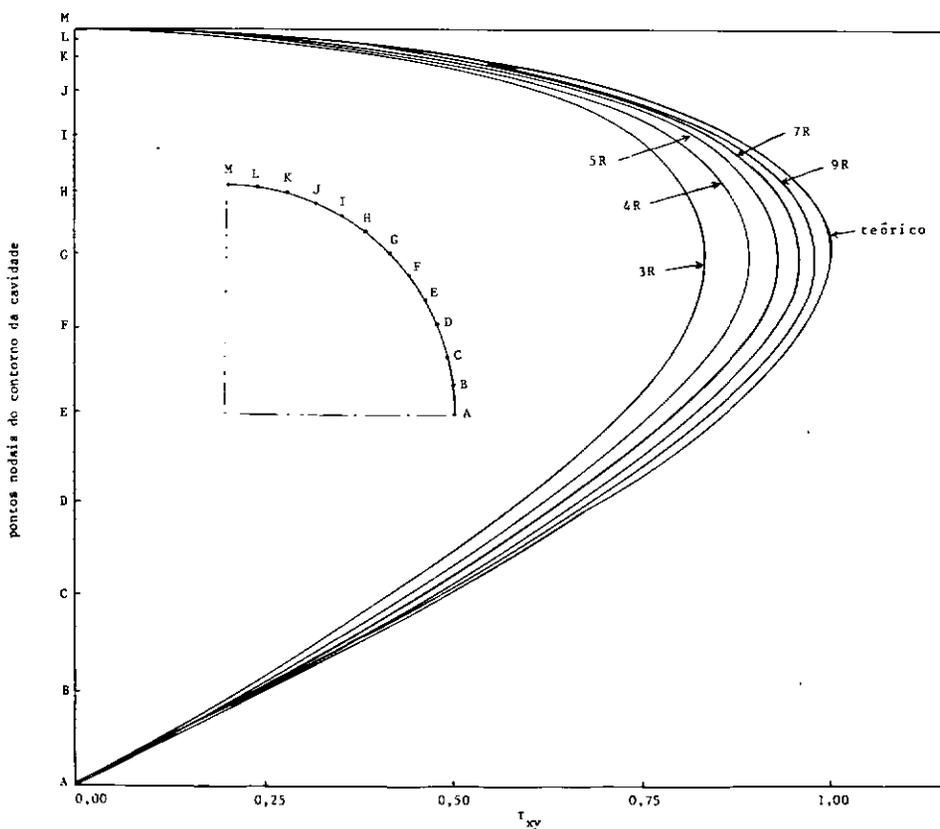


Fig. VII-3- Tensões cisalhantes ao longo do contorno da cavidade

zação da fronteira da malha influi significativamente nos resultados e que, para fronteiras com raios maiores, as diferenças aumentam de forma suave enquanto que, para raios menores, as diferenças aumentam menos suavemente.

Admitindo-se como razoável um erro relativo maior que 10% entre a solução teórica e a numérica, pode-se concluir que um raio de fronteira maior ou igual a seis vezes o raio da cavidade é satisfatório. A Fig. VII-4 ilustra esta conclusão, representando a relação entre os valores de  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  e  $u_r$  máximos calculados pelo método dos elementos finitos e teoricamente.

Para a situação b foram efetuados cálculos semelhantes, observando-se resultados de tensões verticais e cisalhantes e de deslocamentos sensivelmente melhores. Na Fig. VII-4 apresenta-se a relação entre os valores máximos numéricos e teóricos, onde é ilustrada esta conclusão. Para um erro relativo menor que 10%, pode-se concluir que uma fronteira com distância igual ou maior a 5 vezes o raio da cavidade é satisfatória, e proporciona valores maiores que o teórico e, portanto, a favor da segurança.

Esta última conclusão só é válida para idealização estrutural da Fig. IV-1, na qual o sistema é auto-equilibrado e não existe a necessidade de se fixar nenhum ponto da rede. Esta situação ocorre no caso de túneis profundos (com mais de 150 m de profundidade), na qual é pouco importante a consideração de tensões iniciais geostáticas, como demonstrado por Kulhawy (1975 a).

Para túneis em maciços nos quais é necessária a consideração de tensões geostáticas, não existe dupla simetria da rede como no exemplo analisado e, portanto, deve ser utilizado

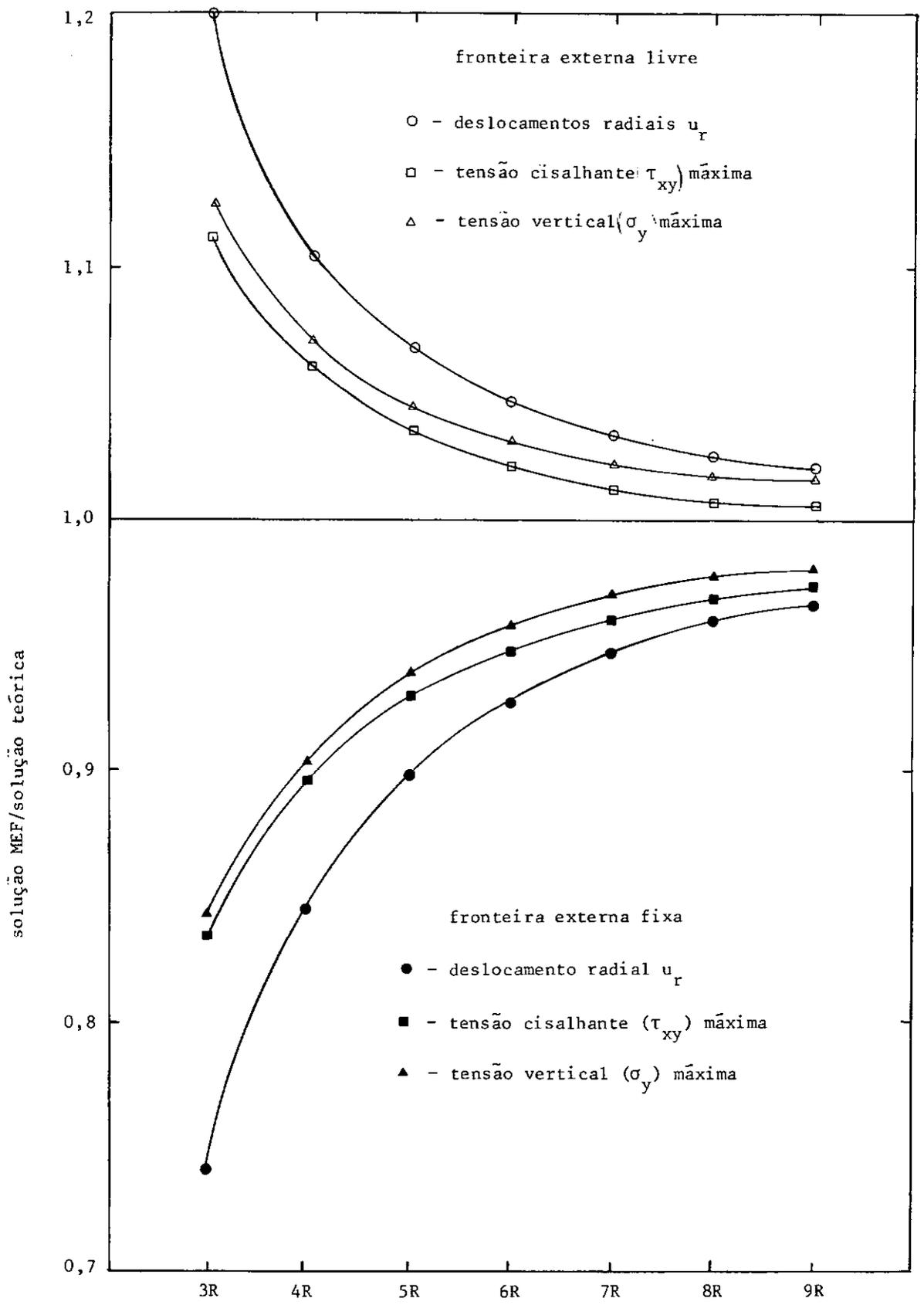


Fig. VII-4- Efeito da localização da fronteira externa sobre a acurácia da solução do MEF



um sistema com no máximo uma simetria, como no exemplo do próximo item. Para esta situação devem ser fixados os pontos nodais da fronteira externa.

A Fig. VII-5 representa as tensões vertical  $\sigma_y$  e horizontal  $\sigma_x$  ao longo da seção horizontal da cavidade, na qual comparam-se resultados teóricos e numéricos, para as duas situações mostradas na figura.

Acreditamos que as conclusões acima podem ser estendidas de forma bastante satisfatória a túneis revestidos e a situações em que se utilizam outras leis constitutivas que não a elástica linear. Para túneis próximos da superfície do terreno, um estudo análogo deve ser efetuado, mas o qual provavelmente fornecerá conclusão próxima à obtida acima.

#### VII-2- Um exemplo de estudo paramétrico

São vários os estudos paramétricos que podem ser efetuados com o método dos elementos finitos. Como citado no item II-2-4, devem ser combinados parâmetros mais significativos.

No exemplo a seguir será analisada a influência das variações do módulo de elasticidade do maciço (E) e da espessura do revestimento (t) nos estados de tensões do maciço e do túnel. A idealização do maciço e do túnel através de elementos finitos e os parâmetros utilizados na análise são apresentados na Fig. VII-6.

Os resultados obtidos estão representados na Fig. VII-7, onde as tensões no revestimento e no maciço são normalizadas em relação à tensão vertical inicial ( $\sigma_{v_0}$ ), e a espessura do revestimento é normalizada em relação ao raio da cavidade (a). Observa-se que as tensões no maciço são aproximadamente insensíveis às variações da espessura do revestimento e do módulo e

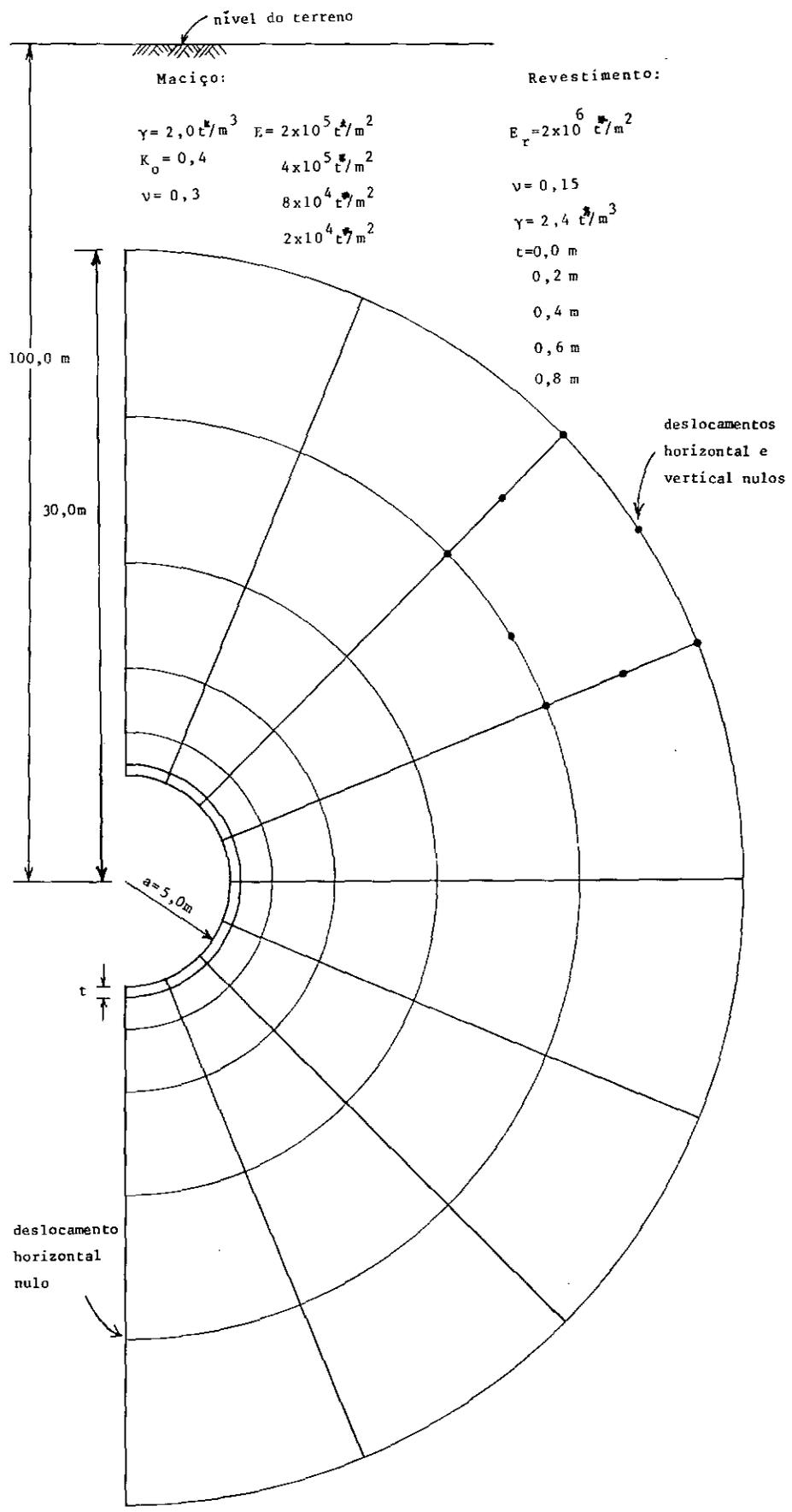


Fig. VII -6- Rede de elementos utilizada para estudo paramétrico

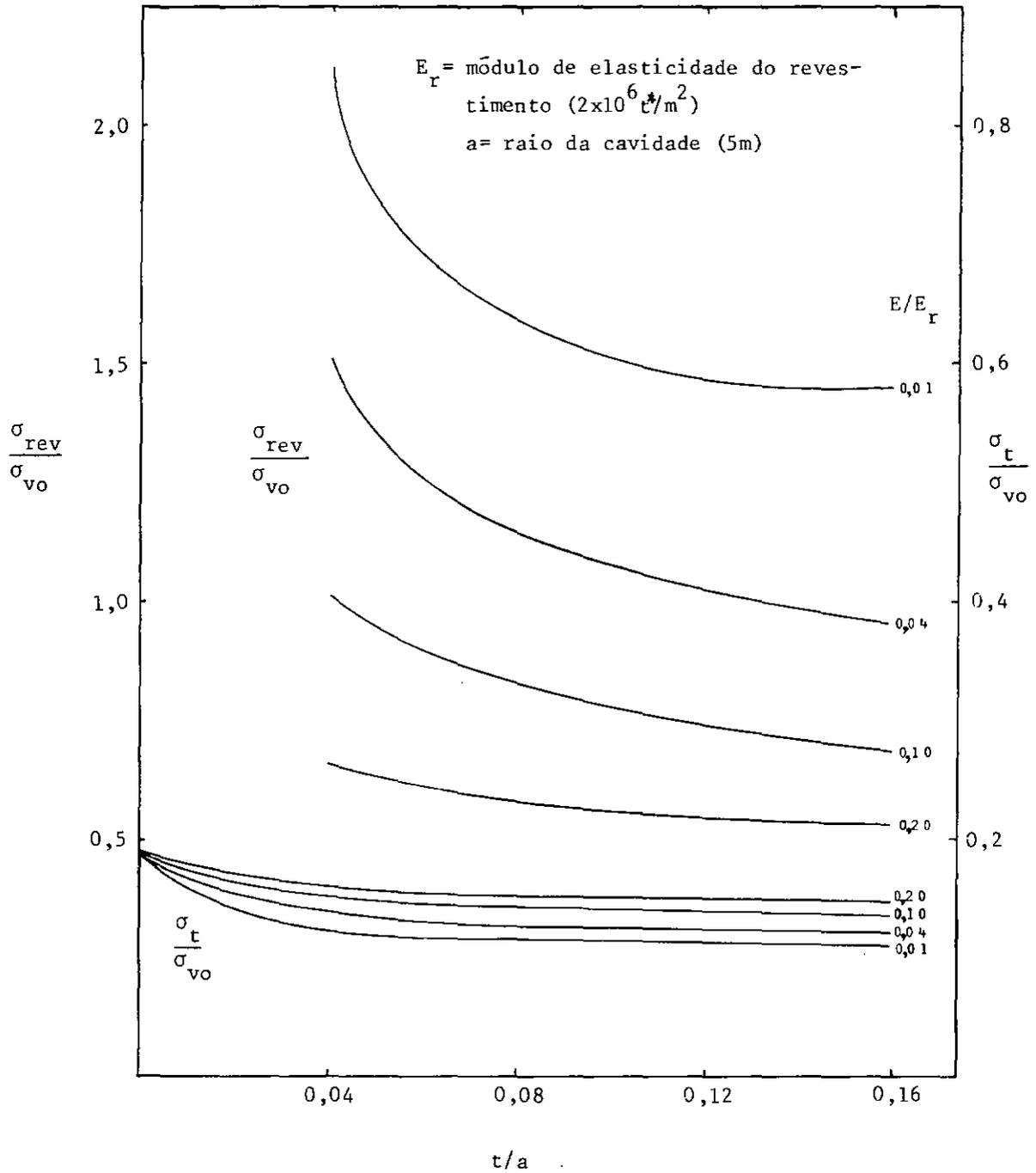


Fig. VII -7- Influência das variações do módulo do maciço (E) e da espessura do revestimento (t) na tensão de compressão no revestimento ( $\sigma_{rev}$ ) e na tensão tangencial do maciço no contato com o revestimento ( $\sigma_t$ ).

lástico do maciço. As tensões no revestimento, no entanto, são fortemente dependentes do valor do módulo elástico do maciço (conforme este diminui as tensões no revestimento aumentam) e também da espessura do revestimento, principalmente para módulos baixos do maciço.

Pode-se concluir que o fator importante é a tensão de compressão no revestimento, a qual será, também, dependente da profundidade do túnel, sendo essa dependência outro estudo paramétrico a ser realizado. Para o exemplo em questão a tensão de compressão máxima no revestimento permaneceu bem abaixo da resistência à compressão do concreto, o que pode não ocorrer para maiores profundidades.

### VII-3- Análise elasto-plástica de cavidade circular

Este exemplo foi selecionado para comparar resultados obtidos por outros autores além de propiciar conclusões significativas com relação a diferenças entre a adoção de comportamentos elástico linear e elasto-plástico.

Trata-se de um túnel profundo cuja geometria e propriedades do maciço são apresentadas na Fig. VII-8. Na análise elasto-plástica foi utilizada uma tolerância de 0,004 para a norma dos deslocamentos, e dividiu-se as forças de escavação em 17 incrementos.

As tensões radial e tangencial ao longo da seção horizontal do túnel, para o caso de  $K_0$  igual a 0,4, são apresentadas na Fig. VII-9, juntamente com soluções de outros autores para comparação. As diferenças nos resultados podem ser provenientes das peculiaridades de cada técnica de análise não-

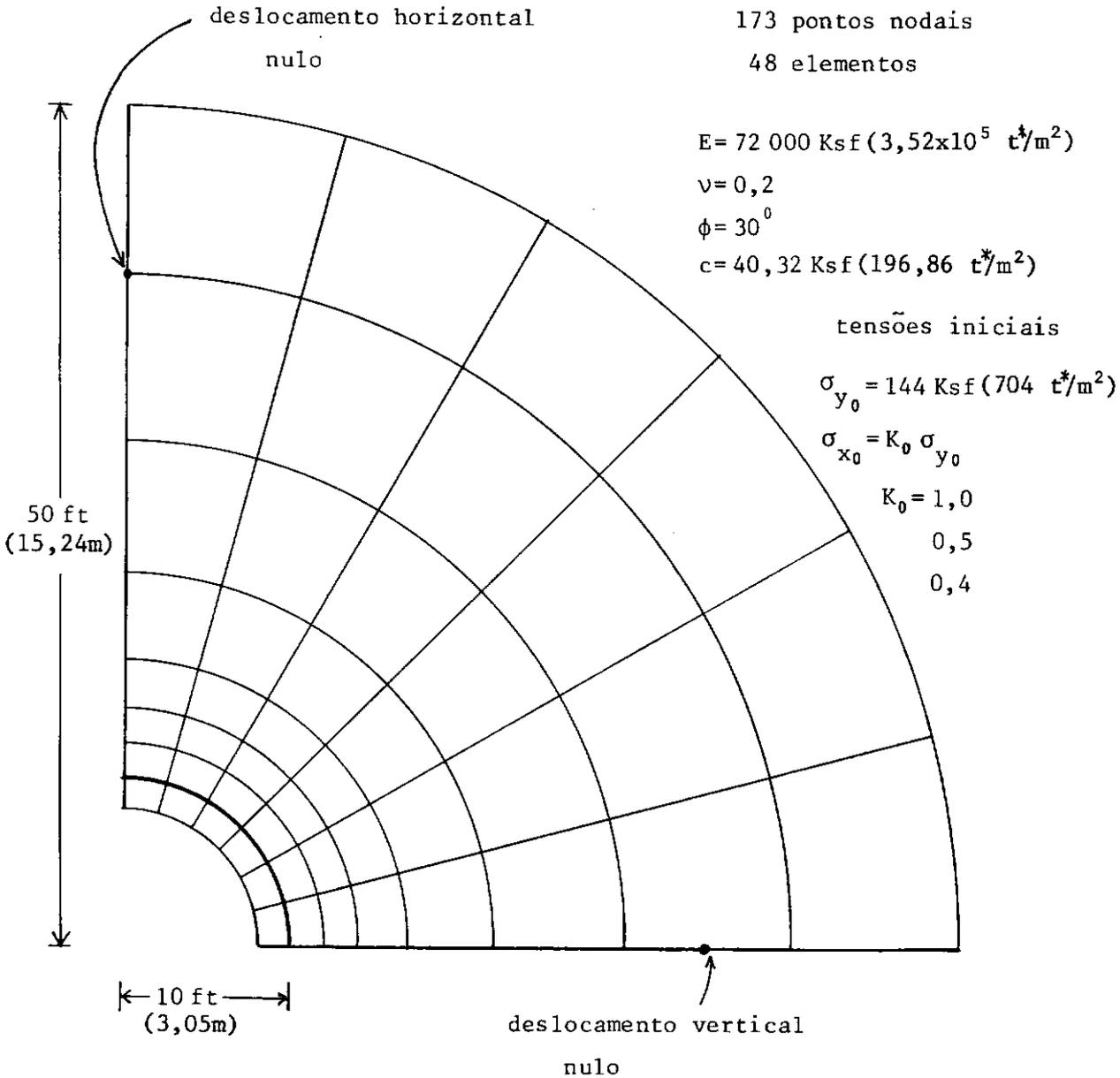


Fig. VII- 8 - Rede de elementos finitos para análise elasto-plástica de cavidade circular

linear e dos tipos de elementos finitos adotados. Por outro lado, existem também diferenças com relação ao ponto que são calculadas as tensões dependendo do elemento finito utilizado: no centro do elemento, em seus pontos nodais, ou nos pontos de integração, como no elemento isoparamétrico.

Na mesma figura são representadas as tensões elásticas tangencial e radial. Observa-se que as altas tensões tangen-

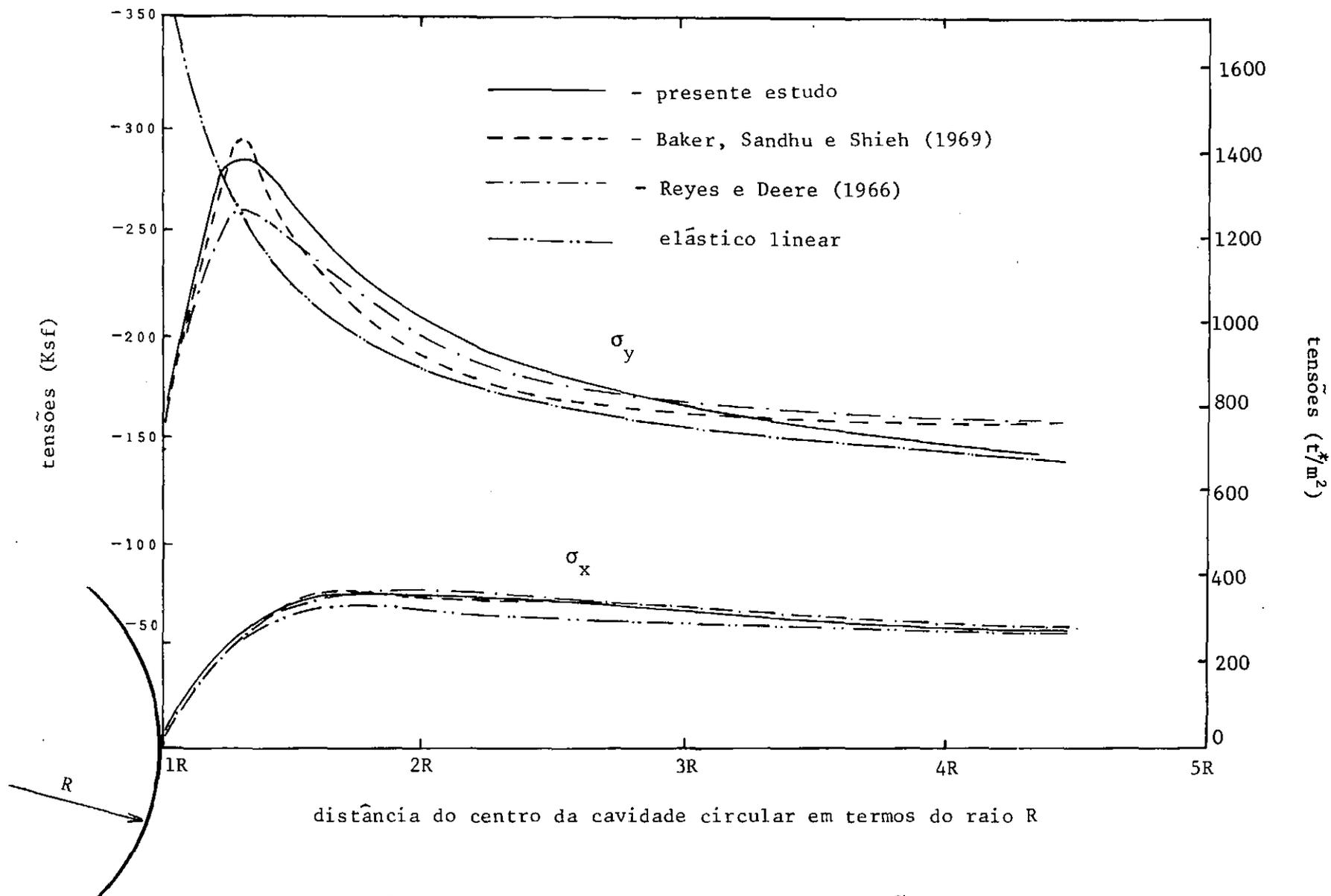


Fig. VII- 9 - Tensões horizontal e vertical ao longo da seção horizontal da cavidade circular ( $K_0=0,4$ )

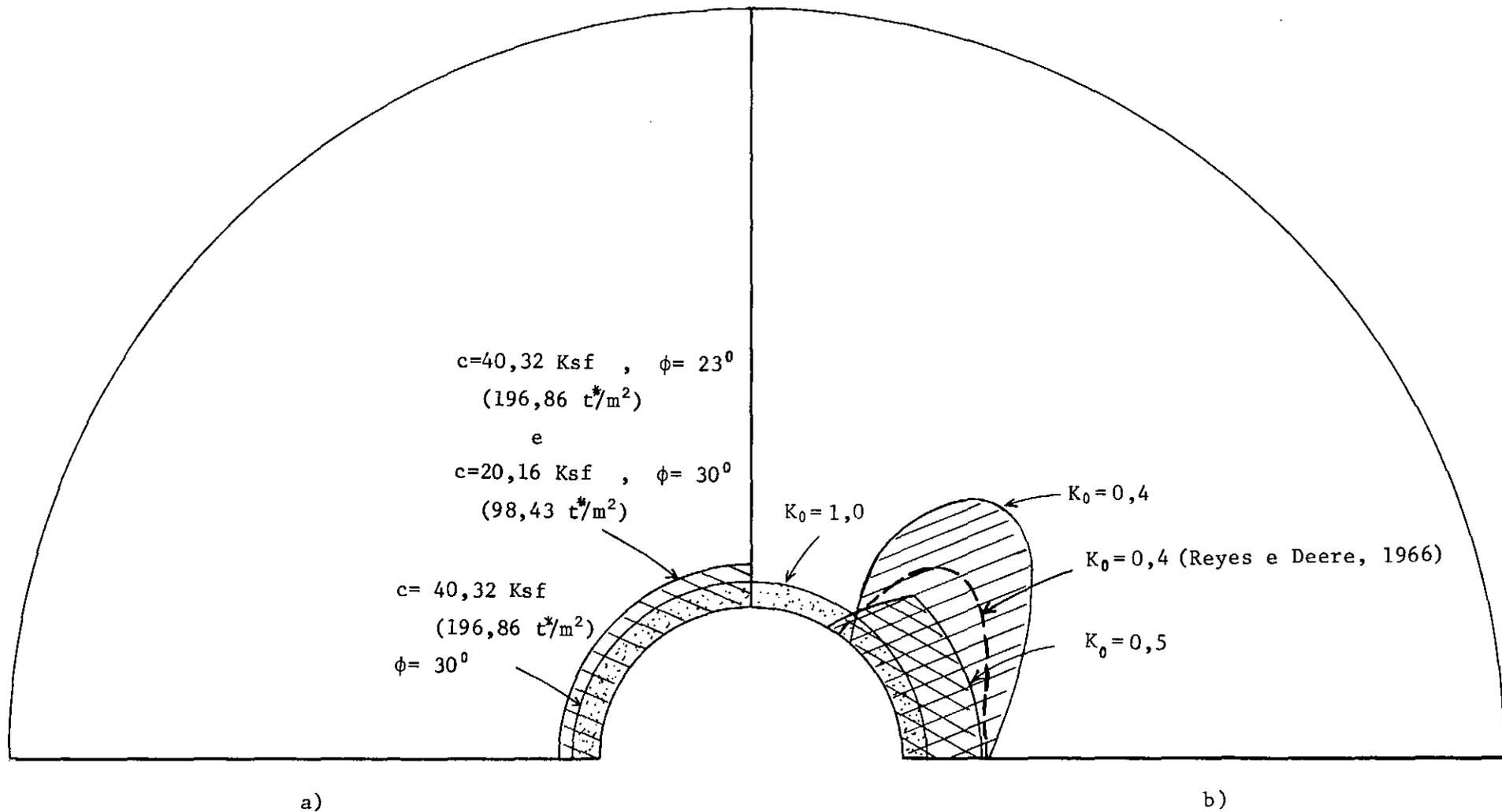


Fig. VII-10 - Regiões plastificadas da cavidade a) em função de  $c$  e  $\phi$  para  $K_0=1,0$ ; b) em função de  $K_0$ , para  $c$  e  $\phi$  constantes ( $c=40,32 \text{ Ksf}$  ,  $\phi=30^\circ$ )

ciais previstas na análise elástica linear são redistribuídas devido ao comportamento elasto-plástico. A diferença entre as duas soluções representa o reajuste de tensões resultante do escoamento local.

A região plastificada do maciço para este caso é apresentada na Fig. VII-10 b, juntamente com a obtida por Reyes e Deere (1966) para efeito de comparação. Pode-se observar que a tensão tangencial de pico situa-se dentro da zona plástica. Na mesma figura mostra-se a região plastificada do túnel em função do valor de  $K_0$  adotado. A diminuição do valor  $K_0$  acarreta maior extensão da zona plastificada, abrangendo, no entanto, menor região no entorno da cavidade.

Em outra análise, para  $K_0$  igual a 1, foi estudada a extensão da zona plastificada em função da variação dos parâmetros dos materiais (Fig. VII-10 b). Verifica-se que a variação do ângulo de atrito tem maior influência na plastificação do que a variação da coesão, o que é de esperar quando se adota uma extensão do critério de Mohr-Coulomb como o de Drucker-Prager.

A Fig. VII-11 mostra os resultados de deslocamentos das análises elástica linear e elasto-plástica dos pontos ao longo da face da cavidade para  $K_0$  igual a 0,4. Como era previsto, o escoamento resulta em deslocamentos consideravelmente maiores, particularmente no entorno da região plastificada. Esta variação de volume acentuada é proveniente da dilatação do material plastificado como indicado pela lei de escoamento adotada (eq. IV-13).

A redução das tensões tangenciais e o aumento dos deslocamentos laterais com relação aos previstos pela análise elástica linear têm sido observadas em túneis reais. Baseado em observações práticas em numerosos túneis, Willman (ver Szecky ,

1966) apresenta uma distribuição de tensões semelhante à mostrada na Fig. VII-9. Willman concluiu que a tensão de pico seria aproximadamente 50% maior que a tensão inicial do maciço, e que a largura de influência corresponderia a três vezes a largura do túnel. Szecky (1966) refere-se ao aumento de deslocamentos observados em muitos túneis como "intrusão plástica".

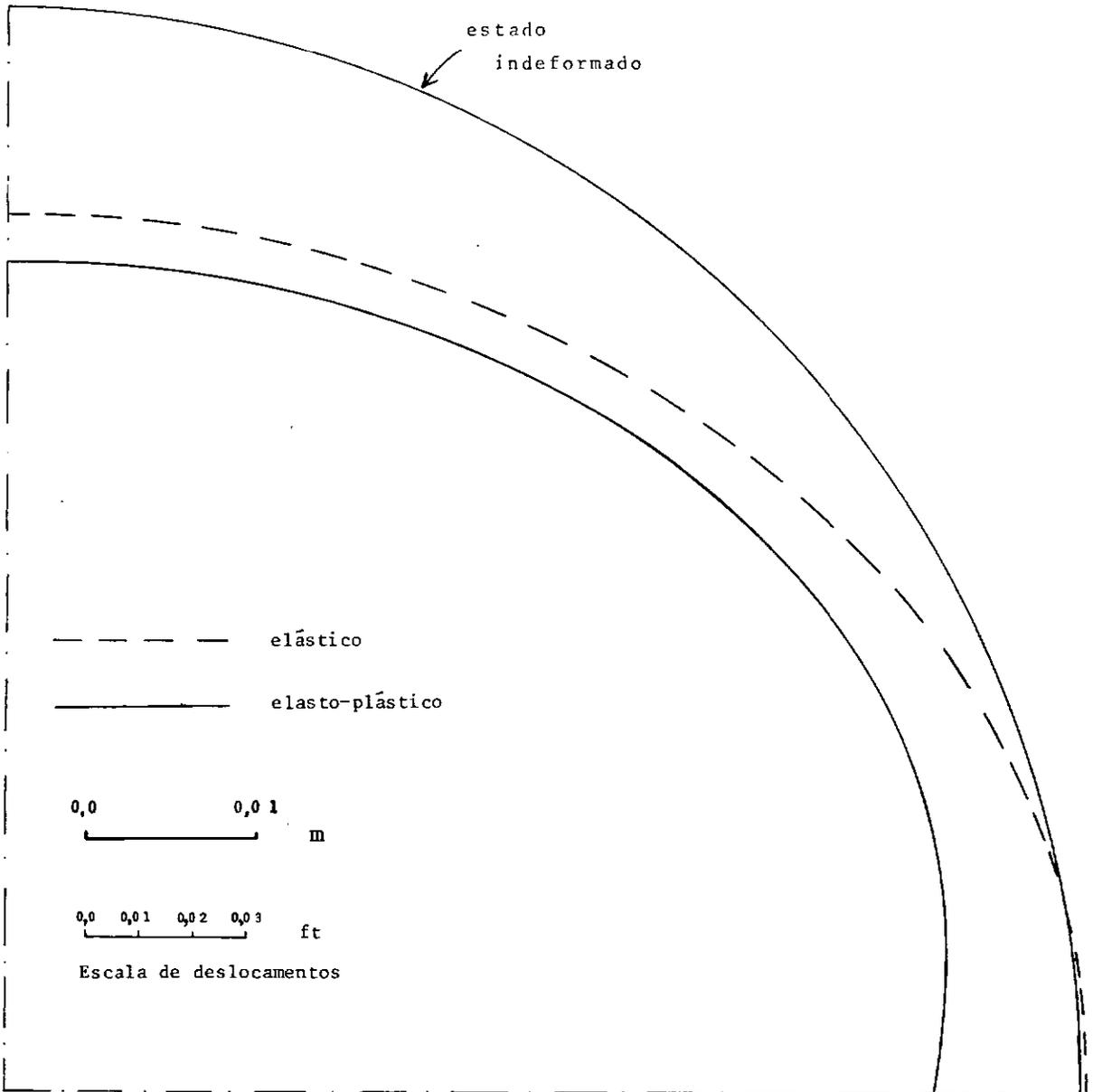


Fig. VII-11- Comparação entre deslocamentos para análises elástica linear e elasto-plástica da cavidade circular ( $K_0=0,4$ )

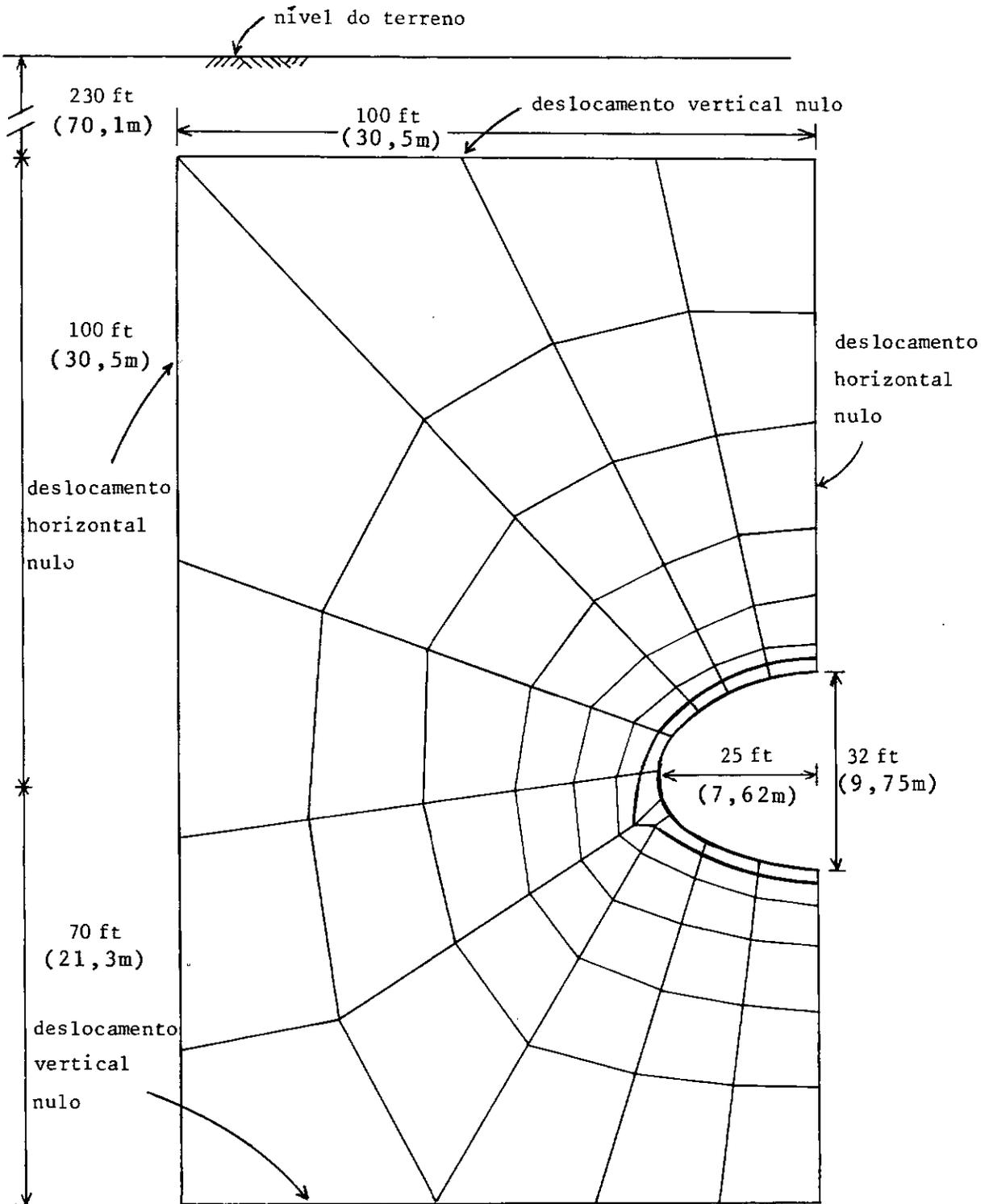
VII - 4 - Túnel Revestido

Neste item será analisado um túnel revestido semelhante ao de Zienkiewicz e outros (1969). Este exemplo é mais realístico em relação aos anteriores na forma da seção do túnel e no estado de tensões iniciais (geostático). A geometria do problema e os parâmetros adotados são mostrados na Fig. VII - 12. O túnel será analisado para as condições de escavação em uma e duas etapas.

Para escavação e instalação do revestimento em uma etapa, não são necessários os elementos internos ao túnel, como mostra a figura supracitada. Neste caso, tais elementos apenas acarretarão um maior tempo de processamento, devido ao aumento do número de graus de liberdade da estrutura idealizada. A escavação do túnel em duas etapas (calota e rebaixo) e a instalação do revestimento da etapa correspondente têm por fronteira a linha AB da Fig. VII - 13. Nesta situação os elementos internos à escavação são necessários, como mostra a mesma figura (ver também Fig. II - 10).

Para a análise elasto-plástica admitiu-se um comportamento elástico-linear para o material do revestimento. Foi utilizada uma tolerância de 0,0005 para a norma dos deslocamentos e as forças de escavação foram divididas em nove incrementos.

As Figs. VII - 14 a e VII - 15 apresentam, respectivamente, as regiões plastificada e tracionada do maciço, as quais são comparadas com as de Zienkiewicz e outros (1969). As diferenças dos resultados podem ser atribuídas aos elementos de características distintas utilizados nas duas análises (isoparamétrico quadrático e triangular linear - CST), às peculiaridades de cada técnica de análise não-linear e à insuficiência de dados



Tensões iniciais geostáticas:  $\gamma = 0,150 \text{ Kcf}$ ,  $K_0 = 0,2$   
 $(2,4 \text{ t}^*/\text{m}^3)$

Fig. VII-12- Rede de elementos finitos para túnel revestido

- 236 pontos nodais, 67 elementos

Revestimento:  $E = 432\,000 \text{ Ksf}$  Maciço:  $E = 72\,000 \text{ Ksf}$  ( $3,52 \times 10^5 \text{ t}^*/\text{m}^2$ )  
 $(2,11 \times 10^6 \text{ t}^*/\text{m}^2)$   $\nu = 0,2$

$\nu = 0,15$   $c = 20,16 \text{ Ksf}$  ( $98,4 \text{ t}^*/\text{m}^2$ )  
 $\phi = 30^\circ$

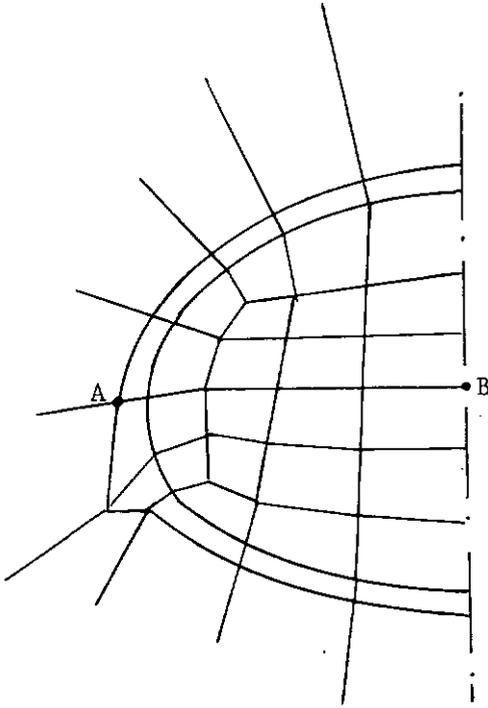


Fig. VII-13 - Elementos internos ao túnel para escavação em duas etapas

geométricos fornecidos por aquele autor. Acreditamos ser a primeira razão a mais forte, pois no elemento CST o estado de deformação, como o de tensão é constante ao longo de todo o elemento. Logo a plastificação na malha de elementos CST é feita por elemento e não pontualmente.

No elemento isoparamétrico as tensões são calculadas nos pontos de integração e a plastificação se dará em cada um destes pontos, o que é, sem dúvida, mais preciso. No exemplo em questão os valores da função de escoamento, para os pontos de integração dos elementos adjacentes ao pé-direito, foram próximos de zero sem que, no entanto, fosse acusada a plastificação destes pontos.

Para a escavação do túnel em duas etapas foram observadas as regiões plastificadas indicadas na Fig. VII - 14 b. Verifi-

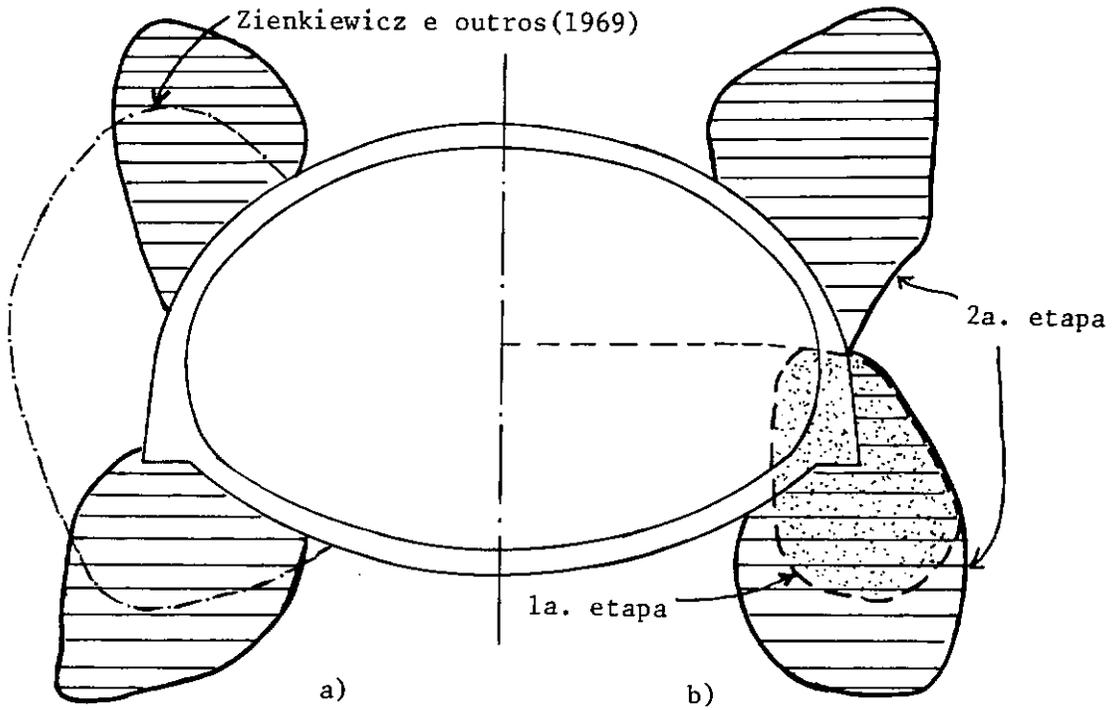


Fig. VII-14- Zonas plastificadas para túnel revestido: a) 1 etapa de escavação; b) 2 etapas de escavação

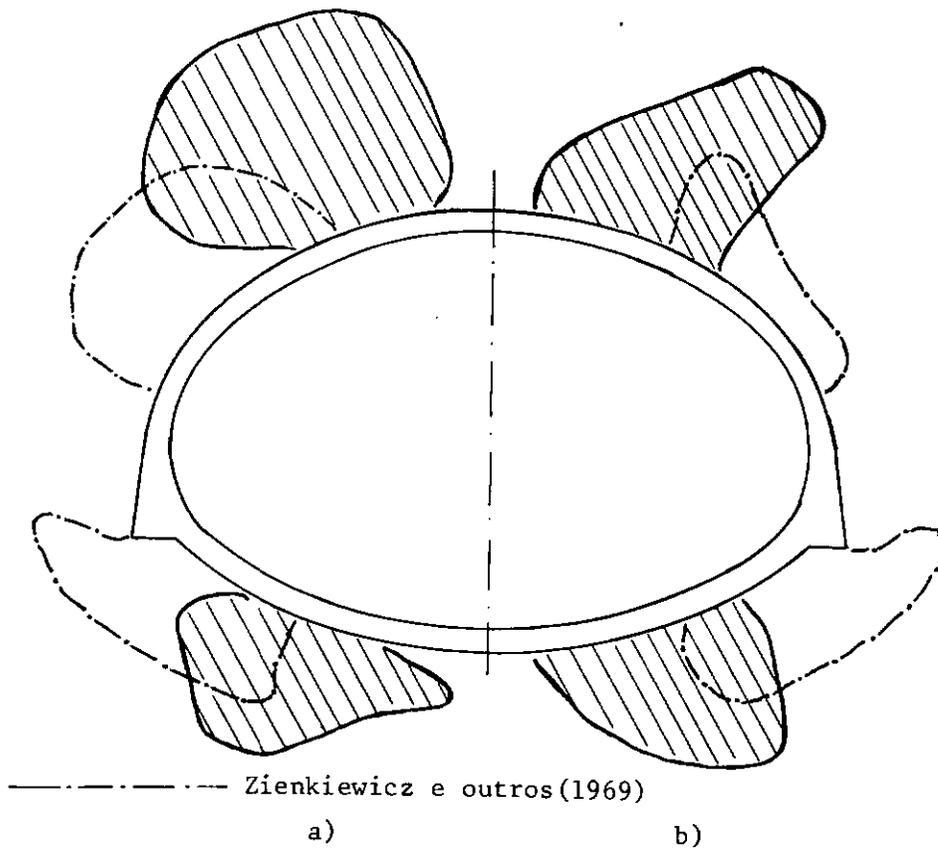


Fig. VII-15- Regiões tracionadas do maciço: a) análise elástica linear; b) análise elasto-plástica

ca-se que a região plastificada para a primeira fase construtiva abrange justamente o entorno do contato da base do revestimento com o maciço, na parte a ser escavada. Com este resultado pode-se concluir a insuficiente capacidade de carga do maciço subjacente à base do revestimento, o que justifica o aumento das dimensões da base, conforme utilizado na prática de execução de túneis (vide Fig. V-9 para ilustração).

Os deslocamentos do revestimento para as análises descritas acima são apresentados na Fig. VII-16. Ao contrário do exemplo anterior (túnel circular não revestido), observa-se que as diferenças de deslocamentos para as análises elástica linear e elasto-plástica são pequenas. Este resultado é, provavelmente, consequência de uma menor plastificação do maciço e da absorção pelo revestimento do excesso de tensões dos elementos plastificados. Como já foi dito anteriormente, os deslocamentos em análises elásticas lineares, utilizando diferentes etapas de escavação, são iguais apenas no caso de  $K_0 = \nu / 1 - \nu$  e quando não são instalados elementos de suporte em qualquer etapa de escavação. Como este caso não ocorre no exemplo em questão, existem diferenças de deslocamentos para as duas situações. Para análise elasto-plástica de um problema utilizando diferentes etapas de escavação, os deslocamentos serão diferentes para qualquer situação. No exemplo analisado, as diferenças foram de magnitude semelhante as da análise elástica linear.

Já a comparação de tensões no revestimento para as análises elástica linear e elasto-plástica proporciona resultados bastante diversos. Para a escavação em uma etapa, por exemplo, a relação entre as tensões para as análises elástica linear e elasto-plástica no topo da abóbada é de aproximadamente 1,5, sendo ambas as tensões de tração. Na parte inferior do arco invertido, no entanto, as tensões elásticas são de tração, enquanto que as elasto-plásticas de

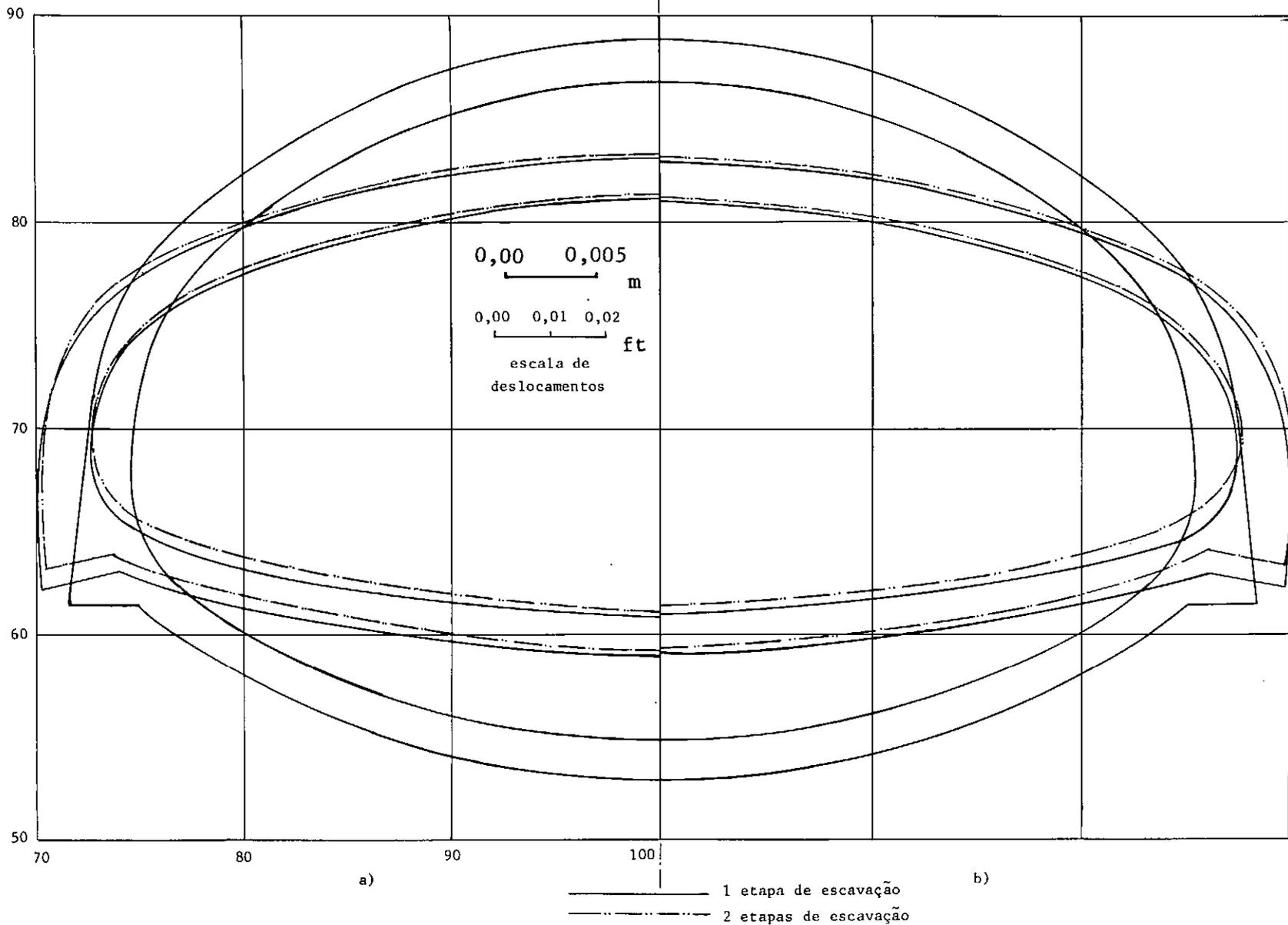


Fig. VII-16-Deslocamentos do revestimento do túnel: a) análise elástica linear (1 e 2 etapas de escavação);  
b) análise elasto-plástica (1 e 2 etapas de escavação).

## C A P Í T U L O VIII

CONCLUSÕES E SUGESTÕESVIII - 1 - Conclusões

O elemento isoparamétrico quadrático quadrilateral permite boa delimitação de contornos irregulares e a discretização do contínuo com relativamente poucos elementos. No entanto, para efetuar transições e gradações na malha, sua utilização não é tão simples quanto a de elementos triangulares quadráticos.

Para que sejam obtidos resultados de deslocamentos e tensões 10% inferiores aos exatos deve-se, na discretização do maciço por elementos finitos isoparamétricos, limitar o maciço com uma distância do centro do túnel igual a seis vezes a seu raio. Esta conclusão refere-se a túneis profundos, túneis não revestidos e a comportamento elástico linear, mas acreditamos possa ser estendida satisfatoriamente a túneis revestidos e a análise não-linear. Para túneis próximos à superfície, estudo semelhante deve ser efetuado, mas cuja conclusão, provavelmente, não será muito diferente da acima.

Na análise não-linear física o método das "tensões iniciais" se mostrou satisfatório. Este método se baseia no cálculo de tensões que, como subproduto do cálculo de deslocamentos, apresenta erro numérico maior. Logo a malha a ser utilizada para a resolução de um problema elasto-plástico deve ser um pouco mais refinada que a que proporciona resultados satisfatórios na análise elástica linear.

Como seria esperado, o tempo computacional da análise

elasto-plástica é sensivelmente maior do que o da análise elástica linear. Este tempo dependerá principalmente da região plastificada do maciço: quanto maior esta região mais lenta é a convergência dos resultados. Como ilustrado nas aplicações, a região plastificada dependerá do tipo de túnel (forma, dimensão, se revestido ou não), dos parâmetros ( $c$  e  $\phi$ ) e do valor de  $K_0$  do material do maciço, bem como da tolerância utilizada para as iterações. No túnel revestido do item IV-4, para uma tolerância de 0,0005 a relação de tempos entre as análises elástica linear e elasto-plástica é de aproximadamente 8 vezes e praticamente independe de ser a escavação em uma ou em duas etapas. A mesma relação para a cavidade circular do item IV-3, e uma tolerância de 0,004 é de 45 para  $K_0 = 0,4$ , 30 para  $K_0 = 0,5$  e varia de 3,5 a 5,0 para os casos analisados de  $K_0 = 1$ .

Os valores de tolerância adotados, entre 0,0005 e 0,004, e o número de incrementos em torno de 13 foram satisfatórios para os exemplos analisados. São necessários, no entanto, maiores estudos neste sentido, em função do problema a ser analisado. Propomos que sejam feitas comparações entre soluções numéricas utilizando o programa desenvolvido no presente trabalho com resultados de observações práticas.

Uma conclusão interessante com relação aos aspectos comentados acima é que, devido ao elevado tempo computacional, a análise elasto-plástica deve ser precedida de análises elásticas lineares, que permitam um pré-dimensionamento dos elementos de suporte, bem como melhor definição da malha a ser utilizada na análise elasto-plástica.

A técnica desenvolvida para simular as etapas de escavação e instalação dos materiais de suporte possibilita acompa-

nhar vários métodos construtivos utilizados na execução de túneis. A relação entre os tempos computacionais para a execução em duas e uma etapas, para o túnel revestido do item IV-4, é de aproximadamente 1,6 e independe, no caso, de ser a análise elástica linear ou elasto-plástica. Para túneis escavados em uma etapa são necessários apenas os elementos internos ao túnel imediatamente adjacentes à fronteira de aplicação das forças de escavação. Os elementos restantes apenas influirão no aumento do número de graus de liberdade da estrutura, o que repercutirá no tempo computacional. Caso se deseje, no entanto, calcular as tensões iniciais no maciço, aplicando-se forças de massa, devem ser utilizados todos os elementos internos à escavação.

O modelo elasto-plástico de Drucker-Prager parece traduzir de forma satisfatória o comportamento tensão-deformação de solos e rochas. É um modelo simples e necessita de poucos parâmetros para sua definição. O modelo pode ser melhorado acrescentando-se a variação do módulo de elasticidade com a pressão confinante, o que é tarefa relativamente simples. Apesar deste modelo ter sido aplicado à análise elasto-plástica de vários problemas geotécnicos, principalmente túneis, carece ainda de constatações experimentais para que seja verificado o quanto se aproxima do comportamento real de solos e rochas.

A diferença nos resultados em tensões e deslocamentos para as análises elástica linear e elasto-plástica indica a importância da consideração de um modelo elasto-plástico coerente com o comportamento do maciço.

Os resultados obtidos credenciam o programa desenvolvido a ser utilizado em projetos de túneis. Este programa é útil

para a determinação dos locais mais adequados à colocação de instrumentação, a qual tem grande importância no estágio de desenvolvimento atual dos métodos de projeto e construção de túneis. O programa, como elaborado, permite também aplicações em outros problemas geotécnicos em estado plano de deformação como escavação a céu aberto escorada ou não, e problemas de fundações.

#### VIII-2- Sugestões para pesquisa

##### VIII-2-1- Relativas à aplicação do método dos elementos finitos a túneis.

- 1 - Estudo do comportamento de túneis admitindo-se a não resistência à tração do maciço, o que é razoável para solos e principalmente em maciços rochosos com numerosas famílias de descontinuidades.
- 2 - Estudo de túneis com maciços idealizados por modelo descontínuo com elementos de junta, que caracterizarão as descontinuidades existentes sobretudo em maciços rochosos.
- 3 - Estudo de túneis utilizando modelo reológico (visco-elástico ou visco-plástico), de forma a considerar a relaxação e a deformação lenta do maciço e do túnel e também simular de forma mais correta a construção de revestimentos provisório e permanente (novo método austríaco de abertura de túneis).
- 4 - Análise da interação dos elementos de suporte do túnel com o maciço, associando à cada tipo de suporte um determinado tipo de elemento (e. g., elemento de junta para o contato do revestimento com o maciço e barras articuladas para as cambotas).

- 5 - Análise da influência de chumbadores no estado de chumbadores no estado de tensões e deformações ao redor do túnel. Verificar diferenças entre simulação de chumbadores através de cargas concentradas aplicadas aos nós de elementos bidimensionais e através de cargas concentradas aplicadas aos nós de elementos de barra (trélica), ~~seria mais correto.~~
- 6 - Extensão do presente programa ao cálculo de momentos fletores, cortantes e esforços normais nos elementos de suporte (revestimento, cambotas, etc.).
- 7 - Estudo sobre os critérios de segurança a adotar em um projeto de túneis, com fixação de coeficientes de segurança relativos aos parâmetros do solo e do revestimento.
- 8 - Estudo, com relação à análise elasto-plástica, sobre a tolerância e número de incrementos a serem adotados em função do tipo de túnel e da precisão desejada para projetos.
- 9 - Implementação da técnica da rigidez tangente nas iterações - proposta por Chang e outros (1974) - com o programa desenvolvido no presente trabalho, objetivando diminuir o tempo computacional.

#### VIII-2-2-Relativas ao comportamento tensão-deformação do solo

- 1 - Estender o modelo utilizado neste trabalho para os casos de endurecimento (*strain-hardening*) e enfraquecimento (*strain-softening*).
- 2 - Comparação dos diversos modelos de comportamento dos solos com resultados de ensaios com diferentes trajetórias de tensões, nos equipamentos de com -

pressão triaxial, de deformação plana, e se possível triaxial cúbico. Assim, seria discretizado o corpo de prova do ensaio e simulado em computador o carregamento e condições do ensaio, e comparado com os resultados deste. Essas comparações seriam efetuadas principalmente nos modelos elasto-plásticos, que carecem de estudos experimentais.

- 3 - Estudos experimentais e teóricos do modelo de Roscoe (que parece ser um dos mais completos) aplicado aos solos brasileiros.
- 4 - Verificar experimentalmente as diferenças quando se considera o solo com leis de escoamento associada e não associada.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Audibert, J., (1972) - "Predictions and Measurements of Strain Fields in Soils", tese Ph. D., Duke University.
- Baker, L. E., Sandhu, R. S., e Shieh, W. Y., (1969)- "Application of Elasto-Plastic Analysis in Rock Mechanics by Finite Element Method", Proc. 11<sup>th</sup> Symp. on Rock Mech., Berkeley, June 1969.
- Bishop, A. W., (1966), "The Strength of Soils as Engineering Materials", Geotechnique, 16, 91-128, 1966.
- Baldovin, G. e Santovito, D., (1973) - "Tunnel Construction in High Swelling Clays" - Proc. of the 8<sup>th</sup> International Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Moscou, 4, 13-16, 1973.
- Bland, D. R., (1957), "The Associated Flow Rule of Plasticity", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1957, vol.6 , pg. 71-78. Pergamon Press, London.
- Breblia, C. A. e Ferrante, A. J., (1975), "The Finite Element Technique", Edited by Brebbia e Ferrante, UFRGS, Porto Alegre, 1975, 410 pgs.
- Brooker, E. W. e Ireland, H. O., (1965), "Earth Pressure at Rest Related to Stress History", Canadian Geoth. Journal, vol. 11, No. 1, Fev. 1965.
- Chandrasekaran, V. S. e King, G. J. W., (1974), "Simulation of Excavation Using Finite Elements", Journal of the Geoth. Engg. Div., ASCE, 100 (9), 1086-1089, Sept. 1974.
- Chang, C. Y., Nair, K. e Karwoski, (1972), "Finite Element Analysis of Excavations in Rock", Proc. WES Symp. on Appl. of Finite Element Method in Geoth. Engg., Vicksburg, Miss., 1, 457-504, May 1972.

- Chang, C. Y., Nair, K. e Singh, R. D., (1974), "Finite Element Methods for the Non-Linear and Time-Dependent Analysis of Geotechnical Problems", Proc. of the Conf. on Analysis and Design in Geotechnical Engineering, University of Texas, ASCE, June 1974.
- Chen, W. F. (1975) - "Limit Analysis and Soil Plasticity", Elsevier Scient. Publ. Co., Amsterdam, 1975, 638 pgs.
- Christian, J. T. e Wong, I. H., (1973), "Errors in Simulating Excavation in Elastic Media by Finite Elements", Soils and Foundations, 13 (1), 1 - 10, March 1973.
- Clough, G. W. e Duncan, J. M., (1969), "Finite Element Analysis of Port Allen and Old River Locks", Contract Report S-69-3 U.S. Army Engineer, Waterways Experimental Station. Vicksburg, Mississippi, 1969.
- Clough, G.W. e Woodward, R. J., (1967), "Analysis of Embankments Stresses and Deformations", Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 93 (4), 529-549, July 1967.
- Construção Pesada, Ano 6, Nº 65, Junho de 1976.
- Cook, R.D., (1974), "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, 1974, 402 pgs.
- Daemen, J. J. K., Faihurst, C., (1972), "Rock Failure and Tunnel Supporting Loading", Proc. Int. Symp. on Underground Openings, Lucern, 1972, citado por Rocha, 1976.
- D'Appolonia, D. J. e Lambe, T. W., (1970), "Method for Predicting Initial Settlement", Journal of the Soil Mech. and Found. Div., ASCE, 96 (2), 523-544, March 1970.
- Desai, C. S., (1971), "Nonlinear Analysis Using Spline Functions", Journal of the Soil Mech. and Found. Div., ASCE, 97 (10), 1461-1480, Oct. 1971.

- Desai, C. S., e Abel, (1972 ), "Introduction to the Finite Element Method", Van Nostrand, 1972, 477 pgs.
- DiMaggio, F. L. e Sandler, I. S., (1971), "Material Model for Granular Soils", J. of the Eng. Mech. Div., ASCE, 97 (3), 935-950, 1971.
- Dixon, J. D., (1971), "Analysis of Tunnel Support Structure with Consideration of Support/Rock Interaction", Trans., Soc. of Mining Engrs., AIME, 250 (4), 304-309, Dec.1971.
- Domashuk, L. e Wade, N. H., (1969), "A Study of Bulk and Shear Moduli of a Sand", Journal of the Soil Mech. and Found. Div., ASCE, 95 (2), 561-581, March 1969.
- Drucker, D. C., (1950), "Some Implications of Work-Hardening and Ideal Plasticity", Quaterly of Appl. Mathematics, 7 (4), 411-418, 1950.
- Drucker, D. C., (1953), "Limit Analysis of Two and Three - Dimensional Soil Mechanics Problems", Journal of Mech. and Phys. of Soils, 1, 217-226, 1952.
- Drucker, D. C., (1966), "Concepts of Path Independence and Material Stability for Soils", in J. Kravtchenko e P. M. Sirieys (Editores), Rhéol. Mécan. Soils. Proc. IUTAM Symp. Grenoble, Springer, Berlim, pg. 23-43, citado por Chen, 1975.
- Drucker, D. C., Gibson, R. E. e Henkel, D. J., (1957), "Soil Mechanics and Work-Hardening Theories of Plasticity", Trans. ASCE, 122, 338-346, 1957.
- Drucker, D. C., e Prager, W., (1952), "Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design", Quaterly of Appl. Mathematics, 10 (2), 157-165, 1952.
- Drucker, D. C., Prager, W. e Greenberg, H. J., (1952), "Extended Limit Design Theorems for Continuous Media", Quaterly of Appl. Mathematics, 9, 381-389, 1952.

- Duncan, J. M., (1972), "Finite Element Analysis of Stresses and Movements in Dams", Proc. WES, Symp. on Appl. of FEM in Geoth. Engg., Vicksburg, Miss., 1-267-326, May 1972.
- Duncan, J. M., e Chang, C. Y., (1970), "Nonlinear Analysis of Stresses and Strains in Soils", Journal of the Soil Mech. and Found. Div., ASCE, 96 (5), 1629-1653, Sept. 1970.
- Dunlop, P. e Duncan, J. M., (1970), "Development of Failure around Excavated Slopes", Journal of the Soil Mech. and Found. Div., ASCE, 96 (2), 471-493.
- Ebecken, N. F. F., (1973), "Processo Semi-Analítico para Análise de Estruturas pelo Método dos Elementos Finitos", tese M.Sc., COPPE, UFRJ.
- Ebecken, N. F. F., Landau, L. e Tsutsumi, M., (1976), "Comportamento Elasto-Plástico de Argilas Não-Drenadas por Meio de Elementos Finitos Isoparamétricos", Colóquio Franco-Brasileiro de Métodos Numéricos em Engenharia, COPPE, UFRJ, Agosto de 1976.
- Einstein, H. H. e Bishoff, N., (1975), "Design of Tunnels in Swelling Rock", 16 st Symp. on Rock Mechanics, Univ. of Minesota, Minneapolis, 1975.
- Ferreira, M. J. E., (1976), "Métodos Modernos de Dimensionamento de Túneis", Geotecnia 16, Fevereiro-Março de 1976, 3-47.
- Gates, R. H., (1972), "Progressive Failure Model for Clay Shale", Proc. WES Symp. on Appl. of Finite Element Method in Geoth. Engg., Vicksburg, Miss., 1, 327-347, May 1972.
- Girijavallabhan, C. V., e Reese, L. C., (1968), "Finite Element Method for Problems in Soil Mechanics", Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 94 (2), 473-496.

- Goodman, R. E., (1966), "On the Distribution of Stresses around Circular Tunnels in Nonhomogeneous Rocks", Proc., First Cong. Int. Soc. Rock Mech., Lisboa, 249-255, 1966.
- Hansen, J. H., (1963), "Hyperbolic Stress-Strain Response: Cohesive Soils", Discussion, J. S. M. F. D., ASCE, 89, S M 4, 241-242.
- Höeg, K., (1972), "Finite Element Analysis of Strain-Softening Clay", Journal of the Soil Mech. and Found. Div., ASCE, 98 (1), 43-58, Jan. 1972.
- Howells, D. A., (1971), "Design of Tunnel Linings", Civil Engg. and Public Works Review, Sept. 1971, 993-998.
- Hoyaux, B. e Ladanyi, B., (1970), "Gravitational Stress Field around a Tunnel in Soft Ground", Canadian Geotechnical Journal, 7, 54-61, 1970.
- Ishihara, K. (1970), "Relations Between Process of Cutting and Uniqueness of solution", Soil and Foundations, 10 (3), Sept. 1970.
- Kondner, R. L. e Zelasko, J. S., (1963), "Hiperbolic Stress-Strain Response: Cohesive Soils", J. of the Soil Mech. and Found. Div., ASCE, 89 (1), 115-143, 1963.
- Kovari, K., (1972), "Methoden der Dimensionierung von Untertagbauten", Proc. Int. Symposium on Underground Openings, Lucern, 1972, 198-223.
- Kruse, G. H., (1970), "Deformability of Rock Structures, California State Water Project", Determination of the In Situ Modulus of Deformation of Rock, ASTM STP 477, American Society of Testing and Materials, 1970, pg. 58-88.
- Kulhawy, F. H., (1974), "Finite Element Criteria for Underground Openings in Rocks", Int. J. Rock Mech. Mining Sciences, 11, 465-472, 1974.

- Kulhawy, F. H., (1975 a), "Stresses and Displacements around Openings in Homogeneous Rock", Int. J. Rock Mech. Min. Sci, 12, 43-57, 1975.
- Kulhawy, F. H., (1975 b), "Stresses and Displacements around Openings in Rock Containing an Elastic Discontinuity", Int. J. Rock Mech. Min. Sci, 12, 59-72, 1975.
- Kulhawy, F. H., (1975 c), "Stresses and Displacements around Openings in Rock Containing an Inelastic Discontinuity", Int. J. Rock Mech. Min. Sci, 12, 73-78, 1975.
- Kulhawy, F. H. e Duncan, T. M., (1970), "Nonlinear Finite Element Analysis of Stresses and Movements in Oroville Dam", Report NO. TE-70-2, University of California, Berkeley, January, 1970.
- Lacerda, W., Dias, P. H. V., e Peixoto, F. J. L., (1974), "Estudo dos Parâmetros do Solo para Análise por Elementos Finitos", 1º Seminário Brasileiro do Método dos Elementos Finitos Aplicado à Mecânica dos Solos , COPPE-UFRJ, 85-109, Setembro de 1974.
- Lade, P., (1972), "The Drained Stress-Strain and Strength Characteristics of Cohesionless Soils", PhD. thesis, Univ. California, Berkeley.
- Lade, P. V. e Duncan, J. M., (1975), "Elastoplastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil", J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, 101 (10), 1037-1053, Oct. 1975.
- Landau, L., (1976), "Análise de Grandes Deformações e Plasticidade por Meio de Elementos Finitos Isoparamétricos", tese M.Sc., COPPE, UFRJ, Setembro 1976.
- LNEC (1971), Estudo das Tensões Resultantes da Escavação da Galeria de Desvio da Barragem de Cabora Bassa", DEE, Relatório Interno, Lisboa, citado por Souza (1976).

- Lo, K. Y. e Lee, C. F., (1973), "Stress Analysis and Slope Stability in Strain-Softening Materials", *Geotechnique*, 23, March, 1973.
- Lombardi, G., (1975), "Nociones Generales sobre la Estática de los Túneles", *Boletim da Sociedad Venezolana de Mecánica del Suelo e Ingeniería de Fundaciones*, no 41, Junho, 1975.
- MacLeod, I. A., (1969), "New Rectangular Finite Element for Shear Wall Analysis", *J. Structural Division, ASCE*, 95 (3), 399-409, March, 1969.
- Malher, C. F., Soriano, H. L., Pereira, P. R., (1976), "Sobre um Estudo do Elemento Finito Isoparamétrico Quadrático em Análise Estrutural", *Colóquio Franco-Brasileiro de Métodos Numéricos em Engenharia, COPPE, UFRJ*, Agosto de 1976.
- Markovic, O. e Popovic, B., (1970), "A Comparison of the Loading of a Tunnel Lining as Measured in situ and Calculated by Analytical Methods", *Proc. 2<sup>th</sup> Cong. Int. Soc. Rock Mech.*, Belgrado, 2, 883-889, 1970.
- Mendelson, A., (1968), "Plasticity: Theory and Application", *The Macmillan Co.*, New York, 1968.
- Muir Wood, A.M., (1975), "The Circular Tunnel in Elastic Ground", *Geotechnique*, 25 (1), 115-127, 1975.
- Nayak, G. C. e Zienkiewicz, O. C., (1972), "Elasto-Plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain-Softening", *Int. J. for Num. Meths. in Engg.*, 5, 113-135.
- Newmark, N. M., (1960), "Failure Hypotheses for Soils", *Proc. Res. Conf. on Shear Strength of Soils, ASCE*, 17-32, June 1960.

- Obert, L. e Duvall, W. I., (1967), "Rock Mechanics and the Design of Structures in Rock", John Wiley, New York, 1967.
- Panet, H., (1973), "La Stabilité des Ouvrages Souterrains-Soutènement et Revêtement", Rapport de Recherche No 28, Paris, Laboratoires des Ponts et Chaussées.
- Pariseau, W. G., Voight, B. e Dahl, H. D., (1970), "Finite Element Analysis of Elastic-Plastic Problems in the Mechanics of Geologic Media: an Overview", Proc. 2<sup>th</sup> Cong. Int. Soc. Rock Mech., Belgrado, 311-323, 1970.
- Parry, R. H. G., (1971), "Stress-Strain Behavior of Soils", Proc. Roscoe Mem. Symp., Camb. Univ., Foulis Henley - on - Thames, R. H. G. Parry (editor).
- Pereira, P. R., (1977), "Análise de Aberturas Subterrâneas Circulares pelo Método dos Elementos Finitos", tese M.Sc., COPPE, UFRJ.
- Prager, W. e Hodge, P. G., (1951), "Theory of Perfectly Plastic Solids", Dover Publ., New York, 1951, 264 pgs.
- Prevost, J. H., e Höeg, K., (1975 a), "Soil Mechanics and Plascity Analysis of Strain-Softening", Geotechnique, 25 (2), 279-297.
- Prevost, J. H., e Höeg, K., (1975 b), "Effective Stress-Strain - Strength Model for Soils", J. Geoth. Engg. Div., ASCE, 101 (3), 259-278, March 1975.
- Rabcewicz, L. V., (1964), "O Novo Método Austríaco de Abertura de Túneis", Tradução nº 6 da Associação Brasileira de Geologia de Engenharia, Julho 1974.
- Reyes, S. F. e Deere, D. U., (1966), "Elasto-Plastic Analysis of Underground Openings by the Finite Element Method", Proc. 1<sup>st</sup> Cong. Int. Soc. Rock Mech., Lisboa, 477-483, 1966.

- Rocha, M., (1976), "Ferrovia Belo Horizonte - São Paulo, Dimensionamento do Suporte de Túneis" - Lisboa, Maio de 1976.
- Rodovia, Publicação do Serviço de Imprensa e Divulgação do Departamento Nacional de Estradas de Rodagem, Ministério dos Transportes, nº 324, Nov/Dez, 1976.
- Roscoe, K. H. e Burland, J. B., (1968), "On the Generalized Stress-Strain Behaviour of 'Wet' Clay", Engineering Plasticity, J. Heyman e F. A. Leckie, Eds., Cambridge University Press, Cambridge, England, 535-609, 1968.
- Roscoe, K. H., Schofield, A. N., Wroth, C. P., (1958), "On the Yielding of Soils", Geotechnique, 8, 22, 1958.
- Sheid, F., (1968), "Numerical Analysis", McGraw-Hill, 1968, 422 pgs.
- Shieh, W. Y. e Sandhu, R. S., (1970), "Applications of Elastic Plastic Analysis in Earth Structures", Proc. National Meeting on Water Resources Eng.", Memphis, Tenn, Jan. 1970.
- Silva Filho, B. C., (1976), "Comportamento Expansivo de Algumas Formações Sedimentares no Rio Grande do Sul e em Santa Catarina", Tópicos de Geomecânica, Tecnosolo, Setembro de 1976, nº 23.
- Smith, I. M. e Kay, S., (1971), "Stress Analysis of Contractive or Dilative Soil", J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, 97 (7), 981-997, July 1971.
- Soares, M. M., (1971), "Problemas do Estado de Equilíbrio Limite no Solo: Seu Estudo e Sua Programação", tese M. Sc., COPPE, UFRJ, Novembro de 1971.
- Souto Silveira, E. B., (1974), "Metrôs e Túneis em Solos", Relato do Tema II do V Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos, 3, 24-96, Outubro 1974.

- Souza, L. R., (1976), "Métodos Modernos de Dimensionamento de Túneis - Modelos Matemáticos", Geotecnica, 16, Fevereiro-Março, 1976.
- Szechy, K., (1966), "The Art of Tunnelling", Akadémiai Kiadó, Budapest, 891 pgs., 1966.
- Terzaghi, K., (1943), "Theoretical Soil Mechanics", Wiley, 1943, 510 pgs.
- Terzaghi, K., (1946), "Introduction to Tunnel Geology", Rock Tunnelling with Steel Supports, by R. V. Proctor e T. L. White.
- Terzaghi, K. e Richart, F. E., (1952), "Stresses in Rock about Cavities", Geotechnique, 3, 57-90, 1952.
- Tsutsumi, M., (1975), "Simulação de Escavação Escorada por Meio de Elementos Isoparamétricos", tese M. Sc., COPPE, UFRJ, Dezembro de 1975.
- Velloso, D., (1967), "Introdução à Teoria da Plasticidade", Monografia apresentada à Congregação da Faculdade de Arquitetura da U.F.R.J. para o concurso de provimento da Cátedra de Resistência dos Materiais - Estabilidade das Construções.
- Weaver Jr., W., (1967), "Computer Programs for Structural Analysis", Van Nostrand, Canada, 300 pgs.
- Wilson, E. L., (1963), "Finite Element Analysis of Two Dimensional Structures", Ph.D. thesis, University of California, Berkeley.
- Wong, K. S. e Duncan, J. M., (1974), "Hyperbolic Stress-Strain Parameters for Nonlinear Finite Element Analysis of Stresses and Movements in Soil Masses", V. C., Berkeley, Report TE-74-3.

- Zagottis, D., (1974), "O Modelo de Roscoe", 1º Seminário Brasileiro do Método dos Elementos Finitos Aplicado à Mecânica dos Solos, COPPE, U.F.R.J., Setembro de 1974.
- Zagottis, D., (1975), "O Método dos Elementos Finitos e o Projeto de Túneis", Revista Construção Pesada, Junho 1975, 60-63.
- Zienkiewicz, O. C., (1971), "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, 521 pgs., 1971.
- Zienkiewicz, O. C. e Corneau, I. C., (1974), "Visco-Plasticity, Plasticity and Creep in Elastic Solids. A Unified Numerical Solution Approach", Int. J. Num. Meth. Engg., 8, 821-845, 1974.
- Zienkiewicz, O. C., Humpheson, C. e Lewis, R. W., (1975), "Associated and Non-Associated Visco-Plasticity and Plasticity in Soil Mechanics", Geotechnique, 25 (4), 671-689, 1975.
- Zienkiewicz, O.C. e Naylor, D.J., (1971), "The Adaption of Critical State Soil Mechanics Theory for Use in Finite Elements", in R. H. G. Parry (Editor), Stress-Strain Behavior of Soils, Foulis, Henley-on-Thames, pg. 537-547.
- Zienkiewicz, O. C., Valliapan, S. e King, I. P., (1968), "Stress Analysis of Rock as a No-Tension Material", Geotechnique, 18 (1), 55-66, 1968.
- Zienkiewicz, O. C., Valliapan, S. e King, I. P., (1969), "Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems-Initial Stress, Finite Element Approach", Int. J. for Num. Meth. in Engineering, 1, 75-100, 1969.

## A P Ê N D I C E I

COMPARAÇÕES DE VALORES OBTIDOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM SOLUÇÕES TEÓRICASA-I-1- Viga em balanço com carga aplicada na extremidade

Para ilustrar o comportamento do elemento isoparamétrico utilizado, serão apresentadas comparações de resultados de deslocamentos, obtidos pelo método dos elementos finitos com a solução da teoria da elasticidade (MacLeod, 1969), para a viga em questão. A geometria da viga e os parâmetros utilizados na análise são mostrados na Fig. A-I-1.

Para a análise da convergência dos resultados numéricos foi empregada uma seqüência de quatro redes refinadas monotonicamente, conforme indicado na figura supracitada. Observa-se o resultado bem próximo do exato mesmo quando se utiliza apenas um elemento, e que os resultados convergem inferiormente para a solução exata, o que era de esperar para o elemento isoparamétrico conforme utilizado (Fig. A-I-2). Nesta mesma figura é representada a eficiência (E) de cada malha, a qual é definida como inversamente proporcional ao erro relativo e ao tempo de processamento (tempo da unidade central de processamento-CPU).

Constata-se que a malha 3 é a que proporciona a melhor eficiência. O gráfico permite ainda a conclusão de que, a partir de uma determinada malha, o refinamento melhora muito pouco o resultado numérico, enquanto que o tempo cresce mais rapidamente.

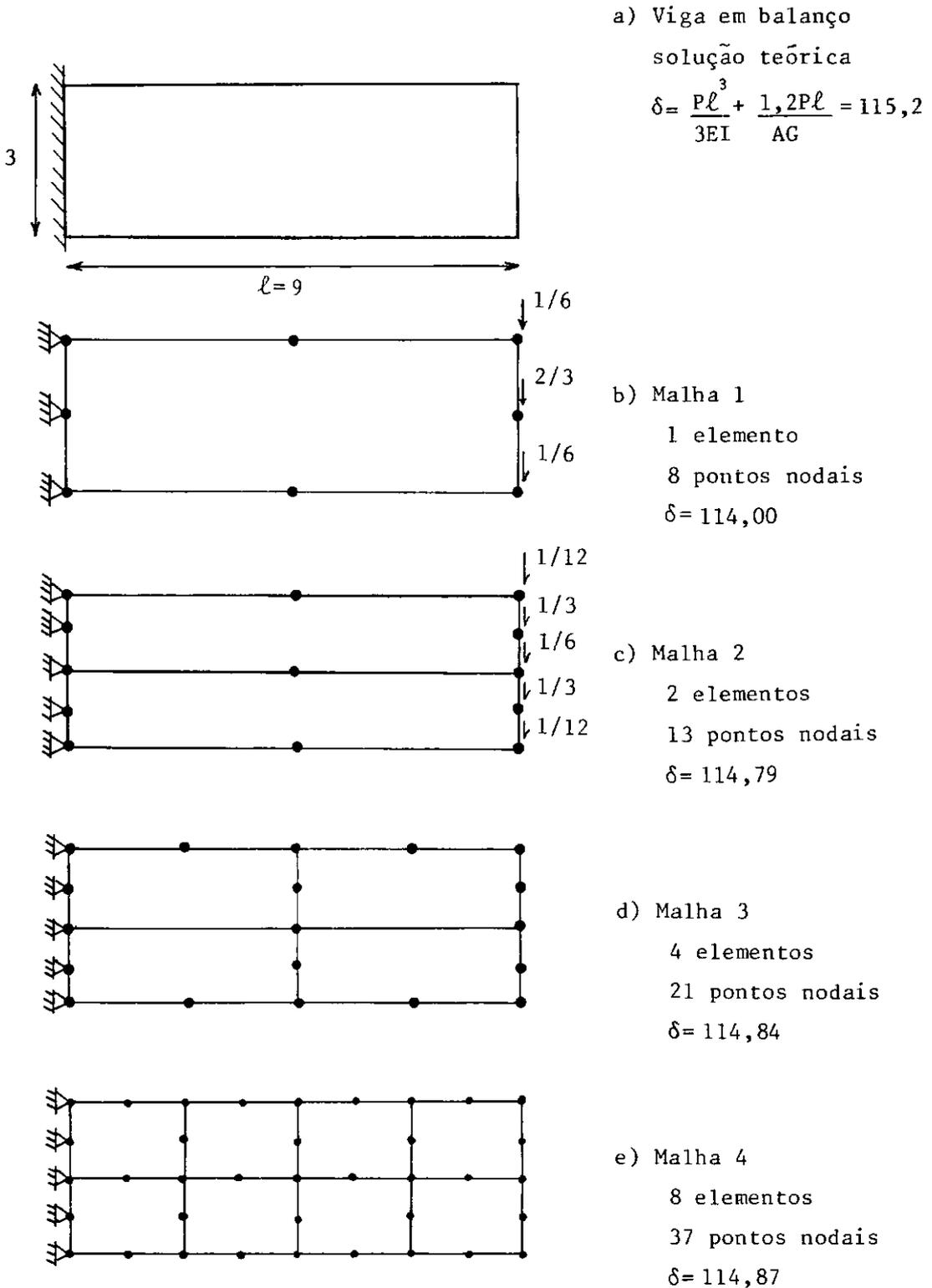


Fig. A-I-1- Viga em balanço; comparação entre solução teórica e solução pelo método dos elementos finitos  
( $E=1$ ,  $\nu=0$ ,  $t=1$ ,  $P=1$ )  
 $\delta$  = deslocamento do ponto médio da extremidade livre

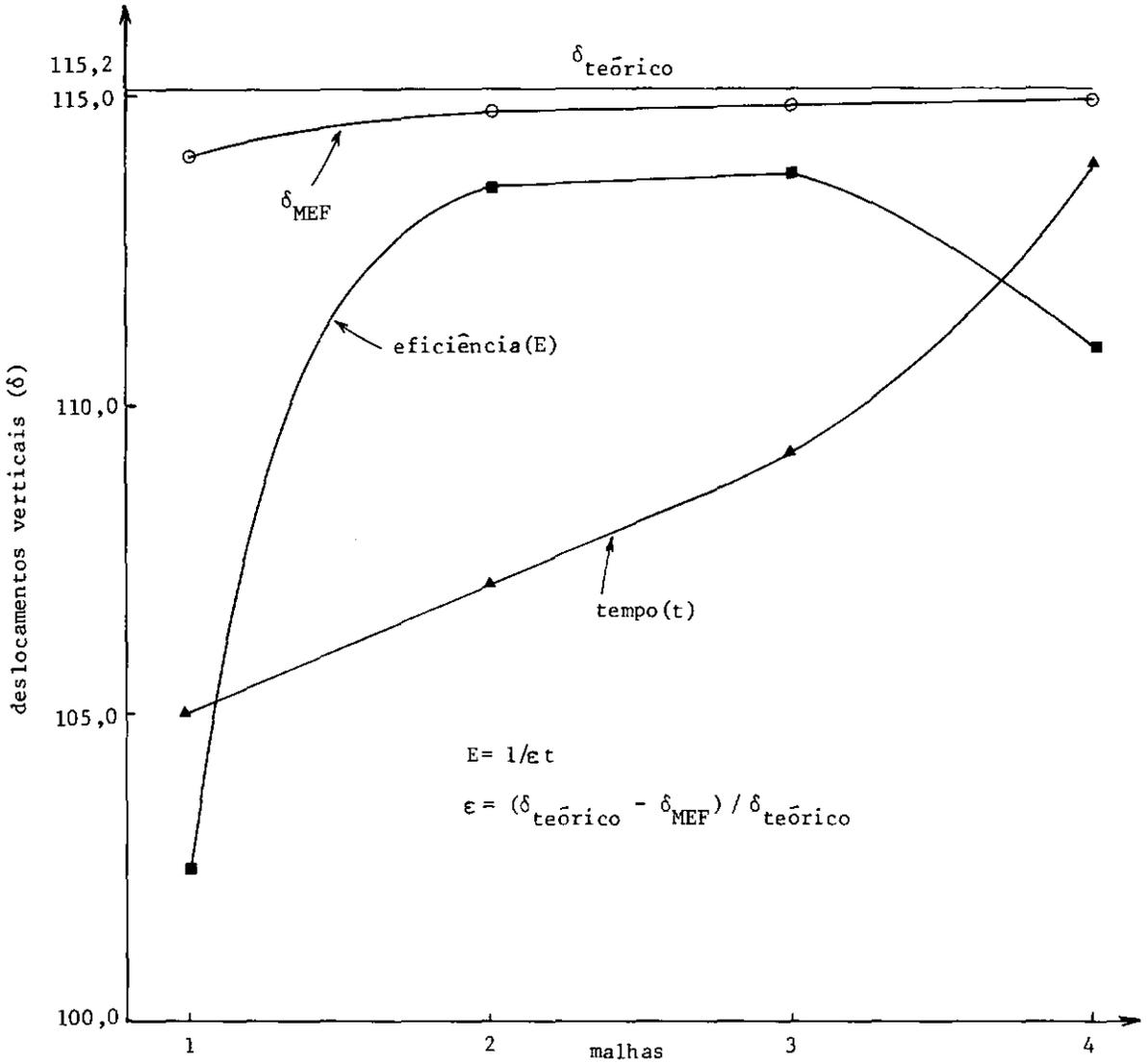


Fig-A-I-2 - Convergência dos resultados do MEF, representação da eficiência (E) e do tempo

A-I-2- Análise elasto-plástica de um cilindro submetido à pressão interna.

A solução desenvolvida por Prager e Hodge (1951), para a análise elasto-plástica de um cilindro submetido à pressão interna, com critério de escoamento de Von Mises, será utilizada para verificação do modelo adotado.

Com relação ao limite de escoamento no cisalhamento puro ( $k_1$ ), o critério de Von Mises pode ser expresso por

$$J_2 - k_1^2 = 0,$$

onde  $k_1 = \sigma_e / \sqrt{3}$  e  $\sigma_e$  é a tensão de escoamento na tração ou compressão simples (ver eq. III-4).

Pode-se demonstrar facilmente que o critério de Von Mises é um caso particular do critério de Drucker-Prager quando  $\phi = 0$ , e que  $k_1 = k = c$ , sendo  $k$  a constante física do critério de Drucker-Prager e  $c$  a coesão do material (ver eq. III-8).

Na Fig. A-I-3 apresentam-se a idealização do cilindro por elementos finitos e os parâmetros do material.

Foram utilizados oito incrementos de carga e tolerância de 0,001 para a norma dos deslocamentos. A tabela A-I-1 indica o número de iterações, o número de pontos de integração plastificados e a pressão aplicada em cada incremento. Foram utilizados 3x3 pontos de integração em todos os elementos.

Os resultados da análise são apresentados nas Figs. A-I-4 a A-I-6, onde se observa a boa concordância entre a solução de elementos finitos e a solução de Prager e Hodge (1951). As tensões axial ( $\sigma_z$ ) e tangencial ( $\sigma_\theta$ ) foram calculadas nos pontos de integração da linha que faz aproximadamente  $2^\circ$  com a horizontal, enquanto a solução daqueles autores é para a horizontal.

Tabela A-I-1

INCREMENTO	PRESSÃO APLICADA	Nº DE ITERAÇÕES	Nº DE P.I. PLASTIFICADOS
1	0,75 k	0	0
2	0,90 k	6	30
3	1,00 k	7	45
4	1,10 k	10	75
5	1,20 k	14	105
6	1,25 k	16	120
7	1,30 k	20	150
8	1,32 k	25	165

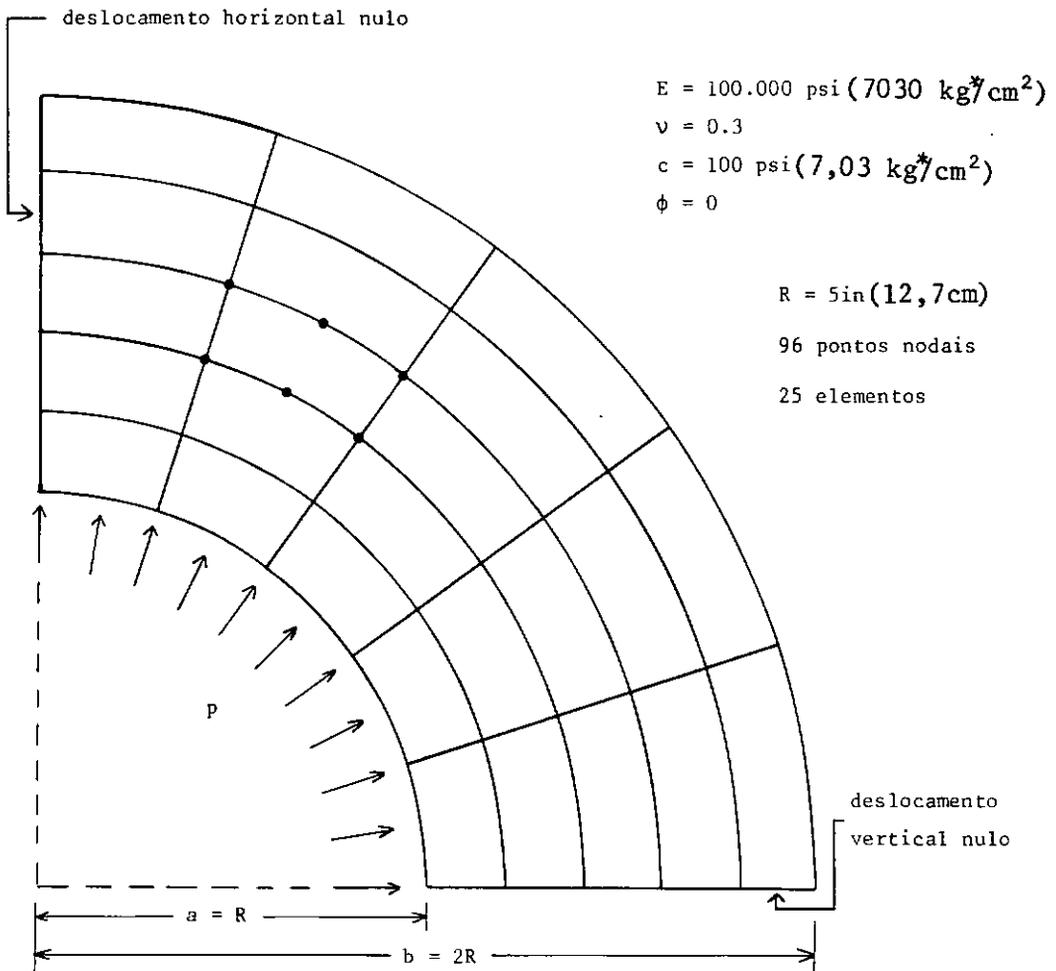


Fig. A-I-3- Rede de elementos finitos para a análise elasto-plástica do cilindro submetido à pressão interna ( $b=2a$ ).

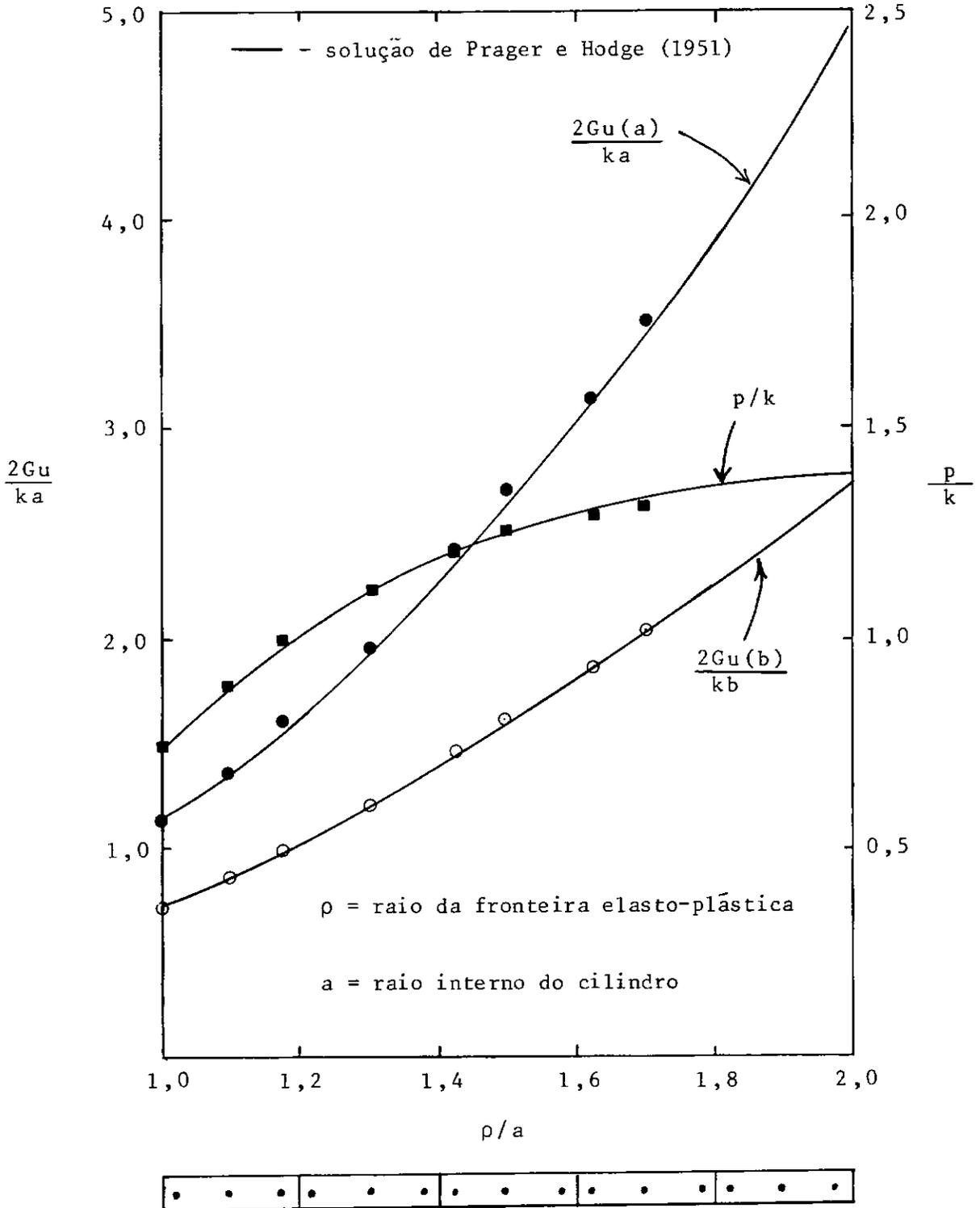


Fig. A-I-4- Deslocamentos radiais  $u(a)$ ,  $u(b)$  versus  $\rho/a$  para o cilindro submetido à pressão interna

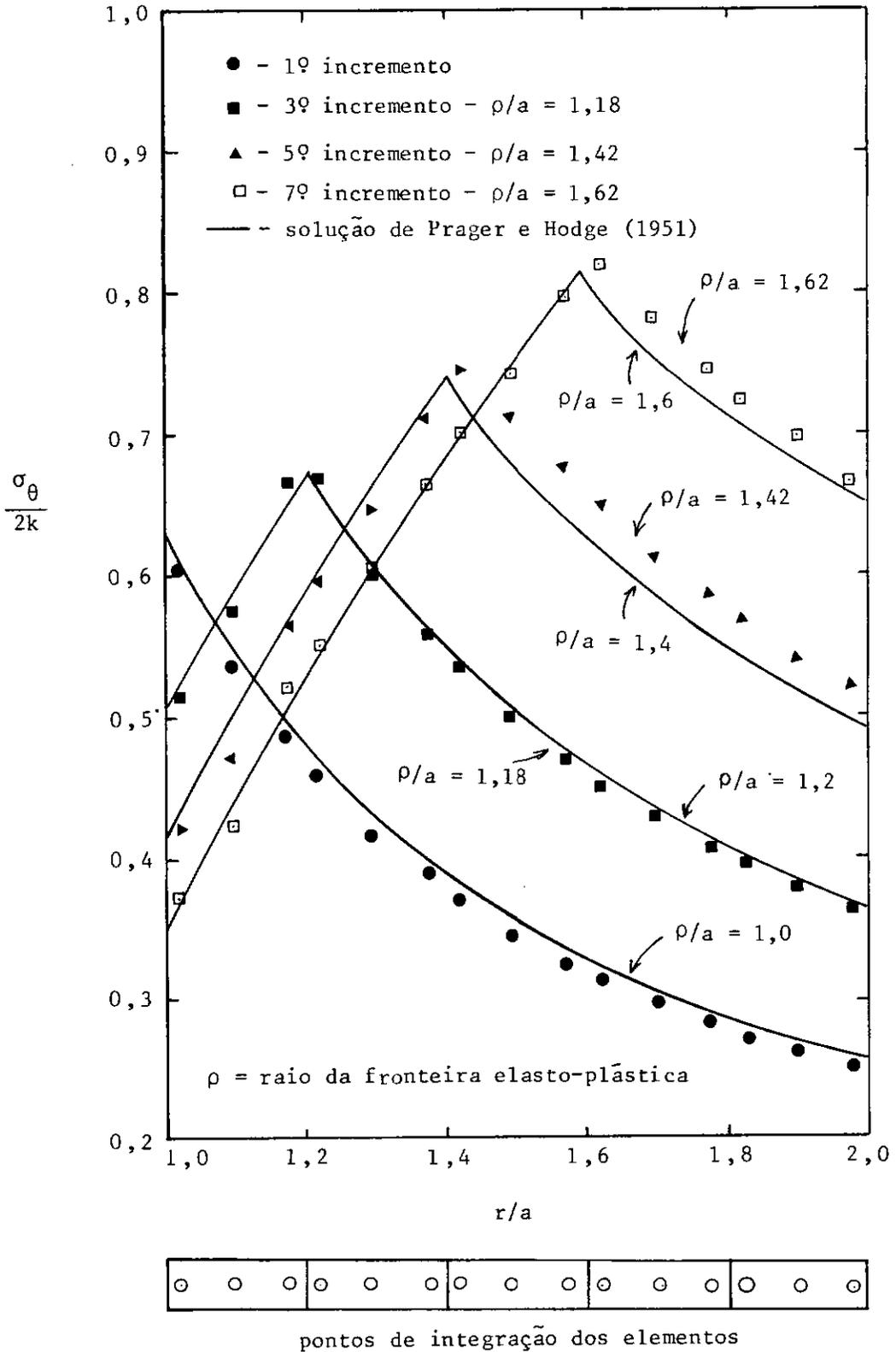


Fig. A-I-5- Distribuição de tensões tangenciais  $\sigma_{\theta}$  para o cilindro submetido à pressão interna

Obs.: Devem ser comparadas curvas com o mesmo  $\rho/a$ .

Os picos das curvas representam as fronteiras entre as regiões elásticas e plásticas.

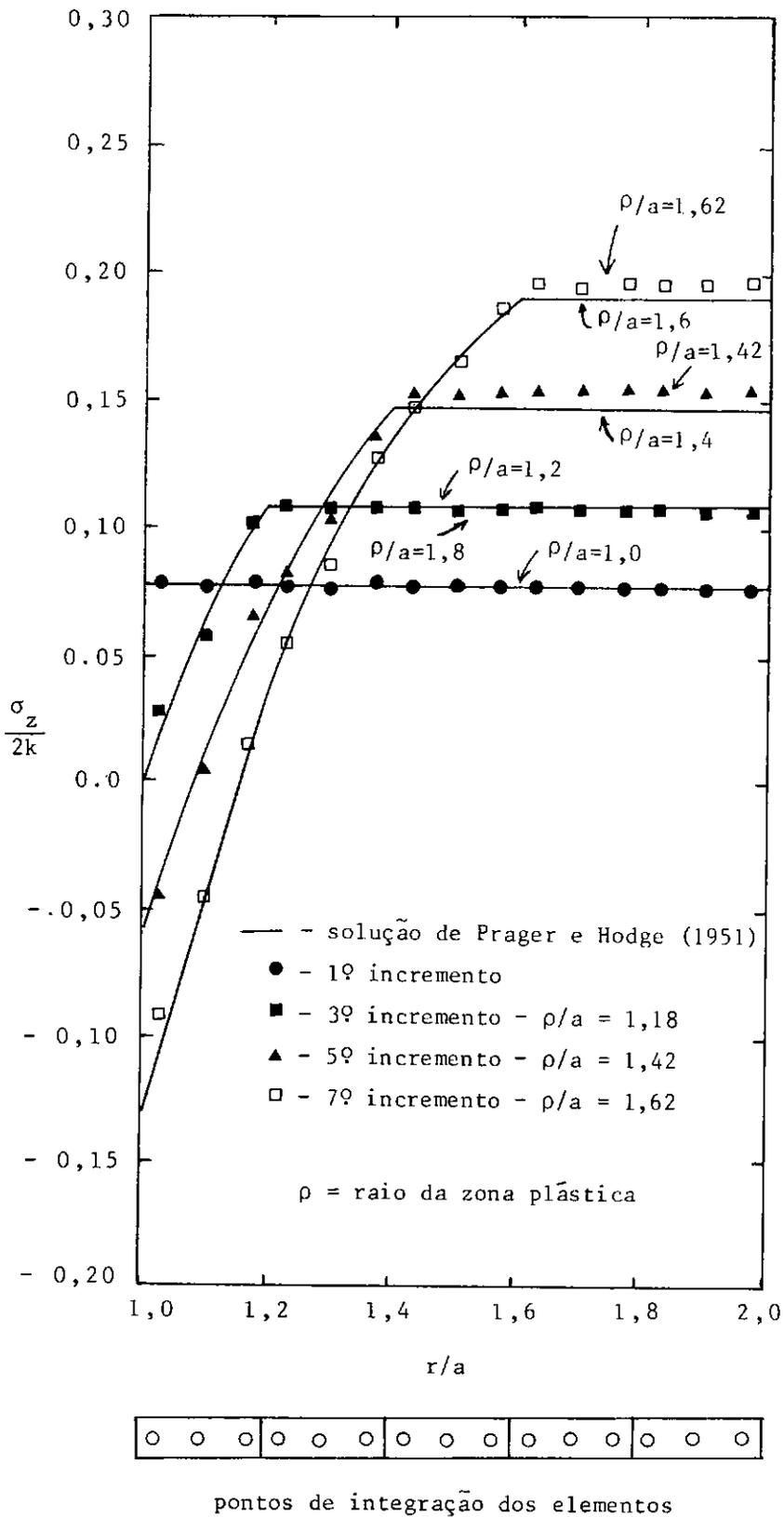


Fig. A-I-6- Distribuição de tensões axiais ( $\sigma_z$ ) para o cilindro submetido à pressão interna

Obs.: Devem ser comparadas curvas com o mesmo  $\rho/a$ .

## APÊNDICE II

MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA TUNELPLAST

A finalidade deste programa é calcular deslocamentos e tensões em túneis simulando a sequência construtiva desta obra. A análise é efetuada pelo método dos elementos finitos, para a condição de estado plano de deformação e com alternativas para análises elástica linear e elasto-plástica, como descrito nos capítulos V, VI, VII e VIII.

Para boa utilização do programa recomenda-se ler com atenção o manual de entrada de dados, além dos capítulos acima. Desenvolvido em linguagem FORTRAN-G no computador BURROUGHS / 6700 do Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, o programa po de também ser utilizado em outros computadores de grande porte que aceitem aquela linguagem.

O programa pode também ser aplicado a outros problemas geotécnicos em estado plano de deformação, como escavações a céu aberto, escoradas ou não, e fundações corridas.

ENTRADA DOS DADOSa) Cartão título (78 A1)

1-78 HED - título do problema a ser analisado, unidades adotadas, etc.

b) Cartão das características do problema (16 I5)

- 1-5 NUMNP - nº de pontos nodais da rede
- 6-10 NUMEL - nº de elementos da rede
- 11-15 NUMSOL - nº de solos ou rochas diferentes (numeração de 1 a 9)
- 16-20 NSUPOR - nº de materiais de suporte (revestimento, estronca, cambotas, etc.) - máximo de seis
- 21-25 NPCE - tipo de análise  
 0 - elástica linear  
 1 - elasto-plástica
- 26-30 5X - branco
- 31-35 IGERA - geração automática para rede circular  
 0 - não há geração automática  
 1 - há geração automática
- 36-40 NB - número de pontos nodais com restrição de deslocamentos
- 41-45 LEITU - indica se há leitura ou cálculo de tensões iniciais  
 0 - tensões iniciais geostáticas calculadas pelo MEF  
 1 - tensões iniciais lidas (iguais em toda a rede)  
 2 - tensões iniciais geostáticas calculadas para terreno homogêneo  
 3 - tensões iniciais lidas para cada nó

No caso de LEITU = 0 o maciço deve ser discretizado com todos os elementos internos à escavação. Este procedimento torna-se necessário para o cálculo de tensões iniciais, pois todo o maciço será carregado por forças de massa. Para os casos de LEITU = 1, 2 e 3, apenas deverão ser fornecidos os elementos adjacentes à escavação. Os elementos internos restantes são desnecessários.

c) Se NPCE = 1 - Cartões para análise elasto-plástica

c.1) (I5, F10.0)

1-5 NINCRM - número de incrementos para análise elasto-plástica

6-15 TOLER - tolerância para a norma dos deslocamentos

c.2) Cartão(s) para definição das percentagens da força total aplicada.

1-5 PERC( ) - percentagem para o 1º incremento

6-10 PERC( ) - percentagem para o 2º incremento

·       ·  
·       ·  
·       ·

Obs: Deverão existir tantos valores de PERC quantos forem os incrementos (NINCRM)

d) Cartões das características do(s) solo(s) ou rocha(s)

d.1) (I5, 20 A1)

1-5 MTYPE - número do tipo do material (1 a 9)

6-20 HED - nome do solo ou rocha

d.2) (6F10.0)

1-10 YOUN2(MTYPE) - módulo de elasticidade (E)

11-20 POIS2(MTYPE) - coeficiente de Poisson ( $\nu$ )

21-30 GAMA(MTYPE) - peso específico ( $\gamma$ )

31-40 COELAT(MTYPE) - coeficiente de empuxo no repouso ( $K_0$ )

41-50 COESAO (MTYPE) - coesão do solo ou rocha (c)

51-60 ATRITO (MTYPE) - ângulo de atrito do solo ou rocha ( $\phi$ )  
(em graus)

Para análise elástica linear (NPCE=0) não é necessário fornecer os valores de c e  $\phi$ , no entanto, se forem fornecidos, serão ignorados. Para os casos de LEITU = 1 e 3, é desnecessário fornecer  $\gamma$  e  $K_o$ .

Os cartões d.1) e d.2) devem constar para cada solo ou rocha, sendo o número de pares de cartões igual a NUMSOL (máximo de nove).

e) Se NSUPOR > 1 - Cartões das características dos materiais de suporte

e.1) (78A1)

1-78 HED - tipo do material de suporte

e.2) (I5, 7F10.0)

1-5 MTYPE - nº do tipo do material de suporte (11 a 16)

6-15 YOUN2 (MTYPE) - módulo de elasticidade (E)

16-25 POIS2 (MTYPE) - coeficiente de POISSON ( $\nu$ )

26-35 GAMA (MTYPE) - peso específico ( $\gamma$ )

Os cartões e.1) e e.2) devem ser fornecidos para cada material de suporte e o número de pares de cartões deve ser igual a NSUPOR (máximo de seis).

f) Cartões das coordenadas dos pontos nodais

f.1) Se IGERA = 0 (I5, 5X, 2F10.0)

1-5 N - número do ponto nodal

6-10 5X - branco

11-20 R(N) - Coordenada na direção x  
 21-30 Z(N) - Coordenada na direção y

Deve ser adotado o sistema de eixos da Fig. A-II-1.

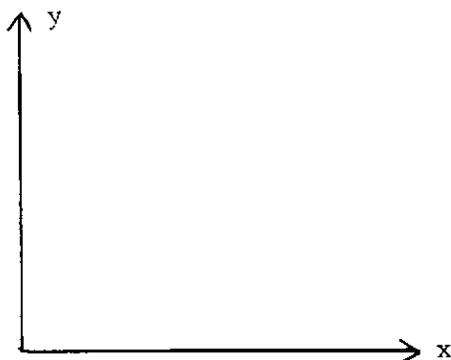


Fig. A-II-1- Sistema de eixos a ser adotado.

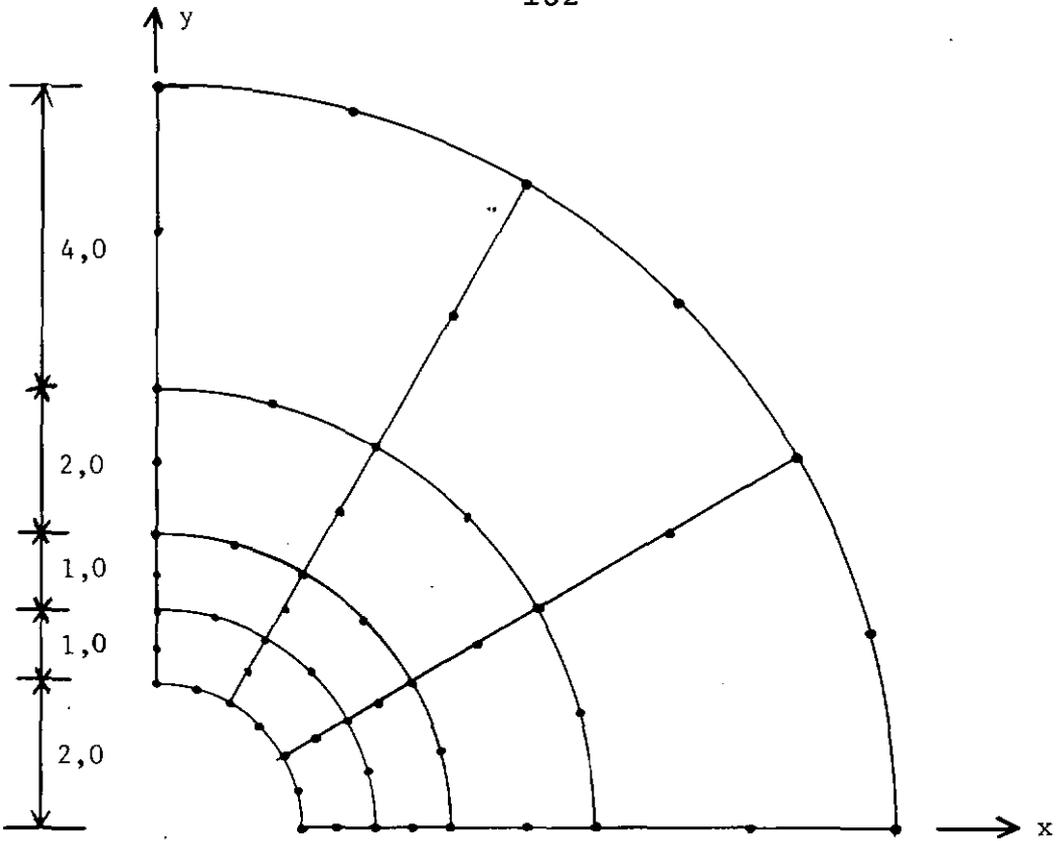
Estes cartões devem ser fornecidos em ordem seqüencial crescente, um para cada ponto nodal.

Existindo, sobre um trecho reto pertencente à rede, alguns nós igualmente espaçados, o programa permite que se utilize geração semi-automática. Neste caso é suficiente fornecer apenas os cartões referentes aos nós inicial e final do trecho reto, sendo os números e as coordenadas dos nós intermediários gerados automaticamente pelo programa, conforme ilustra o exemplo do apêndice III.

f.2) Se IGERA = 1 - cartões para geração automática de pontos nodais para rede circular (Fig. A-2)

f.2.1) (I5)

1-5 NR - número de raios em que existem pontos nodais (inclusive pontos nodais intermediários)



f. 2.1 ) 9

f. 2.2 )	7	2.	15.
	4	2.5	30.
	7	3.	15.
	4	3.5	30
	7	4.	15.
	4	5.	30.
	7	6.	15.
	4	8.	30.
	7	10.	15.

Fig. A-II-2- Geração automática de nós para rede circular

f.2.2) (I5, 2F10.0)

1-5 NPR - Número de pontos existentes no 1º raio

6-15 RA - Valor do 1º raio

16-25 DANG - Incremento de ângulo entre nós consecutivos do mesmo raio.

Deverão existir tantos cartões f.2.2) quantos forem os raios (NR). A Fig. A-II-2 exemplifica a codificação dos cartões f.2).

g) Cartões das condições de apoio (2I5)

1-5 NBC( ) - Número do ponto nodal com restrição

6-10 NFIX( ) - Tipo de restrição do ponto nodal

=10 - Deslocamento impedido em x e livre em y

=01 - Deslocamento impedido em y e livre em x

=11 - Deslocamento impedido nas direções x e y

A Fig. A-II-3 exemplifica a codificação dos cartões g).

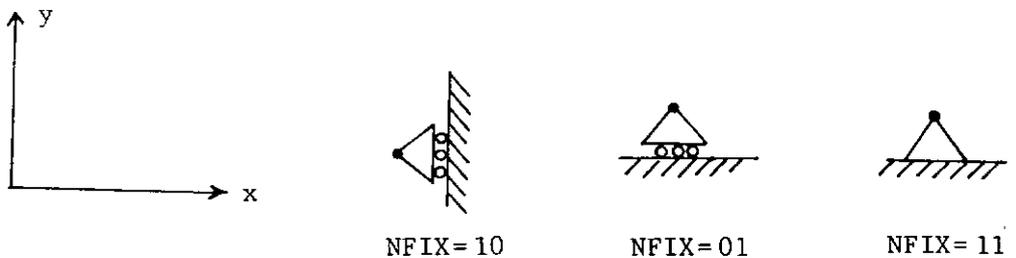


Fig. A-II-3- Restrição dos nós

h) Cartões das incidências dos pontos nodais nos elementos

(10 I5)

- 1-5 -M - número do elemento
- 6-10-IX(M,1) - ponto nodal I
- 11-15-IX(M,2) - ponto nodal J
- 16-20-IX(M,3) - ponto nodal K
- 21-25-IX(M,4) - ponto nodal L
- 26-30-IX(M,5) - ponto nodal M
- 31-35-IX(M,6) - ponto nodal N
- 36-40-IX(M,7) - ponto nodal O
- 41-45-IX(M,8) - ponto nodal P
- 46-50-IX(M,9) - número do material deste elemento (MTYPE)
- 51-55-IX(M,10) - número de pontos de integração deste elemento (2, 3, 4 ou 5)

ver Fig.A-II-4

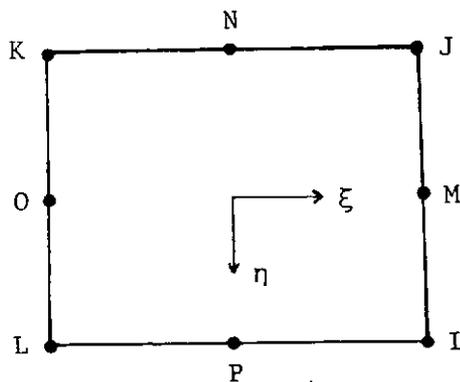


Fig. A-II-4- Incidência dos nós no elemento

Se para o primeiro cartão lido (o valor IX(M,10) for especificado, esta variável assumirá o valor 3 (default).)

Quanto elementos consecutivos tiverem o mesmo número de pontos de integração, é suficiente que se forneça apenas o valor de IX(M,10) do primeiro elemento, o qual será assumido até que apareça um novo campo IX(M,10) preenchido.

Também é possível utilizar geração semi-automática, sendo os elementos intermediários omitidos, gerados com o mesmo material do elemento precedente. Neste caso é essencial que a numeração dos elementos

seja no mesmo sentido da numeração dos pontos nodais. Se toda a estrutura for composta por apenas um material, é suficiente fornecer o 1º elemento de cada camada ou seqüência de elementos. Somente na última camada ou seqüência é necessário fornecer o último elemento. Havendo diferentes materiais na rede torna-se necessário fornecer o 1º elemento do novo material.

i) Cartão(s) de leitura das tensões iniciais.

i.1) Se LEITU=1-(tensões iniciais iguais em todos os pontos nodais) - (3F10.0).

1-10 - tensão normal inicial na direção x ( $\sigma_{x0}$ )

11-20 - tensão normal inicial na direção y ( $\sigma_{y0}$ )

21-30 - tensão cisalhante inicial no plano xy ( $\tau_{xy0}$ )

i.2) Se LEITU=2-(tensões iniciais (geostáticas para terreno homogêneo) - (F10.0).

1-10-ZH - distância entre o nível do terreno e a origem do eixo y

i.3) Se LEITU=3-(tensões iniciais são lidas em todos os pontos nodais) - (3F10.0).

1-10 - tensão normal inicial na direção x ( $\sigma_{x0}$ )

11-20 - tensão normal inicial na direção y ( $\sigma_{y0}$ )

21-30 - tensão cisalhante inicial no plano xy ( $\tau_{xy0}$ )

Deverão existir tantos cartões i.3) quantos forem os pontos nodais da rede (NUMNP).

j) Cartão do número de níveis ou fronteiras de escavação (I5)

1-5 - NNIVEL - número de níveis ou fronteiras de escavação

Se na análise não existir escavação, NNIVEL=0.

k) Se NNIVEL≠0 - Cartões de descrição da escavação.

k.1) Cartão das características dos níveis de escavação  
(16I5)

- 1-5 - NPOINT - número de pontos nodais na fronteira de escavação
- 6-10 - NJUSTB - número de lados da fronteira pertencentes a dois elementos adjacentes
- 11-15 - NJUSTA - número de elementos que têm apenas 1 ponto nodal na fronteira

Para melhor compreensão destas variáveis vide exemplo do apêndice III.

k.2) Cartão(s) com os números dos pontos nodais da fronteira de escavação.

1-5 - NPONTO( ) - número do 1º nó da fronteira de escavação

6-10 - NPONTO( ) - número do 2º nó da fronteira de escavação

·           ·           ·  
·           ·           ·  
·           ·           ·

Deverão existir tantos NPONTO quanto for o número de nós da fronteira de escavação (NPOINT).

k.3) Cartões de descrição dos elementos que têm lado na fronteira (4I5)

Estes cartões devem ser fornecidos alternadamente (1º o elemento interno à escavação e em 2º o elemento externo à escavação, pertencentes ao mesmo lado).

k.3.1) Elemento interno à escavação (2I5)

1-5 - JUSTB - número do elemento interno à escavação

6-10 - LSIDE - número do lado, pertencente a este elemento, que se situa na fronteira (ver Fig. A-II-5).

k.3.2) Elemento externo à escavação (4I5)

1-5 - JUSTB - número do elemento externo à escavação

6-10 - LSIDE - número do lado, pertencente a este elemen

to, que situa na fronteira (ver Fig. A-II-5)

11-15 - NPC - número do ponto nodal (na numeração de NPONTO) pertencente a duas fronteiras consecutivas.

16-20 - NPSI - número do ponto nodal (na numeração local, 1 a 4) pertencente a duas fronteiras consecutivas.

Os campos NPC e NPSI serão deixados em branco quando o elemento não possuir ponto pertencente a duas fronteiras de escavação consecutivas.

k.4) Se NJUSTA  $\neq$  0 - Cartão(s) de descrição dos elementos que têm apenas 1 ponto nodal na fronteira (16 I5)

1-5 - JUSTA ( ) - número do elemento que tem apenas 1 nó na fronteira

6-10 - JUSTA ( ) - número do elemento que tem apenas 1 nó na fronteira

·           ·                           ·  
·           ·                           ·  
·           ·                           ·

Deverão existir tantos JUSTA quanto for o número de elementos com apenas 1 ponto nodal na fronteira (NJUSTA).

Deverão existir tantos cartões k) quantos forem os níveis ou fronteiras de escavação (NNIVEL).

1) Cartão de descrição das operações a serem realizadas na etapa de análise (16 I5)

1-5 - JCODIG - = 0, não existem operações na etapa; fim da execução

= 1, existem operações na etapa

6-10- JESCAV - = 0, não há escavação nesta etapa

= 1, há escavação nesta etapa



- 1-5 - NCB( ) - número do 1º nó interno à escavação  
 6-10 - NBC( ) - número do 2º nó interno à escavação  
 : : :  
 : : :  
 . . .

Deverão existir tantos NBC quanto for o número de pontos nodais internos à escavação (NPRET), incluídos os desta etapa e das anteriores.

Não devem ser incluídos os nós que fazem parte de elementos que terão a rigidez modificada na mesma etapa (estroncas, revestimentos, cambotas, etc).

n) Se JRIGID ≠ 0 - Cartões de descrição dos elementos que têm a rigidez modificada na etapa

n.1) (I5)

- 1-5 - NRIG - número de elementos que têm a rigidez modificada

n.2) (2I5)

- 1-5 - KL - número do elemento cuja rigidez será modificada

- 5-10 - IX(KL,9) - número do tipo de material (fornecido anteriormente)

O número de cartões n.2) deve ser igual a NRIG.

o) Se JCCONC ≠ 0 - Cartões de descrição das cargas concentradas da etapa

o.1) (I5)

- 1-5 - NCONC - número de pontos nodais com carga concentrada

o.2) (I5, 7F10.0)

- 1-5 - NPC - número do ponto nodal com carga concentrada

- 6-15 - FX( ) - carga concentrada na direção x

- 16-25 - FY( ) - carga concentrada na direção y

O número de cartões 0.2) deve ser igual a NCONC.

p) Se JCDIST  $\neq$  0 - Cartões de descrição dos carregamentos distribuídos da etapa

p.1) (I5)

1-5 - NCDIST - número de elementos com carregamento distribuído na etapa

p.2) (2I5, 6F10.0)

1-5 - KL - número do elemento em que atua o carregamento distribuído.

6-10 - LADO - número do lado em que atua o carregamento distribuído (Fig. A-II-5)

11-20 - PP(1) -

21-30 - PP(2) -

31-40 - PP(3) - intensidade do carregamento nos pontos

41-50 - PP(4) - nodais do lado do elemento (ver Fig.

51-60 - PP(5) - A-II-5)

61-70 - PP(6) -

O sinal do carregamento (PP) deve estar de acordo com a orientação dos eixos x e y.

Os valores de PP deverão ser fornecidos na seqüência indicada pela seta do lado do carregamento, conforme mostra a Fig.

A-II-5 b) para o lado 3.

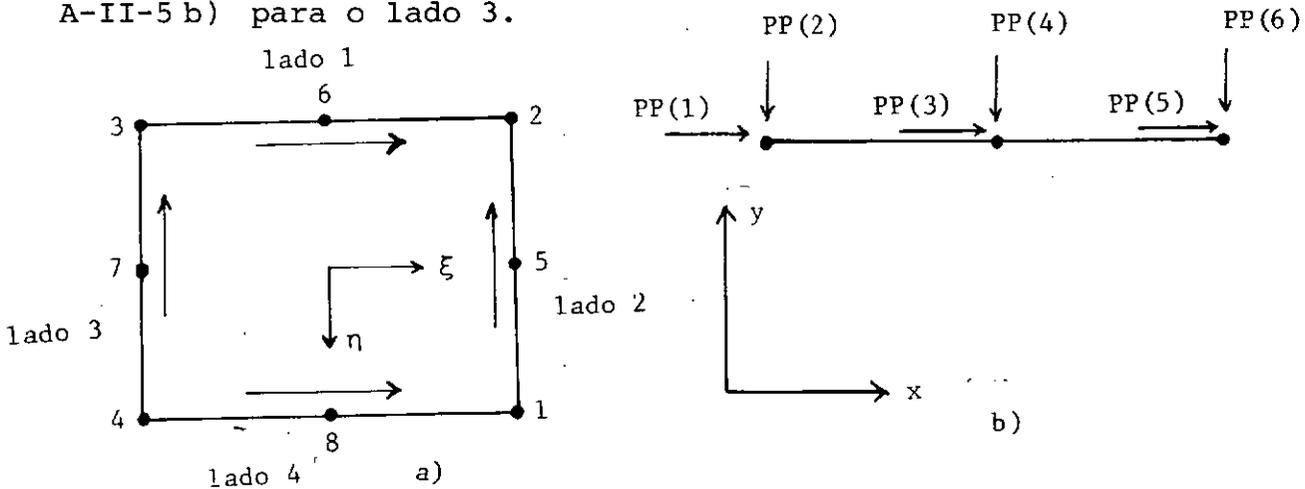


Fig. A-II-5- Carregamento distribuído no elemento.

OBSERVAÇÕES FINAIS

O programa analisa apenas um problema de cada vez. Caso seja conveniente analisar vários problemas, deve-se introduzir um teste na variável ICODIG para voltar para o início do programa.

A saída dos resultados imprime deslocamentos e tensões, estas em pontos nodais para análise elástica linear e em pontos de integração para análise elasto-plástica. Caso se deseje imprimir também deformações, estas são fornecidas nos pontos de integração através da variável DEFT. Para impressão das deformações nos pontos nodais deve-se criar uma variável para fazer a acumulação nos pontos nodais dos elementos e tirar a média para impressão nos pontos nodais da rede.

As variáveis utilizadas no programa foram dimensionadas com vistas à aplicação e problemas práticos. A seguir são descritas as dimensões que devem ser observadas para a aplicação do programa. Caso seja necessário maiores dimensões para algumas variáveis, deve-se modificar devidamente as dimensões das referidas variáveis no programa.

número de pontos nodais (NUMNP) - 450

número de elementos (NUMEL) - 130

largura de banda (MBAND) - 70

número de nós com restrição, incluídos os internos à escavação (NBC) - 130

número de etapas de escavação - (IFRON) - 8

número de pontos nodais em cada fronteira de escavação (NPOINT) - 30

número de lados adjacentes a dois elementos em cada fronteira de escavação (LSIDE) - 30

número de pontos nodais pertencentes a duas fronteiras, para cada etapa de escavação (NPC) - 30

número de incrementos para análise elasto-plástica (NICRM) -20

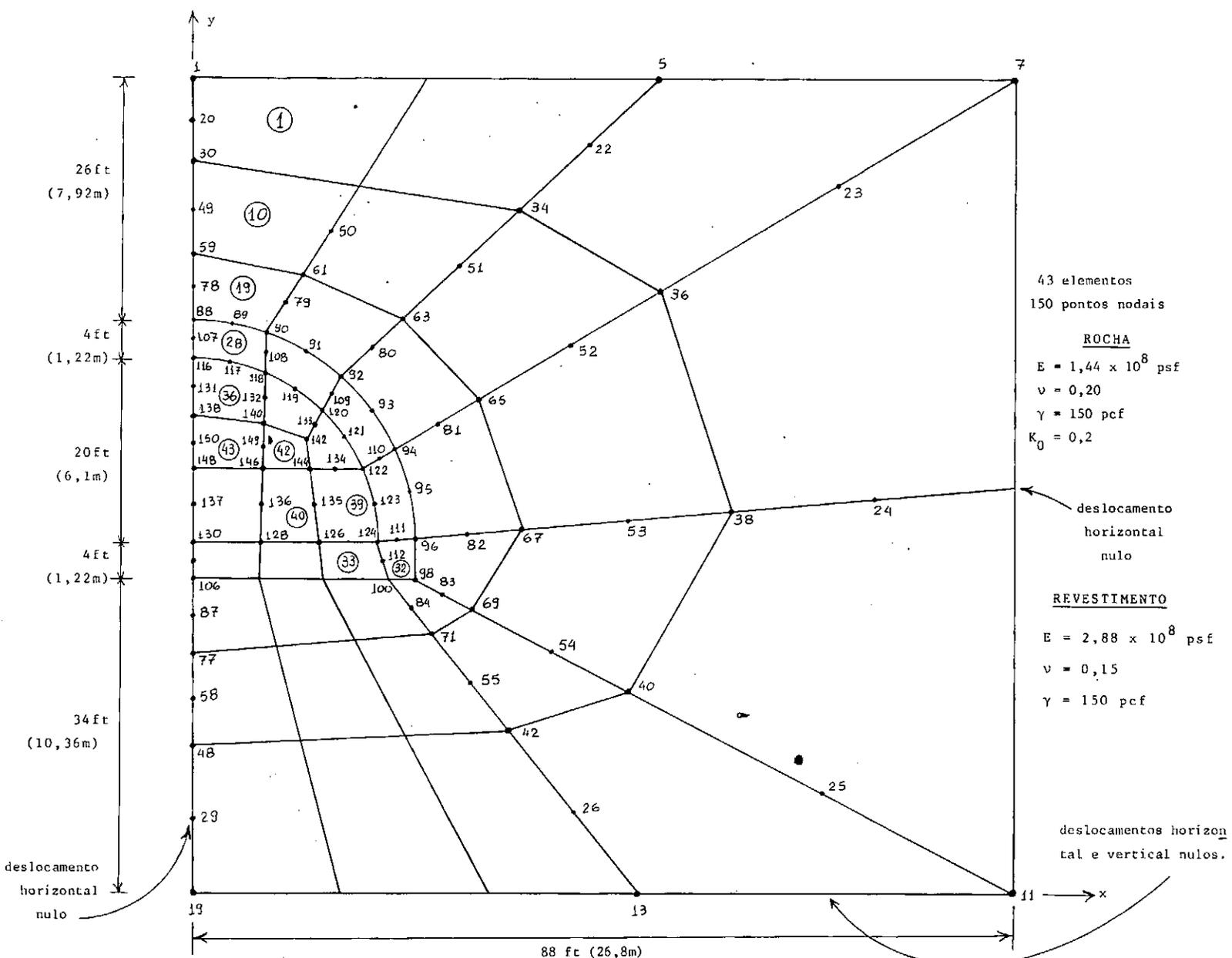


Fig. A-III-1 - Exemplo para utilização do programa.

## APÊNDICE I I I

EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO MANUAL DE ENTRADA E SAÍDA DOS  
RESULTADOS

A Fig. A-III-1 apresenta o maciço e o túnel discretizados que serve para exemplo de utilização do programa. A linha que liga os pontos nodais 143 a 94 delimita duas etapas de escavação do túnel. Os comportamentos do maciço e do túnel são considerados elásticos lineares.

De acordo com o Apêndice II foram codificados os dados de entrada do programa, os quais são apresentados nas páginas 194 a 198.

Na Fig. A-III-2 é apresentada a rede dos elementos finitos desenhada pelo PLOTTER através de um programa desenvolvido pela COPPE. Este programa utiliza os próprios dados topológicos da rede utilizados pelo programa desenvolvido neste trabalho, o que torna simples detectar erros na codificação de cartões. O programa para PLOTTER não representa os lados curvos dos elementos como pode ser observado no contorno da cavidade.

Nas páginas 200 a 205 são apresentadas partes da impressão dos resultados.

## MODFLO PARA UTILIZACAO DO PROGRAMA

150	43	1	1	0	0	35	2
1	ROCHA FRATURADA						
144000000.	0.2	150.0	0.2				
REVESTIMENTO DE CONCRETO							
11288000000.	0.15	150.0					
1	0.0	88.					
5	50.0	88.					
7	88.0	88.					
11	88.0	0.					
13	48.0	0.					
19	0.0	0.					
20	0.0	83.6					
22	42.6	81.0					
23	69.0	76.6					
24	72.8	42.6					
25	67.4	10.8					
26	41.0	8.8					
29	0.0	8.0					
30	0.0	79.2					
32	18.	76.4					
34	35.2	74.0					
36	50.0	65.2					
38	57.6	41.2					
40	46.8	21.6					
42	34.0	17.6					
48	0.0	16.0					
49	0.0	74.0					
50	15.0	71.6					
51	29.0	68.0					
52	40.4	59.3					
53	46.6	40.3					
54	38.4	26.2					
55	30.0	22.8					
58	0.0	21.0					
59	0.0	69.2					
61	12.0	66.8					
63	22.8	62.0					
65	30.8	53.4					
67	35.6	39.4					
69	30.0	30.8					
71	26.0	28.0					
77	0.0	26.0					
78	0.0	65.6					
79	10.0	63.8					
80	19.4	59.0					
81	26.4	50.7					
82	29.8	38.9					
83	27.0	32.4					
84	23.5	31.2					
87	0.0	30.0					
88	0.0	62.0					
89	4.0	61.6					
90	8.0	60.8					
91	12.4	58.8					
92	16.0	56.0					
93	19.4	52.2					

94	22.0	48.0
95	23.4	43.6
96	24.0	38.4
98	24.0	34.0
100	21.0	34.0
102	14.0	34.0
104	- 7.20	34.0
106	0.0	34.0
107	0.0	60.0
108	8.0	58.2
109	15.0	54.0
110	20.0	47.0
111	22.0	38.2
112	20.6	36.0
113	13.8	36.0
114	7.2	36.0
115	0.0	36.0
116	0.0	58.0
117	3.9	57.6
118	7.8	56.4
119	11.	54.6
120	14.0	52.0
121	16.2	49.4
122	18.4	46.0
123	19.4	42.2
124	20.0	38.0
126	13.6	38.0
128	7.2	38.0
130	0.0	38.0
131	0.0	54.8
132	7.6	53.4
133	13.2	50.6
134	15.4	46.0
135	13.0	42.0
136	7.4	42.0
137	0.0	42.0
138	0.0	51.6
140	7.6	50.8
142	12.4	49.2
144	12.8	46.0
146	7.6	46.0
148	0.0	46.0
149	7.6	48.4
150	0.0	48.8

1 10  
 7 10  
 8 10  
 9 10  
 10 10  
 11 11  
 12 11  
 13 11  
 14 11  
 15 11  
 16 11  
 17 11  
 18 11  
 19 11  
 20 10  
 29 10  
 30 10  
 48 10  
 49 10  
 58 10  
 59 10  
 77 10  
 78 10  
 87 10  
 88 10  
 106 10  
 107 10  
 115 10  
 116 10  
 130 10  
 131 10  
 137 10  
 138 10  
 148 10  
 150 10

1	32	3	1	30	21	2	20	31	1
10	61	32	30	59	50	31	49	60	1
19	90	61	59	88	79	60	78	89	1
28	118	90	88	116	108	89	107	117	11
32	98	96	124	100	97	111	112	99	11
33	100	124	126	102	112	125	113	101	11
36	140	118	116	138	132	117	131	139	1
39	124	122	144	126	123	134	135	125	1
40	126	144	146	128	135	145	136	127	1
42	144	142	140	146	143	141	149	145	1
43	146	140	138	148	149	139	150	147	1



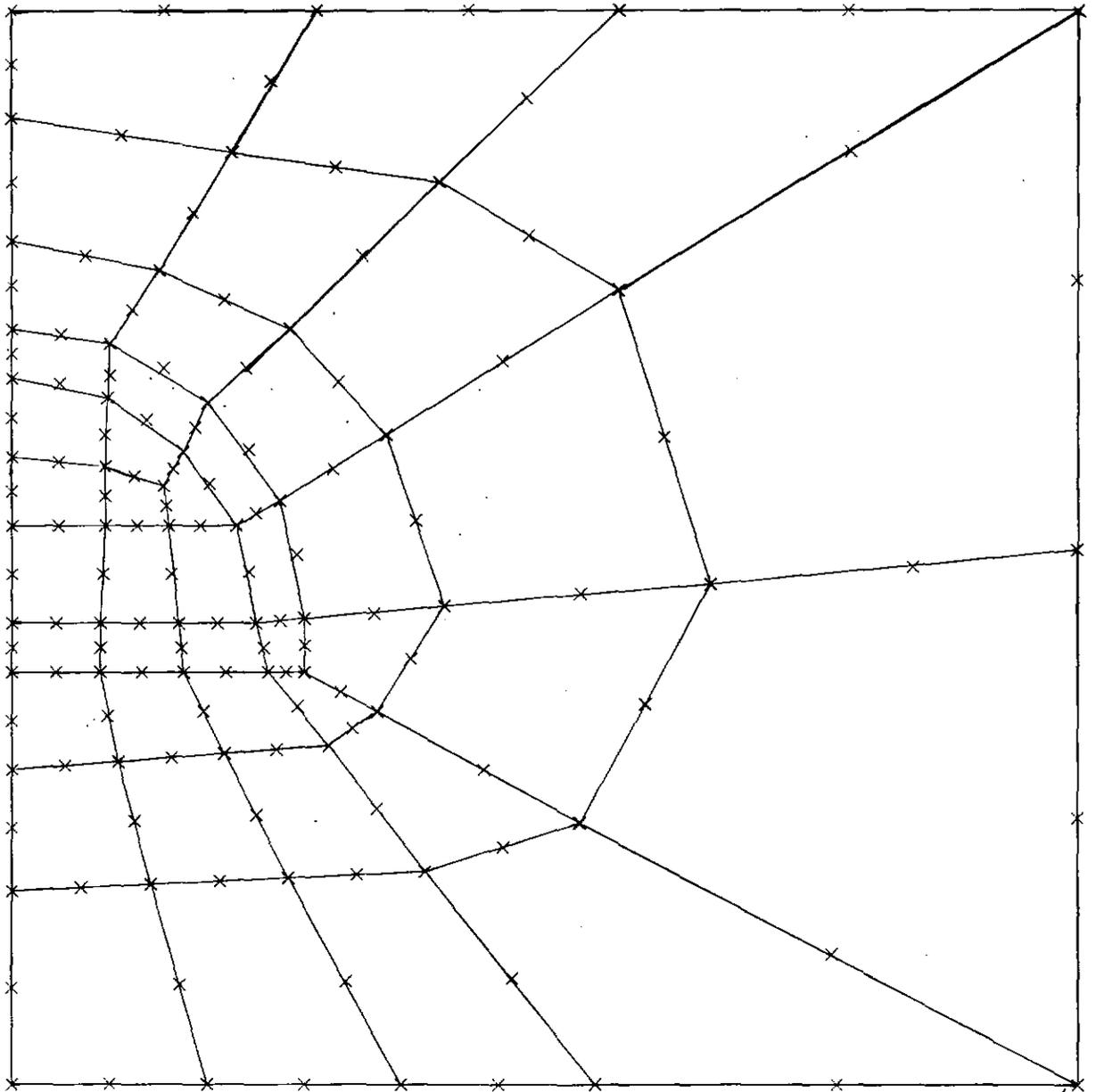


Fig. A-III-2

\*\*\*\*\*

MODELO PARA UTILIZACAO DO PROGRAMA

NUMERO DE PONTOS NODAIS-----150  
 NUMERO DE PONTOS NODAIS C/ RESTRICAO- 35  
 NUMERO DE ELEMENTOS----- 43  
 NUMERO DE SOLOS OU ROCHAS----- 1  
 NUMERO DE MATERIAIS DE SUPORTE----- 1  
 TIPO DA ANALISE----- 0  
 GERACAO AUTOM. P/ REDE CIRCULAR----- 0  
 TENSOES INICIAIS----- 2

ANALISE ELASTICA-LINEAR - PLANO DEFORMACAO

CARACTERISTICAS DOS SOLOS E ROCHAS

=====

TIPO---- ROCHA FRATURADA  
 NUMERO DO SOLO OU ROCHA----- 1  
 MODULO DE YOUNG----- .144000E+09  
 COEFICIENTE DE POISSON----- .200000E+00  
 PESO ESPECIFICO----- .150000E+03  
 COEF. DE EMPUXO LATERAL----- .200000E+00  
 COESAO----- 0.  
 ANGULO DE ATRITO INTERNO----- 0.

CARACTERISTICAS DOS MATERIAIS DE SUPORTE

=====

REVESTIMENTO DE CONCRETO

NUMERO DO MATERIAL----- 11  
 MODULO DE YOUNG----- .2880E+09  
 COEFICIENTE DE POISSON----- .1500E+00  
 PESO ESPECIFICO----- .1500E+03

COORDENADAS DOS PONTOS NODAIS

PONTO NODAL	ABCISSA	ORDENADA
1	0.000	88.000
2	12.500	88.000
3	25.000	88.000
4	37.500	88.000
5	50.000	88.000
6	69.000	88.000
7	88.000	88.000
8	88.000	66.000
9	88.000	44.000
10	88.000	22.000
11	88.000	0.000
12	68.000	0.000
13	48.000	0.000
14	40.000	0.000
15	32.000	0.000
16	24.000	0.000
17	16.000	0.000
18	8.000	0.000
19	0.000	0.000
20	0.000	83.600
21	21.300	82.300
22	42.600	81.000
23	69.000	76.600
24	72.800	42.600
25	67.400	10.800
26	41.000	8.800
27	27.333	8.533
28	13.667	8.267
29	0.000	8.000
30	0.000	79.200
31	9.000	77.800
32	18.000	76.400
33	26.600	75.200
34	35.200	74.000
35	42.600	69.600
36	50.000	65.200
37	53.800	53.200
38	57.600	41.200
39	52.200	31.400
40	46.800	21.600
41	40.400	19.600
42	34.000	17.600

CONDICOES DE APOIO

PONTO NODAL	APOIO	RECALQ.X	RECALQ.Y
1	10	0.000	0.000
7	10	0.000	0.000
8	10	0.000	0.000
9	10	0.000	0.000
10	10	0.000	0.000
11	11	0.000	0.000
12	11	0.000	0.000
13	11	0.000	0.000
14	11	0.000	0.000
15	11	0.000	0.000
16	11	0.000	0.000
17	11	0.000	0.000
18	11	0.000	0.000
19	11	0.000	0.000
20	10	0.000	0.000
29	10	0.000	0.000
30	10	0.000	0.000
48	10	0.000	0.000
49	10	0.000	0.000
58	10	0.000	0.000
59	10	0.000	0.000
77	10	0.000	0.000
78	10	0.000	0.000
87	10	0.000	0.000
88	10	0.000	0.000
106	10	0.000	0.000
107	10	0.000	0.000
115	10	0.000	0.000
116	10	0.000	0.000
130	10	0.000	0.000
131	10	0.000	0.000
137	10	0.000	0.000
138	10	0.000	0.000
148	10	0.000	0.000
150	10	0.000	0.000

INCIDENCIA DOS PONTOS NODAIS NOS ELEMENTOS

ELEMENTO NO.	NP1	NP2	NP3	NP4	NP5	NP6	NP7	NP8	MATERIAL	NO. DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO
1	32	3	1	30	21	2	20	31	1	3
2	34	5	3	32	22	4	21	33	1	3
3	36	7	5	34	23	6	22	35	1	3
4	38	9	7	36	24	8	23	37	1	3
5	40	11	9	38	25	10	24	39	1	3
6	42	13	11	40	26	12	25	41	1	3
7	44	15	13	42	27	14	26	43	1	3
8	46	17	15	44	28	16	27	45	1	3
9	48	19	17	46	29	18	28	47	1	3
10	61	32	30	59	50	31	49	60	1	3
11	63	34	32	61	51	33	50	62	1	3
12	65	36	34	63	52	35	51	64	1	3
13	67	38	36	65	53	37	52	66	1	3
14	69	40	38	67	54	39	53	68	1	3
15	71	42	40	69	55	41	54	70	1	3
16	73	44	42	71	56	43	55	72	1	3
17	75	46	44	73	57	45	56	74	1	3
18	77	48	46	75	58	47	57	76	1	3
19	90	61	59	88	79	60	78	89	1	3
20	92	63	61	90	80	62	79	91	1	3
21	94	65	63	92	81	64	80	93	1	3
22	96	67	65	94	82	66	81	95	1	3
23	98	69	67	96	83	68	82	97	1	3
24	100	71	69	98	84	70	83	99	1	3
25	102	73	71	100	85	72	84	101	1	3
26	104	75	73	102	86	74	85	103	1	3
27	106	77	75	104	87	76	86	105	1	3
28	118	90	88	116	108	89	107	117	11	3
29	120	92	90	118	109	91	108	119	11	3
30	122	94	92	120	110	93	109	121	11	3
31	124	96	94	122	111	95	110	123	11	3
32	98	96	124	100	97	111	112	99	11	3
33	100	124	126	102	112	125	113	101	11	3
34	102	126	128	104	113	127	114	103	11	3
35	104	128	130	106	114	129	115	105	11	3
36	140	118	116	138	132	117	131	139	1	3
37	142	120	118	140	133	119	132	141	1	3
38	144	122	120	142	134	121	133	143	1	3
39	124	122	144	126	123	134	135	125	1	3
40	126	144	146	128	135	145	136	127	1	3
41	128	146	148	130	136	147	137	129	1	3
42	144	142	140	146	143	141	149	145	1	3
43	146	140	138	148	149	139	150	147	1	3

=====  
 ETAPA NUMERO 1  
 =====

 ESCAVACAO  
 =====

NUMERO DE PONTOS NODAIS DA FRONTEIRA----- 7  
 NO. DE LADOS DA FRONTEIRA PERTENCENTES A 2 ELEMS.-- 3  
 NO. DE ELEMENTOS C/ APENAS 1 P.N. NA FRONTEIRA----- 0  
 NO. DE ELEMENTOS A SEREM RETIRADOS NESTA ETAPA----- 5  
 NO. DE P.N. INTERNOS A FRONTEIRA DE ESCAVACAO----- 11

## PONTOS NODAIS PERTENCENTES A FRONTEIRA

88 89 90 91 92 93 94

## NUMERO DOS ELEMENTOS A SEREM RETIRADOS

36 37 38 42 43

## NO. DOS PONTOS NODAIS INTERNOS A ESCAVACAO

131 132 133 138 139 140 141 142 143 149 150

## ELEMENTOS QUE TEM LADO NA FRONTEIRA

ELEMENTO	LADO
28	1
19	3
29	1
20	3
30	1
21	3

## FORÇAS DE ESCAVACAO DA FRONTEIRA NO. 1

P.N. 88	FX = -.257920E+03	FY = -.544647E+04
P.N. 89	FX = -.644640E+03	FY = -.205013E+05
P.N. 90	FX = -.697333E+03	FY = -.125731E+05
P.N. 91	FX = -.283696E+04	FY = -.225731E+05
P.N. 92	FX = -.216648E+04	FY = -.120381E+05
P.N. 93	FX = -.577120E+04	FY = -.199910E+05
P.N. 94	FX = -.141327E+04	FY = -.709917E+04

SOMFX = -.137878E+05      SOMFY = -.100222E+06

 NIVEL DE RIGIDEZ DOS MATERIAIS  
 =====

NUMERO DE ELEMENTOS COM RIGIDEZ AUMENTADA = 3

NUMERO DOS ELEMENTOS	TIPO DE MATERIAL
28	11
29	11
30	11

DESLOCAMENTOS E TENSOES DA ETAPA

---

PN	DESLOC	DESLOCV	SIGMAX	SIGMAY	TAIXY	SIGMAZ	SIGMA1	SIGMA3	ANG
1	0.	-.16028E-02	-.46821E+04	-.36053E+03	.37184E+03	-.10085E+04	-.47138E+04	-.32877E+03	-.488E+01
2	-.30814E-03	-.14235E-02	-.27886E+04	-.59213E+02	.21234E+03	-.54588E+03	-.28044E+04	-.74958E+02	-.424E+01
3	-.46724E-03	-.10406E-02	-.64593E+03	-.23129E+03	.45468E+02	-.17544E+03	-.65086E+03	-.22636E+03	-.618E+01
4	-.44183E-03	-.67096E-03	.81395E+03	.17096E+03	-.15954E+03	.19698E+03	.13355E+03	.85136E+03	.768E+02
5	-.33870E-03	-.40380E-03	.15932E+04	.22088E+03	-.15916E+03	.36281E+03	.20267E+03	.16114E+04	.835E+02
6	-.16712E-03	-.18551E-03	.12994E+04	-.15020E+03	-.24493E+02	.22985E+03	-.15061E+03	.12999E+04	.890E+02
7	0.	-.11737E-03	.12807E+04	-.11230E+03	-.60597E+02	.27859E+03	.10916E+03	.12838E+04	.870E+02
8	0.	-.96314E-04	-.39928E+03	-.33386E+04	-.21943E+02	-.61558E+03	-.33388E+04	-.39912E+03	.896E+02
9	0.	-.86918E-04	-.19099E+04	-.67745E+04	.89295E+01	-.14729E+04	-.67745E+04	-.19099E+04	-.899E+02
10	0.	-.63012E-04	-.25214E+04	-.10332E+05	-.42883E+00	-.21746E+04	-.10332E+05	-.25214E+04	.900E+02
20	0.	-.16286E-02	-.35749E+04	-.57294E+03	.29511E+03	-.80316E+03	-.36036E+04	-.54421E+03	-.556E+01
21	-.29085E-03	-.11733E-02	-.10382E+04	-.11628E+04	.98908E+03	-.40600E+03	-.20916E+04	-.10947E+03	-.468E+02
22	-.26665E-03	-.53648E-03	.50017E+03	-.11370E+04	.28309E+03	-.85359E+02	-.11845E+04	.54774E+03	-.805E+02
23	-.84877E-04	-.16577E-03	.36687E+03	-.16459E+04	.39838E+02	-.18742E+03	-.16467E+04	.36765E+03	-.889E+02
24	.51303E-04	-.11987E-03	-.18547E+04	-.69857E+04	.17787E+03	-.14957E+04	-.69919E+04	-.18485E+04	-.880E+02
25	.38284E-04	-.56158E-04	-.26934E+04	-.12390E+05	.25492E+03	-.25534E+04	-.12396E+05	-.26867E+04	-.885E+02
26	.44482E-04	-.88248E-04	-.27094E+04	-.13492E+05	.36389E+03	-.27651E+04	-.13504E+05	-.26971E+04	-.881E+02
27	.24937E-04	-.99482E-04	-.25678E+04	-.13825E+05	.18377E+03	-.28017E+04	-.13828E+05	-.25648E+04	-.891E+02
28	.26003E-05	-.88627E-04	-.26884E+04	-.13663E+05	-.57434E+02	-.27919E+04	-.13663E+05	-.26881E+04	.897E+02
29	0.	-.75389E-04	-.28043E+04	-.13470E+05	-.29346E+01	-.27748E+04	-.13470E+05	-.28043E+04	.900E+02
30	0.	-.16584E-02	-.25940E+04	-.85107E+03	.24552E+03	-.65621E+03	-.26279E+04	-.81715E+03	-.787E+01
31	-.12079E-03	-.15539E-02	-.19079E+04	-.10594E+04	.90693E+03	-.53226E+03	-.24849E+04	-.48241E+03	-.325E+02
32	-.18950E-03	-.12943E-02	-.11402E+04	-.21047E+04	.16703E+04	-.57939E+03	-.33610E+04	.11607E+03	-.531E+02
33	-.19580E-03	-.94009E-03	-.54681E+03	-.22428E+04	.11754E+04	-.48112E+03	-.28441E+04	.54550E+02	-.629E+02
34	-.16490E-03	-.70902E-03	-.28443E+03	-.26274E+04	.71176E+03	-.49837E+03	-.28267E+04	-.85158E+02	-.744E+02
35	-.91422E-04	-.51208E-03	-.55794E+03	-.32685E+04	.48714E+03	-.65488E+03	-.33534E+04	-.47305E+03	-.801E+02
36	-.34653E-04	-.36018E-03	-.70894E+03	-.37548E+04	.29712E+03	-.75595E+03	-.37835E+04	-.68022E+03	-.845E+02
37	.65351E-04	-.28284E-03	-.15853E+04	-.56857E+04	.35443E+03	-.12454E+04	-.57161E+04	-.15549E+04	-.851E+02
38	.94502E-04	-.21470E-03	-.19841E+04	-.75596E+04	.41472E+03	-.16279E+04	-.75903E+04	-.19535E+04	-.858E+02
39	.11481E-03	-.21744E-03	-.23564E+04	-.94633E+04	.51742E+03	-.20243E+04	-.95008E+04	-.23189E+04	.859E+02
40	.96035E-04	-.18655E-03	-.24533E+04	-.11187E+05	.53656E+03	-.23296E+04	-.11219E+05	-.24205E+04	-.865E+02
41	.90070E-04	-.20015E-03	-.23526E+04	-.11832E+05	.54703E+03	-.24266E+04	-.11864E+05	-.23211E+04	-.867E+02
42	.69539E-04	-.20379E-03	-.21939E+04	-.12416E+05	.45145E+03	-.24995E+04	-.12435E+05	-.21740E+04	-.875E+02
43	.53684E-04	-.21403E-03	-.21825E+04	-.12754E+05	.26368E+03	-.25634E+04	-.12761E+05	-.21760E+04	-.886E+02
44	.31997E-04	-.21262E-03	-.20762E+04	-.12844E+05	.64846E+02	-.25584E+04	-.12844E+05	-.20759E+04	-.897E+02
45	.13530E-04	-.19697E-03	-.22495E+04	-.12696E+05	-.13550E+03	-.25619E+04	-.12698E+05	-.22478E+04	.893E+02
46	.21840E-05	-.17334E-03	-.23850E+04	-.12471E+05	-.24313E+03	-.25423E+04	-.12476E+05	-.23791E+04	.886E+02
47	-.18880E-05	-.15459E-03	-.24883E+04	-.12226E+05	-.13060E+03	-.25125E+04	-.12228E+05	-.24865E+04	.892E+02
48	0.	-.14599E-03	-.26341E+04	-.12181E+05	-.13697E+02	-.25310E+04	-.12181E+05	-.26340E+04	.899E+02
49	0.	-.17044E-02	-.22011E+04	-.88548E+03	.16626E+03	-.53332E+03	-.22218E+04	-.86479E+03	-.709E+01
50	-.13083E-03	-.14076E-02	-.10927E+04	-.24345E+04	.18932E+04	-.60703E+03	-.37721E+04	-.24496E+03	-.548E+02
51	-.90798E-04	-.86948E-03	-.39693E+03	-.39981E+04	.11877E+04	-.75900E+03	-.43545E+04	-.40477E+02	-.733E+02
52	.34448E-04	-.51423E-03	-.11906E+04	-.51012E+04	.49309E+03	-.10862E+04	-.51624E+04	-.11294E+04	-.829E+02
53	.13095E-03	-.32164E-03	-.21230E+04	-.81213E+04	.70566E+03	-.17627E+04	-.82032E+04	-.20411E+04	-.834E+02
54	.11343E-03	-.28624E-03	-.21584E+04	-.11068E+05	.68736E+03	-.22746E+04	-.11121E+05	-.21057E+04	-.856E+02
55	.78911E-04	-.29099E-03	-.18719E+04	-.11991E+05	.53823E+03	-.23813E+04	-.12019E+05	-.18433E+04	-.870E+02
56	.30150E-04	-.28435E-03	-.18115E+04	-.12190E+05	-.15138E+03	-.24055E+04	-.12192E+05	-.18093E+04	.892E+02
57	-.30901E-06	-.22800E-03	-.22283E+04	-.11519E+05	-.37442E+03	-.23510E+04	-.11534E+05	-.22133E+04	.877E+02
58	0.	-.18453E-03	-.24459E+04	-.11226E+05	-.20121E+02	-.23524E+04	-.11226E+05	-.24459E+04	.899E+02
59	0.	-.17690E-02	-.18037E+04	-.62523E+03	.74988E+02	-.37298E+03	-.18084E+04	-.62047E+03	-.363E+01

203

203

=====

ETAPA NÚMERO 2

=====

ESCAVACAO

=====

NUMERO DE PONTOS NODAIS DA FROTEIRA----- 13  
 NO. DE LADOS DA FROTEIRA PERTENCENTES A 2 ELEMS.-- 6  
 NO. DE ELEMENTOS C/ APENAS 1 P.N. NA FROTEIRA----- 1  
 NO. DE ELEMENTOS A SEREM RETIRADOS NESTA ETAPA----- 3  
 NO. DE P.N. INTERNOS A FROTEIRA DE ESCAVACAO----- 20

PONTOS NODAIS PERTENCENTES A FROTEIRA

94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106

NUMERO DOS ELEMENTOS A SEREM RETIRADOS

39 40 41

NO. DOS PONTOS NODAIS INTERNOS A ESCAVACAO

131 132 133 138 139 140 141 142 143 149 150 134 135 136 137 144  
 145 146 147 148

ELEMENTOS QUE TEM LADO NA FROTEIRA

-----

ELEMENTO	LADO
31	1
22	3
32	2
23	3
32	3
24	3
33	3
25	3
34	3
26	3
35	3
27	3

NO. DOS ELEMS. QUE TEM APENAS 1 P.N. NA FROTEIRA

21

FORÇAS DE ESCAVACAO DA FROTEIRA NO. 2

POUNTO=94	FNCX= .141327E+04	FNCY= .709917E+04
P.N. 94	FX = -.101763E+05	FY = -.884512E+04
P.N. 95	FX = -.150940E+05	FY = -.119853E+04
P.N. 96	FX = -.364341E+04	FY = .801697E+04
P.N. 97	FX = -.312705E+04	FY = .430523E+04
P.N. 98	FX = -.408600E+03	FY = .552507E+04
P.N. 99	FX = -.575029E+02	FY = .250598E+05
P.N. 100	FX = .620520E+03	FY = .208063E+05
P.N. 101	FX = .283964E+04	FY = .521664E+05
P.N. 102	FX = .293067E+04	FY = .220975E+05
P.N. 103	FX = .308501E+04	FY = .425359E+05
P.N. 104	FX = .124799E+04	FY = .198616E+05
P.N. 105	FX = .121260E+04	FY = .019829E+05
P.N. 106	FX = -.158330E+04	FY = .991367E+04
	SOMFX = .221534E+05	SOMFY = .242628E+06

MUDANCA DE RIGIDEZ DOS MATERIAIS

=====

NUMERO DE ELEMENTOS COM RIGIDEZ AUMENTADA = 5

NUMERO DOS ELEMENTOS	Tipo DE MATERIAL
31	11
32	11
33	11
34	11
35	11

DESLOCAMENTOS E TENSÕES DA ETAPA

PN	DESLOCH	DESLOCV	SIGMAX	SIGMAY	TAUXY	SIGMAZ	SIGMA1	SIGMA3	ANG
1	0.	-96799E-03	-36803E+04	-30441F+03	35864E+03	-79695F+03	-37180E+04	-26673E+03	-600E+01
2	-25225E-03	-81583E-03	-19585E+04	45369E+03	21299F+03	-38263E+03	-19809F+04	67757F+02	-800E+01
3	-32831E-03	-50876F-03	-20031E+02	-19364E+02	19768F+02	-42734E+02	-19586E+03	-17809E+02	-836E+02
4	-27405E-03	-20751F-03	94665F+03	14689F+03	-17292E+03	21871F+03	11110E+03	98244E+03	783E+02
5	-17666E-03	-97412E-04	12162E+04	16160E+03	-13970E+03	27555E+03	14341F+03	12343F+04	926E+02
6	-73979F-04	-42071F-05	66403E+03	-13316E+03	-99522E-01	10617E+03	-13316E+03	66403F+03	800E+02
7	0.	12256F-04	55252F+03	98799F+02	-20263E+02	13026E+03	97846E+02	55342E+03	874E+02
8	0.	14707E-04	-57697E+03	-32290E+04	-27121E+02	-62920E+03	-32293E+04	-57670E+03	894E+02
9	0.	-24680E-05	-15494F+04	-64947E+04	22928E+02	13448E+04	-64949E+04	-15491E+04	-897E+02
10	0.	-12197E-04	-21418E+04	-99489E+04	37888E+02	20221E+04	-99491E+04	-21417E+04	-897E+02
20	0.	-98422E-03	-28231E+04	-56905E+03	29111F+03	-65204E+03	-28601E+04	-53206E+03	-724E+01
21	-20276E-03	-60795E-03	-49531F+03	-11533E+04	85070E+03	29552E+03	-17364F+04	87804E+02	-556E+02
22	-14975F-03	-16153E-03	47581E+03	-10475E+04	49156F+02	-72345E+02	-10491E+04	47739E+03	-882E+02
23	-33909E-04	33508F-05	-29674F+02	15894F+04	-10732E+03	-25541F+03	-15967F+04	-22323F+02	861E+02
24	29125E-04	-15876E-04	-16498E+04	-66691E+04	84929E+02	13914E+04	-66706E+04	-16483E+04	-890E+02
25	-69186E-05	-11712E-04	-21545E+04	-11703E+05	83313F+02	-23082E+04	-11703E+05	-21538E+04	-895E+02
26	-52541F-04	15794E-04	-17864E+04	-11505E+05	-34605F+03	-21831F+04	-11517E+05	-17741E+04	880E+02
27	-95950E-04	88426E-04	-16740F+04	-10241F+05	-92189E+03	-19065E+03	-10340E+05	-15760F+04	839E+02
28	-84203E-04	19531F-03	-20209F+04	-80829E+04	-89697E+03	-15424E+04	-82128E+04	-18910E+04	818E+02
29	0.	24244E-03	-22258F+04	-70437F+04	-32743E+02	-13739F+04	-70439F+04	-22255E+04	896E+02
30	0.	-10128F-02	-20518E+04	-87241F+03	23810E+02	53205E+03	-20981E+04	-82616F+02	-110E+02
31	-90775F-04	-92110E-03	-14233E+04	-11006E+04	83087F+03	44359E+03	-21084E+04	-41559E+03	-395E+02
32	-13513E-03	-70075F-03	-74292E+03	-21760E+04	14857E+04	-51418E+03	-31089F+04	18999E+03	-579E+02
33	-12104F-03	-45390E-03	-28688F+03	-23514F+04	89590E+03	-45086F+03	-26860E+04	47677F+02	-695E+02
34	-86987E-04	-26033F-03	-15368E+03	-26405E+04	32259E+03	47485E+03	-26817E+04	-11252E+03	-827E+02
35	-27371F-04	-13882E-03	-54378E+03	-32476E+04	78036F+02	-64788F+03	-32499F+04	-54153E+03	-883E+02
36	12534E-04	-66267E-04	-76737E+03	-35201E+04	-10502E+03	-72070E+03	-35241E+04	-76337E+03	878E+02
37	71935E-04	-46995E-04	-15774F+03	-53318E+04	28640E+02	-11730E+04	-53320E+04	-15772E+04	-896E+02
38	64719E-04	-41450E-04	-18219E+04	-70545E+04	32494E+03	-14945E+04	-70746F+04	-18018E+04	-865E+02
39	35617E-04	-43001E-04	-17919E+04	-88054E+04	35067E+03	-17799F+04	-88229F+04	-17744E+04	-871E+02
40	-20399E-04	-18929E-04	-15955E+04	-10356E+05	20857F+03	-19920F+04	-10361E+05	-15905F+04	-886E+02
41	-52922E-04	86657F-05	-14352F+04	-10727F+05	-95379E+02	-20221E+04	-10728E+05	-14342E+04	894E+02
42	-98079E-04	66243E-04	-11000E+04	-10469F+05	-55147E+03	-18914E+04	-10501F+05	-10677E+04	866E+02
43	-12554E-03	14278E-03	-13532E+04	-98031E+04	-10153E+04	-18073E+04	-99234E+04	-12330E+04	832E+02
44	-14055E-03	24721E-03	-13814E+04	-88011E+04	-13541F+04	-16109F+04	-90405E+04	-11420F+04	800E+02
45	-13766E-03	35514E-03	-17477F+04	-73119F+04	-12940E+04	-13847E+04	-76003E+04	-14504F+04	775E+02
46	-10491F-03	45202E-03	-21523E+04	-61834E+04	-11282E+04	-12383E+04	-64777F+04	-18581E+04	754E+02
47	-58862F-04	51222E-03	-21731E+04	-53212E+04	-54870F+03	-10685F+04	-54141F+04	-20802F+04	804E+02
48	0.	52403E-03	-24722E+04	-51380E+04	23234F+02	-10900F+04	-51382E+04	-24720E+04	-895E+02
49	0.	-10539E-02	-18425F+04	-93476F+03	16796E+03	-47145E+03	-18726E+04	-90468E+03	-102E+02
50	-99386F-04	-79078E-03	-77459F+03	-25555E+04	17548E+04	-56762E+03	-36328F+04	30271E+03	-585E+02
51	-41125E-04	-35240E-03	-21093E+05	-41223F+03	79792E+03	-74664F+03	-42788E+04	-54416F+02	-789E+02
52	69558E-04	-12048E-03	-11044F+04	-50504F+04	-92367E+02	-10588E+04	-50525E+04	-11022E+04	887E+02
53	95497E-04	-57253E-04	-20122E+04	-72952E+04	31625E+03	-15753E+04	-73140E+04	-19933E+04	-866E+02
54	-20038E-04	36756F-05	-12881F+04	-96145F+04	86999E+02	-18097E+04	-96154E+04	-12871E+04	-894E+02
55	-97682F-04	17100E-03	-83993E+03	-9491E+04	-80019E+03	-16760E+04	-96695F+04	-76659E+03	848E+02
56	-14155E-03	38752F-03	-12028F+04	-72418F+04	-17356E+04	-12941E+04	-77051E+04	-73951E+03	751E+02
57	-99046E-04	64445E-03	-19692E+04	-46434E+04	-12130F+04	-92413E+03	-51116E+04	-15010E+04	689E+02
58	0.	72568F-03	-21568F+04	-38254E+04	-29946E+02	-79444E+03	-38259E+04	-21563E+04	890E+02
59	0.	-11142F-02	-16513E+04	-69371E+03	76010F+02	-35620E+03	-16573E+04	-68771E+03	-451F+01

A P Ê N D I C E    I V

LISTAGEM DO PROGRAMA



```

DO 30 J=1,4
30 SIGTD(K,J)=0.
   UX(K)=0.
40 UY(K)=0.
C**** LEITURA OU CALCULO DE TENSOES INICIAIS *****
CALL TENIN(SK,ZT,A)
C**** DEFINE CARACTERISTICAS DOS NIVEIS DE ESCAVACAO*****
CALL NIVESC(FORCAX,FORCAY,ZT,A)
SINAL=1.
C**** LEITURA DAS OPERACOES DA ETAPA *****
50 READ (LR,150) JCODIG,JESCAV,JCCONC,JRIGID,JCDIST
   IF(JCODIG.EQ.0) WRITE (LW,160)
   IF(JCODIG.EQ.0) STOP
   DO 60 I=1,NUMNP
   UX(I)=0.
60 UY(I)=0.
   WRITE(LW,170) SINAL
   IF(JESCAV.EQ.0) GO TO 70
C**** IMPRIME CARACTERISTICAS DE ESCAVACAO DA ETAPA *****
CALL ESCAVA(FORCAX,FORCAY)
70 IF(JRIGID.EQ.0) GO TO 80
C**** MUDANCA DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS DE SUPORTE*****
CALL MUDRIG(A)
80 IF(JCCONC.EQ.0.AND.JCDIST.EQ.0) GO TO 90
C**** LE CARGAS CONCENTRADAS *****
CALL CARGAS
90 DO 110 J=1,NB
   IF(NFIX(J).EQ.11) GO TO 100
   IF(NFIX(J).EQ.10) UX(NBC(J))=0.
   IF(NFIX(J).EQ.01) UY(NBC(J))=0.
   GO TO 110
100 UX(NBC(J))=0.
   UY(NBC(J))=0.
110 CONTINUE
   DO 115 J=1,NUMNP
   R1(2*J-1)=UX(J)
115 R1(2*J)=UY(J)
   IF(NPCE.EQ.1) GO TO 120
C**** MONTA MATRIZ DE RIGIDEZ E INTRODIZ COND. DE CONTORNO *****
CALL FORMK(SK,A)
C**** CALCULO DE DESLOCAMENTOS *****
CALL DECOB(SK)
CALL RESOB(SK)
DO 117 N=1,NUMNP
   DESLOC(1,N)=DESLOC(1,N)+R1(2*N-1)
117 DESLOC(2,N)=DESLOC(2,N)+R1(2*N)
C**** CALCULO DE TENSOES E DEFORMACOES *****
CALL TENS(ZT,A)
GO TO 130
C*** ANALISE ELASTO-PLASTICA *****

```

```

120 CALL EPLAST(ZT,SK,A)
C**** SAIDA DE RESULTADOS *****
130 CALL SAIDA(ZT,A)
IF(JESCAV.EQ.0) GO TO 140
KFRON=IFRON+1
IF(KFRON.GT.NNIVEL) GO TO 140
C**** MODIFICA FORÇAS PARA OS NIVEIS SEGUINTE DE ESCAVACAO ***
CALL FMOD(FORCAX,FORCAY,KFRON,A)
140 SINAL=SINAL+1
GO TO 50
150 FORMAT(16I5)
160 FORMAT (///,30X,'FIM DO PROGRAMA')
170 FORMAT(////////,120('='),/,40X,'E T A P A N U M E R O',I3,
1/,120('='),/)
CALL EXIT
END
C*****
SUBROUTINE ENTRA
C*****
IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
INTEGER SINAL
COMMON/UM/NUMEL,NUMNP,NPCE,NINCRM,LEITU
COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),KL,IL
COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),R1(900),R2(900),
IMBAND
COMMON/SETE/COESAD(10),ATRITO(10)
COMMON/NOVE/YOUN2(16),POIS2(16),GAMA(16),COELAT(16),SINAL
COMMON/DOZE/TOLER,PERC(20),SM,IPI(25),IRESI,ITERA,IFORC
COMMON/VINTE/REC(130,2),NBC(130),NFIx(130),NB
DIMENSION HED(78)
DATA LR,LW/5,6/
WRITE(LW,20007)
WRITE (LW,1022)
C *** CARACTERISTICAS DO PROBLEMA A ANALISAR *****
READ (LR,1000) (HED(I),I=1,78)
WRITE (LW,1500) (HED(I),I=1,78)
READ(LR,1004) NUMNP,NUMEL,NUMSOL,NSUPOR,NPCE,IGERA,
* NB,LEITU
IF(NUMNP.EQ.0) STOP
WRITE(LW,1503)NUMNP,NB,NUMEL,NUMSOL,NSUPOR,NPCE,IGERA,LEITU
IF(NPCE.EQ.0) GO TO 10
WRITE(LW,67)
READ(LR,635) NINCRM,TOLER
WRITE(LW,539) TOLER,NINCRM
JINCR=NINCRM+1
PERC(1)=1.
READ(LR,634) ( PERC(I),I=2,JINCR)
WRITE(LW,540) ( PERC(I),I=2,JINCR)
GO TO 20
10 WRITE(LW,65)

```

```

C**** CARACTERISTICAS DOS SOLOS E ROCHAS *****
 20 IF(NUMSOL.EQ.0) GO TO 40
    WRITE (LW,68)
    DO 30 M=1,NUMSOL
      READ(LR,7000) MTYPE,(HED(I),I=1,20)
      READ(LR,7002) YOUN2(MTYPE),POIS2(MTYPE),GAMA(MTYPE),
* COFLAT(MTYPE),COESAO(MTYPE),ATRITO(MTYPE)
      WRITE(LW,4002) (HED(I),I=1,20),MTYPE,YOUN2(MTYPE),
* POIS2(MTYPE),GAMA(MTYPE),COELAT(MTYPE),COESAO(MTYPE),
* ATRITO(MTYPE)
 30 ATRITO(M)=ATRITO(M)*3.14159265/180.
 40 IF(NSUPOR.EQ.0) GO TO 55
C**** CARACTERISTICAS DOS MATERIAIS DE SUPORTE(REVEST,ESTRONCA)
    WRITE(LW,1710)
    DO 50 M=1,NSUPOR
      READ(LR,1000) (HED(IK),IK=1,78)
      READ(LR,1707) MTYPE,YOUN2(MTYPE), POIS2(MTYPE),GAMA(MTYPE)
      WRITE(LW,1500)(HED(KL),KL=1,78)
      WRITE(LW,1751) MTYPE,YOUN2(MTYPE), POIS2(MTYPE),GAMA(MTYPE)
 50 COELAT(MTYPE)=0.
C**** LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS DOS PONTOS NODAIS *****
 55 IF(IGERA.EQ.1) GO TO 120
    WRITE(LW,1900)
    WRITE (LW,2004)
    L=0
 60 READ (LR,1006) N,R(N),Z(N)
    NL=L+1
    ZX=N-L
    IF(L.EQ.0) GO TO 70
    DR=(R(N)-R(L))/ZX
    DZ=(Z(N)-Z(L))/ZX
 70 L=L+1
C*** GERACAO AUTOMATICA DE P.N. NAO LIDOS *****
    IF(N=L) 100,90,80
 80 R(L)=R(L-1)+DR
    Z(L)=Z(L-1)+DZ
    GO TO 70
 90 WRITE (LW,2002) (K,R(K),Z(K),K=NL,N)
    IF(NUMNP=N) 100,110,60
100 WRITE (LW,2009) N
    GO TO 110
C***** GERACAO AUTOMATICA DE PONTOS NODAIS P/ REDE CIRCULAR ***
120 CALL GERAUT
    WRITE(LW,1900)
    WRITE (LW,2004)
    WRITE(6,2002) (N,R(N),Z(N),N=1,NUMNP)
C***** LEITURA DAS CONDICoes DE APOIO *****
110 WRITE(LW,104)
    IF(IGERA.EQ.1) GO TO 127
    READ(LR,4)(NBC(I),NFIx(I),REC(I,1),REC(I,2),I=1,NB)

```

```

127 WRITE(LW,5)(NBC(I),NFIX(I),REC(I,1),REC(I,2),I=1,NB)
C**** LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS DOS ELEMENTOS *****
WRITE(LW,2000)
WRITE(LW,2001)
N=0
130 READ(LR,1003) M,(IX(M,I),I=1,10)
IF(M.NE.1) GO TO 135
IF(IX(1,10).EQ.0) IX(1,10)=3
GO TO 140
135 IF(IX(M,10).EQ.0) IX(M,10)=IX(N,10)
140 N=N+1
IF(M=N) 170,170,150
C**** GRAÇAO AUTOMATICA DOS ELEMENTOS NAO LIDOS *****
150 IX(N,1)=IX(N-1,1)+2
IX(N,2)=IX(N-1,2)+2
IX(N,3)=IX(N-1,3)+2
IX(N,4)=IX(N-1,4)+2
IX(N,5)=IX(N-1,5)+1
IX(N,6)=IX(N-1,6)+2
IX(N,7)=IX(N-1,7)+1
IX(N,8)=IX(N-1,8)+2
IX(N,9)=IX(N-1,9)
IX(N,10)=IX(N-1,10)
170 WRITE(LW,2003) N,(IX(N,I),I=1,10)
IF(M=N) 180,180,140
180 IF(NUMFL=N) 190,190,130
C**** DETERMINACAO DA LARGURA DA BANDA *****
190 J=0
DO 230 N=1,NUMEL
DO 230 I=1,8
DO 230 L=1,8
KK=IX(N,I)-IX(N,L)
IF(KK.LT.0) KK=-KK
IF(KK-J) 230,230,210
210 J=KK
230 CONTINUE
MBAND=2*J+2
WRITE(LW,10013) MBAND
4 FORMAT(2I5,2F10.0)
5 FORMAT(I8,7X,I5,8X,F10.3,8X,F10.3)
65 FORMAT(/3X'ANALISE ELASTICA-LINEAR - PLANO DEFORMACAO'//)
67 FORMAT(/3X'ANALISE ELASTO-PLASTICA - PLANO DEFORMACAO'
*,3X,42('-')//)
68 FORMAT(/,10X,'CARACTERISTICAS DOS SOLOS E ROCHAS',/
*10X,34('=')//)
104 FORMAT(/,8X,'CONDICAOES DE APOIO',8X,33('=')/
*/3X,'PONTO NODAL',4X,'APOIO',9X,'RECALQ.X',10X,'RECALQ.Y')
539 FORMAT(/,
1 45H TOLERANCIA DA NORMA DOS DESLOCAMENTOS----- F10.6/
2 45H NO. DE INCREM.P/ ANAL. ELAST-PLASTICA----- I3/)

```

```

540 FORMAT(//15X'PERCENTAGENS DA FORÇA TOTAL APLICADA'
  *//(1X,8(F10.4))//)
634 FORMAT(8F10.0)
635 FORMAT(15,F10.0)
1000 FORMAT (78A1)
1003 FORMAT (16I5)
1004 FORMAT(5I5,5X,3I5)
1006 FORMAT (15,5X,2F10.0)
1022 FORMAT (1H1,2X,119('*'),//)
1500 FORMAT (10X,78A1)
1503 FORMAT (///,
  1 40H  NUMERO DE PONTOS NODAIS----- I3 /
  2 40H  NUMERO DE PONTOS NODAIS C/ RESTRICAO- I3 /
  3 40H  NUMERO DE FLEMENTOS----- I3 /
  4 40H  NUMERO DE SOLOS OU ROCHAS----- I3 /
  5 40H  NUMERO DE MATERIAIS DE SUPORTE----- I3 /
  6 40H  TIPO DA ANALISE----- I3 /
  7 40H  GERACAO AUTOM. P/ REDE CIRCULAR----- I3 /
  8 40H  TENSOES INICIAIS----- I3 / )
1707 FORMAT(15,7F10.0)
1710 FORMAT(//7X,'CARACTERISTICAS DOS MATERIAIS DE SUPORTE',
  *//7X,40('=')//)
1751-FORMAT(/,-----
  1 3X,'NUMERO DO MATERIAL----- ',I3/
  2 3X,'MODULO DE YOUNG----- ',E12.4/
  3 3X,'COEFICIENTE DE POISSON----- ',E12.4/
  4 3X,'PESO ESPECIFICO----- ',E12.4/
  5///)
1900 FORMAT(// 4X,'COORDENADAS DOS PONTOS NODAIS'/5X,29('='))
2000 FORMAT(///17X,'INCIDENCIA DOS PONTOS NODAIS NOS ELEMENTOS'/
  *17X,42('='))
2001 FORMAT(////5X,'ELEMENTO NO.',2X,'NP1',3X,'NP2',3X,'NP3',3X,
  * 'NP4',3X,'NP5',3X,'NP6',3X,'NP7',3X,'NP8',4X,'MATERIAL',
  * 4X,'NO. DE PONTOS DE INTEGRACAO'/)
2002 FORMAT (I12,2F12.3)
2003 FORMAT(I12,4X,8I6,I8,I20)
2004 FORMAT(1H-,1X,'PONTO NODAL',4X,'ABCISSA',5X,'ORDENADA')
2009 FORMAT(/3X,'ERRO NO PONTO NODAL NO.',I3)
4002 FORMAT(/6X,'TIPO----',20A1/
  1 31H  NUMERO DO SOLO OU ROCHA----- I3 /
  3 31H  MODULO DE YOUNG----- E13.6 /
  4 31H  COEFICIENTE DE POISSON----- E13.6 /
  5 31H  PESO ESPECIFICO----- E13.6 /
  6 31H  COEF. DE EMPUXO LATERAL----- E13.6 /
  7 31H  COESAO----- E13.6 /
  8 31H  ANGULO DE ATRITO INTERNO----- E13.6 / )
7000 FORMAT(15,20A1)
7002 FORMAT (6F10.0,20A1)
10013 FORMAT(//10X,'LARGURA DE BANDA=',I3//)
20007 FORMAT(1H1,1X,120('*'),///9X,'C O O R D E N A C A O  D O',

```

```

1' S PROGRAMAS DE POS-GRADUACAO',
2' DE ENGENHARIA'///40x,'UNIVERSIDADE FEDERAL',
3' DO RIO DE JANEIRO'///25x,'PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL',
49x,'AREA DE MECANICA DOS SOLOS'//50x,'TESE DE MESTRADO',
5' - JUNHO/1977'//20x,'ANALISE ELASTO-PLASTICA DE TUNEIS ',
6'PELO METODO DOS ELEMENTOS FINITOS',//20x,
7'MARCIO DE SOUZA SOARES DE ALMEIDA'///1x,120('*')

```

```
RETURN
```

```
END
```

```
C*****
```

```
SUBROUTINE GERAUT
```

```
C*****
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
```

```
COMMON/UM/NUMEL,NUMNP,NPCE,NINCRM,LEITU
```

```
COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),R1(900),R2(900),
```

```
1MBAND
```

```
COMMON/VINTE/REC(130,2),NBC(130),NFIX(130),NB
```

```
DATA LR,LW/5,6/
```

```
C***** GERACAO AUTOMATICA DE PONTOS NODAIS P/ REDE CIRCULAR ***
```

```
N=0
```

```
READ(LR,5) NR
```

```
WRITE(LW,40) NR
```

```
5- FORMAT(I5)
```

```
DO 30 I=1,NR
```

```
READ(LR,10) NPR,RA,DANG
```

```
WRITE(LW,60) I,NPR,RA,DANG
```

```
10 FORMAT(I5,2F10.0)
```

```
ANG=0.
```

```
DO 30 J=1,NPR
```

```
N=N+1
```

```
IF(J.EQ.1) GO TO 15
```

```
ANG=ANG+DANG
```

```
15 ALF=ANG/57.29577951
```

```
R(N)=RA*DSIN(ALF)
```

```
Z(N)=RA*DCOS(ALF)
```

```
IF(J.EQ.1.OR.J.EQ.NPR) GO TO 17
```

```
GO TO 30
```

```
17 L=L+1
```

```
NBC(L)=N
```

```
REC(L,1)=0.
```

```
REC(L,2)=0.
```

```
IF(J.EQ.1) NFIX(L)=10
```

```
IF(J.EQ.NPR) NFIX(L)=01
```

```
30 CONTINUE
```

```
NB=L
```

```
40 FORMAT(//10X,'GERACAO AUTOMATICA DE PONTOS NODAIS PARA',
```

```
1' REDE CIRCULAR'/10X,53('=')//10X,'NUMERO DE RAIOS DA ',
```

```
2'REDE CIRCULAR--',I3/4x,'RAIO NO.',3x,'NO. DE PN',5x,'RAIO'
```

```
3,10x,'DANG')
```

```
60 FORMAT(2I10,2E15.5)
```

```

RETURN
END
C*****
SUBROUTINE TENIN(SK,ZT,A)
C*****
C***** CALCULO OU LEITURA DAS TENSOES INICIAIS *****
IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
INTEGER SINAL
COMMON/UM/NUMEL,NUMNP,NPCE,NINCRM,LFITU
COMMON/DOIS/SIGTD(450,4),DESLOC(2,450),ZG(4,450)
COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),N,IL
COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),B(900),R2(900),
1M BRAND
COMMON/NOVE/YOUN2(16),POIS2(16),GAMA(16),COELAT(16),SINAL
COMMON/DEZ/NNIVEL,JESCAV,JCCONC,JCDIST
COMMON/QUINZE/Z1(4,25),DEFOR(3,25),F(25),FO(25),DEFT(3,25)
COMMON/VINTE/REC(130,2),NBC(130),NFIX(130),NB
COMMON/TRINTA/NDF,NCN,NSZF
COMMON/VINTUM/MA
DIMENSION ZT(4,25),A(2,25),SK(900,70)
DATA LR,LW/5,6/
IF(LEITU.EQ.0) GO TO 50
GO TO (-350,550,610),LEITU-----
C*** CALCULO DE TENSOES INICIAIS ATRAVES DO MEF (LFITU=0) *****
50 IL=0
MA=0
DO 100 N=1,NUMEL
MTYPE=IX(N,9)
IF(MTYPE.EQ.10) GO TO 100
C***** CALCULA FORCAS DE MASSA *****
CALL MASSA(A)
100 CONTINUE
DO 200 N=1,NB
IF(NFIX(N).EQ.11) GO TO 150
IF(NFIX(N).EQ.10) UX(NBC(N))=0.
IF(NFIX(N).EQ.01) UY(NBC(N))=0.
GO TO 200
150 UX(NBC(N))=0.
UY(NBC(N))=0.
200 CONTINUE
DO 220 N=1,NUMNP
B(2*N-1)=UX(N)
220 B(2*N)=UY(N)
WRITE(LW,1206)(N,B(2*N-1),B(2*N),N=1,NUMNP)
1206 FORMAT (I5,2E15.5)
C**** MONTA MATRIZ DE RIGIDEZ E INTRODUZ COND. DE CONTORNO *****
CALL FORMK(SK,A)
C**** CALCULO DE DESLOCAMENTOS *****
CALL DECOB(SK)
CALL RESOB(SK)

```

```

WRITE(LW,1206)(N,B(2*N-1),B(2*N),N=1,NUMNP)
DO 300 N=1,NUMNP
DESLOC(1,N)=DESLOC(1,N)+B(2*N-1)
300 DESLOC(2,N)=DESLOC(2,N)+B(2*N)
C**** CALCULO DE TENSOES E DEFORMACOES *****
CALL TENS(ZT,A)
DO 340 N=1,NUMNP
B(2*N-1)=0.
B(2*N)=0.
DESLOC(1,N)=0.
DESLOC(2,N)=0.
UX(N)=0.
340 UY(N)=0.
GO TO 800
C**** LE TENSOES INICIAIS CTES. EM TODO O CONTINUO(LEITU=1) *****
350 READ(LR,634) P,Q,T
DO 380 K=1,NUMNP
SIGTD(K,1)=P
SIGTD(K,4)=P
SIGTD(K,2)=Q
380 SIGTD(K,3)=T
IF(NPCE.EQ.0) GO TO 800
DO 450 N=1,NUMEL
NPI2=IX(N,10)**2
DO 420 K=1,NPI2
ZT(1,K)=P
ZT(4,K)=P
ZT(2,K)=Q
420 ZT(3,K)=T
450 CONTINUE
GO TO 620
C****CALCULA TENSOES INICIAIS P/ TERRENO HOMOGENEO E HOR.(LEITU=2)
550 MTYPE=IX(1,9)
READ(LR,634) ZH
WRITE(LW,636)ZH
DO 600 K=1,NUMNP
SIGTD(K,2)=- (ZH-Z(K))*GAMA(MTYPE)
SIGTD(K,1)=SIGTD(K,2)*COELAT(MTYPE)
SIGTD(K,3)=0.
600 SIGTD(K,4)=SIGTD(K,1)
IF(NPCE) 800,800,620
C**** LE TENSOES INICIAIS EM TODOS OS PN DA REDE (LEITU=3) *****
610 READ(LR,634)((SIGTD(I,J),J=1,4),I=1,NUMNP)
IF(NPCE) 800,800,620
620 DO 750 N=1,NUMEL
CALL TINPI(A,ZT)
NPI2=IX(N,10)**2
DO 650 K=1,NPI2
DO 650 J=1,3
650 DEFT(J,K)=0.

```

```

750 WRITE(12,'N')ZT,DEFT,F
800 WRITE (LW,603)
    WRITE (LW,2013) (I,(SIGTD(I,J),J=1,4),I=1,NUMNP)
603 FORMAT(/ /32X,'T E N S O E S   I N I C I A I S'/32X,30('=')//
    *6X,'PN',13X,'SIGMAX',17X,'SIGMAY',17X,'TAUXY',17X,'SIGMAZ'/
    *)
634 FORMAT(8F10.5)
636 FORMAT(/ /8X,'DISTANCIA VERTICAL ENTRE A ORIGEM DOS EIXOS'/
    18X,' E O NIVEL DO TERRENO',25('-'),E12.4//)
2013 FORMAT (I8,4E22.6)
    RETURN
    END
C*****
    SUBROUTINE TENS(ZT,A)
C*****
C*** CALCULA TENSOES E DEFS. EM PN P/ ANALISE ELASTICA-LINAR ***
    IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
    INTEGER SINAL
    COMMON/UM/NUMEL,NUMNP,NPCE,NINCRM,LEITU
    COMMON/DOIS/SIGTD(450,4),DESLOC(2,450),ZG(4,450)
    COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),N,IL
    COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),B(900),R2(900),
    1MBRAND
    COMMON/NOVE/YOUNG(16),POIS2(16),GAMA(16),COELAT(16),SINAL
    COMMON/ONZE/C1,C2,C3,C4,C5,C6,ALF,CK,H,H0,IMAT,ITFP
    COMMON/TREZE/FIN(2,8),T1(2,2),T(2,2),FIX(2,8),XF(8,2),
    1W(25),FI(8)
    COMMON/QUINZE/Z1(4,25),DEFOR(3,25),F(25),FO(25),DEFT(3,25)
    COMMON/VINTUM/MA
    COMMON/MARIA/PL(16),TT(2,8),PP(6),LADO
    DIMENSION ZT(4,25),A(2,25)
    LW=6
C*****
    INICIALIZACAO *****
    IMAT=0
    IL=0
    MA=1
    DO 42 I=1,NUMNP
    IU(I)=0
    DO 42 L=1,4
    42 ZG(L,I)=0.
    DO 404 N=1,NUMEL
    MTYPE=IX(N,9)
    IF(MTYPE.EQ.10) GO TO 404
C**** COORDENADAS E DESLOCAMENTOS DO ELEM. *****
    DO 74 I=1,8
    J=IX(N,I)
    XE(I,1)=R(J)
    XE(I,2)=Z(J)
    TT(1,I)=DESLOC(1,J)
    74 TT(2,I)=DESLOC(2,J)

```

```

C***** CALCULO DAS COORDENADAS DOS PN DO ELEMENTO *****
  CALL COPON(A)
  IF(IMAT.EQ.0) GO TO 75
  IF(IX(N,9).EQ.IX(IMAT,9)) GO TO 77
C***** COEFICS. DA MATRIZ DE FLATICIDADE DEF. PLANA *****
  75 C0=(1.+POIS2(MTYPE))* (1.-2*POIS2(MTYPE))
  C1=YOUN2(MTYPE)* (1.-POIS2(MTYPE))/C0
  C2=YOUN2(MTYPE)/(2.* (1.+POIS2(MTYPE)))
  C3=YOUN2(MTYPE)*POIS2(MTYPE)/C0
  IMAT=N
  77 NPI2=8
  DO 87 I=1,NPI2
  DO 87 J=1,3
  87 DEFOR(J,I)=0.
  DO 200 K=1,NPI2
C***** CALCULO DA MATRIZ QUE RELACIONA DESL. A DEFORM. *****
  CALL FUNIN(DET,K,A)
C***** CALCULA DEFORMACOES *****
  DO 88 I=1,8
  DEFOR(1,K)=DEFOR(1,K)+FIX(1,I)*TT(1,I)
  DEFOR(2,K)=DEFOR(2,K)+FIX(2,I)*TT(2,I)
  88 DEFOR(3,K)=DEFOR(3,K)+FIX(2,I)*TT(1,I)+FIX(1,I)*TT(2,I)
C***** CALCULA TENSOES *****
  Z1(1,K)=C1*DEFOR(1,K)+C3*DEFOR(2,K)
  Z1(2,K)=C3*DEFOR(1,K)+C1*DEFOR(2,K)
  Z1(3,K)=C2*DEFOR(3,K)
  Z1(4,K)=POIS2(MTYPE)*(Z1(1,K)+Z1(2,K))
  IF(SINAL.NE.0) GO TO 200
C***** CALCULA TENSOES INICIAIS *****
  90 Z1(1,K)=Z1(2,K)*COELAT(MTYPE)
  Z1(3,K)=0.
  Z1(4,K)=Z1(1,K)
  92 IF(NPCE.EQ.0) GO TO 200
  DO 94 J=1,3
  94 DEFT(J,K)=0.
  DO 96 J=1,4
  96 ZT(J,K)=Z1(J,K)
  200 CONTINUE
  IF(NPCE.EQ.0) GO TO 220
  CALL TINPI(A,ZT)
  210 WRITE(12,N)ZT,DEFT,F
C***** CALCULO DE TENSOES INICIAIS NOS P.N. *****
  220 DO 405 J=1,8
  I=IX(N,J)
  IU(I)=IU(I)+1
  DO 405 K=1,4
  ZG(K,I)=ZG(K,I)+Z1(K,J)
  405 CONTINUE
  404 CONTINUE
  DO 408 I=1,NUMNP

```

```

      IF(IU(I).EQ.0) IU(I)=1
      DO 408 K=1,4
      ZG(K,I)=ZG(K,I)/IU(I)
      IF(SINAL.EQ.0) SIGTD(I,K)=ZG(K,I)
      IF(SINAL.NE.0) ZG(K,I)=ZG(K,I)+SIGTD(I,K)
408  CONTINUE
      RETURN
      END
C*****
      SUBROUTINE FORMK(SK,A)
C*****
C***** MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ EM BANDA *****
      IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
      INTEGER SINAL
      COMMON/UM/NUMEL,NUMNP,NPCE,NINCRM,LEITU
      COMMON/TRES/NPOINT(8),NPONTO(30,8),NJUSTB(8),NJUSTA(8),
      * JUSTB(30,8,2),LSIDF(30,8,2),NPRET,IFRON
      COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),N,IL
      COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),R1(900),R2(900),
      1MBAND
      COMMON/NOVE/YOUN2(16),POIS2(16),GAMA(16),COELAT(16),SINAL
      COMMON/DEZ/NNIVEL,JESCAV,JCCONC,JCDIST
      COMMON/ONZE/C1,C2,C3,C4,C5,C6,ALF,CK,H,H0,IMAT,ITEP
      COMMON/CATOZE/S(16,16)
      COMMON/VINTE/REC(130,2),NBC(130),NFIX(130),NB
      COMMON/TRINTA/NDF,NCN,NSZF
      DIMENSION A(2,25),SK(900,70)
      LW=6
      ITEP=0
C***** INICIALIZACAO *****
      DO 300 N=1,NSZF
      DO 300 M=1,MBAND
      300 SK(N,M)=0.
      IL=0
      KFRON=IFRON+1
C***** ARMAZENAMENTO DE S EM SK *****
      DO 320 N=1,NUMEL
      CALL ISOPA(A)
      IF(SINAL.EQ.0.OR.JESCAV.EQ.0) GO TO 165
      IF(KFRON.GT.NNIVEL) GO TO 165
      DO 600 NFRON=KFRON,NNIVEL
      JUST=NJUSTB(NFRON)+NJUSTA(NFRON)
      DO 600 JB=1,JUST
      IF(N.NE.JUSTB(JB,NFRON,2)) GO TO 600
      JA=JUSTB(JB,NFRON,2)
      WRITE(11,'JA)S
      600 CONTINUE
      165 CONTINUE
      DO 320 JJ=1,NCN
      NROWB=(IX(N,JJ)-1)*NDF

```

```

DO 320 J=1,NDF
NROWB=NROWB+1
I=(JJ-1)*NDF+J
DO 320 KK=1,NCN
NCOLB=(IX(N,KK)-1)*NDF
DO 320 K=1,NDF
L=(KK-1)*NDF+K
NCOL=NCOLB+K+1-NROWB
IF(NCOL)320,320,310
310 SK(NROWB,NCOL)=SK(NROWB,NCOL)+S(I,L)
320 CONTINUE
C*****      INTRODUCAO DAS CONDICAOES DE FRONTEIRA      *****
IF( SINAL.EQ.0.OR.JESCAV.EQ.0) NP=NB
IF( SINAL.EQ.0.OR.JFSCAV.EQ.0) GO TO 340
NP=NB+NPRET
340 DO 500 N=1,NP
NX=10**(NDF-1)
I=NBC(N)
NROWB=(I-1)*NDF
NRES=NFIX(N)
DO 500 M=1,NDF
NROWB=NROWB+1
-----ICON=NRES/NX-----
IF(ICON)450,450,420
420 SK(NROWB,1)=1.
DO 430 J=2,MBAND
SK(NROWB,J)=0.
NR=NROWB+1-J
IF(NR)430,430,425
425 IF(REC(N,M))921,922,921
921 R1(NR)=R1(NR)-SK(NR,J)*REC(N,M)
922 SK(NR,J)=0.
430 CONTINUE
NRES=NRES-NX*ICON
450 NX=NX/10
500 CONTINUE
RETURN
END
C*****
SUBROUTINE DECOB(RE)
C*****
C**** SUBROTINA DECOMPOSITORA DA MATRIZ FAIXA TRIANGULAR SUPERIOR
C**** QUE MULTIPLICADA PELA SUA TRANSPOSTA FORNACE A PRIMEIRA
IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),Q(900),V(900),LB
COMMON/TRINTA/NDF,NCN,LL
DIMENSION RE(900,70)
DO 100 I=1,LL
IP=LL-I+1
IF(LB-IP)101,102,102

```

```

101 IP=LB
102 DO 100 J=1,IP
      IQ=LB-J
      IF(I-1-IQ)104,105,105
104 IQ=I-1
105 SUM=RE(I,J)
      IF(IQ-1)106,107,107
107 DO 108 K=1,IQ
      IA=I-K
      JA=J+K
108 SUM=SUM-RE(IA,K+1)*RE(IA,JA)
106 IF(J-1)109,110,109
109 RE(I,J)=SUM*TFMP
      GO TO 100
110 IF(SUM)111,111,112
111 WRITE(6,113)I,J,SUM
113 FORMAT(/,5X,'A T E N C A O - SISTEMA DE EQUACOES NAO PODE'
1, ' SER RESOLVIDO DEVIDO A ERRO DE DADOS'/19X,'SUM=',F10.4,
2'LINHA I=',I3,'COLUNA J=',I3/15X,'P A R E')
      STOP
112 IF(SUM-0.001)114,115,115
114 WRITE(6,116)SUM,I,J
116 FORMAT(/,5X,'SUM=',F8.5,' ***O PEQUENO VALOR DESTA VARI'
*, ' AVEL PODE TER INTRODUZIDO ERRO NA RESOLUCAO DO SISTEMA*'
*/10X,'LINHA I=',I3,5X,'COLUNA J=',I3,5X,'RE(I,J)=',F20.10)
115 TEMP=1./DSQRT(SUM)
      RE(I,J)=TEMP
100 CONTINUE
      RETURN
      END
C*****
      SUBROUTINE RESOB (RE)
C*****
      IMPLICIT REAL*8(A-G,0-Z)
      COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),Q(900),V(900),LB
      COMMON/TRINTA/NDF,NCN,LL
      DIMENSION RE(900,70)
      DO 120 I=1,LL
      J=I-LB+1
      IF(I+1-LB)121,121,122
121 J=1
122 SUM=Q(I)
      II=I-1
      IF(J-II)124,124,120
124 DO 125 K=J,II
      KA=I-K+1
125 SUM=SUM-RE(K,KA)*V(K)
120 V(I)=SUM*RE(I,1)
      DO 130 IA=1,LL
      I=LL-IA+1

```

```

      J=I+LB-1
      IF(J-LL)128,128,127
127  J=LL
128  SUM=V(I)
      II=I+1
      IF(II-J)129,129,130
129  DO 131 K=II,J
      KA=K-I+1
131  SUM=SUM-RE(I,KA)*V(K)
130  V(I)=SUM*RE(I,1)
      DO 140 N=1,LL
      Q(N)=V(N)
140  V(N)=0.
      RETURN
      END

```

```

C*****
      SUBROUTINE ISOPA(A)

```

```

C*****
C***** CALCULA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO *****

```

```

      IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
      INTEGER SINAL
      COMMON/UM/NUMEL,NUMNP,NPCE,NINCRM,LEITU
      COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),KL,IL
      COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),R1(900),R2(900),
1MBAND
      COMMON/NOVE/YOUN2(16),POIS2(16),GAMA(16),COELAT(16),SINAL
      COMMON/DOZE/TOLER,PERC(20),SM,IPI(25),IRESI,ITERA,IFORC
      COMMON/TREZE/FIN(2,8),T1(2,2),T(2,2),FIX(2,8),XE(8,2),
1W(25),FI(8)
      COMMON/CAOZE/S(16,16)
      COMMON/QUINZE/ZI(4,25),DEFOR(3,25),F(25),FO(25),DEFT(3,25)
      COMMON/VINTUM/MA
      COMMON/QUA/C11(25),C22(25),C33(25),C12(25),C13(25),C23(25)
      DIMENSION A(2,25),ZT(4,25),ZD(4,25)
      LW=6

```

```

C***** INICIALIZA MATRIZ DE RIGIDEZ DO FLEMENTO *****

```

```

      DO 12 I=1,16
      DO 12 J=1,16
12  S(I,J)=0.
      MTYPE=IX(KL,9)
      IF(MTYPE.EQ.10) RFTURN
      IF(IL.EQ.0) GO TO 16
      IF(IX(KL,10).EQ.IX(IL,10)) GO TO 19

```

```

C***** CALCULO DAS COORDENADAS DOS PI DO ELEMENTO *****

```

```

16  MA=0
      CALL INTEG(A)
      IL=KL
19  NPIP=IX(KL,10)**2
      DO 21 I=1,8
      J=IX(KL,I)

```

```

      XE(I,1)=R(J)
21  XE(I,2)=Z(J)
      C0=(1.+POIS2(MTYPE))*(1.-2*POIS2(MTYPE))
      D11=YOUN2(MTYPE)*(1.-POIS2(MTYPE))/C0
      D12=YOUN2(MTYPE)*POIS2(MTYPE)/C0
      D33=YOUN2(MTYPE)/(2.*(1.+POIS2(MTYPE)))
24  DO 27 K=1,NPI2
C*****  CALCULO DA MATRIZ QUE RELACIONA DESL. A DEFORM.  *****
      CALL FUNIN(DET,K,A)
      DET=DET*w(K)
C***** COEFICS. DA MATRIZ DE ELATICIDADE DEF. PLANA *****
      C11(K)=D11
      C22(K)=C11(K)
      C33(K)=D33
      C12(K)=D12
      C13(K)=0.
      C23(K)=0.
C**** COEFICIENTES DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO *****
25  DO 26 I=1,15,2
      DO 26 J=1,15,2
      II=I/2+1
      JJ=J/2+1
-----S(I,J)=S(I,J)+(C11(K)*FIX(1,II)*FIX(1,JJ)+C13(K)*FIX(2,II)*
*FIX(1,JJ)+C13(K)*FIX(1,II)*FIX(2,JJ)+C33(K)*FIX(2,II)
**FIX(2,JJ))*DET
      S(I+1,J)=S(I+1,J)+(C12(K)*FIX(2,II)*FIX(1,JJ)+C13(K)*
*FIX(1,II)*FIX(1,JJ)+C23(K)*FIX(2,II)*FIX(2,JJ)+C33(K)*
*FIX(1,II)*FIX(2,JJ))*DET
      S(I,J+1)=S(I,J+1)+(C12(K)*FIX(1,II)*FIX(2,JJ)+C23(K)*
*FIX(2,II)*FIX(2,JJ)+C13(K)*FIX(1,II)*FIX(1,JJ)+C33(K)*
*FIX(2,II)*FIX(1,JJ))*DET
26  S(I+1,J+1)=S(I+1,J+1)+(C22(K)*FIX(2,II)*FIX(2,JJ)+C23(K)*
*FIX(1,II)*FIX(2,JJ)+C23(K)*FIX(2,II)*FIX(1,JJ)+C33(K)*
*FIX(1,II)*FIX(1,JJ))*DET
27  CONTINUE
      RETURN
      END
C*****
SUBROUTINE NIVESC(FORCAX,FORCAY,ZT,A)
C*****
C***** CARACTERISTICAS DOS NIVEIS DAS ESCAVACOFS *****
      IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
      COMMON/UM/NUMEL,NUMNP,NPCF,NINCRM,LEITU
      COMMON/TRES/NPOINT(8),NPONTO(30,8),NJUSTB(8),NJUSTA(8),
* JUSTB(30,8,2),LSIDE(30,8,2),NPRET,IFRON
      COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),KL,IL
      COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),R1(900),R2(900),
1MBRAND
      COMMON/OITO/FEQ(6,2),FNCX(40,7),FNCY(40,7),NPC,NPSI,KP,KV
      COMMON/DEZ/NNIVEL,JESCAV,JCCONC,JCDIST

```

```

COMMON/DOZE/TOLER,PERC(20),SM,IPI(25),IRESI,ITERA,IFORC
COMMON/QUINZE/Z1(4,25),DEFOR(3,25),F(25),FO(25),DFFT(3,25)
COMMON/VINTUM/MA
COMMON/MARIA/PL(16),V(16),PP(6),LADO
DIMENSION FORCAX(50,8),FORCAY(50,8),ZT(4,25),A(2,25)
DATA LR,LW/5,6/
IFRON=0
RFAD(LR,1003)NNIVEL
IF(NNIVEL.EQ.0) WRITE(LW,8300)
IF(NNIVEL.EQ.0) RETURN
WRITE(LW,8200)NNIVEL
MA=0
IL=0
DO 6000 IFRON=1,NNIVEL
WRITE(LW,8360) IFRON
READ(LR,1003) NPOINT(IFRON),NJUSTB(IFRON),NJUSTA(IFRON)
NPOIN=NPOINT(IFRON)
JUST=NJUSTB(IFRON)
JUSTA=NJUSTA(IFRON)
READ (LR,1003) (NPONTO(I,IFRON),I=1,NPOIN)
IF(IFRON.EQ.NNIVEL) GO TO 2000
DO 1000 I=1,NPOIN
-----FNCX(I,IFRON)=0.
1000 FNCY(I,IFRON)=0.
2000 DO 3000 KP=1,JUST
DO 3000 KV=1,2
READ(LR,8025)JUSTB(KP,IFRON,KV),LSIDE(KP,IFRON,KV),NPC,NPSI
KL=JUSTB(KP,IFRON,KV)
LADO=LSIDE(KP,IFRON,KV)
C**** CALCULA FORCAS DE ESCAVACAO *****
IF(NPCE.EQ.1) READ(12,KL)ZT,DEFT,F
3000 CALL EQLOAD(ZT,A)
IF(JUSTA.EQ.0) GO TO 4000
JUSTO=JUST+JUSTA
JUSTF=JUST+1
READ(LR,8031) (JUSTB(I,IFRON,2),I=JUSTF,JUSTO)
4000 CONTINUE
SOMFX=0.
SOMFY=0.
DO 5000 IJK=1,NPOIN
KJI=NPONTO(IJK,IFRON)
FORCAX(IJK,IFRON)=0.
FORCAY(IJK,IFRON)=0.
FORCAX(IJK,IFRON)=UX(KJI)
FORCAY(IJK,IFRON)=UY(KJI)
SOMFY=SOMFY+FORCAY(IJK,IFRON)
SOMFX=SOMFX+FORCAX(IJK,IFRON)
WRITE (LW,60000) KJI,FORCAX(IJK,IFRON),FORCAY(IJK,IFRON)
UX(KJI)=0.
5000 UY(KJI)=0.

```

```

        WRITE(LW,8040)SOMFX,SOMFY
6000  CONTINUE
        IFRON=0
1003  FORMAT(16I5)
8025  FORMAT(4I5)
8031  FORMAT(2I5)
8040  FORMAT(/14X,'SOMFX=',F13.6,5X,'SOMFY=',E13.6/)
8200  FORMAT(///15X,'NO. DE NIVEIS DE ESCAVACAO =',I2,/,15X,
        130('='),/)
8300  FORMAT(/15X,'PARA ESTA ANALISE NAO EXISTE ESCAVACAO'/15X,
        138('-')///)
8360  FORMAT(//10X,'NIVEL DE ESCAVACAO NO.:',I3,/,10X,25('-')/)
60000 FORMAT(5X,'N=',I3,5X,'FORCAX =',E13.6,5X,'FORCAY =',E13.6)
        RETURN
        END
C*****
        SUBROUTINE ESCAVA(FORCAX,FORCAY)
C*****
C***** LE E IMPRIME CARACTERISTICAS DO NIVEL DE ESCAVACAO *****
        IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
        COMMON/TRES/NPOINT(8),NPONTO(30,8),NJUSTB(8),NJUSTA(8),
        * JUSTB(30,8,2),LSIDE(30,8,2),NPRET,IFRON
        COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),KL,IL
        COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),B(900),R2(900),
1MBAND
        COMMON/OITO/FEQ(6,2),FNCX(40,7),FNCY(40,7),NPC,NPSI,KP,KV
        COMMON/DEZ/NNIVEL,JESCAV,JCCONC,JCDIST
        COMMON/VINTE/REC(130,2),NBC(130),NFIx(130),NB
        DIMENSION FORCAX(50,8),FORCAY(50,8),NELRET(30)
        DATA LR,LW/5,6/
        IFRON=IFRON+1
        WRITE(LW,8009)
        NPOIN=NPPOINT(IFRON)
        JUST=NJUSTB(IFRON)
        JUSTA=NJUSTA(IFRON)
        READ(LR,1003) NRETI,NPRET
        WRITE(LW,8003)NPOINT(IFRON),NJUSTB(IFRON),NJUSTA(IFRON),
        * NRETI,NPRET
        WRITE(LW,8006)
        WRITE(LW,1003) (NPONTO(I,IFRON),I=1,NPOIN)
        IF(NRETI.EQ.0) GO TO 1100
        WRITE(LW,8004)
        READ(LR,1003) (NELRET(I),I=1,NRETI)
        WRITE(LW,1003) (NELRET(I),I=1,NRETI)
        DO 1000 KK=1,NRETI
        KL=NELRET(KK)
1000  IX(KL,9)=10
1100  IF(NPRET.EQ.0) GO TO 1800
        L=NB+1
        J=NB+NPRET

```

```

READ(LR,1003) (NBC(I),I=L,J)
WRITE(LW,8005)
WRITE(LW,1003) (NBC(I),I=L,J)
DO 1500 I=1,NPRET
  J=NB+I
1500 NFIX(J)=11
1800 WRITE(LW,8030)
  DO 2000 I=1,JUST
2000 WRITE(LW,8026)(JUSTB(I,IFRON,M),LSIDE(I,IFRON,M),M=1,2)
  IF(JUSTA.EQ.0) GO TO 2500
  WRITE(LW,8105)
  JUSTO=JUST+JUSTA
  JUSTE=JUST+1
  WRITE(LW,8031) (JUSTB(I,IFRON,2),I=JUSTE,JUSTO)
C***** DEFINE FORCAS DO NIVEL DE ESCAVACAO *****
2500 WRITE(LW,60001) IFRON
  SOMFX=0.
  SOMFY=0.
  DO 4500 I=1,NPOIN
    J=NPONTO(I,IFRON)
    UX(J)=-FORCAX(I,IFRON)
    UY(J)=-FORCAY(I,IFRON)
    IF(IFRON.EQ.1) GO TO 4000
    NPO=NPPOINT(IFRON-1)
    DO 3000 M=1,NPO
      L=NPONTO(M,IFRON-1)
      IF(L.NE.J) GO TO 3000
      UX(J)=UX(J)-FNCX(M,IFRON-1)
      UY(J)=UY(J)-FNCY(M,IFRON-1)
      WRITE(LW,5000) J,FNCX(M,IFRON-1),FNCY(M,IFRON-1)
      FNCX(M,IFRON-1)=0.
      FNCY(M,IFRON-1)=0.
3000 CONTINUE
    IF(IFRON.EQ.2) GO TO 4000
    NPI=NPPOINT(IFRON-2)
    DO 3500 K=1,NPI
      N=NPONTO(K,IFRON-2)
      IF(N.NE.J) GO TO 3500
      UX(J)=UX(J)-FNCX(K,IFRON-2)
      UY(J)=UY(J)-FNCY(K,IFRON-2)
      WRITE(LW,5000) J,FNCX(K,IFRON-2),FNCY(K,IFRON-2)
      FNCX(K,IFRON-2)=0.
      FNCY(K,IFRON-2)=0.
3500 CONTINUE
4000 SOMFX=SOMFX+UX(J)
  SOMFY=SOMFY+UY(J)
  WRITE(LW,60002) J,UX(J),UY(J)
4500 CONTINUE
  WRITE(LW,8040)SOMFX,SOMFY
1003 FORMAT(16I5)

```

```

5000 FORMAT(10X,'NPONTO=',I2,3X,'FNCX=',F13.6,4X,'FNXY=',F13.6)
8003 FORMAT (//
153H NUMERO DE PONTOS NODAIS DA FRONTEIRA----- I3/
253H NO. DE LADOS DA FRONTEIRA PERTENCENTES A 2 ELEMS.-- I3/
353H NO. DE ELEMENTOS C/ APENAS 1 P.N. NA FRONTEIRA----- I3/
453H NO. DE ELEMENTOS A SEREM RETIRADOS NESSA ETAPA----- I3/
553H NO. DE P.N. INTERNOS A FRONTEIRA DE ESCAVACAO----- I3
*//)
8004 FORMAT (//,10X,'NUMERO DOS ELEMENTOS A SEREM RETIRADOS',/)
8005 FORMAT(///10X,'NO. DOS PONTOS NODAIS INTERNOS A ESCAVACAO'/
*)
8006 FORMAT (///10X,'PONTOS NODAIS PERTENCENTES A FRONTEIRA'/)
8009 FORMAT(//,25X,'E S C A V A C A O',/,25X,17('='),//)
8026 FORMAT(19X,I5,5X,I5)
8030 FORMAT(///10X,'ELEMENTOS QUE TEM LADO NA FRONTEIRA'/10X,
*36('=')//19X,'ELEMENTO',4X,'LADO'/)
8031 FORMAT(2I5)
8040 FORMAT(/20X,'SOMFX=',E13.6,3X,'SOMFY=',E13.6/)
8105 FORMAT(///10X,'NO. DOS ELEMS. QUE TEM APENAS 1 P.N. NA FR'
*, 'ONTEIRA'//)
60001 FORMAT(///20X,'FORCAS DE ESCAVACAO DA FRONTEIRA NO.',I3/)
60002 FORMAT ( 10X,'P.N.',I3,5X,'FX =',E13.6,5X,'FY =',E13.6)
-----
RETURN
END
C*****
SUBROUTINE FMOD(FORCAX,FORCAY,KFRON,A)
C*****
C**** MODIFICA FORCAS A SEREM APLICADAS NOS NIVEIS SEGUINTEs ****
IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
COMMON/UM/NUMEL,NUMNP,NPCF,NINCRM,LEITU
COMMON/TRES/NPOINT(8),NPONTO(30,8),NJUSTB(8),NJUSTA(8),
* JUSTB(30,8,2),LSIDE(30,8,2),NPRET,IFRON
COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),KL,IL
COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),B(900),R2(900),
IMBAND
COMMON/DEZ/NNIVEL,JESCAV,JCCONC,JCDIST
COMMON/DOZE/TOLFR,PERC(20),SM,IPI(25),IRESI,ITERA,IFORC
COMMON/CATOZE/S(16,16)
COMMON/QUINZE/Z1(4,25),DEFOR(3,25),F(25),FO(25),DFFT(3,25)
COMMON/VINTUM/MA
COMMON/MARIA/DF(16),V(16),PP(6),LADO
DIMENSION FORCAX(50,8),FORCAY(50,8),A(2,25)
MA=0
LW=6
IL=0
DO 608 NFRON=KFRON,NNIVEL
NPOIN=NPOINT(NFRON)
JUST=NJUSTB(NFRON)+NJUSTA(NFRON)
DO 608 JB=1,JUST
JA=JUSTB(JB,NFRON,2)

```

```

601 READ(11,'JA')S
604 DO 605 I=1,8
    II=IX(JA,I)
    V(2*I-1)=B(2*II-1)
605 V(2*I)=B(2*II)
    DO 606 I=1,16
        DF(I)=0.
    DO 606 J=1,16
606 DF(I)=DF(I)+S(I,J)*V(J)
    DO 608 I=1,8
        II=IX(JA,I)
        DO 608 JO=1,NPOIN
            IF(II.NE.NPONTO(JO,NFRON)) GO TO 608
            FORCAX(JO,NFRON)=FORCAX(JO,NFRON)+DF(2*I-1)
            FORCAY(JO,NFRON)=FORCAY(JO,NFRON)+DF(2*I)
608 CONTINUE
    RETURN
    END

```

```

C*****
SUBROUTINE MASSA(A)

```

```

C*****
C***** CALCULA FORÇAS DE MASSA *****

```

```

-----IMPLICIT-REAL*8(A-G,O-Z)

```

```

INTEGER SINAL

```

```

COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),KL,IL

```

```

COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),R1(900),R2(900),

```

```

1M8AND

```

```

COMMON/NOVE/YOUN2(16),POIS2(16),GAMA(16),COELAT(16),SINAL

```

```

COMMON/TREZE/FIN(2,8),T1(2,2),T(2,2),FIX(2,8),XE(8,2),

```

```

1W(25),FI(8)

```

```

COMMON/MARIA/PL(16),V(16),PP(6),LADO

```

```

DIMENSION SNN(2,16),A(2,25)

```

```

LW=6

```

```

DO 10 I=1,16

```

```

10 PL(I)=0.

```

```

MTYPE=IX(KL,9)

```

```

IF(MTYPE.EQ.10) RETURN

```

```

IF(IL.EQ.0) GO TO 20

```

```

IF(IX(KL,10).EQ.IX(IL,10)) GO TO 30

```

```

C***** CALCULO DAS COORDENADAS DOS PI DO ELEMENTO *****

```

```

20 CALL INTEG(A)

```

```

IL=KL

```

```

30 NPI2=IX(KL,10)**2

```

```

DO 40 I=1,8

```

```

J=IX(KL,I)

```

```

XE(I,1)=R(J)

```

```

40 XE(I,2)=Z(J)

```

```

DO 80 K=1,NPI2

```

```

FI( 1)=(1.+A(1,K))*(1.-A(2,K))*(A(1,K)-A(2,K)-1.)/4.

```

```

FI( 2)=(1.+A(1,K))*(1.+A(2,K))*(A(1,K)+A(2,K)-1.)/4.

```

```

FI( 3)=(1.-A(1,K))*(1.+A(2,K))*(-A(1,K)+A(2,K)-1.)/4.
FI( 4)=(1.-A(1,K))*(1.-A(2,K))*(-A(1,K)-A(2,K)-1.)/4.
FI( 5)=(1.+A(1,K))*(1.-A(2,K)**2)/2.
FI( 6)=(1.+A(2,K))*(1.-A(1,K)**2)/2.
FI( 7)=(1.-A(1,K))*(1.-A(2,K)**2)/2.
FI( 8)=(1.-A(2,K))*(1.-A(1,K)**2)/2.

```

C\*\*\*\*\* CALCULO DA MATRIZ QUE RELACIONA DESL. A DEFORM. \*\*\*\*\*

```
CALL FUNIN(DET,K,A)
```

```
DET=DET*W(K)
```

```
DO 50 I=1,2
```

```
DO 50 J=1,16
```

```
50 SNN(I,J)=0.
```

```
DO 60 LI=1,8
```

```
SNN(1,2*LI-1)=FI(LI)
```

```
60 SNN(2,2*LI)=FI(LI)
```

```
DO 70 I=2,16,2
```

```
DO 70 J=1,2
```

```
70 PL(I)=PL(I)+SNN(J,I)*(-GAMA(MTYPE))*DET
```

```
80 CONTINUE
```

```
DO 90 J=1,8
```

```
NP=IX(KL,J)
```

```
90 UY(NP)=UY(NP)+PL(2*J)
```

```
C WRITE(LW,800) KL,(PL(I),I=2,16,2)
```

```
800 FORMAT(/' FORCAS DE MASSA P/ O FLEMENTO ',I3/8(3X,E12.5))
```

```
RETURN
```

```
END
```

C\*\*\*\*\*  
SUBROUTINE FUNIN(DET,K,A)

C\*\*\*\*\*  
IMPLICIT REAL\*8(A-G,O-Z)

```
COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),N,IL
```

```
COMMON/TREZE/FIN(2,8),T1(2,2),T(2,2),FIX(2,8),XE(8,2),
```

```
1W(25),FI(8)
```

```
DIMENSION A(2,25)
```

```
LW=6
```

C\*\*\*\*\* DERIVADAS DAS FUNCOES DE INTERPOLACAO \*\*\*\*\*

```
FIN(1,1)=(1.-A(2,K))*(2.*A(1,K)-A(2,K))/4.
```

```
FIN(1,2)=(1.+A(2,K))*(2.*A(1,K)+A(2,K))/4.
```

```
FIN(1,3)=(1.+A(2,K))*(2.*A(1,K)-A(2,K))/4.
```

```
FIN(1,4)=(1.-A(2,K))*(2.*A(1,K)+A(2,K))/4.
```

```
FIN(1,5)=(1.-A(2,K)**2)/2.
```

```
FIN(1,6)=- (1.+A(2,K))*A(1,K)
```

```
FIN(1,7)=- (1.-A(2,K)**2)/2.
```

```
FIN(1,8)=- (1.-A(2,K))*A(1,K)
```

```
FIN(2,1)=(1.+A(1,K))*(2.*A(2,K)-A(1,K))/4.
```

```
FIN(2,2)=(1.+A(1,K))*(2.*A(2,K)+A(1,K))/4.
```

```
FIN(2,3)=(1.-A(1,K))*(2.*A(2,K)-A(1,K))/4.
```

```
FIN(2,4)=(1.-A(1,K))*(2.*A(2,K)+A(1,K))/4.
```

```
FIN(2,5)=- (1.+A(1,K))*A(2,K)
```

```
FIN(2,6)=(1.-A(1,K)**2)/2.
```

```

FIN(2,7)=- (1.-A(1,K))*A(2,K)
FIN(2,8)=- (1.-A(1,K)**2)/2.
C**** CALCULA JACOBIANO, SEU DETERMINANTE E INVERSA DO JACOBIANO
DO 62 I=1,2
DO 62 J=1,2
T(I,J)=0.
DO 62 M=1,8
62 T(I,J)=T(I,J)+FIN(I,M)*XE(M,J)
DET=T(1,1)*T(2,2)-T(1,2)*T(2,1)
IF(DET.GT.0) GO TO 65
WRITE(LW,64) N,K,DET
64 FORMAT(///1X,'ATENCAO: O DETERMINANTE DO JACOBIANO PARA O ',
*, 'ELEMENTO ',I3,' NO PONTO DE INTEGRACAO ',I2,' E DET=',
*E20.6,' ./10X,'O VALOR NEGATIVO OU NULO ENCONTRADO SIGNI',
*'FICA GRANDE DISTORCAO DO ELEMENTO OU ERRO NA INCIDENCIA ',
*'DOS P.N.'//30X,'P A R E')
CALL EXIT
65 T1(1,1)=T(2,2)/DET
T1(1,2)=-T(1,2)/DET
T1(2,1)=-T(2,1)/DET
T1(2,2)=T(1,1)/DET
C**** COEF. DA MATRIZ QUE RELACIONA DESL.-DEFORM. *****
DO 66 J=1,8
DO 66 I=1,2
FIX(I,J)=0.0
DO 66 M=1,2
66 FIX(I,J)=FIX(I,J)+T1(I,M)*FIN(M,J)
RETURN
END
C*****
SUBROUTINE INTEG(A)
C*****
C***** CALCULA COORDENADAS E FATORES DE PESO DO ELEMENTO *****
IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),KL,IL
COMMON/TREZE/FIN(2,8),T1(2,2),T(2,2),FIX(2,8),XF(8,2),
1W(25),FI(8)
COMMON/VINTUM/MA
DIMENSION A(2,25)
NINT=IX(KL,10)
GO TO (135,20,30,40,50),NINT
C***** PARA 2*2 PONTOS DE INTEGRACAO *****
20 Q=0.577350269189626
A(1,1)=Q
A(2,1)=-Q
A(1,2)=Q
A(2,2)=Q
A(1,3)=-Q
A(2,3)=Q
A(1,4)=-Q

```

```

A(2,4)= -Q
IF(MA.EQ.1) GO TO 135
DO 22 K=1,4
22 W(K)=1.0000000000000000
GO TO 135

```

C\*\*\*\*\* PARA 3\*3 PONTOS DE INTEGRACAO \*\*\*\*\*

```

30 Q1=0.774596669241483

```

```

Q2=0.0000000000000000

```

```

A(1,1)=Q1

```

```

A(2,1)=-Q1

```

```

A(1,2)=Q1

```

```

A(2,2)=Q1

```

```

A(1,3)=-Q1

```

```

A(2,3)=Q1

```

```

A(1,4)=-Q1

```

```

A(2,4)=-Q1

```

```

A(1,5)=Q1

```

```

A(2,5)=Q2

```

```

A(1,6)=Q2

```

```

A(2,6)=Q1

```

```

A(1,7)=-Q1

```

```

A(2,7)=Q2

```

```

A(1,8)=Q2

```

```

A(2,8)=-Q1

```

```

A(1,9)=Q2

```

```

A(2,9)=Q2

```

```

IF(MA.EQ.1) GO TO 135

```

```

D1 =0.5555555555555556

```

```

D2 =0.8888888888888889

```

```

DO 32 I=1,4

```

```

32 W(I)=D1*D1

```

```

DO 34 I=5,8

```

```

34 W(I)=D1*D2

```

```

W(9)=D2*D2

```

```

GO TO 135

```

C\*\*\*\*\* PARA 4\*4 PONTOS DE INTEGRACAO \*\*\*\*\*

```

40 Q1=-0.861136311594053

```

```

Q2=-0.339981043584856

```

```

D1=0.347854845137454

```

```

D2=0.652145154862546

```

```

D3=Q2

```

```

D4=Q1

```

```

DO 42 I=1,4

```

```

A(1,I)=Q1

```

```

A(1,I+4)=Q2

```

```

A(1,I+8)=-Q2

```

```

A(1,I+12)=-Q1

```

```

I1=4*(I-1)+1

```

```

A(2,I1)=Q1

```

```

I2=4*(I-1)+2

```

```

A(2,12)=Q2
I3=4*(I-1)+3
A(2,13)=-Q2
I4=4*(I-1)+4
42 A(2,I4)=-Q1
IF(MA.EQ.1) GO TO 135
W(1)=D1*D1
W(2)=W(1)
W(3)=W(1)
W(4)=W(1)
W(5)=D2*D1
W(6)=W(5)
W(7)=W(5)
W(8)=W(5)
W(9)=D3*D1
W(10)=W(9)
W(11)=W(9)
W(12)=W(9)
W(13)=D4*D1
W(14)=W(13)
W(15)=W(13)
W(16)=W(13)

```

C\*\*\*\*\*--PARA 5\*5 PONTOS DE INTEGRACAO \*\*\*\*\*

```

50 Q1=0.906179845938664
   Q2=0.538469310105683
   Q3=0.000000000000000
   D0 58 I=1,21,5
   A(1,I)=-Q1
   A(1,I+1)=-Q2
   A(1,I+2)=Q3
   A(1,I+3)=Q2
   A(1,I+4)=Q1
   J=(I+4)/5
   A(2,J)=-Q1
   A(2,J+5)=-Q2
   A(2,J+10)=Q3
   A(2,J+15)=Q2
58 A(2,J+20)=Q1
   IF(MA.EQ.1) GO TO 135
   D1=0.236926885056189
   D2=0.478628670499366
   D3=0.5688888888888889
   W(1)=D1*D1
   W(5)=W(1)
   W(21)=W(1)
   W(25)=W(1)
   W(2)=D1*D2
   W(4)=W(2)
   W(6)=W(2)
   W(10)=W(2)

```

```

W(16)=W(2)
W(20)=W(2)
W(22)=W(2)
W(24)=W(2)
W(3)=D1*D3
W(11)=W(3)
W(15)=W(3)
W(23)=W(3)
W(7)=D2*D2
W(9)=W(7)
W(17)=W(7)
W(19)=W(7)
W(8)=D2*D3
W(12)=W(8)
W(14)=W(8)
W(18)=W(8)
W(13)=D3*D3

```

```

135 RETURN
END

```

```

C*****
SUBROUTINE COPON(A)

```

```

C*****
C*****CALCULA COORDENADAS LOCAIS DO ELEMENTO*****

```

```

IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)

```

```

DIMENSION A(2,25)

```

```

A(1,1)=1.

```

```

A(2,1)=-1.

```

```

A(1,2)=1.

```

```

A(2,2)=1.

```

```

A(1,3)=-1.

```

```

A(2,3)=1.

```

```

A(1,4)=-1.

```

```

A(2,4)=-1.

```

```

A(1,5)=1.

```

```

A(2,5)=0.

```

```

A(1,6)=0.

```

```

A(2,6)=1.

```

```

A(1,7)=-1.

```

```

A(2,7)=0.

```

```

A(1,8)=0.

```

```

A(2,8)=-1.

```

```

RETURN

```

```

END

```

```

C*****
SUBROUTINE TINPI(A,SI)

```

```

C*****
C***** INTERPOLA TENSOES DOS PONTOS NODAIS PARA OS P.I. *****

```

```

IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)

```

```

COMMON/UM/NUMEL,NUMNP,NPCE,NINCRM,LEITU

```

```

COMMON/DOIS/SIGTD(450,4),DESLOC(2,450),ZG(4,450)

```

```
COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),N,IL
COMMON/QUINZE/Z1(4,25),DEFOR(3,25),F(25),FO(25),DEFT(3,25)
DIMENSION FIL(4),A(2,25),SI(4,25)
```

```
LW=6
```

```
C***** CALCULO DAS COORDENADAS DOS PI DO ELEMENTO *****
```

```
IF(LFITU.FQ.0.OR.LEITU.EQ.3) GO TO 40
```

```
DO 30 J=1,4
```

```
NP=IX(N,J)
```

```
Z1(1,J) =SIGTD(NP,1)
```

```
Z1(2,J) =SIGTD(NP,2)
```

```
Z1(3,J) =SIGTD(NP,3)
```

```
30 Z1(4,J) =SIGTD(NP,4)
```

```
40 CALL INTEG(A)
```

```
NPI2=IX(N,10)**2
```

```
C***** FUNCOES DE INTERPOLACAO LINEARES *****
```

```
DO 80 K=1,NPI2
```

```
FIL(1)=(1.+A(1,K))*(1.-A(2,K))/4.
```

```
FIL(2)=(1.+A(1,K))*(1.+A(2,K))/4.
```

```
FIL(3)=(1.-A(1,K))*(1.+A(2,K))/4.
```

```
FIL(4)=(1.-A(1,K))*(1.-A(2,K))/4.
```

```
DO 58 J=1,4
```

```
SI(J,K)=0.
```

```
DO 58 L=1,4
```

```
58 SI(J,K)=SI(J,K)+FIL(L)*Z1(J,L)
```

```
80 CONTINUE
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
C***** SUBROUTINE EQLOAD(ZT,A)
```

```
C***** IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
```

```
INTEGER SINAL
```

```
COMMON/UM/NUMEL,NUMNP,NPCE,NINCRM,LEITU
```

```
COMMON/TRES/NPOINT(8),NPONTO(30,8),NJUSTB(8),NJUSTA(8),
```

```
* JUSTB(30,8,2),LSIDE(30,8,2),NPRET,IFRON
```

```
COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),KL,IL
```

```
COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),R1(900),R2(900),
```

```
1MBAND
```

```
COMMON/OITO/FEQ(6,2),FNCX(40,7),FNCY(40,7),NPC,NPSI,KP,KV
```

```
COMMON/NOVE/YOUN2(16),POIS2(16),GAMA(16),COELAT(16),SINAL
```

```
COMMON/DOZE/TOLER,PERC(20),SM,IPI(25),IRESI,ITERA,IFORC
```

```
COMMON/TREZE/FIN(2,8),T1(2,2),T(2,2),FIX(2,8),XE(8,2),
```

```
1W(25),FI(8)
```

```
COMMON/VINTUM/MA
```

```
COMMON/MARIA/PL(16),V(16),PP(6),LADO
```

```
DIMENSION B(3,16),FE(16),LM(4,3),A(2,25),ZT(4,25)
```

```
DATA LM/3,1,2*4,6,5,8,7,2*2,1,3/
```

```
LW=6
```

```
DO 16 I=1,16
```

```
16 FE(I)=0.0
```

```

      IF(IL.EQ.0) GO TO 20
      IF(IX(KL,10).EQ.IX(IL,10)) GO TO 30
C*****  CALCULO DAS COORDENADAS DOS PI DO ELEMENTO  *****
  20  MA=0
      CALL INTEG(A)
      IL=KL
  30  NP12=IX(KL,10)**2
      IF(SINAL.EQ.0.AND.NPCE.EQ.0) GO TO 35
      GO TO 40
  35  LEITU=2
      CALL TINPI(A,ZT)
  40  DO 54 I=1,8
      NP=IX(KL,I)
      XE(I,1)=R(NP)
  54  XE(I,2)=Z(NP)
      DO 82 K=1,NP12
C*****  CALCULO DA MATRIZ QUE RELACIONA DESL. A DFORM.  *****
      CALL FUNIN(DET,K,A)
      DET=DET*w(K)
      DO 71 I=1,3
      DO 71 J=1,16
  71  B(I,J)=0.0
      DO 74 J=1,8
      M=2*(J-1)
      B(1,M+1)=FIX(1,J)
      B(2,M+2)=FIX(2,J)
      B(3,M+1)=FIX(2,J)
  74  B(3,M+2)=FIX(1,J)
C*****  CALCULO DE FORCAS EQUIVALENTES  *****
      DO 78 I=1,16
      DO 78 J=1,3
  78  FF(I)=FE(I)+B(J,I)*ZT(J,K)*DET
  82  CONTINUE
C****  CALCULA FORCAS DE ESCAVACAO  *****
      IF(IRESI.GE.1) GO TO 105
      DO 98 J=1,3
      JJ=LM(LADO,J)
      NP=IX(KL,JJ)
      FEQ(2*J-1,KV)=FF(2*JJ-1)
      FEQ(2*J,KV)=FE(2*JJ)
      IF(JJ.NE.NPSI)GO TO 94
      FNCX(NPC,IFRON)=FNCX(NPC,IFRON)+(FEQ(2*J-1,2)-FEQ(2*J-1,1))
* /2.
      FNCY(NPC,IFRON)=FNCY(NPC,IFRON)+(FEQ(2*J,2)-FEQ(2*J,1))/2.
      WRITE(LW,6)NP,NPC,NPSI,FNCX(NPC,IFRON),FNCY(NPC,IFRON)
  6  FORMAT(5X,'N=',I3,3X,'NPC=',I2,3X,'NPSI=',I2,3X,'FNCX=',
1E13.6,3X,'FNCY=',E13.6)
  94  IF(KV.NE.2)GO TO 98
      UX(NP)=UX(NP)+(FEQ(2*J-1,2)-FEQ(2*J-1,1))/2.
      UY(NP)=UY(NP)+(FEQ(2*J,2)-FEQ(2*J,1))/2.

```

```

98 CONTINUE
GO TO 135
C**** CALCULA FORÇAS RESIDUAIS *****
105 DO 120 J=1,8
    NP=IX(KL,J)
    R2(2*NP-1)=R2(2*NP-1)+FE(2*J-1)
120 R2(2*NP)=R2(2*NP)+FE(2*J)
135 RETURN
END
C*****
SUBROUTINE DLOAD
C*****
C*** DET. FORÇAS NODAIS CONSISTENTES AS CARGAS DE SUPERFICIE ****
IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),KL,IL
COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),R1(900),R2(900),
1MBAND
COMMON/TRFZE/D(2,8),T1(2,2),DD(2,2),A(2,8),XE(8,2),
1W(25),Q(8)
COMMON/MARIA/PL(16),V(16),PP(6),LADO
DIMENSION LM(4,3),MP(16),FF(2,8),SNN(2,6),X(3,2),SN(3),
1PN(2),F(2,3),QQ(6)
DATA LM/3,1,2*4,6,5,8,7,2*2,1,3/
DATA FF/1.,-1.,2*1.,-1.,1.,2*-1.,1.,2*0.,1.,-1.,2*0.,-1./
DATA MP/1,2,5,6,3,4,7,8,-1,1,1,-1,1,1,-1,-1/
LW=6
AB=0.577350269189626
C***** DEFINE COORDENADAS GLOBAIS DOS P.N. DO ELEMENTO *****
DO 41 I=1,8
    J=IX(KL,I)
    XE(I,1)=R(J)
41 XE(I,2)=Z(J)
C***** COORDENADAS LOCAIS DOS P.I. NOS LADOS DO ELEMENTO *****
DO 30 J=1,4
    L=MP(J)
    K=MP(J+4)
    A(1,L)=AB*MP(J+8)
30 A(1,K)=MP(J+12)
DO 31 J=1,8
    I=9-J
31 A(2,I)=-A(1,J)
DO 15 I=1,6
15 QQ(I)=0.
LLL=2*LADO-1
KKK=2*LADO
DO 72 K=LLL,KKK
DO 16 I=1,6
DO 16 J=1,2
16 SNN(J,I)=0.
C**** COORDENADAS LOCAIS E GLOBAIS DOS PN DO LADO DE INTERESSE**

```

```

DO 2 J=1,3
  JJ=LM(LADO,J)
  X(J,1)=XE(JJ,1)
  X(J,2)=XE(JJ,2)
  F(1,J)=FF(1,JJ)
  F(2,J)=FF(2,JJ)
C***** FUNCOES DE INTERPOLACAO E DERIVADAS CORRESPONDENTES **
  GO TO (7,7,7,7,8,9,8,9),JJ
  7 SN(J)=(1.+A(1,K)*F(1,J))*(1.+A(2,K)*F(2,J))*(A(1,K)*F(1,J)+
  1A(2,K)*F(2,J)-1)*0.25
  DO 13 I=1,2
    N=3-I
  13 D(I,J)=((1.+A(N,K)*F(N,J))*F(I,J)*(2.*A(I,K)*
  *F(1,J)+A(N,K)*F(N,J)))/4.
  GO TO 2
  8 SN(J)=(1.+A(1,K)*F(1,J))*(1.-A(2,K)**2)*0.5
  D(1,J)=(1.-A(2,K)**2)*F(1,J)/2.
  D(2,J)=-((1.+A(1,K)*F(1,J))*A(2,K))
  GO TO 2
  9 SN(J)=(1.-A(1,K)**2)*(1.+A(2,K)*F(2,J))*0.5
  D(1,J)=-((1.+A(2,K)*F(2,J))*A(1,K))
  D(2,J)=(1.-A(1,K)**2)*F(2,J)/2.
  2 CONTINUE
C***** FUNCAO DE INTERP. P/ VARIACAO QUADRATICA DE CARRREGTO.***
  DO 3 J=1,3
    SNN(1,2*J-1)=SN(J)
  3 SNN(2,2*J)=SN(J)
C***** CALCULA JACOBIANO *****
  DO 17 M=1,2
    DO 17 N=1,2
      DD(M,N)=0.
  DO 17 L=1,3
  17 DD(M,N)=DD(M,N)+D(M,L)*X(L,N)
  G22=(DD(1,1)**2+DD(1,2)**2)**0.5
  G11=(DD(2,1)**2+DD(2,2)**2)**0.5
  Q(1)=G22
  Q(2)=G22
  Q(3)=G11
  Q(4)=711
  Q(5)=G22
  Q(6)=G22
  Q(7)=G11
  Q(8)=G11
C**** CALCULO DAS FORCAS EQUIVALENTES POR INTEGRACAO NUMERICA ***
  DO 20 I=1,2
    PN(I)=0.
  DO 20 L=1,6
  20 PN(I)=PN(I)+SNN(I,L)*PP(L)
  DO 21 II=1,6
  DO 21 KK=1,2

```

```

21 QQ(II)=QQ(II)+SNN(KK,II)*PN(KK)*Q(K)
72 CONTINUE
C WRITE(6,688) KL,(QQ(I),I=1,6)
688 FORMAT(/1X,'FORÇAS DE SUPERFICIE NO ELEM.',I3/6E18.6)
DO 25 J=1,3
JJ=LM(LADO,J)
JJJ=IX(KL,JJ)
UX(JJJ)=UX(JJJ)+QQ(2*J-1)
UY(JJJ)=UY(JJJ)+QQ(2*J)
C WRITE(6,666) JJJ,UX(JJJ),UY(JJJ)
666 FORMAT(/1X,'PN=',I3,'UX=',F15.6,'UY=',F15.6)
25 CONTINUE
RETURN
END

C*****
SUBROUTINE CARGAS
C*****
C***** LE CARGAS CONCENTRADAS E DISTRIBUIDAS *****
IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),KL,IL
COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),R1(900),R2(900),
1MBAND
COMMON/DEZ/NNIVEL,JESCAV,JCCONC,JCDIST
COMMON/MARIA/PL(16),V(16),PP(6),LADO
DATA LR,LW/5,6/
IF(JCCONC.EQ.0) GO TO 25
C***** LE CARGAS CONCENTRADAS *****
READ(LR,1955)NCONC
WRITE(LW,15) NCONC
DO 21 ILA=1,NCONC
READ(LR,1955)NPC,FX,FY
WRITE(LW,1016)NPC,FX,FY
UX(NPC)=UX(NPC)+FX
21 UY(NPC)=UY(NPC)+FY
25 IF(JCDIST.EQ.0) GO TO 35
C***** DEFINE CARREGAMENTO DISTRIBUIDO *****
READ(LR,1955)NCDIST
WRITE(LW,510)NCDIST
DO 30 M=1,NCDIST
READ(LR,515)KL,LADO,(PP(I),I=1,6)
WRITE(LW,565)KL,LADO,(PP(I),I=1,6)
30 CALL DLOAD
15 FORMAT(////,30X,'C A R G A S   C O N C E N T R A D A S',/,
130X,37('=')),//
2//15X,'NO. DE PONÇOS NODAIS COM CARGA CONCENTRADAS=',I3//
35X,' P.N.NO.',5X,'FORÇA HORIZONTAL',10X,'FORÇA VERTICAL'//)
510 FORMAT(//15X,'CARREGAMENTO DISTRIBUIDO'/15X,24('='))//10X,
*'NUMERO DE ELEMENTOS COM CARGA DISTRIBUIDA=',I3///2X,
*'ELEM',2X,'LADO',12X,'INTENSIDADE DO CARREGAMENTO NOS PN'//)
515 FORMAT(2I5,6E10.0)

```

```

565 FORMAT(15,2X,15,6E15.5)
1016 FORMAT(7X,13,13X,E13.6,12X,E13.6)
1955 FORMAT(15,7F10.0)
35 RETURN
END

```

```

C*****
SUBROUTINE MUDRIG(A)

```

```

C*****
C***** MUDANCA DE RIGIDEZ DOS MATERIAIS *****

```

```

IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),KL,IL
COMMON/NOVE/YOUN2(16),POIS2(16),GAMA(16),COELAT(16),SINAL
COMMON/VINTUM/MA
DIMENSION A(2,25)
DATA LR,LW/5,6/
RFAD(LR,1003) NRIG
WRITE(LW,302) NRIG
IL=0
MA=0

```

```

DO 301 I=1,NRIG
READ(LR,1003)KL,IX(KL,9)
MTYPE=IX(KL,9)
WRITE(LW,802) KL,IX(KL,9)

```

```

C***** CALCULA FORCAS DE MASSA *****
IF(GAMA(MTYPE).NE.0) CALL MASSA(A)

```

```

301 CONTINUE
302 FORMAT(/,20X,'MUDANCA DE RIGIDEZ DOS MATERIAIS',20X,
132('=')//12X,'NUMERO DE ELEMENTOS COM RIGIDEZ AUMENTADA ='
2,13//20X,'NUMERO DOS ELEMENTOS ',10X,'TIPO DE MATERIAL'/)
802 FORMAT(29X,13,24X,13/)
1003 FORMAT(16I5)
RETURN
END

```

```

C*****
SUBROUTINE EPLAST(ZT,SK,A)

```

```

C*****
C***** ALGORITMO PARA ANALISE ELASTO PLASTICA *****

```

```

IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
COMMON/UM/NUMEL,NUMNP,NPCE,NINCRM,I,IEITU
COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),N,IL
COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),B(900),R2(900),
1MBAND
COMMON/DOZE/TOLER,PERC(20),SM,IPI(25),IRESI,ITERA,IFORC
COMMON/QUINZE/Z1(4,25),DEFOR(3,25),F(25),FO(25),DEFT(3,25)
COMMON/VINTE/REC(130,2),NBC(130),NFI(130),NB
COMMON/TRINTA/NDF,NCN,NSZF
DIMENSION ZT(4,25),A(2,25),DB(910),SK(900,70)
LW=6
DO 900 I=1,NSZF
B(I)=0.

```

```

900 DB(I)=0.
    DO 3000 KP=1,NINCRM
      WRITE(LW,1000)KP,PERC(KP+1)
1000 FORMAT(/,10X,'I N C R E M E N T O  N O.',I2/10X,26('=')/
    $6X,'PERCENTAGEM DA FORCA TOTAL APLICADA=',F10.5)
C***** FORCAS DO INCREMENTO *****
    DO 949 N=1,NUMNP
      UX(N)=UX(N)* PERC(KP+1)/ PERC(KP)
      UY(N)=UY(N)* PERC(KP+1)/ PERC(KP)
      B(2*N-1)=UX(N)
      B(2*N)=UY(N)
949 CONTINUE
      ITERA=0
      GO TO 948
925 ITERA=ITERA+1
C***** FORCAS DA ITERACAO *****
    DO 932 N=1,NSZF
932 B(N)=R2(N)
      DO 940 N=1,NB
        IF(NFIX(N).EQ.11) GO TO 935
        IF(NFIX(N).EQ.10) B(2*NBC(N)-1)=0.
        IF(NFIX(N).EQ.01) B(2*NBC(N))=0.
        GO TO 940
935 B(2*NBC(N)-1)=0.
      B(2*NBC(N))=0.
940 CONTINUE
C***** CALCULA MATRIZ DE RIGIDEZ PARA O PRIMEIRO INCREMENTO *****
C***** OU PARA A PRIMEIRA ITERACAO DE CADA INCREMENTO *****
948 IF(KP.EQ.1.AND.ITERA.EQ.0) CALL FORMK(SK,A)
      IF(KP.EQ.1.AND.ITERA.EQ.0) CALL DECOB(SK)
990 CALL RESOB(SK)
C***** CALCULO DA NORMA DOS DESLOCAMENTOS *****
      M=0
      SM=0.
      DO 1200 N=1,NSZF
        DB(N)=DB(N)+B(N)
        IF(DB(N).EQ.0) GO TO 1200
        M=M+1
        SM=SM+(B(N)/DB(N))**2
1200 CONTINUE
      SM=(SM/M)**0.5
      CALL TENSF(ZT,A)
      DO 1300 N=1,NSZF
1300 B(N)=0.
        IRESI=0
        IF(SM.GT.TOLER.AND.IFORC.EQ.1) GO TO 925
        WRITE(LW,1500) ITERA
1500 FORMAT(/,13X,'NO. DE ITERACOES=',I3///' ELEM',30X,'VALORES'
1, ' DA FUNCAO DE ESCOAMENTO NOS P.I. DO ELEMENTO'//)
      DO 2000 N=1,NUMEL

```

```

      IF(IX(N,9).EQ.10) GO TO 2000
      READ(12,N)ZT,DEFT,F
      NPI2=IX(N,10)**2
      WRITE(LW,2300)N,(K,F(K),K=1,NPI2)
2300  FORMAT(I3,1X,9(I3,1X,E10.4)/7X,9(I3,1X,E10.4))
2000  CONTINUE
3000  CONTINUE
      DO 4000 N=1,NSZF
4000  B(N)=DB(N)
      RETURN
      END
C*****
      SUBROUTINE TENSPO(ZT,A)
C*****
C***  CALCULA TENSOES E DEFS. EM PI P/ ANALISE ELASTO-PLASTICA***
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      INTEGER SINAL
      COMMON/UM/NUMEL,NUMNP,NPCE,NINCRM,LEITU
      COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),N,IL
      COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),B(900),R2(900),
1MBAND
      COMMON/SETE/COESAO(10),ATRITO(10)
      COMMON/NOVE/YOUNG(16),POIS2(16),GAMA(16),COELAT(16),SINAL
      COMMON/ONZE/C1,C2,C3,C4,C5,C6,ALF,CK,H,H0,IMAT,ITEP
      COMMON/DOZE/TOLER,PERC(20),SM,IPI(25),IRESI,ITERA,IFORC
      COMMON/TREZE/FIN(2,8),T1(2,2),T(2,2),FIX(2,8),XE(8,2),
1W(25),FI(8)
      COMMON/QUINZE/Z1(4,25),DEFOR(3,25),F(25),FO(25),DEFT(3,25)
      COMMON/VINTUM/MA
      COMMON/MARIA/PL(16),TT(2,8),PP(6),LADO
      DIMENSION ZT(4,25),ZD(4,25),A(2,25)
      LW=6
      MA=0
C*****  INICIALIZACAO  *****
      IFORC=0
      IMAT=0
      ITEP=0
      IL=0
      DO 404 N=1,NUMEL
      MTYPE=IX(N,9)
      IF(MTYPE.EQ.10) GO TO 404
C***  COORDENADAS E DESLOCAMENTOS DO ELEM.  *****
      DO 74 I=1,8
      J=IX(N,I)
      XE(I,1)=R(J)
      XE(I,2)=Z(J)
      TT(1,I)=B(2*J-1)
74  TT(2,I)=B(2*J)
      IF(IMAT.EQ.0) GO TO 75
      IF(IX(N,9).EQ.IX(IMAT,9)) GO TO 77

```

```

C***** COEFICS. DA MATRIZ DE FLATICIDADE DEF. PLANA *****
75 C0=(1.+POIS2(MTYPE))* (1.-2*POIS2(MTYPE))
   C1=YOUN2(MTYPE)*(1.-POIS2(MTYPE))/C0
   C2=YOUN2(MTYPE)/(2.*(1.+POIS2(MTYPE)))
   C3=YOUN2(MTYPE)*POIS2(MTYPE)/C0
   IF(MTYPE.GT.10) GO TO 76
   CDE=DSQRT(9.+12.*(DTAN(ATRITO(MTYPE)))**2)
   ALF=DTAN(ATRITO(MTYPE))/CDE
   CK=3.*COESAO(MTYPE)/CDE
76 IMAT=N
77 IF(IL.EQ.0) GO TO 81
   IF(IX(N,10).EQ.IX(IL,10)) GO TO 82
C***** CALCULO DAS COORDENADAS DOS PI DO ELEMENTO *****
81 CALL INTEG(A)
   IL=N
82 NPI2=IX(N,10)**2
   DO 87 I=1,NPI2
   DO 87 J=1,3
87 DEFOR(J,I)=0.
   READ(12,N)ZT,DEFT,F
   IRESI=0
   DO 200 K=1,NPI2
   FO(K)=F(K)
C***** CALCULO DA MATRIZ QUE RELACIONA DESL. A DEFORM. *****
   CALL FUNIN(DET,K,A)
C***** CALCULA DEFORMACOES *****
   DO 88 I=1,8
   DEFOR(1,K)=DEFOR(1,K)+FIX(1,I)*TT(1,I)
   DEFOR(2,K)=DEFOR(2,K)+FIX(2,I)*TT(2,I)
88 DEFOR(3,K)=DEFOR(3,K)+FIX(2,I)*TT(1,I)+FIX(1,I)*TT(2,I)
C***** CALCULA TENSOES *****
   Z1(1,K)=C1*DEFOR(1,K)+C3*DEFOR(2,K)
   Z1(2,K)=C3*DEFOR(1,K)+C1*DEFOR(2,K)
   Z1(3,K)=C2*DEFOR(3,K)
   Z1(4,K)=POIS2(MTYPE)*(Z1(1,K)+Z1(2,K))
C***** ATUALIZA TENSOES E DEFORMACOES *****
   DO 140 J=1,3
140 DEFT(J,K)=DEFT(J,K)+DEFOR(J,K)
   DO 150 J=1,4
150 ZT(J,K)=ZT(J,K)+Z1(J,K)
   IF(MTYPE.GT.10) GO TO 200
   IPI(K)=0
   SIGM=(ZT(1,K)+ZT(2,K)+ZT(4,K))/3.
   SX=ZT(1,K)-SIGM
   SY=ZT(2,K)-SIGM
   SZ=ZT(4,K)-SIGM
   SIGBAR=DSQRT((SX**2+SY**2+SZ**2)/2.+ZT(3,K)**2)
   F(K)=3.*ALF*SIGM+SIGBAR-CK
   IF(F(K).LT.0) GO TO 200
   IF(FO(K).GE.0) IPI(K)=1

```

```

      IF(FO(K).LT.0) IPI(K)=2
      IRESI=IRESI+IPI(K)
200  CONTINUE
      IF(MTYPE.GT.10) GO TO 403
      IF(IRESI)403,403,300
300  CALL MATEP(ZT,ZD)
      IF(SM-TOLER)403,403,350
C***** CALCULO DAS FORÇAS RESIDUAIS(P/ ITERACAO)*****
350  CALL EQLOAD(ZD,A)
      IFORC=1
403  WRITE(12,N) ZT,DEFT,F
404  CONTINUE
      RETURN
      END
C*****
      SUBROUTINE MATEP (ZT,ZD)
C*****
C**** CALCULA MATRIZ ELASTO-PLASTICA E INCREMENTOS DE TENSOES ***
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      INTEGER SINAL
      COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),N,IL
      COMMON/SETE/COESAO(10),ATRITO(10)
      COMMON/NOVE/YOUN2(16),POIS2(16),GAMA(16),COELAT(16),SINAL
      COMMON/ONZE/C1,C2,C3,C4,C5,C6,ALF,CK,H,H0,IMAT,ITEP
      COMMON/DOZE/TOLFR,PERC(20),SM,IPI(25),IRESI,ITERA,IFORC
      COMMON/QUINZE/Z1(4,25),DEFOR(3,25),F(25),FO(25),DEFT(3,25)
      COMMON/VINTUM/MA
      COMMON/QUA/C11(25),C22(25),C33(25),C12(25),C13(25),C23(25)
      DIMENSION ZT(4,25),ZD(4,25),AF(4),ZS(4),ZA(4)
      LW=6
      IF(ITEP.EQ.0) GO TO 3
      IF(IX(N,9).EQ.IX(ITEP,9))GO TO 5
C***** CONSTANTES DA MATRIZ DE PLASTICIDADE *****
3  MTYPE=IX(N,9)
   C6=2.*C2
   C4=YOUN2(MTYPE)/(3.*(1.-2.*POIS2(MTYPE)))
   C5=POIS2(MTYPE)/YOUN2(MTYPE)
   H=(3.*C4*ALF)/(2.*C2)
   H0=1.+(9.*ALF**2*C4)/C2
   ITEP=N
5  NPI2=IX(N,10)**2
   DO 300 K=1,NPI2
   IF(IPI(K).EQ.0) GO TO 50
   IF(IPI(K).EQ.2) GO TO 15
   DO 10 J=1,4
10  ZD(J,K)=ZT(J,K)-Z1(J,K)
   GO TO 30
15  RX =-FO(K)/(F(K)-FO(K))
   DO 20 J=1,4
20  ZD(J,K)=ZT(J,K)+Z1(J,K)*(RX-1)

```

```

SIGM=(ZD(1,K)+ZD(2,K)+ZD(4,K))/3.
SX=ZD(1,K)-SIGM
SY=ZD(2,K)-SIGM
SZ=ZD(4,K)-SIGM
SIGBAR=DSQRT((SX**2+SY**2+SZ**2)/2.+ZD(3,K)**2)
AF(3)=ZD(3,K)/SIGBAR
AF(1)=ALF+SX/(2.*SIGBAR)
AF(2)=ALF+SY/(2.*SIGBAR)
AF(4)=ALF+SZ/(2.*SIGBAR)
F2=3.*ALF*SIGM+SIGBAR-CK
DR=0.
DO 22 J=1,4
22 DR=DR+AF(J)*Z1(J,K)
DR=-F2/DR
RX=RX+DR
DO 25 J=1,4
25 ZD(J,K)=ZT(J,K)+Z1(J,K)*(RX-1)
C*****CALCULA INVARIANTES DAS TENSOES NOS P.I. *****
*
30 CONTINUE
SIGM=(ZD(1,K)+ZD(2,K)+ZD(4,K))/3.
SX=ZD(1,K)-SIGM
SY=ZD(2,K)-SIGM
SZ=ZD(4,K)-SIGM
SIGBAR=DSQRT((SX**2+SY**2+SZ**2)/2.+ZD(3,K)**2)
IF(SIGBAR.NE.0) GO TO 35
WRITE(LW,38)
38 FORMAT('// O PRIMEIRO INCREMENTO ESTA PLASTIFICANDO ALGUNS '
1, ' PONTOS'//1X, 'DE UM VALOR MENOR DE PERC PARA QUE O ',
2 'PRIMEIRO INCREMENTO SEJA ELASTICO')
STOP
35 H1=(H-SIGM/(2.*SIGBAR))/(SIGBAR*H0)
H2=((ALF-SIGM/(2.*SIGBAR))*(2.*H-SIGM/SIGBAR)/H0)-
1((3.*C4*CK*C5)/(SIGBAR*H0))
H3=1./(2.*SIGBAR**2*H0)
C***** COEFICIENTES DA MATRIZ ELASTICO-PLASTICA *****
C11(K)= C6*(1.-H2-2.*H1*ZD(1,K)-H3*ZD(1,K)**2)
C22(K)= C6*(1.-H2-2.*H1*ZD(2,K)-H3*ZD(2,K)**2)
C33(K)= C6*(0.5-H3*ZD(3,K)**2)
C12(K)= -C6*(H2+H1*(ZD(1,K)+ZD(2,K))+H3*ZD(1,K)*ZD(2,K))
C13(K)= -C6*(H1*ZD(3,K)+H3*ZD(1,K)*ZD(3,K))
C23(K)= -C6*(H1*ZD(3,K)+H3*ZD(2,K)*ZD(3,K))
IF(MA.EQ.1) GO TO 300
C14= -C6*(H2+H1*(ZD(1,K)+ZD(4,K))+H3*ZD(1,K)*ZD(4,K))
C24= -C6*(H2+H1*(ZD(2,K)+ZD(4,K))+H3*ZD(2,K)*ZD(4,K))
C34= -C6*(H1*ZD(3,K)+H3*ZD(4,K)*ZD(3,K))
C***** INCREMENTOS DE TENSOES NOS P.N. DO ELFMENTO *****
ZS(1)=C11(K)*DEFOR(1,K)+C12(K)*DEFOR(2,K)+C13(K)*DEFOR(3,K)
ZS(2)=C12(K)*DEFOR(1,K)+C22(K)*DEFOR(2,K)+C23(K)*DEFOR(3,K)
ZS(3)=C13(K)*DEFOR(1,K)+C23(K)*DEFOR(2,K)+C33(K)*DEFOR(3,K)

```

```

ZS(4)=C14*DEFOR(1,K)+C24*DEFOR(2,K)+C34*DEFOR(3,K)
DO 40 J=1,4
ZD(J,K)=Z1(J,K)-ZS(J)
40 ZT(J,K)=ZT(J,K)-ZD(J,K)
SIGM=(ZT(1,K)+ZT(2,K)+ZT(4,K))/3.
SX=ZT(1,K)-SIGM
SY=ZT(2,K)-SIGM
SZ=ZT(4,K)-SIGM
SIGBAR=DSQRT((SX**2+SY**2+SZ**2)/2.+ZT(3,K)**2)
AF(3)=ZT(3,K)/SIGBAR
AF(1)=ALF+SX/(2.*SIGBAR)
AF(2)=ALF+SY/(2.*SIGBAR)
AF(4)=ALF+SZ/(2.*SIGBAR)
FO(K)=3.*ALF*SIGM+SIGBAR-CK
P=FO(K)/(AF(1)**2+AF(2)**2+AF(3)**2+AF(4)**2)
DO 45 J=1,4
45 ZT(J,K)=ZT(J,K)-AF(J)*P
SIGM=(ZT(1,K)+ZT(2,K)+ZT(4,K))/3.
SX=ZT(1,K)-SIGM
SY=ZT(2,K)-SIGM
SZ=ZT(4,K)-SIGM
SIGBAR=DSQRT((SX**2+SY**2+SZ**2)/2.+ZT(3,K)**2)
FO(K)=3.*ALF*SIGM+SIGBAR-CK
F(K)=0.
IPI(K)=K
GO TO 300
50 DO 60 J=1,4
60 ZD(J,K)=0.
300 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C*****
SUBROUTINE SAIDA(ZT,A)

```

```

C*****
C**** IMPRIME DESLOCAMENTOS, DEFORMACOES E TENSOES DA ETAPA *****

```

```

IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
COMMON/UM/NUMEL, NUMNP, NPCE, NINCRM, LEITU
COMMON/DOIS/SIGTD(450,4), DESLOC(2,450), ZG(4,450)
COMMON/QUATRO/IX(130,10), IU(450), N, IL
COMMON/CINCO/R(450), Z(450), UX(450), UY(450), B(900), R2(900),
1MBAND
COMMON/QUINZE/Z1(4,25), DEFOR(3,25), F(25), FO(25), DEFT(3,25)
DIMENSION ZT(4,25), CPI(2,25), A(2,25)
LR=5
LW=6
IF(NPCE.EQ.0) WRITE(LW,1204)
IF(NPCE.EQ.1) WRITE(LW,1205)
DO 10 N=1,NUMNP
IF(B(2*N-1).EQ.0.AND.B(2*N).EQ.0) GO TO 10
IF(NPCE.EQ.1)WRITE(LW,1206)N,(DESLOC(J,N),J=1,2)

```

```

IF(NPCE.EQ.1) GO TO 10
C=(ZG(1,N)+ZG(2,N))/2.
D=DSQRT(((ZG(1,N)-ZG(2,N))/2.)**2+ZG(3,N)**2)
SIGMA1=C-D
SIGMA3=C+D
IF(ZG(1,N).EQ.SIGMA3) GO TO 6
ANGL=57.29578*DATAN(ZG(3,N)/(ZG(1,N)-SIGMA3))
GO TO 7
6 ANGL=90.
7 WRITE(LW,1207)N,(DESLOC(J,N),J=1,2),
1(ZG(J,N),J=1,4),SIGMA1,SIGMA3,ANGL
10 CONTINUE
IF(NPCE.EQ.0) RETURN
WRITE(LW,500)
IL=0
DO 100 N=1,NUMEL
IF(IX(N,9).EQ.10) GO TO 100
CALL COPIN(CPI,A)
READ(12,N) ZT,DEFT,F
NPI2=IX(N,10)**2
DO 100 K=1,NPI2
C=(ZT(1,K)+ZT(2,K))/2.
D=DSQRT(((ZT(1,K)-ZT(2,K))/2.)**2+ZT(3,K)**2)
SIGMA1=C-D
SIGMA3=C+D
IF(ZT(1,K).EQ.SIGMA3) GO TO 60
ANGL=57.29578*DATAN(ZT(3,K)/(ZT(1,K)-SIGMA3))
GO TO 70
60 ANGL=90.
70 WRITE(LW,600) N,K,CPI(1,K),CPI(2,K),(ZT(J,K),J=1,4),
1 SIGMA1,SIGMA3,ANGL
100 CONTINUE
500 FORMAT(// 'ELEM',3X,'P1',7X,'X',9X,'Y',10X,'SIGX',11X,
1 'SIGY',10X,'TAUXY',11X,'SIGZ',9X,'SIGMA1',9X,'SIGMA3',
2 7X,'ANG'//)
600 FORMAT(1X,2I5,2F10.3,6E15.4,E11.3)
1204 FORMAT(//35X,'DESLOCAMENTOS E TENSOES DA ETAPA'/35X,32('-')
1//3X,'PN',6X,'DESLOCH',7X,'DESLOCV',8X,'SIGMAX',8X,'SIGMAY'
2 ,9X,'TAUXY',8X,'SIGMAZ',8X,'SIGMA1',8X,'SIGMA3',10X,
3 'ANG'//)
1205 FORMAT(//25X,'DESLOCAMENTOS DA ETAPA'//2X,2H N,5X,
18H DESLOCH,7X,8H DESLOCV//)
1206 FORMAT (15,2E15.5)
1207 FORMAT(I7,8E14.5,F13.3)
RETURN
END

```

```

C*****
SUBROUTINE COPIN(CPI,A)
C*****
C***** CALCULA COORDENADAS GLOBAIS DO PONTOS DE INTEGRACAO**

```

```

IMPLICIT REAL*8(A-G,O-Z)
COMMON/QUATRO/IX(130,10),IU(450),N,IL
COMMON/CINCO/R(450),Z(450),UX(450),UY(450),R1(900),R2(900),
1MBAND
COMMON/TREZE/FIN(2,8),T1(2,2),T(2,2),FIX(2,8),XE(8,2),
1W(25),F1(8)
COMMON/VINTUM/MA
DIMENSION CPI(2,25),A(2,25)
DO 10 I=1,8
  J=IX(N,I)
  XE(I,1)=R(J)
10 XE(I,2)=Z(J)
  IF(IL.EQ.0) GO TO 20
  IF(IX(N,10).EQ.IX(IL,10)) GO TO 30
20 MA=1
  CALL INTEG(A)
  IL=N
30 NPI2=IX(N,10)**2
  DO 40 K=1,NPI2
    FI( 1)=(1.+A(1,K))*(1.-A(2,K))*(A(1,K)-A(2,K)-1.)/4.
    FI( 2)=(1.+A(1,K))*(1.+A(2,K))*(A(1,K)+A(2,K)-1.)/4.
    FI( 3)=(1.-A(1,K))*(1.+A(2,K))*(-A(1,K)+A(2,K)-1.)/4.
    FI( 4)=(1.-A(1,K))*(1.-A(2,K))*(-A(1,K)-A(2,K)-1.)/4.
    FI( 5)=(1.+A(1,K))*(1.-A(2,K)**2)/2.
    FI( 6)=(1.+A(2,K))*(1.-A(1,K)**2)/2.
    FI( 7)=(1.-A(1,K))*(1.-A(2,K)**2)/2.
    FI( 8)=(1.-A(2,K))*(1.-A(1,K)**2)/2.
  DO 40 J=1,2
    CPI(J,K)=0.
  DO 40 I=1,8
40 CPI(J,K)=CPI(J,K)+FI(I)*XE(I,J)
  RETURN
END

```