



Licenciatura em Física

Instituto de Física

Universidade Federal do Rio de Janeiro

MONOGRAFIA DE CONCLUSÃO DE CURSO

Demonstrações do Teorema de Bell

Rodrigo Rodrigues Machado

Orientador

Carlos Eduardo Aguiar

Março de 2013

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à minha família por todo o apoio dado a mim no decorrer da graduação.

À Mariana Faria Brito Francisquini que contribuiu diretamente na construção desta monografia.

Aos amigos que sempre estiveram dispostos a ajudar.

Ao meu orientador, Carlos Eduardo Magalhães de Aguiar, por toda a ajuda, paciência e todas as explicações a mim dadas durante o andamento da minha graduação e desta monografia.

Aos professores que gentilmente aceitaram o convite para participar da banca julgadora deste trabalho.

Resumo

Apresentamos diferentes demonstrações do teorema de Bell, um resultado importante para a compreensão e interpretação da teoria quântica. O teorema é raramente tratado nos livros de mecânica quântica, e quando isso ocorre a discussão é geralmente sucinta e pouco elucidativa. Neste trabalho faremos uma revisão de algumas demonstrações do teorema de Bell encontradas na literatura que consideramos particularmente simples e que ajudam a tornar o significado deste teorema mais claro. Essas demonstrações, publicadas em revistas de ensino de física ou de divulgação científica, podem ser compreendidas mesmo por leitores com pouca base matemática.

Índice

Capítulo 1 – Introdução	1
Capítulo 2 – Postulados da Mecânica Quântica.....	3
1. O Princípio da Superposição.....	3
2. A Regra de Born.....	3
3. Quantização das Grandezas Físicas.....	5
4. A Equação de Schrödinger.....	6
5. O colapso da função de onda.....	7
6. Complementaridade e Incerteza.....	7
Capítulo 3 - Realismo, Teoria Quântica e o Teorema de Bell.....	8
1. Concepções Realista e Não-realista.....	8
2. O Teorema de Bell.....	12
Capítulo 4 - Outras Demonstrações do Teorema de Bell.....	17
1. Herbert (1975), Kuttner e Rosemblum (2010).....	17
2. d’Espagnat (1979).....	22
3. Peres (1978).....	26
Capítulo 5 – Conclusão.....	31
Apêndice A – Spin $1/2$	32
Referências.....	35

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar diferentes demonstrações do teorema de Bell, um resultado de fundamental importância para a compreensão e interpretação da teoria quântica. Este teorema é raramente tratado nos livros de mecânica quântica, principalmente os mais antigos. Quando ele é discutido, isso é normalmente feito sucintamente e com uma matemática que pode ser proibitiva a muitos leitores. Neste trabalho faremos uma revisão de algumas demonstrações do teorema de Bell encontradas na literatura que consideramos particularmente simples e que ajudam a tornar o significado deste teorema mais claro.

No capítulo 2 descreveremos os postulados da mecânica quântica essenciais ao entendimento dos outros capítulos. A abordagem é extremamente concisa, de modo a apenas evidenciar os conceitos envolvidos em cada postulado.

No capítulo 3 discutiremos a questão do não-realismo da teoria quântica e como esta ideia incomodava alguns físicos como Einstein. O paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) é apresentado, assim como a demonstração original do teorema de Bell, mostrando que a mecânica quântica é incompatível com os conceitos usuais de realidade e localidade.

Finalmente, no capítulo 4 serão apresentadas demonstrações simples e ilustrativas do teorema de Bell, baseadas nos artigos

- *The Quantum Theory and Reality*, de Bernard d'Espagnat,
- *Cryptographic Approach to Hidden Variables*, de Nick Herbert,
- *Bell's Theorem and Einstein 'Spooky Actions' from a Simple Thought Experiment*, de Fred Kuttner e Bruce Rosenblum
- *Unperformed experiments have no results*, de Asher Peres.

Essas demonstrações, publicadas em revistas de ensino de física ou de divulgação científica, podem ser compreendidas mesmo por leitores com pouca

base em mecânica quântica e oferecem diferentes visões sobre o significado do teorema.

Esperamos que o presente trabalho seja útil a quem venha a estudar o teorema de Bell, ajudando a compreender melhor esse tema fascinante.

Capítulo 2

Postulados da Mecânica Quântica

Neste capítulo apresentaremos sucintamente alguns dos princípios da mecânica quântica, com o objetivo de estabelecer uma base para a discussão do teorema de Bell. Suporemos conhecidas as ferramentas matemáticas básicas necessárias à formulação da teoria quântica, que serão descritas apenas quando for conveniente fixar a notação.

1. O Princípio da Superposição

As propriedades de um sistema quântico são completamente definidas pela especificação do seu vetor de estado, digamos $|\varphi\rangle$, que é um elemento de um espaço vetorial complexo \mathcal{H} , chamado *espaço de estados*.

O princípio da superposição afirma que se tivermos dois vetores de estado $|\varphi\rangle$ e $|\chi\rangle$, então uma superposição linear destes estados também representará um estado físico. Mais exatamente, se $|\varphi\rangle$ e $|\chi\rangle$ são vetores de estado, então

$$|\psi\rangle = \alpha |\varphi\rangle + \beta |\chi\rangle,$$

onde α e β são números complexos, também é um vetor de estado. Segundo Dirac, o princípio da superposição representa uma das diferenças “mais fundamentais e mais drásticas” entre a física quântica e física clássica [Dirac 1958].

2. A Regra de Born

Sejam $|\varphi\rangle$ e $|\chi\rangle$ dois estados de um sistema quântico. A regra de Born afirma que, se o sistema estiver no estado $|\varphi\rangle$, a probabilidade de uma medida encontrá-lo no estado $|\chi\rangle$ é dada por

$$P(\varphi \rightarrow \chi) = |\langle\chi|\varphi\rangle|^2,$$

onde $\langle\chi|\varphi\rangle$ é o produto escalar (ou produto interno) dos dois vetores.

A amplitude de probabilidade dessa medida é definida por

$$a(\varphi \rightarrow \chi) = \langle \chi | \varphi \rangle.$$

A probabilidade de uma medida encontrar o sistema quântico no estado $|\chi\rangle$ é, portanto, o módulo ao quadrado da amplitude de probabilidade,

$$P(\varphi \rightarrow \chi) = |a(\varphi \rightarrow \chi)|^2.$$

2.1. Algumas considerações acerca da regra de Born

1) Na formulação da regra de Born, supusemos que $|\varphi\rangle$ e $|\chi\rangle$ têm norma unitária ($\|\varphi\| = \|\chi\| = 1$). Caso isso não ocorra, podemos sempre dividir o vetor de estado pela sua norma, obtendo

$$P(\varphi \rightarrow \chi) = \frac{|\langle \chi | \varphi \rangle|^2}{\|\chi\|^2 \|\varphi\|^2}.$$

2) Os vetores $|\varphi\rangle$ e $|\varphi'\rangle = e^{i\beta}|\varphi\rangle$ representam o mesmo estado físico, ou seja, ao trocarmos a fase $e^{i\beta}$ de um vetor, não alteramos o estado que ele representa. Isto se deve ao fato de ser impossível distinguir $|\varphi\rangle$ e $|\varphi'\rangle$ em um processo de medida, pois pela regra de Born,

$$P(\varphi' \rightarrow \chi) = |\langle \chi | \varphi' \rangle|^2 = |e^{i\beta} \langle \chi | \varphi \rangle|^2 = |e^{i\beta}|^2 |\langle \chi | \varphi \rangle|^2$$

e como $|e^{i\beta}| = 1$, temos

$$P(\varphi' \rightarrow \chi) = P(\varphi \rightarrow \chi).$$

3) Mudar a fase do vetor, como um todo, não altera seu estado físico. Entretanto, mudar a fase relativa entre dois vetores quaisquer em uma superposição altera o estado representado pela superposição. Considere um estado $|\psi\rangle = \alpha |\varphi\rangle + \eta |\xi\rangle$. Mudando a fase relativa entre os estados $|\varphi\rangle$ e $|\xi\rangle$, temos

$$|\psi'\rangle = \alpha e^{i\beta} |\varphi\rangle + \eta |\xi\rangle.$$

A probabilidade de encontrar $|\chi\rangle$ em uma medida é dada por

$$|\langle \chi | \psi' \rangle|^2 = |\alpha \langle \chi | \varphi \rangle|^2 + |\eta \langle \chi | \xi \rangle|^2 + 2 \operatorname{Re} \{ e^{i\beta} \alpha \eta^* \langle \chi | \varphi \rangle \langle \chi | \xi \rangle^* \}$$

que depende de β e é diferente, em geral, de $|\langle \chi | \psi \rangle|^2$.

3. Quantização das Grandezas Físicas

A uma dada grandeza física \mathcal{A} – por exemplo: energia, momento linear ou posição – está associado um operador A , que age no espaço de estados \mathcal{H} . O operador A é hermitiano ($A^\dagger = A$), e seus autovalores a_n e autovetores $|n\rangle$ são definidos pela relação

$$A|n\rangle = a_n |n\rangle .$$

Três resultados importantes podem ser demonstrados:

- 1) Os autovalores de um operador hermitiano são sempre reais.
- 2) Os autovetores de um operador hermitiano formam uma base ortonormal e qualquer vetor $|\psi\rangle$ pode ser escrito como $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$, com $\langle m | n \rangle = \delta_{mn}$.
- 3) Um operador hermitiano pode ser escrito na forma

$$A = \sum_n |n\rangle a_n \langle n| ,$$

chamada de *representação espectral* de A .

Medidas da grandeza \mathcal{A} podem ter como resultado apenas os autovalores a_n do operador A . Se o sistema está em um estado em que $\mathcal{A} = a_n$, então seu vetor de estado é o autovetor $|n\rangle$.

Pela regra de Born, a probabilidade de uma medida resultar no autovalor a_n é dada por

$$P(\varphi \rightarrow n) = |\langle n | \varphi \rangle|^2 .$$

Com isso, o valor médio (ou valor esperado) da grandeza \mathcal{A} no estado $|\varphi\rangle$ é dado então por

$$\langle A \rangle_\varphi = \sum_n P(\varphi \rightarrow n) a_n = \sum_n |\langle n | \varphi \rangle|^2 a_n = \sum_n \langle \varphi | n \rangle a_n \langle n | \varphi \rangle .$$

Utilizando a representação espectral, vemos que

$$\sum_n \langle \varphi | n \rangle a_n \langle n | \varphi \rangle = \langle \varphi | A | \varphi \rangle$$

e, portanto, o valor esperado de A no estado $|\varphi\rangle$ é

$$\langle A \rangle_\varphi = \langle \varphi | A | \varphi \rangle.$$

4. A Equação de Schrödinger

A evolução temporal do vetor de estado de um sistema quântico é regida pela equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d|\varphi(t)\rangle}{dt} = H|\varphi(t)\rangle$$

onde o operador linear hermitiano H , denominado *hamiltoniano*, representa a energia do sistema.

Algumas propriedades importantes da equação de Schrödinger são:

(1) A equação de Schrödinger é linear: se $|\varphi_1(t)\rangle$ e $|\varphi_2(t)\rangle$ são soluções, então a combinação linear $|\varphi(t)\rangle = a_1|\varphi_1(t)\rangle + a_2|\varphi_2(t)\rangle$ também o é.

(2) A norma do vetor de estado é conservada: $\frac{d\|\varphi(t)\|^2}{dt} = 0$.

4.1. O operador de evolução

Digamos que, no momento $t = t_0$, um sistema esteja em um estado $|\varphi(t_0)\rangle$. Em um instante posterior t , o novo vetor de estado estará associado ao estado inicial pelo *operador de evolução*

$$|\varphi(t)\rangle = U(t, t_0)|\varphi(t_0)\rangle.$$

Devido às propriedades (1) e (2) listadas acima, o operador U é linear e unitário ($U^\dagger U = U U^\dagger = I$).

Em termos desse operador, a equação de Schrödinger fica na forma

$$i\hbar \left[\frac{d}{dt} U(t, t_0) \right] |\varphi(t_0)\rangle = HU(t, t_0)|\varphi(t_0)\rangle.$$

Como $|\varphi(t_0)\rangle$ é arbitrário, temos que

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = HU(t, t_0).$$

Para hamiltonianos que não dependem do tempo, essa equação pode ser resolvida e o operador de evolução é dado por

$$U(t, t_0) = e^{\frac{-i(t-t_0)H}{\hbar}}.$$

5. O colapso da função de onda

Suponhamos, inicialmente, um sistema num estado $|\varphi\rangle$, de modo que

$$|\varphi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle,$$

onde $|n\rangle$ são os autoestados de uma grandeza A , com autovalores a_n .

A probabilidade de uma medida achar o resultado a_n é dada pela regra de Born, $P(\varphi \rightarrow n) = |c_n|^2$. Após a medida que resultou em a_n , o sistema deve estar necessariamente no estado $|n\rangle$, ou seja, com um valor de A bem definido. Dizemos que a função de onda $|\varphi\rangle$ colapsa para o estado $|n\rangle$ por ação da medida. Se uma medida subsequente for imediatamente feita, a probabilidade de encontrarmos o sistema no estado $|n\rangle$ é de 100%.

Logo, existem dois processos de evolução temporal distintos na mecânica quântica. Um deles, bem definido e determinístico, é regido pela equação de Schrödinger. O outro processo, o colapso da função de onda durante uma medida, é aleatório e não descrito pela equação de Schrödinger.

6. Complementaridade e Incerteza

Vamos considerar duas grandezas físicas \mathcal{A} e \mathcal{B} , às quais estão associados os operadores hermitianos A e B , respectivamente. Definimos o comutador de A e B como

$$[A, B] = AB - BA$$

Dizemos que as grandezas são *incompatíveis* (ou *complementares*) quando o comutador delas for diferente de zero. Por exemplo, os operadores posição (X) e momento linear (P), que desempenham papel central na mecânica quântica, têm comutador $[X, P] = i\hbar$. Ou seja, posição e momento são grandezas complementares. O significado físico disso será discutido a seguir.

Como já vimos, o valor médio de uma grandeza A é dado por

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle.$$

O desvio padrão ΔA em torno dessa média é definido por

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

e representa a largura da distribuição de medidas de A em torno do ponto médio. Esse desvio padrão é chamado de *incerteza* de A no estado $|\psi\rangle$.

Dadas duas grandezas A e B , pode-se demonstrar a *relação de incerteza*

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle| .$$

De acordo com essa relação, não é possível definir simultaneamente o valor de grandezas físicas complementares. Voltando ao exemplo da posição e momento linear, como $[X, P] = i\hbar$ temos que $\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$, a relação de incerteza de Heisenberg.

Capítulo 3

Realismo, Teoria Quântica e o Teorema de Bell

1. *Concepções Realista e Não-realista*

A maioria das pessoas acredita na existência de uma realidade objetiva, isto é, algo independente de qualquer observação ou da subjetividade de certo indivíduo. Através de observações ou medidas nós obtemos informações acerca do sistema no qual estamos interessados.

Em um laboratório, essas medidas são feitas através de um aparato experimental que interage com o sistema físico e nos registra o valor da quantidade que estamos estudando. Seguindo a perspectiva realista, tal grandeza existia antes mesmo da interação do aparato com o sistema, ou seja, a aferição desta grandeza somente nos revela seu valor, algo pré-existente à medida, embora desconhecido.

A teoria quântica, no entanto, nos conduz a um caminho oposto ao da “posição realista”. A teoria quântica faz previsões estatísticas sobre o resultado de uma medida e não sobre algo pré-existente. Nas palavras de Pascual Jordan, um dos criadores da mecânica quântica: “*Observações não somente perturbam o que está sendo medido, elas o produzem...*” [Jammer 1974].

2. *O Paradoxo de EPR*

Esta característica *não-realista* da Mecânica Quântica não vai apenas contra o nosso senso comum. Ela incomodava Einstein, que defendia que todas as coisas possuíam características inerentes, estivessem estas sendo medidas ou não. Em uma conversa com Abraham Pais, Einstein teria chegado a perguntar “Você acredita que a Lua não está lá quando não olhamos para ela?”

Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen (EPR), publicaram um artigo no qual argumentavam que a teoria quântica não seria capaz de prover uma descrição completa da realidade física [Einstein 1935]. Sobre o artigo, Leon

Rosenfeld, à época assistente de Bohr, escreveu: “Este ataque desceu sobre nós como um raio caído do céu”.

Em seu artigo, EPR propuseram uma definição de “realidade física”:

Se, sem perturbarmos um sistema, nós pudermos prever com precisão (i.e. com a probabilidade igual à unidade) o valor de uma quantidade física, então existe um elemento de realidade física correspondente a esta quantidade física.

Podemos pensar como esta ideia seria aplicada à mecânica quântica. Por exemplo, consideremos uma partícula em um autoestado de momento linear $|p\rangle$. Não precisamos medir o momento para saber com absoluta certeza o seu valor; nesse caso faz sentido dizer que o momento é um elemento de realidade física associado ao estado $|p\rangle$ [Berche 2005]. No entanto, posição e momento são grandezas complementares. Assim, quando o momento da partícula é conhecido é impossível saber onde ela está; pela mecânica quântica, sua posição não tem realidade física.

A linha de raciocínio proposta por EPR supunha um sistema inicial isolado que posteriormente é dividido em dois fragmentos (partículas 1 e 2), de modo que o momento linear total do sistema seja conservado (Fig. 3.1).

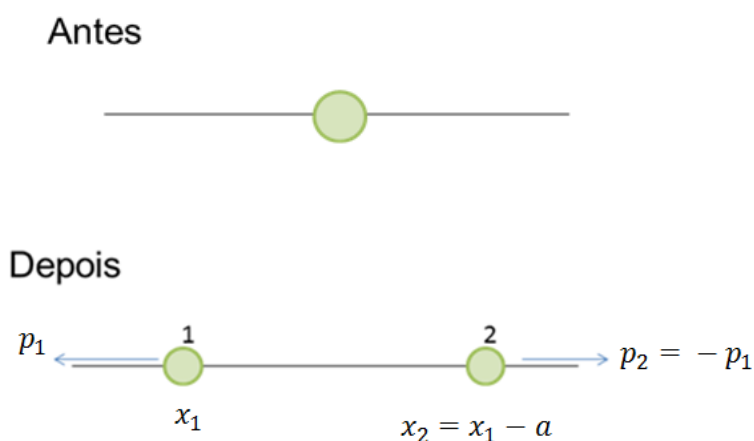


Figura 3.1. O experimento imaginado por EPR

Seja então p_1 o momento da partícula 1 e p_2 o momento da partícula 2 e, analogamente, x_1 a posição da partícula 1 e x_2 a posição da partícula 2, de modo que possamos escrever:

$$P = p_1 + p_2 \quad \text{e} \quad X = x_1 - x_2.$$

Usando a relação básica $[x_a, p_b] = i\hbar\delta_{ab}$, podemos mostrar que X e P comutam:

$$\begin{aligned} [X, P] &= XP - PX = (x_1 - x_2)(p_1 + p_2) - (p_1 + p_2)(x_1 - x_2) = \\ &= x_1p_1 + x_1p_2 - x_2p_1 - x_2p_2 - p_1x_1 + p_1x_2 - p_2x_1 + p_2x_2 = \\ &= x_1p_1 - p_1x_1 - (x_2p_2 - p_2x_2) = i\hbar - i\hbar = 0 \end{aligned}$$

ou seja, X e P podem ser definidos simultaneamente.

É possível, então, preparar o sistema de modo que seu estado seja

$$|\psi\rangle = |P = 0, X = a\rangle,$$

onde a é uma distância conhecida. Com uma medida da posição da partícula 2 (x_2), somos capazes de descobrir a posição da partícula 1, já que $x_1 = x_2 + a$. O mesmo pode ser feito para o momento. Uma medida de p_2 pode nos revelar p_1 , pois $p_1 = -p_2$, sem que haja qualquer tipo de interação entre o observador e a partícula 1. Assim, somos capazes de determinar tanto a posição (x_1) quanto o momento (p_1) da partícula 1 com 100% de probabilidade de encontrarmos o valor previsto. Portanto, existe um elemento de realidade física associada tanto à posição quanto ao momento. Esquemáticamente:

$$\text{Medida de } x_2 \rightarrow \text{revela } x_1 = x_2 + a$$

$$\text{Medida de } p_2 \rightarrow \text{revela } p_1 = -p_2$$

É essencial notar que esse resultado vale não importa quão longe as partículas estejam uma da outra, a pode representar qualquer distância. Como, pela teoria da relatividade, é impossível que uma perturbação se propague instantaneamente de 2 para 1, o critério de realidade EPR é satisfeito.

No entanto, apesar de Einstein ser crítico acerca do não-realismo da mecânica quântica, ele afirmava que a teoria quântica não estava errada, era apenas incompleta. Para ele, uma teoria completa faria as mesmas previsões que a mecânica quântica, mas envolveria variáveis adicionais, chamadas de *variáveis ocultas* numa situação aproximadamente análoga à da Termodinâmica e Física Estatística. A teoria também deveria ser *local*, de modo a impedir interações ou comunicação à distância.

Em 1964, John S. Bell mostrou que uma teoria de variáveis ocultas locais necessariamente entraria em conflito com a mecânica quântica. Esse resultado, o *teorema de Bell*, será demonstrado a seguir.

2. O Teorema de Bell

Imaginemos um sistema em repouso e com momento angular zero que em dado instante se divide em duas partículas de spin $\frac{1}{2}$. Pela conservação do momento angular, a soma dos spins em qualquer direção tem de ser nula. Isso significa que o sistema está no estado “singleto”, dado pelo vetor

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle)$$

(uma compilação de resultados importantes sobre spin $\frac{1}{2}$ está no Apêndice A).

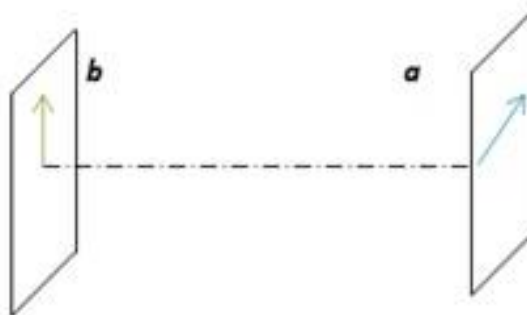


Figura 3.2: Direções das componentes de spin.

Os detectores vistos na figura 3.2 medem a componente do spin em direções especificadas pelos vetores unitários **a** e **b**. Podemos registrar os valores encontrados em uma sequência de medidas preparadas identicamente,

listando-os em uma tabela na qual a medida do spin das duas partículas nas direções especificadas \mathbf{a} e \mathbf{b} só é especificada por dois valores: +1 (spin para cima) ou -1 (spin para baixo). Colocamos, ainda, uma terceira quantidade na tabela representando o produto das duas medidas.

Partícula 1	Partícula 2	Produto (p)
+1	-1	-1
+1	+1	+1
-1	+1	-1
+1	+1	+1
-1	+1	-1
-1	-1	+1
⋮	⋮	⋮

Tabela 3.1: Resultado das medidas nas direções \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Chamaremos a média desses produtos de $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Note que, como o spin total é zero, se os detectores estiverem alinhados o produto das medidas deve ser sempre -1, já que as partículas têm sempre spins opostos em uma dada direção. Portanto, $P(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -1$. Analogamente, quando os detectores estiverem orientados em sentidos opostos, o produto das medidas deve ser sempre +1 e a média dos produtos será $P(\mathbf{a}, -\mathbf{a}) = +1$. Para detectores orientados em direções arbitrárias \mathbf{a} e \mathbf{b} , não podemos dizer que estes valores dos produtos das medidas sejam sempre os mesmos, como ilustrado na tabela 3.1. Faremos uma comparação entre as propriedades da média “clássica” (ou melhor, a média prevista por qualquer teoria realista e local) e os resultados da teoria quântica.

Para começar calcularemos a média “clássica”, supondo que existem variáveis ocultas. Isso significa que a projeção $A(\mathbf{a}, \lambda)$ do spin da partícula 1 ao longo da direção \mathbf{a} está definida por um parâmetro λ , a variável oculta (pode haver mais de uma variável oculta e nesse caso λ representa o conjunto delas). O “realismo” vem do fato de o valor $A(\mathbf{a}, \lambda)$ existir antes da medida, e não ser criado por ela. A imprevisibilidade do resultado das medidas é explicada por

não conhecermos o valor da variável oculta λ . De forma análoga, definimos $B(\mathbf{b}, \lambda)$ como o valor do spin da partícula 2 ao longo da direção \mathbf{b} . A hipótese de localidade está implícita nessas definições, pois estamos supondo que, devido à separação entre os dois aparelhos de medida, $A(\mathbf{a}, \lambda)$ não depende da orientação de \mathbf{b} , nem $B(\mathbf{b}, \lambda)$ depende de \mathbf{a} (do contrário escreveríamos $A(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda)$ e $B(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \lambda)$). Assim como na tabela anterior, supomos $A(\mathbf{a}, \lambda)$ e $B(\mathbf{b}, \lambda)$ só podem assumir os valores $+1$ (spin para cima) ou -1 (spin para baixo). Quando os detectores estão alinhados, paralela ou antiparalelamente, temos que $A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm B(\mp \mathbf{a}, \lambda)$ para qualquer λ .

Em muitas repetições de medidas de A e B , a variável oculta λ varia estatisticamente conforme uma distribuição $\rho(\lambda)$, onde $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$. A média do produto das medições é, então

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) d\lambda .$$

Mas,

$$B(\mathbf{b}, \lambda) = -A(\mathbf{b}, \lambda),$$

de modo que,

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) d\lambda .$$

Da mesma forma, tomando uma terceira direção \mathbf{c} ,

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) d\lambda ,$$

e portanto

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int \rho(\lambda) [A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] d\lambda .$$

Como as funções $A(\mathbf{a}, \lambda)$, $A(\mathbf{b}, \lambda)$ e $A(\mathbf{c}, \lambda)$ só podem assumir os valores ± 1 , o quadrado de qualquer uma delas só pode ter como resultado o valor 1. Em particular,

$$[A(\mathbf{b}, \lambda)]^2 = 1$$

e, portanto,

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int \rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) d\lambda.$$

O módulo dessa diferença obedece à desigualdade

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq \int |\rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda)| d\lambda.$$

Como $\rho(\lambda) \geq 0$, $[1 - A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] \geq 0$ e $|A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda)| = 1$, a desigualdade acima reduz-se a

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq \int \rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] d\lambda$$

que pode ser reescrita como

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Esta é a *desigualdade de Bell* [Bell 1964], que deve ser obedecida por qualquer teoria realista e local.

A mecânica quântica prevê que $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (uma demonstração desse resultado está no Apêndice). Podemos ver que, para determinadas orientações dos vetores unitários, a desigualdade de Bell é violada. Por exemplo, se fizermos \mathbf{a} e \mathbf{b} perpendiculares entre si e \mathbf{c} formando um ângulo de 45° com \mathbf{a} e \mathbf{b} (ver figura 3.3), então

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| = |-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}| = \left| 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se a desigualdade de Bell fosse obedecida por esses valores, teríamos

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ou seja,

$$\sqrt{2} \leq 1,$$

um resultado absurdo.

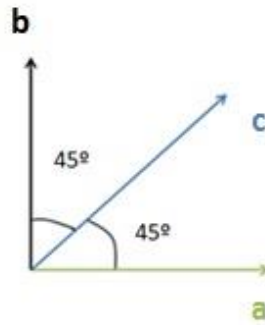


Figura 3.3: Um arranjo dos vetores **a**, **b** e **c** que viola a desigualdade de Bell.

Com esses resultados, a mecânica quântica se mostra incompatível com qualquer teoria de variáveis ocultas locais. A ideia de Einstein, de completar a teoria quântica com variáveis que restaurassem o realismo e impusessem a localidade, é impraticável. Ou o realismo ou a localidade devem ser abandonados.

A desigualdade que obtivemos acima é apenas uma de muitas relações equivalentes que podem ser demonstradas, conhecidas coletivamente como desigualdades de Bell. A mais conhecida é a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) [Clauser 1969], mais fácil de testar experimentalmente que a desigualdade original de Bell.

Capítulo 4

Outras Demonstrações do Teorema de Bell

No capítulo anterior, falamos sobre o caráter não-realista da teoria quântica e de como a ideia de variáveis ocultas locais se mostrou incompatível com esta teoria. Neste capítulo faremos uma revisão de outras demonstrações do teorema de Bell. Elas não apenas são mais simples que a demonstração original de Bell (todas foram publicadas em periódicos dedicados ao ensino de física ou divulgação científica) mas, e isso é o mais importante, permitem analisar o significado do teorema de pontos de vista diferentes e reveladores. Discutiremos três demonstrações: a de Herbert [Herbert 1975], provavelmente a mais simples de todas, desenvolvida posteriormente por Kuttner e Roseblum [Kuttner 2010], a de d’Espagnat, que reduz-se à análise de um simples desenho [d’Espagnat 1979] e finalmente a de Peres, em que a hipótese realista aparece sem menção explícita a variáveis ocultas [Peres 1978].

1. Herbert (1975), Kuttner e Roseblum (2010)

O experimento imaginado nesta demonstração é semelhante ao adotado por Bell, mas utiliza fótons em vez das partículas de spin $\frac{1}{2}$. Uma fonte emite um par de fótons e dois observadores, que chamaremos de Alice e Bob, irão medir a polarização de cada fóton do par com o auxílio de polarizadores. Em cada medida só há dois resultados possíveis: o fóton passa pelo polarizador ou não.

Uma dada direção de polarização será atribuída a cada fóton do experimento, definida por uma variável oculta que, seguindo a ideia de realismo, define a direção de polarização antes mesmo de a medida ser efetuada. Representaremos essa variável oculta por meio de “varetas”, de modo que a orientação destas no espaço definirá a polarização de um fóton. As varetas representam, então, o caráter realista da polarização dos fótons. A localidade (ou *separabilidade*), a segunda hipótese básica do teorema de Bell,

vem da suposição que, para dois fótons suficientemente distantes, a medida da polarização em um deles não deve afetar o resultado de medidas feitas no outro.

Herbert, Kuttner e Rosenblum obtiveram uma desigualdade de Bell comparando quatro configurações diferentes de seu experimento imaginado. Descreveremos estas configurações a seguir.

Experimento 1

Uma fonte, mais próxima de Alice do que de Bob, emite fótons em sentidos opostos. Estes observadores mantêm seus polarizadores alinhados na direção vertical, conforme mostra a figura 4.1 (a escolha da direção vertical é irrelevante; o importante é que os polarizadores estejam alinhados entre si).

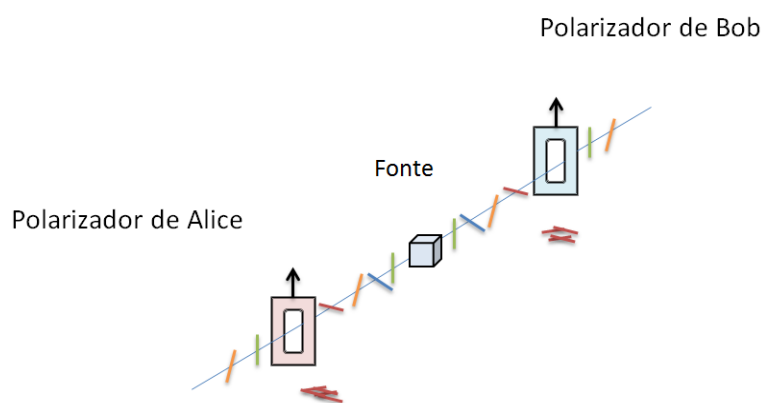


Figura 4.1. Experimento 1: os polarizadores de Alice e Bob estão alinhados.

Após muitas medidas, Alice e Bob comparam seus resultados e observam uma similaridade nestes: toda vez que um fóton passava pelo polarizador de Alice, seu par também passava pelo polarizador de Bob e toda vez que um fóton não passava pelo polarizador de Alice, seu par também não passava pelo de Bob. Assim, como um dos fótons chegava ao polarizador de Alice antes de seu par chegar ao polarizador de Bob, esta poderia prever o resultado a ser obtido por Bob. Esses resultados se repetem para qualquer orientação dos polarizadores, desde que elas sejam idênticas.

Experimento 2

O experimento-pensado 2 é análogo ao anterior, mas desta vez Alice rotaciona o seu polarizador de um ângulo θ em relação à vertical, conforme mostra a figura 4.2.

Observamos que um fóton que anteriormente passava pelo polarizador de Alice, agora pode não passar. Da mesma forma, um fóton que não passava pelo polarizador de Alice no experimento 1, agora tem certa chance de passar. Uma rotação do polarizador de Alice não deveria afetar os resultados das medidas de Bob já que estamos supondo que a separabilidade (localidade) é válida. Quando, depois de muitas medidas, os observadores comparam os seus resultados, estes percebem, por exemplo, uma discrepância da ordem de 5% entre os resultados de suas medidas.

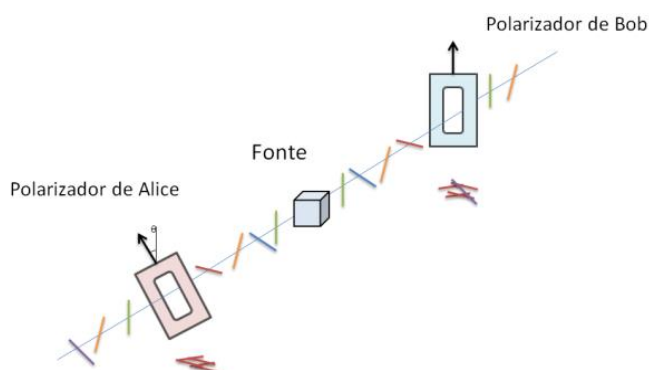


Figura 4.2. Experimento 2: o polarizador de Alice aponta para uma direção diferente.

Experimento 3

Nesta situação, quem coloca seu polarizador a um ângulo θ em relação à vertical é Bob, enquanto Alice alinha o seu polarizador com a vertical. Podemos prever que as mesmas correlações do experimento 2 devem ser encontradas, ou seja, deve haver uma discrepância de 5% entre as medidas, já que a situação proposta é equivalente àquela do experimento 2.

Experimento 4

Agora, ambos os observadores giram seus polarizadores de um ângulo θ , mas em sentidos opostos, como mostra a figura 4.3. Cada observador deve esperar que, em relação à situação original, 5% dos fótons tenham destino diferente nos polarizadores, tal como ocorreu nos experimentos 2 e 3. Mas o que acontece quando os observadores comparam os resultados do experimento 4? A primeira vista, poderíamos pensar que as discrepâncias seriam de 10%, a soma dos 5% de mudança nos resultados de Alice e Bob em relação ao experimento 1. Entretanto, esse raciocínio não é correto, pois ignora a possibilidade de discrepâncias observadas nos experimentos 2 e 3 serem canceladas, produzindo uma concordância. Por exemplo, consideremos que ao encontrar a configuração do experimento 2, um dos fótons de um par passa pelo polarizador de Alice e o outro não passa pelo de Bob. Isso vai gerar uma das discrepâncias observadas na comparação de resultados. Consideremos também que, se a configuração encontrada pelo mesmo par fosse a do experimento 3, um fóton passaria pelo polarizador de Bob e o outro não passaria pelo de Alice. Novamente teríamos uma discrepância. Mas, se o mesmo par dos casos anteriores encontrasse a montagem do experimento 4, os dois fótons deveriam passar pelos polarizadores, gerando uma concordância.

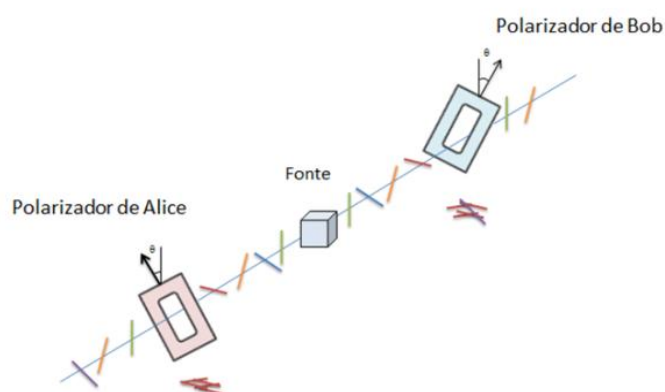


Figura 2.3. Experimento 4: os polarizadores de Alice e Bob mudam de orientação.

As “duplas mudanças” fazem com que a diferença entre os resultados de Alice e Bob no experimento 4 deva ser menor do que 10%. De maneira mais geral [Kuttner 2010]:

“A discrepância entre os resultados obtidos, quando ambos os observadores giram de θ seus polarizadores em sentidos opostos, tem de ser igual a, ou menor que o dobro da discrepância para uma rotação de θ de apenas um polarizador.”

Essa é a desigualdade de Bell, expressa em palavras.

Também poderíamos pensar em uma situação análoga à do experimento 4, supondo que Alice rotaciona seu polarizador de um ângulo 2θ , enquanto Bob mantém o seu alinhado com a vertical. Como não há nenhuma direção privilegiada, podemos esperar obter correlações análogas às obtidas no experimento 4. Seguindo esta ideia, a desigualdade de Bell é reescrita como [Kuttner 2010]:

“A taxa de discrepância criada pela rotação de um único polarizador por um ângulo 2θ é menor ou igual ao dobro da taxa de discrepância produzida pela rotação do polarizador por um ângulo θ .”

Vamos ver agora o que a mecânica quântica diz sobre esta desigualdade. Sabemos que se a luz polarizada na direção α incidir sobre um polarizador alinhado com a direção β , então a intensidade de luz que atravessa o polarizador é dada pela Lei de Malus,

$$I = I_0 \cos^2(\beta - \alpha),$$

onde I_0 e I são as intensidades luminosas antes e depois do polarizador. Essa lei pode ser reinterpretada em termos de fótons. A probabilidade de um fóton com polarização linear α passar pelo polarizador alinhado com a direção β é dada então por

$$P(+)=\frac{I}{I_0}=\cos^2(\beta-\alpha).$$

A probabilidade do fóton não passar pelo polarizador é, portanto,

$$P(-) = 1 - P(+) = 1 - \cos^2(\beta - \alpha) = \sin^2(\beta - \alpha) .$$

Digamos que um fóton passe pelo polarizador de Alice, que está alinhado com a vertical. Sabemos que o fóton que viaja no sentido de Bob tem polarização vertical. Assim caso o polarizador de Bob esteja fazendo um ângulo θ com a vertical, então a probabilidade de o fóton com polarização vertical não passar pelo polarizador de Bob e, assim, gerar uma discrepância entre os dados de Alice e Bob é dada por $P(-) = \sin^2\theta$. Substituindo esse resultado na desigualdade de Bell obtemos

$$\sin^2(2\theta) \leq 2 \sin^2(\theta).$$

Se considerarmos ângulos muito pequenos, $\theta \ll 1$, a desigualdade acima torna-se

$$4\theta^2 \leq 2\theta^2,$$

um resultado absurdo. Portanto, interpretada quanticamente em termos de fótons, a lei de Malus é incompatível com as noções de realismo e localidade. As violações da desigualdade de Bell não se restringem a ângulos infinitesimais. Para $\theta = 22,5^\circ$, por exemplo, temos que

$$\sin^2(45^\circ) \leq 2 \sin^2(22,5^\circ) \Rightarrow 0,5 \leq 0,29 ,$$

novamente um resultado absurdo.

2. d'Espagnat (1979)

Discutiremos aqui a demonstração do teorema de Bell dada por Bernard d'Espagnat em um artigo na *Scientific American* [d'Espagnat 1979]. Como veremos, ela envolve pouco mais que a análise de um diagrama de Venn. Vamos supor, novamente, o experimento imaginado por Bell com duas partículas de spin $\frac{1}{2}$ (por exemplo, dois prótons) em um estado de spin total zero (estado singleto). Com o auxílio de detectores, podemos medir as componentes do spin de cada partícula ao longo de três direções arbitrárias, as

quais denotaremos por A , B e C . Os detectores só podem medir uma componente de spin por vez. Segundo a perspectiva da Mecânica Quântica, a partícula não possuía qualquer quantidade de spin antes da medida, ou seja, a medida produziu o resultado obtido. Deste ponto de vista, não podemos fazer duas medidas subsequentes para determinar, por exemplo, as componentes nas direções A e B . Quando uma medida é feita, alteramos o estado de spin da partícula e, em uma medida subsequente, o próton não estaria no mesmo estado anterior.

Se uma medida é feita, por exemplo, na direção A e um resultado positivo é encontrado, denotaremos esse resultado por A^+ . Pelo fato de estarmos tratando de prótons em um estado singleto, sabemos que, desta o seu par só pode assumir um valor negativo nesta mesma direção – o qual denotaremos por A^- . O mesmo raciocínio é válido para as outras duas direções B e C que só podem assumir os valores B^+ , B^- e C^+ , C^- .

Embora não seja possível medir duas componentes de spin de um único próton, em uma perspectiva realista essas quantidades sempre existem. Assim, denotaremos um próton com componentes na direção A positiva e B negativa, por exemplo, como A^+B^- .

Representamos as componentes de spin de um próton nas direções A , B e C através de um diagrama de Venn (figura 4.4). Por questão de clareza, omitiremos as componentes negativas de spin nas três direções citadas acima. Identificaremos, por exemplo, o conjunto A^- como o conjunto complementar ao conjunto A^+ . Aplicaremos, também, o mesmo raciocínio às outras duas componentes negativas B^- e C^- . Cada ponto dentro no diagrama corresponde a um valor da variável oculta, ou seja, as três componentes de spin estão todas definidas ao mesmo tempo, mesmo sendo impossível medi-las simultaneamente. Assumiremos que a área total do diagrama é igual à unidade, e que as áreas de cada subconjunto correspondem à probabilidade de uma determinada configuração (por exemplo, $A^+B^-C^+$) ser produzida no experimento.

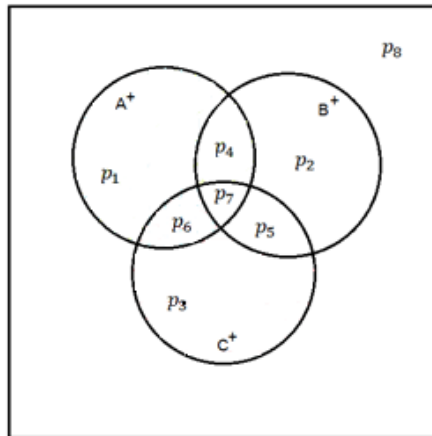


Figura 4.4. Componentes do spin em três direções diferentes A , B e C . As áreas correspondem à probabilidade da variável oculta ocupar cada região.

Analisando a figura 4.4, vemos que a probabilidade de um próton ter componentes de spin A^+ e B^- é dada por

$$P(A^+B^-) = p_1 + p_6.$$

Também podemos escrever, seguindo o mesmo raciocínio, que

$$P(A^+C^-) = p_1 + p_4$$

e

$$P(C^+B^-) = p_3 + p_6.$$

Somando os termos acima, temos que

$$P(A^+C^-) + P(C^+B^-) = p_1 + p_4 + p_3 + p_6,$$

e portanto

$$P(A^+C^-) + P(C^+B^-) = P(A^+B^-) + p_3 + p_4.$$

Como p_3 e p_4 são probabilidades e, assim, são sempre maiores ou iguais a zero, podemos escrever a desigualdade

$$P(A^+C^-) + P(C^+B^-) \geq P(A^+B^-).$$

Esta desigualdade não pode ser testada experimentalmente, pois não é possível medir duas componentes do spin ao mesmo tempo. Entretanto, podemos utilizar o estado singleto do par de prótons para, através de medidas

em prótons diferentes, determinar duas componentes de spin de um único próton. Assim, denotaremos a probabilidade de encontrarmos um par de prótons com valor de spin A^+B^+ por $p(A^+B^+)$, onde a primeira componente, A^+ , se refere a um dos prótons do par e a segunda componente, B^+ , se refere ao outro membro do par. Assim, podemos reescrever a desigualdade acima em termos do par de prótons

$$p(A^+B^+) \leq p(A^+C^+) + p(B^+C^+).$$

Esta é uma desigualdade de Bell.

Vamos agora analisar se mecânica quântica respeita a desigualdade acima. Para duas partículas de spin $\frac{1}{2}$ no estado singleto, digamos que as grandezas A , B e C sejam as projeções do spin destas partículas em três direções arbitrárias α , β e γ . Por simplicidade vamos supor que as três direções estão sobre um mesmo plano.

A probabilidade de uma medida encontrar ambas as partículas com spin “para cima” em direções θ_1 e θ_2 no plano de referência é dada por

$$p(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \left[\frac{(\theta_1 - \theta_2)}{2} \right].$$

Uma demonstração desse resultado está no Apêndice. Com isso temos

$$p(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \left[\frac{(\alpha - \beta)}{2} \right],$$

$$p(\alpha, \gamma) = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \left[\frac{(\alpha - \gamma)}{2} \right],$$

$$p(\beta, \gamma) = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \left[\frac{(\beta - \gamma)}{2} \right].$$

Substituindo esses resultados na desigualdade de Bell

$$P(\alpha, \beta) \leq P(\alpha, \gamma) + P(\beta, \gamma)$$

obtemos

$$\text{sen}^2 \left[\frac{(\alpha - \beta)}{2} \right] \leq \text{sen}^2 \left[\frac{(\alpha - \gamma)}{2} \right] + \text{sen}^2 \left[\frac{(\beta - \gamma)}{2} \right].$$

Se, por exemplo, $\gamma = 0$, $\alpha = \theta$ e $\beta = -\theta$, a desigualdade acima reduz-se a

$$\text{sen}^2(\theta) \leq 2 \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Com já vimos, essa desigualdade é violada em uma extensa faixa de ângulos. Em particular, para valores pequenos de θ ela reduz-se a

$$\theta^2 \leq \frac{1}{2}\theta^2,$$

um resultado absurdo.

3. Peres (1978)

A última demonstração do teorema de Bell que descreveremos foi dada por Asher Peres em um artigo intitulado “*Unperformed experiments have no results*” (“*Experimentos não realizados não têm resultado algum*”) [Peres 1978].

Suponhamos que uma bomba (figura 4.5), inicialmente em repouso, exploda dividindo-se em duas partes. Devido à conservação do momento angular, sabemos que o momento angular total do sistema após a explosão deve ser igual a zero – já que a bomba se encontrava em repouso antes da explosão. Suponhamos, agora, que dois observadores façam medidas do momento angular de cada fragmento da bomba. O primeiro observador mede a orientação do momento angular do fragmento 1 ao longo de uma direção arbitrária α , e registra o sinal desta componente

$$r_\alpha = \text{sinal}(\alpha \cdot \mathbf{L}_1).$$

Note que a medida pode ter apenas dois resultados: +1 se a componente do momento angular na direção α for positiva e -1 se ela for negativa. O segundo observador mede o momento angular do outro fragmento ao longo de outra direção arbitrária β , registrando o valor

$$r_\beta = \text{sinal}(\beta \cdot \mathbf{L}_2).$$

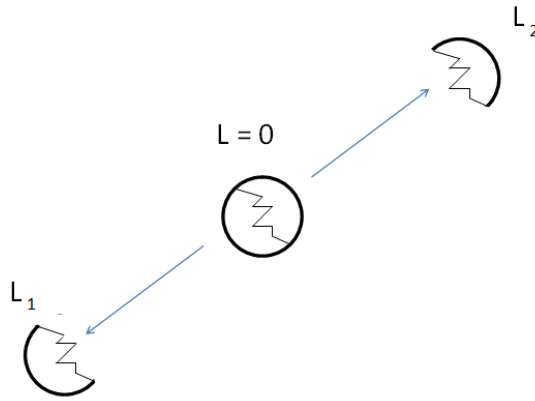


Figura 4.5 O experimento imaginado por Peres.

Após repetir o experimento N vezes, podemos calcular o valor médio das medidas dos observadores,

$$\langle r_\alpha \rangle = \frac{\sum r_{j\alpha}}{N},$$

$$\langle r_\beta \rangle = \frac{\sum r_{j\beta}}{N},$$

onde o índice de soma j representa cada medida, e α e β indicam a orientação (fixa) dos detectores. Por hipótese, não há direção preferencial para L_1 , de modo que a probabilidade de uma medida resultar em $+1$ ou -1 é a mesma. Então, se o número de medidas for muito grande, as duas médias terão valor zero (a menos de pequenas flutuações estatísticas).

Podemos, também, calcular a média do produto de tais medidas, de modo a obter

$$\langle r_\alpha r_\beta \rangle = \frac{1}{N} \sum r_{j\alpha} r_{j\beta}.$$

Esta média, ao contrário das anteriores, pode diferir de zero. Por exemplo, quando os detectores estiverem alinhados ($\alpha = \beta$), a média será $\langle r_\alpha r_\beta \rangle = -1$.

Se os observadores estiverem longe um do outro, nós esperamos que as medidas feitas por um deles não interfiram nas medidas feitas pelo outro. Podemos pensar no que teria acontecido se os observadores 1 e 2 tivessem alinhado seus respectivos detectores em outra direção, por exemplo, α' e β' .

Já que os experimentos não foram realizados, não temos como precisar seus resultados. No entanto, sabemos que os resultados de medidas de $r_{\alpha'}$ e $r_{\beta'}$ só podem assumir os valores ± 1 . A tabela 4.1 simula resultados de medidas de (r_{α}, r_{β}) e coloca interrogações no lugar dos valores de $(r_{\alpha'}, r_{\beta'})$, que não foram medidos mas que, por hipótese, existem.

r_{α}	r_{β}	$r_{\alpha'}$	$r_{\beta'}$
+1	-1	?	?
-1	-1	?	?
+1	+1	?	?
⋮	⋮	⋮	⋮

Tabela 4.1 Valores das grandezas $r_{\alpha}, r_{\beta}, r_{\alpha'}, r_{\beta'}$. As duas primeiras são determinadas por medidas; as últimas não foram medidas e portanto seus valores são desconhecidos (mas existem e só podem ser ± 1).

Para demonstrar a desigualdade de Bell, partiremos da igualdade

$$r_{j\alpha}r_{j\beta} + r_{j\alpha}r_{j\beta'} + r_{j\alpha'}r_{j\beta} - r_{j\alpha'}r_{j\beta'} = \pm 2$$

que pode ser facilmente demonstrada escrevendo o lado esquerdo como

$$r_{j\alpha}(r_{j\beta} + r_{j\beta'}) + r_{j\alpha'}(r_{j\beta} - r_{j\beta'})$$

e notando que apenas uma das parcelas pode ser diferente de zero, valendo nesse caso ± 2 .

Como a quantidade acima só pode assumir os valores ± 2 , sua média sobre várias medidas tem que estar entre esses dois números

$$-2 \leq \langle r_{\alpha}r_{\beta} \rangle + \langle r_{\alpha}r_{\beta'} \rangle + \langle r_{\alpha'}r_{\beta} \rangle - \langle r_{\alpha'}r_{\beta'} \rangle \leq 2.$$

Tomando o módulo dessa expressão, obtemos

$$|\langle r_{\alpha}r_{\beta} \rangle + \langle r_{\alpha}r_{\beta'} \rangle + \langle r_{\alpha'}r_{\beta} \rangle - \langle r_{\alpha'}r_{\beta'} \rangle| \leq 2.$$

Esta é uma desigualdade de Bell. Mais exatamente, é a desigualdade de CHSH, à qual já nos referimos [Clauser 1969].

Para calcular a previsão da mecânica quântica, consideremos que os dois fragmentos são partículas de spin $\frac{1}{2}$, em um estado de spin total zero (o singlete $|0\rangle$). Os observadores medem as quantidades

$$r_\alpha = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1,$$

$$r_\beta = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2,$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_1$ e $\boldsymbol{\sigma}_2$ representam as matrizes de Pauli. Com isso, r_α e r_β só podem tomar os valores ± 1 . A média dos produtos $r_\alpha r_\beta$ é dada por

$$\langle r_\alpha r_\beta \rangle = \langle 0 | (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) | 0 \rangle,$$

que resulta em (ver o Apêndice)

$$\langle r_\alpha r_\beta \rangle = -\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}.$$

Para testar a desigualdade de Bell, vamos supor que $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, enquanto $\boldsymbol{\alpha}'$ e $\boldsymbol{\beta}'$ formam um ângulo θ com $\boldsymbol{\alpha}$, de acordo com a figura 4.6.

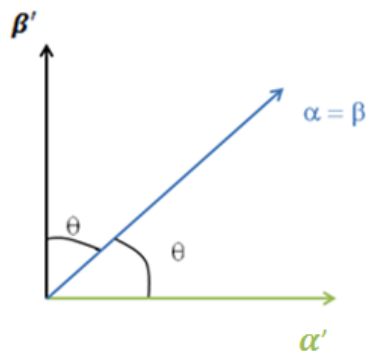


Figura 4.6. Orientações dos vetores $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}'$, $\boldsymbol{\beta}'$.

Com essa escolha, a desigualdade de Bell fica

$$F(\theta) = |1 + 2 \cos \theta - \cos 2\theta| \leq 2.$$

A figura 4.7 mostra que a desigualdade de Bell é violada para todos os ângulos menores que 90° .

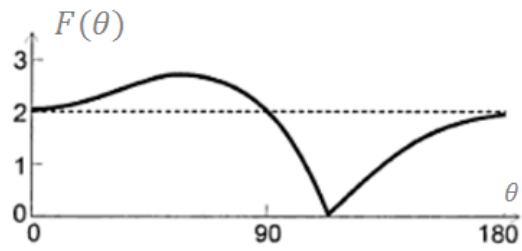


Figura 4.7. Violações da desigualdade de Bell.¹

É interessante notar que não usamos variáveis ocultas nessa demonstração. Em vez disso, apenas fizemos suposições sobre o resultado de experimentos que poderiam ter sido feitos, mas não o foram. Ou seja, partimos da ideia que todas as coisas possuem uma realidade – estejam ou não sendo medidas.

¹ Adaptado de Conceitos de Física Quântica 2, Volume 2, Osvaldo Pessoa Jr, pág 265

Capítulo 5

Conclusão

O teste experimental da desigualdade de Bell se deu, primeiramente, com John Clauser em 1960. Os resultados obtidos por Clauser, que confirmavam a teoria quântica, foram ignorados pela comunidade científica da época. Alguns anos mais tarde Alain Aspect confirmou os resultados de Clauser, mostrando com grande precisão que a desigualdade de Bell era violada da maneira prevista pela mecânica quântica. Assim, tivemos a confirmação experimental de que em nosso mundo realismo e localidade não podem coexistir, um resultado que altera profundamente nossa visão na natureza.

Neste trabalho discutimos os princípios da mecânica quântica e como estes levam a uma concepção não-realista do mundo. Em seguida, apresentamos o teorema de Bell como proposto originalmente pelo próprio. Finalmente, descrevemos três demonstrações diferentes do teorema, todas mais simples que a original e cada uma apresentando um enfoque diferente para as questões básicas envolvidas.

Esperamos com isso ter contribuído para uma melhor compreensão do teorema de Bell por parte de pessoas que, por ventura, estejam tendo um primeiro contato com o assunto.

Apêndice

Spin $\frac{1}{2}$

Neste apêndice abordaremos algumas propriedades de partículas com spin $\frac{1}{2}$ que são úteis em discussões do teorema de Bell. Os operadores S_z , S_y e S_x associados ao spin nas direções z , y e x têm representação matricial dada por

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ou ainda,

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ representa as matrizes de Pauli

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essas matrizes têm autovalores ± 1 , de modo que as componentes de \mathbf{S} só podem assumir os valores $\pm \hbar/2$.

Os autovetores de S_z correspondentes aos autovalores $S_z = \pm \hbar/2$ são, respectivamente,

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos, também, escrever o operador \mathbf{S} em uma direção arbitrária $\hat{\mathbf{n}}$

$$S_{\hat{\mathbf{n}}} = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta)e^{i\varphi} \\ \text{sen}(\theta)e^{-i\varphi} & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

onde θ e φ são os ângulos polar e azimutal usuais das coordenadas esféricas, mostrados na figura A.1.

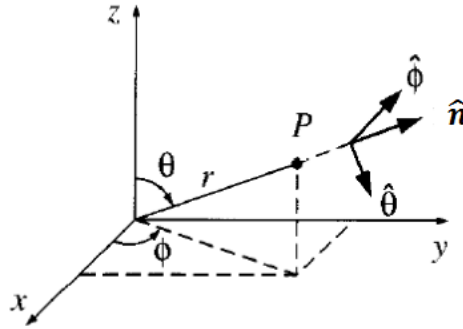


Figura A.1. Definição das coordenadas esféricas.

Os autovetores de $S_{\hat{n}}$ correspondentes aos autovalores $S_{\hat{n}} = \pm \hbar/2$, são

$$|n_+\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}|-\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \text{sen}(\theta/2)e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

$$|n_-\rangle = \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}|-\rangle = \begin{pmatrix} \text{sen}(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2)e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

O Estado Singlete

Seja $|0\rangle$ o estado de duas partículas de spin 1/2 com spin total zero,

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2$$

onde os índices 1 e 2 referem aos estados das partículas 1 e 2.

O valor médio do produto das componentes de spin em direções α e β é dado por

$$\langle 0 | (\alpha \cdot \sigma_1) (\beta \cdot \sigma_2) | 0 \rangle.$$

Tomando os vetores α e β no plano x-z, os operadores $\alpha \cdot \sigma_1$ e $\beta \cdot \sigma_2$ são representados pelas matrizes

$$\alpha \cdot \sigma_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}_1$$

$$\beta \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\beta) & -\cos(\beta) \end{pmatrix}_2$$

onde $\alpha \cdot \sigma_1$ só age no estado de spin da partícula 1 e $\beta \cdot \sigma_2$ no estado de spin da 2.

Aplicando o operador $\beta \cdot \sigma_2$ em $|0\rangle$ obtemos

$$\beta \cdot \sigma_2 |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} \text{sen}(\beta) \\ -\text{cos}(\beta) \end{pmatrix}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} \text{cos}(\beta) \\ \text{sen}(\beta) \end{pmatrix}_2.$$

Aplicando, agora, o operador $\alpha \cdot \sigma_1$ em $\beta \cdot \sigma_2 |0\rangle$ obtemos

$$(\alpha \cdot \sigma_1)(\beta \cdot \sigma_2)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \text{cos}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} \text{sen}(\beta) \\ -\text{cos}(\beta) \end{pmatrix}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \text{sen}(\alpha) \\ -\text{cos}(\alpha) \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} \text{cos}(\beta) \\ \text{sen}(\beta) \end{pmatrix}_2.$$

Como $\langle 0| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0)_1(0, 1)_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1)_1(1, 0)_2$, temos finalmente que

$$\langle 0|(\alpha \cdot \sigma_1)(\beta \cdot \sigma_2)|0\rangle = -\text{cos}(\alpha)\text{cos}(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta),$$

ou seja,

$$\langle 0|(\alpha \cdot \sigma_1)(\beta \cdot \sigma_2)|0\rangle = -\text{cos}(\alpha - \beta),$$

ou ainda,

$$\langle 0|(\alpha \cdot \sigma_1)(\beta \cdot \sigma_2)|0\rangle = -\alpha \cdot \beta.$$

A amplitude de probabilidade de uma medida encontrar os spins para cima nas direções α e β é

$$\begin{aligned} \langle \alpha_+ \beta_+ | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \alpha_+ | + \rangle \langle \beta_+ | - \rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \alpha_+ | - \rangle \langle \beta_+ | + \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\text{cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{cos}\left(\frac{\beta}{2}\right) \right] = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right). \end{aligned}$$

e a probabilidade correspondente é

$$P(\alpha, \beta) = |\langle \alpha_+ \beta_+ | 0 \rangle|^2 = \frac{1}{2} \text{sen}^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

Referências

[Bell 1964] J. S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics 1 (1964) 195. Reproduzidoem J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (Cambridge U. Press 1987).

[Berche 2005] B. Berche, C. Chatelain, T. Gourieux e D. Karevski, *Historical and interpretative aspects of quantum mechanics: a physicists' naive approach*, Condensed Matter Physics 9 (2006) 319.

[Clauser 1969] J. F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt, *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*, Phys. Rev. Lett. 23(1969) 880.

[d'Espagnat 1979] B. d'Espagnat, *The Quantum Theory and Reality*, Scientific American, p. 158, Nov. 1979.

[Dirac 1958] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4a edição, p.4 (Oxford U. Press, 1958).

[Einstein 1935] A. Einstein, B. Podolsky e N Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?*, Physical Review 47 (1935) 777.

[Jammer 1974] M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, p.151 (Wiley 1974).

[Kuttner 2010] F. Kuttner, B. Rosenblum, *Bell's Theorem and Einstein's 'Spooky Actions' from a Simple Thought Experiment*, The Physics Teacher 48 (2010) 124.

[Herbert 1975] N. Herbert, *Cryptographic approach to hidden variables*, American Journal of Physics 43 (1975) 315.

[Peres 1978] A. Peres, *Unperformed experiments have no results*, American Journal of Physics 46 (1978) 745.