


ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO

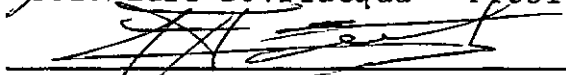
PASSO A PASSO


Suely da Silva Guimarães

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTEN-
ÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.)

Aprovada por.


Prof. Luiz Bevilacqua - Presidente


Prof. Agustin Ferrante


Prof. Humberto Lima Soriano

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
FEVEREIRO DE 1977

A meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Luiz Bevilacqua pelo exemplo, ensinamentos e orientação;

A Augusto Cezar Galeão e Abimael Loula pelas valiosas discussões e contribuições dadas;

A João Lima Rocha pela constante ajuda;

Ao GRADCON, grupo de estudos no qual muito aprendi durante suas reuniões;

A Anselmo Góis de Andrade, pelo cuidado com que executou os desenhos;

A Maria de Lourdes de Almeida pela datilografia do texto;

A Roberto pelo incentivo, apoio e discussões constantes durante a confecção da tese;

Ao CNPq, COPPE e Fundação Escola Politécnica da Bahia pelo suporte financeiro;

A todos aqueles que contribuíram para a realização desse trabalho.

SUMÁRIO

Neste trabalho são estudados os métodos de integração passo a passo Galerkin e Newmark.

Utilizando-se o teorema da equivalência de Lax e Richtmyer são estabelecidos critérios de convergência para esses algoritmos de integração numérica.

Finalmente é feito um estudo comparativo dos dois métodos quando aplicados a um sistema de um grau de liberdade.

ABSTRACT

In this work the Galerkin's and Newmark's step-by-step integration methods are studied.

Using the Equivalence Theorem, due to Lax and Richtmyer, convergence criteria are established to these algorithms.

Finally a comparison between these two methods, when applied to a single degree of freedom system, is done.

ÍNDICE

	pg.
CAPÍTULO I - Solução das equações do Movimento - Instituição dos Métodos de Galerkin e Newmark.....	1
I.1 - Considerações Gerais	1
I.2 - Método de Galerkin	3
I.3 - Newmark - Método das Acelerações Generalizadas	8
I.4 - Comentários	12
CAPÍTULO II - Análise da Convergência e Estabili- dade - Problema sem Amortecimento..	14
II.1 - Introdução	14
II.2 - Teorema da Equivalência.....	16
II.3 - Problema bem Posto	16
II.4 - Convergência	17
II.5 - Estabilidade	18
II.6 - Condição de Consistência	18
II.7 - Verificação da Consistência....	20
II.7.1 - Método de Galerkin.....	20
II.7.2 - Método de Newmark.....	22
II.8 - Influência das Cargas Externas.	24
II.9 - Análise da Estabilidade.....	25

	pg.
II.10 - Estabilidade do Método de Galerkin.....	29
II.11 - Estabilidade do Método de Newmark.....	35
II.12 - Método das Acelerações Lineares - Método de Wilson	40
II.13 - Erro nas Amplitudes.....	44
II.14 - Erro no Período.....	46
CAPÍTULO III - Problema com Amortecimento...	48
III.1 - Introdução.....	48
III.2 - Newmark.....	49
III.3 - Galerkin	54
CONCLUSÕES	60
BIBLIOGRAFIA	63

INTRODUÇÃO

Os métodos de integração passo a passo são largamente usados em dinâmica de estruturas, para a integração numérica das equações diferenciais, por não imporem restrições aos parâmetros físicos - massa, rigidez, amortecimento.

Entre outros, existem os métodos instituídos por Newmark (1952) [10], Wilson (1968) [13], Gurtin (1964) [14], Argyris (1969, 1972) [11, 12], Geradin (1973) [8] e o obtido com a aplicação do princípio de Galerkin no tempo.

Foram feitos vários estudos de estabilidade de métodos de integração passo a passo [2], [6], [7], [8]. Neste trabalho os métodos de Galerkin e Newmark são comparados, sendo a análise da estabilidade feita de acordo com o trabalho de Lax e Richtmyer [1].

O estudo desses processos, entretanto, ainda não está completo, não existindo um algoritmo ideal que forneça boa aproximação, seja incondicionalmente estável, não introduza amortecimento fictícios ou erros nas frequências, em problemas oscilatórios.

CAPÍTULO ISOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO. INSTITUIÇÃO
DOS MÉTODOS DE GALERKIN E NEWMARKI.1 - Considerações Gerais

Na análise dinâmica de estruturas necessitamos conhecer o campo de deslocamentos $\underline{y}(\underline{r}, t)$, função da variável espacial \underline{r} e do tempo t . Admitindo que se possa fazer a separação de variáveis

$$\underline{y}(\underline{r}, t) = \underline{\phi}(\underline{r}) \underline{x}(t) \quad (\text{I.1})$$

e, fazendo a discretização espacial quando os sistemas forem contínuos (método dos elementos finitos, Ritz ou outro método numérico), chega-se, aplicando o princípio de Hamilton, ao seguinte problema de valor inicial:

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{x}}(t) + \underline{K} \underline{x}(t) = \underline{F}(t) \quad (\text{I.2a})$$

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0, \quad \dot{\underline{x}}(0) = \dot{\underline{x}}_0 \quad (\text{I.2b})$$

\underline{M} , \underline{C} e \underline{K} são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, \underline{F} é o vetor das forças equivalentes e $\underline{x}(t)$, $\dot{\underline{x}}(t)$, $\ddot{\underline{x}}(t)$ os vetores dos deslocamentos, velocidades e acelerações generalizados.

O sistema (I.2) pode ser resolvido por vários métodos numéricos: análise modal, transformada de Laplace, métodos de integração passo a passo, sendo os últimos o objeto de nosso estudo nesse trabalho. Como a variável tempo não é limitada, nos métodos a serem estudados a integração direta de (I.2) é feita passo a passo, em intervalos de tempo, por uma relação de recorrência onde os parâmetros no fim de cada intervalo são considerados como valores iniciais para o intervalo subsequente.

Os métodos de integração passo a passo podem ser agrupados de acordo com o tipo de aproximação usado:

- 1) métodos aproximados por diferenças finitas. Entre estes estão os de Newmark, Wilson, acelerações lineares;
- 2) métodos aproximados por um princípio variacional: Galerkin, Gurtin.

Dentre estes analisaremos detalhadamente os métodos de Newmark e Galerkin, representativos de cada grupo.

Com exceção do método de Gurtin, os métodos de integração passo a passo não impõem restrições quanto à dependência

das matrizes \underline{M} , \underline{C} e \underline{K} com relação ao tempo. Esta é a grande vantagem desses processos em relação aos outros métodos de solução.

I.2 - Método de Galerkin

A solução $\underline{x}(t)$ de (I.2) é expandida em termos de funções de interpolação e parâmetros nodais:

$$\underline{x}(t) \sim \sum_{i=1}^m N_i(t) \underline{x}_i^e = \bar{\underline{x}} \quad (\text{I.3})$$

N_i - funções de interpolação

\underline{x}_i^e - parâmetros nodais.

Ao substituírmos $\bar{\underline{x}}$ em (I.2a) introduzimos um erro $\underline{\varepsilon}$. O sistema (I.2a) com a aproximação $\bar{\underline{x}}$ fica:

$$\underline{M} \ddot{\bar{\underline{x}}} + \underline{C} \dot{\bar{\underline{x}}} + \underline{K} \bar{\underline{x}} - \underline{F}(t) = \underline{\varepsilon}. \quad (\text{I.4})$$

Admite-se que as condições (I.2b) sejam satisfeitas. O critério de aproximação é dado pelo teorema de Galerkin, que estabelece ser o erro mínimo se o mesmo for ortogonal às funções de interpolação:

$$\int_{\Omega} N_i \underline{\varepsilon} \, d_{\Omega} = 0. \quad (\text{I.5})$$

Na escolha das funções N_i temos que garantir a continuidade dos deslocamentos e velocidades, pois a aceleração, segunda derivada da variável no tempo, é a derivada de maior ordem que aparece no funcional obtido de (I.5). Os polinômios cúbicos de Hermite garantem essa continuidade.

$$\bar{x}(t) = N_1(t)x_n + N_2(t)\dot{x}_n + N_3(t)x_{n+1} + N_4(t)\dot{x}_{n+1} \quad (\text{I.6})$$

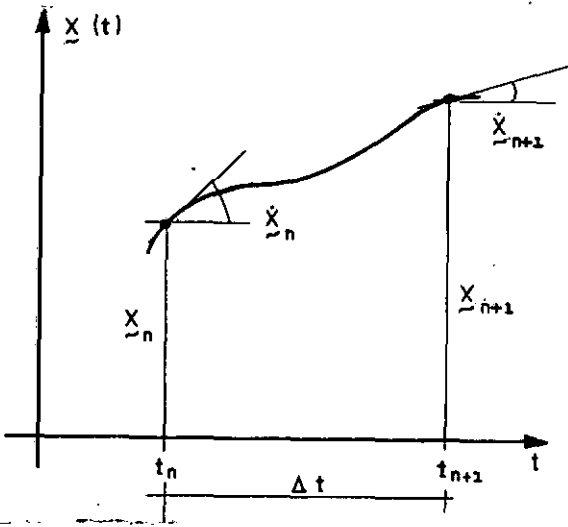


Figura 1

$$N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$N_2 = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\Delta t$$

$$N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$N_4 = (-\xi^2 + \xi^3)\Delta t$$

$$\xi = t/\Delta t, \quad 0 \leq t \leq \Delta t.$$

A equação (I.6) pode ser escrita na forma matricial:

$$\bar{x}(t) = \underline{N}^T \underline{W} \quad (\text{I.7})$$

onde
$$\underline{N}^T = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\}$$

$$\underline{W}^T = \{x_n \quad \dot{x}_n \quad x_{n+1} \quad \dot{x}_{n+1}\}$$

Substituindo (I.7) e suas derivadas em (I.4), temos:

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{N}}^T\underline{W} + \underline{C}\underline{\dot{N}}^T\underline{W} + \underline{K}\underline{N}^T\underline{W} - \underline{F} = \underline{\underline{e}} \quad (\text{I.7a})$$

Como os valores dos deslocamentos e velocidades no i início de cada intervalo já são conhecidos, obtidos no passo anterior, impomos a ortogonalidade do erro somente em relação às funções N_3 e N_4 :

$$\int_0^{\Delta t} \begin{Bmatrix} N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \underline{\epsilon} dt = \underline{0} \quad , \text{ ou}$$

$$\int_0^{\Delta t} \begin{Bmatrix} N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \{ \underline{M}\ddot{\underline{N}}^T \underline{W} + \underline{C}\dot{\underline{N}}^T \underline{W} + \underline{K}\underline{N}^T \underline{W} - \underline{F} \} dt = \underline{0} \quad (\text{I.8})$$

Desenvolvendo (I.8) ficamos com o sistema de $2N$ equações, N o número de graus de liberdade:

$$\begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x}_{n+1} \\ \dot{\underline{x}}_{n+1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{r}_{11} & \underline{r}_{12} \\ \underline{r}_{21} & \underline{r}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x}_n \\ \dot{\underline{x}}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.9})$$

que em forma condensada fica:

$$\underline{S}\underline{u}_{n+1} + \underline{R}\underline{u}_n = \underline{Z} \implies \underline{u}_{n+1} = \underline{S}^{-1}[\underline{Z} - \underline{R}\underline{u}_n] \quad (\text{I.10})$$

$$\underline{s}_{11} = \int_0^{\Delta t} N_{3H_1} dt \quad \underline{s}_{12} = \int_0^{\Delta t} N_{3H_2} dt$$

(I.11)

$$\underline{s}_{21} = \int_0^{\Delta t} N_{4H_1} dt \quad \underline{s}_{22} = \int_0^{\Delta t} N_{4H_2} dt$$

$$\underline{r}_{11} = \int_0^{\Delta t} N_{3H_3} dt \quad \underline{r}_{12} = \int_0^{\Delta t} N_{3H_4} dt$$

(I.12)

$$\underline{r}_{21} = \int_0^{\Delta t} N_{4H_3} dt \quad \underline{r}_{22} = \int_0^{\Delta t} N_{4H_4} dt$$

onde :

$$\underline{H}_1 = \underline{M}\ddot{\underline{N}}_3 + \underline{C}\dot{\underline{N}}_3 + \underline{K}\underline{N}_3$$

$$\underline{H}_2 = \underline{M}\ddot{\underline{N}}_4 + \underline{C}\dot{\underline{N}}_4 + \underline{K}\underline{N}_4$$

$$\underline{H}_3 = \underline{M}\ddot{\underline{N}}_1 + \underline{C}\dot{\underline{N}}_1 + \underline{K}\underline{N}_1$$

$$\underline{H}_4 = \underline{M}\ddot{\underline{N}}_2 + \underline{C}\dot{\underline{N}}_2 + \underline{K}\underline{N}_2$$

$$\underline{z}_1 = \int_0^{\Delta t} N_3 \underline{F}(t_n+t) dt \quad e \quad \underline{z}_2 = \int_0^{\Delta t} N_4 \underline{F}(t_n+t) dt \quad (I.13)$$

As matrizes \underline{S} e \underline{R} são de ordem $2N \times 2N$, sendo N o número de deslocamentos generalizados na discretização espacial.

Para o caso em que \underline{M} , \underline{C} e \underline{K} não variam com o tempo, as integrais (I.11) e (I.12) são calculadas exatamente e chegamos às matrizes:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5\Delta t} \underline{M} + \frac{1}{2} \underline{C} + \frac{13\Delta t}{35} \underline{K} & \frac{11}{10} \underline{M} + \frac{\Delta t}{10} \underline{C} - \frac{11\Delta t^2}{210} \underline{K} \\ \frac{1}{10} \underline{M} - \frac{\Delta t}{10} \underline{C} - \frac{11\Delta t^2}{210} \underline{K} & -\frac{2\Delta t}{15} \underline{M} + \frac{\Delta t^3}{105} \underline{K} \end{bmatrix} \quad (\text{I.14})$$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5\Delta t} \underline{M} - \frac{1}{2} \underline{C} + \frac{9\Delta t}{70} \underline{K} & \frac{1}{10} \underline{M} - \frac{\Delta t}{10} \underline{C} + \frac{13\Delta t^2}{420} \underline{K} \\ -\frac{1}{10} \underline{M} + \frac{\Delta t}{10} \underline{C} - \frac{13\Delta t^2}{420} \underline{K} & \frac{\Delta t}{30} \underline{M} + \frac{\Delta t^2}{60} \underline{C} - \frac{\Delta t^3}{140} \underline{K} \end{bmatrix} \quad (\text{I.15})$$

Quando \underline{M} , \underline{C} e \underline{K} são funções do tempo (I.11) e (I.12) podem ser integrados numericamente, para cada intervalo de tempo.

Usando a aproximação (I.6) vimos então que o número de equações do sistema é dobrado em razão da ortogonalidade do erro em relação às funções N_3 e N_4 . Pode-se usar uma aproximação de maior ordem para $\underline{x}(t)$ recorrendo a graus de liberdade adicionais. Entretanto, ao utilizarmos esse recurso do método de

Galerkin, aumentamos ainda mais o número de equações do sistema em virtude de se ter um maior número de funções de interpolação ortogonais ao erro. Isso acarreta um aumento no tempo de computação que não compensa a melhor aproximação obtida.

I.3 - Newmark. Método das Acelerações Generalizadas

No método de Newmark os deslocamentos e velocidades são desenvolvidos em série de Taylor:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \\ R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \end{array} \right. \quad (\text{I.16})$$

onde o resto é calculado aproximadamente em função de parâmetros livres que são fixados posteriormente de modo a garantir a estabilidade do método.

Por (I.16) temos:

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + \Delta t \dot{\tilde{x}}_n + \int_0^{\Delta t} (\Delta t - \tau) \ddot{\tilde{x}}(\tau) d\tau \quad (\text{I.17})$$

$$\dot{\tilde{x}}_{n+1} = \dot{\tilde{x}}_n + \int_0^{\Delta t} \ddot{\tilde{x}}(\tau) d\tau \quad (\text{I.18})$$

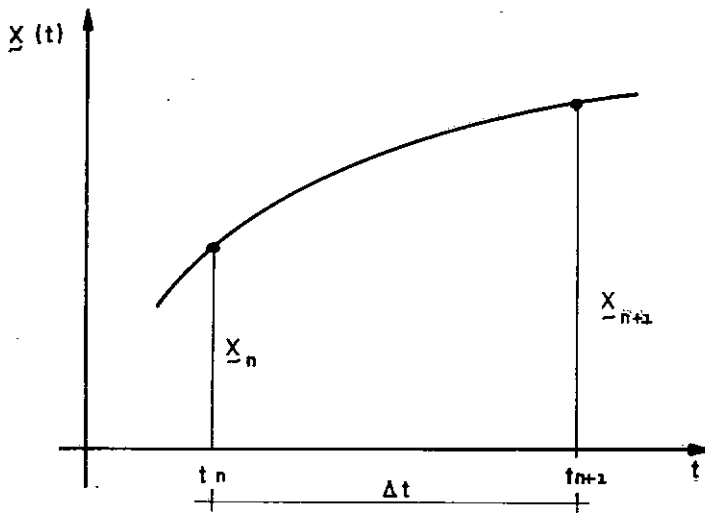


Figura 2

Fazendo a quadratura das integrais de (I.17) e (I.18) chega-se às equações:

$$\underline{x}_{n+1} \equiv \underline{x}_n + \Delta t \dot{\underline{x}}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\underline{x}}_n + \beta \Delta t^2 (\ddot{\underline{x}}_{n+1} - \ddot{\underline{x}}_n) \quad (\text{I.19})$$

$$\dot{\underline{x}}_{n+1} \equiv \dot{\underline{x}}_n + \Delta t \ddot{\underline{x}}_n + \gamma \Delta t (\ddot{\underline{x}}_{n+1} - \ddot{\underline{x}}_n) \quad (\text{I.20})$$

ou agrupando:

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n + \Delta t \dot{\underline{x}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\underline{x}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\underline{x}}_{n+1} \quad (\text{I.21})$$

$$\dot{\underline{x}}_{n+1} = \dot{\underline{x}}_n + (1-\gamma) \Delta t \ddot{\underline{x}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\underline{x}}_{n+1} \quad (\text{I.22})$$

Com a variação dos parâmetros γ e β obtemos uma família de métodos de integração passo a passo, ou método das acelerações generalizadas. O que comumente se denomina método de Newmark é o método das acelerações médias com $\beta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$.

Os deslocamentos e velocidades assim aproximados devem satisfazer a equação do movimento (I.2) para o instante t_{n+1} :

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}_{n+1} + \underline{C} \dot{\underline{x}}_{n+1} + \underline{K} \underline{x}_{n+1} = \underline{F}(t_{n+1}) \quad (\text{I.23})$$

As equações (I.21), (I.22) e (I.23) formam um sistema do tipo:

$$\underline{B}_0 \underline{u}_{n+1} = \underline{B}_1 \underline{u}_n + \underline{B}_2 \quad (\text{I.24})$$

onde

$$\underline{B}_0 = \begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{C} & \underline{M} \\ 0 & 1 & -\gamma \Delta t \\ 1 & 0 & -\beta \Delta t \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t(1-\gamma) \\ 1 & \Delta t & \Delta t^2 \left(\frac{1}{2}-\beta\right) \end{bmatrix}$$

(I.25)

\underline{B}_0 , \underline{B}_1 e \underline{B}_2 dados para um sistema de um grau de liberdade.

$$\underline{B}_2 = \begin{Bmatrix} F(t_{n+1}) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{u}_{n+1} = \begin{Bmatrix} \underline{x}_{n+1} \\ \dot{\underline{x}}_{n+1} \\ \ddot{\underline{x}}_{n+1} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{u}_n = \begin{Bmatrix} \underline{x}_n \\ \dot{\underline{x}}_n \\ \ddot{\underline{x}}_n \end{Bmatrix}$$

Temos então uma relação de recorrência dos deslocamentos, velocidades e acelerações em t_{n+1} em função desses valores em t_n :

$$\underline{u}_{n+1} = \underline{B}_0^{-1} \left[\underline{B}_1 \underline{u}_n + \underline{B}_2 \right] \quad (\text{I.26})$$

Para a resolução de (I.26) substituímos as equações (I.21) e (I.22) na (I.23) obtendo um sistema de N equações do tipo:

$$\underline{J}_1 \ddot{\underline{x}}_{n+1} = \underline{J}_2 \quad \therefore \quad \ddot{\underline{x}}_{n+1} = \underline{J}_1^{-1} \underline{J}_2 \quad (\text{I.27})$$

$$\underline{J}_1 = [\underline{M} + \gamma \Delta t \underline{C} + \beta \Delta t^2 \underline{K}] \quad (\text{I.28})$$

$$\begin{aligned} \underline{J}_2 = & \underline{F}_{n+1} - \underline{C}[\dot{\underline{x}}_n + (1-\gamma)\Delta t \ddot{\underline{x}}_n] - \\ & - \underline{K}[\underline{x}_n + \Delta t \dot{\underline{x}}_n + (\frac{1}{2} - \beta)\Delta t^2 \ddot{\underline{x}}_n] . \end{aligned}$$

Voltando às equações (I.21) e (I.22) temos os deslocamentos e velocidades no instante t_{n+1} . Vemos então que no método de Newmark resolvemos um sistema de mesma ordem que o obtido na discretização espacial. Outra vantagem do método de Newmark é

não haver integração quando \underline{M} , \underline{C} e \underline{K} são funções do tempo; essas matrizes são simplesmente calculadas para o instante t_{n+1} .

I.4 - Comentários

Nos dois métodos vistos chega-se a um mesmo sistema de equações algébricas:

$$\underline{\chi}_0 \underline{u}_{n+1} = \underline{\chi}_1 \underline{u}_n + \underline{\chi}_2 \quad (\text{I.26})$$

ou

$$\underline{u}_{n+1} = \underline{A} \underline{u}_n + \underline{B}, \quad \underline{A} = \underline{\chi}_0^{-1} \underline{\chi}_1 \quad \text{e} \quad \underline{B} = \underline{\chi}_0^{-1} \underline{\chi}_2 \quad (\text{I.27})$$

As matrizes $\underline{\chi}_0$, $\underline{\chi}_1$, $\underline{\chi}_2$, \underline{A} e \underline{B} são funções do intervalo de tempo Δt e dos parâmetros físicos da estrutura-rigidez, amortecimento, massa - e os vetores

$$\underline{u}_n = \begin{Bmatrix} \underline{x}_n \\ \dot{\underline{x}}_n \\ \ddot{\underline{x}}_n \end{Bmatrix} \quad \text{no método de Newmark,}$$

$$\underline{u}_n = \begin{Bmatrix} \underline{x}_n \\ \dot{\underline{x}}_n \end{Bmatrix} \quad \text{no método de Galerkin.}$$

A matriz \underline{A} de (I.27), denominada operador de aproximação por Nickell em [2], define uma transformação linear que associa os valores de deslocamentos, velocidades e acelerações no instante t_n a esses valores em t_{n+1} , sendo \underline{u}_n considerado como elemento de um espaço de Hilbert H . O problema de valor inicial (I.2) é linear e supomos H também linear.

CAPÍTULO IIANÁLISE DA CONVERGÊNCIA E ESTABILIDADE -
PROBLEMA SEM AMORTECIMENTOII.1 - Introdução

Como foi visto no capítulo anterior, os métodos de integração passo a passo permitem resolver numericamente um sistema de equações diferenciais por meio da relação de recorrência:

$$\underline{u}_{n+1} = \underline{A} \underline{u}_n + \underline{B}. \quad (\text{I.27})$$

A variável tempo, t , assume valores discretos $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ ($t_{n+1} - t_n = \Delta t$ e $t_n = n \Delta t$) aos quais correspondem os valores $\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n, \dots$, onde \underline{u}_n é uma aproximação de $\underline{u}(t_n)$, isto é, uma aproximação dos deslocamentos, velocidades e, para o método de Newmark, das acelerações nodais no instante t_n .

A análise da convergência é feita para um t fixo quando $\Delta t \rightarrow 0$. Tem-se então uma sequência de valores aproximados que deverá convergir para a solução exata do problema de valor inicial (I.2), quando o intervalo de tempo tende a zero.

Consideraremos inicialmente o problema de vibrações livres cuja solução numérica é:

$$\underline{u}_{n+1} = \underline{A} \underline{u}_n \quad , \quad (\text{II.1})$$

e depois analisaremos a influência das cargas externas na estabilidade.

Como as matrizes \underline{M} , \underline{C} e \underline{K} ou são constantes ou são calculadas para cada intervalo de tempo, $\underline{A} = \underline{A}(\underline{M}(\Delta t), \underline{C}(\Delta t), \underline{K}(\Delta t), \Delta t) = \underline{A}(\Delta t)$.

A solução por métodos de integração passo a passo recai numa equação de diferenças finitas no tempo (II.1), embora a instituição dos métodos possa ser bem diversa: no método de Galerkin não há discretização do operador diferencial e sim uma interpolação da solução $\underline{x}(t)$; já no de Newmark a equação do movimento só é satisfeita para os valores discretos $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$ da variável tempo, o que corresponde a uma discretização do operador diferencial.

II.2 - Teorema da Equivalência [1]

"Dado um problema de valor inicial bem posto e um operador de diferenças finitas $\underline{A}(\Delta t)$ que satisfaça a condição de consistência, a aproximação dada por $\underline{A}(\Delta t)$ será convergente se e só se o operador for estável".

Na avaliação da aproximação feita por $\underline{A}(\Delta t)$ temos necessidade de uma medida entre dois elementos \underline{u}_n e \underline{v}_n do espaço de Hilbert H . Definimos então a norma do elemento $\underline{w}_n = \underline{u}_n - \underline{v}_n$, denotada por $\|\underline{w}_n\|$; geralmente se considera a norma da energia, embora possa se tomar uma norma para cada aplicação.

II.3 - Problema Bem Posto

A solução do problema de valor inicial (I.2), para o caso de vibrações livres:

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{x}}(t) + \underline{K} \underline{x}(t) = 0 \quad (\text{I.2a})$$

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0, \quad \dot{\underline{x}}(0) = \dot{\underline{x}}_0 \quad (\text{I.2b})$$

pode ser posta na forma:

$$\underline{u}(t) = \underline{E}_0(t) \underline{u}_0, \quad (\text{II.2})$$

sendo $\underline{E}_0(t)$ um operador, $\underline{u}(t)$ o vetor da função deslocamento

$\underline{x}(t)$ e suas derivadas no instante t e \underline{u}_0 o vetor das condições iniciais.

Para qualquer $\underline{u}_0 \in H^{(*)}$, um problema (I.2) é bem posto se $\underline{E}_0(t)$ for uniformemente limitado: dada uma alteração $\underline{\delta}$ nas condições iniciais \underline{u}_0 , a alteração na solução $\underline{u}(t)$ é $O(\underline{\delta})$. Isto é, existe uma constante finita K tal que

$$\| \{ \underline{E}_0(t) \} \underline{\delta} \| \leq K \| \underline{\delta} \| \quad , \quad 0 \leq t \leq T. \quad (\text{II.3})$$

II.4 - Convergência

Operando sucessivamente sobre \underline{u}_0 , obtemos do sistema (II.1) que

$$\underline{u}_n = \underline{A}^n \underline{u}_0 \quad (\text{II.4})$$

Uma aproximação $\underline{A}(\Delta t)$ é convergente se, quando $\Delta t \rightarrow 0$ e $n\Delta t \rightarrow t$,

$$\| \{ \underline{A}^n(\Delta t) \} \underline{u}_0 - \{ \underline{E}_0(t) \} \underline{u}_0 \| \rightarrow 0 \quad (\text{II.5})$$

$$0 \leq t \leq T$$

para qualquer $\underline{u}_0 \in H$.

(*) Em geral \underline{u}_0 não precisa pertencer a H , mas deve ter uma expressão convergente nesse espaço. Para maiores detalhes ver [1] (Lax).

II.5 - Estabilidade

Para a verificação da estabilidade, analisa-se a influência de uma perturbação na solução numérica em um passo sobre a solução nos passos subsequentes. Consideremos o conjunto de equações

$$\underline{u}_{j+n} = \{\underline{A}(\Delta t)\}^n \underline{u}_j \quad n, j = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.6})$$

onde \underline{u}_j é a condição inicial para o intervalo de tempo $[t_j, t_j + n\Delta t]$. Dado um $\tau > 0$, uma aproximação $\underline{A}(\Delta t)$ é estável se os operadores

$$\begin{aligned} \{\underline{A}(\Delta t)\}^n & \quad 0 < \Delta t < \tau \\ & \quad 0 \leq n\Delta t \leq T \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

forem uniformemente limitados, ou seja: adicionando \underline{v}_j aos dados iniciais \underline{u}_j , existem constantes limitadas K_n tal que

$$\|\{\underline{A}(\Delta t)\}^n \underline{v}_j\| \leq K_n \|\underline{v}_j\|, \quad 0 \leq n\Delta t \leq T. \quad (\text{II.8})$$

II.6 - Condição de Consistência

Seja \underline{G} um operador tal que

$$\frac{d}{dt} \underline{u}(t) = \underline{G} \underline{u}(t) \quad (\text{II.9a})$$

$$\underline{u}(0) = \underline{u}_0 \quad (\text{II.9b})$$

Assim como

$$\frac{\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n}{\Delta t} \quad (\text{II.10})$$

é uma aproximação da derivada em relação ao tempo,

$$\frac{\underline{A}(\Delta t) \underline{u} - \underline{u}}{\Delta t} \quad (\text{II.11})$$

deve ser uma aproximação para $\underline{G} \underline{u}$.

Um operador de diferenças finitas $\underline{A}(\Delta t)$ é uma aproximação consistente para o problema de valor inicial (II.9) se

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \left\{ \frac{\underline{A}(\Delta t) - \underline{I}}{\Delta t} - \underline{G} \right\} \underline{u}(t) \right\| = 0 \quad (\text{II.12})$$

uniformemente em t , $0 \leq t \leq T$.

Isto ficará mais claro ao estudarmos a consistência dos diversos métodos isoladamente. Veremos que o método de Newmark, assim como outros métodos analisados por Nickell [2], não satisfazem essa condição de consistência mas são estáveis e convergem para a solução desejada, o que sugere a existência de outro teorema onde a verificação da consistência, no sentido de Lax, seja dispensável.

II.7 - Verificação da Consistência

Consideremos o sistema com um grau de liberdade

$$\ddot{x}(t) + w^2 x(t) = 0 \quad , \quad w^2 = \frac{k}{m} \quad (\text{II.13})$$

$$x(0) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

que representa as vibrações livres de um sistema massa-mola não amortecido.

II.7.1 - Método de Galerkin

Fazendo $\dot{x} = v$, de (II.13) obtemos $\dot{v} = -w^2 x$ ou

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ v \end{Bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

(II.14) é uma equação da forma (II.9a), sendo

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Para o problema não amortecido (II.13) o operador de aproximação é:

$$\underline{A} = \frac{1}{1 + \frac{4}{105} \xi + \frac{1}{63} \xi^2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{97}{210} \xi + \frac{1}{126} \xi^2 & (1 - \frac{9}{70} \xi + \frac{1}{630} \xi^2) \Delta t \\ (-\xi + \frac{2}{21} \xi^2) \frac{1}{\Delta t} & 1 - \frac{97}{210} \xi + \frac{13}{630} \xi^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

sendo $\xi = \Delta t^2 w^2$. O operador \underline{A} é obtido da operação matricial

$$\underline{A} = - \underline{S}^{-1} \underline{R} \quad (\text{II.16})$$

\underline{S} e \underline{R} dados por (I.14) e (I.15) com as matrizes \underline{M} , \underline{C} e \underline{K} reduzidas às constantes m , c , k , $c = 0$.

$$\frac{\underline{A}(\Delta t) - \underline{I}}{\Delta t} = \frac{1}{1 + \frac{4}{105} \xi + \frac{1}{63} \xi^2} \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2} \xi - \frac{1}{126} \xi^2) \frac{1}{\Delta t} & (1 - \frac{9}{70} \xi + \frac{1}{630} \xi^2) \\ (-\xi + \frac{2}{21} \xi^2) \frac{1}{\Delta t^2} & (-\frac{1}{2} \xi + \frac{1}{210} \xi^2) \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

\underline{I} = matriz identidade

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{A} - \underline{I}}{\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{bmatrix} = \underline{G} \quad (\text{II.18})$$

e o operador de aproximação do método de Galerkin satisfaz a condição de consistência (II.12).

II.7.2 - Método de Newmark

No método de Newmark temos que comparar o operador de aproximação com um operador \underline{G} que satisfaz uma equação diferencial de terceira ordem. Fazendo

$$\dot{x} = v \text{ e } \dot{v} = a, \quad (\text{II.19})$$

$$\dot{a} = -w^2 \dot{x} = -w^2 v, \quad \dot{a} = \frac{d^3 x}{dt^3}$$

e

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -w^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ v \\ a \end{Bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

ou

$$\frac{d}{dt} \underline{u}(t) = \underline{G} \underline{u}(t). \quad (\text{II.9a})$$

$$\text{Por outro lado, } \underline{u}_{n+1} = \underline{A}(\Delta t) \underline{u}_n$$

onde

$$\underline{A} = \frac{1}{1+\beta\xi} \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \\ -\gamma\xi/\Delta t & 1+\xi(\beta-\gamma) & \Delta t \left[(1-\gamma) + \xi(\beta - \frac{\gamma}{2}) \right] \\ -\xi/\Delta t^2 & -\xi/\Delta t & -\xi \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

para o problema (II.13), obtido da operação

$$\underline{A} = \underline{B}_0^{-1} \underline{B}_1,$$

\underline{B}_0 e \underline{B}_1 , dados em (I.25).

$$\frac{\underline{A}-\underline{I}}{\Delta t} = \frac{1}{1+\beta\xi} \begin{bmatrix} -\frac{\beta\xi}{\Delta t} & 1 & \Delta t \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \\ -\frac{\gamma\xi}{\Delta t^2} & -\frac{\gamma\xi}{\Delta t} & (1-\gamma) + \xi \left(\beta - \frac{\gamma}{2} \right) \\ -\frac{\xi}{\Delta t^3} & -\frac{\xi}{\Delta t^2} & -\left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \Delta t \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{A}-\underline{I}}{\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\gamma w^2 & 0 & 1-\gamma \\ -\infty & -w^2 & -\infty \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

$$\therefore \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \left\{ \frac{\underline{A}(\Delta t) - \underline{I}}{\Delta t} - \underline{G} \right\} \underline{u}(t) \right\| \neq 0 \quad (\text{II.24})$$

O método, portanto, não é consistente, segundo a definição dada.

Para a aplicação do método de Newmark, as acelerações, derivadas de segunda ordem em relação ao tempo, têm que ser dadas como condições iniciais em t_0 , o que está de acordo com o sistema de terceira ordem (II.20).

II.8 - Influência das Cargas Externas

Sejam λ e \underline{E}_λ os autovalores e autovetores do operador de aproximação $\underline{A}(\Delta t)$ respectivamente. Pela definição de estabilidade, dada na seção II.5

$$\| \underline{A} \underline{E}_\lambda \| \leq K \| \underline{E}_\lambda \| , \quad (\text{II.25})$$

adicionando \underline{E}_λ aos dados iniciais. Como

$$\underline{A} \underline{E}_\lambda = \lambda \underline{E}_\lambda , \quad (\text{II.26})$$

$$\| \underline{A} \underline{E}_\lambda \| = |\lambda| \| \underline{E}_\lambda \| \leq K \| \underline{E}_\lambda \| \Rightarrow |\lambda| \leq K. \quad (\text{II.27})$$

Donde concluímos que, se um operador \underline{A} é limitado, os módulos dos seus autovalores são limitados. Por outro lado, não só $\underline{A}(\Delta t)$ deve ser limitado mas também todos os operadores do conjunto $\underline{A}^n(\Delta t)$, ou:

$$\| \underline{A}^n \underline{E}_\lambda \| \leq K_n \| \underline{E}_\lambda \| .$$

$$\underline{A}^n \underline{E}_\lambda = \underline{A}^{n-1} \lambda \underline{E}_\lambda = \underline{A}^{n-2} \lambda^2 \underline{E}_\lambda = \dots = \lambda^n \underline{E}_\lambda$$

$$(\text{II.28})$$

$$\therefore |\lambda^n| \| \underline{E}_\lambda \| \leq K_n \| \underline{E}_\lambda \| \implies |\lambda^n| \leq K_n \quad (\text{II.29})$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, 0 \leq n\Delta t \leq T.$$

sendo os K_n constantes limitadas.

Em (II.29) podemos observar que com um operador estável não se pode representar a solução de um problema tendendo para infinito em um tempo finito T . Entretanto, se a solução tende para infinito quando $t \rightarrow \infty$, $\underline{A}(\Delta t)$ estável pode ser uma aproximação do problema pois, no intervalo considerado $0 \leq n\Delta t \leq T$, (II.29) sempre se verifica. Assim, se para uma carga externa o problema de valor inicial (I.2) for bem posto, uma solução numérica estável pode ser dada para esse problema e a matriz \underline{B} da equação (I.27) não influirá na estabilidade do método.

II.9 - Análise da Estabilidade

Na integração passo a passo de (II.13) obtemos:

$$\underline{u}_{n+1} = \underline{A} \underline{u}_n \quad (\text{II.30})$$

ou

$$\underline{u}(t_n + \Delta t) = \underline{A} \underline{u}(t_n), \quad (\text{II.31})$$

$$\underline{u}_n = \begin{Bmatrix} \underline{x}_n \\ \dot{\underline{x}}_n \\ \ddot{\underline{x}}_n \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \underline{u}_n = \begin{Bmatrix} \underline{x}_n \\ \dot{\underline{x}}_n \end{Bmatrix} \quad \text{conforme o método}$$

$\underline{A}(\Delta t)$ ou \tilde{A} é de terceira ordem com três autovalores - New mark e maioria dos métodos de integração passo a passo - ou de segunda ordem, com dois autovalores, como é o caso do método de Galerkin.

A solução exata do sistema de diferenças finitas (II.31) é dada por:

$$\underline{u}(t_n) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \underline{E}_{\lambda_i} e^{\lambda_i t_n} \quad (\text{II.32})$$

sendo ℓ o número de autovalores [5].

De (II.31) e (II.32) temos que:

$$\begin{aligned} \text{a) } \underline{u}(t_n + \Delta t) &= \underline{A} \sum_{i=1}^{\ell} c_i \underline{E}_{\lambda_i} e^{\lambda_i t_n} \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} c_i \underline{A} \underline{E}_{\lambda_i} e^{\lambda_i t_n} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \underline{u}(0) = \underline{u}_0 = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \underline{E}_{\lambda_i}$$

Por outro lado:

$$\underline{u}(t_n + \Delta t) = \underline{u}_{n+1} = \underline{A}^{n+1} \underline{u}_0$$

$$\therefore \underline{u}_{n+1} = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \underline{A}^{n+1} \underline{E}_{\lambda_i}$$

mas

$$\tilde{A}^{n+1} \tilde{E}_{\lambda_i} = \lambda_i^{n+1} \tilde{E}_{\lambda_i} \quad (\text{II.28})$$

$$\therefore \tilde{u}_{n+1} = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \lambda_i^{n+1} \tilde{E}_{\lambda_i}$$

Fazendo

$$c_i \tilde{E}_{\lambda_i} = \tilde{a}_i \quad , \quad (\text{II.33})$$

$$\tilde{u}_n = \sum_{i=1}^{\ell} \tilde{a}_i \lambda_i^n$$

Comparemos agora a solução exata da equação diferencial (II.13)

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \quad (\text{II.34})$$

com a solução da equação aproximada para $\ell = 3$:

$$\tilde{u}_n = \tilde{a}_1 \lambda_1^n + \tilde{a}_2 \lambda_2^n + \tilde{a}_3 \lambda_3^n. \quad (\text{II.35})$$

Para obtermos uma solução oscilatória do tipo (II.34) os autovalores λ_i devem satisfazer as condições:

$$\text{i) } \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta_i = \rho e^{\pm i\theta}, \quad \rho = |\lambda_{1,2}| \quad \text{e} \quad \theta = \text{tg}^{-1} \frac{\beta}{\alpha},$$

isto é, autovalores complexos;

ii) o terceiro autovalor real, quando existir, deve ser nulo, $\lambda_3 = 0$, para que não seja adicionada uma função exponenu

cial.

Assim, para qualquer dos métodos estudados, a solução exata da equação de diferenças finitas

$$\underline{u}_n = \underline{A}^n \underline{u}_0$$

é

$$\underline{u}_n = \underline{a}_1 \rho^n e^{in\theta} + \underline{a}_2 \rho^n e^{-in\theta}. \quad (\text{II.36})$$

ρ e θ são funções de Δt .

Podemos observar na equação (II.36) que:

- se $\rho > 1$, $\underline{u}_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, isto é a solução fica amplificada;
- se $\rho < 1$, $\underline{u}_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e a solução é amortecida;
- se $\rho = 1$, portanto, não há introdução de erro nas amplitudes na solução numérica.

Concluimos então que, se $\rho \leq 1$ - módulos dos autovalores limitados - o operador de aproximação é estável, e garantimos a convergência pelo teorema de Lax. Assim, para obtermos a solução oscilatória de (II.13) temos de ter autovalores complexos com $\rho \rightarrow 1$ quando $\Delta t \rightarrow 0$, nos métodos de integração passo a passo.

II.10 - Estabilidade do Método de Galerkin

Da equação característica

$$\det [\underline{A} - \lambda \underline{I}] = 0 \quad (\text{II.37})$$

obtemos os autovalores do operador de aproximação (para o problema (II.13)) que, postos em forma de complexos conjugados, ficam:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - \frac{97}{210} \xi + \frac{1}{70} \xi^2 \pm i \left(\xi - \frac{47}{210} \xi^2 + \frac{61}{4410} \xi^3 - \frac{19}{99225} \xi^4 \right)^{1/2}}{1 + \frac{4}{105} \xi + \frac{1}{63} \xi^2} \quad (\text{II.38})$$

para

$$h(\xi) = \xi - \frac{47}{210} \xi^2 + \frac{61}{4410} \xi^3 - \frac{19}{99225} \xi^4 > 0. \quad (\text{II.39})$$

Analisando a desigualdade acima obtemos o gráfico:

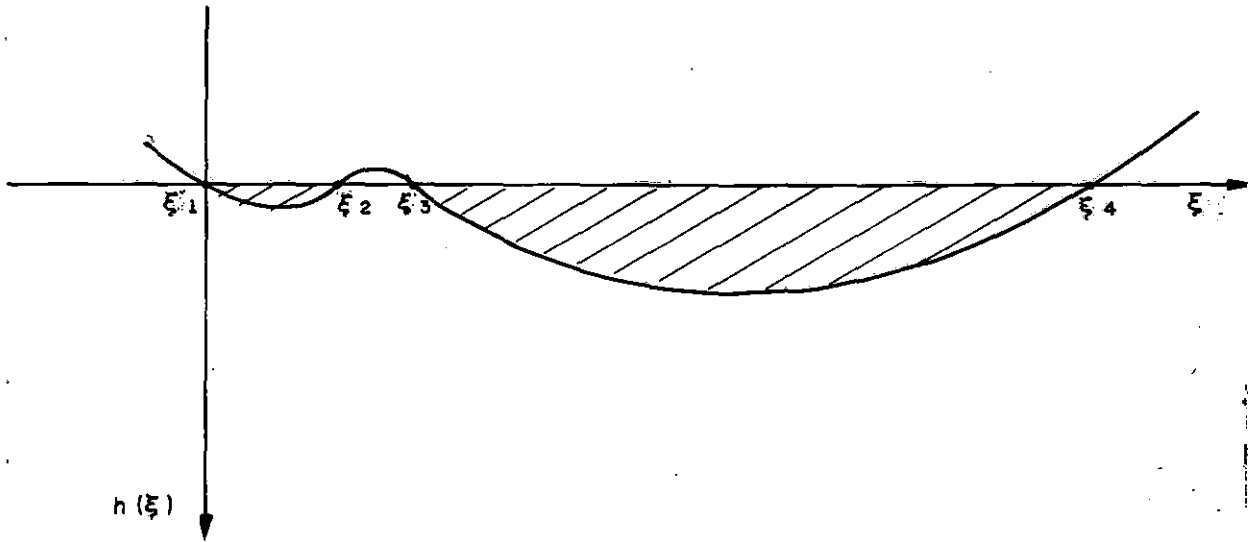


Figura 3

Com as raízes:

$$\xi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = 0$$

$$\xi_2 = 7,92 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = 0,448 T$$

$$\xi_3 = 12,80 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = 0,569 T$$

$$\xi_4 = 51,52 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = 1,142 T$$

$$\xi = \Delta t^2 w^2. \quad T = \text{período}$$

Para $\xi_1 < \xi < \xi_2$ e $\xi_3 < \xi < \xi_4$ (ou $0 < \Delta t < 0,448 T$ e $0,569 T < \Delta t < 1,142 T$) garantimos a aproximação do problema oscilatório.

Os autovalores $\lambda_{1,2}$ estão na forma

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm ib}{c} \quad (\text{II.40})$$

$$\therefore |\lambda_{1,2}| = \left[\frac{a^2 + b^2}{c^2} \right]^{1/2}$$

Para que $|\lambda_{1,2}| = 1$, $a^2 + b^2 = c^2$ ou $g(\xi) = a^2 + b^2 - c^2 = 0$, que é uma equação de quarto grau em ξ :

$$g(\xi) = -5\xi^4 - 12\xi^3 - 315\xi^2 = 0, \quad (\text{II.41})$$

com duas raízes nulas e duas complexas. A variação de $g(\xi)$ com ξ é do tipo:

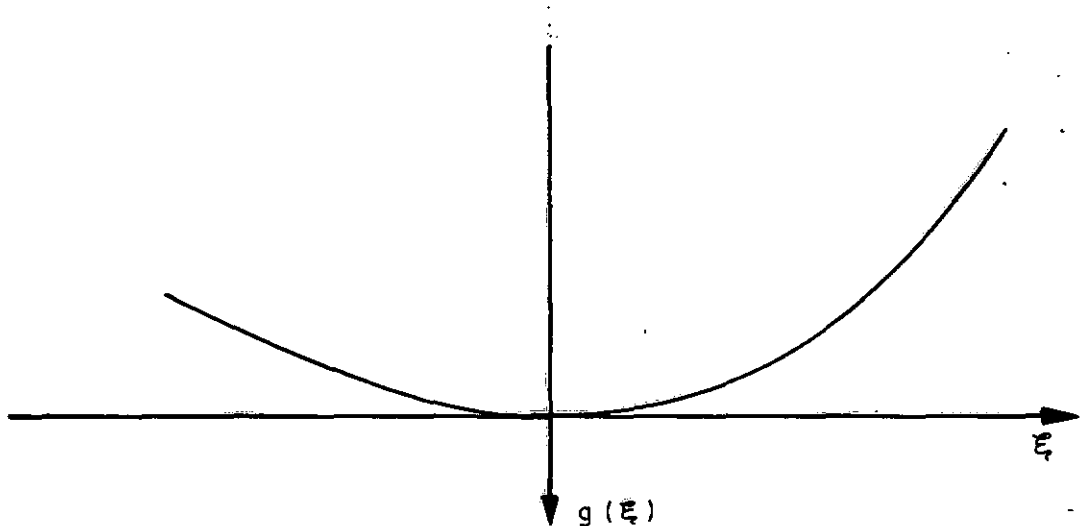


Figura 4

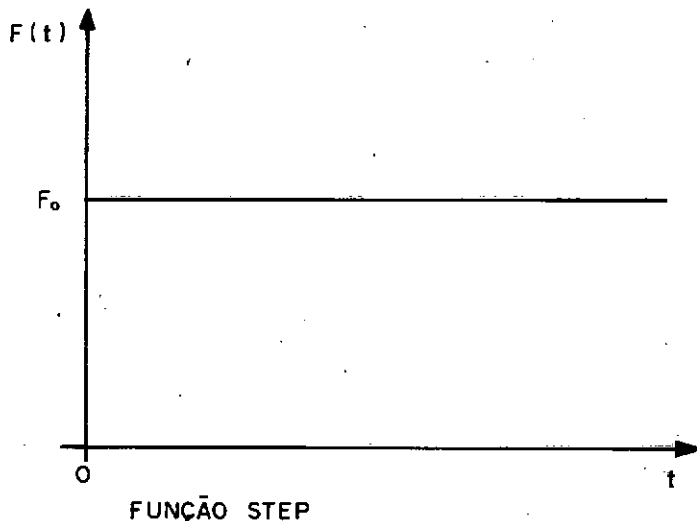
$g(\xi) \leq 0$ para qualquer ξ , se $b > 0$.

$g(\xi) \leq 0 \Rightarrow |\lambda_{1,2}| \leq 1$, o que significa que os módulos dos autovalores complexos são limitados pela unidade para qualquer ξ e, conseqüentemente, para qualquer Δt . Por outro lado, por (II.38) podemos ver que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\lambda_{1,2}| = 1.$$

Pelo que foi visto na seção anterior, garantimos que o operador de aproximação do método de Galerkin é estável para $\xi < 7,92$ ($\Delta t < 0,448T$) e introduz um amortecimento indesejável na solução numérica, desde que $|\lambda_{1,2}| = 1$ só para ξ ou $\Delta t = 0$.

A fim de comprovarmos as deduções teóricas, comparamos a solução exata para um sistema massa-mola não amortecido submetido a uma força do tipo:



com as soluções aproximadas para os diversos métodos de integração passo a passo.

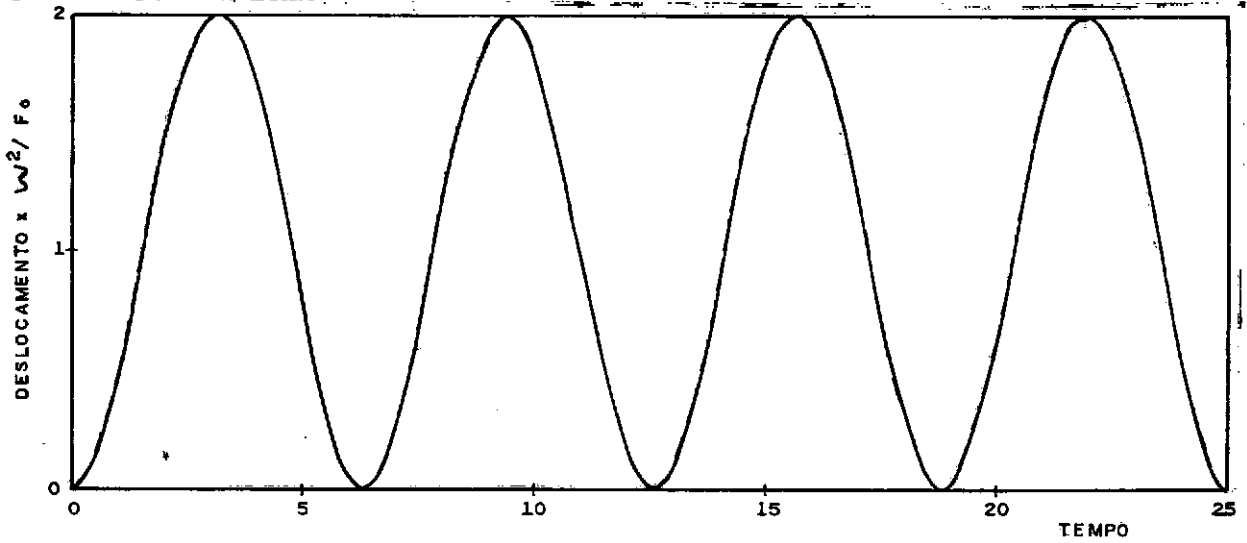


FIG. - 5 / ——— SOLUÇÃO EXATA
- - - GALERKIN $\Delta t = 0.2$ $T = 31.4$

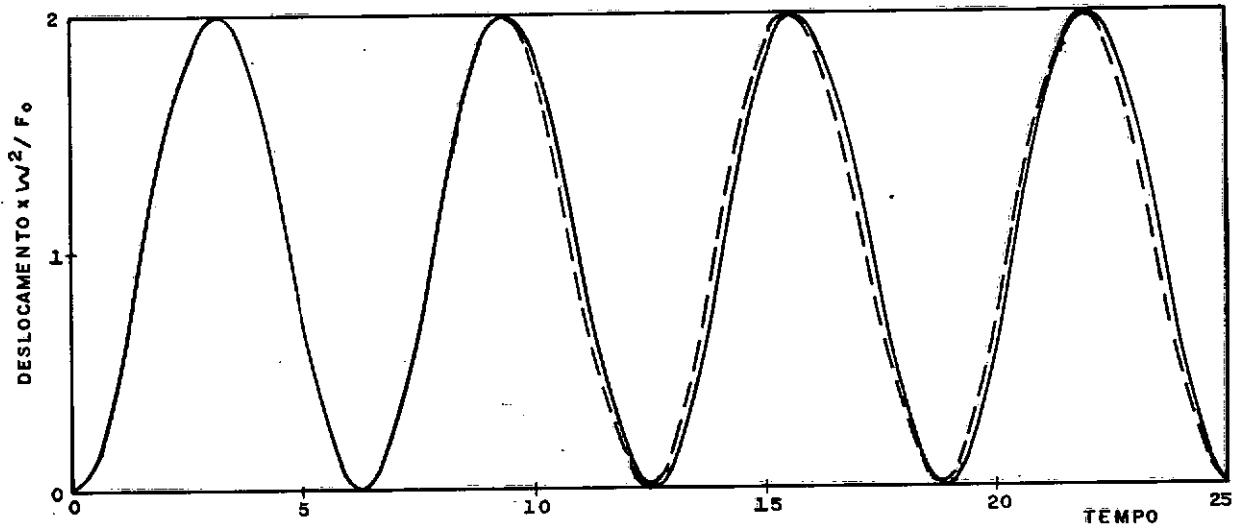


FIG. - 6

— SOLUÇÃO EXATA
 - - - GALERKIN $\Delta t = 0.5 \cong T / 12.56$

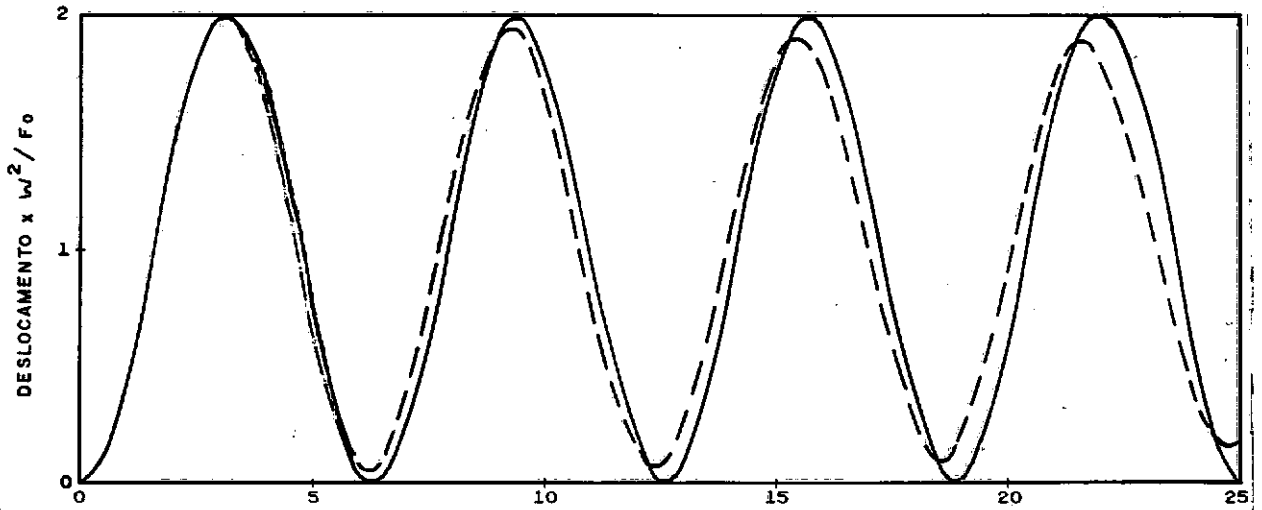


FIG. 7

— SOLUÇÃO EXATA
 - - - GALERKIN $\Delta t = 1.0 \cong T / 6.28$

II.11 - Estabilidade do Método de Newmark

Resolvendo a equação característica para o sistema mas sa-mola não amortecido encontramos os autovalores do operador de aproximação do método de Newmark:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 + \left[\beta - \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{2}) \right] \xi \pm i \left\{ \left[\beta - \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2 \right] \xi^2 + \xi \right\}^{1/2}}{1 + \beta \xi} \quad (\text{II.42})$$

$$\lambda_3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm ib}{c} .$$

Para que $|\lambda_{1,2}| = 1$, $a^2 + b^2 = c^2$ ou

$$\begin{aligned} 1 + \{1 + 2[\beta - \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{2})]\} \xi + [\beta + \beta^2 - \beta(\gamma + \frac{1}{2})] \xi^2 &= \\ = 1 + 2\beta \xi + \beta^2 \xi^2 & \quad (\text{II.43}) \end{aligned}$$

Igualando os termos correspondentes obtemos:

$$1 + 2\beta - (\gamma + \frac{1}{2}) = 2\beta \implies \gamma = \frac{1}{2} \quad (\text{II.44})$$

$$\beta + \beta^2 - \beta(\gamma + \frac{1}{2}) = \beta^2 \implies \beta(\frac{1}{2} - \gamma) = 0 \quad (\text{II.45})$$

de onde concluimos, desde que $b > 0$, que, se $\gamma = \frac{1}{2}$, $|\lambda_{1,2}| = 1$ sempre, independentemente do valor de β .

Analisemos agora a condição $b > 0$ ou

$$\left[\beta - \frac{1}{4}\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2\right]\xi^2 + \xi > 0 \quad (\text{II.46})$$

Substituindo $\gamma = \frac{1}{2}$ em (II.46), temos:

$$f(\xi) = \left(\beta - \frac{1}{4}\right)\xi^2 + \xi > 0 \quad (\text{II.47})$$

cujas raízes são:

$$\begin{cases} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = -\frac{1}{\beta - \frac{1}{4}} \end{cases}$$

Se $\beta \geq \frac{1}{4}$, $\xi_2 < 0$ e $f(\xi) > 0$ para $\xi > 0$:

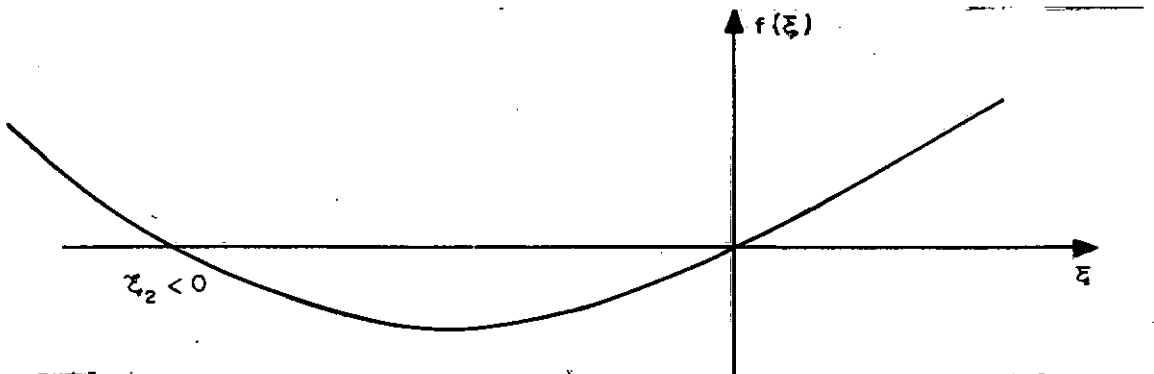


Figura 8

Se $\gamma = \frac{1}{2}$ não há introdução de amortecimento artificial na solução numérica e, variando β , obtemos os métodos:

$$\beta = \frac{1}{2} \quad - \text{Fox e Goodwin}$$

$$\beta = \frac{1}{6} \quad - \text{método das acelerações lineares}$$

$\beta = \frac{1}{4}$ - método das acelerações médias (Newmark)

Os dois primeiros não verificam a condição dos autovalores serem sempre complexos, isto é, o problema oscilatório não pode ser representado pela solução numérica para todos valores de Δt . Para o método das acelerações lineares, por exemplo, substituindo $\beta = \frac{1}{6}$ na equação (II.47), temos:

$$f(\xi) = -\frac{1}{12} \xi^2 + \xi > 0, \quad \xi_1 = 0 \text{ e } \xi_2 = 12 \quad (\text{II.48})$$

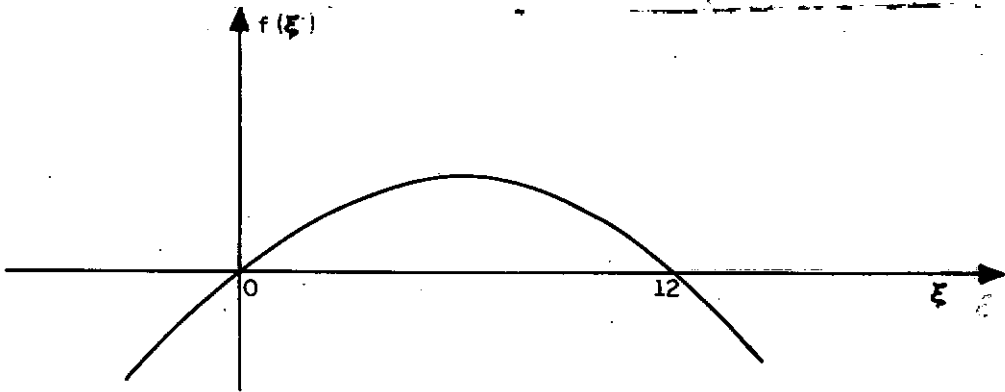


Figura 9

$$\xi = \Delta t^2 \omega^2 \quad \therefore \Delta t = \frac{\sqrt{\xi}}{2\pi} T, \quad T = \text{período.}$$

para $\xi = 12$, $\Delta t = 0,551 T$ e o método não funciona para $\Delta t \geq 0,551 T$.

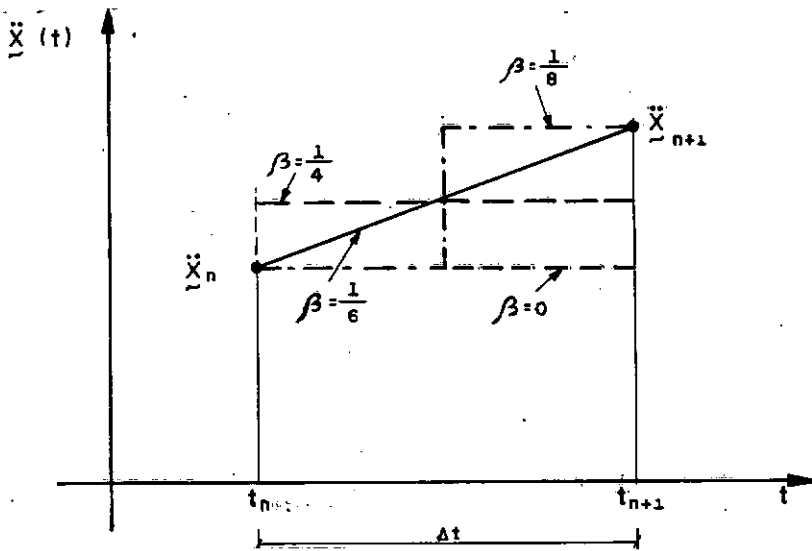


Figura 10 - Significado do parâmetro β

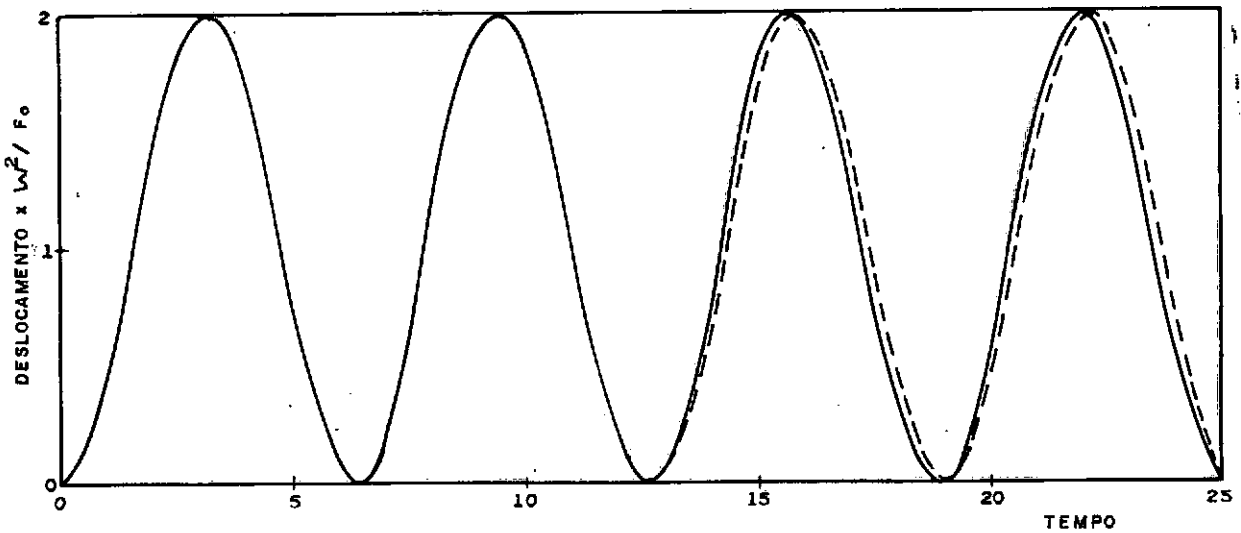


FIG. -11

— SOLUÇÃO EXATA
 --- NEWMARK $\gamma=1/2, \beta=1/4, \Delta t=0.2 = T/31.4$

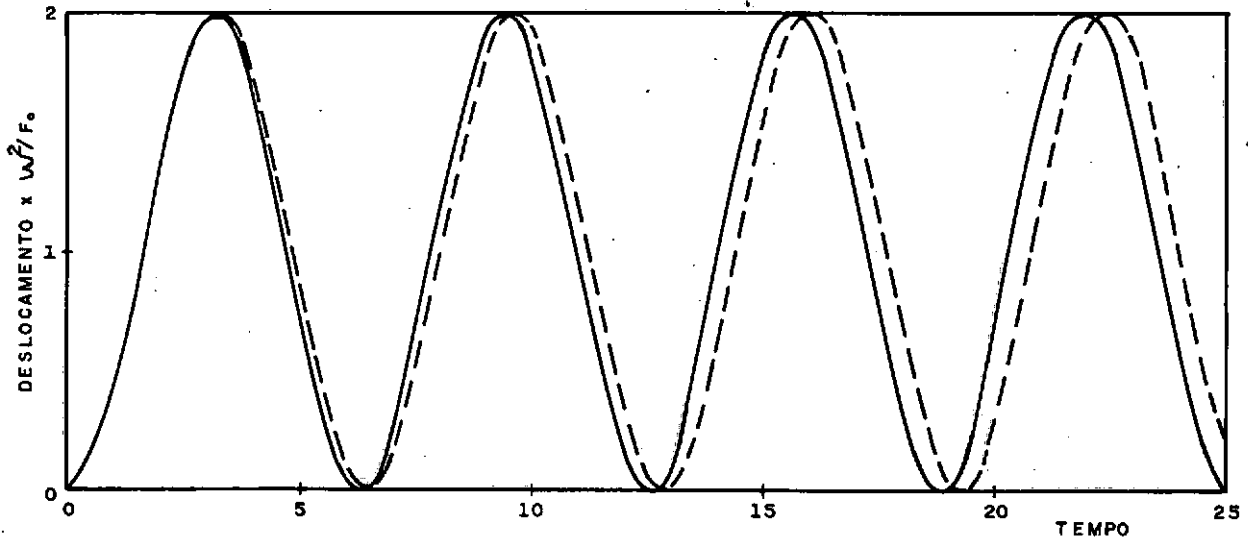


FIG. 12

— SOLUÇÃO EXATA

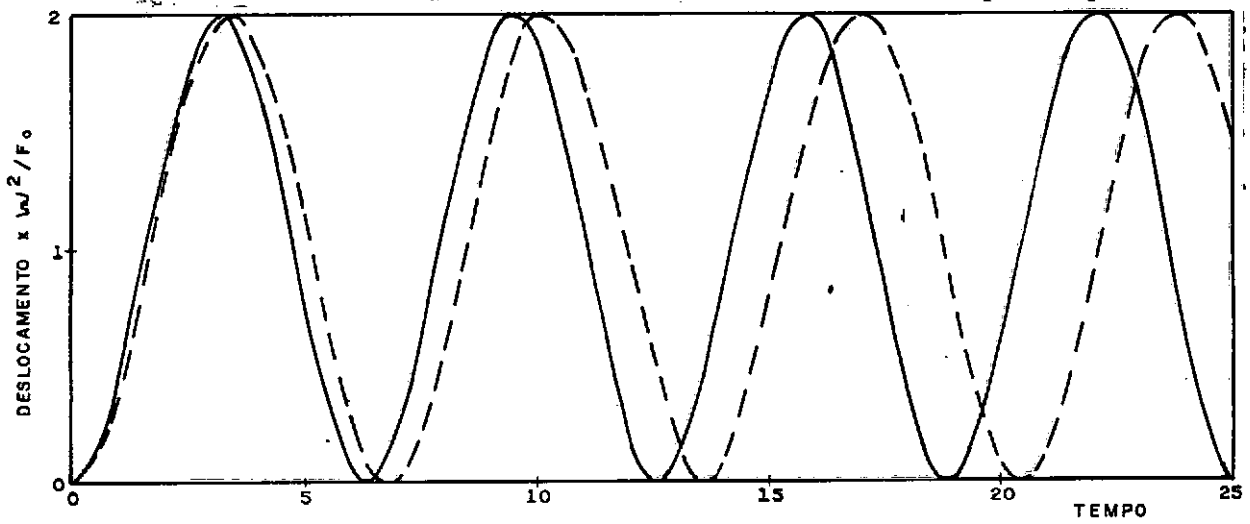
- - - NEWMARK $\gamma = 1/2, \beta = 1/4, \Delta t = 0.5$ 

FIG. 13

— SOLUÇÃO EXATA

- - - NEWMARK $\gamma = 1/2, \beta = 1/4, \Delta t = 1.0 = T/6.28$

II.12 - Método das Acelerações Lineares Modificado - Método de Wilson

Veremos a seguir, alguns aspectos do método de Wilson a fim de o compararmos com os métodos em estudo.

O método de Wilson é o método das acelerações lineares modificado com a introdução de um parâmetro θ , de modo que haja sempre estabilidade para qualquer Δt .

É tomada uma variação linear para a aceleração no intervalo de tempo $\theta\Delta t$ e as velocidades e deslocamentos são obtidos por integração:

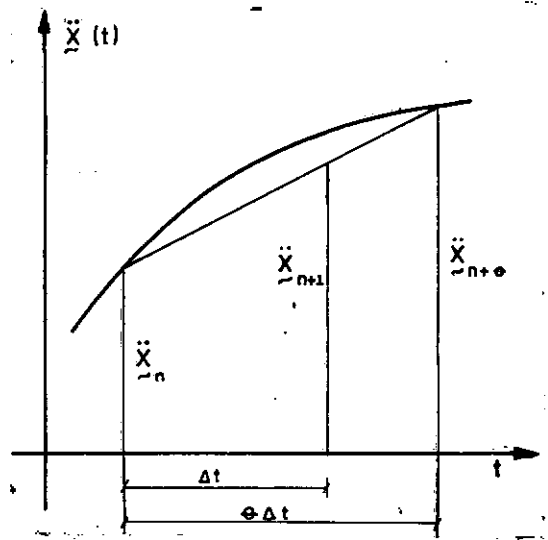


Figura 14

$$\ddot{x}(\tau) = \ddot{x}_n + (\ddot{x}_{n+\theta} - \ddot{x}_n) \frac{\tau}{\theta\Delta t}, \quad (\text{II.49})$$

$$0 \leq \tau \leq \theta\Delta t, \quad \theta \geq 1$$

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_n + \ddot{x}_n \tau + (\ddot{x}_{n+\theta} - \ddot{x}_n) \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}, \quad (\text{II.50})$$

e

$$x(\tau) = \dot{x}_n \tau + \frac{1}{2} \ddot{x}_n \tau^2 + (\ddot{x}_{n+\theta} - \ddot{x}_n) \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t} \quad (\text{II.51})$$

Para $\tau = \Delta t$

$$\ddot{x}_{n+1} = \ddot{x}_n + (\ddot{x}_{n+\theta} - \ddot{x}_n)/\theta \quad (\text{II.52})$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \Delta t \ddot{x}_{n+1} + (\ddot{x}_{n+\theta} - \ddot{x}_n) \frac{\Delta t}{2\theta} \quad (\text{II.53})$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \dot{x}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{x}_n + (\ddot{x}_{n+\theta} - \ddot{x}_n) \frac{\Delta t^2}{6\theta} \quad (\text{II.54})$$

A equação do movimento deve ser satisfeita para $\tau = \theta \Delta t$:

$$M \ddot{x}_{n+\theta} + C \dot{x}_{n+\theta} + K x_{n+\theta} = F_{n+\theta} \quad (\text{II.55})$$

Fazendo $\tau = \theta \Delta t$ nas equações (II.50) e (II.51) calculamos os valores de $\dot{x}_{n+\theta}$ e $x_{n+\theta}$ e, substituindo-os na (II.55), obtemos o sistema de N equações:

$$J_1 \ddot{x}_{n+\theta} = J_2 \quad \therefore \ddot{x}_{n+\theta} = J_1^{-1} J_2 \quad (\text{II.56})$$

$$J_1 = [M + \gamma \theta \Delta t C + \beta (\theta \Delta t)^2 K] \quad (\text{II.57})$$

$$J_2 = F_{n+\theta} - C [\dot{x}_n + (1-\gamma)\theta \Delta t \ddot{x}_n] - K [x_n + \theta \Delta t \dot{x}_n + (\frac{1}{2} - \beta)\theta^2 \Delta t^2 \ddot{x}_n]$$

$$\text{com } \beta = \frac{1}{6} \text{ e } \gamma = \frac{1}{2}$$

J_1 e J_2 foram colocadas numa forma geral a fim de que pudéssemos obter os métodos da família de Newmark ($\theta = 1$) e o método de Wilson ($\beta = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{1}{2}$ e $\theta > 1$). Entrando com os valores

de $\ddot{x}_{n+\theta}$ nas equações (II.52) e (II.54) determinamos os valores para o instante t_{n+1} .

Não foi feita a análise da estabilidade desse método. Segundo [6], $\theta > 1,37$ para que os módulos dos autovalores sejam limitados pela unidade. Obtivemos resultados numéricos com os valores usuais de $\theta = 1,4$ e $\theta = 2$ para o sistema massa-mola submetido a uma carga step.

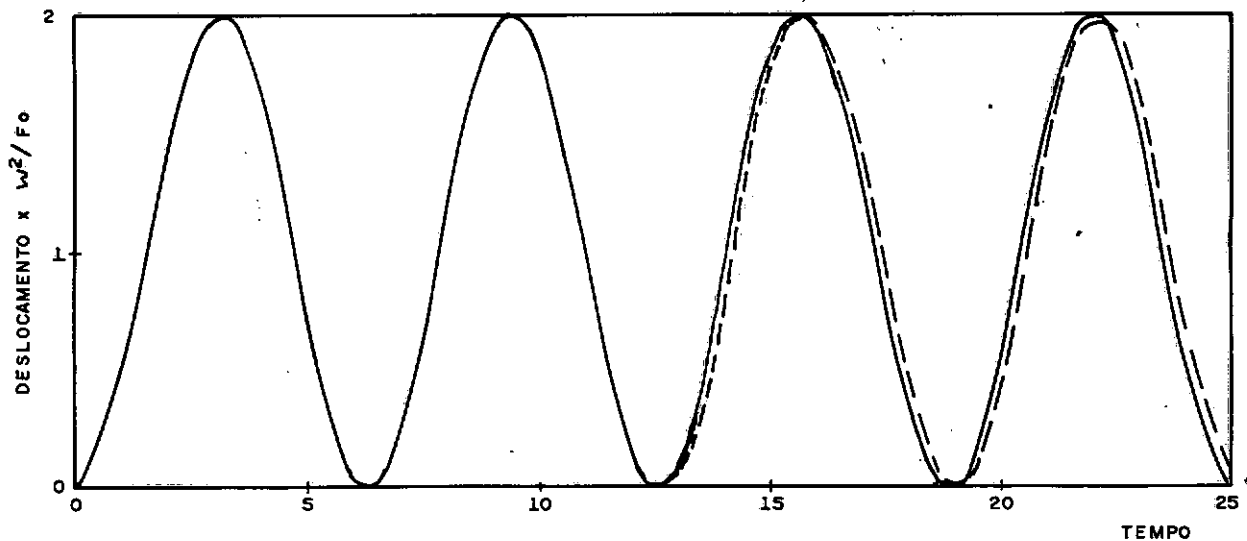


FIG. -15

— SOLUÇÃO EXATA
 - - - WILSON $\theta = 1,4$, $\Delta t = 0,2$

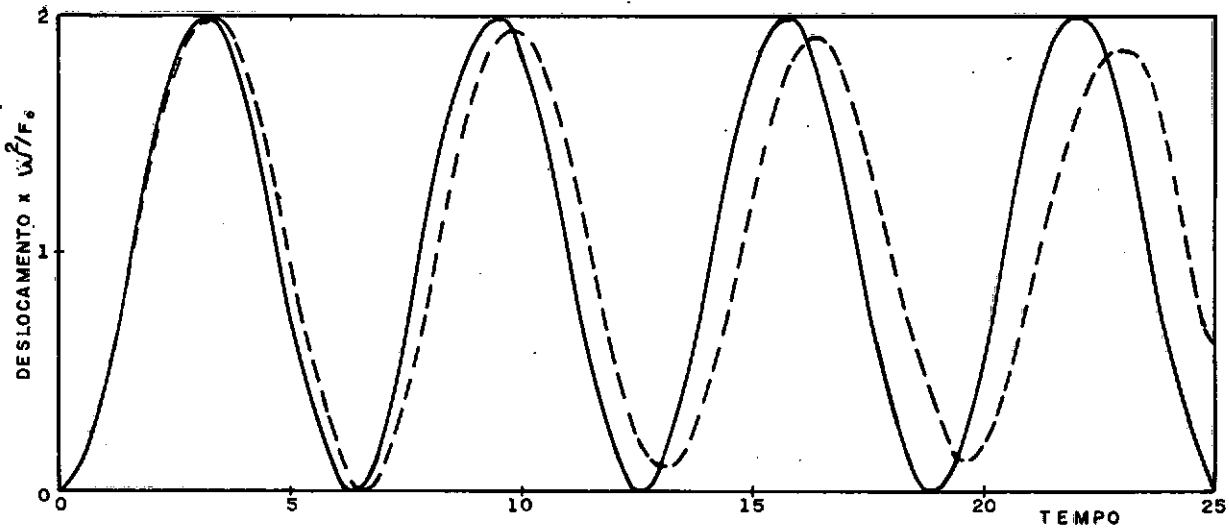


FIG. 16 ——— SOLUÇÃO EXATA
 - - - WILSON $\phi = 1.4$, $\Delta t = 0.5$

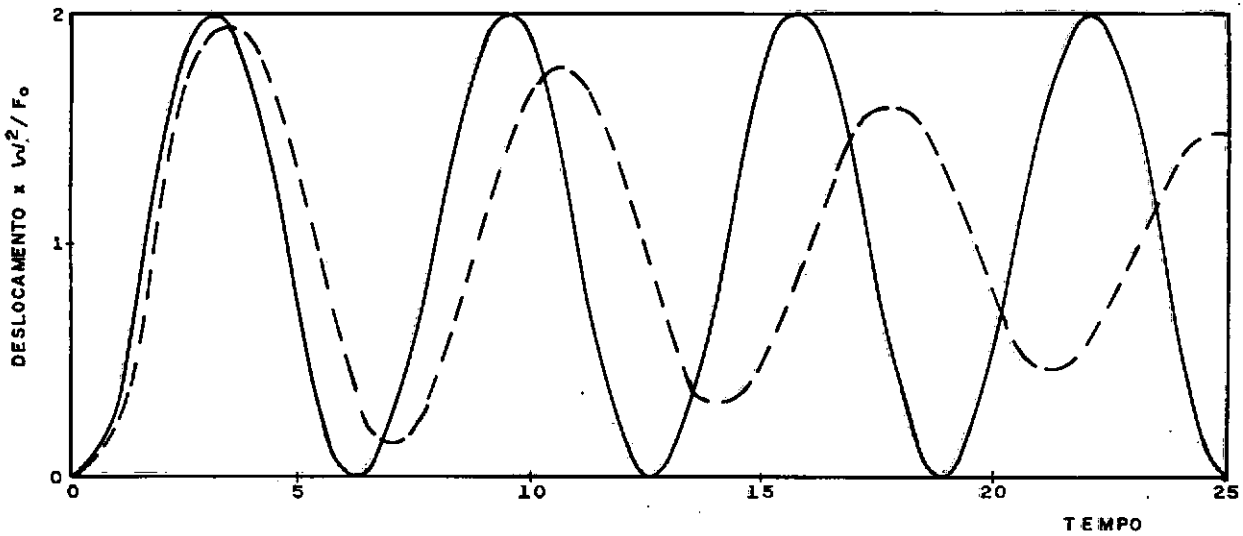


FIG. -17 ——— SOLUÇÃO EXATA
 - - - WILSON $\phi = 1.4$ $\Delta t = 1.0$

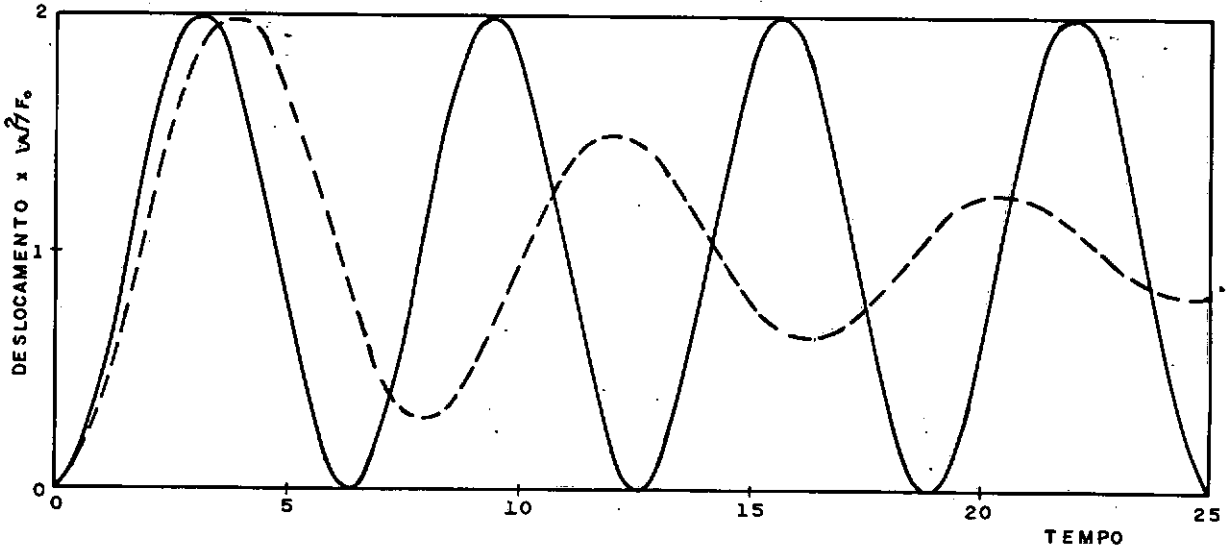


FIG. 18 ——— SOLUÇÃO EXATA
 - - - WILSON $\theta = 2.0, \Delta t = 1.0$

II.13 - Erro nas Amplitudes

Como foi visto na seção II.9, os módulos dos autovalores de A devem ser menores ou iguais à unidade. Se $|\lambda| < 1$, entretanto, há introdução de um amortecimento artificial na solução numérica e a amplitude do deslocamento decai com o tempo.

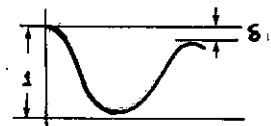
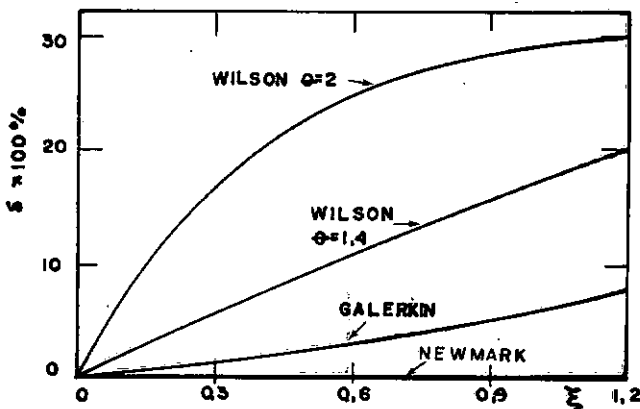


FIG. 19a PORCENTAGEM DO ERRO NAS AMPLITUDES

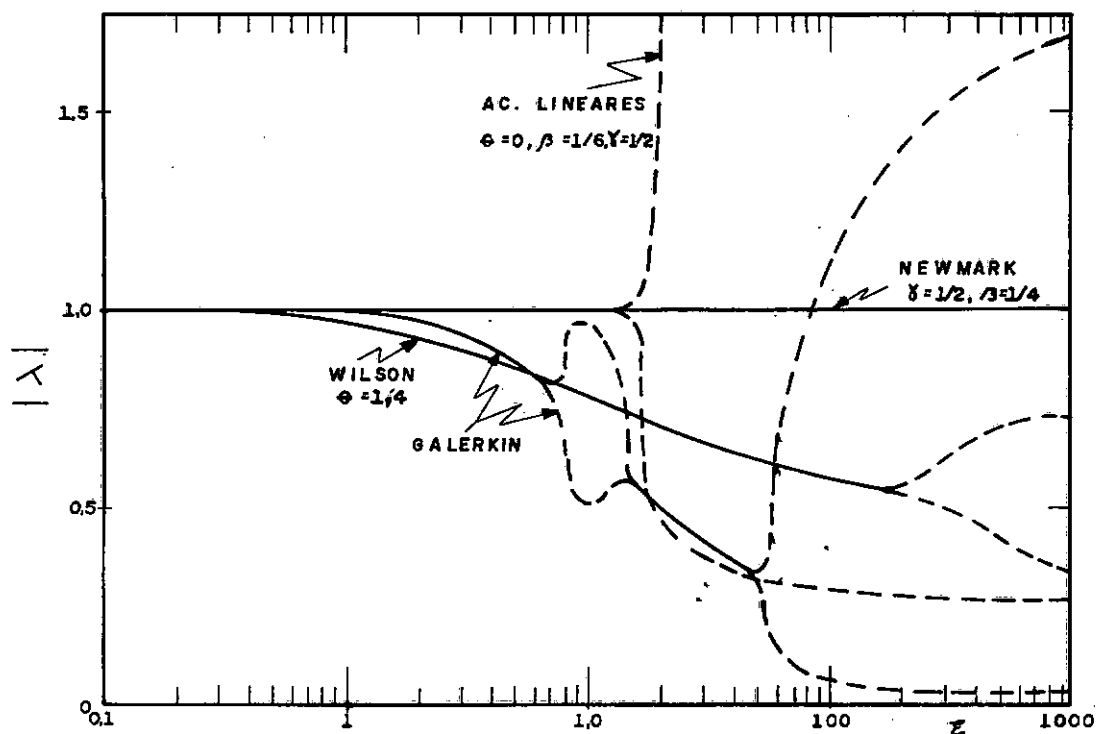


FIG. - 19b VARIACÃO DOS MÓDULOS DOS AUTOVALORES

Da Figura 19 obtemos:

1) Somente o método de Newmark ($\beta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$) não introduz amortecimento indesejável pois $|\lambda_{1,2}| = 1$ para qualquer ξ .

2) O método de Galerkin fica instável para $\xi \approx 80$ quando num ramo da curva os valores de $|\lambda|$ são maiores que 1. O método é, portanto, condicionalmente estável.

3) O método de Wilson apesar de ser incondicionalmente estável, não representa a solução oscilatória para todos os valores de ξ .

4) O intervalo de ξ para o qual o método de Galerkin

é estável e representa a solução oscilatória contém os limites usuais de Δt em aplicações práticas

$$\xi \leq 7,92 \implies \Delta t \leq 0,448 T$$

Portanto, embora seja condicionalmente estável, o método de Galerkin fornece boa aproximação numa faixa razoável do intervalo de tempo.

Convém ressaltar que a análise foi feita para um sistema de um grau de liberdade.

II.14 - Erro no Período

Comparemos a solução exata da equação diferencial do sistema massa-mola (II.13),

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}, \quad (\text{II.34})$$

com a solução exata do sistema de integração passo a passo para o mesmo problema:

$$\underline{u}_n = \underline{a}_1 \rho^n e^{in\theta} + \underline{a}_2 \rho^n e^{-in\theta}. \quad (\text{II.36})$$

$\rho = 1$ ou $\bar{\rho} \rightarrow 1$ quando $\Delta t \rightarrow 0$, portanto, $n\theta$ é comparável com ωt :

$$n\theta = (n\Delta t) \frac{\theta}{\Delta t} \leftrightarrow \omega t, \quad \theta = \text{tg}^{-1} \left[\frac{\text{Im}(\lambda_{1,2})}{\text{R}(\lambda_{1,2})} \right]$$

$n\Delta t \rightarrow t$ e $\varphi = \theta/\Delta t$ é a pseudo-frequência da solução numérica.

Temos então a variação no período:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\frac{1}{\psi} - \frac{1}{W}}{\frac{1}{W}} = \frac{W}{\psi} - 1.$$

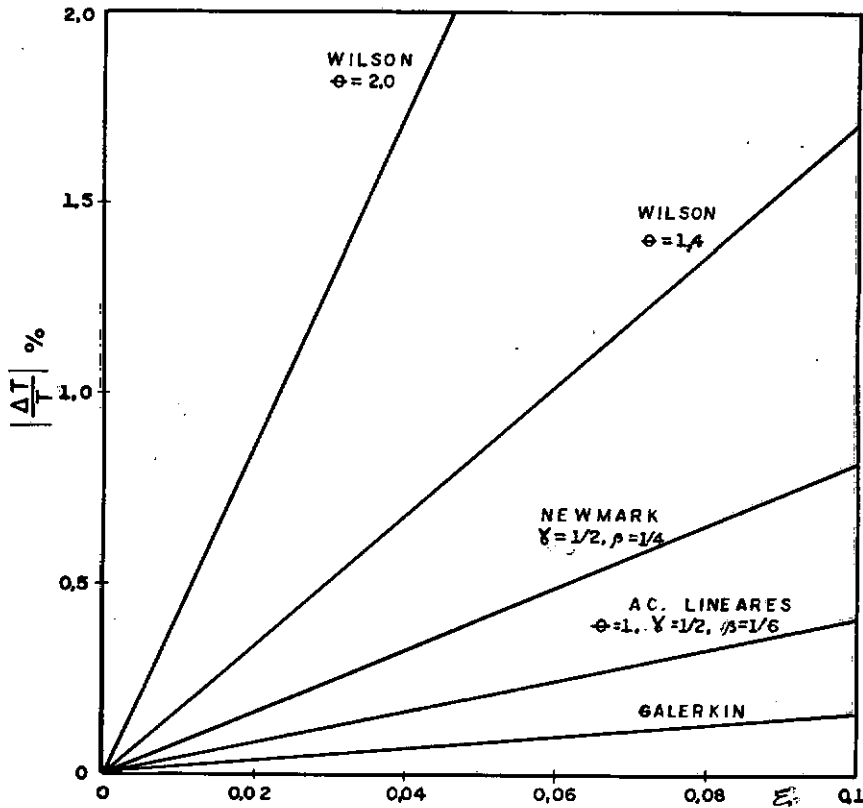


FIG. - 20 VARIACÃO NO PERÍODO

Nas duas últimas figuras, as curvas correspondentes ao método de Wilson foram tiradas da referência [8] (Geradin).

CAPÍTULO IIIPROBLEMA COM AMORTECIMENTOIII.1 - Introdução

Quando um sistema dinâmico é amortecido, o movimento pode ser oscilatório ou não. Os autovalores do operador de aproximação serão complexos - para um amortecimento subcrítico, ou reais - para amortecimentos críticos e super-críticos.

Como ilustração do que já foi analisado nos capítulos anteriores estudaremos o sistema massa-mola com amortecimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \tag{III.1}$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

O grau de amortecimento é dado pela relação entre c , k e m [4]:

amortecimento crítico	$c^2 = 4km,$
amortecimento sub-crítico	$c^2 < 4km$ e
amortecimento super-crítico	$c^2 > 4km.$

Obtivemos resultados numéricos com os três graus de amortecimento para o caso de vibrações livres ($f(t) = 0$), com deslocamento inicial.

III.2 - Newmark

Para o problema (III.1) o operador de aproximação e autovalores do método de Newmark são:

$$\underline{A} = \frac{1}{1+\gamma\eta+\beta\xi} \begin{bmatrix} 1+\gamma\eta & \Delta t [1+\eta(\gamma-\beta)] & \Delta t^2 [(\frac{1}{2}-\beta)+\eta(\frac{\gamma}{2}-\beta)] \\ -\frac{\gamma\xi}{\Delta t} & 1+\xi(\beta-\gamma) & \Delta t [(1-\gamma)+\xi(\beta-\frac{\gamma}{2})] \\ -\frac{\xi}{\Delta t^2} & -\frac{(\eta+\xi)}{\Delta t} & -[\eta(1-\gamma)+\xi(\frac{1}{2}-\beta)] \end{bmatrix} \quad (III.2)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1+(\gamma+\frac{1}{2})\eta + [\beta-\frac{1}{2}(\gamma+\frac{1}{2})]\xi \pm i\{\xi+\frac{1}{2}(\gamma-\frac{1}{2})\xi\eta + [\beta-\frac{1}{4}(\gamma+\frac{1}{2})^2]\xi^2 - \frac{1}{4}\eta^2\}^{1/2}}{1+\gamma\eta+\beta\xi} \quad (III.4)$$

$$\lambda_3 = 0; \quad \xi = \Delta t^2 \frac{k}{m}, \quad \eta = \Delta t \frac{c}{m}.$$

Os autovalores não nulos estão na forma

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm i\sqrt{b}}{c}.$$

$$\text{Se } \gamma = \frac{1}{2} \text{ e } \beta = \frac{1}{4},$$

$$b = \xi - \frac{1}{4}\eta^2 = \Delta t^2 \left(\frac{k}{m} - \frac{1}{4} \frac{c^2}{m^2} \right). \quad (III.5)$$

Vejamos agora as condições de $b > 0$, $b = 0$ e $b < 0$:

$$\frac{k}{m} = \frac{1}{4} \frac{c^2}{m^2} \quad \Rightarrow \quad 4km = c^2.$$

Assim, para

$$c^2 = 4km \quad (b = 0)$$

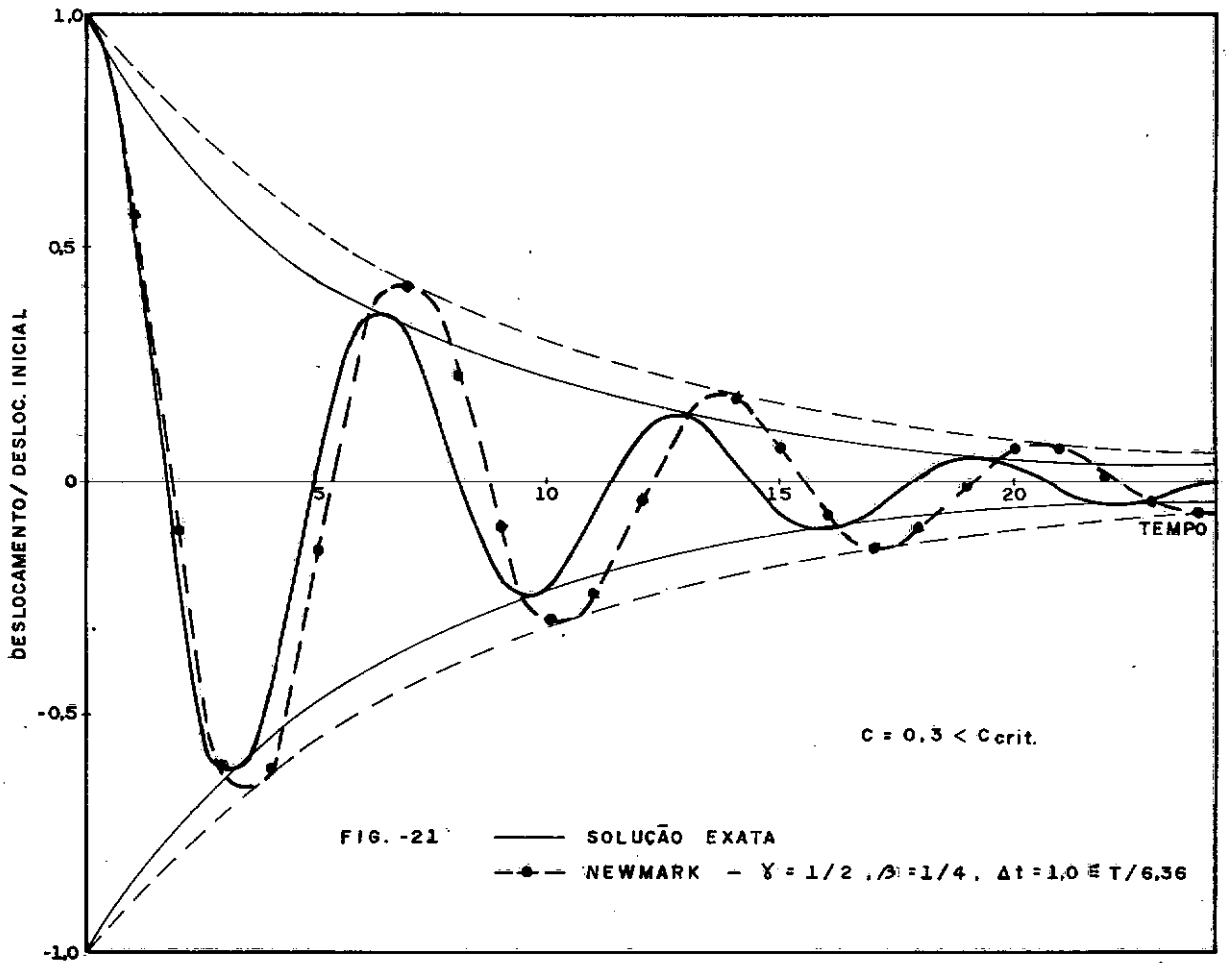
e

$$c^2 > 4km \quad (b < 0)$$

temos autovalores reais, o que confirma as soluções não oscilatórias de amortecimento crítico e super-crítico. Se

$$c^2 < 4km \quad (b > 0),$$

os autovalores são complexos e obtemos a solução oscilatória para um amortecimento sub-crítico.



O método de Newmark não introduz erro nas amplitudes no movimento harmônico. Já no movimento oscilatório com amortecimento, esse erro é apreciável devido à diferença no período.

Para um amortecimento sub-crítico a solução exata de (III.1) fica:

$$x(t) = A e^{-\zeta \omega t} \text{sen}(\omega_1 t + \phi), \quad (\text{III.6})$$

$$\zeta = \frac{c}{c_{crit}}, \quad \omega_1 = \sqrt{1-\zeta^2} \omega \quad e \quad \omega = \frac{k}{m} \quad (\text{III.7})$$

onde ζ é o fator de amortecimento viscoso, w_1 é a frequência da resposta e w , a frequência natural.

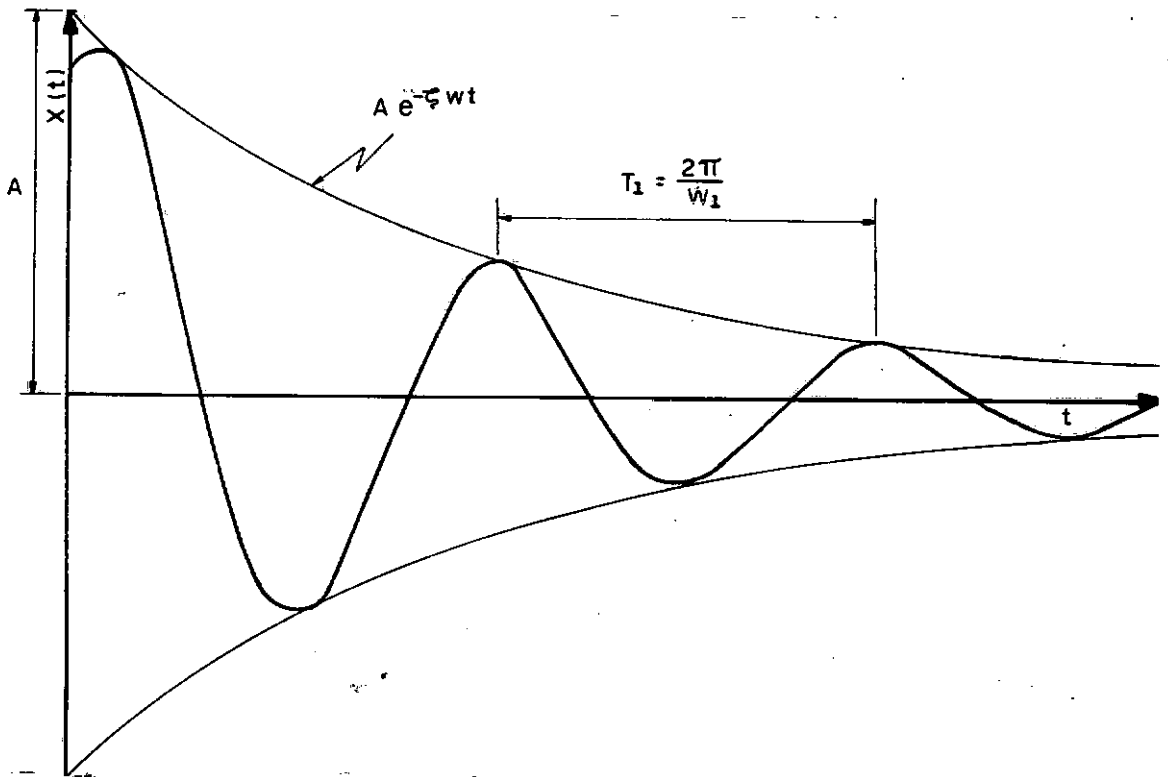


Figura 22

No problema harmônico do capítulo anterior, o período da resposta da solução numérica é alongado, e a frequência w é conseqüentemente reduzida. Isso acarreta o aparecimento de uma nova envoltória no problema oscilatório amortecido,

$$A e^{-\zeta w^* t}, \quad w^* < w,$$

resultando num amortecimento na solução numérica menor que o real, daí o erro nas amplitudes visto na Figura 21. Nessa figura vemos que a frequência do movimento amortecido w_1 também é reduzida, o que é decorrente também da variação de w , pois

$w_1 = f(w)$. (Ver equação III.7).

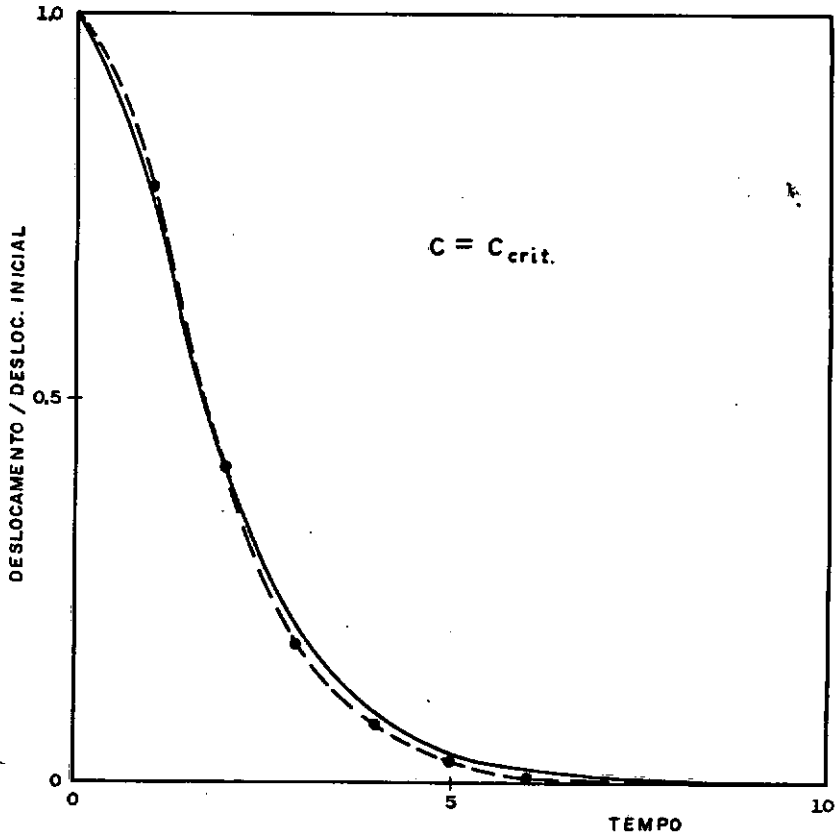


FIG. - 23 ——— SOLUÇÃO EXATA
—◆— NEWMARK - $\Delta t = 1.0$

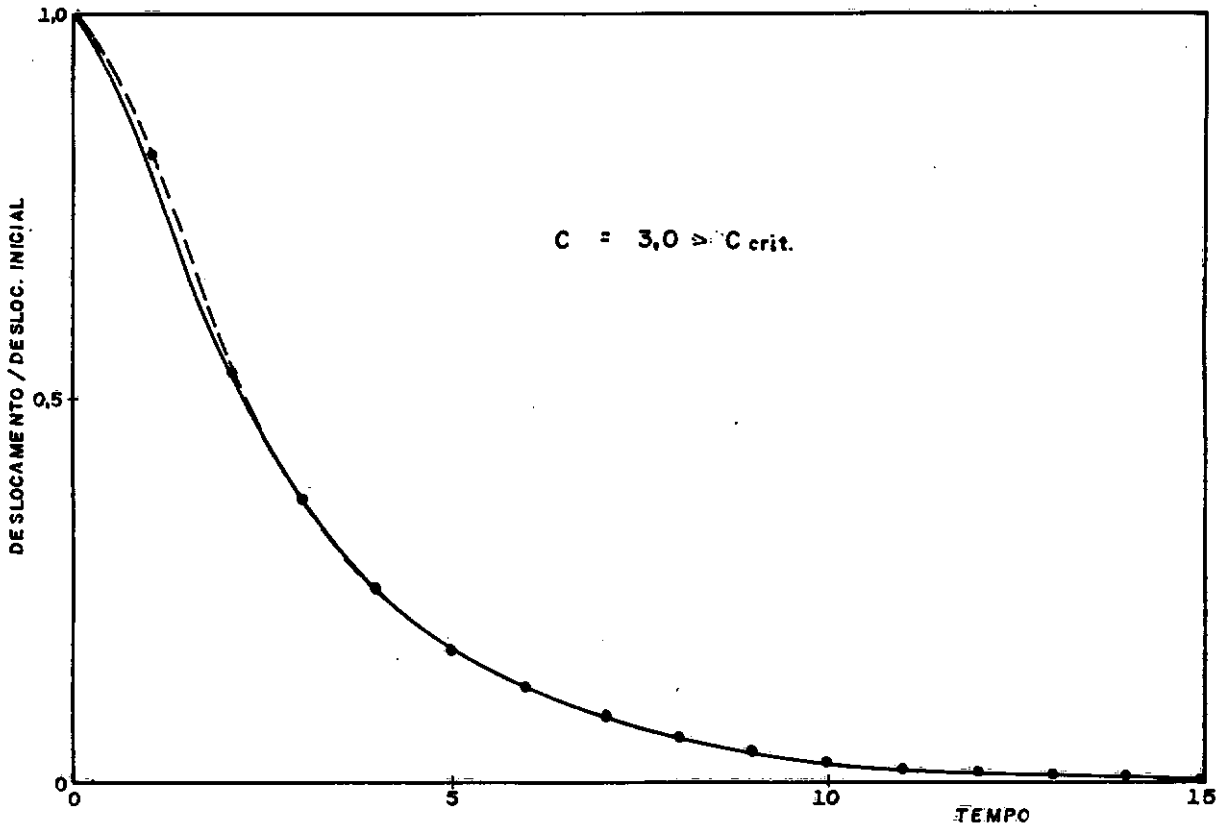


FIG. - 24

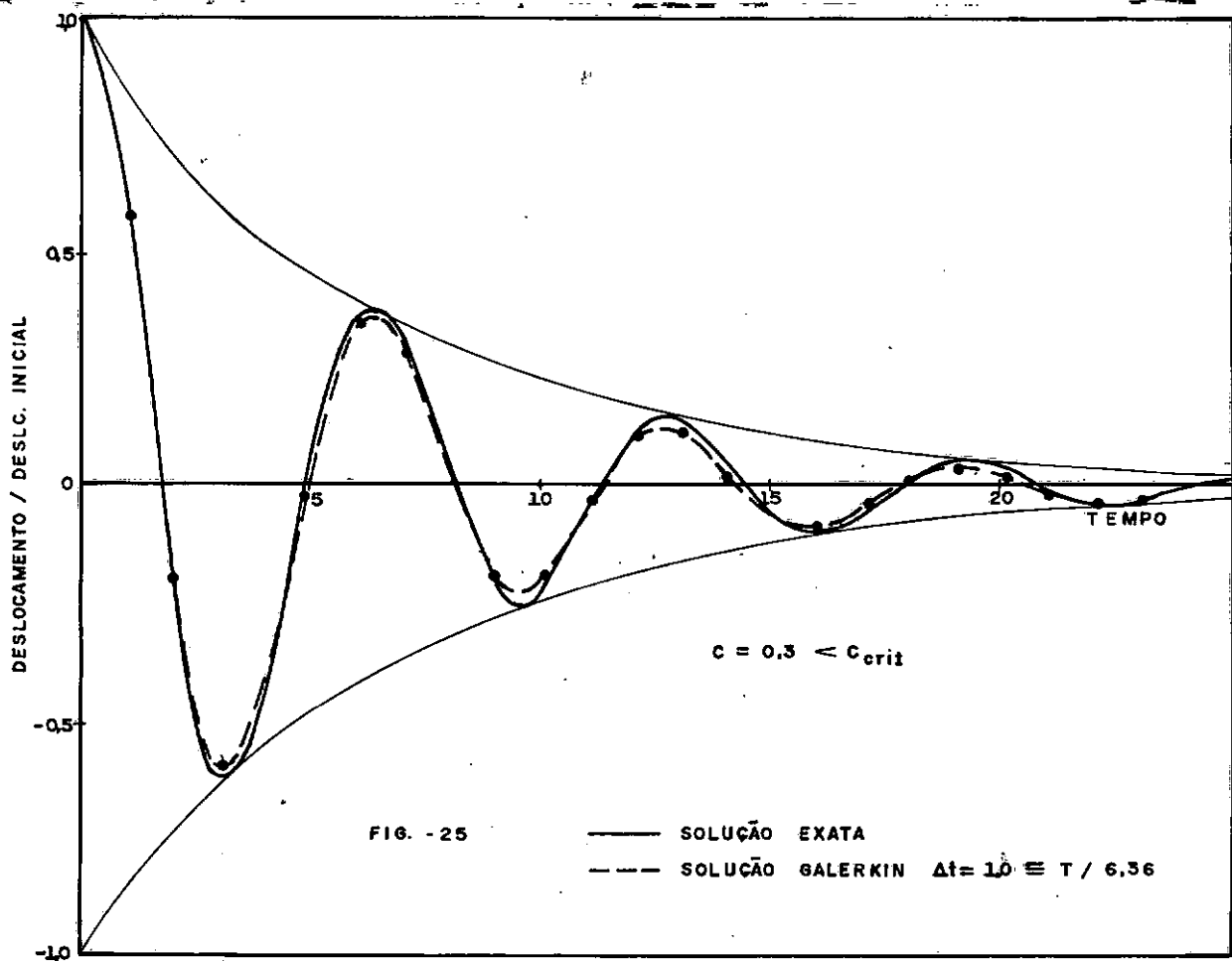
— SOLUÇÃO EXATA
 -◆- NEWMARK $\Delta t = 1.0$

Quando o movimento não é oscilatório - amortecimentos crítico e super-crítico -, o erro introduzido pelo método de Newmark é mínimo pois não há alteração no período, que neste caso é infinito, teoricamente.

III.3 - Galerkin

A consideração do amortecimento não influencia a precisão do método de Galerkin, como era de se esperar, devido aos

critérios de aproximação usados na sua instituição.



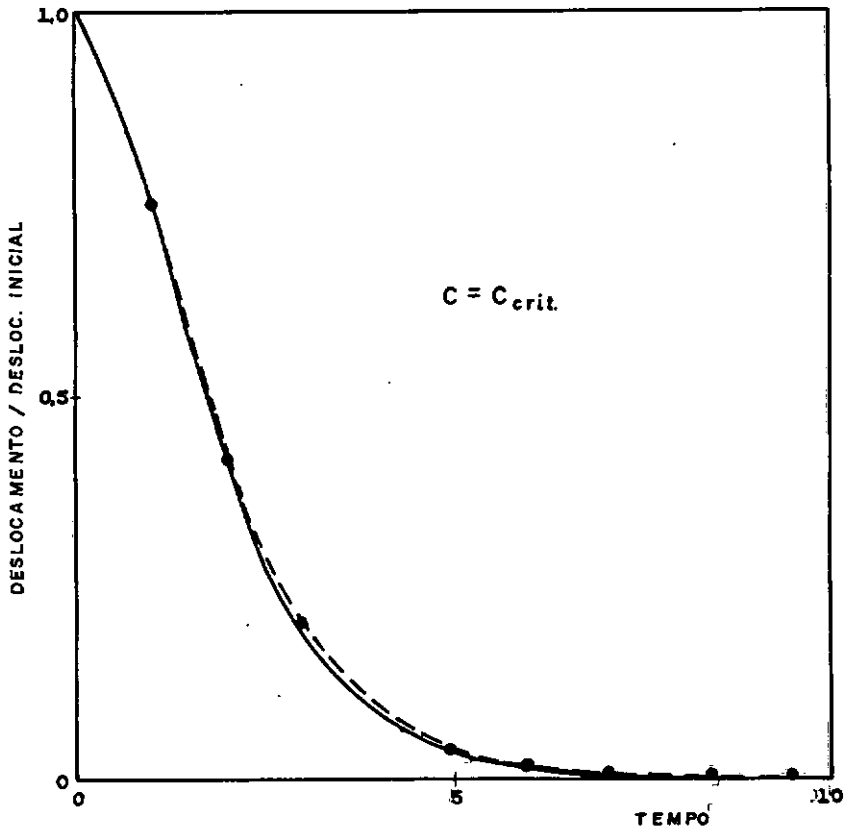


FIG. -26

— SOLUÇÃO EXATA
-●- GALERKIN - $\Delta t = 1.0$

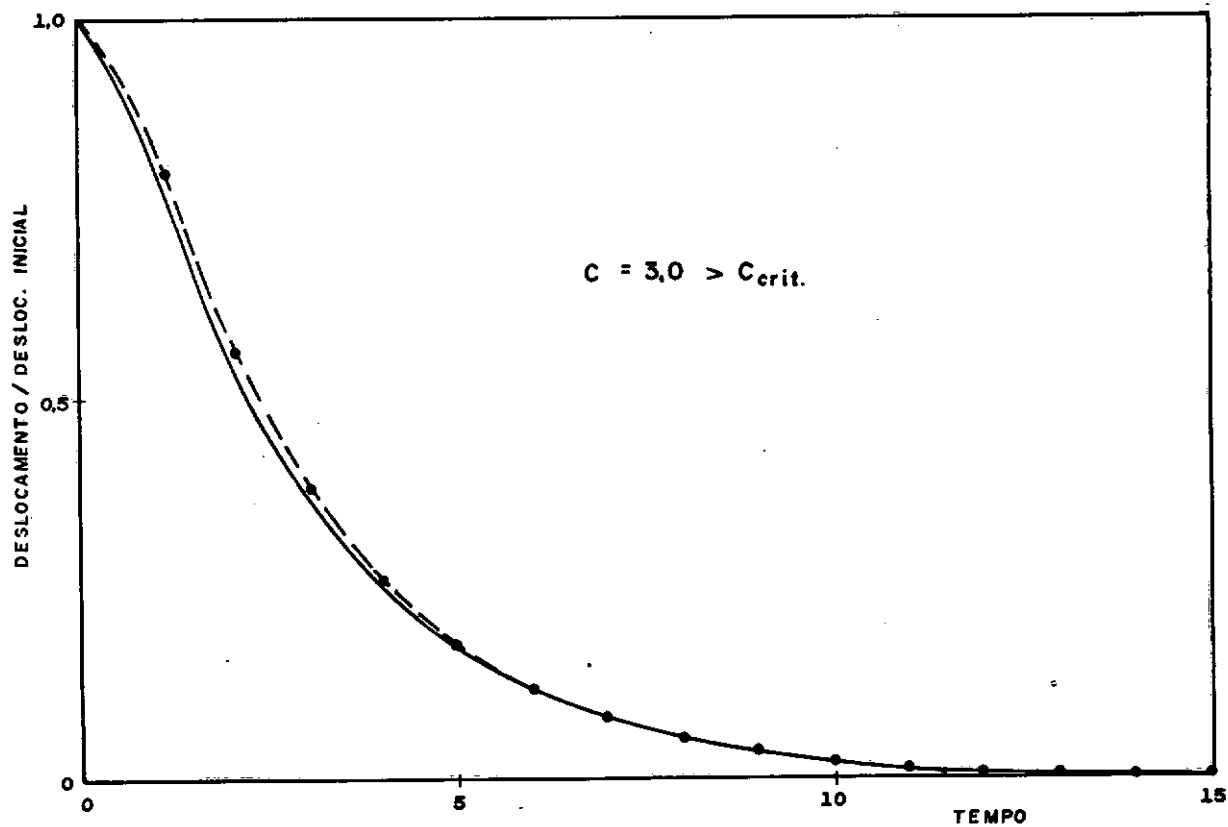


FIG. - 27

— SOLUÇÃO EXATA
 -●- GALERKIN $\Delta t = 1.0$

Por ser pequena a alteração no período, o método de Galerkin não introduz grandes erros nas amplitudes, nos problemas oscilatórios.

O operador de aproximação e os autovalores para o sistema de um grau de liberdade (III.1), são:

$$\underline{A} = \frac{1}{S} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

onde

$$S = 1 + \frac{4}{105} \xi + \frac{1}{63} \xi^2 + \frac{2}{21} \xi \eta + \frac{2}{3} \eta + \frac{1}{5} \eta^2.$$

$$\alpha_{11} = 1 - \frac{97}{210} \xi + \frac{1}{126} \xi^2 - \frac{1}{14} \xi \eta + \frac{2}{3} \eta + \frac{1}{5} \eta^2 \quad (\text{III.9})$$

$$\alpha_{12} = (1 - \frac{9}{70} \xi + \frac{1}{630} \xi^2 - \frac{4}{315} \xi \eta + \frac{1}{6} \eta + \frac{1}{30} \eta^2) \Delta t$$

$$\alpha_{21} = (\xi + \frac{2}{21} \xi^2 - \frac{1}{6} \xi \eta) \frac{1}{\Delta t}$$

$$\alpha_{22} = 1 - \frac{97}{210} \xi + \frac{13}{630} \xi^2 - \frac{1}{105} \xi \eta - \frac{1}{3} \eta + \frac{1}{30} \eta^2$$

e

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm i\sqrt{b}}{S} \quad (\text{III.10})$$

$$a = 1 - \frac{97}{210} \xi + \frac{1}{70} \xi^2 - \frac{17}{420} \xi \eta + \frac{1}{6} \eta + \frac{7}{70} \eta^2 \quad (\text{III.11})$$

$$\begin{aligned} b = & \xi - \frac{47}{210} \xi^2 + \frac{61}{4410} \xi^3 - \frac{19}{99225} \xi^4 + \frac{1}{3} \xi \eta - \\ & - \frac{11}{252} \xi^2 \eta + \frac{143}{132300} \xi^2 \eta + \frac{29}{315} \xi \eta^2 + \frac{3}{280} \xi \eta^3 - \\ & - \frac{1}{12} \eta^3 - \frac{1}{144} \eta^4 - \frac{2747}{529200} \xi^2 \eta^2 - \frac{1}{4} \eta^2 \quad (\text{III.12}) \end{aligned}$$

Quando o amortecimento é crítico, entretanto, os autovalores do operador de aproximação são complexos ($b \neq 0$) e a solução numérica oscila. Como $\xi = \Delta t^2 w^2$ e $\eta = \Delta t \frac{c}{m}$, fazendo

$$2\mu = \frac{c}{m},$$

temos que

$$\eta = 2\Delta t\mu . \quad (\text{III.13})$$

Substituindo a expressão de ξ e (III.13) em (III.12),

$$\begin{aligned} b = & (w^2 - \mu^2)\Delta t^2 + \left(\frac{2}{3} w^2\mu - \frac{2}{3} \mu^3\right)\Delta t^3 + \left(-\frac{47}{210} w^4 + \right. \\ & \left. + \frac{116}{315} w^2\mu^2 - \frac{16}{144} \mu^4\right)\Delta t^4 + \left(-\frac{11}{126} w^2\mu + \frac{3}{35} w^2\mu^3\right)\Delta t^5 + \\ & + \left(\frac{61}{4410} w^6 - \frac{2747}{132300} w^4\mu^2\right)\Delta t^6 + \frac{143}{66150} w^6\mu\Delta t^4 - \\ & - \frac{19}{99225} w^8\Delta t^8 \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Se $\mu^2 = w^2$ temos amortecimento crítico e b fica:

$$\begin{aligned} b = & \frac{1}{30} w^4\Delta t^4 - \frac{1}{630} w^5\Delta t^5 - \frac{917}{132300} w^6\Delta t^6 + \\ & + \frac{143}{66150} w^7\Delta t^7 - \frac{19}{99225} w^8\Delta t^8 \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Nos resultados obtidos para a figura 26 há troca de sinal em um tempo muito grande, quando os deslocamentos já estão quase nulos.

CONCLUSÕES

Resumindo as características dos dois métodos estudados, temos:

Galerkin: condicionalmente estável, dobra o número de equações do sistema, fornece melhor aproximação e menor erro no período;

Newmark: incondicionalmente estável, não introduz amortecimento indesejável, causa maiores erros no períodos em comparação com o método de Galerkin.

A grande desvantagem do método de Galerkin é ser condicionalmente estável embora a faixa permissível para o intervalo de tempo esteja dentro dos limites usuais. É bom ressaltar que a análise desenvolvida nesse trabalho foi aplicada a um sistema massa-mola; podemos fazer uma extrapolação, para sistemas mais complexos desde que se mantenha fixo o número de graus de liberdade.

É preciso muito cuidado no uso de métodos condicionalmente estáveis. Em sistemas com vários graus de liberdade os limites fixados para o intervalo de tempo devem ser relativos ao período do último modo. Como os últimos períodos são menores, um Δt escolhido baseado no período fundamental pode ser instável pa

ra os últimos modos, causando assim a instabilidade da solução numérica.

O método de Newmark é incondicionalmente estável mas, devido aos grandes erros introduzidos no período - consequentemente na frequência - acarreta erros apreciáveis nas amplitudes, em problemas oscilatórios amortecidos. Devido a isso, deve ser aplicado com restrições a problemas que ficam instáveis em determinadas faixas de frequências [16]; pode-se obter uma instabilidade não real causada pelo método numérico.

Ainda no método de Newmark, no caso de sistemas com vários graus de liberdade, grandes erros podem ser introduzidos nos últimos modos, dependendo da escolha do Δt . Se for um problema de vibração livre, os últimos modos não são preponderantes, sendo irrelevante o erro introduzido. Se houver entretanto uma força excitadora com período correspondente a um modo superior o erro já será grande.

Pelo que foi dito, vemos que o tipo de problema a ser analisado é que determina a escolha de um método de integração passo a passo. As cargas e a estabilidade dinâmica do sistema físico têm portanto grande importância na escolha do método, embora não influam diretamente na estabilidade numérica, desde que o problema seja bem posto.

Dentre os métodos da família das acelerações generalizadas - Newmark, Wilson, Acelerações Lineares - o método de Newmark é superior não havendo vantagens, aparentemente, no uso dos outros métodos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] LAX, P. D. and RICHTMYER, R. D., Survey of the Stability of Linear Finite Difference Equations, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. IX, pp. 267-293, 1956.
- [2] NICKELL, R. E., On the Stability of Approximation Operators in Problems of Structural Dynamics, Int. J. of Solids Structures, vol. 7, pp. 301-319, 1971.
- [3] MEIROVITCH, L., Analytical Methods in Vibrations, Macmillan, New York, 1967.
- [4] THOMSON, W. T., Vibration Theory and Applications, George Allen & Unwin Ltd., London, 1971.
- [5] KREIDER, D. L., KULLER, R. G. and OSTBERG, D. R., Differential Equations, Addison-Wesley Publishing Company, pp. 250-257, 1968.
- [6] BATHE, K. J., and Wilson, E. L., Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 1, pp. 283-291, 1973.
- [7] GOUDREAU, G. L. and TAYLOR, R. L., Evaluation of Numerical Integration Methods in Elastodynamics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 2, pp. 69-97, 1972.
- [8] GERADIN, M., On the Variational Method in the Direct Integration of the Transient Structural Response, J. of Sound and Vibration, 34 (4), pp. 479-487, 1974.
- [9] NEWMARK, N. M., A Method of Computation for Structural Dynamics Proc. Am. Soc. Civ. Engrs. 85, EM3, pp. 67-94, 1959.

- [10] NEWMARK, N. M., Computation of Dynamic Structural Response in the Range Approaching Failure, Proceedings of the Symposium on Earthquake and Blast Effects on Structures, Los Angeles, 1952.
- [11] ARGYRIS, J. H. and SCHARPF, D. W., Finite Elements in Time and Space, The Aeronautical Journal of The Roy. Aer. Soc. 73, pp. 1041-1044, 1969.
- [12] ARGYRIS, J. H., and CHAN, A. S. L., Application of Finite Elements in Space and Time, Ingenieur Archiv., 41, pp. 235-257, 1972.
- [13] WILSON, E. E., A Computer Program for the Dynamic Stress Analysis of Underground Structures, Report n° 68-1, Univ. of Calif. Berkeley, 1968.
- [14] GURTIN, M. E., Variational Principles for Linear Elastodynamics, Archives of Rational Mechanics and Analysis, vol. 16, pp. 34-50, 1964.
- [15] LOULA, A. F. D. e GALEÃO, A. C.N., Vibrações de Sistemas Elásticos Lineares, Publicação Técnica PDD 3/76, COPPE/UFRJ, 1976.
- [16] GALEÃO, A. C., LOULA, A. F. D., BEVILACQUA, L., Dynamics of Beams Carrying Moving Loads, COBEM-75, vol. D, pp. 881-894, 1975.
- [17] ZIENKIEWICZ, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill Book Company, Inc., London, 1971.
- [18] ZIENKIEWICZ, O. C. and PAREKH, C. J., Transient Field Problems: Two-dimensional and Three-dimensional Analysis

by Isoparametric Finite Elements, Int. J. for Num. Methods in Eng., vol. 2, pp. 61-71, 1970.

- [19] FEIJÓO, R. A., Distribucion Estacionaria y no Estacionaria de Temperaturas en Solidos Bibimensionales y Axissimetricos, seminario nº 4, COPPE/UFRJ, 1975.
- [20] KOLMOGOROV, A. N. e FOMIN, S. V., Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional, Mir, Moscu, 1972.
- [21] BEVILACQUA, L., Notas de Aula sobre Cálculo das Variações, COPPE/UFRJ, 1973.
- [22] ROJAS MONTEIRO, L., Analisis Sismico de Estructuras, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, 1974.