

FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS ROTATIVAS SOBRE ESTACAS

Carlos Emanuel de Melo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRÉ EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:

Dirceu de Alencar Velloso  
Dirceu de Alencar Velloso  
Presidente

Benjamin Ernani Diaz  
Benjamin Ernani Diaz

Fernando Lobo Carneiro  
Fernando Luiz Lobo Carneiro

Willy Alvarenga Lacerda  
Willy Alvarenga Lacerda

Luiz Bevilacqua  
Luiz Bevilacqua

CARLOS EMANUEL DE MELO  
Engº Civil, UFRN(1974)

---

- º Engº da INTERNACIONAL - Companhia Internacional de Engenharia S.A.
- º Prof. da Escola de Engenharia da UFRJ, no Curso de Especialização em Estruturas.

"Não sei que idéia o mundo faz de mim, mas na minha opinião creio ter sido apenas como um menino brincando na praia, divertindo-se ao encontrar de vez em quando uma pedra mais lisa ou uma concha mais bonita do que as comuns, enquanto se estendia na minha frente o grande oceano da verdade, ainda por descobrir. "

Aos meus pais e irmãs, pelo amor  
e carinho que me dedicam.

Ao mestre Dirceu de Alencar Velloso,  
pelo seu talento.

## AGRADECIMENTOS

A todos que, de alguma forma, colaboraram para a realização desta tese, em especial ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo suporte financeiro, e à SEEBLA - Serviços de Engenharia Emílio Baumgart Ltda, na pessoa do Dr. Murillo Moutinho dos Reis, pela flexibilidade de horário de trabalho permitida durante o período que fui técnico desta empresa.

Algumas pessoas, entretanto, foram fundamentais no desenvolvimento deste trabalho e não poderia deixar de mencioná-las: Maria Luiza Varela de Araújo e Paulo César Siciliano, pelo incentivo constante; Paulo César Medeiros de Almeida e Helena Santos de Oliveira, pela apresentação deste trabalho; Nelson Francisco Favilla Ebecken, pelos debates e ajuda na elaboração dos programas de computador; Maria Ignez Casotti Vidaurre, pelo carinho que sempre me dispensou.

## ABSTRACT

This work is supposed to be a guide for the design computations of foundations under reciprocating engines on piles.

Basic recommendations, suggestions, typical values and correlations were introduced as support to the elaboration of a typical design.

We introduce the classic theory of vibrations of massive machine foundations resting on a semi-infinite elastic solid, proposed by Rausch (1943), and a theory by us proposed sufficiently exact within the actual "state-of-the-art" of machine foundations based on the theory of Matrix Structural Analysis.

We have also studied how to obtain unbalanced inertial forces in Reciprocating Engines and made comments on its dynamic balance.

Comparisons of the two theories presented with results found in technical magazines were included.

Deduction of consistent mass matrix for an element embedded in the soil represented the greatest contribution of this thesis for the technical-scientific world since we don't find such development in any book or technical magazines consulted.

Computer programming "flow-charts" elaborated for calculating results and used in the comparisons of the two theories were presented as a help to concerning research to which it is necessary to employ digital computers.

## RESUMO

Este trabalho pretende ser um guia para o projeto de Fundações de Máquinas Rotativas sobre Estacas.

Recomendações básicas, sugestões, valores típicos e correlações foram apresentadas como apoio à elaboração de um projeto tipo.

Apresentamos a teoria clássica de vibrações de um bloco rígido apoiado em um meio elástico, proposta por Rausch (1943), e uma teoria, por nós proposta, suficientemente exata dentro do atual "state-of-the-art" de Fundações de Máquinas, baseada nos princípios da Análise Matricial da Mecânica da Estruturas.

Estudamos também a obtenção das forças de inércia para máquinas rotativas e tecemos comentários sobre o seu balançoamento dinâmico.

Comparações das duas teorias apresentadas e os resultados encontrados em revistas especializadas foram incluídas.

A dedução da matriz de massa consistente para um elemento envolvido por um meio elástico representa a maior contribuição desta tese ao meio técnico-científico, uma vez que não encontramos tal desenvolvimento em nenhum livro ou revista técnica consultados.

"Flow-charts" dos programas de computador elaborados para cálculo dos resultados, usados nas comparações das duas teorias, foram apresentados como ajuda em pesquisas afins e que necessitem o emprego de computadores digitais.

## ÍNDICE

I	- INTRODUÇÃO .....	1
1.1	- Generalidades .....	1
1.2	- Considerações Iniciais Sobre as Fundações de Máquinas .....	2
II	- O PROJETO DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS .....	6
2.1	- Critérios para o Projeto .....	6
2.2	- Cargas Dinâmicas .....	10
2.3	- Coeficientes de Recalque - Definição e Valores Típicos .....	13
2.3.1	- Introdução .....	13
2.3.2	- Correção dos Coeficientes de Recalque .....	14
2.3.3	- Valores Típicos (Extraídos de Terzaghi) .....	15
III	- TEORIA DE VIBRAÇÕES DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS - FORMULAÇÃO CLÁSSICA PARA ESTACAS VERTICAIS .....	17
3.1	- Determinação dos Coeficientes de Rígidez do Estaqueamento .....	17
3.1.1	- Rígidez Vertical .....	18
3.1.2	- Rígidez Horizontal .....	21
3.1.3	- Rígidez à Rotação .....	23
3.2	- Hipóteses Adotadas na Elaboração do Modelo .....	25
3.3	- Vibrações Verticais Não-Amortecidas .....	26
3.3.1	- Vibrações Verticais Naturais Não-Amortecidas .....	28
3.3.2	- Vibrações Verticais Forçadas .....	29
3.4	- Vibrações Não-Amortecidas à Rotação .....	33
3.4.1	- Vibrações Naturais Não Amortecidas De-correntes da Rotação .....	34
3.4.2	- Vibrações Forçadas Não-Amortecidas De-correntes de Rotação .....	35

3.5 - Vibrações Não Amortecidas Decorrentes Simultaneamente de Translação e Rotação .....	35
3.5.1 - Vibrações Naturais Não-Amortecidas Decorrentes, Simultaneamente, de Translação e Rotação .....	39
3.5.2 - Vibrações Forçadas Não-Amortecidas Devidas, Simultaneamente, à Translação e Rotação.....	42
 IV - OBTENÇÃO DAS FORÇAS DE INÉRCIA E O SEU BALANCEAMENTO	45
4.1 - Introdução .....	45
4.2 - Obtenção das Forças de Inércia .....	46
4.3 - Balanceamento das Forças de Inércia .....	52
 V - MODELO MATEMÁTICO PARA O CÁLCULO DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS ROTATIVAS SOBRE ESTACAS .....	56
5.1 - Introdução .....	56
5.2 - Hipóteses Adotadas na Elaboração do Modelo ...	56
5.3 - Método de Análise .....	57
5.3.1 - Determinação do Centro de Massa do Sistema Máquina(s) - Fundação .....	57
5.3.2 - Determinação da Geometria e Propriedades do Estaqueamento .....	59
5.3.3 - Determinação das Condições de Apoio ..	60
5.3.4 - Montagem da Matriz de Rígidez para Cada Elemento da Estaca e para a Estaca Inteira .....	60
5.3.5 - Montagem da Matriz de Massa para Cada Elemento da Estaca e para a Estaca Inteira .....	65
5.3.6 - Introdução das Condições de Apoio nas Matrizes de Rígidez e de Massa Equivalentes de uma Estaca .....	79
5.3.7 - Adaptação das Matrizes de Rígidez e de Massa Equivalente de uma Estaca para a Cabeça da Estaca .....	80
5.3.8 - Transformação das Matrizes de Rígidez e de Massa Equivalente para o Sistema Global de Coordenadas .....	82

5.3.9 - Matrizes de Rigidez e de Massa Equivalente do Estaqueamento, com a Influência do Bloco de Suporte das Máquinas e Equipamentos .....	85
5.3.10- Determinação das Frequências Naturais de Vibração do Bloco de Suporte .....	86
5.3.11- Determinação dos Deslocamentos e Acelerações do Bloco de Suporte .....	88
5.3.12- Determinação Final de Deslocamentos, Acelerações, Esforços e Reações ao Longo da Estaca .....	90
VI - COMPARAÇÕES DOS MODELOS PROPOSTOS E COM RESULTADOS ENCONTRADOS EM REVISTAS TÉCNICAS .....	93
6.1 - Introdução .....	93
6.2 - Resultados .....	94
6.2.1 - Frequências Naturais de Vibração (em rpm) .....	94
6.2.2 - Situação de Máximo Esforço Horizontal.	94
6.2.3 - Situação de Máximo Momento Torsor .....	95
6.3 - Contribuição Adicional .....	96
VII - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS AFINS .....	98
7.1 - Conclusões .....	98
7.2 - Sugestões para Pesquisas Futuras .....	100
BIBLIOGRAFIA .....	101
APÊNDICE I .....	108
APÊNDICE II .....	135

## I - INTRODUÇÃO

### 1.1 - GENERALIDADES

O objetivo do presente trabalho é obter a resposta dinâmica de um estaqueamento, excitado por uma solicitação senoidal ou cossenoidal, como ocorre com as máquinas rotativas.

Para tanto, foram elaborados programas escritos em linguagem FORTRAN a partir da formulação clássica e de um modelo matemático que simula inúmeras características da fundação a ser projetada, tais como: contenção do solo, engastamento das estacas no bloco de coroamento e no solo, etc.

Carregamentos distribuídos atuantes sobre as estacas terão o seu efeito computado à parte. Este procedimento é conveniente do ponto de vista de economia computacional, notadamente quando se compila o programa para sua utilização ao invés de se gravar em disco, pois a sua introdução gera um número muito elevado de comandos adicionais no programa de computador elaborado.

A teoria matemática necessária à elaboração do modelo está escrita minuciosamente, salvo alguns tópicos da parte estática que poderão ser encontrados no trabalho publicado por Diaz (1973).

As aplicações e resultados numéricos foram comparados com soluções existentes, encontradas em artigos de revistas especializadas, e com a formulação clássica, proposta por Rausch (1943), e que se encontra aqui desenvolvida.

Sugestões e comentários para projeto foram introduzidas, visando dar um caráter prático ao nosso trabalho.

## 1.2 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE AS FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS

O projeto de fundações de máquinas, na sua formulação clássica, consiste:

- a) na determinação das frequências naturais de vibração do sistema máquina(s)-fundação (e sua posterior comparação com as frequências excitantes).
- b) na determinação das amplitudes do sistema máquina(s)-fundação (e sua posterior comparação com as amplitudes admissíveis).
- c) na determinação do fator de amplificação (relação entre deslocamento dinâmico e deslocamento estático) para cálculo dos esforços estáticos equivalentes aos esforços dinâmicos impostos à fundação.
- d) cálculo estático, com cargas obtidas por (c), adicionadas à carga estática permanente, visando o dimensionamento estrutural das peças constituintes da fundação.
- e) estudo da propagação de ondas elásticas no solo, para se verificar a necessidade, ou não, do isolamento da fundação.

Em muitos casos ignora-se este último ítem, já que a limitação de amplitudes, descrita em (b), atenua a propagação de ondas elásticas no solo, sendo sua análise uma decisão que depende do julgamento do Engenheiro Projetista. Porém, deve-se ter em mente que as vibrações provocadas por uma fundação de máquina podem ocasionar efeitos prejudiciais em estruturas vizinhas, além de provocar sintomas danosos à saúde de pessoas que necessitem permanecer habitualmente próximo à mesma.

No modelo matemático proposto, os itens (c) e (d) são substituídos pelos procedimentos usuais da Análise Matricial de Estruturas, levando em conta as propriedades geométricas e de massa da fundação.

É de suma importância o estudo detalhado de uma fundação de máquina, uma vez que, no caso de um insucesso, o custo

to da produção perdida adicionado ao reforço da fundação, atingem valores extremamente elevados. Assim sendo, pode-se afirmar que as despesas feitas num projeto adequado de fundação de máquina serão amplamente compensadas pelo seu bom desempenho.

Com o avanço do desenvolvimento industrial a Engenharia necessitou projetar e executar fundações de pesadas máquinas. Como não se dispunha, até a década de 1930-1940, de uma sistemática para cálculo, baseada em estudos teóricos e experimentais, lançava-se mão de regras empíricas que determinavam que o peso da fundação e máquina deveria ser  $n$  vezes o peso da máquina sobre a fundação, sendo o valor de  $n$  ditado pela experiência do projetista, e alterado, sempre que havia insucesso com alguma fundação. Este valor era guardado cuidadosamente e passado de uma geração a outra, de "pai para filho". Como o valor de  $n$  não se relacionava com nenhuma propriedade do solo, os fabricantes apresentavam projetos válidos para qualquer situação, sem recomendações substanciais. Hoje, os fabricantes apresentam apenas as dimensões mínimas, por razões de operação e/ou instalação da máquina.

Durante o desenvolvimento da Segunda Grande Guerra Mundial, Rausch (1943), lançou o livro que revolucionou a técnica das fundações de máquinas. Nascia, então, uma sistemática para projeto, hoje desenvolvida e detalhada pelos modernos autores, tais como Barkan (1962), Major (1962), Buzdugan (1972), entre outros.

Este trabalho pretende ser suficientemente completo, dentro dos limites do tema proposto. Para atender a essa idéia, montamos o texto de tal forma que a consulta à bibliografia seja a mais esporádica possível, uma vez que iserimos tabe-

las, ábacos e gráficos, além de toda a teoria necessária à elaboração de um projeto de fundações de máquinas rotativas.

O Capítulo II contém recomendações básicas, sugestões, valores típicos e correlações. Enfase maior foi dado à determinação dos coeficientes de recalque necessários à manipulação do modelo matemático proposto no Capítulo V, já que este é o maior obstáculo à aplicabilidade do modelo em casos práticos.

O Capítulo III apresenta a formulação clássica da teoria de vibrações de um bloco rígido apoiado num meio elástico.

O Capítulo IV contém o desenvolvimento de um modelo esquemático para máquinas rotativas, visando a obtenção das forças de inércia e também tece comentários na técnica de balançoamento de tais forças.

O Capítulo V apresenta um modelo matemático suficientemente exato, dentro do atual "state-of-the-art" de fundações de máquinas. A maior dificuldade na aplicação deste modelo reside na determinação dos parâmetros de solo, comentada no Capítulo II.

O Capítulo VI compara o modelo matemático proposto com a formulação clássica, e com resultados encontrados em revistas técnicas.

O Capítulo VII apresenta as conclusões da nossa pesquisa, terminando por sugerir temas para desenvolvimento de teses ou trabalhos de pesquisas afins.

Como contribuição final, apresentamos no Apêndice I a dedução da matriz de massa para um elemento envolvido por meio elástico, por não existir tal desenvolvimento em nenhum livro ou revista especializada consultados. No Apêndice II apre-

sentamos "flow-charts" dos programas de computador elaborados.

## II - O PROJETO DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS

### 2.1 - CRITÉRIOS PARA O PROJETO

As pranchas apresentadas pelo fabricante fornecem as dimensões mínimas a serem adotadas por ocasião da elaboração do projeto definitivo. Sempre se deverá complementar o projeto com cálculo de vibrações, salvo quando se tratar de solos de excelente capacidade de carga, seco, ou seja, quando o lençol freático estiver a mais de  $1/4$  do comprimento da fundação abaixo do plano da base, uma vez que as vibrações são frequentemente transmitidas não-amortecidas, a consideráveis distâncias, através do lençol freático devido à continuidade do meio.

Ensaios de solos deverão ser realizados para se determinar as características geotécnicas das camadas constituintes do subsolo. Ensaios de placa sempre são recomendados, para se estimar o coeficiente de recalque.

Fundações para máquinas rotativas de baixas frequências excitantes são constituídas usualmente por blocos maciços de concreto armado, em geral com aberturas para passagem de canalizações e para a colocação de chumbadores de fixação.

As dimensões são adotadas com base em projetos similares e verificadas por cálculo de vibrações. As frequências naturais devem estar na faixa de segurança à ressonância e as amplitudes de vibração forçadas não devem exceder as admissíveis.

Uma fundação de máquina deverá ser completamente desligada do restante da estrutura que a abriga, através de juntas de material de suficiente elasticidade (a espessura da junta comumente adotada é de cerca de 3 a 5 centímetros).

O centro de gravidade do estaqueamento deverá se localizar na mesma vertical do centro de gravidade do conjunto máquina - blocos de suporte e coroamento das estacas, ou próximo disto - a excentricidade máxima permitida é 5%. Quando isto não acontece dificulta-se bastante o cálculo, com o inter-relacionamento das equações de movimento de translação vertical e horizontal e de rotação em torno de um eixo horizontal.

Quando várias unidades são instaladas próximas umas das outras (distância comparável às dimensões da fundação), recomenda-se, em solos moles, a adoção de uma fundação única, através de um "radier" de espessura adequada.

Fundações sobre estacas são utilizadas quando:

- a) a pressão aplicada ao solo, considerando as cargas estáticas e dinâmicas, ultrapassar a pressão admissível no solo de fundação.
- b) for necessário aumentar a frequência natural de vibrações da fundação.
- c) for necessário diminuir a amplitude de vibrações naturais ou forçadas.
- d) for necessário diminuir o recalque dinâmico residual<sup>1</sup> da fundação.

Os ítems a) e d) referem-se principalmente ao projeto de fundações de estruturas submetidas à influência de ondas elásticas provenientes de uma fundação de máquina próxima. Os ítems b) e c) são mais comuns no projeto das fundações de máquina propriamente dito.

<sup>1</sup> - recalque dinâmico residual: recalque que se manifesta quando a pressão total (imposta pelas cargas estáticas e dinâmicas) excede um valor limite para um dado solo, que depende das características do ciclo de tensões.

A limitação de amplitudes (que é admitida como um critério de deformação) poderá ser feita através de inúmeros ábacos e fórmulas empíricas, apresentados por pesquisadores e fabricantes de máquinas.

Budzugan (1972) apresenta as seguintes relações:

$$A(\text{mm}) = 0,0785 - 0,1 \ln(n/1000) \quad (2.1)$$

$n$  em rpm, adotada pela URSS, para suas indústrias pesadas.

$$A(\text{mm}) = \frac{0,185}{1,75 (n/1000)} \quad (2.2)$$

$n$  em rpm, adotada pelas Usinas Metropolitan Vickers.

$$A(\text{mm}) = (346/n)^2 \quad (2.3)$$

$n$  em rpm, adotada pela Westinghouse.

Buzdugan (1972) e Lipinski (1972) apresentam uma tabela, atribuída a Savinov (1955), que contém limites superiores de amplitudes de vibrações de máquinas de frequência uniforme. A tabela, apresentada a seguir, correlaciona a frequência de vibração vertical ou horizontal com as amplitudes, fornecidas em mm.

DIREÇÃO DAS VIBRAÇÕES	FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO (RPM)							
	< 500	500	700	1000	1500	3000	5000	10000
VERTICAL	0,15	0,12	0,09	0,075	0,06	0,03	0,015	0,0050
HORIZONTAL	0,20	0,16	0,13	0,110	0,09	0,05	0,020	0,0075

TABELA 2.1 - AMPLITUDES DE VIBRAÇÕES (MM)

Richart e outros (1970) apresentam um gráfico, mos

trado na figura a seguir, que correlaciona a frequência da máquina com a amplitude máxima permissível, para vários níveis de desempenho da máquina.

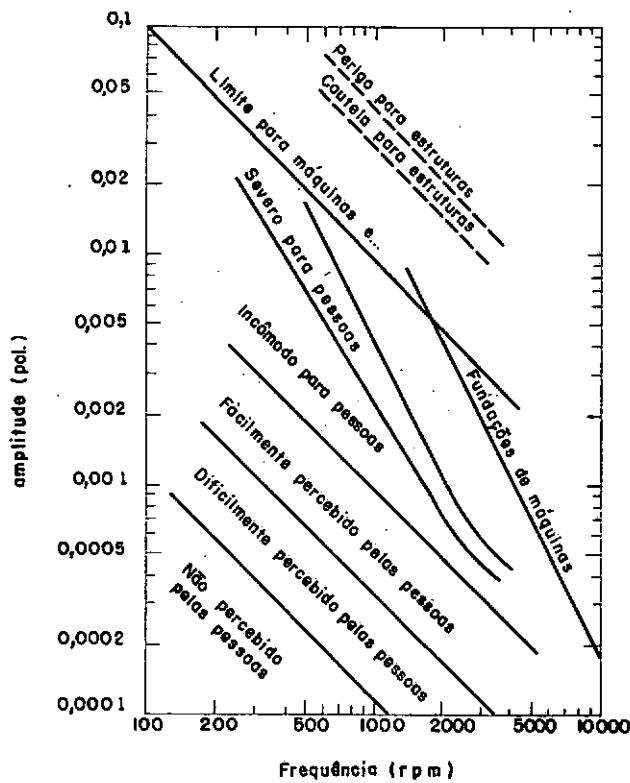


FIGURA 2.1 - LIMITES GERAIS DE AMPLITUDES DE DESLOCAMENTOS PARA UMA PARTICULAR FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO (EXTRAÍDO DE RICHART, 1962).

Barkan (1962), recomenda como amplitude admissível valores entre 0,20 a 0,25 milímetros, caso não exista perigo de ressonância em estruturas vizinhas.

Esta limitação de amplitude, exigida em um projeto de fundações de máquinas, necessita do julgamento do engenheiro projetista, no sentido de verificação das condições de funcionamento da máquina, adaptando-as ao projeto.

Isto equivale a uma avaliação do tempo necessário para que as equipes de manutenção e/ou operação possam atuar. Sendo este período de tempo bastante prolongado devemos adotar uma rígida limitação de amplitudes, de modo a assegurar perfeitas condições de saúde às pessoas que trabalham junto à máquina.

De grande valia são as observações de fundações de máquinas existentes, em operação, pois, função do seu comportamento, podemos tirar ensinamentos para projetos em desenvolvimento.

A faixa perigosa à ressonância deve ser tomada como sendo  $\pm 20$  a 30% das frequências naturais de vibrações. Todas as frequências excitantes (primárias e/ou secundárias) que desenvolvam esforços dinâmicos deverão se situar fora deste conjunto de valores.

## 2.2 - CARGAS DINÂMICAS

Após o estabelecimento dos critérios de projeto, surge o problema das cargas dinâmicas atuantes sobre a fundação. Para os casos correntes foram estudados alguns esquemas simples, não sendo justificada a adoção de esquemas mais complexos, a não ser esporadicamente.

Quatro esquemas foram selecionados e apresentados a seguir, sendo que para melhor compreensão, imaginou-se um movimento unidirecional.

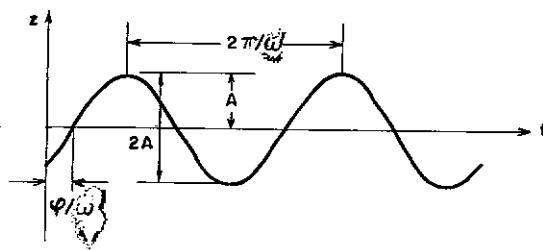


FIGURA 2.2 - FORÇA VERSUS TEMPO NUM CARREGAMENTO SENOIDAL

A Figura 2.2 representa um carregamento senoidal, o que gera uma relação deslocamento versus tempo também senoidal. Este carregamento é característico das máquinas rotativas.

A Figura 2.3 representa um carregamento periódico, mas não harmônico. Este carregamento é característico de um grupo de máquinas rotativas trabalhando em conjunto, ou de uma máquina rotativa isolada, cujas frequências secundárias (múltiplas da primária ou fundamental) desenvolvam esforços apreciáveis em relação aos correspondentes à frequência primária.

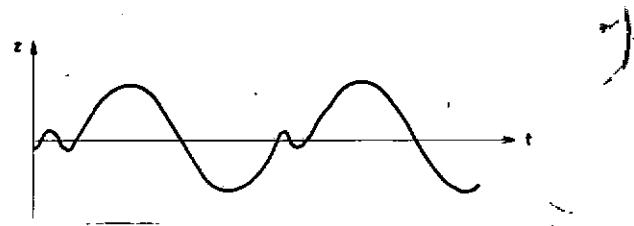


FIGURA 2.3 - FORÇA VERSUS TEMPO NUM CARREGAMENTO PERIÓDICO

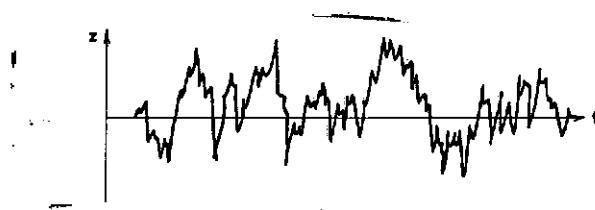


FIGURA 2.4 - FORÇA VERSUS TEMPO NUM CARREGAMENTO ALEATÓRIO

A Figura 2.4 representa um carregamento aleatório, do tipo não-determinístico (que deverá ser manipulado com o auxílio da Estatística) e que poderá ser produzido por inúmeros agentes da natureza: vento, ação de ondas ou correntes marítimas, terremotos, etc. Seu estudo é extremamente importante em Engenharia Civil.

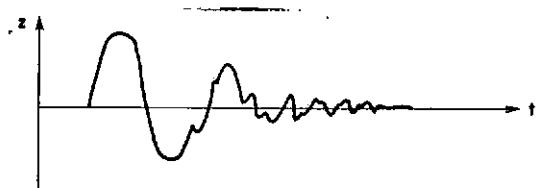


FIGURA 2.5 - FORÇA VERSUS TEMPO NUM CARREGAMENTO EM FORMA DE PULSO

A Figura 2.5 representa um carregamento em forma

de pulso, no qual o tempo de aplicação da carga é bastante pequeno. Tal carregamento poderá ser produzido por martinetes (martelos grande e pesados, movidos por água ou vapor, e utilizados para distender barras de ferro e malhar a frio o ferro e o aço), por impactos de objetos sobre estruturas (reatores nucleares são projetados para suportar impactos de aviões e explosões internas) ou por máquinas especiais de testes.

### 2.3 - COEFICIENTES DE RECALQUE - DEFINIÇÃO E VALORES TÍPICOS

#### 2.3.1 - Introdução

Definimos coeficiente de recalque (ou coeficiente de reação do solo) como sendo a relação entre a pressão de contato  $p$  e o recalque correspondente  $y$ .

Em símbolos matemáticos teremos:

$$k = p/y \quad (2.4)$$

O valor de  $k$  depende das propriedades elásticas do solo e das dimensões da área carregada.

Esta noção foi introduzida em 1867, por Winkler, e hoje é denominada de Hipótese de Winkler. Esta hipótese tem duas simplificações fundamentais:

- 1) a relação  $k$  entre a pressão de contato  $p$  e o recalque correspondente  $y$ , é independente da pressão  $p$ .
- 2) o coeficiente de reação vertical tem o mesmo valor para qualquer ponto da superfície de contato. O coeficiente de reação horizontal, em se tratando de argilas rijas, também tem o mesmo valor para qualquer ponto da superfície de contato. Para solos não coesivos ou solos argilosos moles a médios, o coeficiente de reação horizontal varia linearmente com a profun-

didade, sendo o fator de proporcionalidade constante para qualquer ponto da superfície de contato.

Em símbolos matemáticos teremos:

$$k_h = n_h \cdot z \quad (2.5)$$

### 2.3.2 - Correção dos Coeficientes de Recalque

Os coeficientes de recalque são obtidos, usualmente, a partir de provas de carga realizadas sobre placas de pequenas dimensões, geralmente quadrada de 30 x 30 cm. Como o coeficiente de recalque varia com as dimensões da área carregada, necessitamos introduzir fatores de forma que correlacionam as dimensões da peça de fundação com as dimensões da placa da prova de carga.

Terzaghi (1955), estabeleceu:

a) coeficiente de reação vertical, em argilas rijas.

$$k_v = k_p \cdot \frac{D_p}{D} \left( \frac{n + 0,5}{1,5 n} \right) \quad (2.6)$$

sendo:

$k_v$  : coeficiente de recalque corrigido

$k_p$  : coeficiente de recalque obtido na prova de carga

$D_p$  : menor dimensão da placa da prova de carga

$D$  : menor dimensão da peça de fundação

$n$  : relação entre a dimensão máxima e mínima da fundação.

b) coeficiente de reação vertical, em areias ou argilas moles a médias.

$$k_v = k_p \cdot \left( \frac{D + D_p}{2D} \right)^2 \quad (2.7)$$

c) coeficiente de reação horizontal, em argilas rijas.

$$k_h = k_p \cdot \frac{D_p}{D} \quad (2.8)$$

d) coeficiente de reação horizontal, em areias ou argilas moles a médias.

$$k_h = n_h \cdot \frac{D_p}{D} \cdot z \quad (2.9)$$

sendo:

$n_h$  : constante do coeficiente de reação horizontal

$z$  : profundidade.

### 2.3.3 - Valores Típicos [Extraídos de Terzaghi (1955)]

a) Valores do Coeficiente de Reação Vertical  $k_v$  para Placas de 30 x 30 cm (Argilas Pré-Adensadas) em kgf/cm<sup>3</sup>.

CONSISTÊNCIA DA ARGILA	RIJA	MUITO RIJA	DURA
Valores limites	1,6 - 3,2	3,2 - 6,4	> 6,4
Valores propostos	2,4	4,8	9,6

b) Valores do Coeficiente de Reação Vertical  $k_v$  para Placas de 30 x 30 cm (Areias ou Solos Pouco Coesivos), em kgf/cm<sup>3</sup>.

DENSIDADE RELATIVA DA AREIA	FOFA	MÉDIA	DENSA
Areia seca ou úmida - valores limites	0,64 - 1,92	1,92 - 9,6	9,6 - 32,0
Areia seca ou úmida - valores propostos	1,28	4,16	16,0
Areia submersa - valores propostos	0,80	2,56	9,6

- c) Coeficiente de Reação Horizontal  $k_h$  para Estacas de 30 cm de menor dimensão (Argilas Rijas). Estes valores podem ser tomados, aproximadamente, iguais aos valores tabelados no ítem a) .
- d) Valores da CONSTANTE de Reação Horizontal para Estacas de 30 cm de menor dimensão (Areias) em  $\text{kgf}/\text{cm}^3$  .

DENSIDADE RELATIVA DA AREIA	FOFA	MÉDIA	DENSA
Areia seca ou úmida	0,22	0,67	1,79
Areia submersa	0,13	0,45	1,09

Para argilas muito moles poderemos adotar o valor de  $0,03 \text{ kgf}/\text{cm}^3$  para  $n_h$  .

Chamamos a atenção que estes valores tabelados foram obtidos a partir de carregamentos estáticos. Valores dinâmicos são, em geral, mais elevados e poderão ser obtidos através de ensaios sísmicos, tais como ensaios "cross-hole".

Na ausência de ensaios os valores acima poderão ser empregados, embora sejam bastantes conservativos.

### III - TEORIA DE VIBRAÇÕES DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS - FORMULAÇÃO CLÁSSICA PARA ESTACAS VERTICAIS

#### 3.1 - DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ DO ESTAQUEAMENTO

Podemos idealizar uma fundação sobre estacas, bem como o solo circunvizinho, através de suas propriedades elásticas.

De acordo com a definição geral, a rigidez da estaca em uma direção arbitrária  $z$ , é:

$$K_z^{(1)} = P/z \quad (3.1)$$

onde  $P$  representa a carga aplicada na direção  $z$ , e  $z$  o deslocamento elástico correspondente.

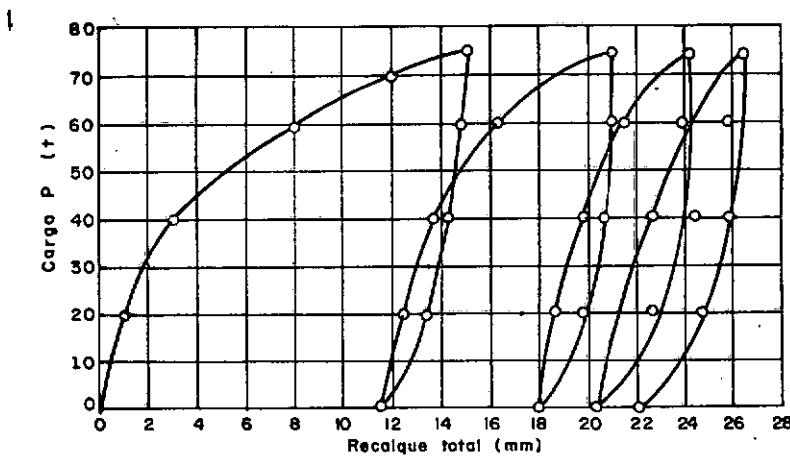


FIGURA 3.1 - RESULTADOS DE UMA PROVA DE CARGA VERTICAL EM UMA ESTACA DE CONCRETO ISOLADA (Extraído de Barkan, 1962)

### 3.1.1. - Rigidez Vertical

Examinando resultados de provas de carga em estacas, tal como a apresentada na Figura 3.1, chegamos à conclusão que, se a carga máxima total é constante, a parcela correspondente ao recalque elástico, nos vários ciclos de carga e descarga, é aproximadamente constante, dentro do domínio de erro permitido na prática da Engenharia. A partir daí podemos traçar uma reta, num gráfico carga versus recalque elástico, tal como a apresentada na Figura 3.2.

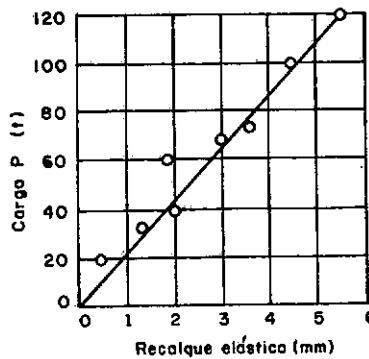


FIGURA 3.2 - CARGA VERSUS RECALQUE ELÁSTICO, RESULTANTE DE VÁRIAS PROVAS DE CARGA, COM CARGA TOTAL CONSTANTE. (Extraido de Barkan, 1962)

Concluímos, então, que a hipótese feita na equação 3.1 se verifica experimentalmente, na direção vertical.

Uma prova de carga, tal como a representada pelo resultado da Figura 3.1, representa um teste sobre um elemento de características bem definidas: comprimento, dimensões da secção transversal, forma, etc. imerso num meio, que é o solo. Portanto, a rigidez da estaca dependerá das propriedades do solo,

das características geométricas da estaca, do processo executivo e do tempo. Apesar da influência deste último fator ser bastante complexa, uma conclusão, baseada em inúmeras medições, nos auxilia bastante na avaliação da rigidez vertical da estaca: a rigidez vertical aumenta, quase sempre, poucos dias após a cravação, com o aumento da resistência do solo circunvizinho. Uma vez que a construção do bloco de coroamento e montagem da(s) máquina(s) demora quase sempre, meses, a rigidez vertical da estaca calculada pelo procedimento descrito neste parágrafo, concorda satisfatoriamente com os dados experimentais disponíveis, "a longo prazo".

A capacidade de carga de uma estaca se traduz pela resistência lateral adicionado à resistência de ponta. Como a resistência por atrito lateral cresce, quase sempre, com o comprimento da estaca, podemos concluir que a rigidez aumenta com o mesmo.

Com base nestas investigações e resultados, a seguinte equação, para a rigidez vertical de uma estaca, foi proposta.

$$K_{z_i}^{(1)} = c_i \cdot s_i \cdot l_i \quad (3.2)$$

onde  $c_i$  é a constante elástica reduzida (função do recalque da estaca, da penetração da ponta e da deformação elástica), correspondente à unidade de área lateral da estaca;  $s_i$  é o perímetro e  $l_i$ , o comprimento da estaca.

A equação 3.2 representa a rigidez vertical da estaca.

taca, quando isolada. Verificou-se que, quando localizada em um grupo de estacas, há uma redução da rigidez mesmo para espaçamentos entre 4 a 6 vezes o diâmetro da estaca. Buzdugan (1972) propôs uma tabela, apresentada a seguir, função da relação entre espaçoamento ( $t$ ) e diâmetro das estacas ( $d$ ), para avaliação deste coeficiente de correção da rigidez vertical da estaca isolada, quando localizada num grupo.

$t/d$	$\infty$	6	4,5	3
$\mu$	1	0,63	0,58	0,35

TABELA 3.1 - COEFICIENTE DE REDUÇÃO DA RIGIDEZ VERTICAL DE UMA ESTACA ISOLADA, QUANDO LOCALIZADA NUM GRUPO

A equação 3.2, com a introdução do coeficiente de redução, será reescrita com a seguinte forma:

$$K_{z_i}^{(1)} = \mu_i \cdot c_i \cdot s_i \cdot l_i \quad (3.3)$$

A rigidez do estaqueamento será:

$$K_z = \sum_{i=1}^n K_{z_i}^{(1)} \quad (3.4)$$

sendo  $n$  o número de estacas do estaqueamento.

Se todas as estacas têm as mesmas características geométricas e os parâmetros do solo são aproximadamente constantes, a fórmula 3.4 se reduz a:

$$K_z = n \cdot K_z^{(1)} \quad (3.5)$$

sendo  $K_z^{(1)} = K_{z_i}^{(1)} = \text{constante}$ .

### 3.1.2 - Rígidez Horizontal

Consideremos uma estaca engastada no solo e no bloco de coroamento; dando-se um deslocamento horizontal ao bloco de coroamento, sem permitir a rotação, temos, na estaca, os esforços representados na Figura 3.3.

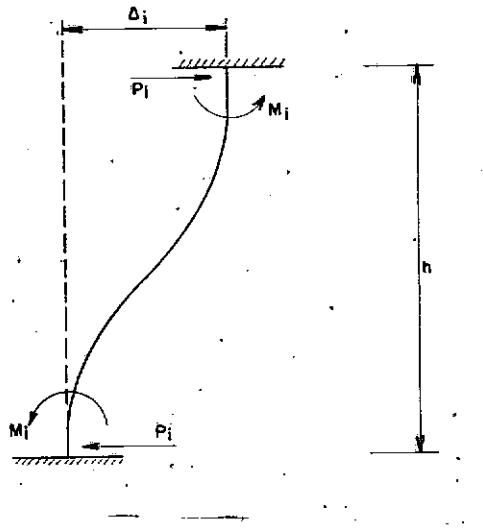


FIGURA 3.3 - ESFORÇOS NUMA ESTACA BI-ENGASTADA (PARA UMA TRANSLAÇÃO, SEM ROTAÇÃO, DA CABEÇA DA ESTACA)

A relação entre  $P_i$  e  $\Delta_i$  (que poderá ser obtida através da Resistência dos Materiais) é:

$$P_i = \frac{12 \cdot E_i \cdot I_i \cdot \Delta_i}{h_i^3} \quad (3.6)$$

onde  $E_i \cdot I_i$  representa a rigidez à flexão da estaca,  $h_i$  o comprimento equivalente (comprimento de engastamento) da estaca e  $\Delta_i$  o deslocamento produzido pela força  $P_i$ .

A equação 3.6 pode ser reescrita da seguinte ma-

neira:

$$\frac{P_i}{\Delta_i} = \frac{12 \cdot E_i \cdot I_i}{h_i^3} \quad (3.7)$$

e tendo em vista a definição dada pela equação 3.1 e introduzindo a simbologia adequada, temos:

$$K_{x_i}^{(1)} = \frac{12 \cdot E_i \cdot I_i}{h_i^3} \quad (3.8)$$

$$K_{y_i}^{(1)} = \frac{12 \cdot E_i \cdot I_i}{h_i^3} \quad (3.9)$$

onde  $K_{x_i}^{(1)}$  e  $K_{y_i}^{(1)}$  representam a rigidez horizontal de uma estaca.

A rigidez horizontal do estaqueamento será:

$$K_x = \sum_{i=1}^n K_{x_i}^{(1)} \quad (3.10)$$

$$K_y = \sum_{i=1}^n K_{y_i}^{(1)} \quad (3.11)$$

Se todas as estacas do estaqueamento tem as mesmas características geométricas e os parâmetros do solo são aproximadamente constantes, as fórmulas 3.10 e 3.11 se reduzem a:

$$K_x = \frac{12 \cdot n \cdot E \cdot I}{h^3} \quad (3.12)$$

$$K_y = \frac{12 \cdot n \cdot E \cdot I}{h^3} \quad (3.13)$$

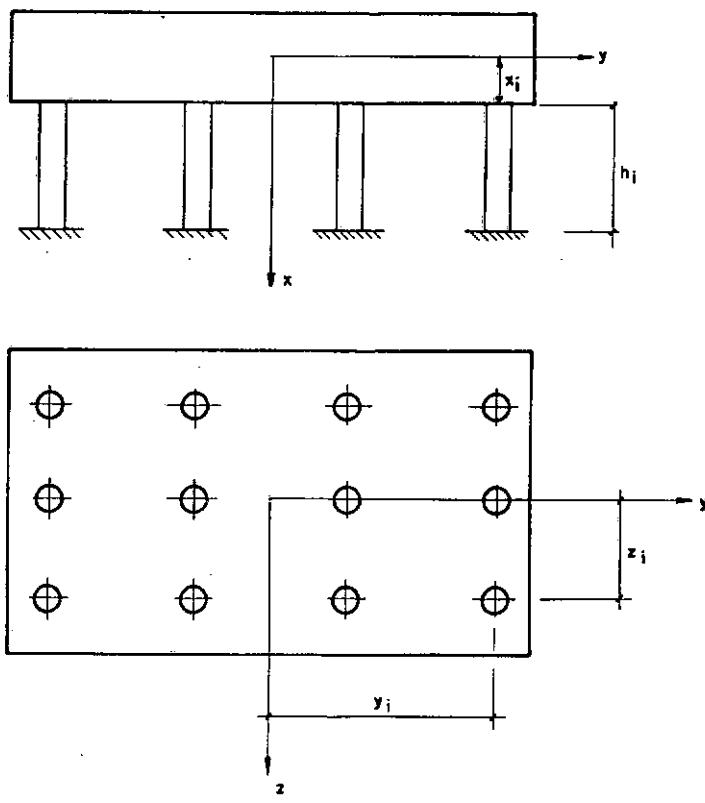


FIGURA 3.4 - IDEALIZAÇÃO ESTRUTURAL DO ESTAQUEAMENTO (MÉTODO CLÁSSICO)

### 3.1.3 - Rigidez à Rotação

Consideremos uma rotação  $\phi$ , sem translação, no bloco de coroamento. Numa estaca  $i$  teremos um deslocamento igual a  $\phi \cdot r_i$ , sendo  $r_i$  a distância do centro de gravidade da estaca ao eixo de rotação. A reação da estaca será, então,  $K_{z_i}^{(1)} \cdot \phi \cdot r_i$ , o que gera um momento reativo igual a:

$$M_i = K_{z_i}^{(1)} \cdot \phi \cdot r_i^2 \quad (3.14)$$

Igualando o momento aplicado à soma dos momentos reativos, temos:

$$M = \sum_{i=1}^n K_{z_i}^{(1)} \cdot \phi \cdot r_i^2 \quad (3.15)$$

A equação 3.15 pode ser reescrita da seguinte ma-

neira:

$$\frac{M}{\phi} = \sum_{i=1}^n K_{z_i}^{(1)} \cdot r_i^2 \quad (3.16)$$

e tendo em vista a definição dada pela equação 3.1 e introduzindo a simbologia adequada, temos:

$$K_\phi = \sum_{i=1}^n K_{z_i}^{(1)} \cdot r^2 \quad (3.17)$$

Se  $K_{z_i}^{(1)}$  é constante, temos:

$$K_\phi = K_z^{(1)} \cdot \sum_{i=1}^n r_i^2 \quad (3.18)$$

Introduzindo a notação cartesiana, temos:

$$K_{\phi x} = K_z^{(1)} \cdot \sum_{i=1}^n y^2 = K_z^{(1)} \cdot \theta_x \quad (3.19)$$

$$K_{\phi y} = K_z^{(1)} \cdot \sum_{i=1}^n x^2 = K_z^{(1)} \cdot \theta_y \quad (3.20)$$

Analogamente, para rotação no plano horizontal, temos:

$$K_\psi = \sum_{i=1}^n K_{x_i}^{(1)} \cdot r_i^2 = \sum_{i=1}^n K_{y_i}^{(1)} \cdot r_i^2 \quad (3.21)$$

Se  $K_{x_i}^{(1)}$  e  $K_{y_i}^{(1)}$  são constantes, temos:

$$K_\psi = K_x^{(1)} \cdot \sum_{i=1}^n r_z^2 = K_y^{(1)} \cdot \sum_{i=1}^n r_z^2 \quad (3.22)$$

sendo  $r_z$  a distância do centro de gravidade da estaca ao eixo

de rotação  $z$ .

Em notação mais compacta, podemos reescrever as equações 3.22 da seguinte maneira:

$$K_{\psi} = K_x^{(1)} \cdot \theta_z = K_y^{(1)} \cdot \theta_z \quad (3.23)$$

### 3.2 - HIPÓTESES ADOTADAS NA ELABORAÇÃO DO MODELO

A elaboração de um modelo para representar um problema de Engenharia necessita, sempre, de hipóteses simplificadoras, que permitam manipular os parâmetros envolvidos com os recursos matemáticos disponíveis.

Para o caso de vibrações de fundações de máquinas, nesta formulação denominada de clássica, o problema pode ser formulado em forma matemática fechada, ou seja, sem aproximações numéricas, com quatro hipóteses básicas:

1. O bloco que se assenta sobre as estacas é admitido rígido<sup>1</sup>. Portanto, ele não sofre deformações, e os deslocamentos de qualquer ponto são definidos a partir dos deslocamentos de seu centro de gravidade (translação e rotações).
2. O comportamento tensão-deformação do solo é admitido elástico linear, e mais: não há interação entre pontos próximos, ou seja, admite-se a hipótese de Winkler.
3. As propriedades de inércia do solo são negligenciadas.
4. A reação do solo, ao longo das faces do bloco de fundação, é desprezada. Quando as frequências naturais de vibração são muito maiores do que as frequências excitantes, esta reação é muito pequena e o cálculo não será demasiadamente conservativo pela adoção desta hipótese.

<sup>1</sup> - Bloco rígido: aquele cujas deformações são desprezíveis em relação às deformações dos seus apoios elásticos.

### 3.3 - VIBRAÇÕES VERTICais NÃO-AMORTECIDAS

Na Figura 3.5 estamos representando o modelo adotado para o cálculo das vibrações verticais de uma fundação de máquina, baseado nas hipóteses comentadas no ítem 3.2 e supondo, ainda mais, que o centro de gravidade do sistema fundação-máquina está na mesma vertical do centro de gravidade do estabelecimento e esta vertical é linha de ação da força  $P(t)$ .

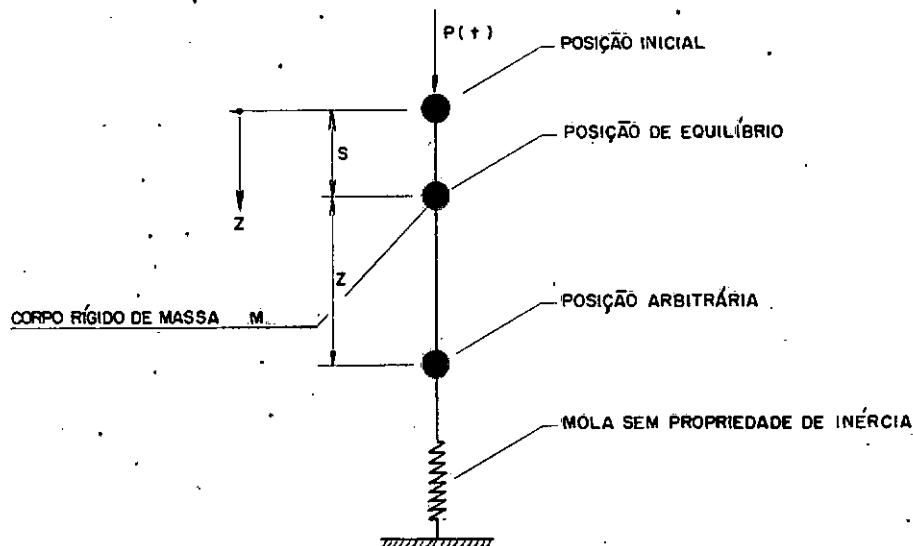


FIGURA 3.5 - MODELO DE UMA FUNDAÇÃO DE MÁQUINA, PARA CÁLCULO DE VIBRAÇÕES VERTICais

Na posição de equilíbrio, sem a atuação da carga  $P(t)$ , a reação da mola será:

$$R_{\text{mola}_0} = m \cdot g \quad (3.24)$$

sendo  $g$  a aceleração da gravidade e  $m$  a massa do sistema máquina-fundação.

Como o comportamento tensão-deformação da mola é elástico-linear, temos a identidade, em carga e descarga:

$$R_{\text{mola}_0} = K \cdot s \quad (3.25)$$

sendo  $K$  a rigidez da mola e  $s$  o deslocamento da posição inicial para a de equilíbrio.

Quando  $P(t)$  atua, temos pelo princípio de D'Alambert:

$$- R_{\text{mola}_1} + P(t) + m \cdot g = m \cdot \ddot{z} \quad (3.26)$$

Como o comportamento da mola é elástico-linear, temos:

$$R_{\text{mola}_1} = K (s + z) \quad (3.27)$$

Substituindo a equação (3.27) na equação (3.26), temos, após algumas transformações:

$$- K \cdot s - K \cdot z + P(t) + m \cdot g = m \cdot \ddot{z} \quad (3.28)$$

Comparando as equações (3.24) e (3.25), substituindo na equação (3.28), eliminando os termos semelhantes e reagrupando convenientemente algumas parcelas, temos:

$$m \cdot \ddot{z} + K \cdot z = P(t) \quad (3.29)$$

A equação (3.29) é denominada de equação do movi-

mento. Para a sua resolução é conveniente a seguinte forma, obtida por divisão por  $m$ .

$$\ddot{z} + (K/m) \cdot z = P(t)/m \quad (3.30)$$

chamando:

$$f_{nz}^2 = K/m \quad (3.31)$$

e

$$p(t) = P(t)/m \quad (3.32)$$

teremos, por substituição na equação (3.30):

$$\ddot{z} + f_{nz}^2 \cdot z = p(t) \quad (3.33)$$

que representa uma forma condensada da equação do movimento.

### 3.3.1 - Vibrações Verticais Naturais Não-Amortecidas

Este caso se apresenta na inexistência de uma solicitação excitante contínua, sendo o movimento decorrente de um impacto ou de um deslocamento imposto à estrutura. Estudaremos aqui o primeiro caso, que é o mais frequente na prática.

Logo, devemos resolver a equação (3.33) com  $p(t) = 0$ , ou seja:

$$\ddot{z} + f_{nz}^2 \cdot z = 0 \quad (3.34)$$

Da teoria das equações diferenciais ordinárias, temos a solução da equação (3.34):

$$z = c_1 \cdot \sin f_{nz} \cdot t + c_2 \cdot \cos f_{nz} \cdot t \quad (3.35)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes que dependem das condições de contorno do problema, que são:  $z(0) = 0$  e  $\dot{z}(0) = v_0$ . Substituindo estas condições na equação (3.35) e resolvendo o sistema linear que relaciona  $c_1$  e  $c_2$ , temos:  $c_1 = v_0/f_{nz}$  e  $c_2 = 0$ .

Substituindo estas constantes na equação (3.35), ficamos com:

$$z = (v_0/f_{nz}) \cdot \sin f_{nz} \cdot t \quad (3.36)$$

### 3.3.2 - Vibrações Verticais Forçadas

Estudaremos aqui o caso de uma solicitação senoidal, da forma  $P(t) = P \cdot \sin \omega t$ , (ou de forma análoga, cossenooidal), que representa a solicitação despertada por máquinas rotativas.

Devemos resolver a seguinte equação:

$$\ddot{z} + f_{nz} \cdot z = p \cdot \sin \omega t \quad (3.37)$$

onde  $p = P/m$ .

A solução geral da homogênea associada é dada pela equação (3.36), resolvida no sub-ítem (3.3.1).

Uma solução particular para a equação (3.37) será:

$$z_{part} = A_z \cdot \sin \omega t \quad (3.38)$$

Substituindo a equação (3.38) (e suas derivadas com relação ao tempo) na equação (3.37), chegamos à seguinte equação, após algumas transformações elementares:

$$A_z = \frac{P}{m \cdot (f_{nz}^2 - \omega^2)} \quad (3.39)$$

Substituindo a equação (3.39) na equação (3.38), ficamos com a seguinte expressão para a solução particular da equação (3.37):

$$z_{part} = \frac{P \cdot \sin \omega t}{m(f_{nz}^2 - \omega^2)} \quad (3.40)$$

A solução geral de (3.37) será:

$$z = (v_0/f_{nz}) \cdot \sin f_{nz} \cdot t + \frac{P}{m(f_{nz}^2 - \omega^2)} \cdot \sin \omega t \quad (3.41)$$

Apesar de desprezarmos o amortecimento do solo no cálculo dos deslocamentos do bloco, as amplitudes de vibrações naturais são rapidamente amortecidas, restando apenas vibrações forçadas. Partindo deste ponto de vista, não consideramos relevante a parcela correspondente às vibrações livres, sendo a equação (3.41) reescrita com a seguinte forma:

$$z = \frac{P}{m(f_{nz}^2 - \omega^2)} \cdot \sin \omega t \quad (3.42)$$

A equação (3.42) representa um movimento harmônico, uma vez que ela pode ser identificada com a equação  $A \sin \omega t$ ,

onde  $A$  e  $\omega$  são constantes.

Modificaremos a equação (3.42), para uma forma equivalente, de modo que seja analisada mais facilmente a relação entre a aplicação de uma carga estática  $P$ , e uma carga dinâmica, do tipo senoidal, cujo máximo é  $\underline{P}$ .

Temos então:

$$z = \frac{P}{m \cdot f_{nz}^2} \cdot \frac{\sin \omega t}{1 - \frac{\omega^2}{f_{nz}^2}} \quad (3.43)$$

O fator  $P/(m \cdot f_{nz}^2)$  é equivalente a  $P/K$ , por substituição da equação (3.32).

Vemos que a razão  $P/K$  é equivalente ao deslocamento da fundação, para  $P$  atuando estaticamente (vide equação (3.1)).

Chamando:

$$z_{est} = P/(m \cdot f_{nz}^2) \quad (3.44)$$

$$f_{amp} = \sin \omega t / \left(1 - \frac{\omega^2}{f_{nz}^2}\right) \quad (3.45)$$

e substituindo na equação (3.43), teremos:

$$z = z_{est} \cdot f_{amp} \quad (3.46)$$

O valor máximo de  $f_{amp}$  dado pela equação (3.45) é igual a:

$$f_{amp_{\max}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{f_{nz}^2}} \quad (3.47)$$

Plotando  $(z/z_{est})_{\max} = f_{amp\max}$  contra  $\omega/f_{nz}$ , teremos:

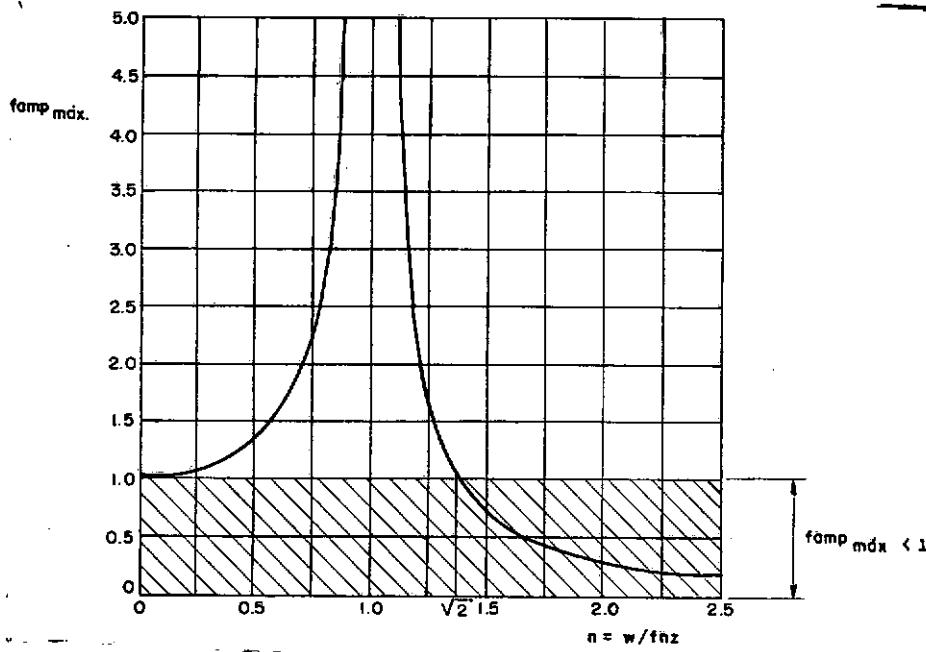


FIGURA 3.6 - RELAÇÃO ENTRE O FATOR DE AMPLIFICAÇÃO MÁXIMO E A RAZÃO ENTRE FREQUÊNCIA EXCITANTE E NATURAL, PARA VIBRAÇÕES VERTICais

Da equação (3.46) e da Figura (3.6) observamos que uma carga, atuando dinamicamente, produz um deslocamento da fundação quase sempre superior ao deslocamento da mesma, caso esta carga atuasse com seu valor máximo, porém estaticamente.

Ainda da Figura 3.6 vemos que quando  $\omega$  cresce, permanecendo  $n$  inferior a um, o fator de amplificação máximo também cresce, o que aumenta o deslocamento dinâmico. Quando  $n = 1$ , ou seja, quando a frequência excitante se iguala a frequência natural de vibração, o deslocamento dinâmico cresce, teoricamente, indefinidamente. Diz-se que o sistema entra em ressonância. Entretanto, devido ao amortecimento do solo, não considerado neste desenvolvimento matemático, o valor do deslocamento

dinâmico para  $\eta = 1$  não tende a infinito, mas a valores extremamente elevados (e portanto inadmissíveis) para um projeto de fundações de máquinas. Quando  $\eta$  cresce, permanecendo entre 1 e  $\sqrt{2}$ , o fator de amplificação máximo diminui, diminuindo o deslocamento dinâmico.

Em todos os casos comentados acima o deslocamento dinâmico da fundação sempre é superior ao deslocamento estático, para a carga dinâmica máxima, atuando estaticamente. Para  $\eta > \sqrt{2}$ , entretanto, a situação é inversa, uma vez que o fator de amplificação máximo é inferior a um. Esta conclusão justifica, por exemplo, o famoso paradoxo de Júlio Verne, ao assegurar que um trem atravessando uma ponte condenada por falta de segurança com a maior velocidade possível, não a levaria à ruptura. Devemos observar que quando  $\eta$  tende a infinito, o fator de amplificação máximo tende a zero.

Salientamos aqui que todas as fórmulas escritas acima, além das conclusões descritas, são válidas para o caso de vibrações horizontais devidas à translação, salvo, obviamente, a nomenclatura utilizada.

### 3.4 - VIBRAÇÕES NÃO-AMORTECIDAS À ROTAÇÃO

As hipóteses básicas descritas no ítem (3.2) permanecem as mesmas, para o problema das vibrações decorrentes de rotação. Algumas fases do desenvolvimento matemático são análogas ao caso das vibrações verticais, sendo, portanto, omitidas. Apenas serão apresentadas as fórmulas com a nova simbologia.

A equação (3.29) (equação do movimento) será reescrita da seguinte forma:

$$I_0 \cdot \ddot{\phi} + K \cdot \phi = M(t) \quad (3.48)$$

ou

$$\ddot{\phi} + (K/I_0) \cdot \phi = M(t)/I_0 \quad (3.49)$$

onde:

$I_0$  = momento de inércia da massa do sistema máquina(s) - fundação, em relação ao eixo de rotação.

$K_\phi$  = rigidez à rotação do sistema máquina(s) - fundação, em relação ao eixo de rotação.

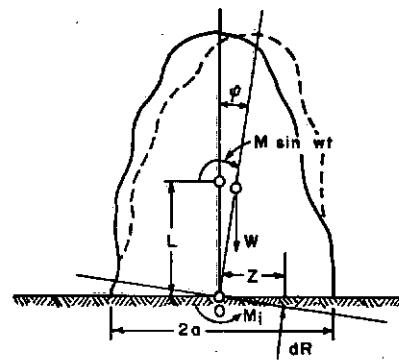


FIGURA 3.7 - MODELO PARA A ANÁLISE DE VIBRAÇÕES DEVIDAS À ROTAÇÃO

### 3.4.1 - Vibrações Naturais não Amortecidas (Decorrentes da Rotação)

A solução da equação (3.48) ou (3.49), para o caso das vibrações naturais ( $M(t)=0$ ), é análoga à solução da equação (3.34), descrita anteriormente. Assim sendo, temos:

$$f_{n\phi}^2 = \frac{K_\phi - w \cdot L}{I_0} \quad (3.50)$$

$$\phi = (\omega_0/f_{n\phi}) \cdot \sin f_{n\phi} \cdot t \quad (3.51)$$

onde  $\omega_0$  é a velocidade angular inicial, resultante de um impacto "rotacional" imposto à estrutura. Portanto, as condições de contorno para este problema são:  $\phi(0) = 0$  e  $\dot{\phi}(0) = \omega_0$ .

### 3.4.2 - Vibrações Forçadas Não-Amortecidas Decorrentes de Rotação

Estudaremos aqui o caso de uma solicitação senoidal (ou cossenoidal, de forma análoga), ou seja,  $M(t) = M \cdot \sin \omega t$ , da mesma forma desenvolvida anteriormente.

A solução da equação (3.48) ou (3.49) para este caso é análoga à solução da equação (3.37), descrita anteriormente. Assim sendo, temos:

$$\phi = (\omega_0/f_{n\phi}) \cdot \sin f_{n\phi} \cdot t + \frac{M}{I_0 \cdot (f_{n\phi}^2 - \omega^2)} \cdot \sin \omega t \quad (3.52)$$

Como as amplitudes de vibrações naturais são rapidamente amortecidas, a equação (3.52) pode ser reduzida à seguinte forma:

$$\phi = \frac{M}{I_0 \cdot (f_{n\phi}^2 - \omega^2)} \cdot \sin \omega t \quad (3.53)$$

### 3.5 - VIBRAÇÕES NÃO AMORTECIDAS DÉCORRENTES SIMULTANEAMENTE DE TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO

As hipóteses básicas para este caso são as mesmas discutidas no ítem (3.2), acrescidas de que as forças externas excitantes permaneçam no mesmo plano.

O movimento descrito pela fundação poderá ser de-

terminado através das translações no plano de cargas e da rotação da fundação em relação a um eixo perpendicular ao plano de cargas e passando pelo centro de gravidade do conjunto máquina(s)-fundação.

A determinação das equações de movimento para cada uma das três direções (descritas acima) será feita transferindo-se todos os esforços externos e de inércia para o centro de gravidade do conjunto máquina(s)-fundação, no tempo  $t$ , e decompondo estes esforços em um conjunto de eixos coordenados perpendiculares entre si (vide Figura (3.8)).

Os esforços que atuam no modelo podem ser sumarizados como segue:

a) peso próprio do sistema máquina(s)-função.

Este esforço não tem componente sobre o eixo  $x$ , e se projeta em verdadeira grandeza sobre o eixo  $z$ .

Logo:

$$R_{z_1} = -W \quad (3.54)$$

A reação oferecida a este esforço, pelo solo é aplicada no centro de gravidade da área da base da fundação e produz, no centro de gravidade do sistema máquina(s)-fundação, na posição deformada, um momento reativo. Teremos, então:

$$R_{z_2} = K_z \cdot z_{est} \quad (3.55)$$

$$M_{y_1} = R_{z_2} \cdot (x - x_0) = K_z \cdot z_{est} \cdot L \cdot \phi \quad (3.56)$$

Substituindo a equação (3.1) nas equações (3.55) e (3.56), teremos:

$$R_{z_2} = W \quad (3.57)$$

$$M_{y_1} = W \cdot L \cdot \phi \quad (3.58)$$

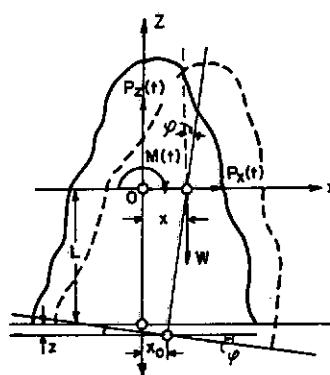


FIGURA 3.8 - MODELO PARA ANÁLISE DE VIBRAÇÕES NÃO AMORTECIDAS DE CORRENTES, SIMULTANEAMENTE, DA TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO

b) força externa excitante  $P_z(t)$

Este esforço não tem componente na direção x e se projeta em verdadeira grandeza sobre o eixo z. Teremos:

$$R_{z_3} = - K_z \cdot z \quad (3.59)$$

sendo z tomado a partir da posição de equilíbrio.

c) resistência horizontal do solo

Este esforço não tem componente na direção z e se projeta em verdadeira grandeza sobre o eixo x. Teremos:

$$R_{x_1} = - K_x \cdot x_0 \quad (3.60)$$

Da geometria da Figura (3.7), extraímos a seguinte relação:

$$x_0 = x - L \cdot \phi \quad (3.61)$$

Substituindo a equação (3.61) na equação (3.60), teremos:

$$R_{x_1} = - K_x \cdot (x - L \cdot \phi) \quad (3.62)$$

O momento reativo no centro de gravidade do sistema máquina(s)-fundação, na posição deformada, é igual a:

$$M_{y_2} = K_x \cdot L \cdot (x - L \cdot \phi) \quad (3.63)$$

d) resistência à rotação do solo

Este esforço desenvolve um momento reativo, no eixo  $y$ , igual a:

$$M_{y_3} = - K_y \cdot \phi \quad (3.64)$$

Aplicando o princípio de D'Alambert para cada uma das direções coordenadas, teremos após algumas simplificações, as seguintes equações:

$$m \cdot \ddot{z} + K_z \cdot z = P_z(t) \quad (3.65)$$

$$m \cdot \ddot{x} + K_x \cdot x - K_x \cdot L \cdot \phi = P_x(t) \quad (3.66)$$

$$I \cdot \ddot{\phi} - K_x \cdot L \cdot x + (K_{\phi_y} - W \cdot L + K_x \cdot L^2) \cdot \phi = M_y(t) \quad (3.67)$$

Analizando as equações acima podemos verificar a independência da equação (3.65) das equações (3.66) e (3.67); isto significa que esforços, ou impactos, que produzam vibrações verticais não produzirão vibrações de translação e/ou rotações horizontais, nem tampouco vibrações de rotação verticais, e, reciprocamente.

Este resultado é bastante importante, notadamente para as pesquisas desenvolvidas para vibrações verticais. Sua independência também permite que se considere conjuntos de vibrações atuando separadamente: vibrações de translação verticais; vibrações de translação horizontais e vibrações de rotação em torno de eixos horizontais, atuando simultaneamente; e vibrações de rotação em torno de um eixo vertical.

A análise experimental das equações (3.66) e (3.67) ainda é um campo aberto à pesquisa; todas as investigações atuais convergem mais para a análise das vibrações verticais, devido à facilidade de interpretação dos resultados e do custo mais baixo, em relação a outros tipos de pesquisas de vibrações de fundações.

### 3.5.1 - Vibrações Naturais Não-Amortecidas (Decorrentes, Simultaneamente, de Translação e Rotação)

As vibrações naturais não amortecidas (decorrentes, simultaneamente de translação e rotação) são conseguidas resolvendo-se as equações (3.65) a (3.67), fazendo-se  $P_z(t) = 0$ ,  $P_x(t) = 0$  e  $M_y(t) = 0$ .

A solução da equação (3.65), com  $P_z(t) = 0$  foi desenvolvida no sub-ítem (3.3.1) e, portanto, aqui omitida.

A solução das equações (3.66) e (3.67) poderá ser obtida com o auxílio da Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, tal como segue:

Adotando as soluções:

$$x = x_0 \cdot \sin(f_n \cdot t + \theta_0) \quad (3.68)$$

$$\phi = \phi_0 \cdot \sin(f_n \cdot t + \theta_0) \quad (3.69)$$

onde  $x_0$ ,  $\phi_0$  e  $\theta_0$  são constantes arbitrárias; substituindo as equações (3.68) e (3.69), e suas derivadas com relação ao tempo, nas equações (3.66) e (3.67) teremos, após algumas simplificações:

$$(K_x - m \cdot f_n^2) \cdot x_0 - K_x \cdot L \cdot \phi_0 = 0 \quad (3.70)$$

$$- K_x \cdot L \cdot x_0 + (K_{\phi_y} - W \cdot L + K_x \cdot L^2 - I \cdot f_n^2) \cdot \phi_0 \quad (3.71)$$

O sistema formado pelas equações (3.70) e (3.71) é, obviamente, indeterminado, uma vez que existem três incógnitas ( $x_0$ ,  $\phi_0$  e  $f_n$ ) e somente duas equações.

Explicitando o valor de  $x_0$  na equação (3.70) temos:

$$x_0 = \frac{K_x \cdot L}{K_x - m \cdot f_n^2} \cdot \phi_0 \quad (3.72)$$

Substituindo a equação (3.72) na equação (3.70) teremos, após algumas simplificações:

$$\phi_0 \cdot \left[ -K_x^2 \cdot L^2 + (K_{\phi_y} - W \cdot L + K_x \cdot L^2 - I \cdot f_n^2) (K_x - m \cdot f_n^2) \right] = 0 \quad (3.73)$$

Das condições iniciais do problema sabemos que  $x_0$  e  $\phi_0$  são grandezas diferentes de zero; elas representam as amplitudes máximas de deslocamentos longitudinais e rotacionais (vide equações (3.68) e (3.69)). Logo, a expressão entre colchetes da equação (3.73) deverá ser idêntica a zero. Teremos:

$$-K_x^2 \cdot L^2 + (K_{\phi_y} - W \cdot L + K_x \cdot L^2 - I \cdot f_n^2) (K_x - m \cdot f_n^2) = 0 \quad (3.74)$$

A equação (3.74) contém apenas a incógnita  $f_n$ ; para uma melhor manipulação desta equação, ela será reescrita com a seguinte forma:

$$f_n^4 - \left( \frac{K_{\phi_y} - W \cdot L}{I} + \frac{K_x}{m} \cdot \frac{I + m \cdot L^2}{I} \right) \cdot f_n^2 - \frac{K_{\phi_y} - W \cdot L}{I} \cdot \frac{K_x}{m} = 0 \quad (3.75)$$

denominando:

$$I_0 = I + m \cdot L^2 \quad (3.76)$$

$$\alpha = I/I_0 \quad (3.77)$$

e substituindo as equações (3.76) e (3.77) na equação (3.75) teremos:

$$f_n^4 - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{K_\phi - W \cdot L}{I_0} + \frac{K_x}{m} \right) \cdot f_n^2 + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{K_\phi - W \cdot L}{I_0} \cdot \frac{K_x}{m} = 0 \quad (3.78)$$

Substituindo as equações (3.31) (com a simbologia correspondente) e (3.50) na equação (3.78), teremos:

$$f_n^4 - \frac{f_{n\phi}^2 y + f_{nx}^2}{\alpha} f_n^2 + \frac{f_{n\phi}^2 y \cdot f_{nx}^2}{\alpha} = 0 \quad (3.79)$$

A equação (3.79) tem duas raízes reais e positivas, que correspondem às frequências naturais de vibrações do sistema máquina(s)-fundação.

### 3.5.2 - Vibrações Forçadas Não-Amortecidas Devidas, Simultaneamente, à Translação e Rotação

Para este caso daremos soluções particulares das equações (3.66) e (3.67), supondo esforços excitantes com variação senoidal. Admitiremos, inicialmente, a atuação isolada de uma carga horizontal ( $P \cdot \sin \omega t$ ) e, posteriormente, a atuação isolada de uma carga momento ( $M \cdot \sin \omega t$ ).

Após a obtenção das duas soluções será feita uma superposição de resultados, quando da atuação simultânea de uma carga horizontal e de uma carga momento.

Na resolução das equações diferenciais (3.66) e (3.67) procuraremos apenas soluções particulares, uma vez que a solução da homogênea associada será negligenciada pois as vibrações naturais são rapidamente amortecidas.

dotando as soluções particulares:

$$z = A_x \cdot \operatorname{sen} \omega t$$

$$\phi_y = A_{\phi_y} \cdot \operatorname{sen} \omega t \quad (3.81)$$

Substituindo as equações (3.80) e (3.81), e suas derivadas com relação ao tempo, nas equações (3.66) e (3.67) teremos, após algumas simplificações, para o caso de uma carga horizontal atuando isoladamente:

$$(K_x - m \cdot \omega^2) \cdot A_x - K_x \cdot L \cdot A_{\phi_y} = P \quad (3.82)$$

$$- K_x \cdot L \cdot A_x + (K_{\phi_y} - W \cdot L + K_x \cdot L^2 - I_0 \cdot \omega^2) \cdot A_{\phi_y} = 0 \quad (3.83)$$

Resolvendo o sistema acima teremos:

$$A_x = \frac{K_{\phi_y} - W \cdot L + K_x \cdot L^2 - I_0 \cdot \omega^2}{\Delta(\omega^2)} \cdot P \quad (3.84)$$

$$A_{\phi_y} = \frac{K \cdot L}{\Delta(\omega^2)} \cdot P \quad (3.85)$$

sendo:

$$\Delta(\omega^2) = m \cdot I_0 \cdot (f_{n1}^2 - \omega^2) \cdot (f_{n2}^2 - \omega^2) \quad (3.86)$$

Adotando as mesmas soluções particulares dadas pelas equações (3.80) e (3.81) e substituindo-as, juntamente com as suas derivadas em relação ao tempo, nas equações (3.66) e (3.67) teremos, após algumas simplificações, para o caso de uma

carga momento atuando isoladamente:

$$(K_x - m \cdot \omega^2) A_x - K_x \cdot L \cdot A_{\phi_y} = 0 \quad (3.87)$$

$$- K_x \cdot L \cdot A_x + (K_{\phi_y} - W \cdot L + K_x \cdot L^2 - I_0 \cdot \omega^2) A_{\phi_y} = M \quad (3.88)$$

Resolvendo o sistema acima, teremos:

$$A_x = \frac{K_x \cdot L}{\Delta(\omega^2)} \cdot M \quad (3.89)$$

$$A_{\phi_y} = \frac{K_x - m \cdot \omega^2}{\Delta(\omega^2)} \cdot M \quad (3.90)$$

sendo  $\Delta(\omega^2)$  dado pela equação (3.86).

Quando da atuação simultânea de uma carga horizontal e de uma carga momento devemos efetuar uma superposição dos resultados encontrados nas equações (3.84), (3.85), (3.89) e (3.90).

## IV - OBTEÇÃO DAS FORÇAS DE INÉRCIA E O SEU BALANCEAMENTO

4.1 - INTRODUÇÃO

Compressores e outros tipos de máquinas rotativas possuem um sistema mecânico que pode ser idealizado como um sistema do tipo biela-manivela. A idéia básica deste sistema é transformar um movimento de translação em um movimento de rotação, ou vice-versa.

Geralmente o fabricante da máquina fornece todas as informações que o projetista de fundações necessita - velocidade normal de operação da máquina; módulo, direção, sentido e pontos de aplicação das forças estáticas e dinâmicas; dimensões mínimas do bloco de suporte da máquina, por razões de manutenção e/ou operação; localização de aberturas, saliências, chumbadores, etc.

Em alguns casos, entretanto, para um pré-dimensionamento das fundações, o projetista necessita fazer uma avaliação destes dados.

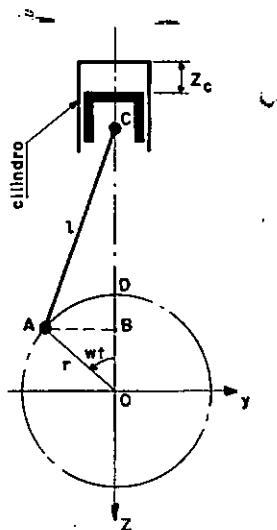
4.2 - OBTENÇÃO DAS FORÇAS DE INÉRCIA

FIGURA 4.1 - MECANISMO DO SISTEMA BIELA MANIVELA

sendo:

$z_p$  = deslocamento do pistão para baixo, a partir do topo.

$\omega \cdot t$  = ângulo da manivela, a partir do ponto superior (ponto D)

$r$  = raio da manivela

$L$  = comprimento da biela

Admitiremos um movimento circular e uniforme para a manivela e procuraremos determinar a distância  $z_c$ , no tempo  $t$ .

Se a manivela não tivesse inclinado teríamos:

$$z_c = DB = r \cdot (1 - \cos \omega t) \quad (4.1)$$

Introduzindo um termo corretivo, devido à inclinação da manivela, teremos:

$$z_C = DB + (AC - BC) = r \cdot (1 - \cos \omega t) + L \cdot (1 - \cos \phi) \quad (4.2)$$

Utilizando a lei dos senos no triângulo OAC, temos:

$$\sin \phi = (r/L) \cdot \sin \omega t \quad (4.3)$$

Pela trigonometria, teremos:

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2} \cdot \sin^2 \omega t} \approx 1 - \frac{r^2}{2 \cdot L^2} \cdot \sin^2 \omega t \quad (4.4)$$

Substituindo a equação (4.4) na equação (4.2), temos, após algumas simplificações:

$$z_C = r \cdot (1 - \cos \omega t) + \frac{r^2}{2 \cdot L} \cdot \sin^2 \omega t \quad (4.5)$$

ou ainda:

$$z_C = \left( r + \frac{r^2}{4 \cdot L} \right) - r \cdot \left( \cos \omega t + \frac{r}{4 \cdot L} \cdot \cos 2\omega t \right) \quad (4.6)$$

por derivação da equação (4.6) teremos:

$$\dot{z}_C = r \cdot \omega \left( \sin \omega t - \frac{r}{2 \cdot L} \cdot \sin 2\omega t \right) \quad (4.7)$$

$$\ddot{z}_C = r \cdot \omega^2 \left( \cos \omega t - \frac{r}{L} \cdot \cos 2\omega t \right) \quad (4.8)$$

Salientamos que a aproximação feita na equação (4.4) conduz a um erro inferior a 0,05%, uma vez que a relação entre o diâmetro da manivela e o comprimento da biela, para sistemas reais, se aproxima, quase sempre, de 0,5.

A equação (4.8), após ser multiplicada pela massa do pistão, representa a força de inércia que se origina pelo movimento do pistão; ela é constituída de duas parcelas: parcela primária - que tem a mesma frequência de rotação da manivela; parcela secundária - que tem o dobro da frequência de rotação da manivela.

O movimento descrito pela equação (4.8) se afasta bastante do movimento harmônico, para as relações usuais do diâmetro da manivela para o comprimento da haste. Aumentando-se esta relação, a parcela secundária tende a ser desprezível em função da parcela primária, e o movimento descrito se aproxima bastante do movimento harmônico (vide Figura 4.2).

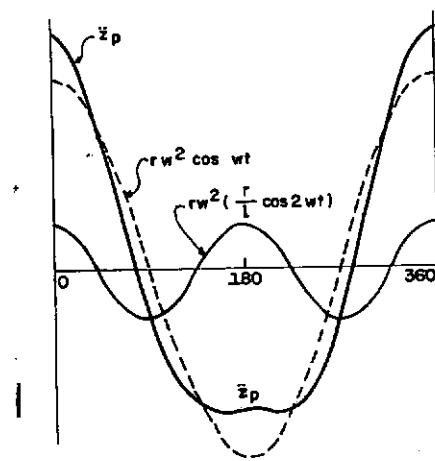


FIGURA 4.2 - ACELERAÇÃO DO PISTÃO EM FUNÇÃO DO ÂNGULO DA MANIVELA

Para a determinação das propriedades dinâmicas das partes rotativas da manivela concentraremos toda a sua massa no centro de massa da mesma. Este procedimento é derivado do Princípio da Conservação do Momento Linear, da Mecânica Clássica.

Por comodidade no tratamento matemático deslocaremos a massa das partes rotativas da manivela, ora concentradas no centro de massa, para o pino A da manivela, de forma tal que a força de inércia não seja alterada. Para tanto multiplicamos a massa pela relação entre as distâncias do centro de massa ao eixo de rotação e do pino A ao mesmo eixo.

Os deslocamentos vertical e horizontal do pino A são:

$$z_A = r \cdot (1 - \cos \omega t) \quad (4.9)$$

$$y_A = - r \cdot \sin \omega t \quad (4.10)$$

Por derivação das equações (4.9) e (4.10) teremos:

$$\dot{z}_A = r \cdot \omega \cdot \sin \omega t \quad (4.11)$$

$$\ddot{z}_A = r \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t \quad (4.12)$$

$$\dot{y}_A = - r \cdot \omega \cdot \cos \omega t \quad (4.13)$$

$$\ddot{y}_A = r \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \quad (4.14)$$

Multiplicando-se as equações (4.12) e (4.14) pela massa das partes rotativas da manivela teremos as componentes ver-

tical e horizontal da força de inércia, respectivamente.

A determinação das propriedades dinâmicas da biela representa o passo mais árduo desta nossa tarefa. A extremidade superior descreve uma linha reta, a extremidade inferior uma circunferência e qualquer ponto intermediário, elipses.

A análise do problema com este grau de dificuldade poderá ser melhor equacionado através de um sistema equivalente, baseado nos princípios da Mecânica Clássica.

Utilizaremos a 2<sup>a</sup> lei de Newton, na sua forma mais geral (dinâmica dos corpos rígidos), que estabelece: "A força de inércia de um corpo em uma determinada direção é equivalente ao produto da massa do mesmo pela aceleração de seu centro de massa, nesta mesma direção". Portanto, permutaremos a massa da haste por duas massas concentradas nos pontos A e C, da Figura 4.1 (extremidades inferior e superior da biela, respectivamente) de tal maneira que a massa total equivalente e o centro de massa permaneçam inalterados.

Este procedimento é aproximado para a determinação das forças de inércia e para a determinação dos momentos produzidos por estas forças, algumas vezes de forma grosseira.

Com esta divisão o problema se resume em adicionar à massa do pistão e à massa das partes rotativas da manivela, a fração correspondente da massa da biela. Denominaresmos estas massas de  $m_A$  (parte alternativa) e  $m_R$  (parte rotativa).

Teremos, então, as expressões para as forças totais de inércia do sistema biela-manivela.

$$F_z = m_A \cdot \ddot{z}_C + M_R \cdot \ddot{z}_A \quad (4.15)$$

$$F_y = m_R \cdot \ddot{y}_A \quad (4.16)$$

Substituindo as equações (4.8), (4.12) e (4.14) nas equações (4.15) e (4.16), teremos, após algumas transformações:

$$F_z = (m_A + m_R) \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t + m_A \cdot \frac{r^2}{L} \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\omega t \quad (4.17)$$

$$F_y = m_R \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \quad (4.18)$$

Observamos, das equações (4.17) e (4.18), que a componente vertical da força de inércia total possui uma componente primária (consequência da ação inercial das partes alternativas e rotativas) e uma componente secundária (consequência da ação inercial das partes rotativas) e a componente horizontal da força de inércia total possui apenas a componente primária (consequência da ação inercial das partes rotativas).

O momento das forças de inércia em torno do eixo longitudinal 'O', necessário para o estudo das vibrações torsionais do eixo de manivelas, será apresentado como ilustração, sem nenhum desenvolvimento matemático, uma vez que o seu valor não é relevante para uma avaliação inicial de cargas; sua importância maior reside do dimensionamento estrutural das partes móveis do motor.

A expressão para o cálculo do momento das forças de inércia será:

$$M = 0.5 m_A \omega^2 r^2 \left( \frac{r}{2L} \sin \omega t - \sin 2\omega t - \frac{3r}{2L} \sin 3\omega t \right) \quad (4.19)$$

A fórmula (4.19) tem erro da ordem de 0,05% e é mais precisa para sistemas que possuem dois mancais fortemente estruturados nas extremidades e ligados por uma biela relativamente leve.

#### 4.3 - BALANCEAMENTO DAS FORÇAS DE INÉRCIA

Consideramos, inicialmente, o caso simples de um motor de um cilindro. Pela colocação de contrapesos é possível o balanceamento das forças de inércia produzidas pelas massas rotativas, mas nunca o balanceamento das forças de inércia produzidas pelas massas alternativas, a não ser em sistemas impossíveis de serem fabricados, hoje, por razões técnicas.

Para um sistema de vários cilindros é conveniente uma representação gráfica dos esforços de inércia, através de vetores girantes.

Adotaremos um dos cilindros como referência e denominaremos de  $l_i$  e  $\alpha_i$  ( $i$  representa o número de cilindro) a distância entre cilindros e o ângulo de defasagem em relação ao cilindro adotado como referência, respectivamente (vide Figuras 4.3, 4.4 e 4.5)

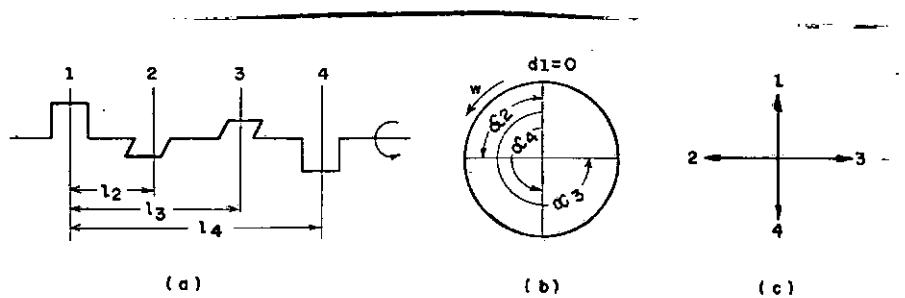


FIGURA 4.3 - FORÇAS PRIMÁRIAS DE INÉRCIA EM UM MOTOR DE DOIS CILINDROS COM QUATRO CILINDROS

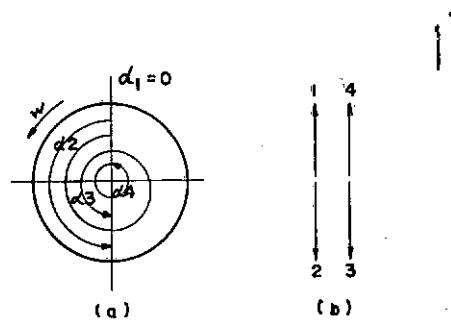


FIGURA 4.4 - FORÇAS SECUNDÁRIAS DE INÉRCIA PARA O MOTOR DA FIGURA 4.3

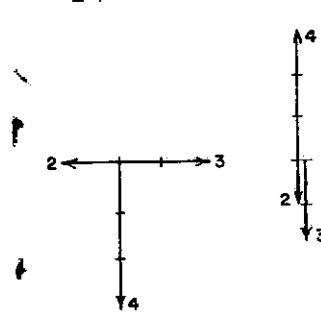


FIGURA 4.5 - MOMENTOS PRIMÁRIOS (a) E MOMENTOS SECUNDÁRIOS PARA O MOTOR DA FIGURA 4.3

O plano em que os momentos primários e secundários atuam é o definitivo pela direção do eixo longitudinal do motor

e pela direção de atuação da força. Por exemplo, na Figura 4.5, os momentos 2 e 3 atuam no mesmo plano e o momento 4 atua em um plano perpendicular ao anterior.

A partir destas considerações é possível se estabelecer analiticamente, as expressões que definem o balanceamento de um sistema. Teremos:

a) para as forças primárias:

$$\sum_{i=1}^n \sin \alpha_i = 0 \quad (4.20)$$

e

$$\sum_{i=1}^n \cos \alpha_i = 0 \quad (4.21)$$

b) para as forças secundárias

$$\sum_{i=1}^n \sin 2\alpha_i = 0 \quad (4.22)$$

e

$$\sum_{i=1}^n \cos 2\alpha_i = 0 \quad (4.23)$$

c) para os momentos primários

$$\sum_{i=1}^n \ell_i \sin \alpha_i = 0 \quad (4.24)$$

e

$$\sum_{i=1}^n \ell_i \cos \alpha_i = 0 \quad (4.25)$$

d) para os momentos

$$\sum_{i=1}^n \ell_i \sin 2\alpha_i = 0 \quad (4.26)$$

e

$$\sum_{i=1}^n l_i \cos 2\alpha_i = 0 \quad (4.27)$$

Com as fórmulas 4.20 a 4.27 poderemos verificar facilmente o quadro 4.1, proposto por Newcomb (1954) e extraído de Winterkorn et al (1975).

### FORÇAS E MOMENTOS NÃO BALANCEADAS PARA DIFERENTES ARRANJOS (Extraído de Newcomb, 1951)

Arranjos de Mânielas	Forças		Momentos	
	Primárias	Secundárias	Primários	Secundários
<b>Manivela Única</b>	$F'$ Sem Contrapesos. (0.5) $F'$ Com Contrapesos.	$F''$	Não existe	Não existe
<b>Dois manivelas defasados de <math>180^\circ</math>. Cilindros em linha.</b>	0	$2F''$ $\frac{F'}{2} D$ Com Contrapesos.	$F'D$ Sem Contrapesos. $\frac{F'}{2} D$ Com Contrapesos.	Não existe
<b>Cilindros em oposição defasados de <math>180^\circ</math></b>	0	0	Nil	Nil
<b>Dois manivelas defasados de <math>90^\circ</math></b>	(1.41) $F'$ Sem Contrapesos. (0.707) $F'$ Com Contrapesos.	0	(1.41) $F'D$ Sem Contrapesos (0.707) $F'D$ Com Contrapesos	$F'D$
<b>Dois cilindros em uma única manivela</b>	$F'$ Sem Contrapesos. 0 Com Contrapesos.	(1.41) $F''$	Nil	Nil
<b>Cilindros defasados de <math>90^\circ</math></b>	$2F'$ Sem Contrapesos.	0	Não existe	Nil
<b>Dois cilindros em uma única manivela</b>	$F'$ Com Contrapesos.			
<b>Cilindros em oposição defasados de <math>180^\circ</math></b>				
<b>Treis cilindros defasados de <math>120^\circ</math></b>	0	0	(3.46) $F'D$ Sem Contrapesos (1.73) $F'D$ Com Contrapesos	(3.46) $F''D$
<b>Quatro cilindros</b>	0	0	0	0
<b>Manivelas defasadas de <math>180^\circ</math></b>			(1.41) $F'D$ Sem Contrapesos	
<b>Mânielas defasadas de <math>90^\circ</math></b>	0	0	(0.707) $F'D$ Com Contrapesos	$4.0F''D$
<b>Seis Cilindros</b>	0	0	0	0

$r$  = Raio da manivela (Polegada)

$L$  = Comprimento da manivela (Polegada)

$D$  = Distância entre cilindros (Polegada)

$W$  = Peso de um cilindro (Libra)

$F' = (0.0000284)rW(rpm)^2$  = Primária

$$F'' = \frac{r}{L} F' = \text{Secundária}$$

## V - MODELO MATEMÁTICO PARA O CÁLCULO DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS ROTATIVAS SOBRE ESTACAS

### 5.1 - INTRODUÇÃO

Baseados nos princípios da Análise Matricial da Mecânica das Estruturas desenvolvemos aqui um método numérico que permite obter a resposta dinâmica de um estaqueamento, excitado por uma solicitação senoidal ou cossenoidal, que é, na prática, a solicitação que mais se aproxima da liberada por máquinas rotativas.

O modelo matemático desenvolvido é suficientemente exato, dentro do atual "state-of-the-art" de fundações de máquinas. A maior dificuldade para sua aplicabilidade, na prática da Engenharia, reside em se obter coeficientes de recalques que sejam representativos para um determinado problema. Custos e prazos impedem, em geral, uma determinação conveniente dos parâmetros do solo.

O cálculo das frequências naturais e forçadas, amplitudes de vibrações, cargas e deslocamentos nas estacas é feito de forma adequada programando-se computadores digitais (Burroughs 6700, disponível no NCE-UFRJ)."Flow-Charts" dos programas de computador elaborados poderão ser encontrados no Apêndice 2 deste nosso trabalho.

### 5.2 - HIPÓTESES ADOTADAS NA ELABORAÇÃO DO MODELO

Para a manipulação dos parâmetros envolvidos com os recursos matemáticos disponíveis teremos que impor hipóteses simplificadoras ao modelo proposto.

Faremos as seguintes hipóteses básicas:

1. O bloco que se assenta sobre as estacas é admitido rígido. Por tanto, ele não sofre deformações, e os deslocamentos de qualquer ponto são definidos a partir dos deslocamentos do seu centro de gravidade (translações e rotações).
2. O comportamento tensão-deformação do solo é admitido como elástico-linear, e mais: não há interação entre pontos próximos; ou seja, admite-se a hipótese do Winkler.
3. As propriedades de inércia do solo são negligenciadas.
4. A reação do solo, ao longo das faces do bloco que se assenta sobre as estacas, é desprezada. Quando as frequências naturais de vibração são muito maiores do que as frequências excitantes, esta reação é muito pequena e o cálculo não será demasiadamente conservativo pela adição desta hipótese.
5. O comportamento tensão-deformação das estacas é admitido como elástico-linear, não existindo, também, interação entre quaisquer duas ou mais estacas.

### 5.3 - MÉTODO DE ANÁLISE

#### 5.3.1 - Determinação do Centro de Massa do Sistema Máquina(s) - Fundação

A determinação do centro de massa, momentos de inércia da massa (em relação ao centro de massa do sistema máquina(s) - bloco de coroamento) e massa total do sistema máquina(s) bloco de coroamento é feita através de subrotina apropriada.

Para o caso das máquinas e equipamentos admitimos suas massas concentradas em seus centros de gravidade, ou seja, desprezamos o momento de inércia decorrente da distribuição de massa. Como entrada de dados fornecemos a massa e as coordenadas relativas a um sistema de eixos arbitrário (que à sua importância, daqui em diante o denominaremos de sistema de eixos global, ou simplesmente, por comodidade de grafia, SEG).

Para o caso do bloco onde as máquinas e equipamentos se assentam, tendo em vista sua geometria, irregular, dividimo-lo em vários prismas de base retangular com lados paralelos aos eixos do SEG. Como entrada de dados fornecemos as dimensões paralelas aos eixos do SEG, o peso específico do material e as coordenadas do centro de gravidade (em relação ao SEG) do prisma. Calculamos, para este caso, o momento de inércia devido à distribuição de massa e devido à excentricidade da massa em relação ao centro de massa do conjunto máquina(s) - bloco de coroamento.

Para a distinção dos dois casos citados criamos um código, que também deveremos fornecer como entrada de dados.

Após o conhecimento das coordenadas do centro de gravidade do sistema máquina(s) - bloco de coroamento determinamos a faixa de variação da posição do centro de gravidade do estanqueamento, que é admitido como  $\pm 5\%$  das coordenadas horizontais, relativas ao SEG. Caso o centro de gravidade<sup>1</sup> não esteja na faixa de domínio, o programa fará automaticamente a correção.

---

<sup>1</sup> O centro de gravidade do estaqueamento deverá ser entendido como a projeção do seu centro elástico sobre o plano horizontal de arrasamento das estacas.

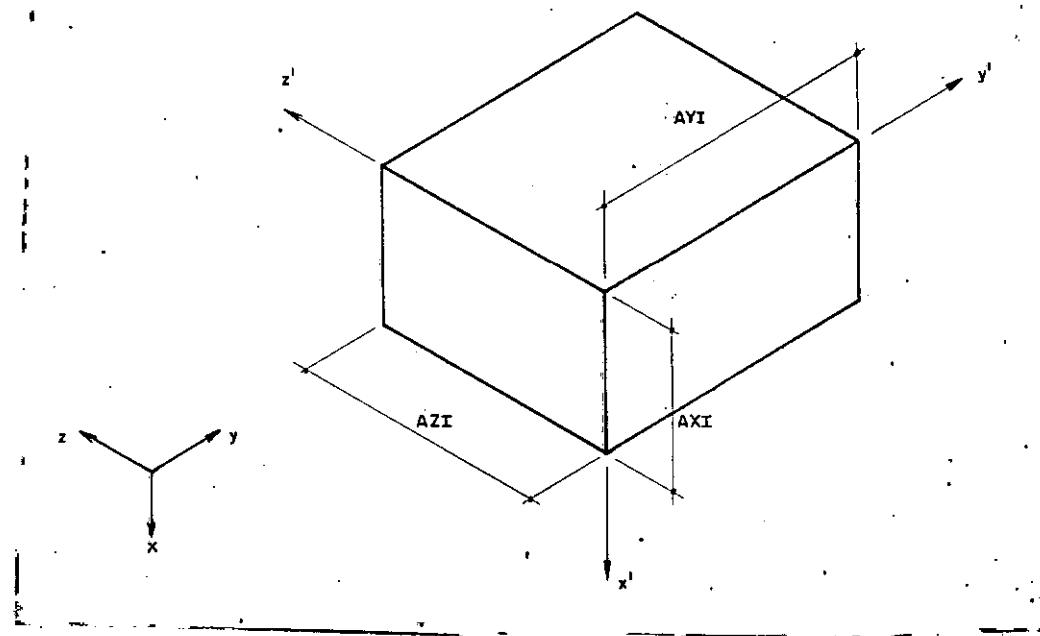


FIGURA 5.1 - SISTEMA DE EIXOS GLOBAL E INDICAÇÃO DAS DIMENSÕES, DE UM PRISMA, PARALELAS AOS EIXOS DO MESMO.

5.3.2 - Determinação da Geometria e Propriedades do Estaqueamento

Para referenciar qualquer coordenada introduzida no programa deveremos utilizar o SEG. Portanto, as coordenadas do topo de cada estaca serão fornecidas relativamente ao SEG.

Na realidade, criamos no topo de cada estaca um sistema de eixos local (SEL) e este será referenciado ao SEG.

Como entrada de dados fornecemos o ângulo de cavação (ângulo entre o eixo longitudinal da estaca e o eixo vertical x do SEG), o ângulo em planta da projeção da estaca (num plano horizontal) com o eixo horizontal y do SEG, o ângulo en-

tre os eixos y do SEG e do SEL, coordenadas do topo da estaca, referidas ao SEG, módulos de elasticidade longitudinal e transversal, peso específico do material, área da seção transversal e momentos de inércia da seção transversal em relação aos eixos do SEL.

Esta leitura de dados é fornecida estaca por estaca.

### 5.3.3 - Determinação das Condições de Apoio

As condições de apoio das extremidades poderão ser dadas de três formas diferentes, de maneira a simular qualquer situação real. Cada uma das direções (correspondentes aos graus de liberdade adotados no modelo) poderá ser completamente restrin-gida, completamente livre ou parcialmente livre (engastamento elás-tico).

Esta leitura de dados é feita através de códigos convenientemente escolhidos.

### 5.3.4 - Montagem da Matriz de Rígidez para cada Elemento da Esta-ca e para a Estaca Inteira

Após conhecimento de todos os dados fornecidos pela subrotinas comentadas nos ítems 5.3.1, 5.3.2 e 5.3.3 estamos aptos à determinação da matriz de rigidez de cada elemento que se subdivide uma estaca, além da montagem da matriz de rigidez para toda a estaca.

Quando tivermos um elemento envolvido por um meio elástico deveremos dar o comprimento do mesmo e os coeficientes de recalques correspondentes a este meio. Quando o elemento for livre devemos fornecer apenas o comprimento do elemento; a omis-são dos coeficientes de recalque será interpretado como sendo um

elemento sem envolvimento por um meio elástico. Os coeficientes de recalque deverão ser armazenados em disco, para uso posterior.

Os coeficientes de recalque são admitidos como constantes, ao longo de cada elemento. Apesar desta aparente deficiéncia, lembramos que complicadas formas de variação do coeficiente de recalque poderão ser simuladas com a diminuição do comprimento dos elementos. Entretanto, isto acarreta um acréscimo de trabalho computacional e deverá ser levado em conta a precisão com que se obteve tais coeficientes, para a decisão das dimensões dos elementos.

A matriz de rigidez para um elemento não envolvido por um meio elástico é bastante conhecida e poderá ser encontrada na maioria dos Compêndios de Mecânica das Estruturas. Para um elemento envolvido por um meio elástico, a solução foi dada por Diaz (1973); ambas estão reproduzidas a seguir.

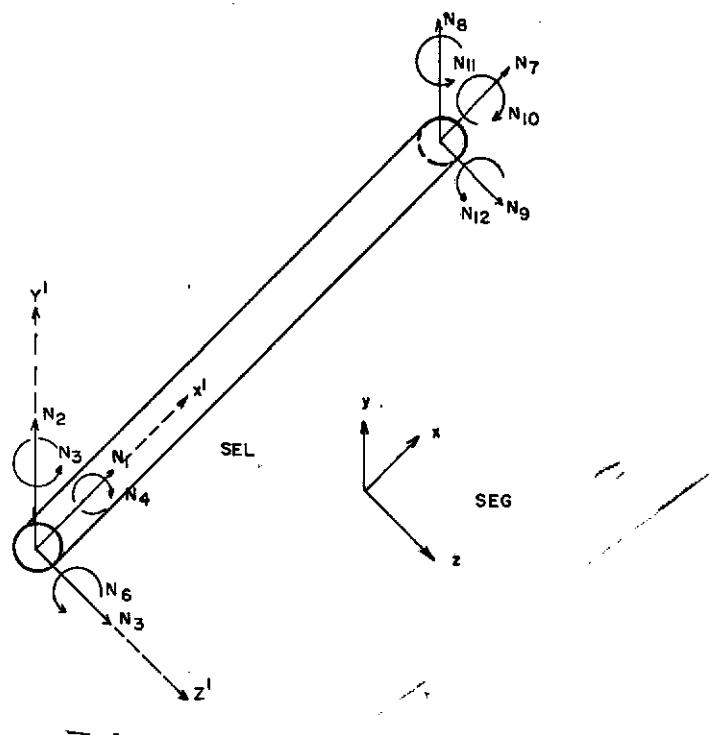


FIGURA 5.2 - ELEMENTO DA ESTACA NO SISTEMA DE EIXOS LOCAIS

Para um elemento não envolvido por um meio elástico, temos:

$$RELEM(1, 1) = E * AX/L \quad (5.1)$$

$$RELEM(1, 7) = - RELEM(1, 1) \quad (5.2)$$

$$RELEM(2, 2) = (12. * E * IZ)/L * L * L \quad (5.3)$$

$$RELEM(2, 6) = (6. * E * IZ)/L * L \quad (5.4)$$

$$RELEM(2, 8) = - RELEM(2, 2) \quad (5.5)$$

$$RELEM(2, 12) = RELEM(2, 6) \quad (5.6)$$

$$RELEM(3, 3) = (12. * E * IY)/L * L * L \quad (5.7)$$

$$RELEM(3, 5) = (- 6. * E * IY)/L * L \quad (5.8)$$

$$RELEM(3, 9) = - RELEM(3, 3) \quad (5.9)$$

$$RELEM(3, 11) = RELEM(3, 5) \quad (5.10)$$

$$RELEM(4, 4) = G * IX/L \quad (5.11)$$

$$RELEM(4, 10) = - RELEM(4, 4) \quad (5.12)$$

$$RELEM(5, 5) = 4. * E * IZ/L \quad (5.13)$$

$$RELEM(5, 9) = - RELEM(3, 5) \quad (5.14)$$

$$RELEM(5, 11) = 2. * E * IY/L \quad (5.15)$$

$$RELEM(6, 6) = 4. * E * IZ/L \quad (5.16)$$

$$RELEM(6, 8) = - RELEM(2, 6) \quad (5.17)$$

$$RELEM(6, 12) = 2. * E * IZ/L \quad (5.18)$$

$$RELEM(7, 7) = RELEM(1, 1) \quad (5.19)$$

$$RELEM(8, 8) = RELEM(2, 2) \quad (5.20)$$

$$RELEM(8, 12) = - RELEM(2, 6) \quad (5.21)$$

$$RELEM(9, 9) = RELEM(3, 3) \quad (5.22)$$

$$RELEM(9, 11) = - RELEM(3, 5) \quad (5.23)$$

$$RELEM(10, 10) = RELEM(4, 4) \quad (5.24)$$

$$RELEM(11, 11) = RELEM(5, 5) \quad (5.25)$$

$$RELEM(12, 12) = RELEM(6, 6) \quad (5.26)$$

os demais termos da banda superior são iguais a zero; os termos da banda inferior poderão ser facilmente obtidos, uma vez que a matriz de rigidez é simétrica.

Para um elemento envolvido por um meio elástico temos:

$$RELEM(1, 1) = WX * E * AX * CHX/SHX \quad (5.27)$$

$$RELEM(7, 7) = RELEM(1, 1) \quad (5.28)$$

$$RELEM(1, 7) = -WX * E * AX/SHX \quad (5.29)$$

$$RELEM(4, 4) = WMX * G * IX * CHMX/SHMX \quad (5.30)$$

$$RELEM(10, 10) = RELEM(4, 4) \quad (5.31)$$

$$RELEM(4, 10) = -WMX * G * IX/SHMX \quad (5.32)$$

$$DEN = SHMZ * SHMZ - SIMZ * SIMZ \quad (5.33)$$

$$RELEM(6, 6) = (KY/(2.*WMZ**3)) * ((CHMZ*SHMZ-COMZ*SIMZ)/DEN) \quad (5.34)$$

$$RELEM(12, 12) = RELEM(6, 6) \quad (5.35)$$

$$RELEM(6, 12) = (KY/(2.*WMZ**3)) * ((CHMZ*SIMZ-SHMZ*COMZ)/DEN) \quad (5.36)$$

$$RELEM(2, 6) = (KY/(2.*WMZ**2)) * ((SHMZ**2+SIMZ**2)/DEN) \quad (5.37)$$

$$RELEM(8, 12) = -RELEM(2, 6) \quad (5.38)$$

$$RELEM(6, 8) = (-KY/WMZ**2) * (SHMZ*SIMZ/DEN) \quad (5.39)$$

$$RELEM(2, 12) = -RELEM(6, 8) \quad (5.40)$$

$$RELEM(2, 2) = (KY/WMZ)** ((CHMZ * SHMZ + COMZ * SIMZ)/DEN) \quad (5.41)$$

$$RELEM(8, 8) = RELEM(2, 2) \quad (5.42)$$

$$RELEM(2, 8) = (-KY/WMZ) * ((SHMZ*COMZ+CHMZ*SIMZ)/DEN) \quad (5.43)$$

$$DEN = SHMY * SHMY - SIMY * SIMY \quad (5.44)$$

$$RELEM(5, 5) = (KZ/(2.*WMY**3)) * ((CHMY*SHMY-COMY*SIMY)/DEN) \quad (5.45)$$

$$RELEM(11, 11) = RELEM(5, 5) \quad (5.46)$$

$$RELEM(5, 11) = (KZ/(2.*WMY**3)) * ((CHMY*SIMY-SHMY*COMY)/DEN) \quad (5.47)$$

$$RELEM(3, 5) = (-KZ/(2.*WMY**2)) * ((SHMY**2+SIMY**2)/DEN) \quad (5.48)$$

$$RELEM(9, 11) = -RELEM(3, 5) \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned}
 \text{RELEM (5, 9)} &= (\text{KZ}/\text{WMY}^{**2}) * (\text{SHMY} * \text{SIMY}/\text{DEN}) & (5.50) \\
 \text{RELEM (3, 11)} &= - \text{RELEM (5, 9)} & (5.51) \\
 \text{RELEM (3, 3)} &= (\text{KZ}/\text{WMY}) * ((\text{CHMY} * \text{SHMY} + \text{COMY} * \text{SIMY})/\text{DEN}) & (5.52) \\
 \text{RELEM (9, 9)} &= \text{RELEM (3, 3)} & (5.53) \\
 \text{RELEM (3, 9)} &= (- \text{KZ}/\text{WMY}) * ((\text{SHMY} * \text{COMY} + \text{CHMY} * \text{SIMY})/\text{DEN}) & (5.54)
 \end{aligned}$$

Sabendo-se que:

$$\begin{aligned}
 \text{WX} &= \text{SQRT} (\text{KX}/(\text{E} * \text{AX})) & (5.55) \\
 \text{CHX} &= \text{COSH} (\text{WX} * \text{L}) & (5.56) \\
 \text{SHX} &= \text{SINH} (\text{WX} * \text{L}) & (5.57) \\
 \text{WMX} &= \text{SQRT} (\text{KMX}/(\text{G} * \text{IX})) & (5.58) \\
 \text{CHMX} &= \text{COSH} (\text{WMX} * \text{L}) & (5.59) \\
 \text{SHMX} &= \text{SINH} (\text{WMX} * \text{L}) & (5.60) \\
 \text{WMZ} &= \text{SQRT} (\text{SQRT} (\text{KY}/(4. * \text{E} * \text{IZ}))) & (5.61) \\
 \text{CHMZ} &= \text{COSH} (\text{WMZ} * \text{L}) & (5.62) \\
 \text{SHMZ} &= \text{SINH} (\text{WMZ} * \text{L}) & (5.63) \\
 \text{COMZ} &= \text{COS} (\text{WMZ} * \text{L}) & (5.64) \\
 \text{SIMZ} &= \text{SIN} (\text{WMZ} * \text{L}) & (5.65) \\
 \text{WMY} &= \text{SQRT} (\text{SQRT} (\text{KZ}/(4. * \text{E} * \text{IY}))) & (5.66) \\
 \text{CHMY} &= \text{COSH} (\text{WMY} * \text{L}) & (5.67) \\
 \text{SHMY} &= \text{SINH} (\text{WMY} * \text{L}) & (5.68) \\
 \text{COMY} &= \text{COS} (\text{WMY} * \text{L}) & (5.69) \\
 \text{SIMY} &= \text{SIN} (\text{WMY} * \text{L}) & (5.70)
 \end{aligned}$$

os demais termos da banda superior são iguais a zero; os termos da banda inferior poderão ser facilmente obtidos, uma vez que a matriz de rigidez é simétrica.

Após a determinação da matriz de rigidez de um elemento esta será alocada, em posição conveniente, na matriz de ri

gidez da estaca, considerando a união existente entre os vários elementos em que foi dividida a estaca. A largura de banda desta matriz é constante e igual a 12 e, desta forma, esta matriz será formada por um arranjo retangular de dimensões  $6 * (N + 1)$  por 12, sendo  $N$  o número de elementos que foi dividida a estaca. As subrotinas para cálculo de sistemas lineares envolvendo esta matriz estão programadas para levar em conta esta particularidade.

Para o  $P$ -ésimo elemento de uma estaca, o elemento  $(I, J)$  da matriz de rigidez do elemento será alocado na posição  $[6 * (P - 1) + I, J - I + 1]$ ; no arranjo retangular definido acima.

Antes de cada alocação, as matrizes de rigidez de cada elemento são armazenadas em disco, para uso posterior.

#### 5.3.5 - Montagem da Matriz de Massa para cada Elemento da Estaca e para a Estaca Inteira

O procedimento para a montagem da matriz de massa equivalente para um elemento de uma estaca segue, basicamente, as mesmas hipóteses adotadas para a montagem da matriz de rigidez de um elemento em relação aos dados necessários para tanto. Devemos incluir, entretanto, dados de inércia de cada elemento (densidade do material constituinte da estaca).

Da mesma maneira que a determinação das matrizes de rigidez de cada elemento, é mais conveniente do ponto de vista computacional determinar as matrizes de massa equivalentes para elementos obtidos de uma discretização da estrutura, usando o SEL, para em seguida transformar estas matrizes para o SEG.

A matriz de massa equivalente para um elemento não

envolvido por um meio elástico poderá ser encontrada em Przemi - eniecki (1968). Para um elemento envolvido por um meio elástico deduzimos as expressões da matriz de massa equivalente e introduzimos a demonstração matemática no Apêndice I, por não termos encontrado tal matriz em nenhum livro ou revista especializadas consultados. Este desenvolvimento representa a mais importante contribuição desta tese ao meio técnico-científico, dada à sua importância e a dificuldade em expressá-la em forma matemática fechada. Ambas estão reproduzidas a seguir:

Para um elemento não envolvido por um meio elástico, temos:

$$\text{MELEM (1, 1)} = 1/3 \quad (5.71)$$

$$\text{MELEM (2, 2)} = 13/35 + 6. * IZ/(5. * AX * L * L) \quad (5.72)$$

$$\text{MELEM (3, 3)} = 13/35 + 6. * IY/(5. * AX * L * L) \quad (5.73)$$

$$\text{MELEM (4, 4)} = IX/(3. * AX) \quad (5.74)$$

$$\text{MELEM (3, 5)} = - 11. * L/210. - IY/(10. * AX * L) \quad (5.75)$$

$$\text{MELEM (5, 5)} = (L * L)/105. + 2. * IY/(15. * AX) \quad (5.76)$$

$$\text{MELEM (2, 6)} = 11. * L/210. + IZ/(10. * AX * L) \quad (5.77)$$

$$\text{MELEM (6, 6)} = (L * L)/105. + 2. * IZ/(15. * AX) \quad (5.78)$$

$$\text{MELEM (1, 7)} = 1/6. \quad (5.79)$$

$$\text{MELEM (7, 7)} = \text{MELEM (1, 1)} \quad (5.80)$$

$$\text{MELEM (2, 8)} = 9./70. - 6. * IZ/(5. * AX * L * L) \quad (5.81)$$

$$\text{MELEM (6, 8)} = 13. * L/420. - IZ/(10. * AX * L) \quad (5.82)$$

$$\text{MELEM (8, 8)} = \text{MELEM (2, 2)} \quad (5.83)$$

$$\text{MELEM (3, 9)} = 9./70. - 6. * IY/(5. * AX * L * L) \quad (5.84)$$

$$\text{MELEM (5, 9)} = - 13. * L/420. + IY/(10. * AX * L) \quad (5.85)$$

$$\text{MELEM (9, 9)} = \text{MELEM (3, 3)} \quad (5.86)$$

$$\text{MELEM (4, 10)} = IX/(6. * AX) \quad (5.87)$$

- MELEM (10,10) = MELEM (4, 4) (5.88)
- MELEM (3, 11) = - MELEM (5, 9) (5.89)
- MELEM (5, 11) = - L \* L/140. - IY/(30. \* AX) (5.90)
- MELEM (9, 11) = - MELEM (3, 5) (5.91)
- MELEM (11,11) = MELEM (5, 5) (5.92)
- MELEM (2, 12) = - MELEM (6, 8) (5.93)
- MELEM (6, 12) = - L \* L/140. - IZ/(30. \* AX) (5.94)
- MELEM (8, 12) = - MELEM (2, 6) (5.95)
- MELEM (12,12) = MELEM (6, 6) (5.96)

Todos os termos da matriz deverão ser multiplicados por  $\rho \cdot AX \cdot L$ , sendo  $\rho$  a densidade do material da estaca.

Os demais termos da banda superior são iguais a zero; os termos da banda inferior poderão ser facilmente obtidos, uma vez que a matriz de massa equivalente é simétrica.

Para um elemento envolvido por um meio elástico temos:

$$MELEM (1, 1) = \frac{\sin h 2 L - 2 L}{4\alpha \sin^2 h \alpha L} \quad (5.97)$$

$$\begin{aligned}
 MELEM (2, 2) = & R1(\gamma) \cdot p_{11}^2 + R2(\gamma) \cdot p_{21}^2 + R3(\gamma) \cdot p_{31}^2 + R4(\gamma) \cdot p_{41}^2 + \\
 & + R5(\gamma) \cdot p_{11} \cdot p_{21} + R6(\gamma) \cdot p_{11} \cdot p_{31} + R7(\gamma) \cdot p_{11} \cdot p_{41} + \\
 & + R8(\gamma) \cdot p_{21} \cdot p_{31} + R9(\gamma) \cdot p_{21} \cdot p_{41} + R10(\gamma) \cdot p_{31} \cdot p_{41} + \\
 & + R11(\gamma) \cdot p_{11}^2 + R12(\gamma) \cdot p_{21}^2 + R13(\gamma) \cdot p_{31}^2 + R14(\gamma) \cdot p_{41}^2 + \\
 & + R15(\gamma) \cdot p_{11} \cdot p_{21} + R16(\gamma) \cdot p_{11} \cdot p_{31} + R17(\gamma) \cdot p_{11} \cdot p_{41} + \\
 & + R18(\gamma) \cdot p_{21} \cdot p_{31} + R19(\gamma) \cdot p_{21} \cdot p_{41} + R20(\gamma) \cdot p_{31} \cdot p_{41}
 \end{aligned} \quad (5.98)$$

$$\begin{aligned}
 \text{MELEM}(3, 3) = & R1(\psi) p_{11}^{12} + R2(\psi) p_{21}^{12} + R3(\psi) p_{31}^{12} + R4(\psi) p_{41}^{12} + R5(\psi) p_{11}^1 p_{21}^1 + \\
 & + R6(\psi) p_{11}^1 p_{31}^1 + R7(\psi) p_{11}^1 p_{41}^1 + R8(\psi) p_{21}^1 p_{31}^1 + R9(\psi) p_{21}^1 p_{41}^1 + \\
 & + R10(\psi) p_{31}^1 p_{41}^1 + R11(\psi) p_{11}^{12} + R12(\psi) p_{21}^{12} + R13(\psi) p_{31}^{12} + \\
 & + R14(\psi) p_{41}^{12} + R15(\psi) p_{11}^1 p_{21}^1 + R16(\psi) p_{11}^1 p_{31}^1 + R17(\psi) p_{11}^1 p_{41}^1 + \\
 & + R18(\psi) p_{21}^1 p_{31}^1 + R19(\psi) p_{21}^1 p_{41}^1 + R20(\psi) p_{31}^1 p_{41}^1 \quad (5.99)
 \end{aligned}$$

$$\text{MELEM}(4, 4) = \frac{\sin h^2 2\beta L - 2\beta L}{4 \beta \sin^2 h \beta L} \quad (5.100)$$

$$\begin{aligned}
 \text{MELEM}(5, 3) = & R1(\psi) p_{11}^1 p_{12}^1 + R2(\psi) p_{21}^1 p_{22}^1 + R3(\psi) p_{31}^1 p_{32}^1 + R4(\psi) p_{41}^1 p_{42}^1 + \\
 & + \frac{1}{2} R5(\psi) (p_{12}^1 p_{21}^1 + p_{11}^1 p_{22}^1) + \frac{1}{2} R6(\psi) (p_{12}^1 p_{31}^1 + p_{11}^1 p_{32}^1) + \\
 & + \frac{1}{2} R7(\psi) (p_{12}^1 p_{41}^1 + p_{11}^1 p_{42}^1) + \frac{1}{2} R8(\psi) (p_{22}^1 p_{31}^1 + p_{32}^1 p_{21}^1) + \\
 & + \frac{1}{2} R9(\psi) (p_{22}^1 p_{41}^1 + p_{21}^1 p_{42}^1) + \frac{1}{2} R10(\psi) (p_{32}^1 p_{41}^1 + p_{31}^1 p_{42}^1) + \\
 & + R11(\psi) \cdot p_{12}^1 p_{11}^1 + R12(\psi) p_{22}^1 p_{21}^1 + R13(\psi) \cdot p_{32}^1 p_{31}^1 + \\
 & + R14(\psi) p_{42}^1 p_{41}^1 + \frac{1}{2} R15(\psi) \cdot (p_{12}^1 p_{21}^1 + p_{22}^1 p_{11}^1) + \\
 & + \frac{1}{2} R16(\psi) \cdot (p_{12}^1 p_{31}^1 + p_{11}^1 p_{32}^1) + \frac{1}{2} R17(\psi) \cdot (p_{12}^1 p_{41}^1 + p_{11}^1 p_{42}^1) + \\
 & + \frac{1}{2} R18(\psi) \cdot (p_{22}^1 p_{31}^1 + p_{32}^1 p_{21}^1) + \frac{1}{2} R19(\psi) \cdot (p_{22}^1 p_{41}^1 + p_{21}^1 p_{42}^1) + \\
 & + \frac{1}{2} R20(\psi) \cdot (p_{32}^1 p_{41}^1 + p_{31}^1 p_{42}^1) \quad (5.101)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{MELEM} (5, 5) = & R1(\psi) \cdot p_{12}^{12} + R2(\psi) \cdot p_{22}^{12} + R3(\psi) \cdot p_{32}^{12} + R4(\psi) \cdot p_{42}^{12} + \\
& + R5(\psi) \cdot p_{12}^1 p_{22}^1 + R6(\psi) \cdot p_{12}^1 p_{32}^1 + R7(\psi) \cdot p_{12}^1 p_{42}^1 + \\
& + R8(\psi) \cdot p_{22}^1 p_{32}^1 + R9(\psi) \cdot p_{22}^1 p_{42}^1 + R10(\psi) \cdot p_{32}^1 p_{42}^1 + \\
& + R11(\psi) \cdot p_{12}^{12} + R12(\psi) \cdot p_{22}^{12} + R13(\psi) \cdot p_{32}^{12} + R14(\psi) \cdot p_{42}^{12} + \\
& + R15(\psi) \cdot p_{12}^1 p_{22}^1 + R16(\psi) \cdot p_{12}^1 p_{32}^1 + R17(\psi) \cdot p_{12}^1 p_{42}^1 + \\
& + R18(\psi) \cdot p_{22}^1 p_{32}^1 + R19(\psi) \cdot p_{22}^1 p_{42}^1 + R20(\psi) \cdot p_{32}^1 p_{42}^1
\end{aligned}
\tag{5.102}$$

$$\begin{aligned}
\text{MELEM} (6, 2) = & R1(\gamma) \cdot p_{11} \cdot p_{12} + R2(\gamma) \cdot p_{21} \cdot p_{22} + R3(\gamma) \cdot p_{31} \cdot p_{32} + \\
& + R4(\gamma) \cdot p_{41} \cdot p_{42} + \frac{1}{2} R5(\gamma) \cdot (p_{12} \cdot p_{21} + p_{11} \cdot p_{22}) + \\
& + \frac{1}{2} R6(\gamma) \cdot (p_{12} \cdot p_{31} + p_{11} \cdot p_{32}) + \frac{1}{2} R7(\gamma) \cdot (p_{12} \cdot p_{41} + p_{11} \cdot p_{42}) + \\
& + \frac{1}{2} R8(\gamma) \cdot (p_{22} \cdot p_{31} + p_{32} \cdot p_{21}) + \frac{1}{2} R9(\gamma) \cdot (p_{22} \cdot p_{41} + p_{21} \cdot p_{42}) + \\
& + \frac{1}{2} R10(\gamma) \cdot (p_{32} \cdot p_{41} + p_{31} \cdot p_{42}) + R11(\gamma) \cdot p_{12} \cdot p_{11} + \\
& + R12(\gamma) \cdot p_{22} \cdot p_{21} + R13(\gamma) \cdot p_{32} \cdot p_{31} + R14(\gamma) \cdot p_{42} \cdot p_{41} + \\
& + R15(\gamma) \cdot (p_{12} \cdot p_{21} + p_{22} \cdot p_{11}) + \frac{1}{2} R16(\gamma) \cdot (p_{12} \cdot p_{31} + p_{11} \cdot p_{32}) + \\
& + \frac{1}{2} R17(\gamma) \cdot (p_{12} \cdot p_{41} + p_{11} \cdot p_{42}) + \frac{1}{2} R18(\gamma) \cdot (p_{22} \cdot p_{31} + p_{32} \cdot p_{21}) + \\
& + \frac{1}{2} R19(\gamma) \cdot (p_{22} \cdot p_{41} + p_{21} \cdot p_{42}) + \frac{1}{2} R20(\gamma) \cdot (p_{32} \cdot p_{41} + p_{31} \cdot p_{42}) +
\end{aligned}
\tag{5.103}$$

$$\begin{aligned}
\text{MELEM } (6, 6) = & R1(\gamma) \cdot p_{12}^2 + R2(\gamma) \cdot p_{22}^2 + R3(\gamma) \cdot p_{32}^2 + R4(\gamma) \cdot p_{42}^2 + \\
& + R5(\gamma) \cdot p_{12} \cdot p_{22} + R6(\gamma) \cdot p_{12} \cdot p_{32} + R7(\gamma) \cdot p_{12} \cdot p_{42} + \\
& + R8(\gamma) \cdot p_{22} \cdot p_{32} + R9(\gamma) \cdot p_{22} \cdot p_{42} + R10(\gamma) \cdot p_{32} \cdot p_{42} + \\
& + R11(\gamma) \cdot p_{12}^2 + R12(\gamma) \cdot p_{22}^2 + R13(\gamma) \cdot p_{32}^2 + R14(\gamma) \cdot p_{42}^2 + \\
& + R15(\gamma) \cdot p_{12} \cdot p_{22} + R16(\gamma) \cdot p_{12} \cdot p_{32} + R17(\gamma) \cdot p_{12} \cdot p_{42} + \\
& + R18(\gamma) \cdot p_{22} \cdot p_{32} + R19(\gamma) \cdot p_{22} \cdot p_{42} + R20(\gamma) \cdot p_{32} \cdot p_{42} + \\
& + R21(\gamma) \cdot p_{12} \cdot p_{32} + R22(\gamma) \cdot p_{12} \cdot p_{42} + R23(\gamma) \cdot p_{22} \cdot p_{32} + \\
& + R24(\gamma) \cdot p_{22} \cdot p_{42} + R25(\gamma) \cdot p_{32} \cdot p_{42} + R26(\gamma) \cdot p_{12} \cdot p_{22} \cdot p_{32} + \\
& + R27(\gamma) \cdot p_{12} \cdot p_{22} \cdot p_{42} + R28(\gamma) \cdot p_{12} \cdot p_{32} \cdot p_{42} + R29(\gamma) \cdot p_{22} \cdot p_{32} \cdot p_{42} + \\
& + R30(\gamma) \cdot p_{12} \cdot p_{22} \cdot p_{32} \cdot p_{42}
\end{aligned} \tag{5.104}$$

$$MELEM(7,1) = \frac{1}{4\alpha \sin^2 h \alpha L} (\sin h 3 \alpha L - \sin h \alpha L + 2 \alpha L \cos \alpha L) \quad (5.105)$$

$$MELEM(7,7) = \frac{1}{4\alpha \sin^2 h \alpha l} (\sin h 2 \alpha L - 2 \alpha L) \quad (5.106)$$

$$\begin{aligned}
& \text{MELEM}^1(8, 2) = R1(\gamma) p_{11} p_{13} + R2(\gamma) p_{21} p_{23} + R3(\gamma) p_{31} p_{33} + \\
& + R4(\gamma) p_{41} p_{43} + \frac{1}{2} R5(\gamma) (p_{13} p_{21} + p_{23} p_{11}) + \\
& + \frac{1}{2} R6(\gamma) (p_{13} p_{31} + p_{11} p_{33}) + \frac{1}{2} R7(\gamma) (p_{13} p_{41} + p_{11} p_{43}) + \\
& + \frac{1}{2} R8(\gamma) (p_{23} p_{31} + p_{21} p_{33}) + \frac{1}{2} R9(\gamma) (p_{23} p_{41} + p_{21} p_{43}) + \\
& + \frac{1}{2} R10(\gamma) (p_{33} p_{41} + p_{31} p_{43}) + R11(\gamma) p_{11} p_{13} + \\
& + \frac{1}{2} R12(\gamma) p_{21} p_{23} + R13(\gamma) p_{31} p_{33} + R14(\gamma) p_{41} p_{43} + \\
& + \frac{1}{2} R15(\gamma) (p_{13} p_{21} + p_{23} p_{11}) + \frac{1}{2} R16(\gamma) (p_{13} p_{31} + p_{33} p_{11}) + \\
& + \frac{1}{2} R17(\gamma) (p_{13} p_{41} + p_{43} p_{11}) + \frac{1}{2} R18(\gamma) (p_{23} p_{31} + p_{33} p_{21}) + \\
& + \frac{1}{2} R19(\gamma) (p_{23} p_{41} + p_{43} p_{21}) + \frac{1}{2} R20(\gamma) (p_{33} p_{41} + p_{43} p_{31}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{MELEM } (8, 6) = & R1(\gamma) p_{13} p_{12} + R2(\gamma) p_{23} p_{22} + R3(\gamma) p_{33} p_{32} + \\
& + R4(\gamma) p_{43} p_{42} + \frac{1}{2} R5(\gamma) \cdot (p_{13} p_{22} + p_{23} p_{12}) + \\
& + \frac{1}{2} R6(\gamma) \cdot (p_{13} p_{32} + p_{33} p_{12}) + \frac{1}{2} R7(\gamma) (p_{13} p_{42} + p_{43} p_{12}) + \\
& + \frac{1}{2} R8(\gamma) \cdot (p_{23} p_{32} + p_{33} p_{22}) + \frac{1}{2} R9(\gamma) (p_{23} p_{42} + p_{43} p_{22}) + \\
& + \frac{1}{2} R10(\gamma) \cdot (p_{33} p_{42} + p_{43} p_{32}) + \frac{1}{2} R11(\gamma) (p_{13} p_{12} + \\
& + R12(\gamma) p_{23} p_{22} + R13(\gamma) p_{33} p_{32} + R14(\gamma) p_{43} p_{42} + \\
& + \frac{1}{2} R15(\gamma) (p_{13} p_{22} + p_{23} p_{12}) + \frac{1}{2} R16(\gamma) (p_{13} p_{32} + p_{33} p_{12}) + \\
& + \frac{1}{2} R17(\gamma) (p_{13} p_{42} + p_{43} p_{12}) + \frac{1}{2} R18(\gamma) (p_{23} p_{32} + p_{33} p_{22}) + \\
& + \frac{1}{2} R19(\gamma) (p_{23} p_{42} + p_{43} p_{22}) + \frac{1}{2} R20(\gamma) (p_{33} p_{42} + p_{43} p_{32})
\end{aligned} \tag{5.108}$$

$$\begin{aligned}
\text{MELEM } (8, 8) = & R1(\gamma) p_{13}^2 + R2(\gamma) p_{23}^2 + R3(\gamma) p_{33}^2 + R4(\gamma) p_{43}^2 + \\
& + R5(\gamma) p_{13} p_{23} + R6(\gamma) p_{13} p_{33} + R7(\gamma) p_{13} p_{43} + \\
& + R8(\gamma) p_{23} p_{33} + R9(\gamma) p_{23} p_{43} + R10(\gamma) p_{33} p_{43} + \\
& + R11(\gamma) p_{13}^2 + R12(\gamma) p_{23}^2 + R13(\gamma) p_{33}^2 + R14(\gamma) p_{43}^2 + \\
& + R15(\gamma) p_{13} p_{23} + R16(\gamma) p_{13} p_{33} + R17(\gamma) p_{13} p_{43} + \\
& + R18(\gamma) p_{23} p_{33} + R19(\gamma) p_{23} p_{43} + R20(\gamma) p_{33} p_{43}
\end{aligned} \tag{5.109}$$

$$\begin{aligned}
\text{MELEM } (9, 3) = & R1(\psi) p'_{11} p'_{13} + R2(\psi) p'_{21} p'_{23} + R3(\psi) p'_{31} p'_{33} + \\
& + R4(\psi) p'_{41} p'_{43} + \frac{1}{2} R5(\psi) (p'_{13} p'_{21} + p'_{23} p'_{11}) + \\
& + \frac{1}{2} R6(\psi) (p'_{13} p'_{31} + p'_{11} p'_{33}) + \frac{1}{2} R7(\psi) (p'_{13} p'_{41} + p'_{11} p'_{43}) + \\
& + \frac{1}{2} R8(\psi) (p'_{23} p'_{31} + p'_{21} p'_{33}) + \frac{1}{2} R9(\psi) (p'_{23} p'_{41} + p'_{21} p'_{43}) + \\
& + \frac{1}{2} R10(\psi) (p'_{33} p'_{41} + p'_{31} p'_{43}) + R11(\psi) p'_{11} p'_{13} + \\
& + R12(\psi) p'_{21} p'_{23} + R13(\psi) p'_{31} p'_{33} + R14(\psi) p'_{41} p'_{43} + \\
& + \frac{1}{2} R15(\psi) (p'_{13} p'_{21} + p'_{23} p'_{11}) + \frac{1}{2} R16(\psi) (p'_{13} p'_{31} + p'_{33} p'_{11}) + \\
& + \frac{1}{2} R17(\psi) (p'_{13} p'_{41} + p'_{43} p'_{11}) + \frac{1}{2} R18(\psi) (p'_{23} p'_{31} + p'_{33} p'_{21}) + \\
& + \frac{1}{2} R19(\psi) (p'_{23} p'_{41} + p'_{43} p'_{21}) + \frac{1}{2} R20(\psi) (p'_{33} p'_{41} + p'_{43} p'_{31}) +
\end{aligned}$$

(5.110)

$$\begin{aligned}
\text{MELEM } (9, 5) = & R1(\psi) p'_{13} p'_{12} + R2(\psi) p'_{23} p'_{22} + R3(\psi) p'_{33} p'_{32} + \\
& + R4(\psi) p'_{43} p'_{42} + \frac{1}{2} R5(\psi) (p'_{13} p'_{22} + p'_{23} p'_{12}) + \\
& + \frac{1}{2} R6(\psi) (p'_{13} p'_{32} + p'_{33} p'_{12}) + \frac{1}{2} R7(\psi) (p'_{13} p'_{42} + p'_{43} p'_{12}) + \\
& + \frac{1}{2} R8(\psi) (p'_{23} p'_{32} + p'_{33} p'_{22}) + \frac{1}{2} R9(\psi) (p'_{23} p'_{42} + p'_{43} p'_{22}) + \\
& + \frac{1}{2} R10(\psi) (p'_{33} p'_{42} + p'_{43} p'_{32}) + R11(\psi) p'_{13} p'_{12} + \\
& + R12(\psi) p'_{23} p'_{22} + R13(\psi) p'_{33} p'_{32} + R14(\psi) p'_{43} p'_{42} + \\
& + \frac{1}{2} R15(\psi) (p'_{13} p'_{22} + p'_{23} p'_{12}) + \frac{1}{2} R16(\psi) (p'_{13} p'_{32} + p'_{33} p'_{12}) + \\
& + \frac{1}{2} R17(\psi) (p'_{13} p'_{42} + p'_{43} p'_{12}) + \frac{1}{2} R18(\psi) (p'_{23} p'_{32} + p'_{33} p'_{22}) + \\
& + \frac{1}{2} R19(\psi) (p'_{23} p'_{42} + p'_{43} p'_{22}) + \frac{1}{2} R20(\psi) (p'_{33} p'_{42} + p'_{43} p'_{32})
\end{aligned}$$

(5.111)

$$\begin{aligned}
\text{MELEM}^1(9,9) = & R1(\psi) p_{13}^{'2} + R2(\psi) p_{23}^{'2} + R3(\psi) p_{33}^{'2} + R4(\psi) p_{43}^{'2} + \\
& + R5(\psi) p_{13}^{'1} p_{23}^{'1} + R6(\psi) p_{13}^{'1} p_{33}^{'1} + R7(\psi) p_{13}^{'1} p_{43}^{'1} + \\
& + R8(\psi) p_{23}^{'1} p_{33}^{'1} + R9(\psi) p_{23}^{'1} p_{43}^{'1} + R10(\psi) p_{33}^{'1} p_{43}^{'1} + \\
& + R11(\psi) p_{13}^{'2} + R12(\psi) p_{23}^{'2} + R13(\psi) p_{33}^{'2} + R14(\psi) p_{43}^{'2} + \\
& + R15(\psi) p_{13}^{'1} p_{23}^{'1} + R16(\psi) p_{13}^{'1} p_{33}^{'1} + R17(\psi) p_{13}^{'1} p_{43}^{'1} + \\
& + R18(\psi) p_{23}^{'1} p_{33}^{'1} + R19(\psi) p_{23}^{'1} p_{43}^{'1} + R20(\psi) p_{33}^{'1} p_{43}^{'1}
\end{aligned} \tag{5.112}$$

$$\text{MELEM}^1(10,9) = \frac{1}{4 \beta \sin^2 h \beta L} (\sin h 3 \beta L - \sin h \beta L + 2 \beta L \cos \beta L) \tag{5.113}$$

$$\text{MELEM}^1(10,10) = \frac{1}{4 \beta \sin^2 h \beta L} (\sin h 2 \beta L - 2 \beta L) \tag{5.114}$$

$$\begin{aligned}
\text{MELEM}^1(11,3) = & R1(\psi) p_{14}^{'1} p_{11}^{'1} + R2(\psi) p_{24}^{'1} p_{21}^{'1} + R3(\psi) p_{34}^{'1} p_{31}^{'1} + \\
& + R4(\psi) p_{44}^{'1} p_{41}^{'1} + \frac{1}{2} R5(\psi) (p_{14}^{'1} p_{21}^{'1} + p_{24}^{'1} p_{11}^{'1}) + \\
& + \frac{1}{2} R6(\psi) (p_{14}^{'1} p_{31}^{'1} + p_{34}^{'1} p_{11}^{'1}) + \frac{1}{6} R7(\psi) (p_{14}^{'1} p_{41}^{'1} + p_{44}^{'1} p_{11}^{'1}) + \\
& + \frac{1}{2} R8(\psi) (p_{24}^{'1} p_{31}^{'1} + p_{34}^{'1} p_{21}^{'1}) + \frac{1}{2} R9(\psi) (p_{24}^{'1} p_{41}^{'1} + p_{44}^{'1} p_{21}^{'1}) + \\
& + \frac{1}{2} R10(\psi) (p_{34}^{'1} p_{41}^{'1} + p_{44}^{'1} p_{31}^{'1}) + R11(\psi) p_{14}^{'1} p_{11}^{'1} + \\
& + \frac{1}{2} R12(\psi) p_{24}^{'1} p_{21}^{'1} + R13(\psi) p_{34}^{'1} p_{31}^{'1} + R14(\psi) p_{44}^{'1} p_{41}^{'1} + \\
& + \frac{1}{2} R15(\psi) (p_{14}^{'1} p_{21}^{'1} + p_{24}^{'1} p_{11}^{'1}) + \frac{1}{2} R16(\psi) (p_{14}^{'1} p_{31}^{'1} + p_{34}^{'1} p_{11}^{'1}) + \\
& + \frac{1}{2} R17(\psi) (p_{14}^{'1} p_{41}^{'1} + p_{44}^{'1} p_{11}^{'1}) + \frac{1}{2} R18(\psi) (p_{24}^{'1} p_{31}^{'1} + p_{34}^{'1} p_{21}^{'1}) + \\
& + \frac{1}{2} R19(\psi) (p_{24}^{'1} p_{41}^{'1} + p_{44}^{'1} p_{21}^{'1}) + \frac{1}{2} R20(\psi) (p_{34}^{'1} p_{41}^{'1} + p_{44}^{'1} p_{31}^{'1})
\end{aligned} \tag{5.115}$$

$$\begin{aligned}
\text{MELEM} (11,9) = & R1(\psi) p_{14}' p_{13}' + R2(\psi) p_{24}' p_{23}' + R3(\psi) p_{34}' p_{33}' + \\
& + R4(\psi) p_{44}' p_{43}' + \frac{1}{2} R5(\psi) (p_{14}' p_{23}' + p_{24}' p_{13}') + \\
& + \frac{1}{2} R6(\psi) (p_{14}' p_{33}' + p_{34}' p_{13}') + \frac{1}{2} R7(\psi) (p_{14}' p_{43}' + p_{44}' p_{13}') + \\
& + \frac{1}{2} R8(\psi) (p_{24}' p_{33}' + p_{34}' p_{23}') + \frac{1}{2} R9(\psi) (p_{24}' p_{43}' + p_{44}' p_{23}') + \\
& + \frac{1}{2} R10(\psi) (p_{34}' p_{43}' + p_{44}' p_{33}') + R11(\psi) p_{14}' p_{13}' + \\
& + R12(\psi) p_{24}' p_{23}' + R13(\psi) p_{34}' p_{33}' + R14(\psi) p_{43}' p_{44}' + \\
& + \frac{1}{2} R15(\psi) (p_{14}' p_{23}' + p_{24}' p_{13}') + \frac{1}{2} R16(\psi) (p_{14}' p_{33}' + p_{34}' p_{13}') + \\
& + \frac{1}{2} R17(\psi) (p_{14}' p_{43}' + p_{44}' p_{13}') + \frac{1}{2} R18(\psi) (p_{24}' p_{33}' + p_{34}' p_{23}') + \\
& + \frac{1}{2} R19(\psi) (p_{24}' p_{43}' + p_{44}' p_{23}') + \frac{1}{2} R20(\psi) (p_{34}' p_{43}' + p_{44}' p_{33}')
\end{aligned}$$

(5.117)

$$\begin{aligned}
\text{MELEM } (11, 11) = & R1(\psi) p_{14}^{12} + R2(\psi) p_{24}^{12} + R3(\psi) p_{34}^{12} + R4(\psi) p_{44}^{12} + \\
& + R5(\psi) p_{14}^1 p_{24}^1 + R6(\psi) p_{14}^1 p_{34}^1 + R7(\psi) p_{14}^1 p_{44}^1 + \\
& + R8(\psi) p_{24}^1 p_{34}^1 + R9(\psi) p_{24}^1 p_{44}^1 + R10(\psi) p_{34}^1 p_{44}^1 + \\
& + R11(\psi) p_{14}^{12} + R12(\psi) p_{24}^{12} + R13(\psi) p_{34}^{12} + R14(\psi) p_{44}^{12} + \\
& + R15(\psi) p_{14}^1 p_{24}^1 + R16(\psi) p_{14}^1 p_{34}^1 + R17(\psi) p_{14}^1 p_{44}^1 + \\
& + R18(\psi) p_{24}^1 p_{34}^1 + R19(\psi) p_{24}^1 p_{44}^1 + R20(\psi) p_{34}^1 p_{44}^1
\end{aligned}
\tag{5.118}$$

$$\begin{aligned}
\text{MELEM } (12, 2) = & R1(\gamma) p_{14} p_{11} + R2(\gamma) p_{24} p_{21} + R3(\gamma) p_{34} p_{31} + \\
& + R4(\gamma) p_{44} p_{41} + \frac{1}{2} R5(\gamma) (p_{14} p_{21} + p_{24} p_{11}) + \\
& + \frac{1}{2} R6(\gamma) (p_{14} p_{31} + p_{34} p_{11}) + \frac{1}{2} R7(\gamma) (p_{14} p_{41} + p_{44} p_{11}) + \\
& + \frac{1}{2} R8(\gamma) (p_{24} p_{31} + p_{34} p_{21}) + \frac{1}{2} R9(\gamma) (p_{24} p_{41} + p_{44} p_{21}) + \\
& + \frac{1}{2} R10(\gamma) (p_{34} p_{41} + p_{44} p_{31}) + R11(\gamma) p_{14} p_{11} + \\
& + R12(\gamma) p_{24} p_{21} + R13(\gamma) p_{34} p_{31} + R14(\gamma) p_{44} p_{41} + \\
& + \frac{1}{2} R15(\gamma) (p_{14} p_{21} + p_{24} p_{11}) + \frac{1}{2} R16(\gamma) (p_{14} p_{31} + p_{34} p_{11}) + \\
& + \frac{1}{2} R17(\gamma) (p_{14} p_{41} + p_{44} p_{11}) + \frac{1}{2} R18(\gamma) (p_{24} p_{31} + p_{34} p_{21}) + \\
& + \frac{1}{2} R19(\gamma) (p_{24} p_{41} + p_{44} p_{21}) + \frac{1}{2} R20(\gamma) (p_{34} p_{41} + p_{44} p_{31})
\end{aligned}
\tag{5.119}$$

$$\begin{aligned}
\text{MELEM } (12,6) = & R1(\gamma) p_{14} p_{12} + R2(\gamma) p_{24} p_{22} + R3(\gamma) p_{34} p_{32} + \\
& + R4(\gamma) p_{44} p_{42} + \frac{1}{2} R5(\gamma) (p_{14} p_{22} + p_{24} p_{12}) + \\
& + \frac{1}{2} R6(\gamma) (p_{14} p_{32} + p_{34} p_{12}) + R7(\gamma) (p_{14} p_{42} + p_{44} p_{12}) + \\
& + \frac{1}{2} R8(\gamma) (p_{24} p_{32} + p_{34} p_{22}) + \frac{1}{2} R9(\gamma) (p_{24} p_{42} + p_{44} p_{22}) + \\
& + \frac{1}{2} R10(\gamma) (p_{34} p_{42} + p_{44} p_{32}) + R11(\gamma) p_{12} p_{14} + \\
& + R12(\gamma) p_{22} p_{24} + R13(\gamma) p_{32} p_{34} + R14(\gamma) p_{42} p_{44} + \\
& + \frac{1}{2} R15(\gamma) (p_{12} p_{24} + p_{22} p_{14}) + \frac{1}{2} R16(\gamma) (p_{12} p_{34} + p_{32} p_{14}) + \\
& + \frac{1}{2} R17(\gamma) (p_{12} p_{44} + p_{42} p_{14}) + \frac{1}{2} R18(\gamma) (p_{22} p_{34} + p_{32} p_{24}) + \\
& + \frac{1}{2} R19(\gamma) (p_{22} p_{44} + p_{42} p_{24}) + \frac{1}{2} R20(\gamma) (p_{32} p_{44} + p_{42} p_{34})
\end{aligned}
\tag{5.120}$$

$$\begin{aligned}
\text{MELEM } (12,8) = & R1(\gamma) p_{14} p_{13} + R2(\gamma) p_{24} p_{23} + R3(\gamma) p_{34} p_{33} + \\
& + R4(\gamma) p_{44} p_{43} + \frac{1}{2} R5(\gamma) (p_{14} p_{23} + p_{24} p_{13}) + \\
& + \frac{1}{2} R6(\gamma) (p_{14} p_{33} + p_{34} p_{13}) + \frac{1}{2} R7(\gamma) (p_{14} p_{43} + p_{44} p_{13}) + \\
& + \frac{1}{2} R8(\gamma) (p_{24} p_{33} + p_{34} p_{23}) + \frac{1}{2} R9(\gamma) (p_{24} p_{43} + p_{44} p_{23}) + \\
& + \frac{1}{2} R10(\gamma) (p_{34} p_{43} + p_{44} p_{33}) + R11(\gamma) p_{14} p_{13} + \\
& + R12(\gamma) p_{24} p_{23} + R13(\gamma) p_{34} p_{33} + R14(\gamma) p_{41} p_{43} + \\
& + \frac{1}{2} R15(\gamma) (p_{14} p_{23} + p_{24} p_{13}) + \frac{1}{2} R16(\gamma) (p_{14} p_{33} + p_{34} p_{13}) + \\
& + \frac{1}{2} R17(\gamma) (p_{14} p_{43} + p_{44} p_{13}) + \frac{1}{2} R18(\gamma) (p_{24} p_{33} + p_{34} p_{23}) + \\
& + \frac{1}{2} R19(\gamma) (p_{24} p_{43} + p_{44} p_{23}) + \frac{1}{2} R20(\gamma) (p_{34} p_{43} + p_{44} p_{33})
\end{aligned}
\tag{5.121}$$

$$\begin{aligned}
 \text{MELEM} (12,12) = & R1(\gamma) p_{14}^2 + R2(\gamma) p_{24}^2 + R3(\gamma) p_{34}^2 + R4(\gamma) p_{44}^2 + \\
 & + R5(\gamma) p_{14} p_{24} + R6(\gamma) p_{14} p_{34} + R7(\gamma) p_{14} p_{44} + \\
 & + R8(\gamma) p_{24} p_{34} + R9(\gamma) p_{24} p_{44} + R10(\gamma) p_{34} p_{44} + \\
 & + R11(\gamma) p_{14}^2 + R12(\gamma) p_{24}^2 + R13(\gamma) p_{34}^2 + R14(\gamma) p_{44}^2 + \\
 & + R15(\gamma) p_{14} p_{24} + R16(\gamma) p_{14} p_{34} + R17(\gamma) p_{14} p_{44} + \\
 & + R18(\gamma) p_{24} p_{34} + R19(\gamma) p_{24} p_{44} + R20(\gamma) p_{34} p_{44}
 \end{aligned} \tag{5.122}$$

Sabendo-se que:

$$\alpha = \sqrt{\frac{KX}{E + AX}} \tag{5.123}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{KX}{G + IX}} \tag{5.124}$$

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{KY}{E + IZ}} \tag{5.125}$$

$$\psi = \sqrt[4]{\frac{KZ}{E + IY}} \tag{5.126}$$

$$R1(x) = \frac{1}{8x} \left[ e^{2xL} (\sin 2xL + \cos 2xL + 2) - 3 \right] \tag{5.127}$$

$$R2(x) = \frac{1}{8x} \left[ e^{-2xL} (\sin 2xL - \cos 2xL - 2) + 3 \right] \tag{5.128}$$

$$R3(x) = \frac{1}{8x} \left[ e^{2xL} (-\sin 2xL - \cos 2xL + 2) - 1 \right] \tag{5.129}$$

$$R4(x) = \frac{1}{8x} \left[ e^{-2xL} (-\sin 2xL + \cos 2xL - 2) + 1 \right] \quad (5.130)$$

$$R5(x) = \frac{1}{2x} (\sin 2xL + 2xL) \quad (5.131)$$

$$R6(x) = \frac{1}{4x} \left[ e^{2xL} (\sin 2xL - \cos 2xL) + 1 \right] \quad (5.132)$$

$$R7(x) = \frac{1}{2x} (1 - \cos 2xL) \quad (5.133)$$

$$R8(x) = \frac{1}{2x} (1 - \cos 2xL) \quad (5.134)$$

$$R9(x) = \frac{1}{4x} \left[ 1 - e^{-2xL} (\sin 2xL + \cos 2xL) \right] \quad (5.135)$$

$$R10(x) = \frac{1}{2x} (2xL - \sin 2xL) \quad (5.136)$$

$$R11(x) = \frac{x}{4} \left[ e^{2xL} (2 - \sin 2xL + \cos 2xL) - 3 \right] \quad (5.137)$$

$$R12(x) = \frac{x}{4} \left[ e^{2xL} (2 + \sin 2xL - \cos 2xL) - 1 \right] \quad (5.138)$$

$$R13(x) = \frac{x}{4} \left[ e^{2xL} (2 + \sin 2xL - \cos 2xL) - 1 \right] \quad (5.139)$$

$$R14(x) = \frac{x}{4} \left[ e^{-2xL} (\sin 2xL + \cos 2xL - 2) + 1 \right] \quad (5.140)$$

$$R15(x) = -\frac{x}{2} \left[ e^{2xL} (\sin 2xL + \cos 2xL) - 1 \right] \quad (5.141)$$

$$R16(x) = \frac{x}{2} \left[ e^{2xL} (\sin 2xL + \cos 2xL) - 1 \right] \quad (5.142)$$

$$R17(x) = x (2xL + \cos 2xL - 1) \quad (5.143)$$

$$R18(x) = -\frac{x}{2} \left[ e^{2xL} (\sin 2xL - \cos 2xL + 2) - 1 \right] \quad (5.144)$$

$$R19(x) = -x \operatorname{sen} 2xL \quad (5.145)$$

$$R20(x) = x \operatorname{sen} 2xL \quad (5.146)$$

Todos os termos da matriz deverão ser multiplicados por  $\rho \cdot AX$ , sendo  $\rho$  a densidade do material da estaca. Os demais termos da banda inferior são iguais a zero; os termos da banda superior poderão ser facilmente obtidos, uma vez que a matriz de massa equivalente é simétrica.

A alocação da matriz de massa equivalente de um elemento na matriz de massa equivalente da estaca, considerando a união existente entre os vários elementos em que foi dividida a estaca, é feita de forma análoga ao que foi feito para a matriz de rigidez (vide item 5.3.4) e, portanto, aqui omitido.

Antes de cada alocação, as matrizes de massa equivalentes de cada elemento são armazenadas em disco, para uso posterior.

#### 5.3.6 - Introdução das Condições de Apoio nas Matrizes de Rrigidez e de Massa Equivalentes de uma Estaca

Quando numa determinada direção o apoio é livre nenhuma mudança nas linhas e colunas das matrizes de rigidez e de massa equivalentes da estaca, correspondentes à esta direção, terá que ser efetuada.

Quando numa determinada direção o apoio é impedido de se deslocar completamente devemos usar a técnica dos zeros e um para alterar as linhas e colunas das matrizes de rigidez e de massa equivalentes da estaca: nas linhas e colunas correspondentes à esta direção armazenam-se zeros e no elemento da diagonal (cruzamento da linha e coluna correspondente) armazena-se o número um. Este procedimento se faz necessário para que se garanta,

nesta direção impedida de se deslocar, um deslocamento igual a zero.

Quando numa determinada direção o apoio pode ser considerado uma "mola", devemos alterar a matriz de rigidez da estaca adicionando a rigidez da mola ao termo correspondente na diagonal da matriz. A matriz de massa equivalente da estaca não sofrerá nenhuma modificação uma vez que consideramos a mola, idealmente, somente com propriedades elásticas, (sem propriedades de inércia).

#### 5.3.7 - Adaptação das Matrizes de Rigidez e de Massa Equivalente de Uma Estaca para a Cabeça da Estaca.

As matrizes de rigidez e de massa equivalentes obtidas nos subitens 5.3.4 e 5.3.5 e corrigidas para as condições de apoio no subitem 5.3.6, relacionam todos os deslocamentos nodais de uma estaca com os esforços nodais. Como estamos supondo o bloco de suporte das máquinas e equipamentos como rígido (vide 5.2), o deslocamento de qualquer ponto do mesmo poderá ser definido pela posição do ponto e pelos deslocamentos do centro de gravidade do bloco, (que estamos admitindo como sendo seis (três translações e três rotações)). Logo, precisamos relacionar os deslocamentos do ponto da estaca contíguo ao bloco ou seja, a cabeça da estaca, com os esforços aplicados neste mesmo ponto.

A obtenção da matriz de rigidez para a cabeça da estaca, a partir da matriz de rigidez da estaca, foi feita por Diaz (1973) e para a matriz de massa equivalente deduzido por nós, de forma análoga.

Ambas estão descritas a seguir.

a) para a matriz de rigidez temos a seguinte rotina:

Será imposto na cabeça de estaca um deslocamento unitário, no SEL, na direção de cada um dos seis graus de liberdade. As seis

reações necessárias a restabelecer a posição de equilíbrio de verão ser calculadas. As 36 reações, para as 6 possíveis direções, convenientemente ordenadas, representam os termos da matriz de rigidez da cabeça da estaca.

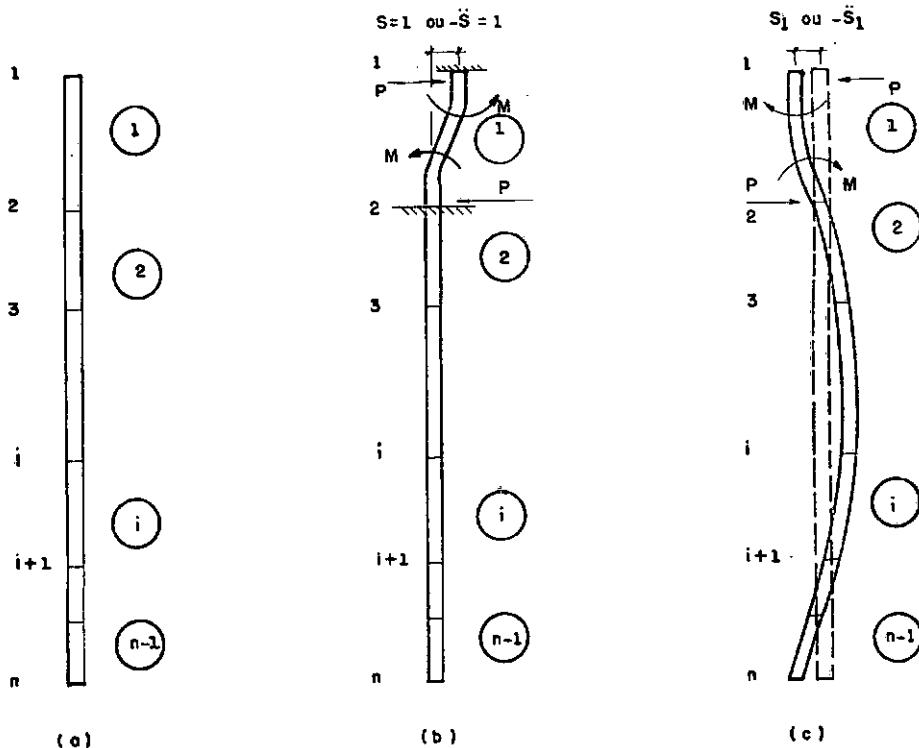


FIGURA 5.3 - ETAPAS DA OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA CABEÇA DA ESTACA

Para calcularmos as seis reações para cada deslocamento, devemos seguir os seguintes passos:

- 1 - Os doze esforços de engastamento dos nós 1 e 2 (do elemento 1 da estaca), para um deslocamento unitário do nó 1, na direção positiva do deslocamento considerado, deverão ser calculadas, supondo que o elemento 1 é engastado nas duas extremidades (vide Figura 5.3.b).
- 2 - Os deslocamentos dos nós 1 e 2 deverão ser calculados como solução do sistema linear envolvendo a matriz de rigidez da estaca e as reações dos esforços calculados no passo 1. (vide Figura 5.3.c). Os deslocamentos do nó 1 deverão ser adicionados algebricamente ao deslocamento imposto no passo 1.

3 - As seis reações da estaca no nó 1 deverão ser obtidas pelo produto da matriz de rigidez do elemento 1 pelos deslocamentos dos nós 1 e 2 .

b) para a matriz de massa equivalente temos a seguinte rotina:

Será imposta na cabeça da estaca uma aceleração unitária, no SEL, na direção de cada um dos seis graus de liberdade. As seis reações de inércia necessárias a restabelecer a posição de equilíbrio deverão ser calculadas. As 36 reações de inércia, para as seis possíveis direções, convenientemente ordenadas, representam os termos da matriz de massa equivalente da cabeça da estaca.

Para calcularmos as seis reações de inércia para cada aceleração, devemos seguir os seguintes passos:

- 1 - Os doze esforços (de inércia) de engastamento dos nós 1 e 2 (do elemento 1 da estaca), para uma aceleração unitária do nó 1, na direção positiva da aceleração considerada, deverão ser calculadas, supondo que o elemento 1 é engastado nas duas extremidades (vide figura 5.3b).
- 2 - As acelerações dos nós 1 e 2 deverão ser calculadas como solução do sistema linear envolvendo a matriz de massa equivalente da estaca e as reações dos esforços de inércia calculados no passo 1. (vide figura 5.3c). As acelerações do nó 1 deverão ser adicionadas algebricamente à aceleração imposta no passo 1.
- 3 - As seis reações de inércia da estaca no nó 1 deverão ser obtidas pelo produto da matriz de massa equivalente do elemento 1 pelas acelerações dos nós 1 e 2 .

#### 5.3.8 - Transformação das Matrizes de Rrigidez e de Massa Equivalente para o Sistema Global de Coordenadas

As matrizes de rigidez e de massa equivalente - para a cabeça da estaca - foram obtidas no SEL. Estas matrizes deverão ser transformadas para o SEG. Esta transformação poderá ser encontrada em Weaver (1967):

$$\{RGLOB\} = [\{ROT\} * \{TRANS\}]^T * \{RTOP\} * [\{ROT\} * \{TRANS\}] \quad (5.147)$$

$$\{MGLOB\} = [\{ROT\} * \{TRANS\}]^T * \{MTOP\} * [\{ROT\} * \{TRANS\}] \quad (5.148)$$

onde  $\{RGLOB\}$  e  $\{MGLOB\}$  são as matrizes de rigidez e de massa equivalente da estaca, referida ao SEG, sendo  $\{RTOP\}$  e  $\{MTOP\}$ , respectivamente, estas mesmas matrizes, referidas ao SEL.

As matrizes de rotação  $\{ROT\}$  e de translação  $\{TRANS\}$  poderão ser encontradas em Weaver (1967).

Para matriz de rotação temos:

$$CX = \cos (\text{ALFA}) \quad (5.149)$$

$$CY = \cos (\sin(\text{ALFA}) * \cos (\text{OMEGA})) \quad (5.150)$$

$$CZ = \cos (\sin(\text{ALFA}) * \sin (\text{OMEGA})) \quad (5.151)$$

$$SO = \sin (\text{TETA}) \quad (5.152)$$

$$CO = \cos (\text{TETA}) \quad (5.153)$$

$$ROT (1, 1) = CX \quad (5.154)$$

$$ROT (1, 2) = CY \quad (5.155)$$

$$ROT (1, 3) = CZ \quad (5.156)$$

$$DEN = \text{SQRT} (CX * CX + CZ * CZ) \quad (5.157)$$

$$ROT (2, 1) = (- CX * CY * CO - CZ * SO) / DEN \quad (5.158)$$

$$ROT (2, 2) = CO * DEN \quad (5.159)$$

$$\text{ROT } (2, 3) = (- \text{CY} * \text{CZ} * \text{CO} - \text{CZ} * \text{SO}) / \text{DEN} \quad (5.160)$$

$$\text{ROT } (3, 1) = (\text{CX} * \text{CY} * \text{SO} - \text{CZ} * \text{CO}) / \text{DEN} \quad (5.161)$$

$$\text{ROT } (3, 2) = - \text{SO} * \text{DEN} \quad (5.162)$$

$$\text{ROT } (3, 3) = (\text{CY} * \text{CZ} * \text{SO} + \text{CX} * \text{CO}) / \text{DEN} \quad (5.163)$$

Os demais termos da matriz são iguais a zero; CX, CY e CZ representam os cossenos diretores da estaca, TETA o ângulo entre os eixos y do SEG e SEL e OMEGA o ângulo formado pelo projeção da estaca sobre o plano yz com o eixo y.

Se a estaca é vertical temos a seguinte matriz de rotação:

$$\text{ROT } (1, 2) = \text{CY} \quad (5.164)$$

$$\text{ROT } (2, 1) = - \text{CY} * \text{CO} \quad (5.165)$$

$$\text{ROT } (2, 3) = \text{SO} \quad (5.166)$$

$$\text{ROT } (3, 1) = \text{CY} * \text{SO} \quad (5.167)$$

$$\text{ROT } (3, 3) = \text{CO} \quad (5.168)$$

$$\text{ROT } (4, 5) = \text{ROT } (1, 2) \quad (5.169)$$

$$\text{ROT } (5, 4) = \text{ROT } (2, 1) \quad (5.170)$$

$$\text{ROT } (5, 6) = \text{ROT } (2, 3) \quad (5.171)$$

$$\text{ROT } (6, 4) = \text{ROT } (3, 1) \quad (5.172)$$

$$\text{ROT } (6, 6) = \text{ROT } (3, 3) \quad (5.173)$$

os demais termos da matriz são iguais a zero.

Para matriz de translação temos:

$$\text{TRANS } (I, I) = 1 \quad (I = 1, 6) \quad (5.174)$$

$$\text{TRANS } (1, 5) = ZI \quad (5.175)$$

$$\text{TRANS } (1, 6) = - YI \quad (5.176)$$

$$\text{TRANS } (2, 4) = - ZI \quad (5.177)$$

$$\text{TRANS } (2, 6) = XI \quad (5.178)$$

$$\text{TRANS } (3, 4) = YI \quad (5.179)$$

$$\text{TRANS } (3, 5) = - XI \quad (5.180)$$

os demais termos da matriz são iguais a zero, sendo  $XI$ ,  $YI$  e  $ZI$  as coordenadas da cabeça da estaca, em relação ao SEG.

### 5.3.9 - Matrizes de Rígidez e de Massa Equivalente do Estaqueamento, com a Influência do Bloco de Suporte das Máquinas e Equipamentos

As matrizes da rigidez e de massa equivalente deverão ser acumuladas para se levar em conta a contribuição de to das estacas. Entretanto, além da contribuição das estacas, o bloco de suporte das máquinas e equipamentos contribui significativamente para a matriz de massa equivalente acumulada, modificando todos os seus termos diagonais. Nos termos correspondentes às translações somamos, aos termos da diagonal correspondentes, a massa total do sistema (bloco de suporte, máquinas e/ou equipamentos); nos termos correspondentes às rotações somamos, aos termos da diagonal correspondente, os momentos de inércia da

massa do sistema.

Temos:

$$M\text{GLOB} (1, 1) = M\text{GLOB} (1, 1) + M\text{ASSA} \quad (5.181)$$

$$M\text{GLOB} (2, 2) = M\text{GLOB} (2, 2) + M\text{ASSA} \quad (5.182)$$

$$M\text{GLOB} (3, 3) = M\text{GLOB} (3, 3) + M\text{ASSA} \quad (5.183)$$

$$M\text{GLOB} (4, 4) = M\text{GLOB} (4, 4) + I\text{X} \quad (5.184)$$

$$M\text{GLOB} (5, 5) = M\text{GLOB} (5, 5) + I\text{Y} \quad (5.185)$$

$$M\text{GLOB} (6, 6) = M\text{GLOB} (6, 6) + I\text{Z} \quad (5.186)$$

Devido à não consideração das propriedades elásticas do bloco de suporte, a matriz de rigidez acumulada não será modificada.

### 5.3.10 - Determinação das Frequências Naturais de Vibração do Bloco de Suporte

A equação do movimento para um sistema elástico com um número finito de graus de liberdade poderá ser encontrada em Przemieniecki (1968).

Em notação matricial temos:

$$M\text{GLOB} \cdot \ddot{U} + K\text{GLOB} \cdot \dot{U} = P\text{EQ} \quad (5.187)$$

onde  $P\text{EQ}$  é a matriz coluna de esforços dinâmicos equivalentes.

Para a determinação das frequências naturais de vibração do sistema, consideraremos  $P\text{EQ} = 0$ , ou seja, a estrutura experimenta vibrações livres.

A equação 5.187 se reduz a:

$$M\ddot{U} + K\dot{U} = 0 \quad (5.188)$$

Uma vez que as vibrações livres são harmônicas (vide, por exemplo, a equação 3.36), os deslocamentos  $\dot{U}$  podem ser escritos como segue:

$$\dot{U} = q \sin f_n t \quad (5.189)$$

onde  $q$  é a matriz coluna de amplitudes dos deslocamentos  $\dot{U}$ ,  $f_n$  é a frequência natural e  $t$  é o tempo.

Substituindo a equação 5.189 na equação 5.188 temos, após algumas simplificações:

$$(-f_n^2 M + K) q = 0 \quad (5.190)$$

A equação 5.190 tem solução diferente da trivial para  $q$  somente se:

$$\det (-f_n^2 M + K) = 0 \quad (5.191)$$

A equação 5.191 é denominada de equação característica do sistema e permite obter as frequências naturais de vibração do sistema (autovalores da equação 5.190).

Para um dado valor de  $f_n^2$  podemos calcular, pela equação 5.191, as amplitudes relativas de  $q$  (observar que a equação 5.191 representa um sistema de equações lineares homogêneo).

5.3.11 - Determinação dos Deslocamentos e Acelerações do Bloco de Suporte

Estudaremos aqui o caso de forças aplicadas harmônicas, que é, na prática, o que mais se aproxima da excitação produzida por máquinas rotativas.

Temos:

$$\underline{\underline{P}}_{EQ} = \overline{P}_{EQ} \operatorname{sen} \omega t \quad (5.192)$$

e desprezando as amplitudes relativas às vibrações livres (vide, por exemplo, sub-ítem 3.3.2) temos:

$$\underline{\underline{U}} = \overline{U} \operatorname{sen} \omega t \quad (5.193)$$

onde  $\omega$  é a frequência excitante do sistema.

Substituindo a equação 5.193 e 5.192 na equação 5.187, temos após algumas simplificações:

$$(-\omega^2 \underline{\underline{M}}_{LOB} + \underline{\underline{K}}_{LOB}) \overline{U} = \overline{P}_{EQ} \quad (5.194)$$

Pré-multiplicando os termos da equação (5.194) por  $(-\omega^2 \underline{\underline{M}}_{LOB} + \underline{\underline{K}}_{LOB})^{-1}$  temos:

$$\overline{U} = (-\omega^2 \underline{\underline{M}}_{LOB} + \underline{\underline{K}}_{LOB})^{-1} \overline{P}_{EQ} \quad (5.195)$$

Atestamos que a inversão indicada na equação (5.195), para máquinas bem dimensionadas à ressonância ( $\pm 20\%$  a  $\pm 30\%$  das frequências naturais é a faixa crítica ao problema da ressonância), sempre é possível, uma vez que  $\det(-\omega^2 \underline{\underline{M}}_{LOB} + \underline{\underline{K}}_{LOB}) = 0$

somente para as frequências naturais de vibração.

Calculamos os deslocamentos e acelerações do bloco de suporte em intervalos de tempo de um oitavo de período. Para cada tempo serão calculados os deslocamentos, acelerações e esforços nas estacas, além das pressões transmitidas ao solo.

Substituindo a equação 5.195 na equação 5.193 teremos os deslocamentos do bloco de suporte, no tempo  $t$ . Derivando a equação 5.193 duas vezes, em relação ao tempo, e substituindo nesta a equação 5.195 teremos as acelerações do bloco de suporte, no tempo  $t$ :

Em símbolos matemáticos teremos:

$$\underline{U} = (-\omega^2 \underline{M}_{LOB} + \underline{K}_{LOB})^{-1} \underline{PEQ} \quad \text{sen } \omega t \quad (5.196)$$

$$\ddot{\underline{U}} = -(-\omega^2 \underline{M}_{LOB} + \underline{K}_{LOB})^{-1} \underline{PEQ} \cdot \omega^2 \cdot \text{sen } \omega t \quad (5.197)$$

Os deslocamentos e esforços induzidos nas estacas, pelos deslocamentos dados na equação 5.196, deverão ser superpostos com os deslocamentos e esforços induzidos nas estacas pela carga estática permanente.

Os deslocamentos do bloco de suporte, para as cargas estáticas permanentes poderão ser calculados através da expressão:

$$\underline{U}_{est} = \underline{K}_{LOB}^{-1} \cdot \underline{PEQ}_{est} \quad (5.198)$$

onde  $\underline{PEQ}_{est}$  é a matriz coluna de esforços estáticos equivalentes.

5.3.12 - Determinação Final de Deslocamentos, Acelerações, Esforços e Reações ao Longo da Estaca

A determinação dos deslocamentos dos nós da estaca, a partir dos deslocamentos do bloco de suporte, foi feito por Diaz (1973) e a determinação das acelerações dos nós da estaca, a partir das acelerações do bloco de suporte, foi deduzido por nós, de forma análoga.

Ambas estão descritas a seguir:

a) para a determinação dos deslocamentos dos nós da estaca temos a seguinte rotina:

Os seis deslocamentos da cabeça da estaca deverão ser transformados para o sistema local de coordenadas, através da seguinte fórmula:

$$\underline{U}_e = [\{ROT\} * \{TRANS\}] * \underline{U} \quad (5.199)$$

Os deslocamentos dos nós da estaca deverão ser determinados mediante os seguintes passos:

1. Os doze esforços de engastamento dos nós 1 e 2 (do elemento 1, da estaca), para um deslocamento igual a  $\underline{U}_e$ , deverão ser calculados, supondo que o elemento 1, é engastado nas duas extremidades.
2. Os deslocamentos dos nós da estaca deverão ser calculados como solução do sistema linear envolvendo a matriz de rigidez da estaca e as reações dos esforços calculados no passo 1. Os deslocamentos do nó 1 deverão ser adicionados algebraicamente aos deslocamentos dados pela equação 5.199.

Para os deslocamentos do bloco de suporte, devido às cargas estáticas permanentes, devemos seguir toda a rotina descrita acima e adicionar os resultados aos deslocamentos encontrados anteriormente (com a atuação das cargas dinâmicas).

b) para a determinação das acelerações dos nós da estaca temos a

seguinte rotina:

As seis acelerações da cabeça da estaca deverão ser transformadas para o sistema local de coordenadas, através da seguinte fórmula:

$$\ddot{U}_e = [\{ROT\} * \{TRANS\}] * \ddot{U} \quad (5.200)$$

As acelerações dos nós da estaca deverão ser determinadas mediante os seguintes passos:

1. Os doze esforços (de inércia) de engastamento dos nós 1 e 2 (do elemento 1 da estaca), para uma aceleração igual a  $\ddot{U}_e$ , deverão ser calculados, supondo que o elemento 1 é engastado nas duas extremidades.
2. As acelerações dos nós da estaca deverão ser calculadas como solução do sistema linear envolvendo a matriz de massa equivalente da estaca e as reações dos esforços de inércia calculados no passo 1. As acelerações do nó 1 deverão ser adicionadas algebricamente às acelerações dadas pela equação 5.200.

A determinação dos esforços nos nós dos elementos da estaca poderão ser calculados, para cada elemento, através da seguinte fórmula:

$$F_i = MELEM_i * \ddot{D}_i + RELEM_i * D_i \quad (5.201)$$

onde  $\ddot{D}_i$  e  $D_i$  representam as acelerações e deslocamentos dos nós  $i$  e  $i + 1$ , respectivamente, sendo  $i$  o número do elemento.

As reações do solo ao longo da estaca deverão ser calculadas multiplicando os deslocamentos dos nós ao longo da estaca pelo módulo de reação correspondente, ou seja:

$$RX = KX * DX \quad (5.202)$$

$$R_Y = K_Y * D_Y \quad (5.203)$$

$$R_Z = K_Z * D_Z \quad (5.204)$$

$$R_{MX} = K_{MX} * D_{MX} \quad (5.205)$$

A introdução da contribuição da massa de solo que vibra com a estaca, apesar de negligenciada, poderá ser facilmente obtida através de diâmetro equivalente, com a expressão:

$$\gamma_{eq} \cdot d_{eq}^2 = (\gamma_1 - \gamma_2) d_1^2 + \gamma_2 d_2^2 \quad (5.206)$$

sendo

$d_{eq}$  = diâmetro equivalente

$\gamma_{eq}$  = peso específico equivalente (poderemos adotar  $\gamma_1$  ou  $\gamma_2$ )

$\gamma_1$  = peso específico do material da estaca

$\gamma_2$  = peso específico do solo que vibra com a estaca

$d_1$  = diâmetro da estaca

$d_2$  = diâmetro da área de solo que vibra com a estaca

## VI - COMPARAÇÕES DOS MODELOS PROPOSTOS E COM RESULTADOS ENCONTRADOS EM REVISTAS TÉCNICAS

### 6.1 - INTRODUÇÃO

As Figuras 6.1 a 6.11 apresentam uma fundação de compressores projetada para a Refinaria Duque de Caxias (PETRO-BRAS), em Duque de Caxias, RJ.

O subsolo da área apresenta uma extensa camada de argila muito mole, sobrejacente a um solo residual onde estão as sentes as estacas de fundação.

O coeficiente de reação horizontal foi admitido como variável linearmente com a profundidade e a constante do coeficiente de reação horizontal  $n_h$ , foi estimada em  $0,03 \text{ kgf/cm}^3$ . O coeficiente de reação vertical do solo residual foi estimado, conservadoramente (devido à ausência de ensaios), em  $9,6 \text{ kgf/cm}^3$ .

As estacas utilizadas foram pré-moldadas, centrifugadas, de 420 mm de diâmetro externo e 340 mm de diâmetro interno, cravadas com extremidade normal. A carga vertical máxima admissível nas estacas é de 90 tf.

As estacas foram rotuladas no bloco de coroamento (devido à ausência de ferragem de engastamento) e no solo (devido à pequena penetração da ponta da estaca na camada de solo residual).

Fizemos três análises para estes compressores, descritas a seguir:

- A) Utilizando o Método Clássico
- B) Utilizando o modelo matemático proposto, porém não considerando a contenção lateral do solo.

C) Utilizando o modelo matemático proposto, porém considerando a contenção lateral do solo.

## 6.2 - RESULTADOS

### 6.2.1 - Frequências Naturais de Vibração (em rpm)

FREQUÊNCIAS NATURAIS	ANÁLISES		
	A	B	C
$f_{nx}$	1449	195000	240000
$f_{ny}$	1266	170000	200000
$f_{nz}$	2025	2150	18850
$f_{n\phi x}$	208	1950	6600
$f_{n\phi y}$	150	800	3000
$f_{n\phi z}$	150	1400	5500

### 6.2.2 - Situação de Máximo Esforço Horizontal

#### 6.2.2.1 - Deslocamentos Máximos (em mm)

DESLOCAMENTOS MÁXIMOS	ANÁLISES		
	A	B	C
Vertical	0.487 E-02	0.900 E-03	0.881 E-03
Horizontal	0.311 E-01	0.103 E-03	0.101 E-03
Plano yx	0.179 E-00	0.205 E-01	0.105 E-02
plano zx	0.659 E-04	0.733 E-07	0.851 E-10

6.2.2.2 - Cargas Máximas nas Estacas (em tf)

CARGAS MÁXIMAS	ANÁLISES		
	A	B	C
Vertical	0.155 E 02	0.125 E 02	0.121 E 02
Horizontal	0.207 E 01	0.180 E 01	0.120 E 01

## 6.2.3 - Situação de Máximo Momento Torsor

6.2.3.1 - Deslocamentos Máximos (em mm)

DESLOCAMENTOS MÁXIMOS	ANÁLISES		
	A	B	C
Vertical	0.664 E-14	0.550 E-04	0.485 E-04
Horizontal	0.311 E 00	0.290 E-02	0.275 E-02
Plano yx	0.460 E-02	0.101 E-02	0.888 E-03
Plano zx	0.974 E-03	0.835 E-04	0.435 E-07

6.2.3.2 - Cargas Máximas nas Estacas (em tf)

CARGAS MÁXIMAS	ANÁLISES		
	A	B	C
Vertical	0.128 E 02	0.120 E 02	0.119 E 02
Horizontal	0.178 E 01	0.150 E 01	0.111 E 01

### 6.3 - CONTRIBUIÇÃO ADICIONAL

Saul (1968) propos um método geral de análise tridimensional de fundações em estacas, para cargas estáticas e dinâmicas, baseado nos princípios da Análise Matricial da Mecânica das Estruturas.

O coeficiente de reação horizontal foi admitido constante com a profundidade e igual a 0,1 kci (aproximadamente  $2,8 \text{ kgf/cm}^3$ ). O coeficiente de reação vertical na ponta da estaca foi admitido igual ao valor do coeficiente de reação horizontal.

As estacas utilizadas foram metálicas de seção quadrada vazada de  $1/2"$  de parede e área de secção transversal igual a  $16,10 \text{ sq in}$  (aproximadamente  $104 \text{ cm}^2$ ). Não existe indicações da carga máxima vertical e/ou horizontal que a estaca resiste como peça estrutural (cargas máximas nominais). As estacas foram engastadas no bloco de coroamento e no solo.

As únicas comparações permitidas do modelo matemático proposto por Saul (análise A) com o modelo por nós proposto (análise B) são as frequências naturais de vibração. Chamamos a atenção, entretanto, que o procedimento sugerido por Saul considera a matriz de massa discreta, com a contribuição das propriedades de inércia do bloco de coroamento das estacas e sem a contribuição das propriedades de inércia do estaqueamento, particularidade esta incorporada ao modelo por nós proposto (utilizamos a matriz de massa consistente).

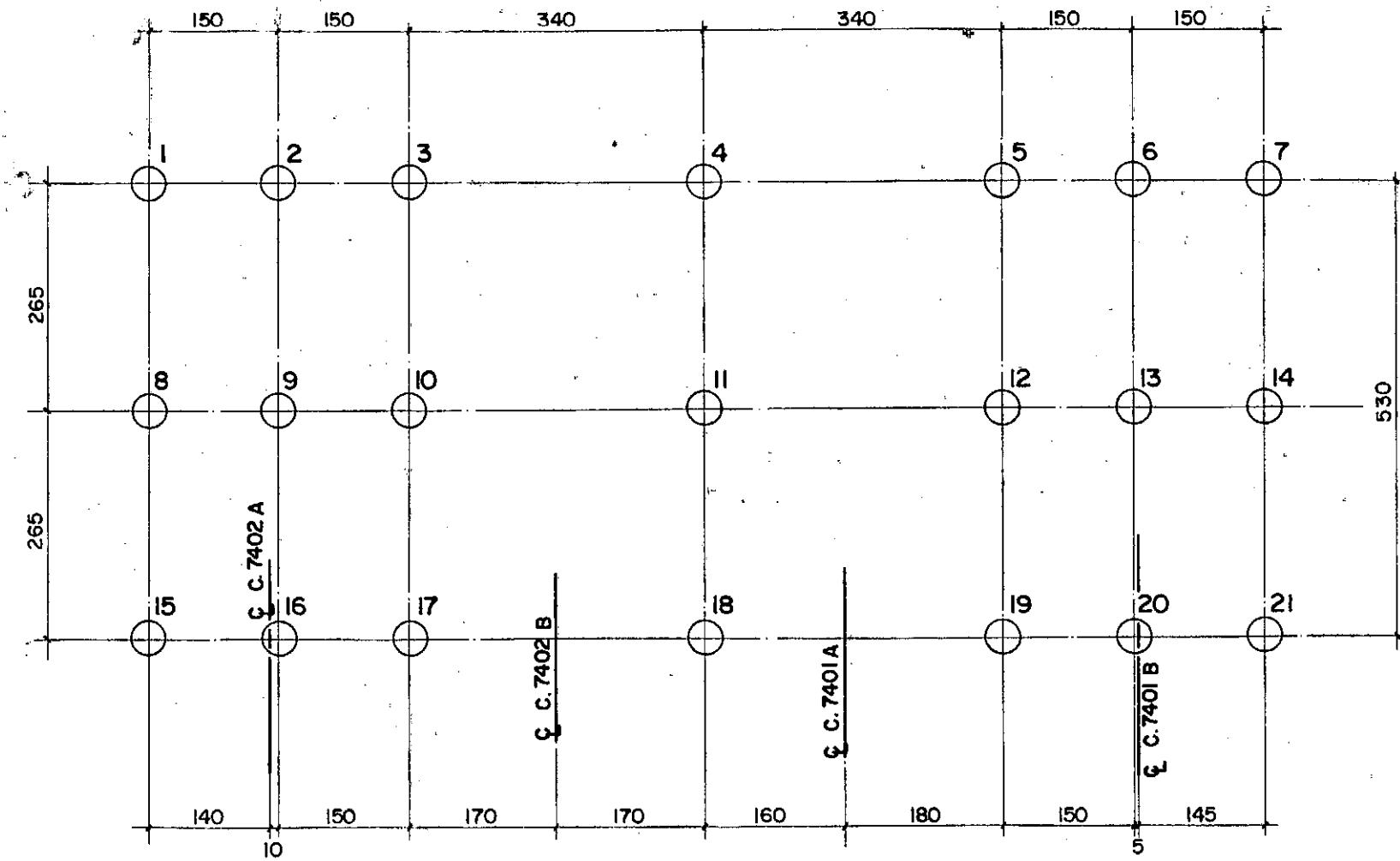
Os resultados estão apresentados a seguir:

Frequências Naturais de Vibração (em rpm)

FREQUÊNCIAS NATURAIS	ANÁLISES	
	A	B
$f_{nx}$	742	607
$f_{ny}$	748	197
$f_{nz}$	823	32
$f_{n\phi x}$	1952	29
$f_{n\phi y}$	2084	27
$f_{n\phi z}$	2173	18

## LOCAÇÃO DAS ESTACAS

ESC. 1:75

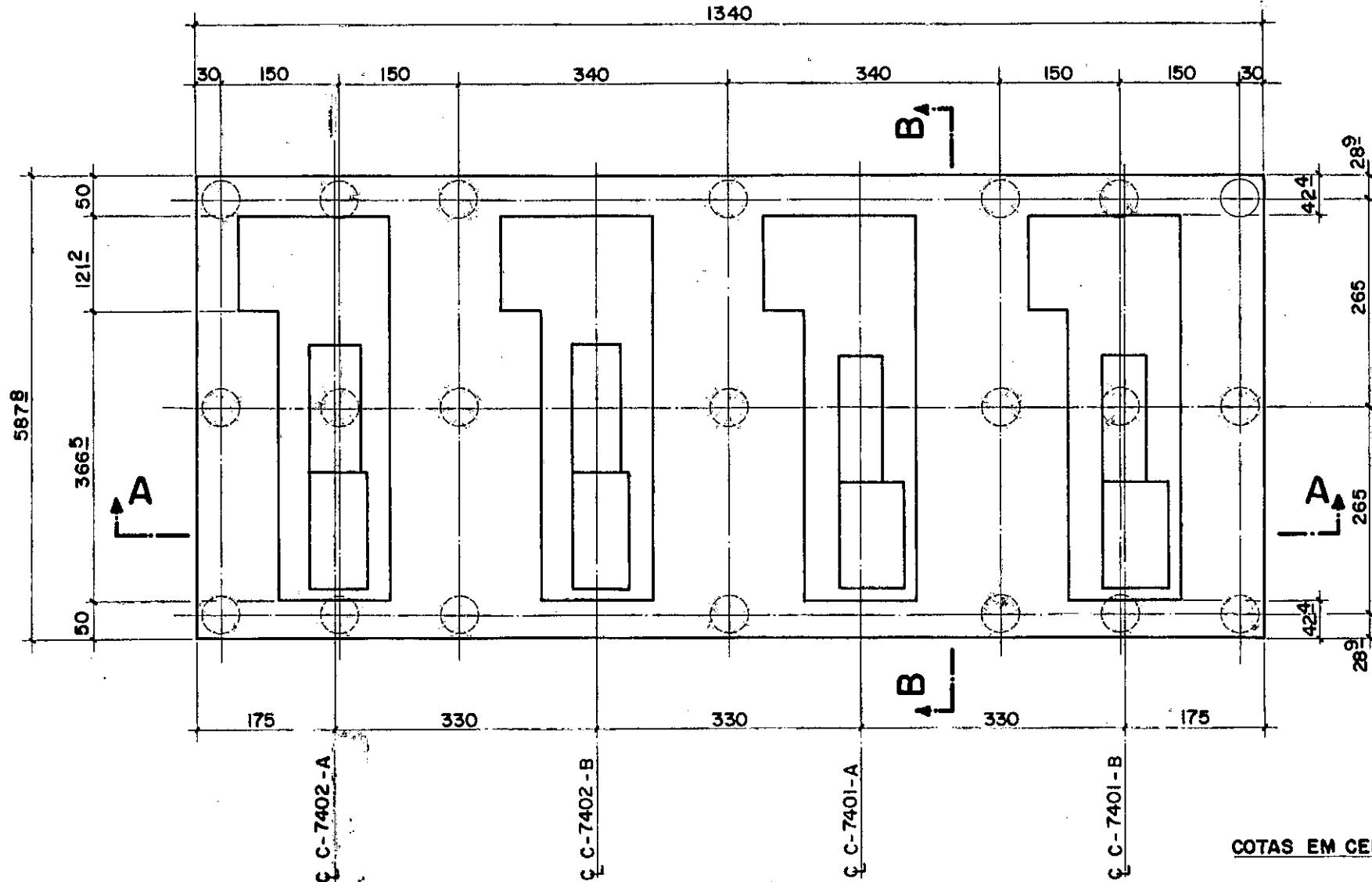


**COTAS EM CENTIMETROS**

# PLANTA

ESC. 1:75

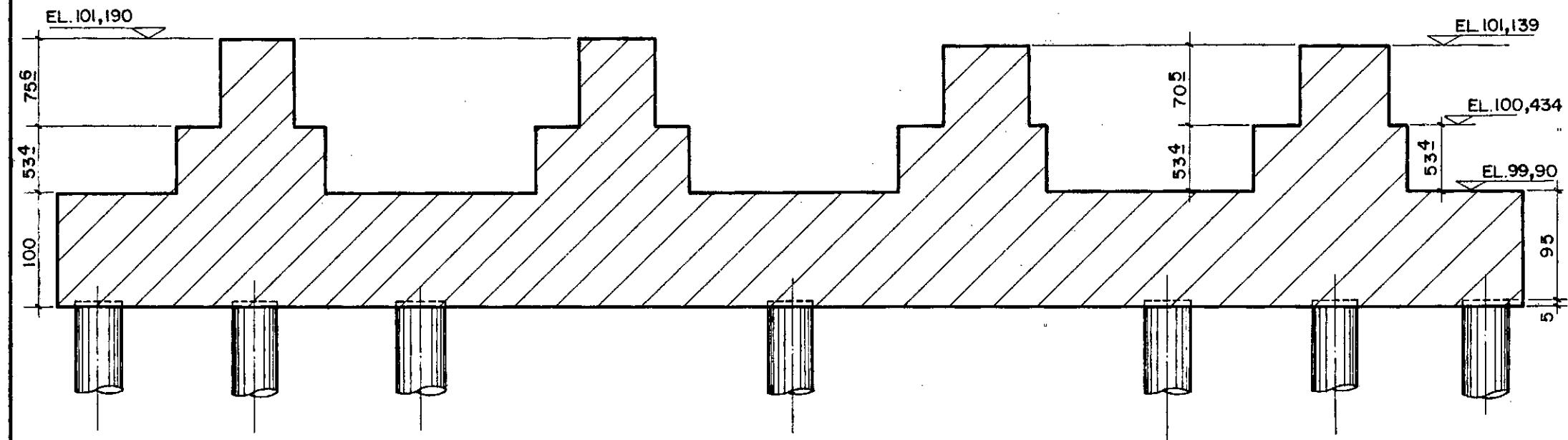
1340



# CORTE A-A

ESC. 1:50

100



ELEVACÕES EM METROS  
COTAS EM CENTÍMETROS

# CORTE B-B

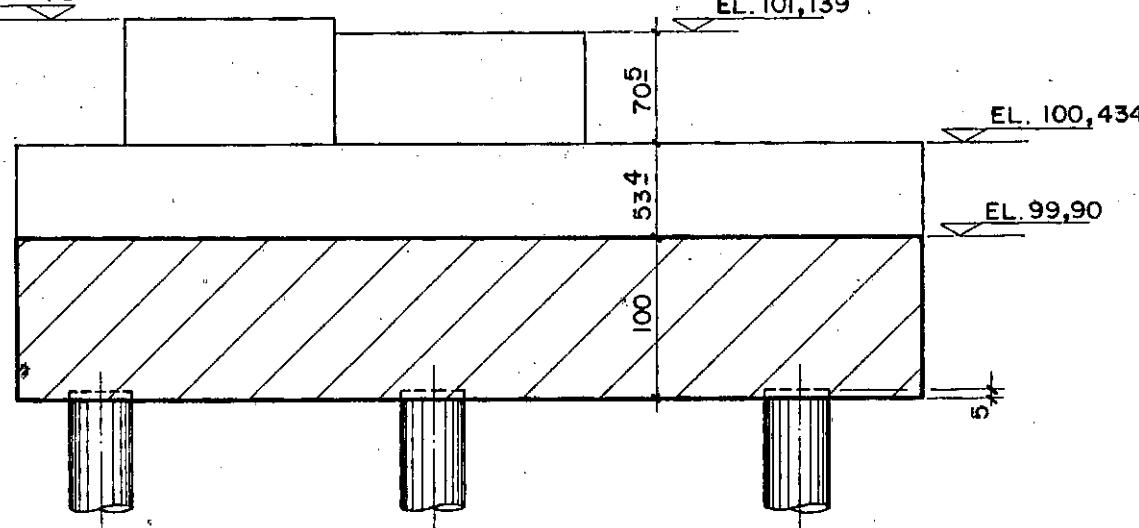
ESC. 1:50

EL. 101,120 (C. 7401 A/B)  
EL. 101,190 (C. 7402 A/B)

EL. 101,139

EL. 100,434

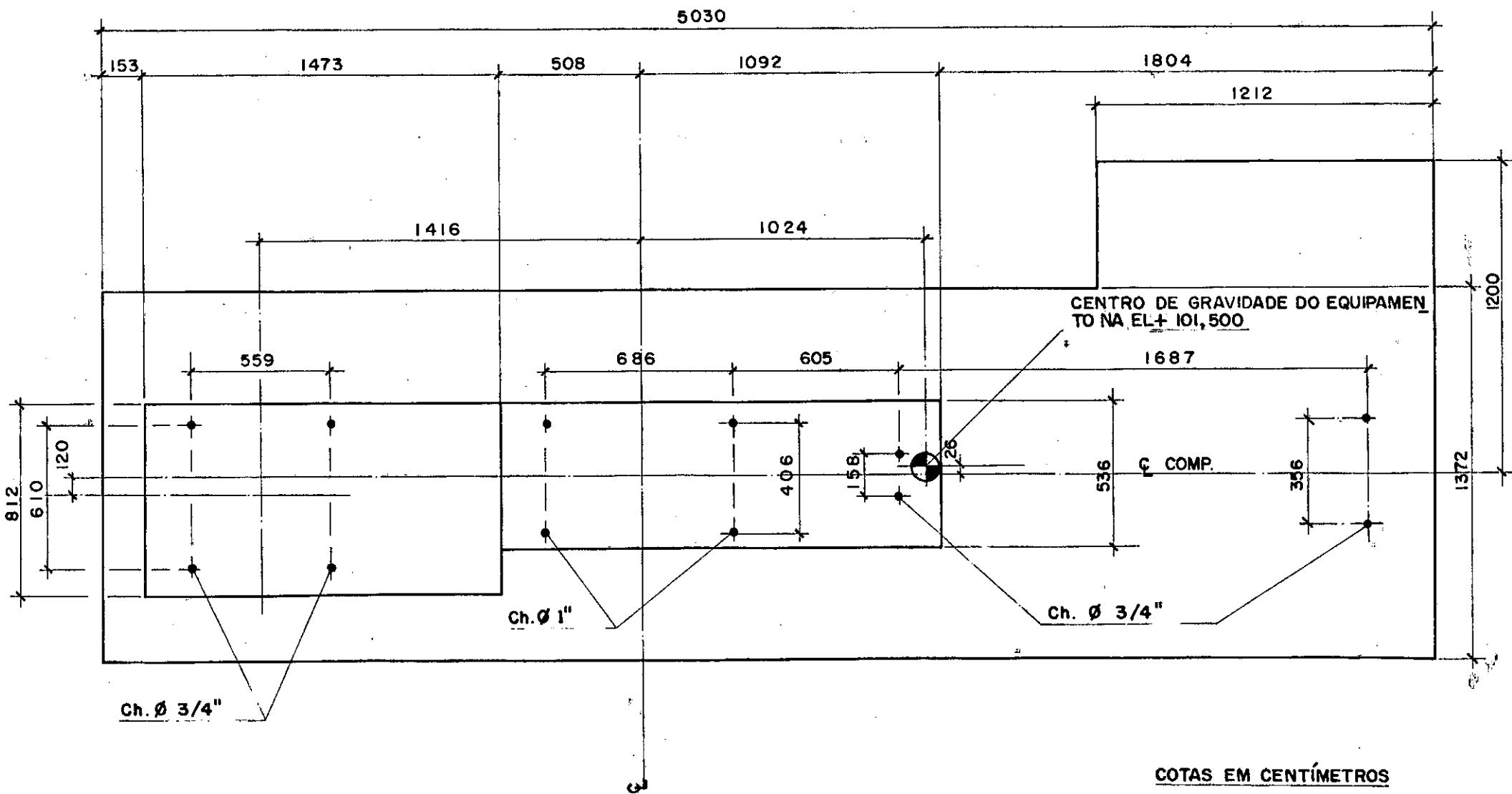
EL. 99,90



ELEVACÕES EM METROS  
COTAS EM CENTIMETROS

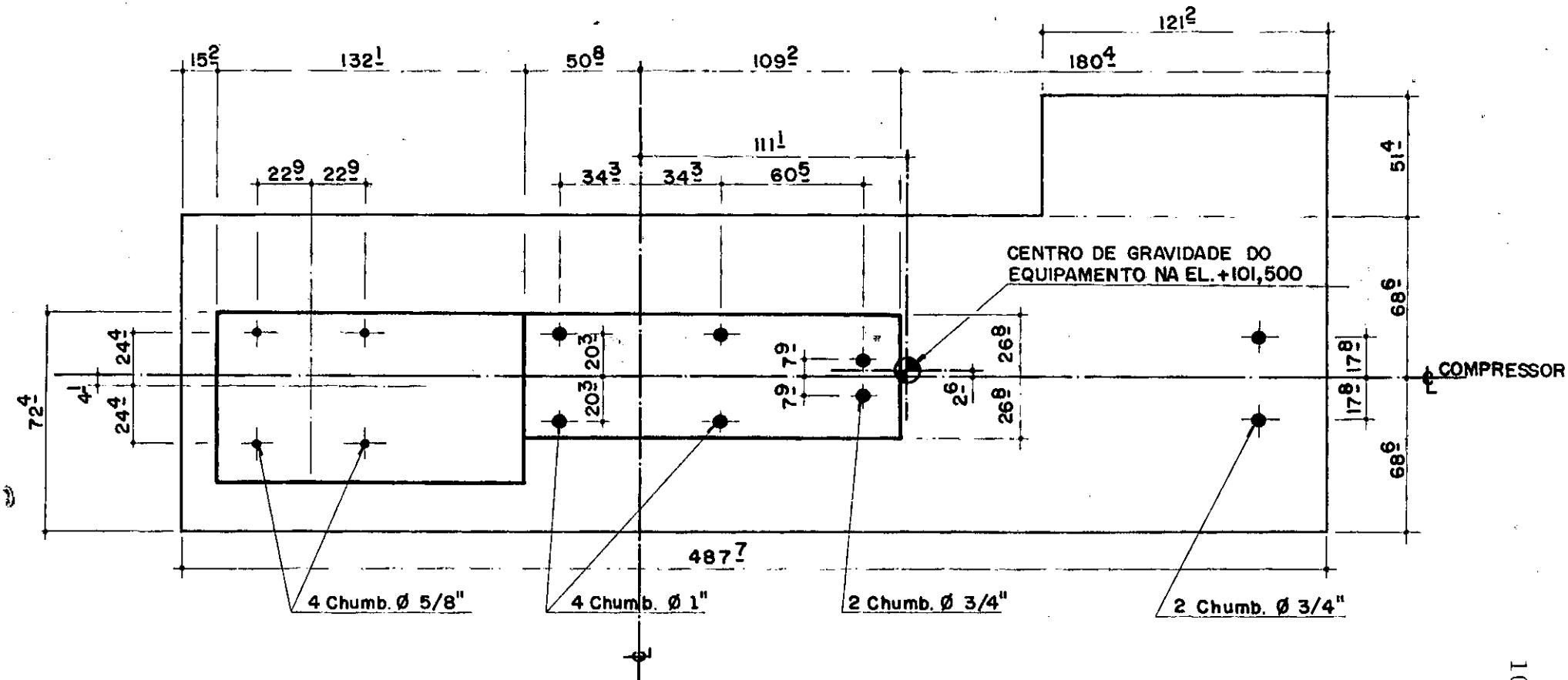
# PLANTA C-7401 A/B

ESC. 1:25



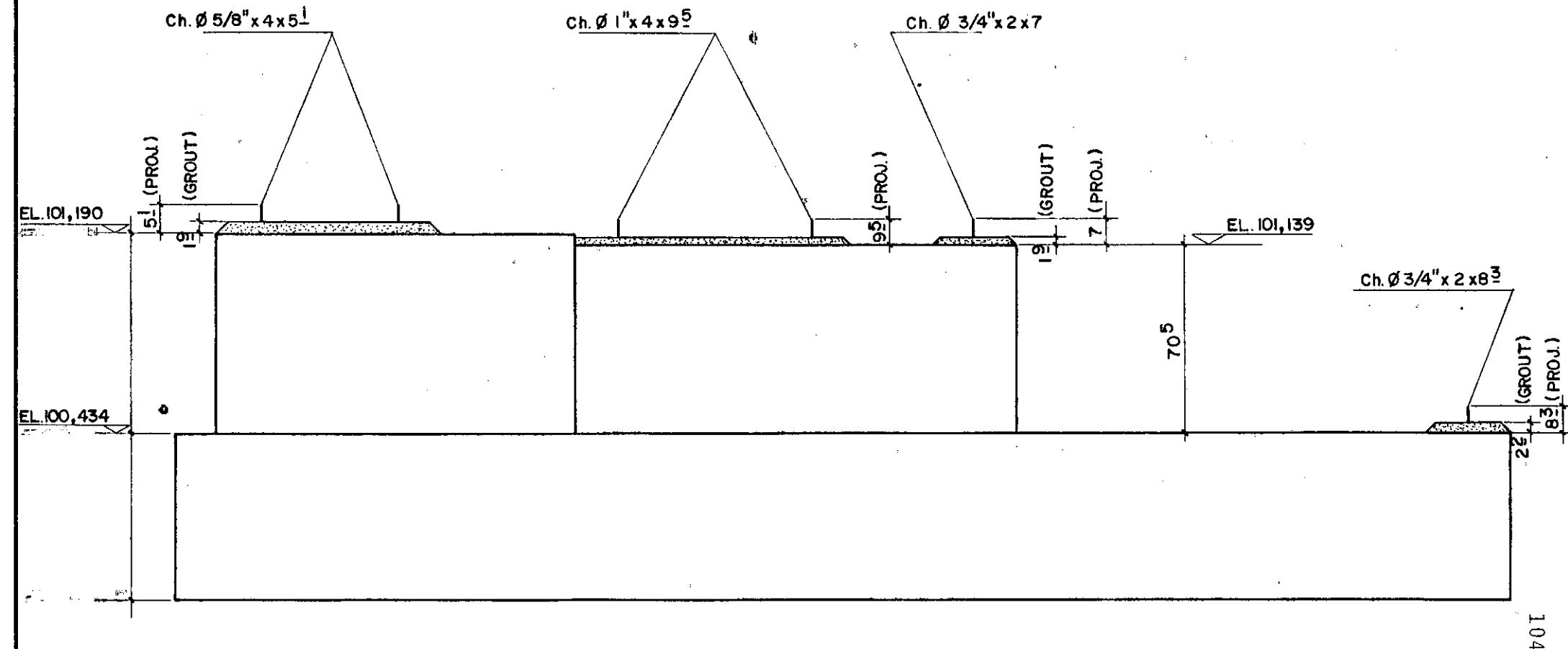
# PLANTA C-7402 A/B

ESC. 1:25



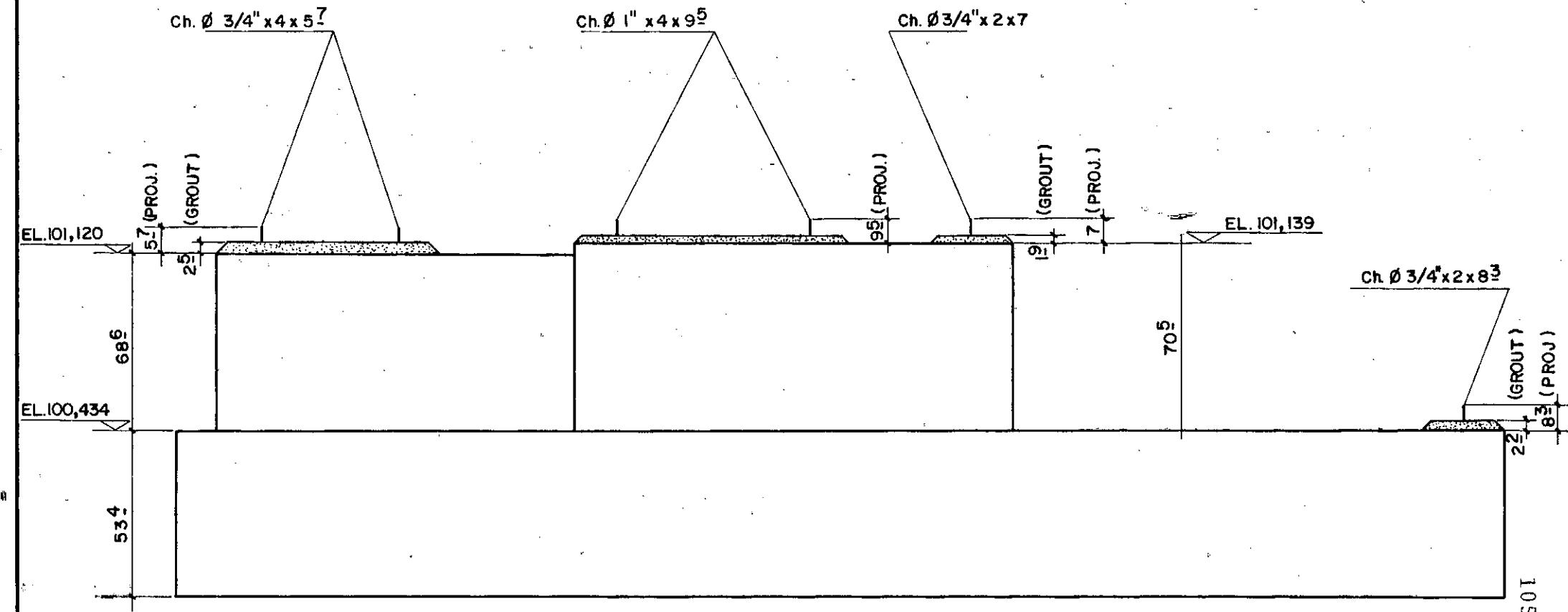
COTAS EM CENTÍMETROS

# ELEVAÇÃO

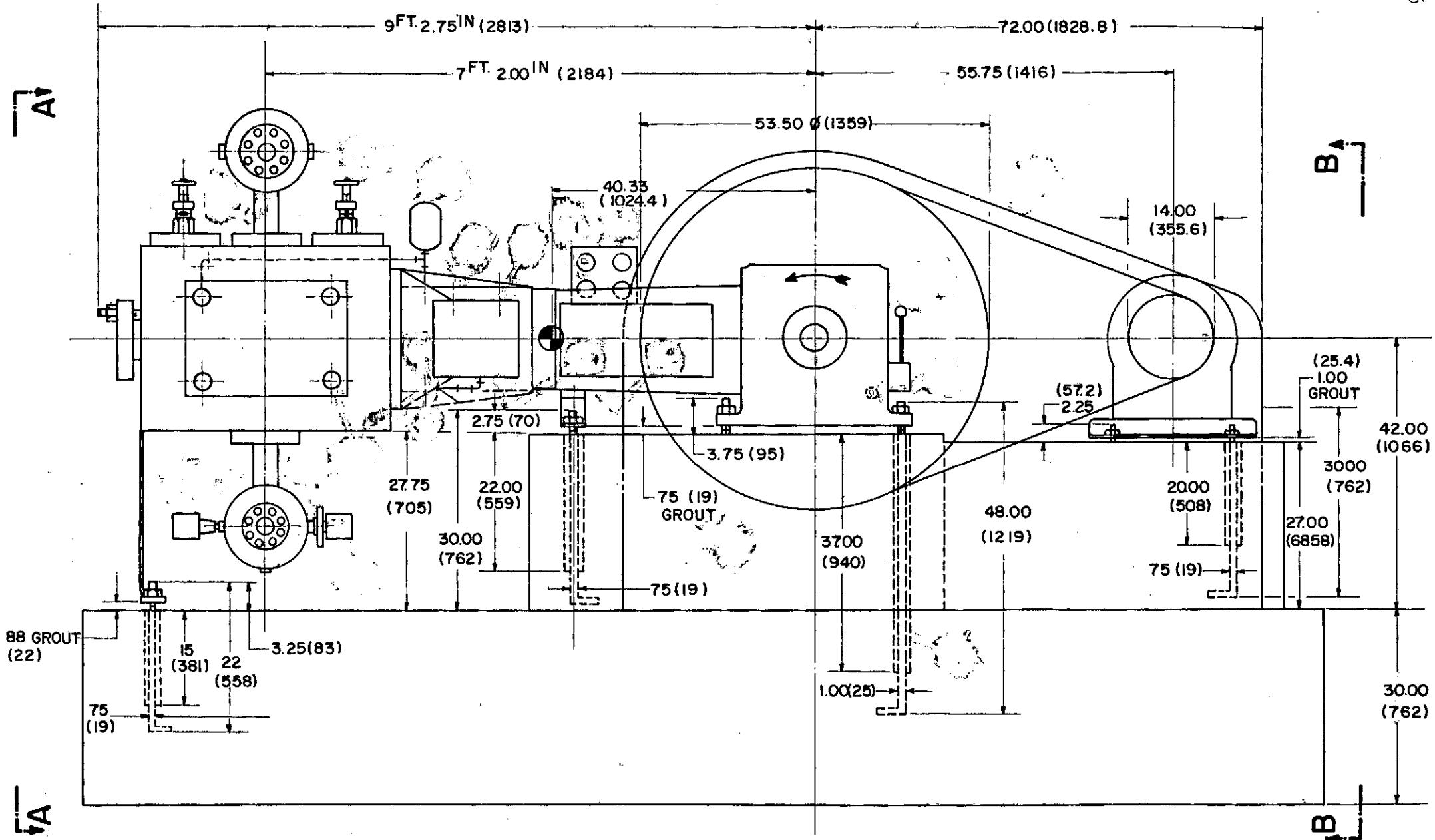


COTAS EM CENTIMETROS

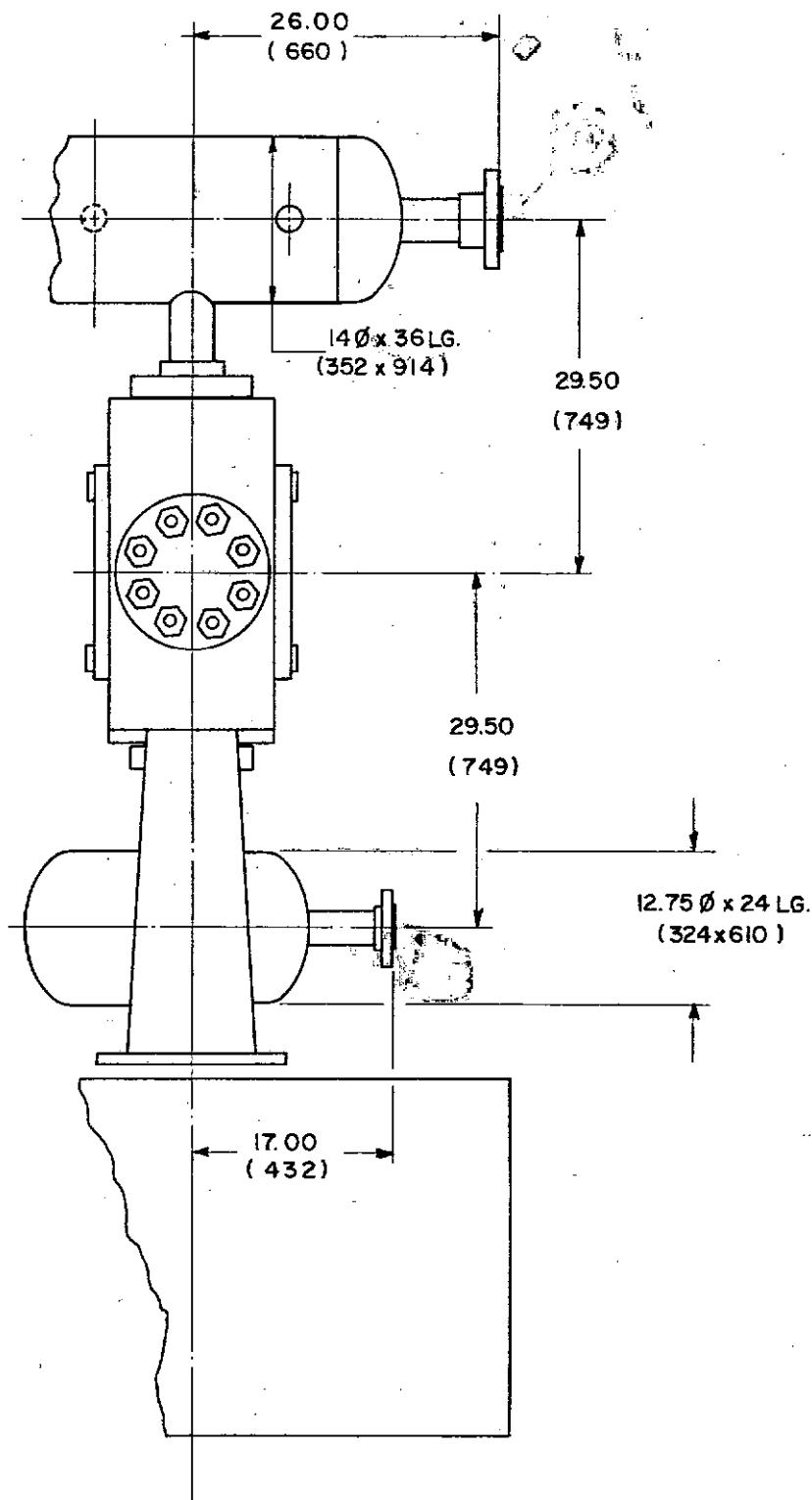
# ELEVAÇÃO



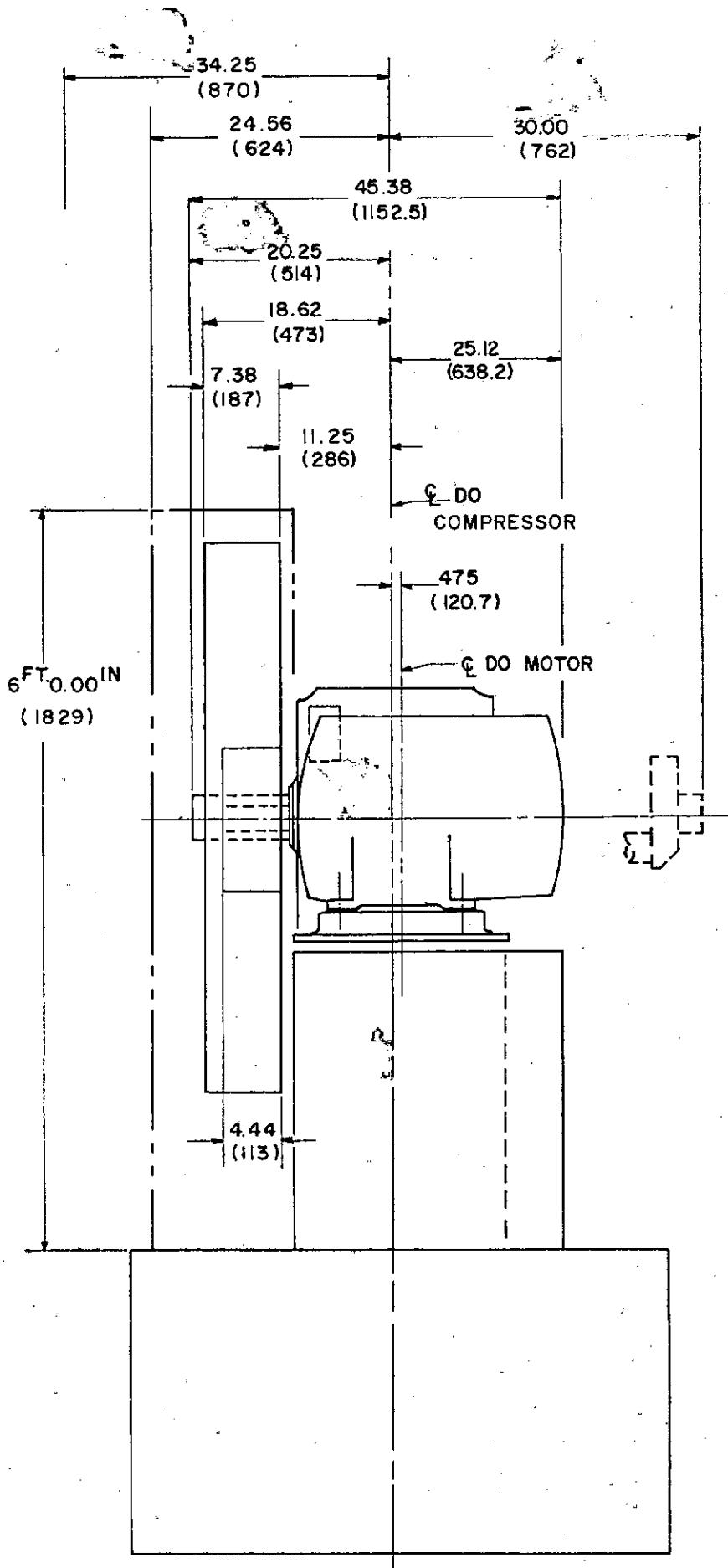
ELEVAÇÕES EM METROS  
COTAS EM CENTIMETROS



# VISTA LATERAL A



# VISTA LATERAL B



COTAS EM CENTÍMETROS

## VII - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS AFINS

7.1 - CONCLUSÕES

Fundações de máquinas ainda é um campo aberto à pesquisa em nosso país. Apesar de contarmos com pesadas obras industriais, tais como refinarias, siderúrgicas, indústrias de processo, etc., não temos conhecimento de pesquisas teóricas e/ou experimentais sobre o comportamento de fundações submetidas a carregamentos dinâmicos.

Os contratantes de obras industriais deveriam avaliar o retorno que investimentos nesta área trariam, contribuindo, a médio prazo, para diminuição dos custos de construção, absorção de "know-how" e concorrência ao grande volume de consultoria externa.

Esta tese representa o início de um campo de pesquisa no Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ; esperamos continuar dando nossa contribuição ao tema, dentro dos trabalhos de pesquisa que procuraremos desenvolver como docentes da UFRJ. Sentir-nos-emos gratificados se houver continuidade deste nosso trabalho. Para tanto, o apoio de instituições de pesquisas, universidades e empresas públicas e privadas será fundamental.

O método clássico de análise de fundações de máquinas, proposto por Raush (1943), representa um eficaz roteiro para projetos. Sua aplicação é relativamente simples e, sem esforços substanciais, poderá ser manuseado sem o emprego de computadores digitais que, no Brasil, ainda não são de uso corrente em Empresas de Engenharia, médias a pequenas. Os resultados ob-

tidos com a aplicação deste método, comparado com o modelo matemático proposto nesta tese, são conservativos, com um fator de segurança que não compromete a economia.

Este sobre dimensionamento, em se tratando de obras industriais, representa uma garantia para a imprecisão na avaliação das cargas dinâmicas, métodos incorretos de execução ou sobrecargas que não sejam possíveis de computar por ocasião da elaboração do projeto (estocagem de estacas pré-moldadas para ampliações da obra, por exemplo), entre outros casos, e, principalmente, para reduzir o risco da produção perdida e do reforço da fundação, no caso de um insucesso.

Os resultados obtidos com a aplicação do modelo matemático proposto permitem um perfeito domínio do comportamento de fundações de máquinas rotativas sobre estacas, já que simulamos de forma bastante adequada as condições reais. A maior dificuldade na aplicabilidade do mesmo resulta na determinação do modelo físico, sempre aproximado, e, algumas vezes, de forma grosseira.

Este modelo representa uma conquista da Engenharia Brasileira, visto que com o mesmo desenvolvimento matemático e hipóteses básicas equivalentes, temos o método proposto por Diaz (1973) para análise de estaqueamentos solicitados a carregamentos estáticos.

Para análise de resultados de uma instrumentação, ou para o projeto de pesados compressores, cremos que este modelo está apto a prestar um apoio substancial e sem similar no atual "state-of-the-art" de fundações de máquinas.

A matriz de massa consistente para um elemento envolvido por um meio elástico, extremamente importante na análise

dinâmica de fundações sobre estacas, foi um exaustivo trabalho manual, porém necessário para minimizar os tempos de processamento em computadores digitais. O programa de computador, usando esta matriz, ficou bastante atrativo pela precisão dos resultados e pelo baixo custo na sua aplicação.

As inversões e integrações realizadas para a determinação da matriz de massa consistente para um elemento envolvido por um meio elástico, em sua forma explícita, foram submetidas a uma comparação com análises numéricas, em número suficiente a se obter absoluta confiança nas equações apresentadas. O texto também foi exaustivamente revisto. Portanto, pesquisadores e projetistas de Fundações de Máquinas e Estruturas Marítimas (Estruturas "off-shore") poderão empregar a matriz de massa equivalente para um elemento envolvido por um meio elástico "ipsis litteris".

## 7.2 - SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

A avaliação experimental de parâmetros elásticos dinâmicos, efeitos do recalque dinâmico residual, propagação de ondas elásticas no solo induzidas por cargas dinâmicas, fundações de turbinas, fundações de geradores, fundações de máquinas que produzem impacto são temas que o crescimento industrial do nosso país exige respostas precisas.

## BIBLIOGRAFIA

- 1 ALPAN, ISAAC (1961) - "Machine Foundations and Soil Resonance" - Géotechnique, vol. 11, N° 2, June, pp. 95 a 113.
- 2 ARNOLD, R.N.; BYCROFT, G.N. e WARBURTON, G.B. (1955) - "Forced Vibrations of a Body on an Infinite Elastic Solid", Journal of Applied Mechanics-Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 22, n° 3, September, pp. 391 a 400.
- 3 AWOJOBI, A.O. (1972) - "Vertical Vibration of a Rigid Circular Foundation on Gibson Soil" - Géotechnique, vol. 22, n° 2, June, pp. 333 a 343.
- 4 AWOJOBI, A.O. (1973) - "Estimation of the Dynamic Surface Modulus of a Generalized Gibson Soil from the Rocking Frequency of Rectangular Foundations" - Géotechnique, vol. 23, n° 1, March, pp. 23 a 31.
- 5 BARKAN, D.D. (1936) - "Field Investigations of the Theory of Vibration of Massive Foundations Under Machines" - Proceedings of the First International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol.II, Harvard University, Cambridge, pp. 285 a 288.
- 6 BARKAN, D.D. (1962) - "Dynamics of Bases and Foundations" - McGraw-Hill Book Company, New York, 434 pp.
- 7 BEREDUGO, Y.O. e NOVAK, M. (1972) - "Coupled Horizontal and Rocking Vibration of Embedded Footings" - Canadian Geotechnical Journal, Vol. 9, n° 4, November, pp. 477 a 497.
- 8 BOWLES, JOSEPH E. (1968) - "Foundation Analysis and Design" - International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 659 pp.

- 9 BREBBIA, C.A. e CONNOR, J.J. (1973) - "Fundamentals of Finite Element Techniques for Structural Engineers" - Butterworth & Co. (Publishers) Ltd., 269 pp.
- 10 BREBBIA, C.A. e FERRANTE, A.J. (1975) - "The Finite Element Technique - An Introduction for Engineers" - Editora da UFRS, Porto Alegre, 410 pp.
- 11 BUZDUGAN, G. (1972) - "Dynamique des Fondations de Machines" - Editions Eyrolles, Paris, 438 pp.
- 12 COOK, ROBERT D. (1974) - "Concepts and Applications of Finite Element Analysis" - John Wiley & Sons, Inc., New York, 402 pp.
- 13 COSTA, ILO DIAS BORBA DA (1973) - "Estudo Elástico de Estaqueamentos" - Tese de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 53 pp.
- 14 CLOUGH, RAY W. (1975) - "Dynamics of Structures" - McGraw-Hill Book Company, New York, 634 pp.
- 15 CREDE, CHARLES E. (1972) - "Choque e Vibração nos Projetos de Engenharia" - Editora Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 159 pp.
- 16 DIAS, DONALDO DE SOUZA; LUCENA, ALFREDO JOSÉ PEREIRA DE; LIMA, FERNANDO LUIZ FARIA (1973) - "Programação FORTRAN para Estudantes de Ciências e Engenharia" - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 258 pp.
- 17 DIAZ, BENJAMIN ERNANI (1973) - "Determination of Forces, Displacements and Soil Reactions of a Group of Piles" - Proceedings of 8th. International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Moscow, pp. 83 a 88.
- 18 FENVES, STEVEN J. (1969) - "Métodos de Computación en Ingeniería Civil" - Editorial Limusa-Wiley S.A., México, 278 pp.
- 19 GERE, JAMES M. e WEAVER, WILLIAM, Jr. (1965) - "Matrix Algebra for Engineers" - D. van Nostrand Company, New York, 168 pp.

- 20 GERE, JAMES M. e WEAVER, WILLIAM, Jr. (1965) - "Análisis de Estructuras Reticulares" - Compañía Editorial Continental S.A., México, 535 pp.
- 21 GIBSON, R.E: (1967) - "Some Results Concerning Displacements and Stresses in a non-homogeneous elastic half-space"- Géotechnique, vol. 17, nº 1, March, pp. 58 a 67.
- 22 HARRIS, CYRIL M. e CREDE, CHARLES E. (1961) - "Shock and Vibration Handbook" - (3 volumes), McGraw-Hill Book Company, New York.
- 23 HARTOG, J.P. DEN (1972) - "Vibrações nos Sistemas Mecânicos" - Editora Edgard Blücher Ltda. e Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 366 pp.
- 24 HATTER, D.J. (1973) - "Matrix Computer Methods of Vibration Analysis" - Butterworth & Co. (Publishers) Ltd., London, 206 pp.
- 25 HELL, MAXIMILIAN EMIL (1972) - "Sistema de Programação FORTRAN IV G-H" - Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda., São Paulo, 233 pp.
- 26 HETÉNYI, M. (1946) - "Beams on Elastic Foundation" - The University of Michigan Press, Ann Arbor, 255 pp.
- 27 INÁCIO, ÁLVARO FIAES; MELO, CARLOS EMANUEL DE; WROBEL, LUIZ CARLOS (1976) - "Análise da Resposta Dinâmica de Estruturas" - Notas do Seminário apresentado à Cadeira Mecânica das Estruturas III, do 3º período letivo da COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 20 pp.
- 28 LEONARDS, G.A. (1962) - "Foundation Engineering" - International Student Edition, McGraw-Hill [Kogakusha] Ltd., 1136 pp.
- 29 LIPINSKI, JANUSZ (1972) - "Fundamente und Tragkonstruktionen für Maschinen" - Bauverlag GmbH Wiesbaden, Warszawa, 686 pp.
- 30 McNEILL, ROBERT L. (1969) - "Machine Foundations - The Sta-

- te-of-the-Art" - Proceedings of Speciality Session 2, International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, México, pp. 67 a 100.
- 31 NOVAK, MILOS (1974) - "Dynamic Stiffness and Damping of Piles" - Canadian Geotechnical Journal, Vol. 11, nº 2, June, pp. 574 a 598.
- 32 NOVAK, MILOS e GRIGG, RONALD F. (1976) - "Dynamic Experiments with Small Pile Foundations" - Canadian Geotechnical Journal, Vol. 13, nº 2, June, pp. 372 a 385.
- 33 PACITTI, TÉRCIO (1974) - "FORTRAN Monitor, Princípios" - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 377 pp.
- 34 PRZEMIENIECKI, J.S. (1968) - "Theory of Matrix Structural Analysis" - McGraw-Hill Company, New York, 468 pp.
- 35 RAUSCH, E. (1959) - "Maschinenfundamente und andere dynamisch Beanspruchte Baukonstruktionen" - VDI-Verlag GmbH., Düsseldorf, 857 pp.
- 36 RAVARA, ARTUR (1969) - "Dinâmica de Estruturas" - Curso 111 do Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, 182 pp.
- 37 RICHART, F.E. Jr.; HALL, J.R. Jr. e WOODS, R.D. (1970) - "Vibrations of Soils and Foundations" - Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 414 pp.
- 38 ROARK, RAYMOND J. (1965) - "Formulas for Stress and Strain" - International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha Ltd., Tokyo, 432 pp.
- 39 SALOMON, DÉLCIO VIEIRA (1974) - "Como Fazer uma Monografia - Elementos de Metodologia de Trabalho Científico" - Interlivros, Belo Horizonte, 301 pp.
- 40 SAUL, WILLIAM E. (1968) - "Static and Dynamic Analysis of Pile Foundations" - Proceedings of the American Society of Civil Engineers, ST 5, May, pp. 1077 a 1100.

- 41 SCHIEL, FREDERICO (1957) - "Estática de Estaqueamentos" - publicação nº 10 da Escola de Engenharia de São Carlos (USP), São Carlos, 143 pp.
- 42 SCHNEIDER, KARL (1962) - "Beitrag zur Berechnung der Schwingungen und Pfahlkräfte bei pfahlgegründeten Maschinenfundamenten", Der Bauingenieur 37, Heft 2, pp. 50 e 56.
- 43 SHENKMAN, S. e MCKEE, K.E. (1961) - "Bearing Capacity of Dynamically Loaded Footings" - Symposium on Soil Dynamics, ASTM Special Technical Publication nº 305 (Presented at the Sixty-Fouth Annual Meeting ASTM), Atlantic City, N.J., June, pp. 78 a 98.
- 44 SILVA, OCTAVIO BARBOSA DA (1974) - "Análise Matricial de Estacas Carregadas Transversalmente" - Anais do 1º Seminário Brasileiro do Método dos Elementos Finitos Aplicado à Mecânica dos Solos - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, pp. 319 a 346.
- 45 SKIPP, B.O. (1966) - "Vibration in Civil Engineering" - Proceedings of a Symposium Organized by the British National Section of the International Association for Earthquake Engineering. Held at Imperial College of Science and Technology, London, 302 pp.
- 46 SMITH, IAN M. (1970) - "A Finite Element Approach to Elastic Soil-Structure Interaction" - Canadian Geotechnical Journal, Vol. 7, Nº 2, May, pp. 95 a 105.
- 47 SRINIVASULU, P. e VAIDYANATHAN, C.V. (1976) - "Handbook of Machine Foundations" - Tata McGraw-Hill Publishing Company, LTD., New Delhi, 238 pp.
- 48 STAMATO, M.C. (sem data de publicação) - "Cálculo Elástico de Estaqueamentos" - Publicação Nº 70 da Escola de Engenharia de São Carlos (USP), São Carlos, 61 pp.
- 49 TERZAGHI, KARL (1943) - "Theoretical Soil Mechanics" - John Wiley & Sons, Inc., New York, 510 pp.
- 50 TERZAGHI, KARL (1955) - "Evaluation of Coefficients of Sub-

- grade Reaction" - *Géotechnique* 5, Nº 4, December, pp. 297 a 326.
- 51 TERZAGHI, KARL e PECK, RALPH B. (1967) - "Soil Mechanics in Engineering Practice" - John Wiley & Sons, Inc., New York, 729 pp.
- 52 THOMAS, GEORGE B., Jr. (1965) - "Cálculo" - Editora Ao Livro Técnico S.A. - Rio de Janeiro, 918 pp.
- 53 THOMSON, WILLIAM T. (1973) - "Vibration Theory and Applications" - George Allen & Unwin Ltd., London, 384 pp.
- 54 TIMOSHENKO, S.P. e GOODIER, J.N. (1970) - "Theory of Elasticity" - International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha Ltd., Tokyo, 567 pp.
- 55 TIMOSHENKO, S.P. e YOUNG, D.H. (1965) - "Theory of Structures" - International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 629 pp.
- 56 TSCHEBOTARIOFF, GREGORY P. e WARD, EDWARD R. (1948) - "The Resonance of Machine Foundations and the Soil. Coefficients which Affect it" - Proceedings of the 2nd. International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, vol. I, Rotterdam pp. 309 a 313.
- 57 WANG, CHU-KIA (1973) - "Computer Methods in Advanced Structural Analysis" - Intext Educational Publishers, New York, 401 pp.
- 58 WEAVER, WILLIAM, Jr. (1967) - "Computer Programs for Structural Analysis" - D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, pp.
- 59 WINTERKORN, HANS F. e FANG, HSAI-YANG (1975) - "Foundation Engineering Handbook" - Van Nostrand Reinhold Company, New York, 751 pp.
- 60 WOODWARD, RICHARD J., GARDNER, WILLIAM S., GREER, DAVID M., (1972) - "Drilled Pier Foundations" - McGraw-Hill Book Company, New York, 287 pp.

- 61 ZIENKIEWICZ, O.C. (1971) - "The Finite Element Method in En  
gineering Science" - McGraw-Hill Book Company, New York,  
521 pp.

## APÊNDICE I

## DEDUÇÃO DA MATRIZ DE MASSA CONSISTENTE DE UM ELEMENTO ENVOLVIDO POR UM MEIO ELÁSTICO

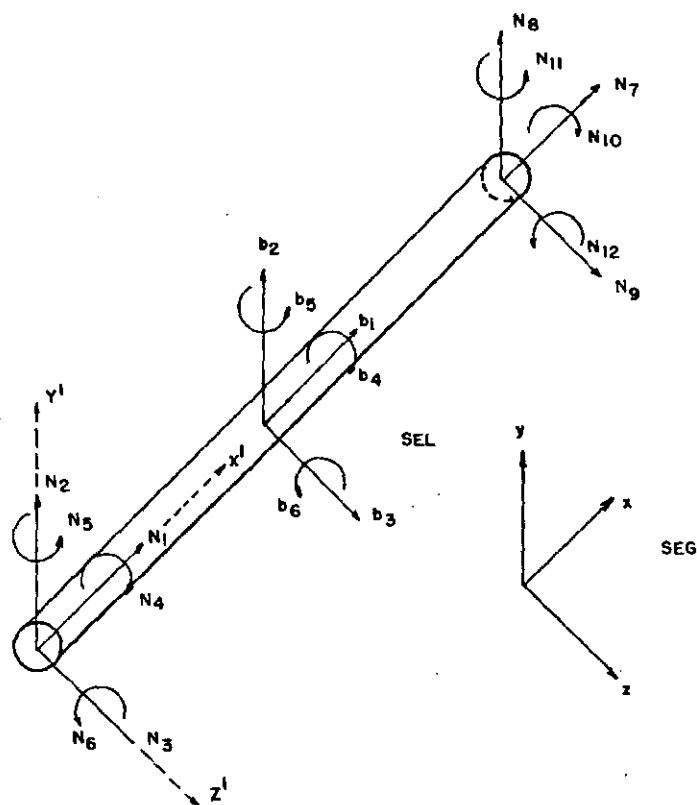


FIGURA AI.1 - ELEMENTO DE UMA ESTACA NO SISTEMA LOCAL DE COORDENADAS

1 - INTRODUÇÃO

Calcularemos aqui a matriz de massa equivalente de um elemento, obtido de uma discretização da estrutura, usando o SEL. Este procedimento é conveniente do ponto de vista computacional e é largamente utilizado nos inúmeros programas de computadores disponíveis para cálculo de esforços em estruturas.

A matriz de massa equivalente será calculada baseada na distribuição de deslocamentos estáticos, através da seguinte expressão:

APOIO CULTURAL GRUPO RIPASA

Papel Santex-XR 75 g/m<sup>2</sup>, especial para cópias xerográficas.

$$\underline{M} = \int_{vol} \rho \underline{a}^T \cdot \underline{a} dvol \quad (AI.1)$$

onde  $\underline{a}$  representa a matriz que relaciona os deslocamentos de um ponto qualquer da estrutura e os deslocamentos nodais (número finito de deslocamentos selecionados em alguns pontos arbitrários da estrutura) e  $\rho$  a densidade do material da estaca.

Considerando a Figura AI.1 teremos, por exemplo:

$$\underline{u} = \underline{a} \cdot \underline{U} \quad (AI.2)$$

sendo:

$$\underline{u} = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\} \quad (AI.3)$$

e

$$\underline{U} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}\} \quad (AI.4)$$

Desenvolvemos aqui o procedimento de determinação da matriz  $\underline{a}$  e, consequentemente, da matriz  $\underline{m}$ , por integração direta.

## 2 - RELAÇÃO ENTRE $b_1$ , $u_1$ e $u_7$

A equação diferencial correspondente será:

$$(E \cdot AX) \cdot \frac{d^2}{dx^2} (b_1) - KX \cdot (b_1) = 0 \quad (AI.5)$$

Dividindo todos os termos da equação AI.5 por  $E \cdot AX$  ficamos com:

$$\frac{d^2}{dx^2} (b_1) - \frac{KX}{E \cdot AX} \cdot (b_1) = 0 \quad (\text{AI.6})$$

Denominando  $\frac{KX}{E \cdot AX}$  de  $\alpha^2$  e substituindo na equação AI.6 teremos:

$$\frac{d^2}{dx^2} (b_1) - \alpha^2 (b_1) = 0 \quad (\text{AI.7})$$

Da Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, temos a solução geral da equação AI.7:

$$b_1 = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} \quad (\text{AI.8})$$

As condições de contorno do problema são:

$$b_1(0) = u_1 \quad (\text{AI.9})$$

$$b_1(L) = u_7 \quad (\text{AI.10})$$

Aplicando estas condições na equação AI.8, temos:

$$b_1(0) = u_1 = C_1 + C_2 \quad (\text{AI.11})$$

$$b_1(L) = u_7 = C_1 e^{\alpha L} + C_2 e^{-\alpha L} \quad (\text{AI.12})$$

A solução do sistema de equações lineares formado

pelas equações AI.11 e AI.12 será:

$$c_1 = \frac{u_7 - u_1 (\cos h\alpha L - \sin h\alpha L)}{2 \sin h\alpha L} \quad (\text{AI.13})$$

$$c_2 = \frac{u_1 (\cos h\alpha L + \sin h\alpha L) - u_7}{2 \sin h\alpha L} \quad (\text{AI.14})$$

Substituindo as equações AI.13 e AI.14 em AI.8 e fazendo algumas simplificações teremos:

$$b_1 = \frac{1}{\sin h\alpha L} \left[ u_1 \sin h\alpha(L - x) + u_7 \sin h\alpha x \right] \quad (\text{AI.15})$$

### 3 - RELAÇÃO ENTRE $b_4$ , $u_4$ e $u_{10}$

A equação diferencial correspondente será:

$$G \cdot IX \frac{d^2}{dx^2} (b_4) - (KMX) \cdot (b_4) = 0 \quad (\text{AI.16})$$

Dividindo todos os termos da equação AI.16 por  $G \cdot IX$  ficamos com:

$$\frac{d^2}{dx^2} (b_4) - \frac{KMX}{G \cdot IX} b_4 = 0 \quad (\text{AI.17})$$

Denominando  $\frac{KMX}{G \cdot IX}$  de  $\beta^2$  e substituindo na equação AI.17, teremos:

$$\frac{d^2}{dx^2} (b_4) - \beta^2 b_4 = 0 \quad (\text{AI.18})$$

A solução da equação AI.18 é análoga à solução da equação AI.7 e, portanto, aqui omitida.

dinâmica de fundações sobre estacas, foi um exaustivo trabalho manual, porém necessário para minimizar os tempos de processamento em computadores digitais. O programa de computador, usando esta matriz, ficou bastante atrativo pela precisão dos resultados e pelo baixo custo na sua aplicação.

As inversões e integrações realizadas para a determinação da matriz de massa consistente para um elemento envolvido por um meio elástico, em sua forma explícita, foram submetidas a uma comparação com análises numéricas, em número suficiente a se obter absoluta confiança nas equações apresentadas. O texto também foi exaustivamente revisto. Portanto, pesquisadores e projetistas de Fundações de Máquinas e Estruturas Marítimas (Estruturas "off-shore") poderão empregar a matriz de massa equivalente para um elemento envolvido por um meio elástico "ipsis litteris".

#### 7.2 - SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

A avaliação experimental de parâmetros elásticos dinâmicos, efeitos do recalque dinâmico residual, propagação de ondas elásticas no solo induzidas por cargas dinâmicas, fundações de turbinas, fundações de geradores, fundações de máquinas que produzem impacto são temas que o crescimento industrial do nosso país exige respostas precisas.

## BIBLIOGRAFIA

- 1 ALPAN, ISAAC (1961) - "Machine Foundations and Soil Resonance" - *Géotechnique*, vol. 11, Nº 2, June, pp. 95 a 113.
- 2 ARNOLD, R.N.; BYCROFT, G.N. e WARBURTON, G.B. (1955) - "Forced Vibrations of a Body on an Infinite Elastic Solid", *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, Vol. 22, nº 3, September, pp. 391 a 400.
- 3 AWOJOBI, A.O. (1972) - "Vertical Vibration of a Rigid Circular Foundation on Gibson Soil" - *Géotechnique*, vol. 22, nº 2, June, pp. 333 a 343.
- 4 AWOJOBI, A.O. (1973) - "Estimation of the Dynamic Surface Modulus of a Generalized Gibson Soil from the Rocking Frequency of Rectangular Foundations" - *Géotechnique*, vol. 23, nº 1, March, pp. 23 a 31.
- 5 BARKAN, D.D. (1936) - "Field Investigations of the Theory of Vibration of Massive Foundations Under Machines" - *Proceedings of the First International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Vol.II, Harvard University, Cambridge, pp. 285 a 288.
- 6 BARKAN, D.D. (1962) - "Dynamics of Bases and Foundations" - McGraw-Hill Book Company, New York, 434 pp.
- 7 BEREDUGO, Y.O. e NOVAK, M. (1972) - "Coupled Horizontal and Rocking Vibration of Embedded Footings" - *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 9, nº 4, November, pp. 477 a 497.
- 8 BOWLES, JOSEPH E. (1968) - "Foundation Analysis and Design" - International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 659 pp.

- 9 BREBBIA, C.A. e CONNOR, J.J. (1973) - "Fundamentals of Finite Element Techniques for Structural Engineers" - Butterworth & Co, (Publishers) Ltd., 269 pp.
- 10 BREBBIA, C.A. e FERRANTE, A.J. (1975) - "The Finite Element Technique - An Introduction for Engineers" - Editora da UFRS, Porto Alegre, 410 pp.
- 11 BUZDUGAN, G. (1972) - "Dynamique des Fondations de Machines" - Éditions Eyrolles, Paris, 438 pp.
- 12 COOK, ROBERT D. (1974) - "Concepts and Applications of Finite Element Analysis" - John Wiley & Sons, Inc., New York, 402 pp.
- 13 COSTA, ILO DIAS BORBA DA (1973) - "Estudo Elástico de Estaqueamentos" - Tese de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 53 pp.
- 14 CLOUGH, RAY W. (1975) - "Dynamics of Structures" - McGraw-Hill Book Company, New York, 634 pp.
- 15 CREDE, CHARLES E. (1972) - "Choque e Vibração nos Projetos de Engenharia" - Editora Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 159 pp.
- 16 DIAS, DONALDO DE SOUZA; LUCENA, ALFREDO JOSÉ PEREIRA DE; LIMA, FERNANDO LUIZ FARIA (1973) - "Programação FORTRAN para Estudantes de Ciências e Engenharia" - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 258 pp.
- 17 DIAZ, BENJAMIN ERNANI (1973) - "Determination of Forces, Displacements and Soil Reactions of a Group of Piles" - Proceedings of 8th. International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Moscow, pp. 83 a 88.
- 18 FENVES, STEVEN J. (1969) - "Métodos de Computación en Ingenieria Civil" - Editorial Limusa-Wiley S.A., México, 278 pp.
- 19 GERE, JAMES M. e WEAVER, WILLIAM, Jr. (1965) - "Matrix Algebra for Engineers" - D. van Nostrand Company, New York, 168 pp.

- 20 GERE, JAMES M. e WEAVER, WILLIAM, Jr. (1965) - "Análisis de Estructuras Reticulares" - Compañía Editorial Continental S.A., México, 535 pp.
- 21 GIBSON, R.E. (1967) - "Some Results Concerning Displacements and Stresses in a non-homogeneous elastic half-space" - Géotechnique, vol. 17, nº 1, March, pp. 58 a 67.
- 22 HARRIS, CYRIL M. e CREDE, CHARLES E. (1961) - "Shock and Vibration Handbook" - (3 volumes), McGraw-Hill Book Company, New York.
- 23 HARTOG, J.P. DEN (1972) - "Vibrações nos Sistemas Mecânicos" - Editora Edgard Blücher Ltda. e Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 366 pp.
- 24 HATTER, D.J. (1973) - "Matrix Computer Methods of Vibration Analysis" - Butterworth & Co. (Publishers) Ltd., London, 206 pp.
- 25 HELL, MAXIMILIAN EMIL (1972) - "Sistema de Programação FORTRAN IV G-H" - Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda., São Paulo, 233 pp.
- 26 HETÉNYI, M. (1946) - "Beams on Elastic Foundation" - The University of Michigan Press, Ann Arbor, 255 pp.
- 27 INÁCIO, ÁLVARO FIÄES; MELO, CARLOS EMANUEL DE; WROBEL, LUIZ CARLOS (1976) - "Análise da Resposta Dinâmica de Estruturas" - Notas do Seminário apresentado à Cadeira Mecânica das Estruturas III, do 3º período letivo da COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 20 pp.
- 28 LEONARDS, G.A. (1962) - "Foundation Engineering" - International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha Ltd., 1136 pp.
- 29 LIPINSKI, JANUSZ (1972) - "Fundamente und Tragkonstruktionen für Maschinen" - Bauverlag GmbH Wiesbaden, Warszawa, 686 pp.
- 30 McNEILL, ROBERT L. (1969) - "Machine Foundations - The Sta-

- te-of-the-Art" - Proceedings of Speciality Session 2, International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, México, pp. 67 a 100.
- 31 NOVAK, MILOS (1974) - "Dynamic Stiffness and Damping of Piles" - Canadian Geotechnical Journal, Vol. 11, nº 2, June, pp. 574 a 598.
- 32 NOVAK, MILOS e GRIGG, RONALD F. (1976) - "Dynamic Experiments with Small Pile Foundations" - Canadian Geotechnical Journal, Vol. 13, nº 2, June, pp. 372 a 385.
- 33 PACITTI, TÉRCIO (1974) - "FORTRAN Monitor, Princípios" - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 377 pp.
- 34 PRZEMIENIECKI, J.S. (1968) - "Theory of Matrix Structural Analysis" - McGraw-Hill Company, New York, 468 pp.
- 35 RAUSCH, E. (1959) - "Maschinenfundamente und andere dynamisch Beanspruchte Baukonstruktionen" - VDVS-Verlag GmbH, Düsseldorf, 857 pp.
- 36 RAVARA, ARTUR (1969) - "Dinâmica de Estruturas" - Curso 111 do Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, 182 pp.
- 37 RICHART, F.E. Jr.; HALL, J.R. Jr. e WOODS, R.D. (1970) - "Vibrations of Soils and Foundations" - Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 414 pp.
- 38 ROARK, RAYMOND J. (1965) - "Formulas for Stress and Strain" - International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha Ltd., Tokyo, 432 pp.
- 39 SALOMON, DELCIO VIEIRA (1974) - "Como Fazer uma Monografia - Elementos de Metodologia de Trabalho Científico" - Interlivros, Belo Horizonte, 301 pp.
- 40 SAUL, WILLIAM E. (1968) - "Static and Dynamic Analysis of Pile Foundations" - Proceedings of the American Society of Civil Engineers, ST 5, May, pp. 1077 a 1100.

- 41 SCHIEL, FREDERICO (1957) - "Estática de Estaqueamentos" - publicação nº 10 da Escola de Engenharia de São Carlos (USP), São Carlos, 143 pp.
- 42 SCHNEIDER, KARL (1962) - "Beitrag zur Berechnung der Schwingungen und Pfahlkräfte bei pfahlgegründeten Maschinenfundamenten", Der Bauingenieur 37, Heft 2, pp. 50 e 56.
- 43 SHENKMAN, S. e MCKEE, K.E. (1961) - "Bearing Capacity of Dynamically Loaded Footings" - Symposium on Soil Dynamics, ASTM Special Technical Publication nº 305 (Presented at the Sixty-Fouth Annual Meeting ASTM), Atlantic City, N.J., June, pp. 78 a 98.
- 44 SILVA, OCTAVIO BARBOSA DA (1974) - "Análise Matricial de Estacas Carregadas Transversalmente" - Anais do 1º Seminário Brasileiro do Método dos Elementos Finitos Aplicado à Mecânica dos Solos - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, pp. 319 a 346.
- 45 SKIPP, B.O. (1966) - "Vibration in Civil Engineering" - Proceedings of a Symposium Organized by the British National Section of the International Association for Earthquake Engineering. Held at Imperial College of Science and Technology, London, 302 pp.
- 46 SMITH, IAN M. (1970) - "A Finite Element Approach to Elastic Soil-Structure Interaction" - Canadian Geotechnical Journal, Vol. 7, Nº 2, May, pp. 95 a 105.
- 47 SRINIVASULU, P. e VAIDYANATHAN, C.V. (1976) - "Handbook of Machine Foundations" - Tata McGraw-Hill Publishing Company, LTD., New Delhi, 238 pp.
- 48 STAMATO, M.C. (sem data de publicação) - "Cálculo Elástico de Estaqueamentos" - Publicação Nº 70 da Escola de Engenharia de São Carlos (USP), São Carlos, 61 pp.
- 49 TERZAGHI, KARL (1943) - "Theoretical Soil Mechanics" - John Wiley & Sons, Inc., New York, 510 pp.
- 50 TERZAGHI, KARL (1955) - "Evaluation of Coefficients of Sub-

- grade Reaction" - *Geotechnique* 5, Nº 4, December, pp. 297 a 326.
- 51 TERZAGHI, KARL e PECK, RALPH B. (1967) - "Soil Mechanics in Engineering Practice" - John Wiley & Sons, Inc., New York, 729 pp.
- 52 THOMAS, GEORGE B., Jr. (1965) - "Cálculo" - Editora Ao Livro Técnico S.A. - Rio de Janeiro, 918 pp.
- 53 THOMSON, WILLIAM T. (1973) - "Vibration Theory and Applications" - George Allen & Unwin Ltd., London, 384 pp.
- 54 TIMOSHENKO, S.P. e GOODIER, J.N. (1970) - "Theory of Elasticity" - International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha Ltd., Tokyo, 567 pp.
- 55 TIMOSHENKO, S.P. e YOUNG, D.H. (1965) - "Theory of Structures" - International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 629 pp.
- 56 TSCHEBOTARIOFF, GREGORY P. e WARD, EDWARD R. (1948) - "The Resonance of Machine Foundations and the Soil Coefficients which Affect it" - Proceedings of the 2nd. International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, vol. I, Rotterdam pp. 309 a 313.
- 57 WANG, CHU-KIA (1973) - "Computer Methods in Advanced Structural Analysis" - Intext Educational Publishers, New York, 401 pp.
- 58 WEAVER, WILLIAM, Jr. (1967) - "Computer Programs for Structural Analysis" - D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, pp.
- 59 WINTERKORN, HANS F. e FANG, HSAI-YANG (1975) - "Foundation Engineering Handbook" - Van Nostrand Reinhold Company, New York, 751 pp.
- 60 WOODWARD, RICHARD J., GARDNER, WILLIAM S., GREER, DAVID M., (1972) - "Drilled Pier Foundations" - McGraw-Hill Book Company, New York, 287 pp.

- 61 ZIENKIEWICZ, O.C. (1971) - "The Finite Element Method in Engineering Science" - McGraw-Hill Book Company, New York, 521 pp.

## APÊNDICE I

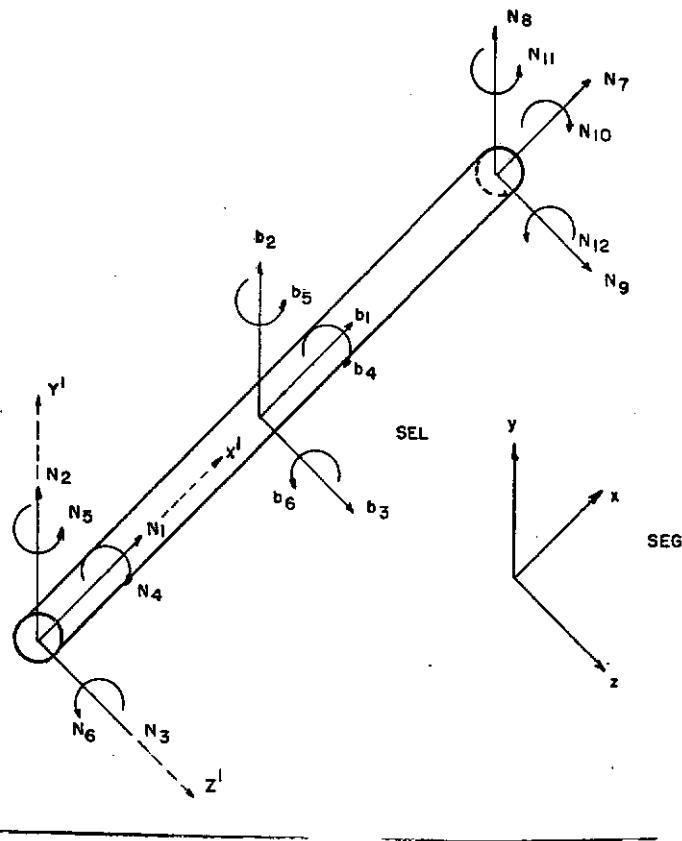
DEDUÇÃO DA MATRIZ DE MASSA CONSISTENTE DE UM  
ELEMENTO ENVOLVIDO POR UM MEIO ELÁSTICO

FIGURA AI.1 - ELEMENTO DE UMA ESTACA NO SISTEMA LOCAL DE COORDENADAS

1 - INTRODUÇÃO

Calcularemos aqui a matriz de massa equivalente de um elemento, obtido de uma discretização da estrutura, usando o SEL. Este procedimento é conveniente do ponto de vista computacional e é largamente utilizado nos inúmeros programas de computadores disponíveis para cálculo de esforços em estruturas.

A matriz de massa equivalente será calculada baseada na distribuição de deslocamentos estáticos, através da seguinte expressão:

$$\underline{M} = \int_{\text{vol}} \rho \underline{a}^T \cdot \underline{a} d\text{vol} \quad (\text{AI.1})$$

onde  $\underline{a}$  representa a matriz que relaciona os deslocamentos de um ponto qualquer da estrutura e os deslocamentos nodais (número finito de deslocamentos selecionados em alguns pontos arbitrários da estrutura) e  $\rho$  a densidade do material da estaca.

Considerando a Figura AI.1 teremos, por exemplo:

$$\underline{u} = \underline{a} \cdot \underline{U} \quad (\text{AI.2})$$

sendo:

$$\underline{u} = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\} \quad (\text{AI.3})$$

e

$$\underline{U} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}\} \quad (\text{AI.4})$$

Desenvolvemos aqui o procedimento de determinação da matriz  $\underline{a}$  e, consequentemente, da matriz  $\underline{m}$ , por integração direta.

## 2 - RELAÇÃO ENTRE $b_1$ , $u_1$ e $u_7$

A equação diferencial correspondente será:

$$(E \cdot A X) \cdot \frac{d^2}{dx^2} (b_1) - K X \cdot (b_1) = 0 \quad (\text{AI.5})$$

Dividindo todos os termos da equação AI.5, por  $E \cdot AX$  ficamos com:

$$\frac{d^2}{dx^2} (b_1) - \frac{KX}{E \cdot AX} \cdot (b_1) = 0 \quad (\text{AI.6})$$

Denominando  $\frac{KX}{E \cdot AX}$  de  $\alpha^2$  e substituindo na equação AI.6 teremos:

$$\frac{d^2}{dx^2} (b_1) - \alpha^2 (b_1) = 0 \quad (\text{AI.7})$$

Da Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, temos a solução geral da equação AI.7:

$$b_1 = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} \quad (\text{AI.8})$$

As condições de contorno do problema são:

$$b_1(0) = u_1 \quad (\text{AI.9})$$

$$b_1(L) = u_7 \quad (\text{AI.10})$$

Aplicando estas condições na equação AI.8, temos:

$$b_1(0) = u_1 = C_1 + C_2 \quad (\text{AI.11})$$

$$b_1(L) = u_7 = C_1 e^{\alpha L} + C_2 e^{-\alpha L} \quad (\text{AI.12})$$

A solução do sistema de equações lineares formado

pelas equações AI.11 e AI.12 será:

$$C_1 = \frac{u_7 - u_1 (\cos h\alpha L - \sin h\alpha L)}{2 \sin h\alpha L} \quad (\text{AI.13})$$

$$C_2 = \frac{u_1 (\cos h\alpha L + \sin h\alpha L) - u_7}{2 \sin h\alpha L} \quad (\text{AI.14})$$

Substituindo as equações AI.13 e AI.14 em AI.8 e fazendo algumas simplificações teremos:

$$b_1 = \frac{1}{\sin h\alpha L} [u_1 \sin h\alpha(L - x) + u_7 \sin h\alpha x] \quad (\text{AI.15})$$

### 3 :- RELAÇÃO ENTRE $b_4$ , $u_4$ e $u_{10}$

A equação diferencial correspondente será:

$$G \cdot IX \frac{d^2}{dx^2} (b_4) - (KMX) \cdot (b_4) = 0 \quad (\text{AI.16})$$

Dividindo todos os termos da equação AI.16 por  $G \cdot IX$  ficamos com:

$$\frac{d^2}{dx^2} (b_4) - \frac{KMX}{G \cdot IX} b_4 = 0 \quad (\text{AI.17})$$

Denominando  $\frac{KMX}{G \cdot IX}$  de  $\beta^2$  e substituindo na equação AI.17, teremos:

$$\frac{d^2}{dx^2} (b_4) - \beta^2 b_4 = 0 \quad (\text{AI.18})$$

A solução da equação AI.18 é análoga à solução da equação AI.7 e, portanto, aqui omitida.

Com as condições de contorno:

$$b_4(0) = u_4 \quad (\text{AI.19})$$

$$b_4(L) = u_{10} \quad (\text{AI.20})$$

temos a solução da equação AI.18

$$b_4 = \frac{1}{\sin h\beta L} \left[ u_4 \sin h\beta(L - x) + u_{10} \sin h\beta x \right] \quad (\text{AI.21})$$

#### 4 - RELAÇÃO ENTRE $b_2, b_6, u_2, u_6, u_8$ e $u_{12}$

A equação diferencial correspondente será:

$$(E \cdot IZ) \frac{d^4}{dx^4} (b_2) + KY \cdot b_2 = 0 \quad (\text{AI.22})$$

Dividindo todos os termos da equação AI.22 por  $E \cdot IZ$  ficamos com:

$$\frac{d^4}{dx^4} (b_2) + \frac{KY}{E \cdot IZ} b_2 = 0 \quad (\text{AI.23})$$

Denominando  $\frac{KY}{E \cdot IZ}$  de  $\gamma^4$  e substituindo na equação AI.23 teremos:

$$\frac{d^4}{dx^4} (b_2) + \gamma^4 b_2 = 0 \quad (\text{AI.24})$$

Da Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, temos a solução geral da equação AI.24:

$$b_2 = (C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x}) \cos \gamma x + (C_3 e^{\gamma x} + C_4 e^{-\gamma x}) \sin \gamma x \quad (\text{AI.25})$$

As condições de contorno para este problema são:

$$b_2(0) = u_2 \quad (\text{AI.26})$$

$$b_6(0) = u_6 \quad (\text{AI.27})$$

$$b_2(L) = u_8 \quad (\text{AI.28})$$

$$b_6(L) = u_{12} \quad (\text{AI.29})$$

Aplicando as condições de contorno, dadas pelas equações AI.26 e AI.28, na equação AI.25, teremos:

$$b_2(0) = u_2 = C_1 + C_2 \quad (\text{AI.30})$$

$$b_2(L) = u_8 = (C_1 e^{\gamma L} + C_2 e^{-\gamma L}) \cos \gamma L + (C_3 e^{\gamma L} + C_4 e^{-\gamma L}) \sin \gamma L \quad (\text{AI.31})$$

Derivando a equação AI.25 ficamos com:

$$\begin{aligned} b_6 &= C_1 \gamma e^{\gamma x} (\cos \gamma x - \sin \gamma x) - C_2 \gamma e^{-\gamma x} (\cos \gamma x + \sin \gamma x) + \\ &+ C_3 \gamma e^{\gamma x} (\cos \gamma x + \sin \gamma x) + C_4 \gamma e^{-\gamma x} (\cos \gamma x - \sin \gamma x) \end{aligned} \quad (\text{AI.32})$$

Aplicando as condições de contorno, dadas pelas equações AI.27 e AI.29, na equação AI.32, teremos:

$$b_6(0) = u_6 = \gamma(C_1 - C_2 + C_3 + C_4) \quad (\text{AI.33})$$

$$\begin{aligned}
 b_6(L) = u_{12} = C_1 \gamma e^{\gamma L} (\cos \gamma L - \sin \gamma L) - C_2 \gamma e^{-\gamma L} (\cos \gamma L + \sin \gamma L) + \\
 + C_3 \gamma e^{\gamma L} (\cos \gamma L + \sin \gamma L) + C_4 e^{-\gamma L} \gamma (\cos \gamma L - \sin \gamma L)
 \end{aligned} \quad (\text{AI.34})$$

As equações AI.25 e AI.32 em forma matricial podem ser escritas:

$$\begin{Bmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{AI.35})$$

onde:

$$n_{11} = e^{\gamma x} \cos \gamma x \quad (\text{AI.36})$$

$$n_{12} = e^{-\gamma x} \cos \gamma x \quad (\text{AI.37})$$

$$n_{13} = e^{\gamma x} \sin \gamma x \quad (\text{AI.38})$$

$$n_{14} = e^{-\gamma x} \sin \gamma x \quad (\text{AI.39})$$

$$n_{21} = \gamma e^{\gamma x} (\cos \gamma x - \sin \gamma x) \quad (\text{AI.40})$$

$$n_{22} = -\gamma e^{\gamma x} (\cos \gamma x + \sin \gamma x) \quad (\text{AI.41})$$

$$n_{23} = \gamma e^{\gamma x} (\cos \gamma x + \sin \gamma x) \quad (\text{AI.42})$$

$$n_{24} = \gamma e^{-\gamma x} (\cos \gamma x - \sin \gamma x) \quad (\text{AI.43})$$

As equações AI.30, AI.31, AI.33 e AI.34, em forma matricial podem ser escritas:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_{12} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccc} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{array} \right\} \quad (\text{AI.44})$$

onde:

$$m_{11} = 1 \quad (\text{AI.45})$$

$$m_{12} = 1 \quad (\text{AI.46})$$

$$m_{13} = 0 \quad (\text{AI.47})$$

$$m_{14} = 0 \quad (\text{AI.48})$$

$$m_{21} = \gamma \quad (\text{AI.49})$$

$$m_{22} = -\gamma \quad (\text{AI.50})$$

$$m_{23} = \gamma \quad (\text{AI.51})$$

$$m_{24} = \gamma \quad (\text{AI.52})$$

$$m_{31} = e^{\gamma L} \cos \gamma L \quad (\text{AI.53})$$

$$m_{32} = e^{-\gamma L} \cos \gamma L \quad (\text{AI.54})$$

$$m_{33} = e^{\gamma L} \sin \gamma L \quad (\text{AI.55})$$

$$m_{34} = e^{-\gamma L} \sin \gamma L \quad (\text{AI.56})$$

$$m_{41} = \gamma e^{\gamma L} (\cos \gamma L - \sin \gamma L) \quad (\text{AI.57})$$

$$m_{42} = -\gamma e^{-\gamma L} (\cos \gamma L + \sin \gamma L) \quad (\text{AI.58})$$

$$m_{43} = \gamma e^{\gamma L} (\cos \gamma L + \sin \gamma L) \quad (\text{AI.59})$$

$$m_{44} = \gamma e^{-\gamma L} (\cos \gamma L - \sin \gamma L) \quad (\text{AI.60})$$

A equação matricial AI.44 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{AI.61})$$

Substituindo a equação AI.61 na equação AI.35 temos:

$$\begin{Bmatrix} b_2 \\ b_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{AI.62})$$

Chamando de  $\underline{P}$  a inversa da matriz  $\underline{M}$ , podemos

reescrever a equação matricial AI.62 da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} b_2 \\ b_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{AI.63})$$

Os termos da matriz  $\underline{\underline{P}}$  são:

$$p_{11} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \gamma L + \operatorname{sen} 2\gamma L + (1 - e^{-2\gamma L})}{4 (\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.64})$$

$$p_{12} = \frac{\operatorname{sen}^2 \gamma L}{2\gamma (\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.65})$$

$$p_{13} = \frac{-(\operatorname{sen} \gamma L \operatorname{cos} h\gamma L + \operatorname{cos} \gamma L \operatorname{sen} h\gamma L)}{2 (\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.66})$$

$$p_{14} = \frac{\operatorname{sen} \gamma L \operatorname{sen} h\gamma L}{2\gamma (\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.67})$$

$$p_{21} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen} 2\gamma L + (1 - e^{2\gamma L})}{4 (\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.68})$$

$$p_{22} = \frac{-\operatorname{sen}^2 \gamma L}{2\gamma (\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.69})$$

$$p_{23} = \frac{\operatorname{sen} \gamma L \operatorname{cos} h\gamma L + \operatorname{cos} \gamma L \operatorname{sen} h\gamma L}{2 (\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.70})$$

$$p_{24} = \frac{-\operatorname{sen} \gamma L \operatorname{sen} h\gamma L}{2\gamma (\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.71})$$

$$p_{31} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen} 2\gamma L - (1 - e^{-2\gamma L})}{4 (\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.72})$$

$$p_{32} = \frac{-\operatorname{sen} 2\gamma L + (1 - e^{-2\gamma L})}{4\gamma (\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.73})$$

$$p_{33} = \frac{e^{-\gamma L} \operatorname{sen} \gamma L + \operatorname{sen} \gamma L \operatorname{sen} h\gamma L - \cos \gamma L \operatorname{cos} h\gamma L}{2(\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.74})$$

$$p_{34} = \frac{e^{-\gamma L} \operatorname{sen} \gamma L - \cos \gamma L \operatorname{sen} h\gamma L}{2\gamma (\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.75})$$

$$p_{41} = \frac{-2 \operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen} 2\gamma L + (1 - e^{2\gamma L})}{4 (\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.76})$$

$$p_{42} = \frac{\operatorname{sen} 2\gamma L + (1 - e^{2\gamma L})}{2\gamma (\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.77})$$

$$p_{43} = \frac{e^{\gamma L} \operatorname{sen} \gamma L + \operatorname{sen} \gamma L \operatorname{sen} h\gamma L + \cos \gamma L \operatorname{cos} h\gamma L}{2 (\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.78})$$

$$p_{44} = \frac{-e^{\gamma L} \operatorname{sen} \gamma L + \cos \gamma L \operatorname{sen} h\gamma L}{2\gamma (\operatorname{sen}^2 \gamma L - \operatorname{sen}^2 h\gamma L)} \quad (\text{AI.79})$$

Denominaremos de  $Q$  o produto da matriz  $N$  pela matriz  $P$ .

### 5 - RELAÇÃO ENTRE $b_3$ , $b_5$ , $u_5$ , $u_9$ e $u_{11}$

A equação diferencial correspondente será:

$$E \cdot IY \frac{d^4}{dx^4} (b_3) + KZ \cdot b_3 = 0 \quad (\text{AI.80})$$

Dividindo todos os termos da equação AI.80 por  $E \cdot IY$  ficamos com:

$$\frac{d^4}{dx^4} (b_3) + \frac{KZ}{E \cdot IZ} b_3 = 0 \quad (\text{AI.81})$$

Denominando  $\frac{KZ}{E \cdot IY}$  de  $\psi^4$  e substituindo na equação AI.84 teremos:

$$\frac{d^4}{dx^4} (b_3) + \psi^4 b_3 = 0 \quad (\text{AI.82})$$

A solução da equação AI.82 segue a mesma metodologia utilizada na solução da equação AI.24 e será aqui omitida.

A equação AI.63 será escrita, para este caso, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} b_3 \\ b_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n'_{11} & n'_{12} & n'_{13} & n'_{14} \\ n'_{21} & n'_{22} & n'_{23} & n'_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p'_{11} & p'_{12} & p'_{13} & p'_{14} \\ p'_{21} & p'_{22} & p'_{23} & p'_{24} \\ p'_{31} & p'_{32} & p'_{33} & p'_{34} \\ p'_{41} & p'_{42} & p'_{43} & p'_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_5 \\ u_9 \\ u_{11} \end{Bmatrix} \quad (\text{AI.83})$$

Denominaremos de  $Q'$  o produto da matriz  $N'$  pela matriz  $P'$ .

## 6 - MONTAGEM DA MATRIZ $a$ .

Alocando convenientemente os termos das equações AI.15, AI.21, AI.63, e AI.83, temos a matriz:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a_{11}$	0	0	0	0	0	$a_{17}$	0	0	0	0	0
0	$Q_{11}$	0	0	0	$Q_{12}$	0	$Q_{13}$	0	0	0	$Q_{14}$
0	0	$Q'_{11}$	0	$Q'_{12}$	0	0	0	$Q'_{13}$	0	$Q'_{14}$	0
0	0	0	$a_{44}$	0	0	0	0	0	$a_{410}$	0	0
0	0	$Q'_{21}$	0	$Q'_{22}$	0	0	0	$Q'_{23}$	0	$Q'_{24}$	0
0	$Q_{21}$	0	0	0	$Q_{22}$	0	$Q_{23}$	0	0	0	$Q_{24}$

(AI.84)

onde:

$$a_{11} = \frac{\sin \hbar \alpha (L - x)}{\sin \hbar \alpha L} \quad (\text{AI.85})$$

$$a_{17} = \frac{\sin \hbar \alpha x}{\sin \hbar \alpha L} \quad (\text{AI.86})$$

$$Q_{11} = n_{11} p_{11} + n_{12} p_{21} + n_{13} p_{31} + n_{14} p_{41} \quad (\text{AI.87})$$

$$Q_{12} = n_{11} p_{12} + n_{12} p_{22} + n_{13} p_{32} + n_{14} p_{42} \quad (\text{AI.88})$$

$$Q_{13} = n_{11} p_{13} + n_{12} p_{23} + n_{13} p_{33} + n_{14} p_{43} \quad (\text{AI.89})$$

$$Q_{14} = n_{11} p_{14} + n_{12} p_{24} + n_{13} p_{34} + n_{14} p_{44} \quad (\text{AI.90})$$

$$Q'_{11} = n'_{11} p'_{11} + n'_{12} p'_{21} + n'_{13} p'_{31} + n'_{14} p'_{41} \quad (\text{AI.91})$$

$$Q'_{12} = n'_{11} p'_{12} + n'_{12} p'_{22} + n'_{13} p'_{32} + n'_{14} p'_{42} \quad (\text{AI.92})$$

$$Q'_{13} = n'_{11} p'_{13} + n'_{12} p'_{23} + n'_{13} p'_{33} + n'_{14} p'_{43} \quad (\text{AI.93})$$

$$Q'_{14} = n'_{11} p'_{14} + n'_{12} p'_{24} + n'_{13} p'_{34} + n'_{14} p'_{44} \quad (\text{AI.94})$$

$$a_{44} = \frac{\sin h\beta(L - x)}{\sin h L} \quad (\text{AI.95})$$

$$a_{410} = \frac{\sin h\beta x}{\sin h\beta L} \quad (\text{AI.96})$$

$$Q'_{21} = n'_{21} p'_{11} + n'_{22} p'_{21} + n'_{23} p'_{31} + n'_{24} p'_{41} \quad (\text{AI.97})$$

$$Q'_{22} = n'_{21} p'_{12} + n'_{22} p'_{22} + n'_{23} p'_{32} + n'_{24} p'_{42} \quad (\text{AI.98})$$

$$Q'_{23} = n'_{21} p'_{13} + n'_{22} p'_{23} + n'_{23} p'_{33} + n'_{24} p'_{43} \quad (\text{AI.99})$$

$$Q'_{24} = n'_{21} p'_{14} + n'_{22} p'_{24} + n'_{23} p'_{34} + n'_{24} p'_{44} \quad (\text{AI.100})$$

$$Q_{21} = n_{21} p_{11} + n_{22} p_{21} + n_{23} p_{31} + n_{24} p_{41} \quad (\text{AI.101})$$

$$Q_{22} = n_{21} p_{12} + n_{22} p_{22} + n_{23} p_{32} + n_{24} p_{42} \quad (\text{AI.102})$$

$$Q_{23} = n_{21} p_{13} + n_{22} p_{23} + n_{23} p_{33} + n_{24} p_{43} \quad (\text{AI.103})$$

$$Q_{24} = n_{21} p_{14} + n_{22} p_{24} + n_{23} p_{34} + n_{24} p_{44} \quad (\text{AI.104})$$

7 - MONTAGEM DA MATRIZ DE MASSA CONSISTENTE PARA UM ELEMENTO ENVOLVIDO POR UM MEIO ELÁSTICO

Os termos da matriz de massa consistente, para um elemento envolvido por um meio elástico, foram obtidos com o auxílio das equações AI.1 e AI.84.

As operações realizadas foram:

$$\text{MELEM (1, 1)} = \rho \cdot A \int_0^L a_{11}^2 dx \quad (\text{AI.105})$$

$$\text{MELEM (2, 2)} = \rho \cdot AX \int_0^L (Q_{11}^2 + Q_{21}^2) dx \quad (\text{AI.106})$$

$$\text{MELEM (3, 3)} = \rho \cdot AX \int_0^L (Q_{11}^{12} + Q_{21}^{12}) dx \quad (\text{AI.107})$$

$$\text{MELEM (4, 4)} = \rho \cdot AX \int_0^L a_{44}^2 dx \quad (\text{AI.108})$$

$$\text{MELEM (5, 3)} = \rho \cdot AX \int_0^L (Q_{12}' Q_{11}' + Q_{22}' Q_{21}') dx \quad (\text{AI.109})$$

$$\text{MELEM (5, 5)} = \rho \cdot AX \int_0^L (Q_{12}^{12} + Q_{22}^{12}) dx \quad (\text{AI.110})$$

$$\text{MELEM (6, 2)} = \rho \cdot AX \int_0^L (Q_{12} Q_{11} + Q_{22} Q_{21}) dx \quad (\text{AI.111})$$

$$\text{MELEM (6, 6)} = \rho \cdot AX \int_0^L (Q_{12}^2 + Q_{22}^2) dx \quad (\text{AI.112})$$

$$\text{MELEM (7, 1)} = \rho \cdot AX \int_0^L a_{17} \cdot a_{11} dx \quad (\text{AI.113})$$

$$\text{MELEM (7, 7)} = \rho \cdot AX \int_0^L a_{17}^2 dx \quad (\text{AI.114})$$

$$\text{MELEM (8, 2)} = \rho \cdot AX \int_0^L (Q_{13} Q_{11} + Q_{23} Q_{21}) dx \quad (\text{AI.115})$$

$$\text{MELEM (8, 6)} = \rho \cdot AX \int_0^L (Q_{13} Q_{12} + Q_{23} Q_{22}) dx \quad (\text{AI.116})$$

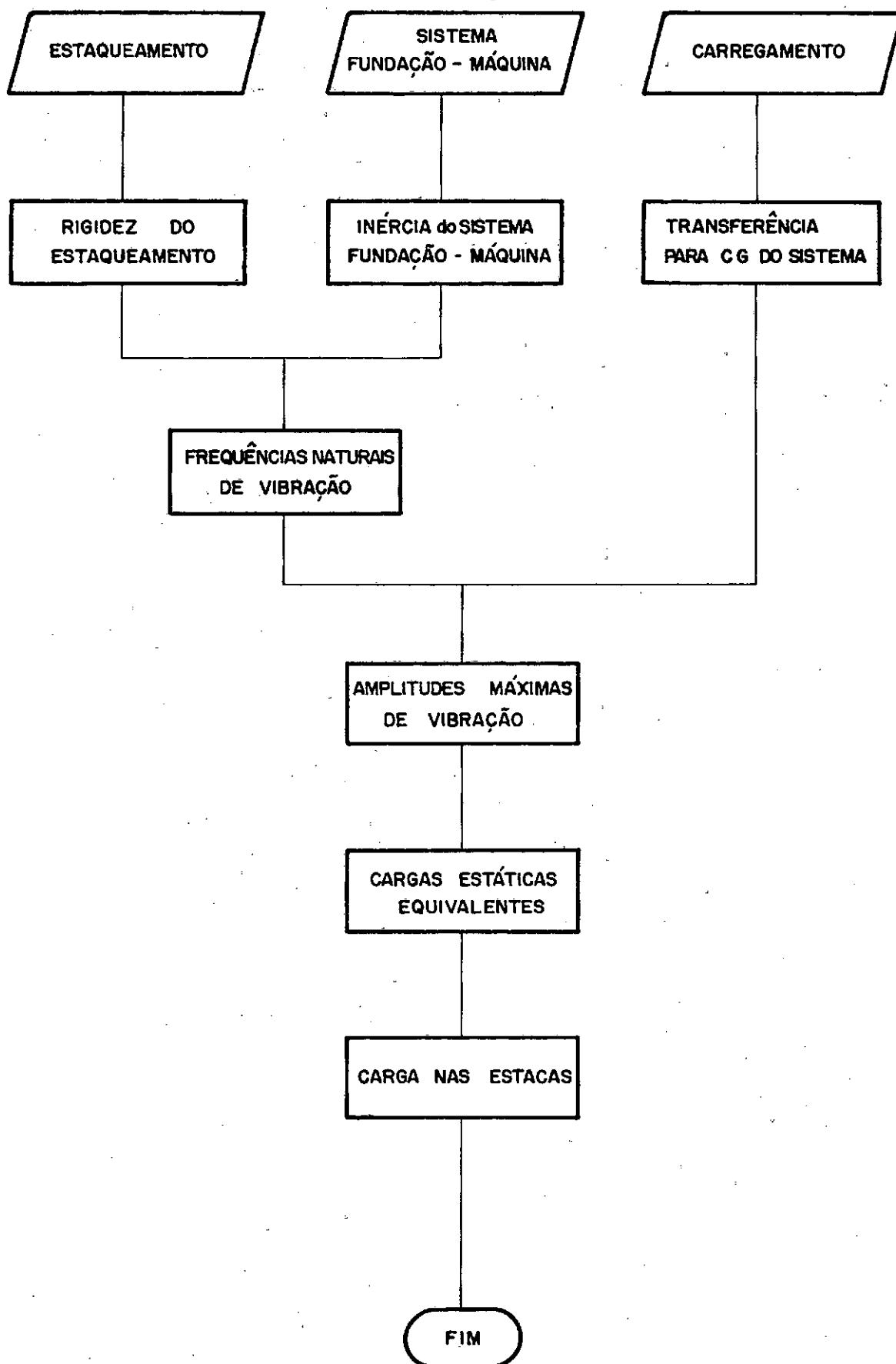
$$\text{MELEM (8, 8)} = \rho \cdot AX \int_0^L (Q_{13}^2 + Q_{23}^2) dx \quad (\text{AI.117})$$

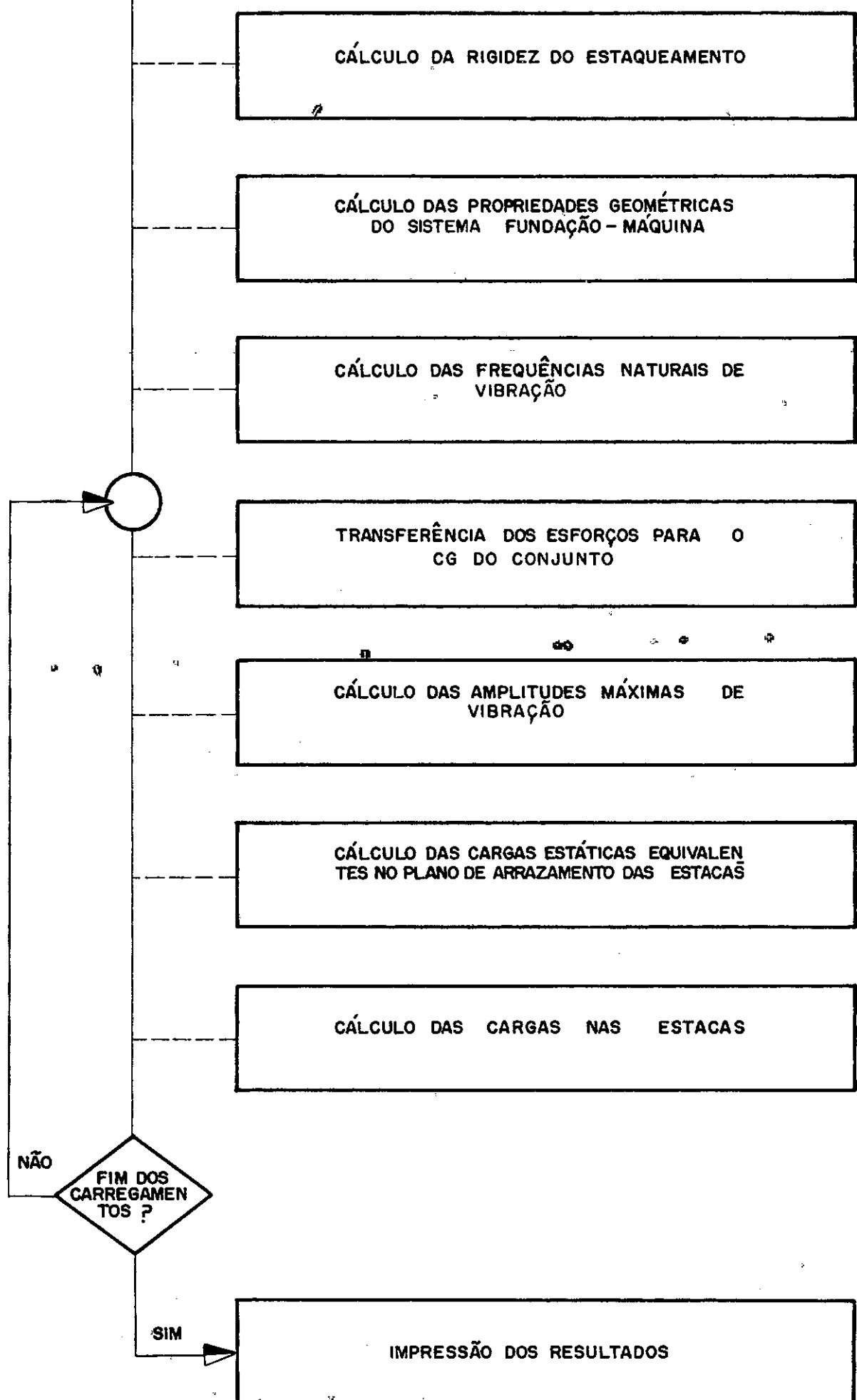
$$\text{MELEM (9, 3)} = \rho \cdot AX \int_0^L (Q_{13}' Q_{11}' + Q_{23}' Q_{21}') dx \quad (\text{AI.118})$$

$$\text{MELEM (9, 5)} = \rho \cdot AX \int_0^L (Q_{13}' Q_{12}' + Q_{23}' Q_{22}') dx \quad (\text{AI.119})$$

APÊNDICE III

"FLOW-CHARTS" DOS PROGRAMAS DE COMPUTADOR





# PROGRAMA MAQ. 2

138

