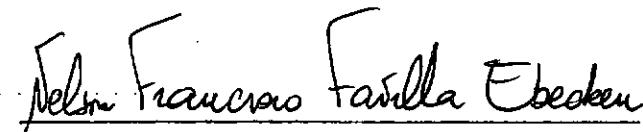


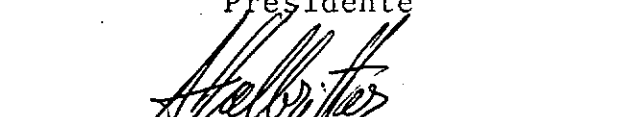
FORMULAÇÕES E MÉTODOS DE SOLUÇÃO NA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE  
TRELIÇAS ESPACIAIS

Rodrigo Amaral de Codes

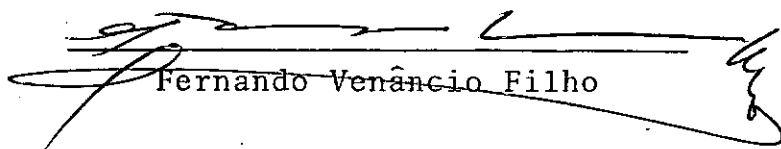
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA  
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU  
DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:

  
Nelson Francisco Favilla Ebecken  
Presidente

  
Andrés Ludovico Halbritter

  
Edison Castro Prates de Lima

  
Fernando Venâncio Filho

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1978

## FICHA CATALOGRÁFICA

CODES, RODRIGO AMARAL DE

Formulações e Métodos de Solução na Análise Não-Linear de Treliças Espaciais (Rio de Janeiro) 1978.

VIII, 165p. 29,7 cm. (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1978).

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia.

1. Estruturas I. COPPE/UFRJ II. Título (série).



## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Nelson Francisco Favilla Ebecken, pelas sugestões apresentadas e dedicação na orientação prestada a este trabalho;

Ao Professor José Claudio de Faria Telles, pela contribuição e incentivo na co-orientação deste trabalho;

Aos Professores da COPPE/UFRJ, pelos valiosos ensinamentos transmitidos durante o curso de pós-graduação;

À Universidade Federal do Ceará, na pessoa do Magnífico Reitor Professor Pedro Teixeira Barroso, pela oportunidade e auxílio financeiro;

À CAPES, pela complementação financeira;

À Secretaria do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ, pelas atenções recebidas em inúmeras ocasiões;

Ao Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, pelo apoio prestado durante o desenvolvimento do programa automático;

À minha tia Sylvia Ribeiro, e demais parentes residentes no Rio de Janeiro, pelo apoio amigo e constante;

Aos meus amigos, que tanto contribuíram de inúmeras formas;

A Helena Santos de Oliveira, pela dedicação na confecção gráfica deste trabalho.

## SINOPSE

O presente trabalho objetiva o desenvolvimento e comparação das formulações Lagrangeana e Lagrangeana Atualizada para a análise não-linear geométrica e física de treliças espaciais, além da apresentação e confronto de diversos métodos de solução de equações não-lineares. Estas formulações, juntamente com duas de outros autores, são implementadas no programa ANALITE.

As formulações Lagrangeana e Lagrangeana Atualizada são desenvolvidas a partir dos princípios gerais da mecânica do contínuo. Possibilitam a análise não-linear de grandes deslocamentos e deformações. A estrutura é discretizada pelo método dos elementos finitos, modelo deslocamento.

A solução do sistema de equações não-lineares pode ser efetuada por diversos processos incrementais: iterativos tipo Newton (Neton-Raphson e Newton-Raphson modificado), incremental convencional, incremental modificado, incremental autocorretivo de primeira ordem e de integração numérica (Runge-Kutta de quarta ordem e "predictor-corrector" de Hamming).

Vários exemplos comparando as diversas possibilidades do programa são apresentados e comentados.

## SUMMARY

The main objective of this work is to examine the numerical performance of the Total Lagrangean and Updated Lagrangean formulations for geometrically and materially nonlinear analysis of space trusses, and the most commonly used nonlinear equation solution algorithms. These formulations, and two others, are implemented in the ANALITE program.

The Total Lagrangean and Updated Lagrangean formulations are developed based on general principles of continuum mechanics. They make possible the nonlinear analysis of large displacements and large deformations. The structure is discretized by the finite element method, using the displacement model.

The solution of the nonlinear equation system can be carried out by several incremental procedures: Newton iteration type (Newton-Raphson and modified Newton-Raphson), conventional incremental, improved incremental, first-order self-correcting incremental, and some numerical integration techniques (fourth-order Runge-Kutta and Hamming's predictor-corrector).

Several examples comparing the different possibilities of the program are presented and commented.

## ÍNDICE

I	- INTRODUÇÃO .....	1
II	- FORMULAÇÃO LAGRANGEANA E LAGRANGEANA ATUALIZADA .....	4
	2.1 - Tensores de Deformações .....	5
	2.2 - Tensores de Tensões .....	7
	2.3 - Princípio dos Trabalhos Virtuais .....	11
	2.4 - Relações Constitutivas .....	13
	2.5 - Discretização pelo Método dos Elementos Finitos .....	14
	2.6 - Formulação Considerando um Referencial Interme- diário .....	19
	2.6.1 - Matriz de Rigidez Tangente .....	25
	2.7 - O Elemento de Treliça Espacial .....	27
	2.7.1 - Formulação em Relação a um Referencial Intermediário .....	27
	2.7.2 - Formulação Lagrangeana .....	37
	2.7.3 - Formulação Lagrangeana Atualizada .....	41
	2.8 - Outras Formulações .....	44
III	- MÉTODOS DE SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEA - RES .....	51
	3.1 - 1ª Classe: Solução com Verificação do Equilí- brio ( $\dot{\psi} = 0$ ) .....	52
	3.1.1 - Método Iterativo de Newton-Raphson ....	52
	3.1.2 - Método Iterativo de Newton-Raphson Modi- ficado .....	55
	3.1.3 - Critérios de Convergência dos Métodos Iterativos .....	56
	3.1.4 - Outros Métodos da Primeira Classe .....	58
	3.2 - 2ª Classe: Solução Incremental ( $\dot{\psi} = 0$ ) .....	59
	3.2.1 - Método Incremental Convencional .....	59
	3.2.2 - Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem .	60
	3.2.3 - Método "Predictor-Corrector" de Hamming .....	62

3.3 - 3 <sup>a</sup> Classe: Auto-Corretivo de Primeira Ordem ( $\dot{\underline{\psi}} + \underline{Z}\underline{\psi} = \underline{0}$ )	65
IV - PROGRAMA AUTOMÁTICO .....	68
4.1 - Programa ANALITE .....	68
4.2 - Sub-Rotinas do Programa ANALITE .....	69
4.3 - Manual de Utilização do Programa .....	75
4.3.1 - 1º Conjunto: Título do Programa .....	75
4.3.2 - 2º Conjunto: Tipo de Análise .....	75
4.3.3 - 3º Conjunto: Parâmetros Básicos .....	78
4.3.4 - 4º Conjunto: Não-Linearidade Física ...	79
4.3.5 - 5º Conjunto: Coordenadas Nodais .....	80
4.3.6 - 6º Conjunto: Conectividades e Propriedades dos Elementos .....	80
4.3.7 - 7º Conjunto: Condições de Contorno ....	80
4.3.8 - 8º Conjunto: Título do Carregamento ...	80
4.3.9 - 9º Conjunto: Cargas Nodais .....	81
V - EXEMPLOS .....	82
5.1 - Estruturas com Um Único Grau de Liberdade .....	83
5.1.1 - Treliça Plana - Dois Elementos .....	83
5.1.2 - Sistema Barra-Mola .....:.....	89
5.2 - Análise Não-Linear Geométrica .....	93
5.2.1 - Casca Reticulada .....	93
5.2.2 - Torre Espacial .....	97
5.3 - Análise Não-Linear Geométrica e Física .....	101
5.3.1 - Viga Plana .....	101
5.3.2 - Torre de Transmissão .....	106
VI - CONCLUSÃO .....	113
BIBLIOGRAFIA .....	117
SIMBOLOGIA .....	122
APÊNDICE ; .....	125



## I - INTRODUÇÃO

Treliças espaciais são estruturas que apresentam efeitos não-lineares acentuados: torres de transmissão, cascas reticuladas, pontes e coberturas de galpões industriais são exemplos largamente empregados. O comportamento não-linear é devido a grandes deslocamentos e deformações, além das características físicas do material, quase sempre aço ou liga estrutural de alumínio.

A análise linear de estruturas de barras por métodos orientados à computação é assunto bem estabelecido. O uso das deformações da "engenharia" (tensores de deformações desprezando termos de segunda ordem) e a consideração do equilíbrio nodal da estrutura deformada em relação à configuração inicial, entre outras, são simplificações permitidas na maior parte dos casos. Por serem bem conhecidas e até certo ponto simples, somadas às necessidades de projetos mais realistas, os efeitos não-lineares passaram a ser estudados nestas estruturas. A implementação de técnicas que pudessem considerar efeitos não-lineares em programas destinados à análise linear implicou no desenvolvimento de formulações quase sempre incompletas. Comparadas em exemplos particulares, fornecem resultados satisfatórios, não sendo entretanto, muitas delas, formulações gerais.

A análise não-linear de grandes deslocamentos é tratada em diversos trabalhos. Suas aproximações comparadas com soluções de problemas práticos se mostram efetivas. Entretanto, à medida que o efeito não-linear se acentua, principalmente no que se refere ao comportamento pós-crítico, fica evidenciada a necessidade de uma abordagem mais geral. É imprescindível que o

tensor de deformações seja empregado na sua forma completa. Além disso, as relações constitutivas utilizadas nas equações de equilíbrio de determinada formulação dependem da configuração escolhida para a definição de deformações. Não se deve esperar que formulações distintas forneçam respostas diferentes. A escolha do referencial não deve influenciar na solução do problema.

No presente trabalho apresentam-se as formulações Lagrangeana e Lagrangeana Atualizada para a análise não-linear de treliças espaciais. Desenvolve-se uma formulação incremental de descrição referencial em relação a uma posição intermediária<sup>6...8</sup>, sendo permitida a não-linearidade geométrica e física. Com a finalidade de considerar grandes deformações, utilizaram-se os princípios básicos da mecânica do contínuo<sup>1,2</sup>, sendo portanto exibida em enfoque tridimensional. As equações de equilíbrio são obti - das através do princípio dos trabalhos virtuais e a estrutura é discretizada pelo método dos elementos finitos, modelo desloca - mento. Desta formulação derivam a Lagrangeana e a Lagrangeana Atualizada. Pretendeu-se avaliar numérica e computacionalmente o desempenho de cada formulação, sendo também programadas as de Jagannathan<sup>11,12</sup> e Martin<sup>14</sup>.

Devido ao grande esforço computacional envolvido na solução de sistemas de equações algébricas não-lineares, espe - cial atenção deve ser dada aos algoritmos que se mostram eficientes para aplicações do método dos elementos finitos. Neste tra - balho, os métodos de solução são divididos em classes, segundo características que lhes são comuns<sup>5,24,26</sup>. Na primeira classe são considerados os algoritmos que verificam o equilíbrio, ou seja, os métodos iterativos de Newton-Raphson e de Newton-Raphson modificado. Também são comentados os critérios de convergência

dos mesmos. A segunda classe dispõe dos processos puramente incrementais. Analisam-se, além do incremental convencional, os métodos de integração numérica: de Runge-Kutta de quarta ordem e "predictor-corrector" de Hamming. Os processos incrementais com correção são considerados na terceira classe. A adição de um termo corretivo em cada etapa do carregamento assegura melhor desempenho em relação ao incremental convencional. Estuda-se o método incremental auto-corretivo de primeira ordem. Como um caso particular deriva-se o método incremental modificado.

Vários exemplos com a finalidade de confrontar as formulações e os métodos de solução são discutidos. As formulações desenvolvidas neste trabalho fornecem resultados idênticos.

Algumas sugestões e conclusões são apresentadas.

## II - FORMULAÇÃO LAGRANGEANA E LAGRANGEANA ATUALIZADA

Na análise de um meio contínuo a primeira questão importante a decidir é a que se refere ao tipo de descrição a ser adotada. Normalmente esta escolha recai entre a descrição referencial e a espacial<sup>2</sup>.

Na descrição referencial as variáveis independentes são: a posição  $x_i$  da partícula em uma configuração de referência escolhida arbitrariamente e o tempo  $t$ . Na teoria da elasticidade, a configuração de referência é a natural ou não deformada. Quando a configuração escolhida é a inicial no tempo  $t=0$ , a descrição referencial é chamada de Lagrangeana. É também conhecida por descrição material e a variável independente  $x_i$  por coordenada material.

As variáveis independentes da descrição espacial são: a posição presente  $\bar{x}_i$  ocupada pela partícula no tempo  $t$  e o próprio tempo  $t$ . Esta descrição é mais usada em mecânica dos fluidos e também é chamada de descrição Euleriana.

Para a definição de grandes deformações, duas opções são usualmente propostas: em termos da configuração não deformada ou da configuração deformada. Quando é introduzido o sistema de coordenadas, na primeira classe, usam-se coordenadas materiais na configuração não deformada (formulação Lagrangeana) e, na segunda, coordenadas espaciais na configuração deformada (formulação Euleriana).

A formulação Lagrangeana parece a mais adequada à teoria da elasticidade, pois a configuração de referência escolhida geralmente corresponde ao estado não deformado, ao qual o corpo retorna quando descarregado. As equações de equilíbrio, en

tretanto, devem ser satisfeitas na configuração deformada.

Neste trabalho, a análise não-linear de grandes deslocamentos e deformações é estudada pelo método dos elementos finitos, modelo deslocamento, através das formulações Lagrangeana e Lagrangeana Atualizada. Ambas as formulações são incrementais<sup>3...9, 42</sup>. A formulação Lagrangeana<sup>3...9, 42</sup> mantém o referencial fixo na configuração não deformada, enquanto que, na formulação Lagrangeana Atualizada<sup>6,7</sup>, o sistema de referência é transportado para a posição deformada a cada incremento. Computacionalmente, uma formulação Euleriana é idêntica à Lagrangeana Atualizada se a configuração de equilíbrio obtida no final de um incremento é adotada como referencial para o incremento seguinte<sup>3</sup>. Stricklin<sup>5</sup> justifica a denominação de Lagrangeana Atualizada porque esta formulação ainda trabalha com incrementos do tensor de deformações de Green.

No desenvolvimento do trabalho, a variável  $t$  não é considerada por se objetivar apenas a análise estática. As forças definidas, quer de volume ou de superfície, são sempre admitidas conservativas.

## 2.1 - TENSORES DE DEFORMAÇÕES

Supõe-se inicialmente as coordenadas  $x_i$  de um ponto  $P$  qualquer de um corpo não deformado, como na Figura 2.1. O corpo se deforma e  $P$  se desloca de  $u_i$  assumindo a posição  $\bar{P}$ . As novas coordenadas do referido ponto em relação aos eixos de referência fixos serão então:

$$\bar{x}_i = x_i + u_i \quad (2.1)$$

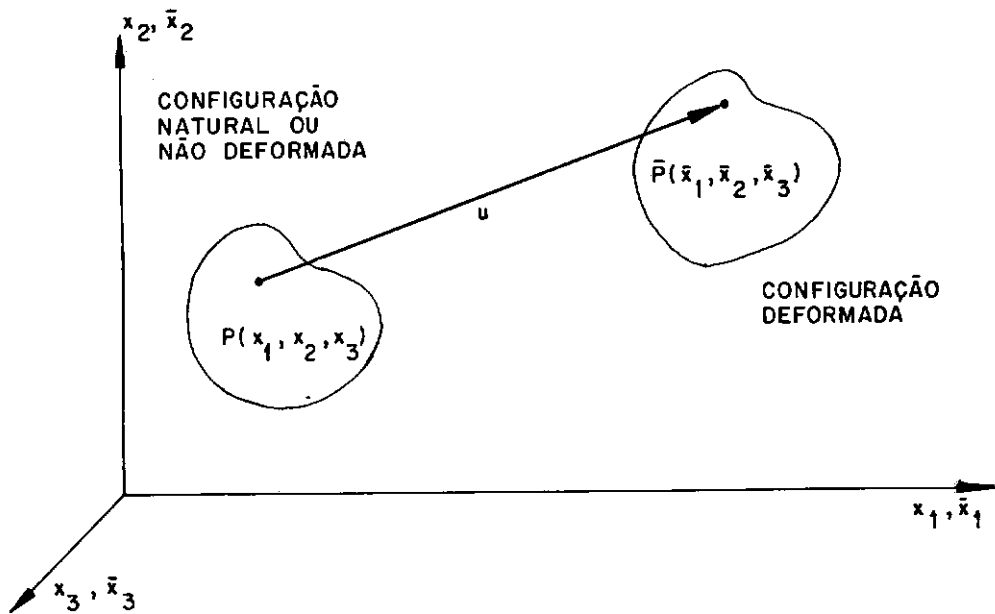


FIGURA 2.1 - DEFINIÇÃO DAS COORDENADAS LAGRANGEANAS E EULERIANAS

Considerando os deslocamentos  $u_i$  como uma função das coordenadas  $x_i$  no referencial Lagrangeano, ou seja,

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) \quad (2.2)$$

a expressão geral do tensor de deformações toma a forma<sup>1,2</sup>:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (2.3)$$

onde  $\epsilon_{ij}$  é o tensor de deformações de Green ou de Lagrange.

Escrevendo agora os deslocamentos  $u_i$  em relação ao referencial Euleriano, ou seja, em função de  $\bar{x}_i$ , tem-se:

$$u_i = u_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \quad (2.4)$$

e o tensor de deformações será então definido como<sup>1,2</sup>:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \bar{x}_i} - \frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_j} \right) \quad (2.5)$$

onde  $\bar{\epsilon}_{ij}$  é o tensor de deformações de Almansi. No caso de deformações infinitesimais a Equação (2.5) tem o seu último termo desprezado e o tensor recebe a denominação de tensor de deformações Euleriano ou de Cauchy, sendo usada então a notação  $\bar{\epsilon}_{oij}$ .

Os tensores das Equações (2.3) e (2.5) são reduzidos à forma de pequenas deformações quando os produtos das derivadas parciais dos deslocamentos podem ser desprezados. Na teoria da elasticidade, para pequenos deslocamentos, não há distinção entre as duas definições.

Saliente-se que as componentes das deformações finitas envolvem apenas termos lineares e quadráticos nas componentes do gradiente de deslocamentos, portanto as Equações (2.3) e (2.5) representam os tensores de deformações finitas completos e não apenas uma aproximação de segunda ordem dos mesmos<sup>2</sup>.

## 2.2 - TENSORES DE TENSÕES

Considerando-se um meio contínuo deformado, as equações de equilíbrio estático resultante são expressas simplesmente em termos do tensor de tensões de Cauchy  $\bar{\sigma}_{ij}$ , que é simétrico:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \bar{x}_j} + \bar{\rho} Q_i = 0 \quad (2.6)$$

onde  $\bar{\rho}$  é a massa específica do material e  $\bar{\rho} Q_i$  são as forças de volume, todos com o referencial na configuração deformada<sup>1</sup>.

Entretanto, se as deformações são definidas com o referencial na configuração natural, as tensões deverão ser escritas em relação ao mesmo referencial.

Suponha-se um sólido elementar de um corpo deformado, como mostrado na Figura 2.2, e a sua configuração natural. A força  $d\bar{P}_i$  atua na superfície elementar de área  $d\bar{A}$  e a força correspondente  $dP_i$  em  $dA$ . Pode-se obter os tensores de tensões em ambas as configurações se definidos como os limites de  $d\bar{P}_i/d\bar{A}$  e  $dP_i/dA$ , quando  $d\bar{A}$  e  $dA$  tendem a zero, respectivamente<sup>1</sup>.

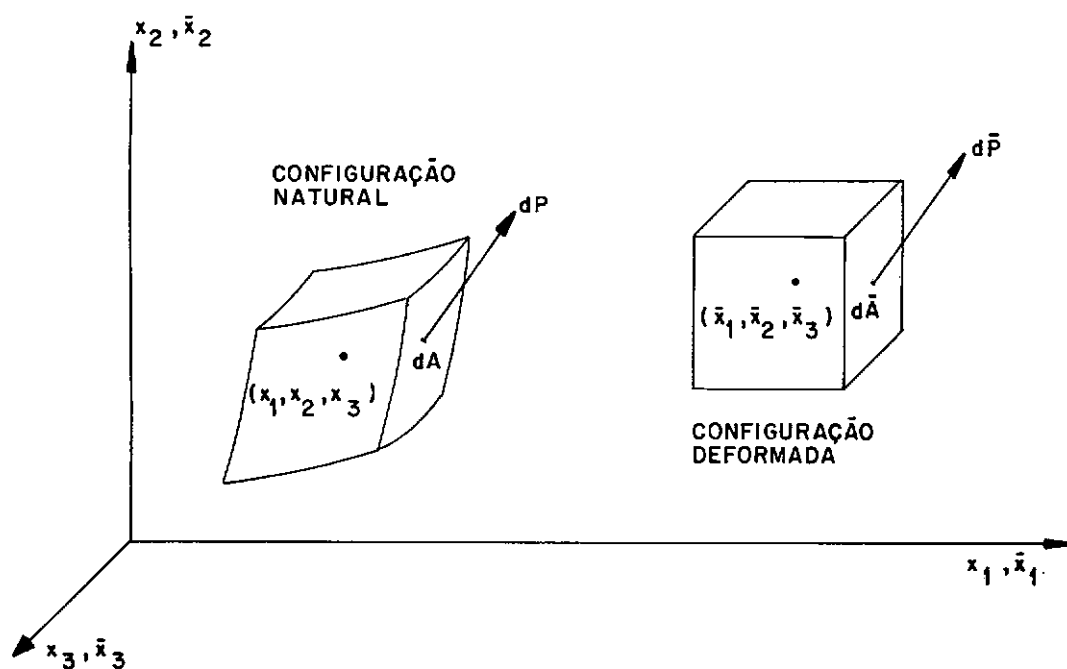


FIGURA 2.2 - CORRESPONDÊNCIA ENTRE FORÇAS DE SUPERFÍCIE NAS CONFIGURAÇÕES NATURAL E DEFORMADA

Consideram-se as seguintes relações entre  $d\bar{P}_i$  e  $dP_i$ , representadas na Figura 2.3, que são conhecidas como relações Lagrangeana e de Kirchhoff, respectivamente,



$$dP_i^{(L)} = d\bar{P}_i \quad (2.7)$$

e

$$dP_i^{(K)} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} d\bar{P}_j \quad (2.8)$$

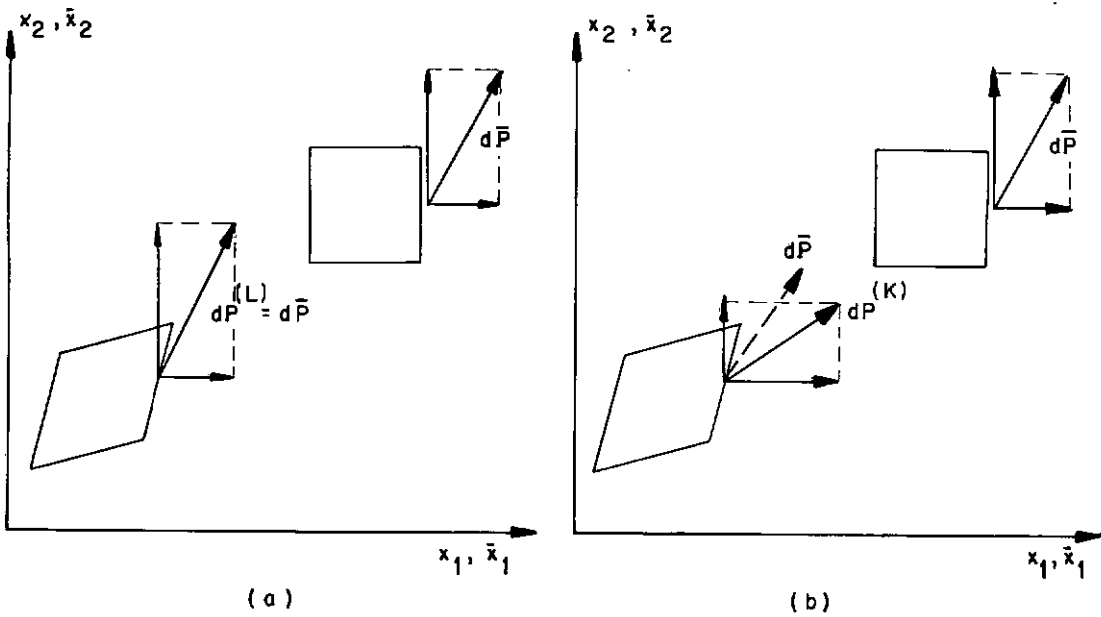


FIGURA 2.3 - CORRESPONDÊNCIA ENTRE FORÇAS DE SUPERFÍCIE, DETERMINANDO AS TENSÕES: (a) de Lagrange e (b) de Kirchhoff, PARA O PLANO

A força  $d\bar{P}_i$  é aquela que atua na superfície elementar de área  $d\bar{A}$ , cujos co-senos diretores da normal são  $\bar{v}_i$ , enquanto  $dP_i$  é a correspondente à superfície elementar original de área  $dA$ , com os respectivos co-senos diretores da normal  $v_i$ . Admitindo-se que  $\bar{\sigma}_{ij}$  é o tensor de tensões referido ao estado deformado, isto é, o tensor de Cauchy, tem-se:

$$d\bar{P}_i = \bar{\sigma}_{ji} \bar{v}_j d\bar{A} \quad (2.9)$$

As tensões são definidas em relação ao estado natural de uma das duas maneiras seguintes, escritas de forma semelhante à da Equação (2.9). Se é usada a Equação (2.7), tem-se que

$$dP_i^{(L)} = \sigma_{ji}^* v_j dA = d\bar{P}_i \quad (2.10)$$

Caso seja usada a Equação (2.8), então

$$dP_i^{(K)} = \sigma_{ji} v_j dA = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} d\bar{P}_k \quad (2.11)$$

$\sigma_{ij}^*$  e  $\sigma_{ij}$  são chamados respectivamente de tensor de tensões Lagrangeano e de Kirchhoff<sup>1</sup>. Os mesmos são mais conhecidos como primeiro e segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff<sup>2</sup>, respectivamente.

Os tensores de Piola-Kirchhoff podem ser relacionados ao de Cauchy, como segue:

$$\sigma_{ji}^* = \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k} \bar{\sigma}_{ki} \quad (2.12)$$

e

$$\sigma_{ji} = \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_\ell} \bar{\sigma}_{\ell k} \quad (2.13)$$

onde  $\rho$  é a massa específica na configuração natural.

Da Equação (2.12) vê-se que, em geral, o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff não é simétrico, o que é extremamente inconveniente para as relações constitutivas. O segundo tensor, Equação (2.13), é simétrico e portanto mais adequado. Desta forma, no texto que se segue, será o único utilizado.

### 2.3 - PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Seja um corpo em equilíbrio estático sob a ação de forças de volume  $\bar{\rho}Q_i$  e de superfície  $\bar{P}_i$ , como mostrado na Figura 2.4. Supõe-se que a superfície de contorno  $\bar{A}$  é dividida em duas partes:

em  $\bar{A}_\sigma$  são prescritas as forças de superfície e

em  $\bar{A}_u$  são prescritos os deslocamentos.

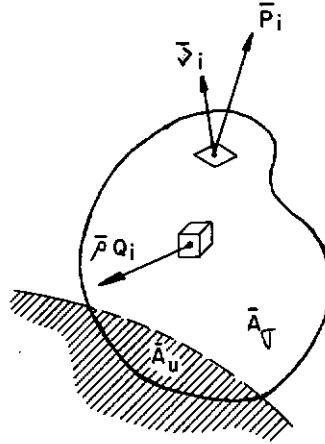


FIGURA 2.4 - CORPO DEFORMADO SOB A AÇÃO DE FORÇAS DE VOLUME  $\bar{\rho}Q_i$  E DE SUPERFÍCIE  $\bar{P}_i$

Considerando o trabalho virtual das forças  $\bar{\rho}Q_i$  por unidade de volume e  $\bar{P}_i$  por unidade de superfície, o princípio dos trabalhos virtuais, na configuração deformada, é escrito de acordo com a equação:

$$\int_{\bar{V}} \bar{\sigma}_{ij} d\bar{\epsilon}_{o_{ij}} d\bar{V} = \int_{\bar{V}} \bar{\rho}Q_i du_i d\bar{V} + \int_{\bar{A}_\sigma} \bar{P}_i du_i d\bar{A} \quad (2.14)$$

onde  $\bar{V}$  é o volume do corpo deformado. O primeiro membro é expresso em termos do tensor de tensões e do incremento do tensor

de deformações, ambos de Cauchy. O segundo membro é o trabalho virtual das forças externas  $dW^e$ . Também se escreve esta equação como:

$$\int_{\bar{V}} \bar{\sigma}_{ij} d\bar{\epsilon}_{o_{ij}} d\bar{V} = dW^e \quad (2.15)$$

Uma outra forma de obter o princípio dos trabalhos virtuais é fazendo uso do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, mais comumente usada que a citada anteriormente<sup>5</sup>. O procedimento para a sua obtenção é transformar as integrais na Equação (2.14) em integrais sobre o volume não deformado<sup>2</sup>. Tem-se então que

$$\int_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV = \int_V \rho Q_i du_i dV + \int_{A_\sigma} P_i du_i dA \quad (2.16)$$

ou

$$\int_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV = dW^e \quad (2.17)$$

onde  $V$  é o volume do corpo não deformado.

As Equações (2.16) e (2.17) expressam o princípio dos trabalhos virtuais na configuração não deformada, em termos do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e do incremento do tensor de deformações de Green.  $P_i$  e  $\bar{P}_i$  também podem ser relacionados por<sup>3,4</sup>:

$$P_i = \frac{d\bar{A}}{dA} \bar{P}_i \quad (2.18)$$

Observe-se que o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff utiliza a área não deformada do corpo. No caso de pequenas deformações, tem o mesmo significado das tensões da engenharia, porém, para grandes deformações, deve ser considerado apenas como um tensor que multiplicado pelo incremento do tensor de Green fornece trabalho<sup>5</sup>.

No princípio dos trabalhos virtuais as únicas suposições usadas são o equilíbrio e o conceito do meio contínuo, sendo o mesmo válido, portanto, para a análise linear e não-linear geométrica e física.

O princípio dos trabalhos virtuais, como considerado, corresponde ao princípio dos deslocamentos virtuais, que é usado para formular a solução pelo método dos elementos finitos, modelo deslocamento. Este modelo é atualmente considerado ser mais efetivo<sup>6</sup>.

## 2.4 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

As relações constitutivas tangentes são expressas, no referencial Lagrangeano, de acordo com a equação:

$$d\sigma_{ij} = D_{T_{ijrs}} d\epsilon_{rs} \quad (2.19)$$

em que  $d\sigma_{ij}$  e  $d\epsilon_{rs}$  são os incrementos, respectivamente, do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e do tensor de deformações de Green, e  $D_{T_{ijrs}}$  é o tensor constitutivo tangente.

Para o material elástico linear são válidas as relações constitutivas:

$$\sigma_{ij} = D_{ijrs} \epsilon_{rs} \quad (2.20)$$

onde  $D_{ijrs}$  é o tensor constitutivo. Neste caso o tensor  $D_{Tijrs}$  coincide com  $D_{ijrs}$ .

O tensor constitutivo tangente, na configuração de formada, pode ser obtido pela atualização de  $D_{Tijrs}$ <sup>6,7</sup>, na forma:

$$\bar{D}_{T_{mnpq}} = \frac{\bar{\rho}}{\rho} \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_j} D_{T_{ijrs}} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_r} \frac{\partial \bar{x}_q}{\partial x_s} \quad (2.21)$$

Este tensor relacionará os incrementos dos tensores de tensões  $\bar{\sigma}_{mn}$  e de deformações  $\bar{\epsilon}_{pq}$ , de Cauchy, por:

$$d\bar{\sigma}_{mn} = \bar{D}_{T_{mnpq}} d\bar{\epsilon}_{pq} \quad (2.22)$$

No caso do material elástico linear a obtenção do tensor constitutivo  $\bar{D}_{mnpq}$ , no referencial da configuração deformada, a partir de  $D_{ijrs}$ , será através de expressões análogas às da Equação (2.21).

## 2.5 - DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

No texto que se segue, a discretização é atendida pelo método dos elementos finitos, utilizando-se para tal uma notação matricial bastante difundida<sup>4,5,9,42</sup>.

Um ponto qualquer  $P$  de um elemento na posição não deformada é identificado, no referencial Lagrangeano, em relação aos eixos cartesianos fixos:

$$\underline{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [\underline{x}, y, z]^t \quad (2.23)$$

O mesmo ponto, após uma deformação sofrida pelo elemento, assumirá a posição  $\bar{P}$ , que no referencial da configuração deformada é denotado por:

$$\underline{\bar{x}} = [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]^t \quad (2.24)$$

O deslocamento entre os pontos  $P$  e  $\bar{P}$ , da posição inicial à deformada, será função de  $\underline{x}$  e de  $\underline{\bar{x}}$ , e será dado por:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}(\underline{\bar{x}}) = [\underline{u}, v, w]^t \quad (2.25)$$

A relação entre  $\underline{x}$  e  $\underline{\bar{x}}$  é a mesma Equação (2.1), que em notação matricial é escrita na forma:

$$\underline{\bar{x}} = \underline{x} + \underline{u} \quad (2.26)$$

Vetores e matrizes dos gradientes dos deslocamentos são definidos em função de  $\underline{x}$ , coordenadas no referencial Lagrangeano, como<sup>3,4</sup>:

$$\underline{\varepsilon}_0 = \left[ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]^t \quad (2.27)$$

$$\underline{\theta} = [\underline{\theta}_x, \underline{\theta}_y, \underline{\theta}_z]^t \quad (2.28)$$

$$A = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\bar{x}} & 0 & 0 & 0 & \bar{\theta}_{\bar{z}} & \bar{\theta}_{\bar{y}} \\ 0 & \bar{\theta}_{\bar{y}} & 0 & \bar{\theta}_{\bar{z}} & 0 & \bar{\theta}_{\bar{x}} \\ 0 & 0 & \bar{\theta}_{\bar{z}} & \bar{\theta}_{\bar{y}} & \bar{\theta}_{\bar{x}} & 0 \end{bmatrix}^t \quad (2.29)$$

onde, tipicamente,

$$\bar{\theta}_{\bar{x}} = \left[ \frac{\partial u}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial v}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} \right]^t \quad (2.30)$$

Definem-se, de maneira semelhante, vetores e matrizes dos gradientes dos deslocamentos em relação às coordenadas  $\bar{x}$ , no referencial da configuração deformada:

$$\bar{\epsilon}_0 = \left[ \frac{\partial u}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial v}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \left( \frac{\partial w}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \right), \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} \right), \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} \right) \right]^t \quad (2.31)$$

$$\bar{\theta} = \left[ \bar{\theta}_{\bar{x}}, \bar{\theta}_{\bar{y}}, \bar{\theta}_{\bar{z}} \right]^t \quad (2.32)$$

e

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{\bar{x}} & 0 & 0 & 0 & \bar{\theta}_{\bar{z}} & \bar{\theta}_{\bar{y}} \\ 0 & \bar{\theta}_{\bar{y}} & 0 & \bar{\theta}_{\bar{z}} & 0 & \bar{\theta}_{\bar{x}} \\ 0 & 0 & \bar{\theta}_{\bar{z}} & \bar{\theta}_{\bar{y}} & \bar{\theta}_{\bar{x}} & 0 \end{bmatrix}^t \quad (2.33)$$

sendo que, de maneira análoga,

$$\bar{\theta}_{\bar{x}} = \left[ \frac{\partial u}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial v}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} \right]^t \quad (2.34)$$

O tensor de deformações de Green, da Eq. (2.3), é então escrito na forma:

$$\underline{\epsilon} = \left[ \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{zy}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy} \right]^t \quad (2.35)$$



Este vetor pode ser decomposto na soma dos termos lineares e não lineares dos gradientes dos deslocamentos, respectivamente,  $\underline{\varepsilon}_0$  e  $\underline{\varepsilon}_L$ . Tem-se então que:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_0 + \underline{\varepsilon}_L \quad (2.36)$$

onde

$$\underline{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} \underline{A} \underline{\theta} \quad (2.37)$$

De maneira análoga, a Equação (2.5) (tensor de de formações do Almansi), em forma matricial, será:

$$\underline{\bar{\varepsilon}} = \left[ \bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\varepsilon}_z, \bar{\gamma}_{zy}, \bar{\gamma}_{zx}, \bar{\gamma}_{xy} \right]^t \quad (2.38)$$

ou

$$\underline{\bar{\varepsilon}} = \underline{\bar{\varepsilon}}_0 + \underline{\bar{\varepsilon}}_L \quad (2.39)$$

onde

$$\underline{\bar{\varepsilon}}_L = - \frac{1}{2} \underline{\bar{A}} \underline{\bar{\theta}} \quad (2.40)$$

$\underline{\bar{\varepsilon}}_0$  (tensor de Cauchy) contém os termos lineares dos gradientes dos deslocamentos, equivalente ao caso de pequenas deformações. A Equação (2.40) engloba os termos não-lineares.

O princípio dos trabalhos virtuais na configuração deformada em relação ao referencial Euleriano, dado nas Equações (2.14) e (2.15), é então escrito na forma:

$$\int_{\bar{V}} \bar{\underline{\sigma}}^t d\bar{\underline{\epsilon}}_0 d\bar{V} = \int_{\bar{V}} \bar{\rho} \bar{\underline{Q}}^t d\bar{\underline{u}} d\bar{V} + \int_{\bar{A}} \bar{\underline{P}}^t d\bar{\underline{u}} d\bar{A} \quad (2.41)$$

ou

$$\int_{\bar{V}} \bar{\underline{\sigma}}^t d\bar{\underline{\epsilon}}_0 d\bar{V} = dW^e \quad (2.42)$$

onde  $d\bar{\underline{\epsilon}}_0$  é a variação do vetor de deformações de Cauchy,

$$\bar{\underline{\sigma}} = \left[ \bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{zy}, \bar{\tau}_{zx}, \bar{\tau}_{xy} \right]^t \quad (2.43)$$

o vetor de tensões de Cauchy,

$$\bar{\underline{P}} = \left[ \bar{P}_x, \bar{P}_y, \bar{P}_z \right]^t \quad (2.44)$$

o vetor de forças externas sobre a superfície deformada, e

$$\bar{\underline{Q}} = \left[ \bar{Q}_x, \bar{Q}_y, \bar{Q}_z \right]^t \quad (2.45)$$

o vetor das forças de volume por unidade de massa.

Em relação ao referencial Lagrangeano, ou à configuração natural, o princípio dos trabalhos virtuais, Equações (2.16) e (2.17), assume a seguinte forma:

$$\int_V \underline{\sigma}^t d\underline{\epsilon} dV = \int_V \rho \underline{Q}^t d\underline{u} dV + \int_A \underline{P}^t d\underline{u} dA \quad (2.46)$$

ou

$$\int_V \underline{\sigma}^t d\underline{\epsilon} dV = dW^e \quad (2.47)$$

onde a variação do vetor de deformações de Green é dada por:

$$d\underline{\varepsilon} = d\underline{\varepsilon}_0 + \underline{A} d\theta \quad (2.48)$$

$\underline{\sigma}$  é o vetor que contém as componentes do segundo tensor de Piola-Kirchhoff

$$\underline{\sigma} = \left[ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xy} \right]^t \quad (2.49)$$

e  $\underline{P}$  é o vetor de forças externas sobre a superfície não deformada

$$\underline{P} = \left[ P_x, P_y, P_z \right]^t \quad (2.50)$$

## 2.6 - FORMULAÇÃO CONSIDERANDO UM REFERENCIAL INTERMEDIÁRIO

Apesar de não ser usualmente definida na mecânica do contínuo, pode-se considerar uma formulação em relação a um referencial intermediário<sup>6...8</sup>. Na Figura 2.5 são representadas as configurações: natural (n), intermediária (i) e deformada (d), de um corpo qualquer sujeito a uma deformação arbitrária. Um ponto genérico  $P$  do corpo terá coordenadas locais  $\underline{x}$  na posição natural. Durante a deformação do corpo até a configuração intermediária, o ponto se deslocará de

$$\underline{u}^* = \underline{x}' - \underline{x} \quad (2.51)$$

assumindo a posição  $P'$ . Com a continuidade do processo, é atingida a posição final, onde o ponto passará a ser conhecido por  $\bar{P}$ , após se deslocar de

$$\underline{u}' = \underline{\bar{x}} - \underline{x}' \quad (2.52)$$

Observe-se também que

$$\underline{u} = \underline{u}^* + \underline{u}' \quad (2.53)$$

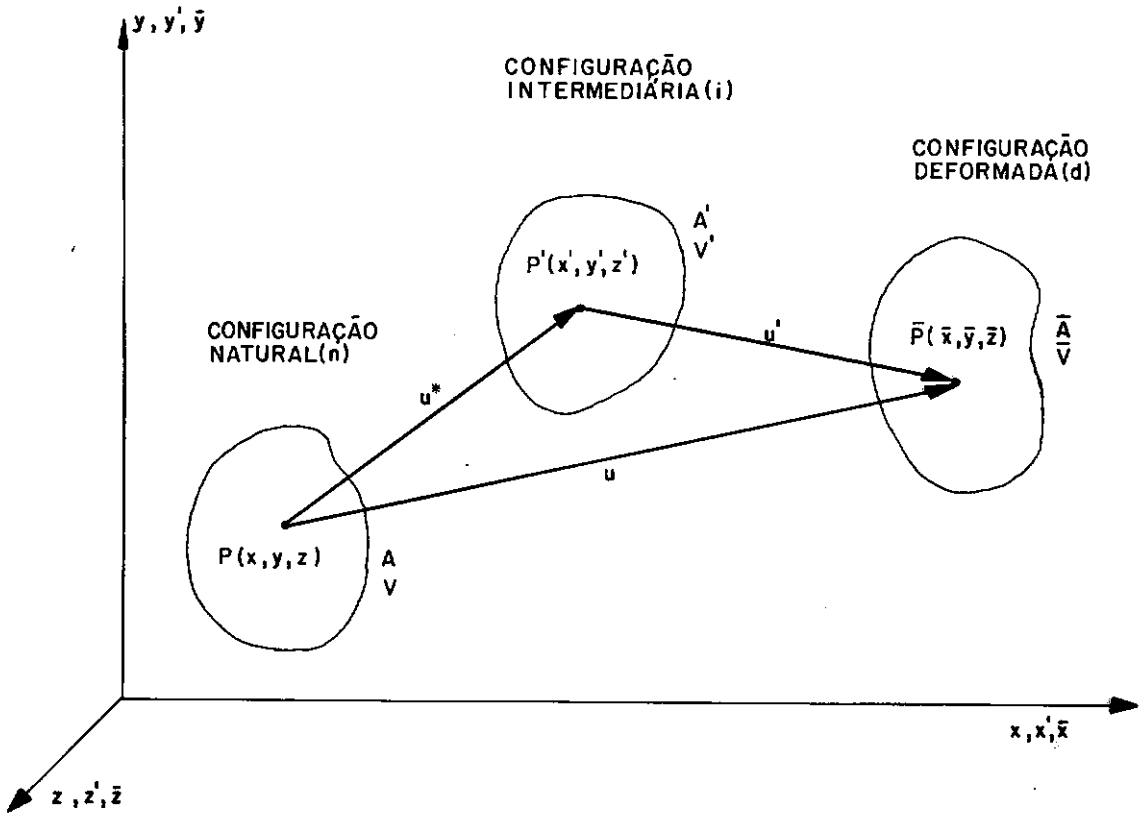


FIGURA 2.5 - CONFIGURAÇÕES: NATURAL (n), INTERMEDIÁRIA (i) E DEFORMADA (d), DE UM CORPO AO SE DEFORMAR

O princípio dos trabalhos virtuais, em notação matricial, para um único elemento, poderá ser escrito na forma :

$$\int_{V'} \underline{\sigma}'^t d\underline{\varepsilon}' dV' = \int_{V'} \rho' Q^t d\underline{u}' dV' + \int_{A'} \underline{P}'^t d\underline{u}' dA' \quad (2.54)$$

ou

$$\int_{V'} \underline{\sigma}'^t d\underline{\varepsilon}' dV' = dW^e \quad (2.55)$$

$\underline{\sigma}'$  é o vetor que contém as componentes do segundo tensor de Piola-Kirchhoff no referencial  $\underline{x}'$ . Pode também ser considerado como a soma:

$$\underline{\sigma}' = \underline{\bar{\sigma}}^i + \underline{\sigma}^i \quad (2.56)$$

onde  $\underline{\bar{\sigma}}^i$  é o vetor de tensões de Cauchy relativo às deformações ocorridas entre as configurações (n) e (i) e  $\underline{\sigma}^i$  o vetor de tensões Piola-Kirchhoff no referencial  $\underline{x}'$  correspondente às deformações processadas entre as configurações (i) e (d).  $\underline{\varepsilon}'$  é o vetor de deformações de Green no referencial  $\underline{x}'$  devido às deformações entre as posições (i) e (d), sendo  $d\underline{\varepsilon}'$  o seu incremento.  $\underline{u}'$  são os deslocamentos de um ponto qualquer do elemento entre as configurações (i) e (d). Os demais escalares e vetores das Equações (2.54) e (2.55) são definidos de forma semelhante aos da seção anterior, desta feita, no referencial intermediário.

De maneira análoga à da Seção 2.5, pode-se definir a matriz  $\underline{A}'$  e os vetores  $\underline{\varepsilon}'_0$  e  $\underline{\theta}'$ , dos gradientes dos deslocamentos, entre as posições (i) e (d), relativos às coordenadas do referencial intermediário.

O vetor de Green, no referencial  $\underline{x}'$ , pode ser escrito na forma:

$$\underline{\varepsilon}' = \underline{\varepsilon}'_0 + \underline{\varepsilon}'_L \quad (2.57)$$

como na Equação (2.36), em que

$$\underline{\varepsilon}'_L = \frac{1}{2} \underline{A}' \underline{\theta}' \quad (2.58)$$

são seus termos não-lineares (Equação (2.37)). O incremento deste vetor, como na Equação (2.48), fica:

$$d\underline{\varepsilon}' = d\underline{\varepsilon}'_0 + \underline{A}' d\underline{\theta}' \quad (2.59)$$

Supondo que o elemento, dentro de um processo incremental de carregamento, se encontra na posição intermediária, então os deslocamentos  $\underline{u}'$  de um ponto qualquer do mesmo podem ser obtidos dos deslocamentos nodais  $\underline{\delta}'$ , como<sup>3,4,9</sup>:

$$\underline{u}' = \underline{N}' \underline{\delta}' \quad (2.60)$$

onde  $\underline{N}'$  é a matriz das funções de interpolação. É expressa em termos das coordenadas da posição intermediária  $\underline{x}'$ .

Os deslocamentos virtuais  $d\underline{u}'$  são escritos diferenciando-se a Equação (2.60), ou seja,

$$d\underline{u}' = \underline{N}' d\underline{\delta}' \quad (2.61)$$

O vetor dos gradientes dos deslocamentos  $\underline{\theta}'$  pode ser relacionado aos deslocamentos nodais por:

$$\underline{\theta}' = \underline{G}' \underline{\delta}' \quad (2.62)$$

onde a matriz gradiente  $\underline{G}'$  contém as derivadas das funções de interpolação de  $\underline{N}'$ . A Equação (2.62), como definida, é uma re

lação linear permitindo escrever que

$$d\theta' = G' d\delta' \quad (2.63)$$

As componentes lineares do vetor de Green, da Equação (2.57), são obtidas dos deslocamentos nodais  $\delta'$  através da matriz de deformações  $B'_0$ , que contém derivadas das funções de interpolação de  $N'$ , na forma:

$$\varepsilon'_0 = B'_0 \delta' \quad (2.64)$$

A variação de  $\varepsilon'_0$  é

$$d\varepsilon'_0 = B'_0 d\delta' \quad (2.65)$$

Com base nas Equações (2.57), (2.58), (2.62) e (2.64), o vetor de deformações de Green, no referencial  $x'$ , é expresso em função dos deslocamentos nodais como:

$$\varepsilon' = (B'_0 + \frac{1}{2} B'_L) \delta' \quad (2.66)$$

onde

$$B'_L(\delta') = A' G' \quad (2.67)$$

é uma matriz de deformações lineares. Como  $A'$  é função de  $\theta'$ , então  $\varepsilon'$  será função não-linear de  $\delta'$ .

A variação do vetor de Green da Equação (2.66), levando em conta as Equações (2.59), (2.60) e (2.65), é:

$$d\bar{\underline{\epsilon}}' = \bar{\underline{B}}' d\bar{\underline{\delta}}' \quad (2.68)$$

onde a matriz de deformações  $\bar{\underline{B}}'$  pode ser escrita como:

$$\bar{\underline{B}}'(\bar{\underline{\delta}}') = \bar{\underline{B}}'_0 + \bar{\underline{B}}'_L \quad (2.69)$$

Substituindo as Equações (2.61) e (2.68) na Equação (2.54), tem-se a aproximação do princípio dos trabalhos virtuais, para o elemento considerado, escrevendo-se:

$$d\bar{\underline{\delta}}'^t \int_{V'} \bar{\underline{B}}'^t \bar{\underline{\sigma}}' dV' = d\bar{\underline{\delta}}'^t \int_{V'} \bar{\underline{N}}'^t \rho' Q dV' + d\bar{\underline{\delta}}'^t \int_{A'} \bar{\underline{N}}'^t \bar{\underline{P}}' dA' \quad (2.70)$$

As equações de equilíbrio nodal, obtidas a partir da Equação (2.70), tomam a forma:

$$\int_{V'} \bar{\underline{B}}'^t \bar{\underline{\sigma}}' dV' = \int_{V'} \bar{\underline{N}}'^t \rho' Q dV' + \int_{A'} \bar{\underline{N}}'^t \bar{\underline{P}}' dA' \quad (2.71)$$

Esta também pode ser colocada como:

$$\bar{\underline{\psi}}'(\bar{\underline{\delta}}') = \int_{V'} \bar{\underline{B}}'^t \bar{\underline{\sigma}}' dV' - \bar{\underline{R}} = \bar{\underline{0}} \quad (2.72)$$

onde  $\bar{\underline{R}}$  representa o vetor de forças nodais equivalentes devido às forças de volume  $\rho' Q$  e às forças de superfície  $\bar{\underline{P}}'$ , consideradas concentradas nos nós.  $\bar{\underline{\psi}}'$  é o vetor das forças residuais. O sistema da Equação (2.72), quando convenientemente estendido a todo o domínio, representa as equações de equilíbrio da estrutura.



### 2.6.1 - Matriz de Rigidez Tangente

A matriz de rigidez tangente, para um elemento, em um determinado incremento, é <sup>3,4</sup>:

$$\underline{K}'_T = \left[ \frac{\partial \underline{\psi}'}{\partial \underline{\delta}'} \right] \quad (2.73)$$

Derivando a Equação (2.72) obtém-se esta matriz na forma:

$$\underline{K}'_T = \int_{V'} \underline{B}'^t \left[ \frac{\partial \underline{\sigma}'}{\partial \underline{\delta}'} \right] dV' + \int_{V'} (\underline{L}' \underline{B}')^t dV' \quad (2.74)$$

onde:

$$\left[ \frac{\partial \underline{\sigma}'}{\partial \underline{\delta}'} \right]_{ij} = \frac{\partial \sigma'_i}{\partial \delta'_j} \quad (2.75)$$

em que  $i = 1, 2, \dots, 6$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ , e  $\underline{L}'$  é um operador diferencial definido por:

$$L'_{k\ell} = \sigma'_\ell \frac{\partial}{\partial \delta'_k} \quad (2.76)$$

em que  $k = 1, 2, \dots, n$  e  $\ell = 1, 2, \dots, 6$ , sendo  $n$  o número de graus de liberdade do elemento. Substituindo a Equação (2.68) em uma relação análoga à da Equação (2.22), tem-se que:

$$\left[ \frac{\partial \underline{\sigma}'}{\partial \underline{\delta}'} \right] = \underline{D}'_T \underline{B}' \quad (2.77)$$

A matriz de deformações  $\underline{B}'$  é expressa na Equação (2.69) como a soma das matrizes de coeficientes constantes  $\underline{B}'_0$  e de coeficientes lineares  $\underline{B}'_L = \underline{A}' \underline{G}'$ . O segundo termo da Equação (2.74) pode ser reescrito em função apenas das deformações lineares, como:

$$\int_{V'} (\underline{L}' \quad \underline{B}')^t dV' = \int_{V'} (\underline{L}' \quad \underline{A}' \quad \underline{G}')^t dV' \quad (2.78)$$

Wood<sup>3</sup> verifica que uma componente típica do termo  $\underline{L}' \underline{A}'$  é  $(\partial^2 u' / \partial x' \partial \delta'_k)$ , que é um coeficiente da matriz gradiente  $\underline{G}'$  da Equação (2.62), e escreve que

$$(\underline{L}' \quad \underline{A}' \quad \underline{G}')^t = \underline{G}'^t \underline{S}' \underline{G}' \quad (2.79)$$

onde

$$\underline{S}' = \begin{bmatrix} \sigma'_x \underline{I}_3 & \tau'_{xy} \underline{I}_3 & \tau'_{xz} \underline{I}_3 \\ \tau'_{xy} \underline{I}_3 & \sigma'_y \underline{I}_3 & \tau'_{yz} \underline{I}_3 \\ \tau'_{xz} \underline{I}_3 & \tau'_{yz} \underline{I}_3 & \sigma'_z \underline{I}_3 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

e  $\underline{I}_3$  é a matriz identidade  $3 \times 3$ .

A matriz de rigidez tangente do elemento pode ser colocada na forma:

$$\underline{K}'_T = \underline{K}'_D + \underline{K}'_\sigma \quad (2.81)$$

onde

$$\underline{K}'_D = \int_{V'} \underline{B}'^t \underline{D}'_T \underline{B}' dV' \quad (2.82)$$

e

$$\underline{K}'_{\sigma} = \int_{V'} \underline{G}'^t \underline{S}' \underline{G}' dV' \quad (2.83)$$

## 2.7 - O ELEMENTO DE TRELIÇA ESPACIAL

A formulação para o elemento de treliça espacial é desenvolvida considerando-se um referencial intermediário. Posteriormente é particularizada para as formulações Lagrangeana e Lagrangeana Atualizada<sup>10</sup>.

### 2.7.1 - Formulação em Relação a Um Referencial Intermediário

Supõe-se inicialmente um elemento de treliça na configuração não deformada (natural) cujo sistema de referência é identificado por  $\underline{x}$  no sistema local. Ao deformar-se, durante um incremento de cargas, o elemento passa pelo referencial intermediário, em que os eixos de referência são os de coordenada  $\underline{x}'$ . Posteriormente, atinge a posição final do incremento, na qual os eixos cartesianos locais são representados por  $\bar{\underline{x}}$ . As três posições e referenciais do elemento são representadas para o plano na Figura (2.6).

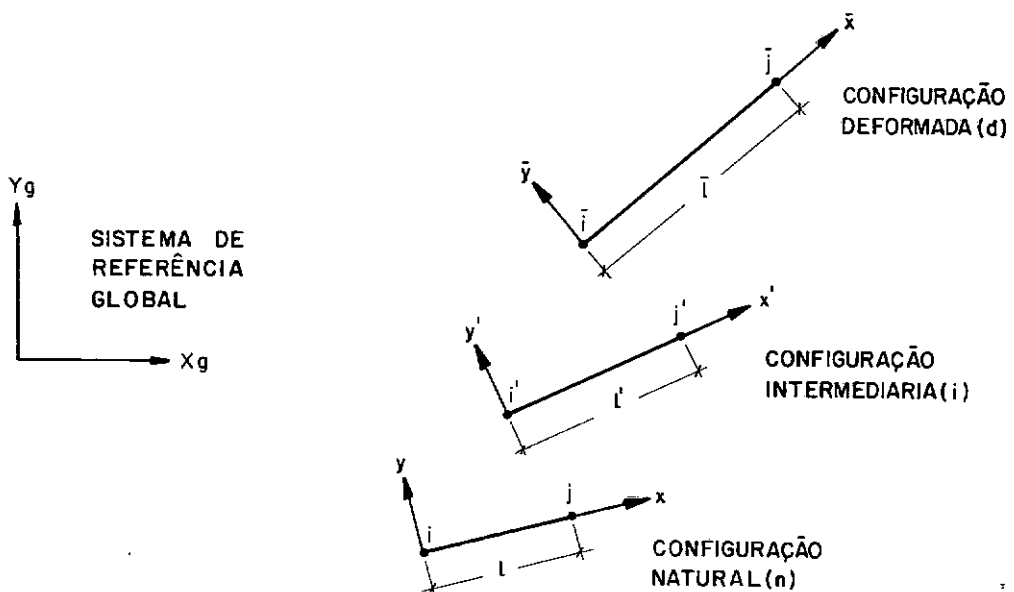


FIGURA 2.6 - O ELEMENTO DE TRELIÇA NAS CONFIGURAÇÕES: NATURAL (n), INTERMEDIÁRIA (i) E DEFORMADA (d), REPRESENTADO PARA O PLANO.

O princípio dos trabalhos virtuais para o elemento na posição deformada é escrito, de acordo com a Equação (2.42), na forma:

$$A \int_{\bar{x}} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}_0 d\bar{x} = dW^e \quad (2.84)$$

em que  $d\bar{\epsilon}_0$  e  $\bar{\sigma}$  são as primeiras componentes, do incremento do vetor de deformações e do vetor de tensões, respectivamente, de Cauchy.  $A$  é a área da seção transversal não deformada do elemento, que é mantida constante por se tratar de um elemento unidimensional. Nesta forma

$$\bar{\epsilon}_0 = \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \quad (2.85)$$

e os deslocamentos nodais entre as posições inicial e final, mostradas para o plano na Figura 2.7, são:

$$\underline{\delta} = [u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j]^t \quad (2.86)$$

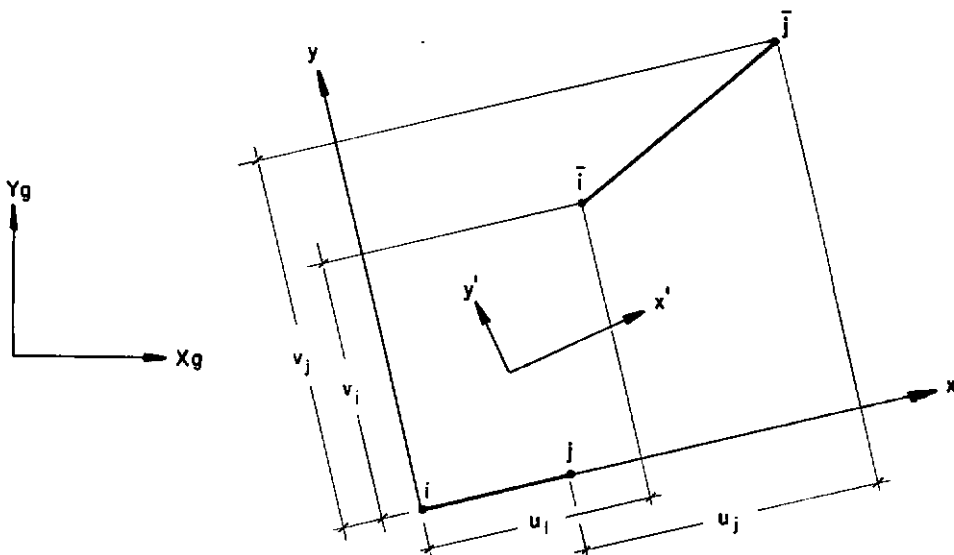


FIGURA 2.7 - DESLOCAMENTOS DO ELEMENTO DA POSIÇÃO INICIAL À FINAL, REPRESENTADOS PARA O PLANO

O princípio dos trabalhos virtuais em relação ao referencial Lagrangeano, como na Equação (2.47), é dado por:

$$A \int_{\ell} \sigma \, d\epsilon \, dx = dW^e \quad (2.87)$$

onde  $d\epsilon$  e  $\sigma$  são as primeiras componentes, do incremento do vetor de deformações de Green e do vetor de tensões Piola-Kirchhoff, respectivamente.  $A$  é também a área da seção transversal não deformada do elemento. Tem-se então que

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.88)$$

Adotando agora o referencial coincidente com a configuração intermediária ( $\underline{x}'$ ), a equação do princípio dos trabalhos virtuais, Equação (2.55), toma a forma:

$$A \int_{\ell'} \sigma' \, d\epsilon' \, dx' = dW^e \quad (2.89)$$

onde

$$\sigma' = \bar{\sigma}^i + \sigma^i \quad (2.90)$$

$\sigma'$ ,  $\bar{\sigma}^i$  e  $\sigma^i$  são as primeiras componentes, respectivamente, do vetor de tensões Piola-Kirchhoff no referencial  $\underline{x}'$ , do vetor de tensões de Cauchy correspondente às deformações processadas entre as configurações (n) e (i), e do vetor de tensões Piola-Kirchhoff no referencial  $\underline{x}'$  relativo às deformações ocorridas entre as configurações (i) e (d).  $\epsilon'$  é a primeira componente do vetor de deformações de Green no referencial  $\underline{x}'$  devido às deformações entre as configurações (i) e (d), sendo  $d\epsilon'$  o

o seu incremento. Nesta forma

$$\varepsilon' = \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 \right] \quad (2.91)$$

onde, de acordo com a Equação (2.57),

$$\varepsilon' = \varepsilon'_O + \varepsilon'_L \quad (2.92)$$

e os deslocamentos nodais entre as configurações intermediária e final são

$$\underline{\delta}' = [u'_1, v'_1, w'_1, u'_j, v'_j, w'_j]^t \quad (2.93)$$

que são mostrados para o plano na Figura 2.8. Os deslocamentos de um ponto qualquer do elemento poderão ser calculados através das funções de interpolação da matriz  $\underline{N}'$ , como na Eq. (2.60), na qual

$$\underline{N}' = \begin{bmatrix} \xi' & 0 & 0 & \eta' & 0 & 0 \\ 0 & \xi' & 0 & 0 & \eta' & 0 \\ 0 & 0 & \xi' & 0 & 0 & \eta' \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

onde

$$\xi' = 1 - \frac{x'}{\ell'} \quad (2.95)$$

e

$$\eta' = \frac{x'}{\ell'} \quad (2.96)$$

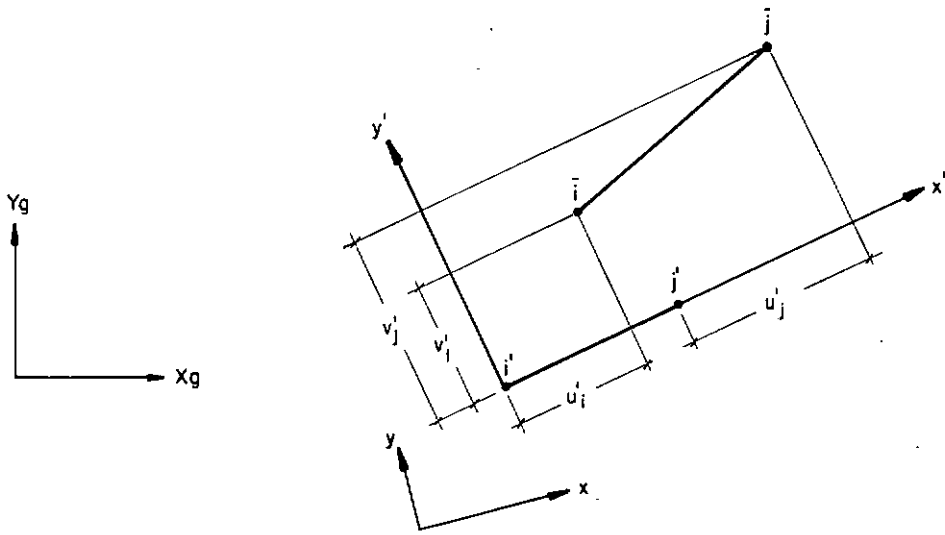


FIGURA 2.8 - DESLOCAMENTOS DO ELEMENTO ENTRE AS POSIÇÕES INTERMEDIÁRIA E FINAL, REPRESENTADOS PARA O PLANO

A primeira componente do vetor de Green da Equação (2.92), também escrita de acordo com a Equação (2.66), fica:

$$\epsilon' = (\underline{B}'_O + \frac{1}{2} \underline{B}'_L) \underline{\delta}' \quad (2.97)$$

onde, da Equação (2.64),

$$\begin{aligned} \epsilon'_O &= \underline{B}'_O \underline{\delta}' \\ &= \frac{\partial u'}{\partial x'} \end{aligned} \quad (2.98)$$

sendo

$$\underline{B}'_O = \frac{1}{\ell'} [-1, 0, 0, 1, 0, 0] \quad (2.99)$$

e

$$\begin{aligned}\epsilon'_L &= \frac{1}{2} \underline{B}'_L \underline{\delta}' \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (2.100)$$

sendo que, como na Equação (2.67)

$$\underline{B}'_L = \underline{A}' \underline{G}' \quad (2.101)$$

ou seja,

$$\underline{B}'_L = \frac{1}{\ell'} \left[ - \frac{\partial u'}{\partial x'}, - \frac{\partial v'}{\partial x'}, - \frac{\partial w'}{\partial x'}, \frac{\partial u'}{\partial x'}, \frac{\partial v'}{\partial x'}, \frac{\partial w'}{\partial x'} \right] \quad (2.102)$$

em que

$$\underline{A}' = \left[ \frac{\partial u'}{\partial x'}, \frac{\partial v'}{\partial x'}, \frac{\partial w'}{\partial x'} \right] \quad (2.103)$$

e

$$\underline{G}' = \frac{1}{\ell'} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

De acordo com a Equação (2.69), obtém-se

$$\begin{aligned}\underline{B}' &= \underline{B}'_O + \underline{B}'_L \\ &= \frac{1}{\ell'} \left[ - \left( 1 + \frac{\partial u'}{\partial x'} \right), - \frac{\partial v'}{\partial x'}, - \frac{\partial w'}{\partial x'}, \left( 1 + \frac{\partial u'}{\partial x'} \right), \frac{\partial v'}{\partial x'}, \frac{\partial w'}{\partial x'} \right]\end{aligned}\quad (2.105)$$



Deve-se notar que, baseado na Equação (2.62),

$$\begin{aligned}\underline{\theta}' &= \underline{G}' \underline{\delta}' \\ &= \left[ \frac{\partial u'}{\partial x'}, \frac{\partial v'}{\partial x'}, \frac{\partial w'}{\partial x'} \right]^t\end{aligned}\quad (2.106)$$

No referencial Lagrangeano, a relação constitutiva tangente (que define a propriedade tangente do material) é expressa, como na Equação (2.19), de acordo com a equação

$$d\sigma = E_T d\epsilon \quad (2.107)$$

em que  $d\sigma$  é o incremento da primeira componente do vetor de tensões Piola-Kirchhoff e  $E_T$  é o módulo de elasticidade tangente.

Para um material elástico linear as relações constitutivas são escritas, como na Equação (2.20), na forma:

$$\sigma = E \epsilon \quad (2.108)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade. Para este tipo de material  $E$  e  $E_T$  são idênticos.

O módulo de elasticidade tangente  $E_T$  pode ser obtido diferenciando-se a Equação (2.108) e igualando-a à Equação (2.107):

$$E_T = \frac{dE(\epsilon)}{d\epsilon} \epsilon + E(\epsilon) \quad (2.109)$$

Como  $E_T$  é função apenas da deformação axial do elemento  $(\epsilon)$ ,

pode-se representá-lo graficamente como sendo o coeficiente angular da tangente, no gráfico  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ , para um valor de  $\epsilon$  considerado, como na Figura 2.9.

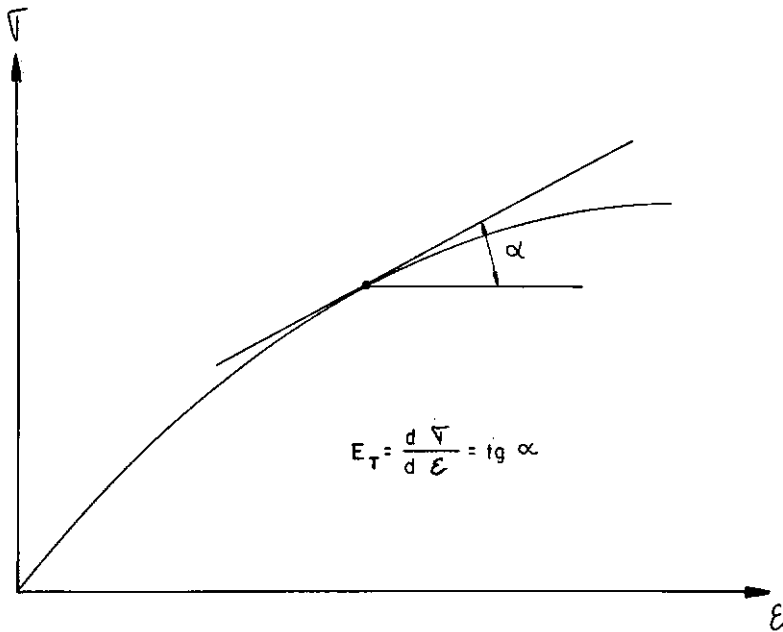


FIGURA 2.9 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE  $E_T$

Na configuração intermediária, o módulo de elasticidade tangente  $E'_T$  é obtido pela atualização de  $E_T$ , baseado na Equação (2.21), como:

$$E'_T = E_T \frac{\ell'^3}{\ell^3} \quad (2.110)$$

Pode-se escrever que, de acordo com a Equação (2.22),

$$d\sigma' = E'_T d\epsilon' \quad (2.111)$$

em que  $d\sigma'$  é o incremento de  $\sigma'$ . Como  $\bar{\sigma}^i$  não depende de  $\delta'$ , a Equação (2.111) pode ser reescrita como:

$$d\sigma^i = E'_T d\epsilon^i \quad (2.112)$$

onde  $d\sigma^i$  é o incremento de  $\sigma^i$ .

Para um material elástico linear, o módulo de elasticidade  $E'$ , no referencial intermediário, é obtido a partir de  $E$ , com base na Equação (2.21), de acordo com a relação:

$$E' = E \frac{\ell'^3}{\ell^3} \quad (2.113)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento  $\underline{K}'_T$ , de acordo com a Equação (2.81), é expressa pela soma das matrizes  $\underline{K}'_D$  e  $\underline{K}'_\sigma$ . A matriz  $\underline{K}'_D$  é obtida da Equação (2.82):

$$\underline{K}'_D = A \int_{\ell'} \underline{B}'^t E'_T \underline{B}' dx'$$

$$= A \ell' \underline{B}'^t E'_T \underline{B}'$$

$$= \frac{AE'_T}{\ell'} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} (1 + \frac{\partial u'}{\partial x'})^2 & (1 + \frac{\partial u'}{\partial x'}) \frac{\partial v'}{\partial x'} & (1 + \frac{\partial u'}{\partial x'}) \frac{\partial w'}{\partial x'} & - (1 + \frac{\partial u'}{\partial x'})^2 & - (1 + \frac{\partial u'}{\partial x'}) \frac{\partial v'}{\partial x'} & - (1 + \frac{\partial u'}{\partial x'}) \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ & (\frac{\partial v'}{\partial x'})^2 & \frac{\partial v'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial x'} & - (1 + \frac{\partial u'}{\partial x'}) \frac{\partial v'}{\partial x'} & - (\frac{\partial v'}{\partial x'})^2 & - \frac{\partial v'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ & & (\frac{\partial w'}{\partial x'})^2 & - (1 + \frac{\partial u'}{\partial x'}) \frac{\partial w'}{\partial x'} & - \frac{\partial v'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial x'} & - (\frac{\partial w'}{\partial x'})^2 \\ \hline & & & (1 + \frac{\partial u'}{\partial x'})^2 & (1 + \frac{\partial u'}{\partial x'}) \frac{\partial v'}{\partial x'} & (1 + \frac{\partial u'}{\partial x'}) \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ & \text{S I M É T R I C A} & & & (\frac{\partial v'}{\partial x'})^2 & \frac{\partial v'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ & & & & & (\frac{\partial w'}{\partial x'})^2 \end{array} \right]$$

De acordo com a Equação (2.83), obtem-se a matriz  $\underline{K}'_{\sigma}$ , na forma:

$$\begin{aligned}\underline{K}'_{\sigma} &= A \int_{\ell'} \underline{G}'^t \sigma' \underline{G}' dx' \\ &= A \ell' \underline{G}'^t \sigma' \underline{G}' \\ &= \frac{A}{\ell'} (\bar{\sigma}^i + \sigma^i) \begin{bmatrix} \underline{I}_3 & - \underline{I}_3 \\ - \underline{I}_3 & \underline{I}_3 \end{bmatrix} \quad (2.115)\end{aligned}$$

A resultante das tensões internas correspondentes ao estado de deformação do elemento, baseado na Equação (2.72), é:

$$\begin{aligned}\underline{F} &= A \int_{\ell'} \underline{B}'^t \sigma' dx' \\ &= A \ell' \underline{B}'^t \sigma' \\ &= A \sigma' \left[ - \left( 1 + \frac{\partial u'}{\partial x'} \right), - \frac{\partial v'}{\partial x'}, - \frac{\partial w'}{\partial x'}, \left( 1 + \frac{\partial u'}{\partial x'} \right), \frac{\partial v'}{\partial x'}, \frac{\partial w'}{\partial x'} \right]^t \quad (2.116)\end{aligned}$$

A formulação foi desenvolvida no sistema de eixos local, portanto os co-senos diretores do elemento devem também estar referidos à configuração coincidente com as coordenadas  $\underline{x}'$ .

### 2.7.2 - Formulação Lagrangeana

A formulação Lagrangeana pode ser derivada da formulação anterior. É necessário que o referencial intermediário, identificado por  $\underline{x}'$ , seja considerado coincidente com a posição inicial, de coordenadas  $\underline{x}$ , ou seja,

$$\underline{x}' = \underline{x} \quad (2.117)$$

e que se trabalhe com as coordenadas deste referencial Lagrangeano.

A tensão axial de Cauchy relativa às deformações entre os dois referenciais agora idênticos será

$$\bar{\sigma}^i = 0 \quad (2.118)$$

portanto,

$$\sigma' = \sigma^i = \sigma \quad (2.119)$$

é a tensão axial do segundo tensor de Piola-Kirchhoff. A deformação axial de Green passará a ser

$$\varepsilon' = \varepsilon \quad (2.120)$$

Os deslocamentos  $\underline{\delta}'$  e  $\underline{\delta}$  serão iguais, e os comprimentos  $\ell'$  e  $\ell$  do elemento também.

O módulo de elasticidade tangente é

$$E'_T = E_T \quad (2.121)$$

já comentado no Parágrafo 2.7.1. No caso do material elástico linear o módulo de elasticidade passará a ser

$$E' = E = E_T \quad (2.122)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento  $\underline{K}_T$  será a soma das matrizes  $\underline{K}_D$  e  $\underline{K}_\sigma$ , onde:

$$K_D = \frac{AE_T}{l} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} (1 + \frac{\partial u}{\partial x})^2 & (1 + \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial v}{\partial x} & (1 + \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial w}{\partial x} & - (1 + \frac{\partial u}{\partial x})^2 & - (1 + \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial v}{\partial x} & - (1 + \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial w}{\partial x} \\ & (\frac{\partial v}{\partial x})^2 & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} & - (1 + \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial v}{\partial x} & - (\frac{\partial v}{\partial x})^2 & - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \\ & & (\frac{\partial w}{\partial x})^2 & - (1 + \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial w}{\partial x} & - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} & - (\frac{\partial w}{\partial x})^2 \\ \hline & & & (1 + \frac{\partial u}{\partial x})^2 & (1 + \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial v}{\partial x} & (1 + \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial w}{\partial x} \\ & \text{S I M É T R I C A} & & & (\frac{\partial v}{\partial x})^2 & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \\ & & & & & (\frac{\partial w}{\partial x})^2 \end{array} \right] \quad (2.123)$$



e

$$\underline{K}_\sigma = \frac{A\sigma}{\ell} \begin{bmatrix} \underline{I}_3 & -\underline{I}_3 \\ -\underline{I}_3 & \underline{I}_3 \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

A resultante das tensões internas correspondentes ao estado de deformação do elemento torna-se

$$\underline{F} = A\sigma \left[ - \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right), - \frac{\partial v}{\partial x}, - \frac{\partial w}{\partial x}, \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right]^t \quad (2.125)$$

Na formulação Lagrangeana os co-senos diretores do elemento permanecem constantes e iguais ao do sistema local não deformado em qualquer incremento.

### 2.7.3 - Formulação Lagrangeana Atualizada

A formulação Lagrangeana Atualizada também pode ser derivada da formulação desenvolvida no referencial intermediário. Neste caso, o referencial intermediário, cujas coordenadas são  $\underline{x}'$ , é considerado coincidente com a posição final do incremento de cargas, identificado por  $\bar{\underline{x}}$ , ou seja,

$$\underline{x}' = \bar{\underline{x}} \quad (2.126)$$

Utiliza-se então o referencial da configuração deformada para o cálculo das tensões internas ao final do incremento de cargas, e o mesmo é mantido fixo nesta posição para o cálculo da matriz de rigidez tangente a ser utilizada no incremento posterior.

A tensão axial do segundo tensor de Piola-Kirchhoff correspondente às deformações entre os dois sistemas de referência citados, já coincidentes, é

$$\sigma^i = 0 \quad (2.127)$$

então,

$$\sigma' = \bar{\sigma}^i = \bar{\sigma} \quad (2.128)$$

sendo  $\bar{\sigma}$  a tensão axial de Cauchy. A deformação axial  $\epsilon'$  ficará nula e  $\bar{\epsilon}_0$  será a deformação axial de Cauchy.  $\underline{\delta}$  serão os deslocamentos entre as posições inicial e final, enquanto que os deslocamentos  $\underline{\delta}'$  se anularão. Os comprimentos  $\ell'$  e  $\bar{\ell}$  do elemento coincidem.

O módulo de elasticidade tangente, chamado então de  $\bar{E}_T$ , será

$$\bar{E}_T = E_T \frac{\bar{\ell}^3}{\ell^3} \quad (2.129)$$

No caso do material elástico linear o módulo de elasticidade torna-se

$$\bar{E} = E \frac{\bar{\ell}^3}{\ell^3} = \bar{E}_T \quad (2.130)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento  $\bar{K}_T$  pode ser decomposta na soma das matrizes  $\bar{K}_D$  e  $\bar{K}_\sigma$ , em que:

$$\bar{\mathbf{K}}_D = \frac{A\bar{E}_T}{\bar{\ell}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 \\ & \text{S I M.} & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

e

$$\bar{\mathbf{K}}_\sigma = \frac{A\bar{\sigma}}{\bar{\ell}} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{I}}_3 & -\underline{\mathbf{I}}_3 \\ \hline -\underline{\mathbf{I}}_3 & \underline{\mathbf{I}}_3 \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

Na formulação Lagrangeana Atualizada as coordenadas nodais do elemento e, conseqüentemente, os co-senos diretores, são corrigidos ao final de cada incremento. Com a finalidade de se trabalhar sempre com as tensões de Cauchy, a resultante das tensões internas correspondentes ao estado de deformação do elemento só é calculada após a atualização do referencial.

A tensão axial de Cauchy é obtida através da atualização do referencial, ou seja, da transformação da tensão axial (Piola-Kirchhoff). Tem-se então que<sup>6,7</sup>

$$\bar{\sigma} = \sigma \frac{\bar{\ell}}{\ell} \quad (2.133)$$

A resultante das tensões internas pode então ser obtida através da equação:

$$\underline{\mathbf{F}} = A\bar{\sigma} \underline{[-1, 0, 0, 1, 0, 0]}^t \quad (2.134)$$

A formulação Lagrangeana Atualizada é ainda uma formulação de descrição referencial, pois trabalha com incrementos do tensor de deformações de Green.

## 2.8 - OUTRAS FORMULAÇÕES

Desenvolveram-se neste trabalho as formulações Lagrangeana e Lagrangeana Atualizada para treliças espaciais a partir de formulações gerais. Procurou-se também avaliar os desempenhos destas formulações em relação às aproximações mais comumente empregadas.

Vários autores<sup>8,13,22,38</sup> apresentam formulações considerando grandes deslocamentos. A formulação proposta inicialmente por Martin<sup>14</sup>, estendida ao caso especial, também é analisada neste texto. Confrontou-se ainda os resultados de alguns exemplos apresentados em diversos trabalhos.

Para o elemento em estudo, a única formulação considerando grandes deformações é a apresentada por Jagannathan<sup>11,12</sup>. É também discutida na presente análise.

Martin<sup>14</sup> (posteriormente Cook<sup>13</sup>), para a análise não-linear geométrica usando a formulação Lagrangeana, escreve a deformação axial do elemento de treliça plana na forma:

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (2.135)$$

e obtém a matriz de rigidez tangente de acordo com a expressão:

$$\underline{\underline{K}}_T^M = \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{N}}_1^M + \underline{\underline{N}}_2^M \quad (2.136)$$

onde

$$\underline{\underline{K}} = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & & 0 \\ \hline & & 1 & 0 \\ \text{SIM.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.137)$$

$$\underline{\underline{N}}_1^M = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ & \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial x} \\ \hline & & 0 & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \text{S I M.} & & & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

e

$$\underline{\underline{N}}_2^M = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{3}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 & 0 & -\frac{3}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\ \hline & & 0 & 0 \\ \text{S I M.} & & & \frac{3}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

$\underline{\underline{K}}$ ,  $\underline{\underline{N}}_1^M$  e  $\underline{\underline{N}}_2^M$  são as matrizes, respectivamente, elástica linear

ou convencional, não-linear de primeira ordem e não-linear de segunda ordem. O índice M refere-se ao trabalho de Martin<sup>14</sup>.

O cálculo da resultante das tensões internas correspondentes ao estado de deformação do elemento é executado através da matriz de rigidez secante, ou seja,

$$\underline{K}_S^M = \underline{K} + \frac{1}{2} \underline{N}_1^M + \frac{1}{3} \underline{N}_2^M \quad (2.140)$$

fornecendo

$$\underline{F} = \underline{K}_S^M \underline{\delta} \quad (2.141)$$

Na mesma formulação apresentada por Martin<sup>14</sup>, para o elemento de treliça espacial, a deformação axial toma a forma:

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.142)$$

As matrizes  $\underline{K}$ ,  $\underline{N}_1^M$  e  $\underline{N}_2^M$  passam então a ser escritas como<sup>12</sup>:

$$\underline{K} = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ & \text{S I M.} & & \vdots & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

$$N_1^M = \frac{AE}{\ell} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial v}{\partial x} & -\frac{\partial w}{\partial x} \\ & \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial v}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ & & \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial w}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial u}{\partial x} \\ \hline & & & 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ & & & & \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ & & & & & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \text{S I M É T R I C A} & & & & & \end{array} \right]$$

(2.144)

e

$$N_2^M = \frac{AE}{\ell} \frac{3}{2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 & -\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \\ & & \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 & 0 & -\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} & -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \\ & & & & & \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \text{S I M É T R I C A} & & & & & \end{array} \right]$$

(2.145)

Jagannathan<sup>11, 12</sup> comenta sobre a influência do termo  $(\partial u / \partial x)^2 / 2$  na deformação axial, para o estudo de grandes deformações além de grandes deslocamentos, escrevendo-a na forma :

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.146)$$

ou seja, utiliza a expressão completa da deformação axial de Green para a formulação Lagrangeana, e que é a mesma usada no presente trabalho. Jagannathan<sup>11, 12</sup> trabalhando com a análise não linear geométrica, escreve a matriz de rigidez tangente  $\underline{K}_T^J$  de forma análoga à da Equação (2.136), sendo que:

$$\underline{N}_1^J = \frac{AE}{\ell} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 3 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} & - 3 \frac{\partial u}{\partial x} & - \frac{\partial v}{\partial x} & - \frac{\partial w}{\partial x} \\ & & & & & \\ & \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & - \frac{\partial v}{\partial x} & - \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ & & & & & \\ & & \frac{\partial u}{\partial x} & - \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & - \frac{\partial u}{\partial x} \\ \hline & & & 3 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ & \text{SIMÉTRICA} & & & \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \frac{\partial u}{\partial x} \end{array} \right] \quad (2.147)$$



$$N_2^J = \frac{AE}{\ell}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 \epsilon_L + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} & -\epsilon_L - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 & -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \\
 & \epsilon_L + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} & -\epsilon_L - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 & -\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \\
 & & \epsilon_L + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 & -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} & -\epsilon_L - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\
 \hline
 & & & \epsilon_L + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \\
 & & & & \epsilon_L + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \\
 & & & & & \epsilon_L + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2
 \end{array} \right] \quad (2.148)$$

S I M É T R I C A

em que

$$\epsilon_L = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.149)$$

O índice J refere-se aos trabalhos de Jagannathan<sup>11,12</sup>.

A resultante das tensões internas correspondentes ao estado de deformação do elemento, também é obtida de maneira análoga à da Equação (2.141), através da matriz de rigidez secante  $\underline{K}_S^J$ , semelhante à da Equação (2.140).

A matriz de rigidez tangente e a resultante das tensões internas, apresentadas por Jagannathan<sup>11,12</sup>, são matematicamente iguais às da formulação Lagrangeana apresentada no presente trabalho, considerando apenas a não-linearidade geométrica.

### III - MÉTODOS DE SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

Diversos algoritmos são propostos para a solução de sistemas de equações algébricas não-lineares. Os algoritmos de interesse devem entretanto atender a uma série de características especiais. Os processos apresentados neste trabalho se destinam à análise de estruturas pelo método dos elementos finitos, requerendo a solução de grandes sistemas de equações em cada etapa da análise. Na escolha de um dos métodos, importante atenção deve ser dada à precisão dos resultados e a eficiência computacional.

As equações de equilíbrio, qualquer que seja a formulação empregada, podem ser escritas na forma<sup>5, 24... 26, 34</sup> :

$$\underline{K} \underline{q} = \underline{P} + \underline{Q} \quad (3.1)$$

onde  $\underline{K}$  é a matriz de rigidez linear ou convencional,  $\underline{q}$  o vetor de deslocamentos nodais,  $\underline{P}$  o vetor de forças devido às cargas aplicadas, e  $\underline{Q}$  o vetor de pseudo-forças devido aos efeitos não-lineares. Os três vetores são referidos ao sistema de referência global.

Não sendo possível a obtenção da solução exata do sistema da Equação (3.1), torna-se conveniente a definição de equações de desequilíbrio nodal como segue:

$$\underline{\psi} = - \underline{K} \underline{q} + \underline{P} + \underline{Q} \quad (3.2)$$

em que  $\underline{\psi}$  é o vetor das forças de desequilíbrio nodal, ou seja,

das forças residuais,

O vetor  $\underline{P}$  pode ser colocado como o produto de um parâmetro de carga conveniente  $\lambda$  (escalar) e de um vetor de cargas normalizadas  $\underline{p}$ , ou seja,

$$\underline{P} = \lambda \underline{p} \quad (3.3)$$

Os métodos considerados neste trabalho foram agrupados, de acordo com a maneira que pretendem satisfazer à equação de forças residuais, em <sup>5, 24, 26</sup> :

- $\underline{\psi} = \underline{0}$  - métodos que efetuam iterações para restabelecer o equilíbrio;
- $\dot{\underline{\psi}} = \underline{0}$  - métodos incrementais (o ponto indica derivação em relação ao parâmetro de carga  $\lambda$ ), e
- $\dot{\underline{\psi}} + \underline{Z} \underline{\psi} = \underline{0}$  - métodos incrementais com correção.

### 3.1 - 1ª CLASSE: SOLUÇÃO COM VERIFICAÇÃO DO EQUILÍBRIO ( $\underline{\psi} = \underline{0}$ )

Nesta classe de métodos de solução das equações não-lineares, tenta-se satisfazer às equações de equilíbrio a menos de uma preestabelecida tolerância.

#### 3.1.1 - Método Iterativo de Newton-Raphson

O primeiro método considerado é o de Newton-Raphson <sup>5, 24, 27</sup>, no qual o carregamento pode também ser aplicado em incrementos.

O vetor de forças de desequilíbrio nodal correspondente aos deslocamentos estimados  $\underline{q}$  e às cargas aplicadas  $\underline{P}$ , tem a forma:

$$\underline{\psi}(\underline{q}) = - \underline{K} \underline{q} + \underline{P} + \underline{Q}(\underline{q}) \quad (3.4)$$

Desenvolvendo este vetor em série de Taylor em torno do ponto  $\underline{q}$ , obtém-se a seguinte expressão para os deslocamentos  $\underline{q} + \Delta \underline{q}$  :

$$\underline{\psi}(\underline{q} + \Delta \underline{q}) = \underline{\psi}(\underline{q}) + \left[ \frac{\partial \underline{\psi}(\underline{q})}{\partial \underline{q}} \right] \Delta \underline{q} + O[(\Delta \underline{q})^2] \quad (3.5)$$

No método de Newton-Raphson são mantidos apenas os dois primeiros termos da série da Equação (3.5), e considera-se que as forças residuais correspondentes aos deslocamentos  $\underline{q} + \Delta \underline{q}$  são desprezíveis. A Equação (3.5) é reduzida a:

$$- \left[ \frac{\partial \underline{\psi}(\underline{q})}{\partial \underline{q}} \right] \Delta \underline{q} = \underline{\psi}(\underline{q}) \quad (3.6)$$

As derivadas parciais da Equação (3.6) são fornecidas pela diferenciação das forças de desequilíbrio nodal da Equação (3.4), e obtém-se:

$$\left( \underline{K} - \left[ \frac{\partial \underline{Q}(\underline{q})}{\partial \underline{q}} \right] \right) \Delta \underline{q} = \underline{\psi}(\underline{q}) \quad (3.7)$$

A Equação (3.7) também é escrita na forma:

$$(\underline{K} + \underline{N}(\underline{q})_n) \Delta \underline{q}_{n+1} = \underline{\psi}(\underline{q})_n \quad (3.8)$$

onde  $n$  indica o passo iterativo atual ( $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ).  $\underline{N}(\underline{q})_n$  representa a matriz de rigidez não-linear devido aos deslocamentos estimados  $\underline{q}_n$ . A Equação (3.8) é resolvida para calcular os  $(n + 1)$ -ésimos incrementos dos deslocamentos. Estes incrementos são então usados para determinar um vetor de deslocamento

mentos melhorados  $q_{n+1}$ , em que

$$q_{n+1} = q_n + \Delta q_{n+1} \quad (3.9)$$

As Equações (3.8) e (3.9) são as relações de recorrência do método iterativo de Newton-Raphson. Com uma estimativa inicial dos deslocamentos, estas equações são utilizadas sucessivamente. O processo iterativo é realizado até que os incrementos dos deslocamentos ou as forças de desequilíbrio nodal sejam suficientemente pequenas. O critério de convergência utilizado é o da norma Euclideana modificada dos deslocamentos.

Quando as cargas são aplicadas em incrementos, o processo iterativo é empregado para cada valor de  $P$ . O método de solução procura satisfazer às equações de equilíbrio, isto é,  $\psi = 0$ , para cada incremento do carregamento.

Na Figura 3.1 é representada a forma de convergência do método para uma estrutura com um grau de liberdade e com o carregamento aplicado em apenas um incremento.

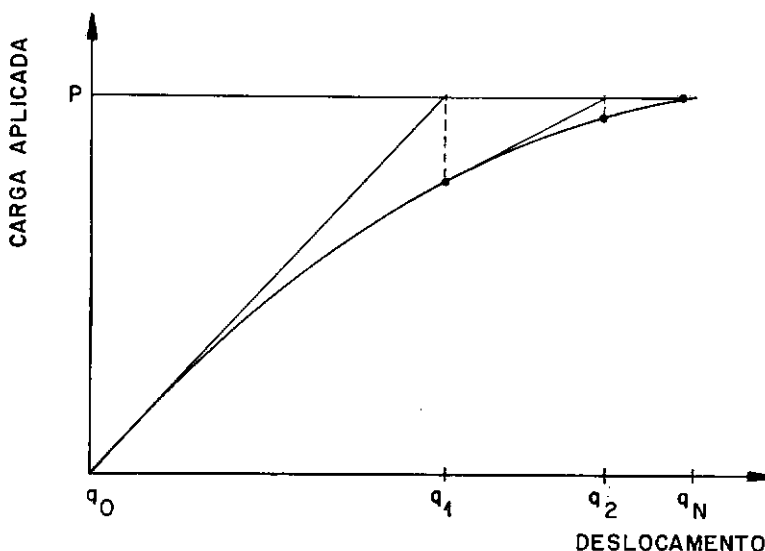


FIGURA 3.1 - MÉTODO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON

Deve-se notar que, na Equação (3.8),  $(\underline{K} + \underline{N})$  é a matriz de rigidez tangente.

### 3.1.2 - Método Iterativo de Newton-Raphson Modificado

A segunda técnica de solução estudada é o método iterativo de Newton-Raphson modificado. Este método é semelhante ao de Newton-Raphson convencional anterior, porém a matriz de rigidez tangente é mantida constante em várias iterações, só sendo atualizada quando se torna lenta a velocidade de convergência. Esta modificação visa uma diminuição do esforço computacional, evitando a geração constante da matriz de rigidez tangente.

Alguns autores comentam sobre a possibilidade do uso de um acelerador de convergência com o intuito de melhorar a eficiência do método.

No presente trabalho, considerou-se que a atualização é feita sempre que se inicia um incremento de cargas.

A representação da forma de convergência do método iterativo de Newton-Raphson modificado é mostrada na Figura 3.2, para uma estrutura com um grau de liberdade e a aplicação da carga em um incremento.

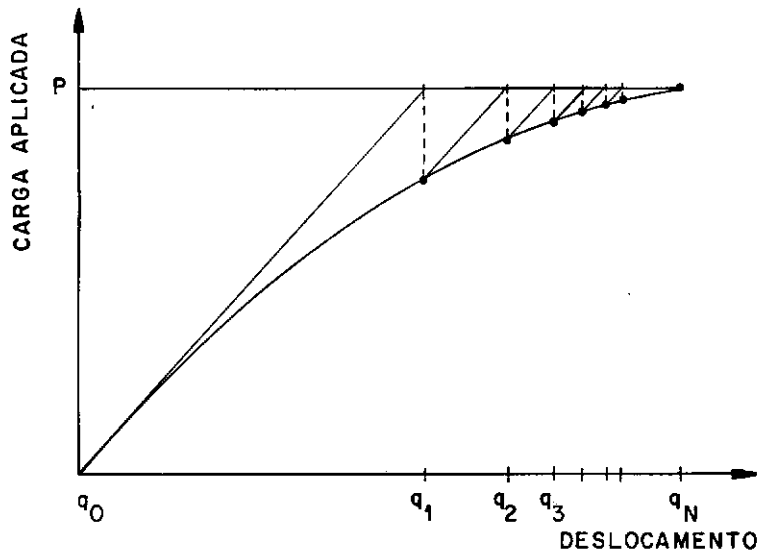


FIGURA 3.2 - MÉTODO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO

### 3.1.3 - Critérios de Convergência dos Métodos Iterativos

Os critérios de convergência usados na análise não linear de estruturas, através de métodos iterativos, podem ser divididos em três grupos: critério de forças, critério de tensões e critério de deslocamentos.

O critério de forças normalmente se baseia na comparação entre as forças de desequilíbrio nodal da estrutura e as cargas aplicadas. Seu uso é desaconselhado em estruturas em que os vetores de forças a serem comparados contenham grandezas de dimensões diferentes<sup>28</sup>.

No critério de tensões, verifica-se a variação das tensões durante um passo iterativo em relação a um nível de tensão prescrito. Este critério se adapta bem a treliças, cabos e membranas, sujeitos a grandes deformações<sup>28</sup>.



Quanto ao critério de deslocamentos, observe-se inicialmente a definição do vetor adimensional  $\epsilon$ <sup>28</sup> baseado nos deslocamentos da estrutura, e definido como:

$$\epsilon^{(j)} = \left[ \frac{\Delta q_1}{q_{1r}}, \frac{\Delta q_2}{q_{2r}}, \dots, \frac{\Delta q_i}{q_{ir}}, \dots, \frac{\Delta q_n}{q_{nr}} \right]_{(j)}^t \quad (3.10)$$

em que  $\Delta q_i^{(j)}$  é a variação no deslocamento componente  $i$  durante o passo iterativo  $j$ ,  $q_{ir}$  é o maior deslocamento componente, e  $n$  é o total de incógnitas. Três normas alternativas são então sugeridas para o valor deste vetor: a norma absoluta modificada

$$\|\epsilon\|_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\Delta q_i}{q_{ir}} \right| \quad (3.11)$$

a norma Euclideana modificada

$$\|\epsilon\|_2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\Delta q_i}{q_{ir}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

e a norma máxima

$$\|\epsilon\|_{\infty} = \max_i \left| \frac{\Delta q_i}{q_{ir}} \right| \quad (3.13)$$

Para qualquer das três normas, o critério de convergência usado é:

$$\|\epsilon\| < \gamma \quad (3.14)$$

em que  $\gamma$  geralmente varia de  $10^{-2}$  a  $10^{-6}$ , dependendo da precisão desejada.

Bergan<sup>28</sup> comparada as três normas dos deslocamentos para uma placa delgada (fortemente não-linear) e uma casca abatida (moderadamente não-linear), usando o método de Newton-Raphson, e apresenta um gráfico dos valores de  $\|\epsilon\|$  em função do número de iterações, reproduzido na Figura 3.3. As curvas obtidas variam quase que paralelamente, indicando não haver preferência entre uma norma ou outra.

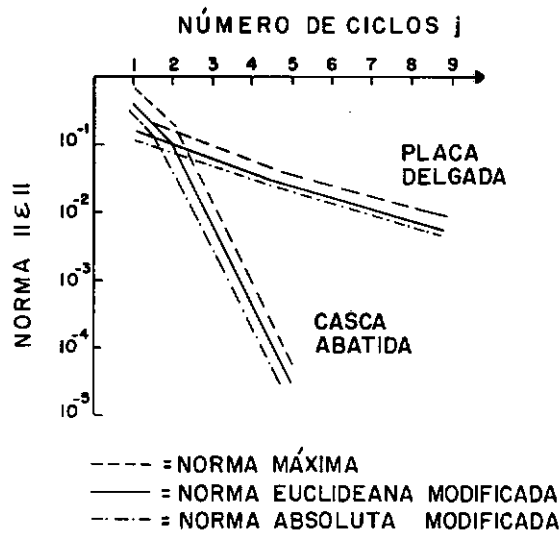


FIGURA 3.3 - COMPARAÇÃO ENTRE CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

No presente trabalho utiliza-se a norma Euclideana modificada dos deslocamentos. O valor de teste da convergência  $\gamma$  é fornecido como dado do programa (adotando-se quase sempre  $\gamma = 10^{-5}$ ).

#### 3.1.4 - Outros Métodos da Primeira Classe

Entre os métodos da primeira classe, também podem ser citados<sup>5</sup>: aproximações sucessivas, minimização direta do po-

tencial total e perturbação estática, não estudados neste trabalho.

### 3.2 - 2<sup>a</sup> CLASSE: SOLUÇÃO INCREMENTAL ( $\dot{\underline{\psi}} = \underline{0}$ )

A segunda classe dos métodos de solução contém aqueles que resolvem a Equação  $\dot{\underline{\psi}} = \underline{0}$ .

Derivando a Equação (3.1) com respeito ao parâmetro  $\lambda^{24}$ , tem-se:

$$\underline{K} \dot{\underline{q}} = \underline{p} + \dot{\underline{Q}} \quad (3.15)$$

Os coeficientes do vetor do último termo da Equação (3.15) assumem também a forma:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (3.16)$$

A Equação (3.15) pode então ser reescrita como:

$$(\underline{K} + \underline{N}) \dot{\underline{q}} = \underline{p} \quad (3.17)$$

em que os coeficientes da matriz  $\underline{N}$  são semelhantes aos de sua correspondente na Equação (3.8). O sistema da Equação (3.17) caracteriza a segunda classe.

#### 3.2.1 - Método Incremental Convencional

Considerou-se inicialmente o método incremental convencional, que é obtido aplicando-se o processo de diferença posterior de Euler para  $\dot{\underline{q}}$  na Equação (3.17)<sup>24</sup>, fornecendo então a expressão:

$$(\underline{K} + \underline{N}_m) \Delta \underline{q}_{m+1} = \Delta \underline{P} \quad (3.18)$$

em que  $m$  indica o incremento de cargas atual ( $m = 1, 2, \dots, M$ ). Esta mesma equação é também apresentada em outros trabalhos<sup>5, 25, 27</sup>.

Na Figura 3.4 é representada a solução obtida a cada incremento, para o método incremental convencional, em uma estrutura com um grau de liberdade.

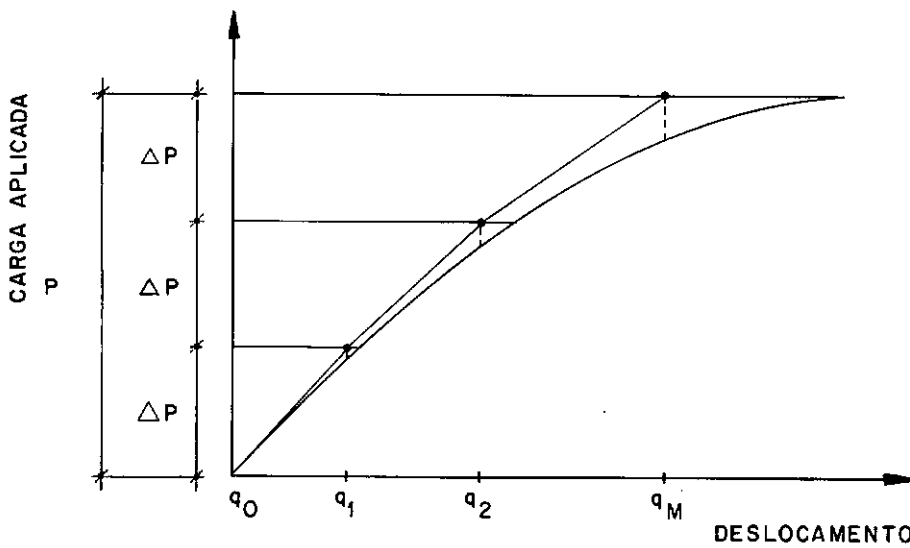


FIGURA 3.4 - MÉTODO INCREMENTAL CONVENCIONAL

### 3.2.2 - Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

A seguir, é apresentado o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Reescrevendo a Equação (3.17) como um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, obtém-se:

$$(\underline{K} + \underline{N}) \frac{d\underline{q}}{d\lambda} = \underline{p} \quad (3.19)$$

Cada equação deste sistema pode também assumir a forma:

$$\frac{dq_j}{d\lambda} = F_j (\lambda, q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (3.20)$$

em que  $j$  indica a equação considerada e  $n$  é o número total de equações.

Escrevendo a Equação (3.19) em forma incremental, tem-se<sup>29</sup> :

$$(\underline{K} + \underline{N}) \frac{\Delta q}{\Delta \lambda} = \underline{p} \quad (3.21)$$

As condições iniciais de cada uma das equações do sistema são

$$q_{ji} \approx q_j(\lambda_i) \quad (3.22)$$

sendo que  $j = 1, 2, \dots, n$ .  $q_{ji}$  é a solução da  $j$ -ésima equação para  $\lambda_i$ . As condições iniciais do problema  $q_{j0}$  geralmente são conhecidas, porém as do  $i$ -ésimo incremento de cargas são os resultados obtidos no intervalo anterior.

Para cada equação do sistema, a integração numérica pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, para o  $i$ -ésimo incremento de cargas, pode ser descrita por<sup>30</sup> :

$$q_{j,i+1} = q_{ji} + \frac{\Delta \lambda}{6} (k_{j1} + 2k_{j2} + 2k_{j3} + k_{j4}) \quad (3.23)$$

onde:

$$k_{j1} = F_j (\lambda_i, q_{1i}, q_{2i}, \dots, q_{ni}) \quad (3.24)$$

$$q_{ji}^* = q_{ji} + \frac{1}{2} \Delta \lambda k_{j1} \quad (3.25)$$

$$k_{j2} = F_j \left( \lambda_i + \frac{\Delta\lambda}{2}, q_{1i}^*, q_{2i}^*, \dots, q_{ni}^* \right) \quad (3.26)$$

$$\bar{q}_{ji} = q_{ji} + \frac{1}{2} \Delta\lambda k_{j2} \quad (3.27)$$

$$k_{j3} = F_j \left( \lambda_i + \frac{\Delta\lambda}{2}, \bar{q}_{1i}, \bar{q}_{2i}, \dots, \bar{q}_{ni} \right) \quad (3.28)$$

$$\bar{q}_{ji}^* = q_{ji} + \Delta\lambda k_{j3} \quad (3.29)$$

e

$$k_{j4} = F_j \left( \lambda_i + \Delta\lambda, \bar{q}_{1i}^*, \bar{q}_{2i}^*, \dots, \bar{q}_{ni}^* \right) \quad (3.30)$$

A Equação (3.23) é aplicada paralelamente a cada uma das  $n$  equações do sistema da Equação (3.21).

### 3.2.3 - Método "Predictor-Corrector" de Hamming

Considera-se a seguir o método "predictor-corrector" de Hamming. Hamming pesquisou várias classes de métodos tipo "corrector" de quarta ordem, e selecionou o que apresentava melhor combinação entre estabilidade e precisão, para ser usado com algum método tipo "predictor". Optou pelo "predictor" de Milne de quarta ordem, modificando-o através de uma estimativa do erro de truncamento. Esta mesma alteração foi também introduzida na etapa "corrector" do método<sup>30</sup>.

Seja o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, obtido da Equação (3.17) (Equação (3.19)):

$$(\underline{K} + \underline{N}) \frac{d\underline{q}}{d\lambda} = \underline{p} \quad (3.31)$$

em que cada equação assume também a forma (Equação (3.20)):

$$\frac{dq_j}{d\lambda} = F_j (\lambda, q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (3.32)$$

onde  $j = 1, 2, \dots, n$ . Em forma incremental a Equação (3.31) torna-se (Equação (3.21)):

$$(\underline{K} + \underline{N}) \frac{\Delta q}{\Delta \lambda} = \underline{p} \quad (3.33)$$

Para cada uma das equações do sistema, o método de Hamming necessita, além das condições iniciais do problema  $q_{j,0}$ , de três incrementos subsequentes  $q_{j,1}$ ,  $q_{j,2}$  e  $q_{j,3}$ , que são obtidos no método de Runge-Kutta, e das derivadas  $F_{j,0}$ ,  $F_{j,1}$ ,  $F_{j,2}$  e  $F_{j,3}$ , fornecidos pela Equação (3.32).

Apresenta-se a seguir o algoritmo do método "predictor-corrector" de Hamming, para uma equação qualquer  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). O processo é aplicado paralelamente para cada equação  $j$ , em cada incremento de cargas  $i$ <sup>30</sup>.

Seja  $q_{j,i}$  a solução estimada para a  $j$ -ésima variável dependente, ou seja,

$$q_{j,i} \approx q_j (\lambda_i) \quad (3.34)$$

e  $F_{j,i}$  a derivada calculada

$$F_{j,i} = F_j (\lambda_i, q_{1,i}, q_{2,i}, \dots, q_{n,i}) \quad (3.35)$$

Supõe-se que  $q_{j,i}$ ,  $q_{j,i-1}$ ,  $q_{j,i-2}$ ,  $q_{j,i-3}$ ,  $F_{j,i}$ ,  $F_{j,i-1}$  e  $F_{j,i-2}$  são conhecidos. É também considerado ser conhecido o erro de truncamento local  $e_{j,i}$  da etapa "corrector" do método.

A solução  $q_{j,i+1}^P$  é calculada através do método "predictor" de Milne como:

$$q_{j,i+1}^P = q_{j,i-3} + \frac{4}{3} \Delta\lambda (2 F_{j,i} - F_{j,i-1} + 2 F_{j,i-2}) \quad (3.36)$$

Esta solução é então modificada, levando em conta que o erro de truncamento local  $e_{j,i+1}$  não será muito diferente do valor estimado  $e_{j,i}$ , tendo-se:

$$\bar{q}_{j,i+1}^P = q_{j,i+1}^P + \frac{112}{9} e_{j,i} \quad (3.37)$$

e a derivada  $\bar{F}_{j,i+1}^P$  será:

$$\bar{F}_{j,i+1}^P = F_j(\lambda_{i+1}, \bar{q}_{1,i+1}^P, \bar{q}_{2,i+1}^P, \dots, \bar{q}_{n,i+1}^P) \quad (3.38)$$

Aplicando a etapa "corrector" do método, obtém-se então:

$$q_{j,i+1}^C = \frac{1}{8} \left[ 9 q_{j,i} - q_{j,i-2} + 3 \Delta\lambda (\bar{F}_{j,i+1}^P + 2 F_{j,i} - F_{j,i-1}) \right] \quad (3.39)$$

O erro de truncamento local estimado no atual incremento será:

$$e_{j,i+1} = \frac{9}{121} (q_{j,i+1}^C - q_{j,i+1}^P) \quad (3.40)$$

A solução final fornecida nesta etapa é obtida pela modificação da Equação (3.39), utilizando o erro de truncamento da Eq. (3.40), como segue:

$$q_{j,i+1} = q_{j,i+1}^C - e_{j,i+1} \quad (3.41)$$



O valor da derivada, para o incremento seguinte, será:

$$F_{j,i+1} = F_j (\lambda_{i+1}, q_{1,i+1}, q_{2,i+1}, \dots, q_{n,i+1}) \quad (3.42)$$

### 3.3 - 3ª CLASSE: AUTO-CORRETIVO DE PRIMEIRA ORDEM ( $\dot{\underline{\psi}} + Z\underline{\psi} = \underline{0}$ )

O método incremental auto-corretivo de primeira ordem é o que satisfaz à equação <sup>5,24 ... 26,31,32</sup>:

$$\dot{\underline{\psi}} + Z\underline{\psi} = \underline{0} \quad (3.43)$$

onde  $Z$  é um parâmetro escalar. Este método é mais estável e preciso em relação ao incremental convencional, pela adição do termo corretivo em cada incremento de cargas. Tal termo pretende assegurar que os deslocamentos obtidos devido às cargas aplicadas, se aproximam dos valores reais, fornecendo uma consequente melhora no equilíbrio estrutural.

A natureza auto-corretiva do processo pode ser observada quando é analisada a solução exata do sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem da Equação (3.43). A  $i$ -ésima componente da força de desequilíbrio que satisfaz à Equação (3.43), é escrita na forma:

$$\psi_i = C_0 e^{-Z\lambda} \quad (3.44)$$

Da Equação (3.44), verifica-se que, quando o parâmetro de carga  $\lambda$  cresce, a força de desequilíbrio decresce exponencialmente <sup>5,26</sup>.

Substituindo-se na Equação (3.43) a derivada do vetor de desequilíbrio nodal, da Equação (3.2), em relação ao pa

râmetro de carga  $\lambda$ , vem:

$$\underline{K} \dot{\underline{q}} = \underline{p} + \dot{\underline{Q}} + \underline{Z} \dot{\underline{\psi}} \quad (3.45)$$

A diferenciação dos coeficientes de  $\dot{\underline{Q}}$ , como na Equação (3.16), fornece:

$$(\underline{K} + \underline{N}) \dot{\underline{q}} = \underline{p} + \underline{Z} \dot{\underline{\psi}} \quad (3.46)$$

Aplicando-se o processo de diferença posterior de Euler para  $\dot{\underline{q}}$ , então:

$$(\underline{K} + \underline{N}_m) \Delta \underline{q}_{m+1} = \Delta \underline{P} + \underline{Z} \Delta \lambda \dot{\underline{\psi}} \quad (3.47)$$

em que  $m$  indica o incremento de cargas atual ( $m = 1, 2, \dots, M$ ), e  $Z\Delta\lambda$  é o fator de amplificação do desequilíbrio.

Stricklin<sup>5</sup> aconselha que  $Z\Delta\lambda$  deve variar entre 1,0 e 1,3. Comenta também, que grandes valores deste fator pouco influem na precisão das respostas, podendo inclusive levar à instabilidade do processo numérico em estruturas fortemente não-lineares que sofrem um rápido aumento de rigidez.

Quando  $Z\Delta\lambda = 1,0$  o método também é chamado de incremental modificado. Corresponde ao método de Newton-Raphson com uma iteração por incremento. O método incremental modificado é representado na Figura 3.5, para uma estrutura com um grau de liberdade.

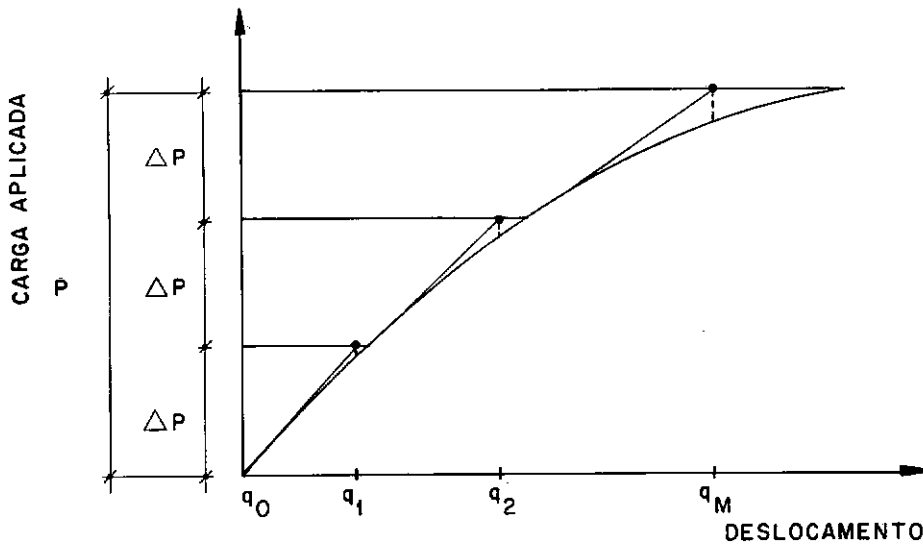


FIGURA 3.5 - MÉTODO INCREMENTAL MODIFICADO

Se o fator de amplificação do desequilíbrio é nulo, recai-se no método incremental convencional.

No programa de computador desenvolvido neste trabalho,  $Z\Delta\lambda$  é fornecido como dado do problema. Usou-se sempre  $Z\Delta\lambda = 1,3$  para o método incremental auto-corretivo de primeira ordem, além de  $Z\Delta\lambda = 1,0$  (método incremental modificado).

#### IV - PROGRAMA AUTOMÁTICO

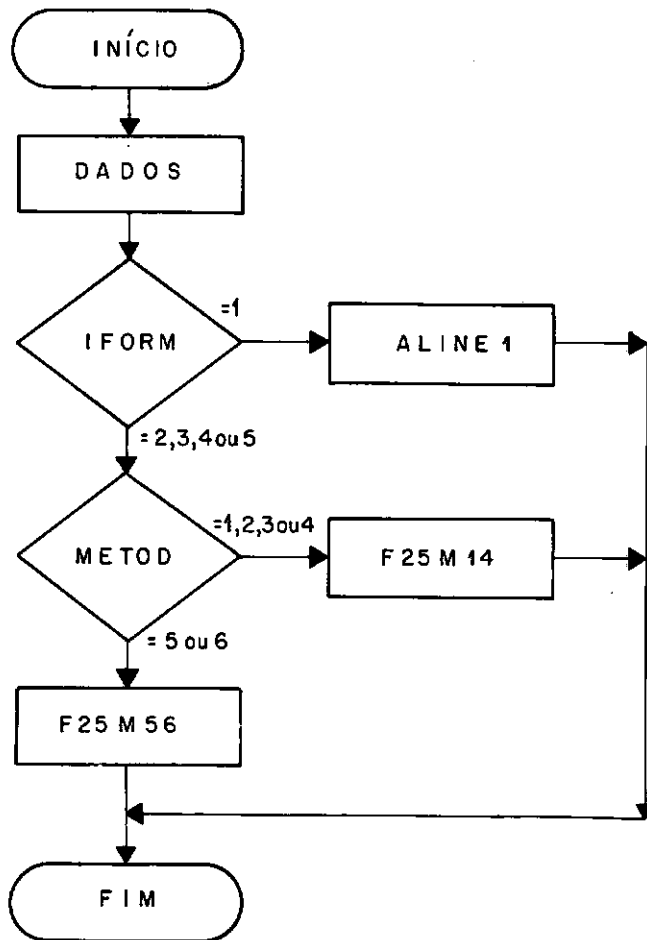
Neste capítulo é apresentado o programa ANALITE - Análise Não-Linear Geométrica e Física de Treliças Espaciais. Com a finalidade de comparar a precisão dos resultados e a eficiência computacional das formulações apresentadas no presente trabalho (Seção 2.7), o programa também dispõe das formulações desenvolvidas por Jagannathan<sup>11,12</sup> e Martin<sup>14</sup> (Seção 2.8). Efetua também os diferentes métodos de solução das equações não-lineares apresentados no Capítulo III. Os algoritmos apresentados seguem uma mesma linha de programação, semelhante ao exposto por Ebner<sup>23</sup>. São usadas rotinas de cálculo distintas apenas ao nível do elemento, validando a comparação dos custos de análise do programa.

Foi elaborado em linguagem FORTRAN-IV e implementado no computador Burroughs modelo B-6700 do Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Está listado em apêndice: programa principal, 31 sub-rotinas e uma função. Devido à grande variedade de opções de cálculo, tomou-se o cuidado de comentar as diversas tarefas que são executadas. O programa fonte dispões de 2.089 cartões.

##### 4.1 - PROGRAMA ANALITE

O programa principal tem a finalidade de ler os dados do problema (através da sub-rotina DADOS) e definir um dos três caminhos a ser percorrido, conforme a análise solicitada, através das sub-rotinas seguintes: ALINE1, F25M14 ou F25M56. No Quadro 4.1 está esquematizado este procedimento. Os índices IFORM e METHOD são lidos como dados e definem, respectivamente, a formulação desejada e o método escolhido. No Quadro 4.2 é mostrado o relacionamento do programa principal com as diversas sub

rotinas, que serão chamadas dependendo do algoritmo de cálculo que esteja sendo usado.

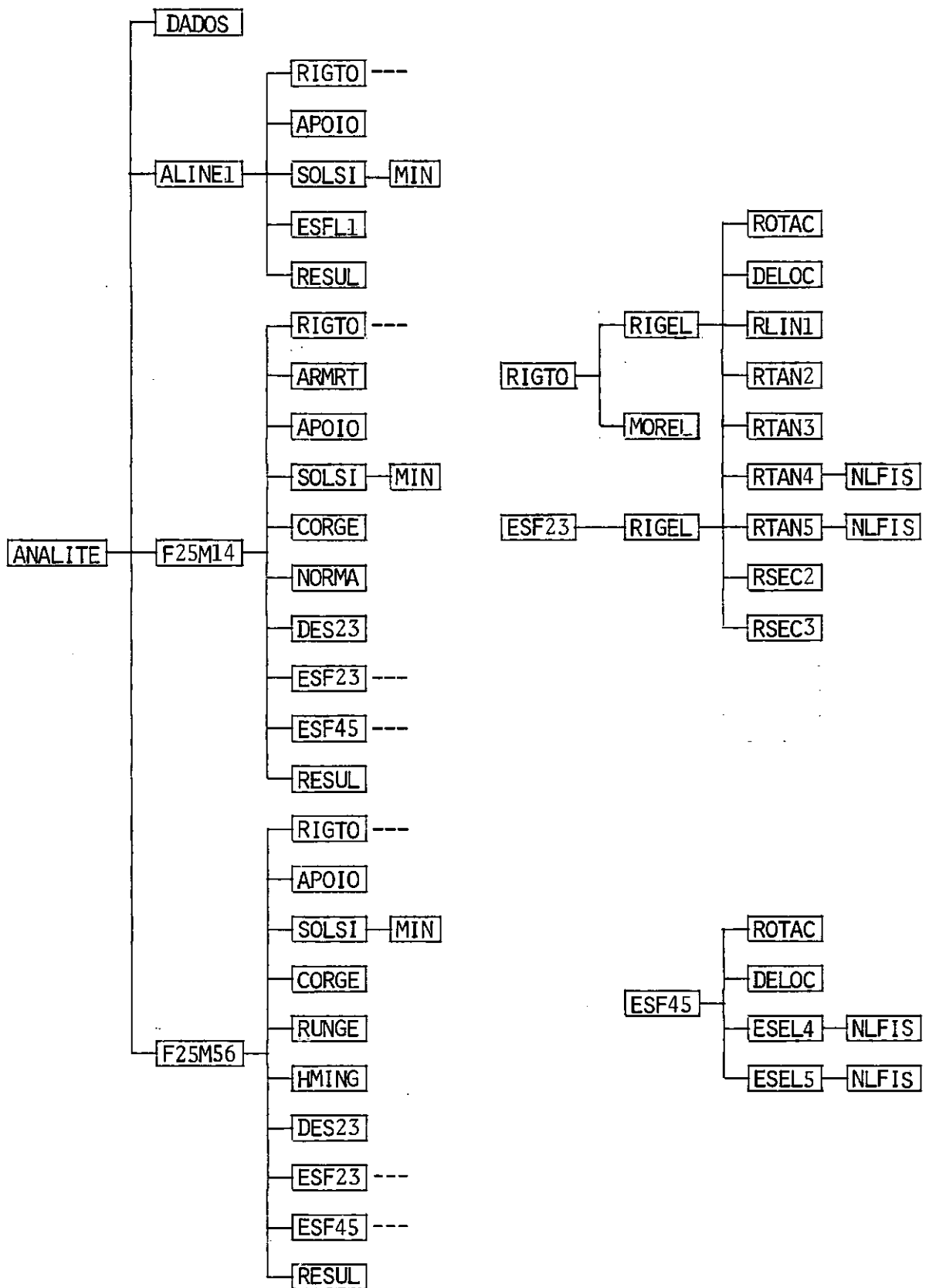


QUADRO 4.1 - PROGRAMA PRINCIPAL

#### 4.2 - SUB-ROTINAS DO PROGRAMA ANALITE

As funções de cada uma das sub-rotinas do programa ANALITE, resumidamente, são as seguintes:

**DADOS** - Lê, em cartões, os dados do problema e armazena as variáveis na memória principal. Imprime os dados e retorna ao programa principal. Esta sub-rotina permite também a leitura de vários exemplos consecutivos.



QUADRO 4.2 - RELAÇÕES ENTRE O PROGRAMA PRINCIPAL E AS SUB-ROTINAS

- ALINE1 - Efetua a análise linear da estrutura. Chama as sub-rotinas indicadas no Quadro 4.2. Seu algoritmo está comentado na listagem do programa.
- F25M14 - Executa a análise não-linear geométrica e física da estrutura para as diversas formulações. São os seguintes os métodos incrementais de solução que emprega: iterativo de Newton-Raphson, iterativo de Newton-Raphson modificado, incremental convencional e incremental auto-corretivo de primeira ordem. O Quadro 4.2 mostra as sub-rotinas necessárias ao algoritmo de cálculo, que está bem comentado na própria listagem do programa.
- F25M56 - Contém os algoritmos dos métodos de integração numérica: Runge-Kutta de quarta ordem e "predictor-corrector" de Hamming, para a análise não-linear geométrica e física, nas diversas formulações. Estão apresentadas no Quadro 4.2 as sub-rotinas utilizadas neste procedimento. Na listagem do programa encontram-se todos os comentários necessários ao entendimento do algoritmo de cada um dos métodos.
- RIGTO - Gera a matriz de rigidez total: elástica linear (análise linear), e tangente ou secante (análise não-linear), dependendo do índice fornecido pelas sub-rotinas do primeiro nível (ALINE1, F25M14 ou F25M56). Para cada elemento da estrutura, chama as sub-rotinas RIGEL e MOREL.
- RIGEL - Calcula a matriz de rigidez do elemento: no sistema local (ESF23) ou no sistema global (RIGTO). Requer as sub-rotinas ROTAC e DELOC, e, dependendo do índice fornecido, calcula a matriz de rigidez do elemento solicitada, por meio de uma das sub-rotinas indicadas no Quadro 4.2.
- ROTAC - Calcula a matriz de rotação ou, a matriz de rotação e sua transposta, para o elemento.

- DELOC - Calcula os deslocamentos nodais do elemento no sistema local.
- RLIN1 - Calcula os coeficientes da matriz de rigidez elástica linear (convencional) para o sistema local (análise linear).
- RTAN2 - Calcula os coeficientes da matriz de rigidez tangente do elemento no sistema local para a formulação Lagrangeana apresentada por Jagannathan<sup>11,12</sup> (análise não-linear geométrica).
- RTAN3 - Calcula os coeficientes da matriz de rigidez tangente do elemento no sistema local para a formulação Lagrangeana desenvolvida por Martin<sup>14</sup> (análise não-linear geométrica e tensor de deformações desprezando o termo  $(\partial u / \partial x)^2 / 2$ ).
- RTAN4 - Calcula os coeficientes da matriz de rigidez tangente do elemento no sistema local para a análise não-linear geométrica e física através da formulação Lagrangeana (desenvolvida no presente trabalho). Utiliza a sub-rotina NLFIS se solicitado.
- RTAN5 - Calcula os coeficientes da matriz de rigidez tangente do elemento no sistema local para a formulação Lagrangeana Atualizada, considerando não-linearidade geométrica e física (desenvolvida no presente trabalho). Solicita a sub-rotina NLFIS quando necessário.
- RSEC2 - Calcula os coeficientes da matriz de rigidez secante do elemento no sistema local para a formulação Lagrangeana desenvolvida por Jagannathan<sup>11,12</sup> (análise não-linear geométrica).
- RSEC3 - Calcula os coeficientes da matriz de rigidez secante do elemento no sistema local para a formulação Lagrangeana apresentada por Martin<sup>14</sup> (análise não-linear geométrica e tensor de deformações desprezando o termo  $(\partial u / \partial x)^2 / 2$ ).



- NLFIS - Introduz a não-linearidade física no elemento .
- MOREL - Armazena adequadamente a matriz de rigidez do elemento na matriz de rigidez total. É a mesma sub-rotina ELASS<sup>33</sup> .
- ARMRT - Armazena a matriz de rigidez tangente total calculada no primeiro passo iterativo de cada incremento de cargas do método de Newton-Raphson modificado.
- APOIO - Introduz as condições de contorno (restrições nodais) no sistema de equações lineares, utilizando a técnica dos "zeros e uns".
- SOLSI - É a sub-rotina encarregada da solução do sistema de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss, para sistemas simétricos em banda. Esta sub-rotina utiliza a função MIN.
- CORGE - No caso da formulação Lagrangeana Atualizada, a sub-rotina CORGE atualiza a geometria da estrutura, ou seja, corrige as coordenadas nodais.
- NORMA - No caso dos métodos iterativos, a sub-rotina NORMA calcula a norma Euclideana modificada dos deslocamentos, para posterior verificação da convergência na sub-rotina F25M14.
- RUNGE - É a sub-rotina responsável pela integração numérica do sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. Os valores das derivadas necessários ao processo são calculados com o auxílio das sub-rotinas RIGTO, SOLSI e APOIO. A sub-rotina RUNGE é chamada quatro vezes em cada incremento de cargas. É uma versão adaptada da função RUNGE<sup>30</sup> .
- HMING - Efetua a integração numérica do sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem pelo método "predictor-corrector" de Hamming. As sub-rotinas RIGTO,

SOLSI e APOIO são também utilizadas para auxiliar no cálculo dos valores das derivadas requeridas pelo algoritmo. Esta sub-rotina é chamada duas vezes por incremento de carregamento. A mesma é uma versão adaptada da função HAMING<sup>30</sup>.

- ESFL1 - Calcula os esforços nos elementos, no caso da análise linear.
- DES23 - Calcula o vetor de desequilíbrio nodal, e as cargas de equilíbrio nodal do final do incremento (cargas aplicadas e reações de apoio), no caso das formulações não-lineares que fazem uso da matriz de rigidez secante.
- ESF23 - Calcula os esforços nos elementos, no caso das formulações não-lineares que utilizam matriz de rigidez secante.
- ESF45 - A sub-rotina ESF45 é requisitada nas formulações que calculam diretamente o equilíbrio nodal (apresentadas no presente trabalho), ou seja, não fazem uso da matriz de rigidez secante. Esta sub-rotina calcula os esforços nos elementos, o vetor de desequilíbrio nodal, e as cargas aplicadas e reações de apoio (equilíbrio nodal no final do incremento).
- ESEL4 - Esta sub-rotina é chamada pela ESF45, para calcular os esforços no elemento no sistema local, no caso da formulação Lagrangeana. Quando necessário se vale da sub-rotina NLFIS.
- ESEL5 - Calcula os esforços no elemento no sistema local, no caso da formulação Lagrangeana Atualizada, quando requisitada pela sub-rotina ESF45. Se necessário esta sub-rotina chama NLFIS.
- RESUL - Encarrega-se da saída dos resultados na impressora. Dependendo do índice IMPRE fornecido ao programa, os resultados serão impressos: ao final de cada passo itera-

tivo (nos métodos iterativos), ao final de cada incremento, ou apenas ao final da análise (último incremento).

#### 4.3 - MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA

No Quadro 4.3, são apresentados os dados de entrada que devem ser fornecidos ao programa. Está indicado, por coluna: o número de ordem, o número de cartões, as variáveis, os formatos das variáveis e observações. Alguns comentários se fazem necessários.

##### 4.3.1 - 1º Conjunto: Título do Programa

Os três primeiros cartões são destinados ao título. Cada um dos cartões pode ser utilizado da coluna 1 à 80 .

##### 4.3.2 - 2º Conjunto: Tipo de Análise

Este cartão define se a análise é linear ou não-linear. Se a não-linearidade for apenas geométrica todos os dados estão contidos no cartão, porém, a não-linearidade física só é definida nos dois conjuntos de cartões seguintes. Nesta etapa o programa verifica a consistência dos dados.

ORDEM	Nº DE CARTÕES	VARIÁVEIS	FORMATOS	OBS.
1	3	TITUL(I)	20A4	
2	1	IFORM, METOD, MINCR, MITER, GAMA, ZDLAM, IMPRE	2(9X, I1), 2(5X, I5), F10.8, F10.5, 9X, I1	
3	1	NN, NE, NNAP, NNCR, E, NPONT	4(4X, I6), F10.0, 5X, I5	
4	NPONT	I, SIG(I), EPS(I)	5X, I5, 2F10.5	*
5	NN	I, X(I), Y(I), Z(I)	4X, I6, 3F10.4	
6	NE	I, ICON(N1+1), ICON(N1+2), PROP(I), onde $N1 = NNE * (I-1)$	3(4X, I6), F10.5	
7	NNAP	J, IAPO(L1+1), IAPO(L1+2), IAPO(L1+3), onde $L1 = (NGL+1) * (I-1) + 1$ , I = 1 → NNAP	4X, I6, 3(9X, I1)	
8	1	NUMER, TICAR(I)	6X, I4, 10A4	
9	NNCR	J, P(L+1), P(L+2), P(L+3), onde $L = NGL * (J-1)$	4X, I6, 3F10.3	
(*) Este conjunto de cartões só é lido se NPONT, do conjunto anterior, for maior que zero				

### QUADRO 4.3 - DADOS DE ENTRADA DO PROGRAMA

Os significados das variáveis são:

- IFORM - índice que define a formulação;
- METOD - índice que define o método de solução;
- MINCR - número de incrementos;
- MITER - número máximo de iterações por incremento;
- GAMA - valor de teste da convergência;
- ZDLAM - fator de amplificação do desequilíbrio, e
- IMPRE - índice que define o tipo de impressão.

O índice IFORM define a formulação a ser escolhi-

da de acordo com os valores seguintes:

- 1 - análise linear;
- 2 - análise não-linear geométrica,  
formulação Lagrangeana,  
tensor de deformações completo e  
equilíbrio nodal através da matriz de rigidez secante;
- 3 - análise não-linear geométrica,  
formulação Lagrangeana,  
tensor de deformações desprezando o termo  $(\partial u / \partial x)^2 / 2$  e  
equilíbrio nodal através da matriz de rigidez secante;
- 4 - análise não-linear geométrica e física,  
formulação Lagrangeana,  
tensor de deformações completo e  
cálculo direto do equilíbrio nodal, e
- 5 - análise não-linear geométrica e física,  
formulação Lagrangeana Atualizada,  
tensor de deformações completo e  
cálculo direto do equilíbrio nodal.

No caso da análise linear os demais dados do cartão deverão ser nulos.

O valor de METHOD, que define o método incremental a ser utilizado para a análise não-linear, pode ser:

- 1 - iterativo de Newton-Raphson;
- 2 - iterativo de Newton-Raphson modificado;
- 3 - incremental convencional;
- 4 - incremental auto-corretivo de primeira ordem;
- 5 - Runge-Kutta de quarta ordem, e
- 6 - "predictor-corrector" de Hamming.

MINCR é o número de incrementos que deverá ser fornecido à escolha do usuário. Todos os métodos necessitam deste dado.

O número máximo de iterações por incremento MINCR e o valor de teste da convergência GAMA só deverão ser fornecidos aos dois métodos iterativos. É aconselhável que GAMA varie de  $10^{-2}$  a  $10^{-6}$ .

O fator de amplificação do desequilíbrio é exclusivo do método incremental auto-corretivo de primeira ordem. É recomendável que ZDLAM varie entre 1,0 e 1,3<sup>5</sup>. O método incremental modificado é utilizado quando ZDLAM = 1,0.

Na escolha do tipo de impressão, IMPRE assume os valores:

- 0 - resultados apenas no final da análise (último incremento);
- 1 - resultados no fim de cada incremento;
- 2 - resultados em cada passo iterativo.

O valor IMPRE = 2 só deve ser fornecido aos métodos iterativos.

#### 4.3.3 - 3º Conjunto: Parâmetros Básicos

As variáveis deste cartão são:

- NN - número de nós;
- NE - número de elementos;
- NNAP - número de nós apoiados;
- NNCR - número de nós carregados;
- E - módulo de elasticidade, e
- NPONT - número de pontos do gráfico tensão-deformação.

Caso a análise desejada seja linear ou não-linear geométrica apenas, o valor de NPONT deverá ser nulo e o programa não requer o quarto conjunto de dados. Se for desejada também a não-linearidade física não deverá ser fornecido um valor para E, mas para NPONT.

#### 4.3.4 - 4º Conjunto: Não-Linearidade Física

Este conjunto de cartões só é lido se NPONT, do conjunto anterior, for maior que zero. Neste caso o número de cartões é igual a NPONT.

As variáveis deste conjunto são:

I - ponto do gráfico tensão-deformação;

SIG(I) - valor da tensão no ponto I, e

EPS(I) - valor da deformação no ponto I.

O gráfico tensão-deformação ( $\sigma \times \epsilon$ ) é mostrado na Figura 4.1. O programa interpola por retas os pontos do gráfico, que é considerado ser antissimétrico, ou seja, uma função ímpar:  $\sigma(\epsilon) = -\sigma(-\epsilon)$ . A partir do último ponto especificado a extrapolação é feita com a tangente horizontal neste ponto.

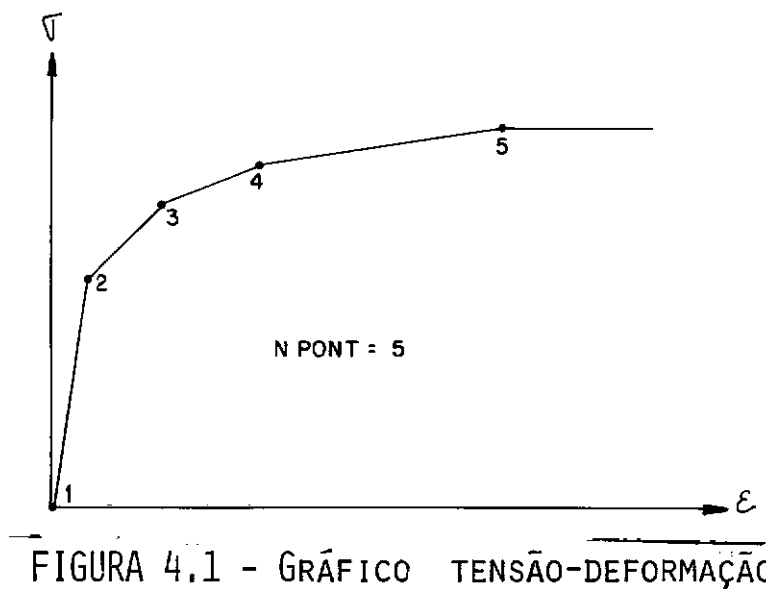


FIGURA 4.1 - GRÁFICO TENSÃO-DEFORMAÇÃO

#### 4.3.5 - 5º Conjunto: Coordenadas Nodais

Neste conjunto de dados, as variáveis são:  $I$  - o número do nó; e  $X(I)$ ,  $Y(I)$  e  $Z(I)$  - as coordenadas nodais do nó  $I$  em relação ao sistema de referência global.

#### 4.3.6 - 6º Conjunto: Conectividades e Propriedades dos Elementos

As variáveis deste conjunto são:

$I$  - número do elemento;  
 $ICON(N1+1)$  - nó inicial;  
 $ICON(N1+2)$  - nó final, e  
 $PROP(I)$  - área do elemento.

$NNE$  é o número de nós por elemento, que, para o de treliça espacial é igual a dois.

#### 4.3.7 - 7º Conjunto: Condições de Contorno

Neste conjunto são lidas as condições de contorno, isto é, as restrições nodais.  $IAPO$  é o vetor dos indicadores das condições de restrição, que são iguais a zero, quando o apoio é prescrito, ou iguais a um, quando livre.

As variáveis são:  $J$  - número do nó; e  $IAPO(L1+1)$ ,  $IAPO(L1+2)$  e  $IAPO(L1+3)$  - indicadores das condições de restrição do nó  $J$  respectivamente nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ .  $NGL$  é o número de graus de liberdade de cada nó do elemento, que é igual a três para o de treliça espacial.

#### 4.3.8 - 8º Conjunto: Título do Carregamento

As variáveis deste cartão são:

$NUMER$  - número do carregamento, e  
 $TICAR(I)$  - título do carregamento.



O título do carregamento poderá ser fornecido entre as colunas 11 e 50.

#### 4.3.9 - 9º Conjunto: Cargas Nodais

As variáveis deste conjunto são: J - número do nó;  
e  $P(L+1)$ ,  $P(L+2)$  e  $P(L+3)$  - cargas aplicadas no nó J nas direções x, y e z , respectivamente.

## V - EXEMPLOS

Com a finalidade de comparar as formulações e os métodos de solução utilizados no programa, além da eficiência computacional, diversos exemplos são apresentados.

Para se referir aos métodos de solução dos sistemas de equações não-lineares, utilizou-se a seguinte simbologia:

- (1) - iterativo de Newton-Raphson;
- (2) - iterativo de Newton-Raphson modificado;
- (3) - incremental convencional;
- (4-1)- incremental modificado;
- (4-2)- incremental auto-corretivo de primeira ordem;
- (5) - Runge-Kutta de quarta ordem, e
- (6) - "predictor-corrector" de Hamming .

No método incremental auto-corretivo de primeira ordem usou-se sempre o fator de amplificação do desequilíbrio igual a 1,3 .

O valor de teste da convergência para a norma Euclideana modificada dos deslocamentos, nos métodos iterativos, foi considerada igual a  $10^{-5}$ . Caso não seja feita nenhuma afirmação em contrário, o número máximo de iterações por incremento será limitado em 20.

Como o método de Newton-Raphson fornece o equilíbrio nodal da estrutura, os erros percentuais para os resultados comparados foram calculados em relação ao mesmo.

O programa foi desenvolvido no sistema Burroughs B-6700 do Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Os custos das análises correspondem ao

segundo semestre de 1978 com a USC (Unidade de Serviços de Computação) no valor de Cr\$ 1,00.

### 5.1 - ESTRUTURAS COM UM ÚNICO GRAU DE LIBERDADE

Os dois primeiros exemplos analisados são as estruturas das Figuras 5.1 e 5.3, exemplos clássicos. É considerada apenas a não-linearidade geométrica.

#### 5.1.1 - Treliça Plana - Dois Elementos

O exemplo da Figura 5.1 é fortemente não-linear. Inicialmente, avaliou-se a qualidade das respostas em função do número de incrementos. Comparou-se, em seguida, os resultados obtidos por cada método para uma determinada formulação. Por último, foi confrontada a precisão das formulações. A solução dita "exata" é 19,984, considerando-se grandes deformações.

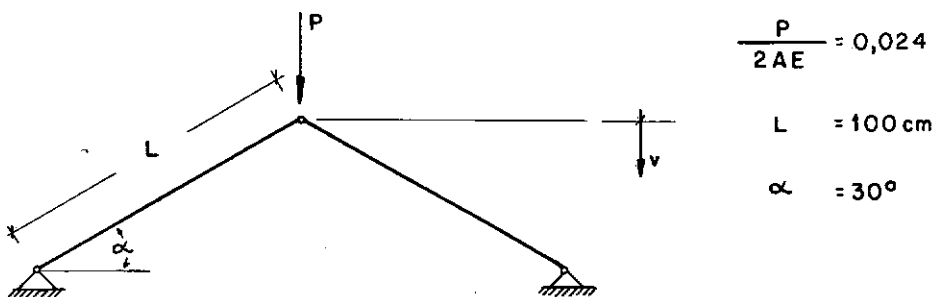


FIGURA 5.1

No Quadro 5.1 são mostrados os deslocamentos  $v$  e os custos para as formulações Lagrangeana e Lagrangeana Atualizada (apresentadas neste trabalho), para os diversos métodos de solução empregados com diferentes números de incrementos. As for

mulações proporcionam os mesmos resultados. Nas diversas opções apresentadas no quadro, apenas as respostas ao final da análise foram requeridas, sendo igual o custo da impressão para todos os casos.

Neste exemplo, para o método de Newton-Raphson modificado, foi permitido um número máximo de iterações por incremento maior que 20. Na forma em que foi programado (com a matriz de rigidez só sendo gerada uma vez por incremento), o Quadro 5.2 apresenta o número de iterações necessárias no último incremento para se obter a convergência em cada caso.

Nº DE INCR.	FORMULAÇÃO	M É T O D O													
		(1)		(2)		(3)		(4-1)		(4-2)		(5)		(6)	
		v	CUSTO	v	CUSTO	v	CUSTO	v	CUSTO	v	CUSTO	v	CUSTO	v	CUSTO
1	Lagrangeana		62,17		76,35		69,10		84,32		62,72		74,34		74,20
	Lag. Atual.	19,984	68,12	19,970	81,06	9,599	67,15	9,599	73,24	9,599	70,26	18,216	65,74	18,216	62,01
2	Lagrangeana		69,07		73,76		71,38		76,72		72,25		75,69		70,39
	Lag. Atual.	19,984	69,69	19,975	67,86	11,412	68,73	12,334	68,66	12,610	70,06	18,999	68,26	18,999	65,57
5	Lagrangeana		75,87		73,63		68,74		80,93		75,89		73,41		73,68
	Lag. Atual.	19,984	69,21	19,979	68,25	13,661	69,37	15,431	71,83	15,662	71,37	19,605	75,27	19,160	66,92
10	Lagrangeana		76,10		76,21		68,34		74,57		74,59		83,95		77,19
	Lag. Atual.	19,984	76,04	19,981	71,07	15,146	76,24	17,035	72,10	17,197	62,61	19,843	76,37	19,616	74,23
20	Lagrangeana		85,19		82,20		72,65		80,49		73,22		94,29		77,92
	Lag. Atual.	19,984	88,92	19,982	71,01	16,400	81,92	18,151	78,32	18,263	69,93	19,953	90,93	19,854	78,21
100	Lagrangeana		158,67		125,20		106,42		108,24		100,42		175,53		124,26
	Lag. Atual.	19,984	144,72	19,984	108,82	18,428	101,73	19,520	101,56	19,561	97,62	19,988	165,70	19,993	119,26

QUADRO 5.1 - DESLOCAMENTOS v(cm) E CUSTOS (Cr\$) PARA DIFERENTES NÚMEROS DE INCREMENTOS

NÚMERO DE INCREMENTOS	NÚMERO DE ITERAÇÕES NO ÚLTIMO INCREMENTO
1	117
2	84
5	54
10	38
20	27
100	12

QUADRO 5.2 - MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO

O Quadro 5.3 apresenta os deslocamentos  $v$ , os erros percentuais ao final da análise e os custos de cada um dos métodos estudados. O número de incrementos de carga foi igual a 20, e os resultados foram obtidos ao final de cada um. Empregou-se a formulação Lagrangeana Atualizada.

INCR.	$\frac{P}{2AE}$	M É T O D O						
		(1)	(2)	(3)	(4-1)	(4-2)	(5)	(6)
2	0,0024	0,989	0,989	0,974	0,981	0,983	0,989	0,989
4	0,0048	2,043	2,043	2,010	2,034	2,036	2,043	2,043
6	0,0072	3,176	3,176	3,118	3,164	3,167	3,176	3,176
8	0,0096	4,405	4,405	4,315	4,390	4,393	4,405	4,405
10	0,0120	5,755	5,755	5,622	5,736	5,740	5,755	5,755
12	0,0144	7,267	7,267	7,071	7,241	7,247	7,267	7,267
14	0,0168	9,007	9,007	8,712	8,968	8,976	9,007	9,007
16	0,0192	11,106	11,106	10,635	11,037	11,050	11,106	11,106
17	0,0204	12,374	12,374	11,752	12,273	12,292	12,374	12,374
18	0,0216	13,895	13,895	13,022	13,729	13,757	13,895	13,896
19	0,0228	15,899	15,899	14,520	15,552	15,600	15,899	15,904
20	0,0240	19,984	19,982	16,400	18,151	18,263	19,953	19,854
ERRO (%)		0,00	- 0,01	-17,93	- 9,17	- 8,61	- 0,16	- 0,65
CUSTO (Cr\$)		68,58	64,76	53,08	52,32	53,54	67,54	58,70

QUADRO 5.3 -- DESLOCAMENTOS  $v(\text{cm})$ , ERROS E CUSTOS DOS MÉTODOS

Os métodos de Newton-Raphson e de Newton-Raphson modificado fornecem a solução "exata", e são apresentados num gráfico carga-deslocamento ( $P \times v$ ), para uma visualização do comportamento da estrutura e comparação com a análise linear, na Figura 5.2. O método de Runge-Kutta se mostra preciso até o 19º incremento, enquanto que o "predictor-correção" até o 18º, e seus resultados finais são satisfatórios. Os erros dos métodos incrementais auto-corretivo de primeira ordem e modificado podem ser significativos, dependendo da precisão desejada. As respostas do método incremental convencional são deficientes.

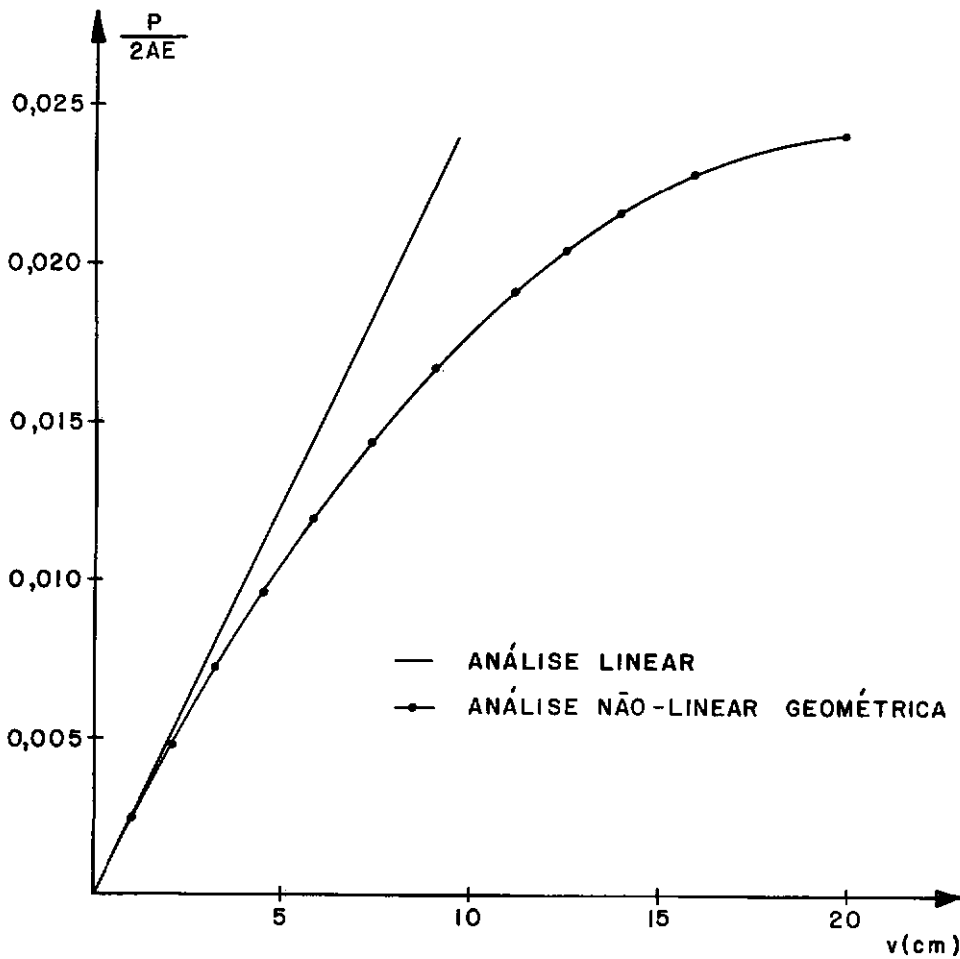


FIGURA 5.2

Os custos dos métodos de solução com os resultados sendo fornecidos a cada incremento deveriam ser maiores que os correspondentes no Quadro 5.1, pois além da quantidade de linhas impressas ser aproximadamente 20 vezes maior, a impressão aumenta o tempo de processamento. Isto é explicado pelo fato de, naquele caso, ter-se efetuado uma compilação adicional.

No Quadro 5.4 são mostrados os deslocamentos finais, os erros percentuais e os custos, para as formulações Lagrangeana e Lagrangeana Atualizada (apresentadas no presente trabalho) e para as desenvolvidas por Jagannathan<sup>11,12</sup> e Martin<sup>14</sup> (também calculadas no programa), além das apresentadas por outros autores. Nas quatro formulações programadas foi utilizado o método de Newton-Raphson com 20 incrementos.

FORMULAÇÃO	DESLOCAMENTO v (cm)	ERRO (%)	CUSTO (Cr\$)
Lagrangeana	19,984	0,00	70,51
Lagrangeana Atual.	19,984	0,00	68,58
Jagannathan <sup>11,12</sup>	19,984	0,00	85,48
Martin <sup>14</sup>	13,332	33,29	81,89
Halbritter <sup>16</sup>	14,760	26,14	-
Mantilla <sup>35</sup>	14,169	29,09	-
Tezcan <sup>36</sup>	14,168	29,10	-

QUADRO 5.4 - COMPARAÇÃO ENTRE FORMULAÇÕES

A formulação Lagrangeana Atualizada é geralmente mais eficiente que a Lagrangeana (veja-se também o Quadro 5.1). Neste caso a diferença foi de 2,81%. As formulações que calculam o equilíbrio nodal através da matriz de rigidez secante têm a eficiência diminuída. Neste exemplo a formulação de Jagannathan<sup>11,12</sup>



é 24,64% mais dispendiosa que a Lagrangeana Atualizada. As formulações de Martin<sup>14</sup>, Halbritter<sup>16</sup>, Mantilla<sup>35</sup> e Tezcan<sup>36</sup> consideram grandes deslocamentos porém pequenas deformações. As mesmas poderão fornecer bons resultados para estruturas moderadamente não-lineares.

### 5.1.2 - Sistema Barra-Mola

Analizou-se a seguir o sistema barra-mola da Figura 5.3. É interessante que seja considerado por ser uma estrutura fortemente não-linear e com comportamento pós-crítico bastante rígido. A Figura 5.4 mostra o gráfico carga-deslocamento ( $P \times v$ ) da estrutura. Este exemplo já foi estudado em diversos trabalhos<sup>5, 18, 25, 31, 32, 40</sup>.

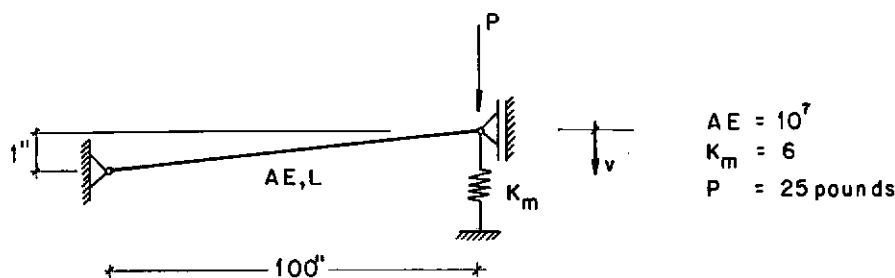


FIGURA 5.3

No Quadro 5.5, apresentam-se os deslocamentos  $v$  e os custos correspondentes para a formulação Lagrangeana Atualizada utilizando os diversos métodos com quantidades diferentes de incrementos de carga. A análise dos resultados finais não é a mais adequada, pois o carregamento crítico é verificado quando de 20% a 30% do total é aplicado. A finalidade desta comparação é

dar uma idéia de como se comportam os métodos com diferentes números de incrementos.

O método de Newton-Raphson mostrou-se eficiente em todos os casos. Convergiu em apenas seis iterações quando o carregamento é aplicado em uma só etapa. O método de Newton-Raphson modificado com um e dois incrementos não converge em 200 iterações e o equilíbrio nodal é deficiente. Os processos incrementais: convencional, modificado e auto-corretivo de primeira ordem, com a carga aplicada em uma só parcela, fornecem resultados iguais (era esperado) porém imprecisos. Os métodos (2), (3), (4-1), (4-2), (5) e (6) são instáveis quando utilizados com um pequeno número de incrementos: isto é devido às características do comportamento da estrutura.

Com a finalidade de comparar os diversos métodos de solução o carregamento foi aplicado em 20 incrementos. São apresentados no Quadro 5.6 os valores dos deslocamentos  $v$ , os erros percentuais para o quinto incremento de carga e os custos de cada um deles. Os erros foram calculados para a carga mais significativa (os métodos apresentam a maior divergência). Neste caso foi mantido o limite de 20 iterações por incremento no processo de Newton-Raphson modificado. No gráfico da Figura 5.4 são usados os valores obtidos no método de Newton-Raphson. Fez-se uso da formulação Lagrangeana Atualizada.

Nº DE INCR.	M É T O D O													
	(1)		(2)		(3)		(4-1)		(4-2)		(5)		(6)	
	v	CUSTO	v	CUSTO	v	CUSTO	v	CUSTO	v	CUSTO	v	CUSTO	v	CUSTO
1	2,622	69,78	2,996	80,93	1,923	66,02	1,923	67,17	1,923	68,34	*	*	*	*
2	2,622	74,07	2,118	77,64	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
5	2,622	75,76	*	*	*	*	2,631	69,31	2,606	69,97	2,631	70,70	*	*
10	2,622	87,87	2,622	108,15	2,689	70,68	2,626	72,28	2,626	70,77	2,625	78,55	2,664	69,66
20	2,622	101,34	2,622	98,99	2,646	70,91	2,623	75,13	2,623	76,88	2,622	85,10	2,640	75,85
100	-	-	2,622	267,72	2,626	96,42	2,622	98,44	2,622	96,03	-	-	2,622	119,88
* - O método apresentou-se instável														

QUADRO 5.5 - DESLOCAMENTOS v(cm) E CUSTOS (Cr\$) PARA DIFERENTES NÚMEROS DE INCREMENTOS

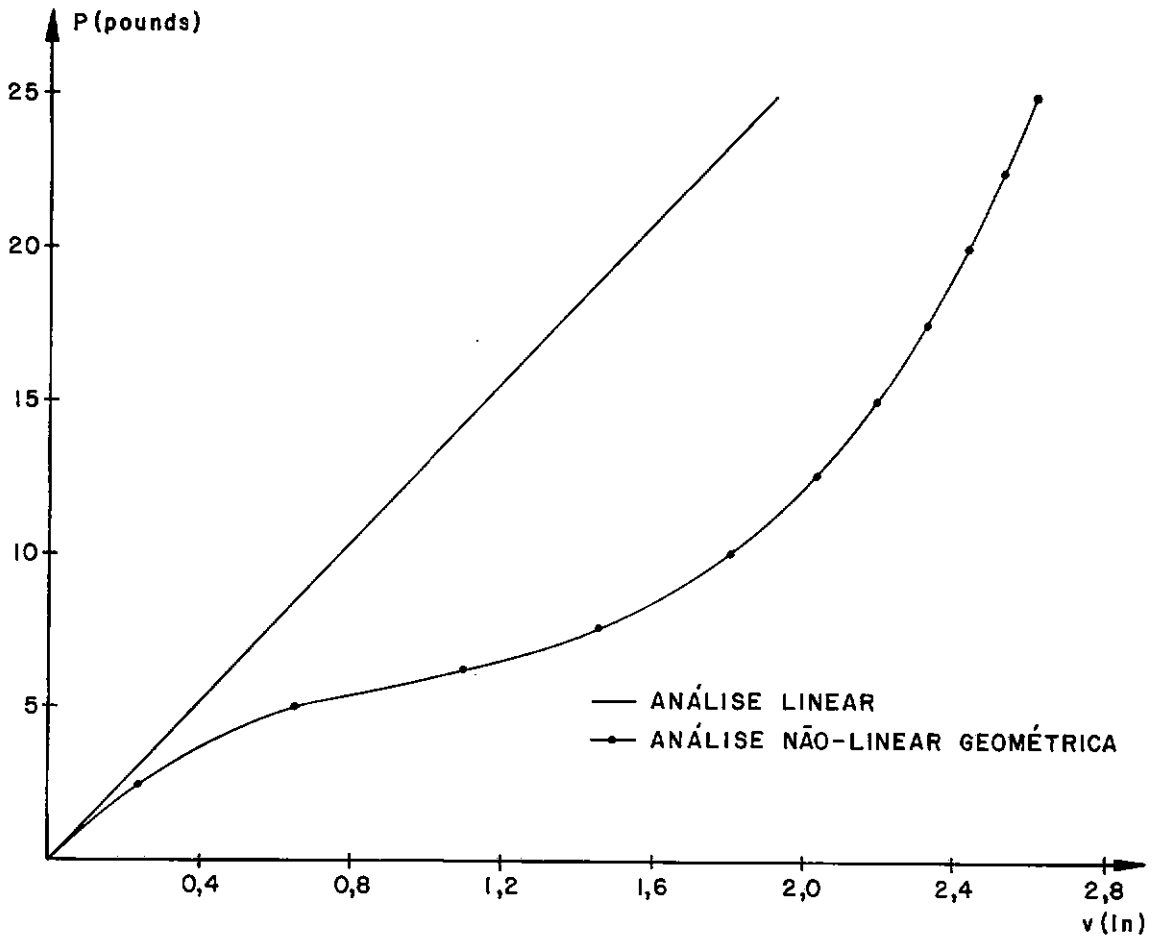


FIGURA 5.4

INCREMENTO	P (POUNDS)	M É T O D O						
		(1)	(2)	(3)	(4-1)	(4-2)	(5)	(6)
2	2,50	0,233	0,233	0,209	0,218	0,220	0,233	0,233
4	5,00	0,657	0,657	0,526	0,589	0,598	0,657	0,655
5	6,25	1,099	1,099	0,783	0,945	0,968	1,095	1,064
6	7,50	1,462	1,459	1,201	1,592	1,637	1,459	1,480
8	10,00	1,822	1,822	1,816	1,843	1,876	1,821	1,863
10	12,50	2,037	2,037	2,053	2,044	2,051	2,036	2,079
12	15,00	2,197	2,197	2,218	2,201	2,202	2,197	2,227
14	17,50	2,327	2,327	2,350	2,330	2,329	2,327	2,352
16	20,00	2,438	2,438	2,462	2,440	2,439	2,437	2,460
18	22,50	2,535	2,535	2,559	2,536	2,536	2,535	2,555
20	25,00	2,622	2,622	2,646	2,623	2,623	2,622	2,640
ERRO (%)		0,00	0,00	-28,75	-14,01	-11,92	-0,36	-3,18
CUSTO (Cr\$)		81,31	68,30	54,53	54,10	56,29	66,81	62,16

QUADRO 5.6 - DESLOCAMENTOS v(in) , ERROS E CUSTOS DOS MÉTODOS

Os processos iterativos se mostram eficientes e apesar do método de Newton-Raphson modificado trabalhar com um maior número total de iterações é mais econômico. Isto decorre do fato da estrutura ter um comportamento fracamente não-linear em certa etapa do carregamento. Os métodos de integração numérica também são precisos: é acentuado o custo do método "predictor-corrector". O incremental convencional é novamente ineficiente. As demais técnicas incrementais, dependendo da precisão esperada, podem ser consideradas satisfatórias em estruturas de comportamento semelhante. Note-se que seus custos finais de execução são os menores.

A comparação da eficiência computacional entre os valores correspondentes nos Quadros 5.5 e 5.6 está prejudicada por que, no primeiro, adicionou-se um custo extra de compilação.

## 5.2 - ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA

### 5.2.1 - Casca Reticulada

Grandes deslocamentos e deformações também são observados em cascas abatidas como a mostrada na Figura 5.5<sup>11, 12, 37</sup>. O problema é analisado levando em conta a simetria.

No Quadro 5.7 encontram-se os deslocamentos  $v$ , os erros dos resultados finais e os custos dos diversos métodos de solução. A carga foi aplicada em 20 etapas e utilizou-se a formulação Lagrangeana Atualizada. No processo de Newton-Raphson modificado foram permitidas mais de 20 iterações em cada carregamento.

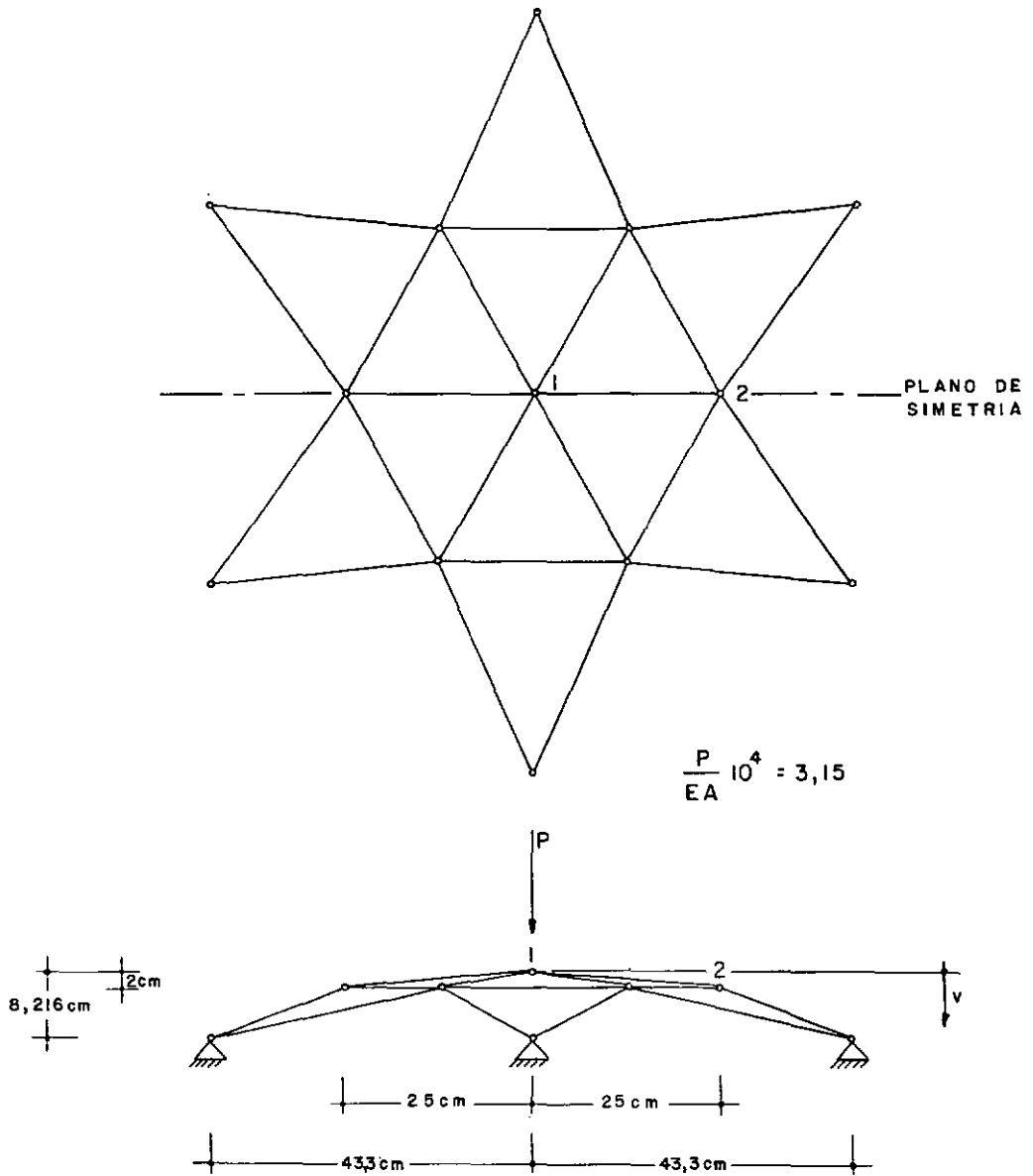


FIGURA 5.5

INCREMENTO	$\frac{P}{EA} 10^4$	M É T O D O						
		(1)	(2)	(3)	(4-1)	(4-2)	(5)	(6)
2	0,3150	0,0359	0,0359	0,0353	0,0356	0,0357	0,0359	0,0359
4	0,6300	0,0741	0,0741	0,0729	0,0738	0,0738	0,0741	0,0741
6	0,9450	0,1152	0,1152	0,1131	0,1148	0,1148	0,1152	0,1152
8	1,2600	0,1597	0,1597	0,1564	0,1592	0,1593	0,1597	0,1597
10	1,5750	0,2086	0,2086	0,2038	0,2080	0,2081	0,2086	0,2086
12	1,8900	0,2635	0,2635	0,2562	0,2625	0,2627	0,2635	0,2635
14	2,2050	0,3266	0,3266	0,3157	0,3251	0,3254	0,3266	0,3266
16	2,5200	0,4028	0,4028	0,3853	0,4003	0,4008	0,4028	0,4028
17	2,6775	0,4490	0,4490	0,4257	0,4452	0,4459	0,4490	0,4490
18	2,8350	0,5044	0,5044	0,4717	0,4983	0,4993	0,5044	0,5045
19	2,9925	0,5777	0,5777	0,5259	0,5648	0,5666	0,5777	0,5779
20	3,1500	0,7312	0,7311	0,5936	0,6599	0,6641	0,7291	0,7242
ERRO (%)		0,00	- 0,01	-18,82	- 9,75	- 9,18	- 0,29	- 0,96
CUSTO (Cr\$)		202,41	201,16	104,57	110,86	112,28	227,27	166,55

QUADRO 5.7 - DESLOCAMENTOS  $v(\text{cm})$  , ERROS E CUSTOS DOS MÉTODOS

O método de Newton-Raphson, apesar de ser de convergência localizada, pode fornecer o mesmo resultado final em menos incrementos. Foi testado com apenas um e a solução é a mesma depois de oito passos iterativos. Custou apenas Cr\$ 27,73, porém não deve ser feita uma comparação direta com o valor do Quadro 5.7.

Apenas no último incremento a convergência é mais lenta (34 iterações) quando o processo de Newton-Raphson modificado é utilizado. O método foi testado com o carregamento aplicado em duas etapas: na primeira converge com 11 iterações e na segunda fornece o resultado de 0,7028 no vigésimo passo iterativo (valor limitado) sem convergir. Seu custo foi Cr\$ 43,90.

O método incremental convencional não é adequado a estruturas fortemente não-lineares. Os erros dos incrementais mo dificado e auto-corretivo são menores e são métodos econômicos .

O processo de Runge-Kutta apesar de preciso é dis pendioso. Mais uma vez o "predictor-corrector" é o que melhor combina custo e precisão. Destaca-se entre as técnicas puramente incrementais.

O comportamento da estrutura é representado graficamente na Figura 5.6 para o método de Newton-Raphson (formulação Lagrangeana Atualizada).

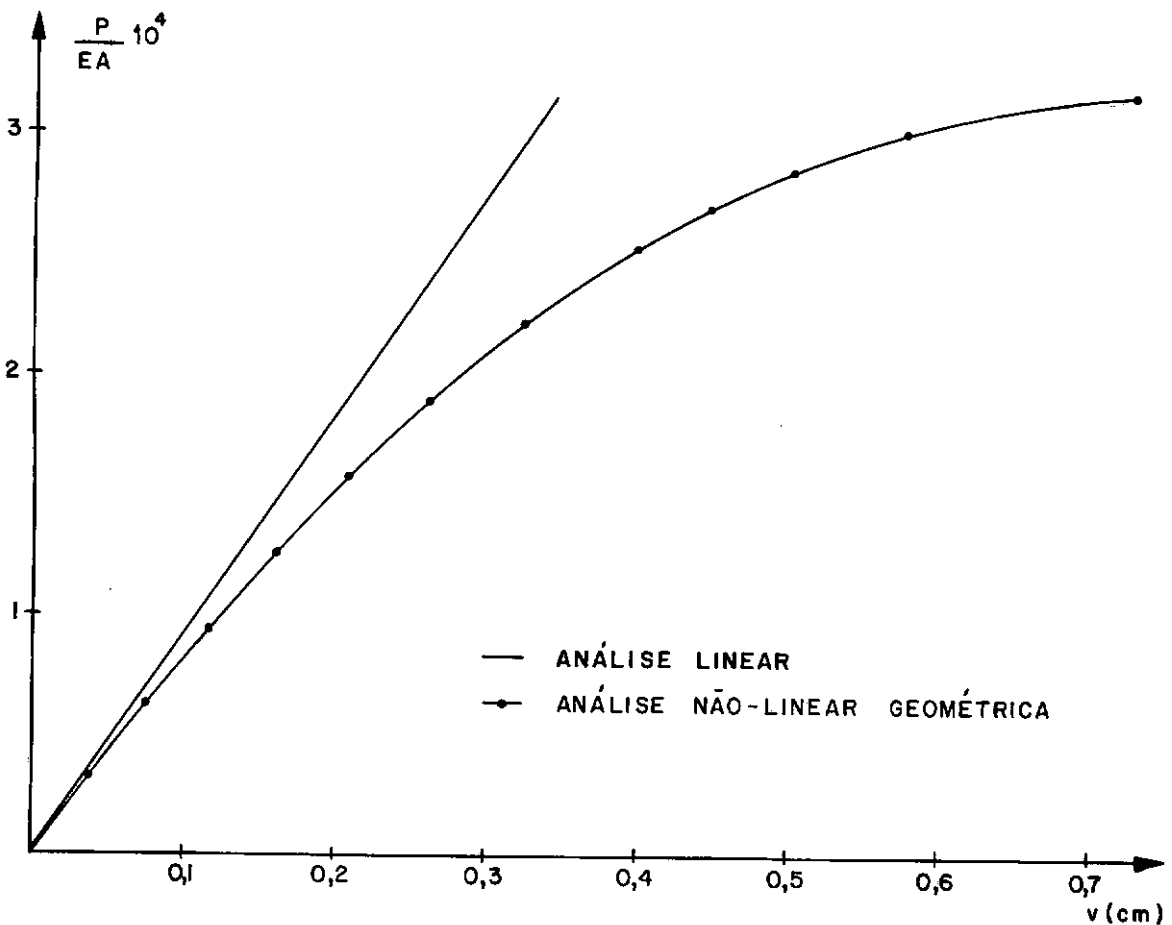


FIGURA 5.6



As formulações são comparadas no Quadro 5.8, utilizando-se o método de Newton-Raphson. A formulação de Jagannathan<sup>11,12</sup> tem seu custo 54,30% mais elevado que a Lagrangeana Atualizada. Esta última mostrou-se novamente mais eficiente quando confrontada com a Lagrangeana, que proporcionou 8,73% a mais no custo final da análise.

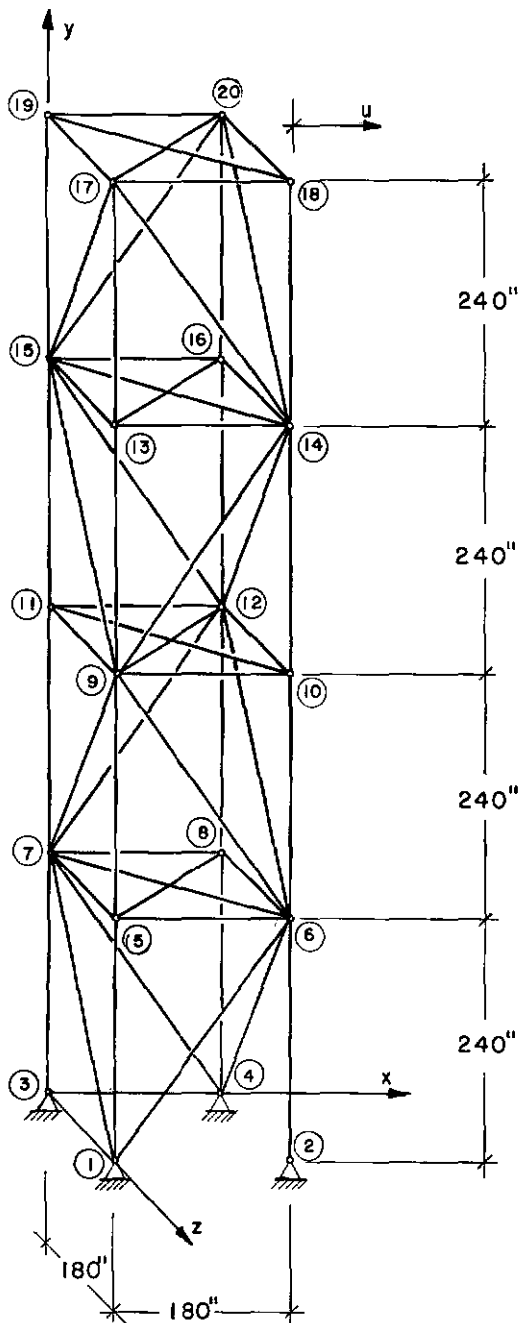
Neste exemplo o resultado da formulação de Martin<sup>14</sup> é satisfatório, porém é computacionalmente deficiente.

FORMULAÇÃO	DESLOCAMENTO v (cm)	ERRO (%)	CUSTO (Cr\$)
Lagrangeana	0,7312	0,00	220,09
Lagrangeana Atualizada	0,7312	0,00	202,41
Jagannathan <sup>11,12</sup>	0,7312	0,00	312,32
Martin <sup>14</sup>	0,7164	2,02	318,74

QUADRO 5.8 - COMPARAÇÃO ENTRE FORMULAÇÕES

### 5.2.2 - Torre Espacial

A torre da Figura 5.7 foi analisada por Reilly<sup>38</sup>. É uma estrutura de comportamento fracamente não-linear para o carregamento a que está submetida, e que foi dividido em 20 etapas. Os deslocamentos  $u$  (direção  $x$ ) do nó 18, juntamente com o erro para a carga total e o custo final, para cada um dos métodos de solução, encontram-se no Quadro 5.9. A formulação empregada é a Lagrangeana Atualizada.



$$A = 4 \text{ in}^2$$

$$E = 1.000 \text{ Ksi}$$

$$P = 10 \text{ Kips}$$

NÓ	CARGA
5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19	$P_x = P$
17, 18, 19, 20	$P_y = -2P$

FIGURA 5.7

INCR.	P (KIPS)	M É T O D O						
		(1)	(2)	(3)	(4-1)	(4-2)	(5)	(6)
2	1,0	12,01	12,01	11,83	11,91	11,94	12,01	12,01
4	2,0	24,71	24,71	24,26	24,60	24,63	24,71	24,71
6	3,0	38,17	38,17	37,32	38,04	38,07	38,17	38,17
8	4,0	52,44	52,44	51,06	52,30	52,34	52,44	52,44
10	5,0	67,63	67,63	65,50	67,46	67,51	67,63	67,63
12	6,0	83,82	83,82	80,70	83,63	83,68	83,82	83,82
14	7,0	101,13	101,13	96,68	100,91	100,97	101,13	101,13
16	8,0	119,70	119,70	113,49	119,43	119,51	119,70	119,70
17	8,5	129,51	129,51	122,22	129,21	129,30	129,51	129,51
18	9,0	139,69	139,39	131,16	139,37	139,46	139,69	139,69
19	9,5	150,28	150,28	140,33	149,92	150,02	150,28	150,28
20	10,0	161,31	161,31	149,73	160,91	161,02	161,31	161,31
ERRO (%)		0,00	0,00	- 7,18	- 0,25	- 0,18	0,00	0,00
CUSTO (Cr\$)		620,65	576,57	239,04	258,74	258,41	656,39	419,35

QUADRO 5.9 - DESLOCAMENTOS  $u(in)$  , ERROS E CUSTOS DOS MÉTODOS

Neste exemplo, os métodos (1), (2), (5) e (6) fornecem os mesmos resultados e é obtido sempre o equilíbrio estrutural. Isto se deve à suavidade da curva carga-deslocamento, ou seja, ao comportamento não-linear da estrutura ser moderado. Na Figura 5.8 está apresentada esta curva.

O método de Newton-Raphson foi testado com apenas um incremento. Converge à solução esperada em apenas sete iterações. O custo da análise é Cr\$ 63,25.

O método de Newton-Raphson modificado utilizado com o carregamento aplicado em uma e duas etapas torna-se instável. Na forma em que se encontra no Quadro 5.9 é mais eficiente que o de Newton-Raphson convencional.

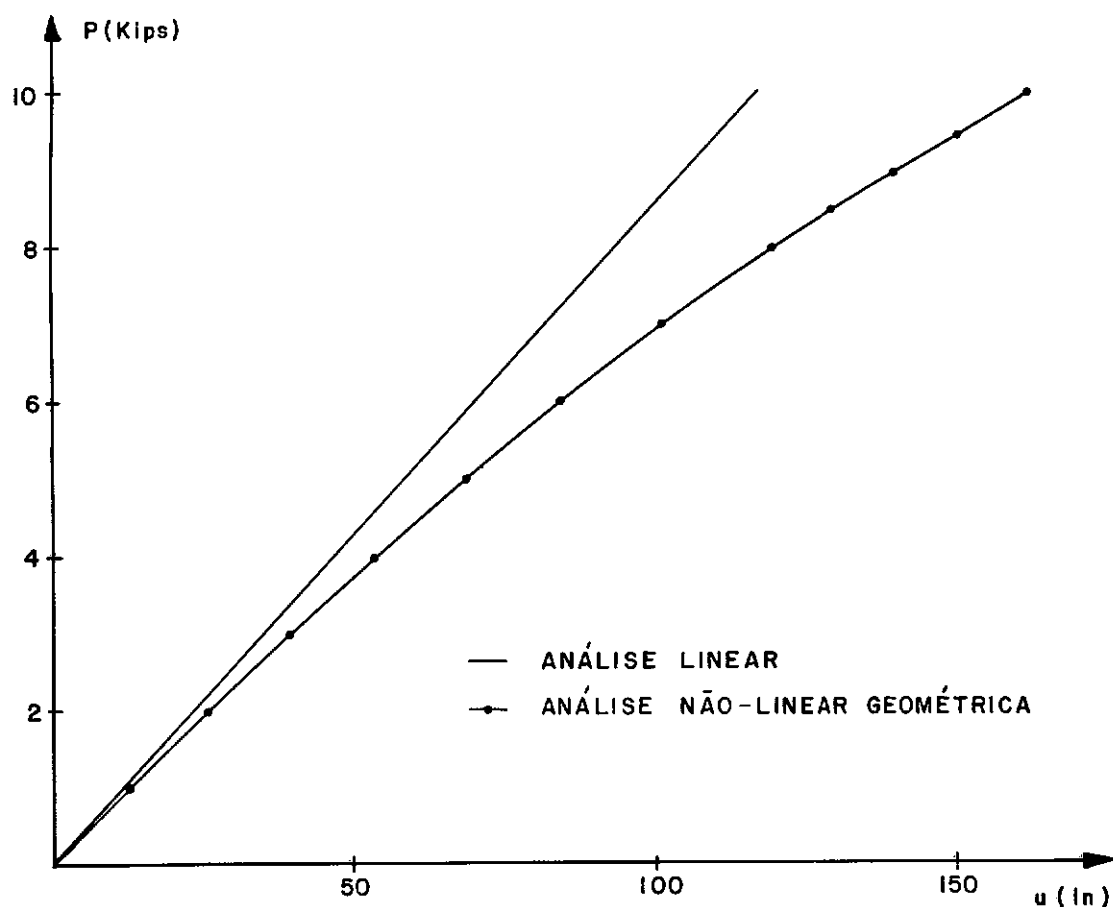


FIGURA 5.8

Os métodos incrementais: convencional, modificado e auto-corretivo têm custos aproximados. Os erros dos dois últimos são desprezíveis, destacando-os entre os processos puramente incrementais.

O método de Runge-Kutta, apesar de fornecer excelentes resultados, não é eficiente computacionalmente. Dentre os métodos incrementais, o "predictor-corrector" não parece ser o mais indicado pois, neste exemplo, é superado pelo auto-corretivo.

As formulações confrontadas estão apresentadas no Quadro 5.10. As respostas finais após 20 incrementos de cargas, sendo utilizado o método de Newton-Raphson, são as mesmas. Os

custos totais das análises são expressivos: a formulação Lagrangeana é 7,85% mais onerosa que a Lagrangeana Atualizada, enquanto que, a de Jagannathan<sup>11, 12</sup> o é 65,62%. A formulação de Martin<sup>14</sup>, a partir da décima etapa do carregamento, não converge em 20 iterações. No 12º incremento (P = 6 kips) seu erro é de 0,88% , porém para cargas posteriores os resultados divergem.

FORMULAÇÃO	DESLOCAMENTO u (in)	ERRO (%)	CUSTO (Cr\$)
Lagrangeana	161,31	0,00	669,37
Lagrangeana Atualizada	161,31	0,00	620,65
Jagannathan <sup>11, 12</sup>	161,31	0,00	1.027,95

QUADRO 5.10 - COMPARAÇÃO ENTRE FORMULAÇÕES

### 5.3 - ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA E FÍSICA

#### 5.3.1 - Viga Plana

Hensley<sup>39</sup> analisou pela primeira vez a viga treliçada da Figura 5.9. O material utilizado é o aço estrutural tipo A, cujo gráfico tensão-deformação ( $\sigma \times \epsilon$ ) encontra-se na Figura 5.10, e que foi fornecido ao programa através dos pontos indicados. O carregamento foi aplicado em 20 incrementos e todas as barras têm tensão inferior à máxima resistida pelo material (52,75 ksi). Para as análises linear e não linear geométrica apenas, utilizou-se o módulo de elasticidade  $E = 31.460$  ksi , que corresponde ao do regime elástico deste aço, e torna mais rígida a estrutura.

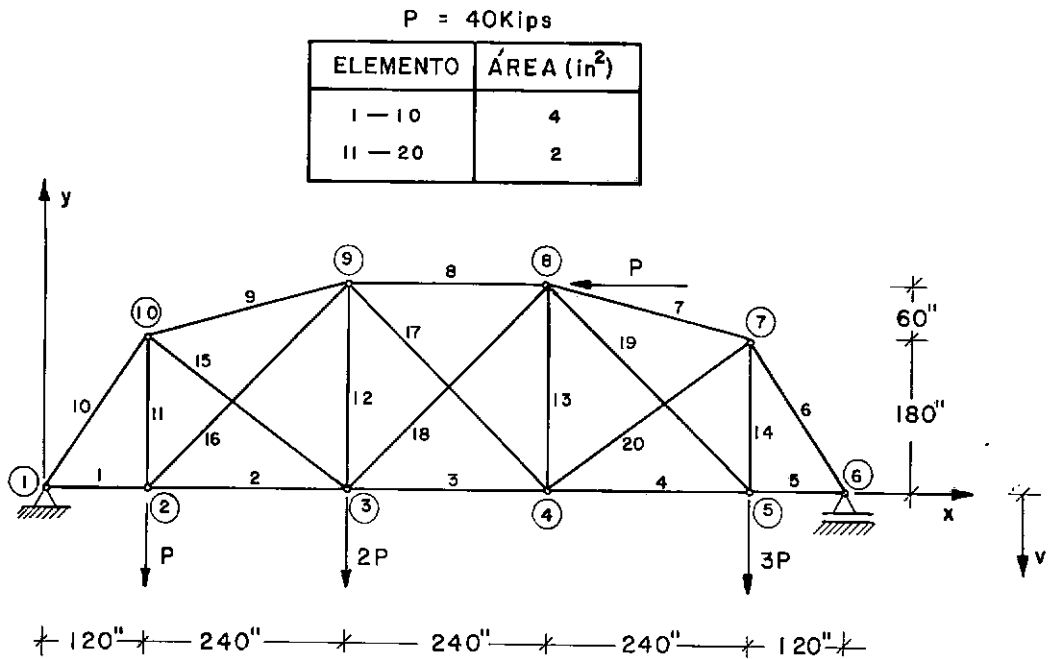


FIGURA 5.9

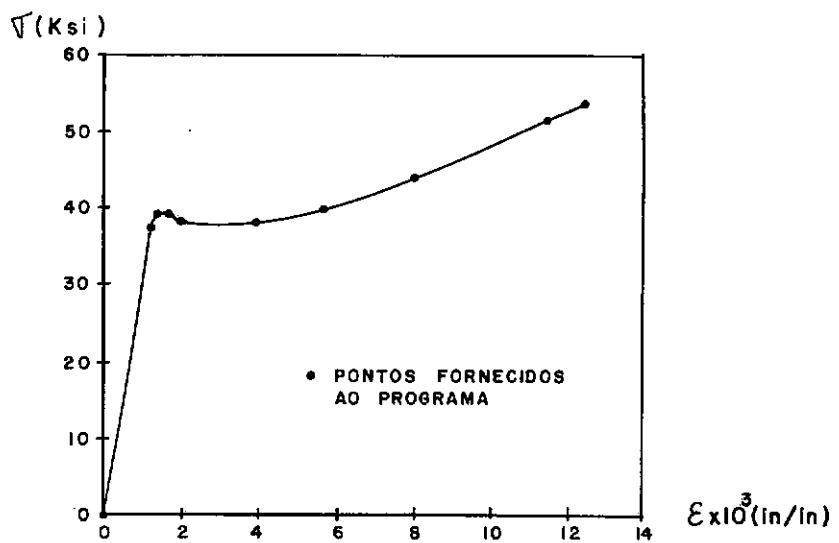


FIGURA 5.10

Para que sejam comparados os métodos de solução utilizados, os deslocamentos  $v$  (direção  $y$ ) do nó 5, os erros finais e os custos de execução do programa são apresentados no Quadro 5.11, para a formulação Lagrangeana Atualizada. Na Figura 5.11 plota-se o gráfico carga-deslocamento quando utilizado o método de Newton-Raphson.

INCR.	P (KIPS)	M É T O D O						
		(1)	(2)	(3)	(4-1)	(4-2)	(5)	(6)
2	4	0,0953	0,0953	0,0953	0,0953	0,0953	0,0953	0,0953
4	8	0,1905	0,1905	0,1905	0,1905	0,1905	0,1905	0,1905
6	12	0,2857	0,2857	0,2857	0,2857	0,2857	0,2857	0,2857
8	16	0,3808	0,3808	0,3809	0,3808	0,3808	0,3808	0,3808
10	20	0,4759	0,4759	0,4759	0,4759	0,4759	0,4759	0,4759
12	24	0,5709	0,5709	0,5709	0,5709	0,5709	0,5709	0,5709
14	28	0,6658	0,6658	0,6659	0,6658	0,6658	0,6658	0,6658
15	30	0,7153	0,7153	0,7134	0,7133	0,7133	0,7147	0,7162
16	32	0,8086	0,8083	0,7692	0,7711	0,7717	0,7831	0,8004
17	34	1,0235	*	0,9008	0,9402	0,9513	0,7294	0,9573
18	36	1,1758	*	1,0534	1,1760	1,1977	0,7768	1,1049
19	38	1,3174	*	1,2057	1,3278	1,3212	0,8243	1,2501
20	40	1,4534	*	1,3576	1,4471	1,4459	0,8811	1,3971
ERRO (%)		0,00	-	-12,04	- 0,43	- 0,52	-39,38	- 3,87
CUSTO (Cr\$)		321,94	-	134,31	133,80	128,74	306,02	207,13
* - O método apresentou-se instável								

QUADRO 5.11 - DESLOCAMENTOS  $v(\text{in})$  , ERROS E CUSTOS DOS MÉTODOS

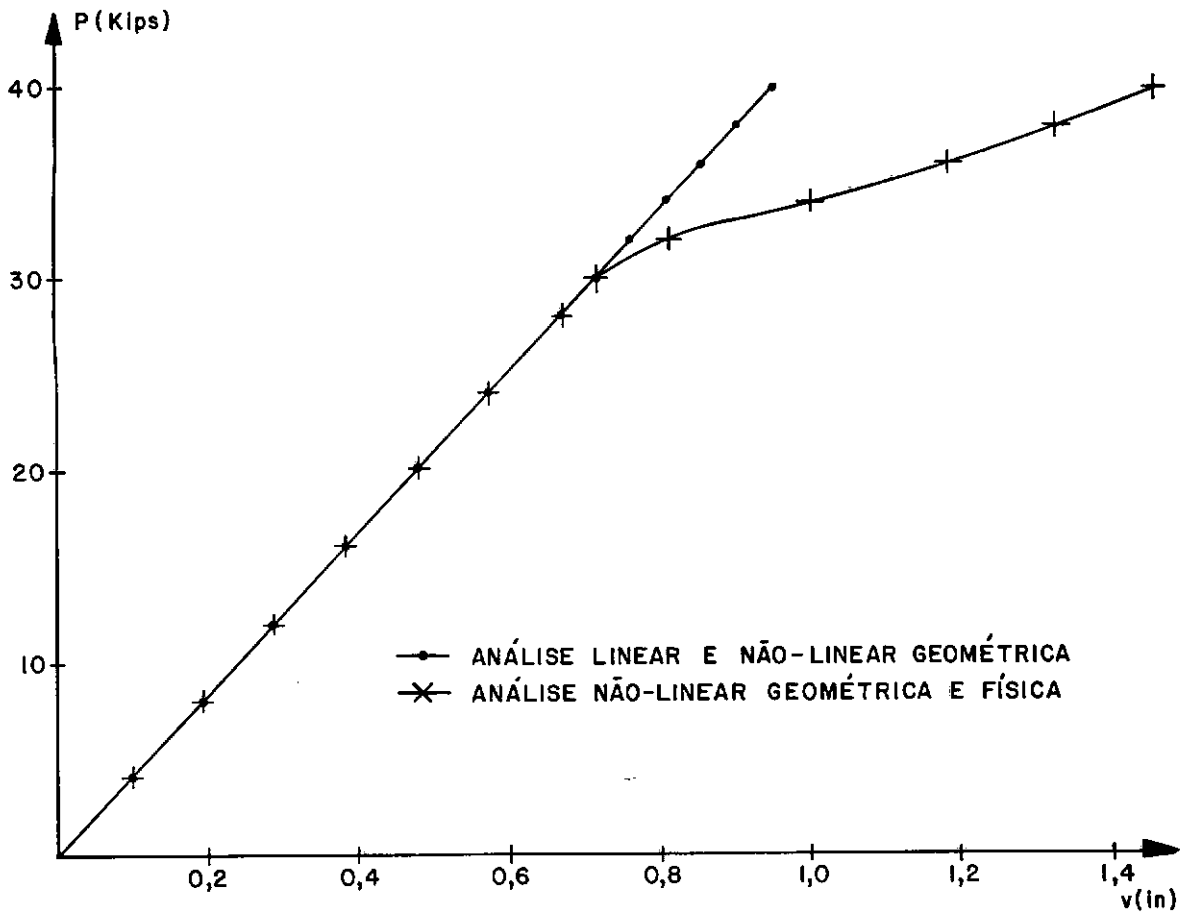


FIGURA 5.11

A estrutura é bastante rígida e a resposta não-linear coincide com a linear até o 14º incremento. Com este carregamento a barra de número 6 entra em regime plástico. A partir deste nível a não-linearidade do material rege o comportamento estrutural. Apenas na última etapa de aplicação das cargas é que um outro elemento supera a tensão limite do regime elástico (o de número 14).

No 16º incremento do carregamento o método de Newton-Raphson tem a convergência prejudicada (o gráfico  $\sigma \times \epsilon$  da Figura 5.10 é desfavorável ao condicionamento dos métodos por possuir trechos com o módulo de elasticidade tangente muito próximos de zero). No segundo passo iterativo o valor 0,8086 é for



necido e obtem-se o equilíbrio nodal da estrutura. Entretanto o programa não acusa o fim do incremento, pois a norma dos deslocamentos não atinge a tolerância exigida. Os resultados oscilam entre dois valores próximos (0,8086 e 0,8056) e só se passa à etapa posterior do carregamento quando é alcançado o número limite de iterações (neste caso igual a 20). Isto provocou o alto custo do método. Dever-se-ia ter considerado um teste adicional através de um critério de forças, além do de deslocamentos, para interromper o processo. Mesmo assim observa-se a segurança de se trabalhar com este método.

No método de Newton-Raphson modificado ocorre o mesmo comentado anteriormente no 16º carregamento incremental. Acontece porém que o deslocamento resultante aumenta sempre até a última iteração permitida. O processo tornou-se instável com a atuação das cargas posteriores.

O método incremental convencional apresenta-se mais uma vez inadequado a estruturas de comportamento não-linear acentuado. O método incremental modificado fornece melhores respostas que o auto-corretivo, apesar da diferença ser desprezível. São eficientes computacionalmente e proporcionam resultados satisfatórios.

A solução final obtida com o processo Runge-Kutta surpreendeu ao apresentar um erro de quase 40%. O "predictor-corrector" é geralmente menos exato que o anterior e mais preciso que o auto-corretivo. Tal característica não se verificou neste caso.

A formulação Lagrangeana também foi testada utilizando o método de Newton-Raphson. Custou Cr\$ 330,55 e é 2,67% mais dispendiosa que a Lagrangeana Atualizada. Os resultados de

ambas são idênticos.

### 5.3.2 - Torre de Transmissão

A torre de transmissão da Figura 5.12 foi analisada por Noor<sup>40,41</sup>, além de constar em diversos outros trabalhos sobre otimização estrutural. O material usado é a liga estrutural de alumínio 24S-T4, fornecida ao programa através dos pontos do gráfico tensão-deformação ( $\sigma \times \epsilon$ ) da Figura 5.13<sup>39</sup>. O carregamento considerado, aplicado em 20 incrementos, assegura que todas as barras tenham tensão inferior a 53,5 ksi, a máxima resistida pela liga em questão. No caso apenas da análise não-linear geométrica, como também da linear, é utilizado o módulo de elasticidade  $E = 10.520$  ksi, correspondente ao do regime elástico do material, dando maior rigidez à estrutura.

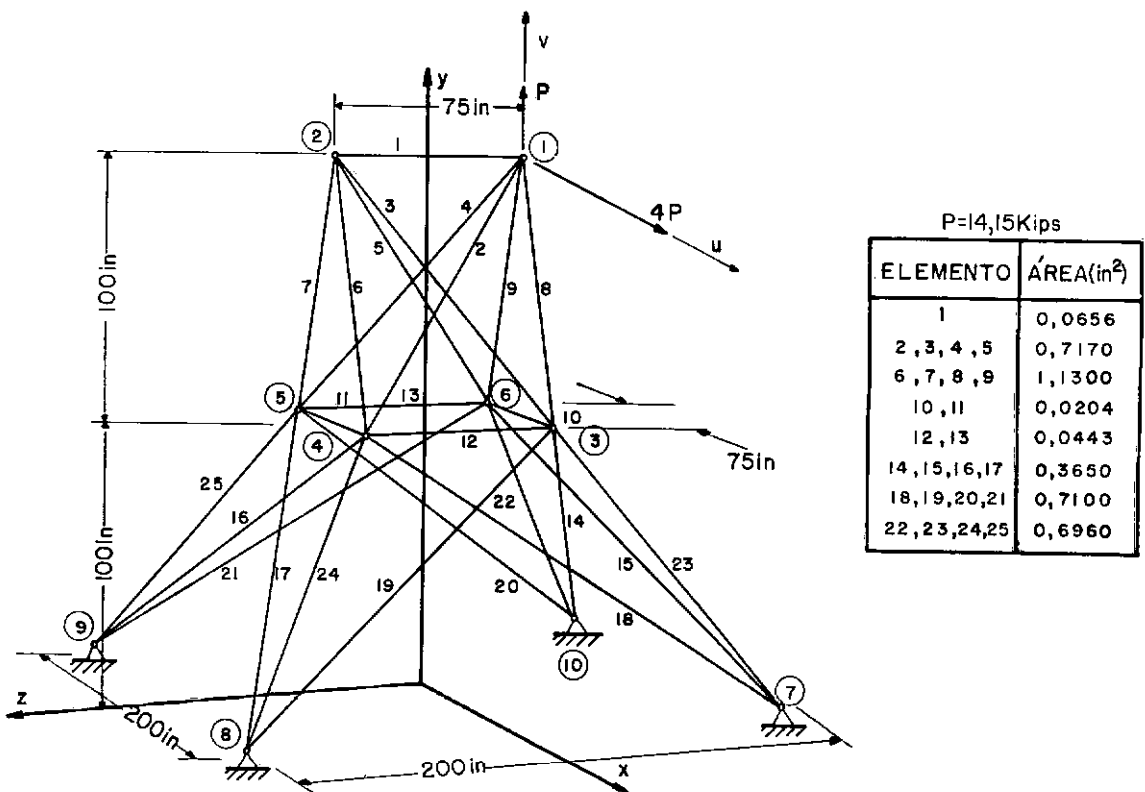


FIGURA 5.12

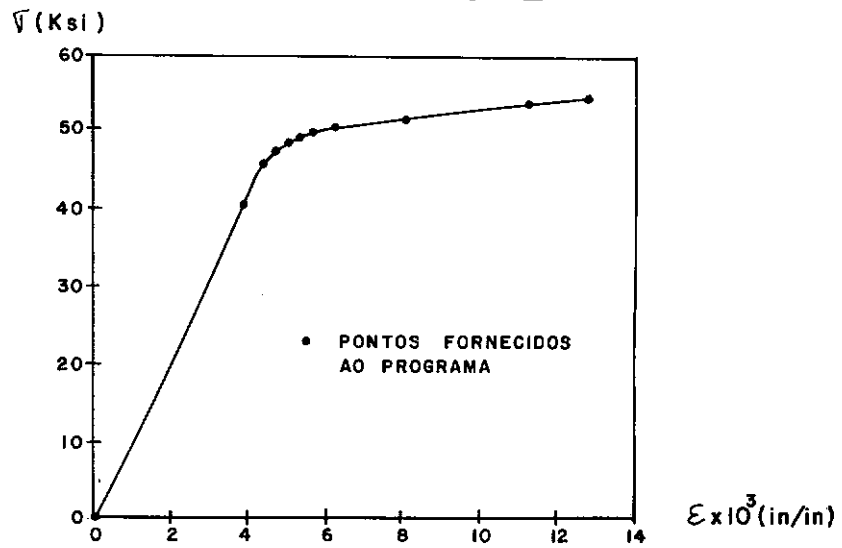


FIGURA 5.13

Os deslocamentos mais significativos da estrutura são os do nó 1 nas direções  $x$  e  $y$ , ou seja,  $u$  e  $v$  respectivamente. Apesar de  $u$  ser maior que  $v$ , este apresenta um comportamento não-linear mais acentuado. Os Quadros 5.12 e 5.13 mostram, respectivamente, os deslocamentos  $v$  e  $u$  com os erros percentuais para o carregamento total, nos diversos métodos para a formulação Lagrangeana Atualizada. No primeiro quadro encontram-se também os custos totais das análises.

INCR.	P (POUNDS)	M É T O D O						
		(1)	(2)	(3)	(4-1)	(4-2)	(5)	(6)
2	1.415,0	0,0202	0,0202	0,0207	0,0205	0,0204	0,0202	0,0202
4	2.830,0	0,0384	0,0384	0,0394	0,0386	0,0386	0,0384	0,0384
6	4.245,0	0,0545	0,0545	0,0561	0,0548	0,0547	0,0545	0,0545
8	5.660,0	0,0687	0,0687	0,0707	0,0690	0,0689	0,0687	0,0687
10	7.075,0	0,0809	0,0809	0,0834	0,0811	0,0811	0,0809	0,0809
12	8.490,0	0,0911	0,0911	0,0941	0,0914	0,0913	0,0911	0,0911
14	9.905,0	0,0994	0,0994	0,1029	0,0996	0,0996	0,0994	0,0994
15	10.612,5	0,1049	0,1049	0,1065	0,1030	0,1030	0,1040	0,1053
16	11.320,0	0,1152	0,1152	0,1170	0,1154	0,1160	0,1143	0,1197
17	12.027,5	0,1326	0,1326	0,1270	0,1252	0,1249	0,1320	0,1330
18	12.735,0	0,1773	0,1773	0,1493	0,1547	0,1570	0,1745	0,1960
19	13.442,5	0,3063	0,3063	0,1937	0,2163	0,2207	0,2923	0,3368
20	14.150,0	0,5688	0,5683	0,3177	0,4211	0,4422	0,5389	0,5822
ERRO (%)		0,00	- 0,09	-44,15	-25,97	-22,26	- 5,26	+ 2,36
CUSTO (Cr\$)		371,00	375,86	162,76	169,40	173,16	384,70	262,25

QUADRO 5.12 - DESLOCAMENTOS  $v(in)$  , ERROS E CUSTOS DOS MÉTODOS

INCR.	P (POUNDS)	M É T O D O						
		(1)	(2)	(3)	(4-1)	(4-2)	(5)	(6)
2	1.415,0	0,401	0,401	0,401	0,401	0,401	0,401	0,401
4	2.830,0	0,800	0,800	0,801	0,801	0,801	0,800	0,800
6	4.245,0	1,199	1,199	1,200	1,199	1,199	1,199	1,199
8	5.660,0	1,597	1,597	1,598	1,598	1,598	1,597	1,597
10	7.075,0	1,995	1,995	1,995	1,995	1,995	1,995	1,995
12	8.490,0	2,392	2,392	2,392	2,392	2,392	2,392	2,392
14	9.905,0	2,788	2,788	2,788	2,788	2,788	2,788	2,788
15	10.612,5	2,990	2,990	2,986	2,986	2,986	2,988	2,990
16	11.320,0	3,201	3,201	3,197	3,201	3,203	3,199	3,210
17	12.027,5	3,428	3,428	3,408	3,412	3,412	3,428	3,429
18	12.735,0	3,721	3,721	3,648	3,668	3,673	3,718	3,768
19	13.442,5	4,226	4,226	3,941	4,002	4,012	4,200	4,310
20	14.150,0	5,201	5,199	4,423	4,702	4,754	5,129	5,230
ERRO (%)		0,00	- 0,04	-14,96	- 9,59	- 8,59	- 1,38	+ 0,56

QUADRO 5.13 - DESLOCAMENTOS  $u(in)$  E ERROS DOS MÉTODOS

Nas Figuras 5.14 e 5.15 encontram-se os gráficos de carga por deslocamento, respectivamente,  $v$  e  $u$  ( $P \times v$  e  $P \times u$ ), para as análises linear, não-linear geométrica e não-linear geométrica e física, com uso do método de Newton-Raphson.

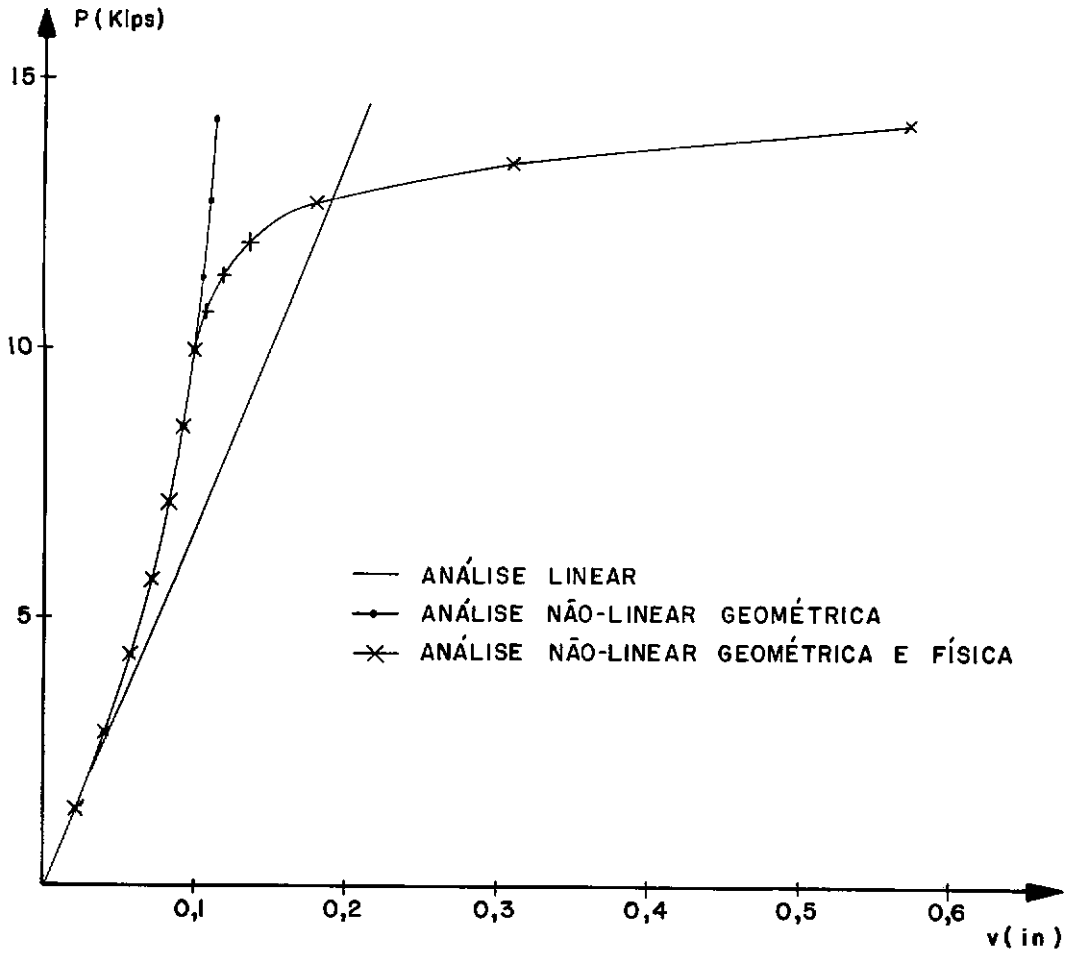


FIGURA 5.14

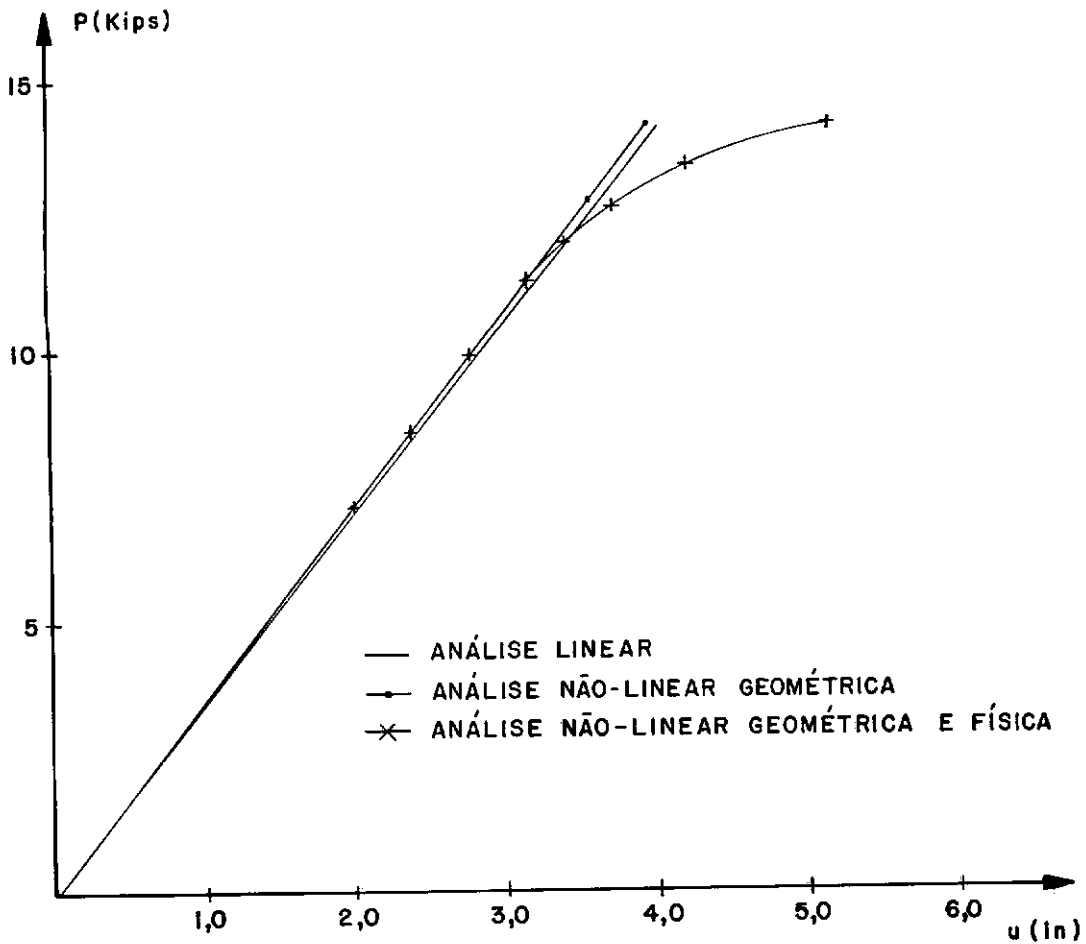


FIGURA 5.15

A consideração da não-linearidade geométrica, neste exemplo, torna a estrutura mais rígida que para a análise linear. Quando é levada em conta, a não-linearidade do material passa a dominar o comportamento estrutural a partir da 15ª parcela do carregamento, devido às primeiras barras superarem a tensão limite do regime elástico. No Quadro 5.16 são mostrados os elementos que se plastificam a cada incremento de cargas. Com o carregamento total aplicado, a barra de número 9 é a que fica submetida à maior tensão, igual a 53,43 ksi.

NÚMERO DO INCREMENTO	ELEMENTOS
15	9, 22
16	-
17	25
18	21
19	2, 4, 24
20	10, 13

QUADRO 5.16 - ELEMENTOS QUE SE PLASTIFICAM

O custo do método de Newton-Raphson é elevado, pois em cada incremento foram necessárias, geralmente, três iterações, num total de 65 atualizações da matriz de rigidez e consequentes resoluções do sistema de equações. Foi testado com o carregamento aplicado em apenas uma etapa e obteve-se a convergência no sétimo passo iterativo. Seu custo final foi de Cr\$ 40,54.

O método de Newton-Raphson modificado só não alcança a convergência no último incremento, porém os erros são desprezíveis. Apesar da matriz de rigidez só ser calculada uma vez em cada etapa do carregamento, o número total de soluções do sistema de equações foi igual a 125, tornando dispendioso o processo. Testado com uma única parcela de carregamento, apesar de custar apenas Cr\$ 50,56, o método não convergiu nas 20 iterações. Seus erros são - 12,45% para o deslocamento  $v$  e - 4,27% para  $u$ .

O método incremental convencional é ineficiente. Os incrementais modificado e auto-corretivo têm bom desempenho em relação ao convencional, porém os erros ainda podem ser considerados acentuados para a precisão desejada.

Apesar de preciso o método de Runge-Kutta é o mais oneroso. A matriz de rigidez é gerada 4 vezes por incremento, além do processo de integração numérica do sistema de equações diferenciais ser mais lento que a solução do sistema de equações lineares.

Como no exemplo anterior, o erro da resposta do método "predictor-corrector" é menor que o do de Runge-Kutta. Fornece uma boa combinação entre precisão e custo. Com excessão dos três primeiros incrementos a matriz de rigidez só é gerada duas vezes em cada uma das etapas seguintes.

O programa também foi testado com a formulação Lagrangeana utilizando o método de Newton-Raphson. O custo total da solução foi de Cr\$ 404,44, ou seja, 9,01% superior ao da Lagrangeana Atualizada.



## VI - CONCLUSÃO

Fica bastante claro, que a consideração de uma formulação completa e consistente, para a análise não-linear, implica em notáveis benefícios.

Apesar de abordada de forma distinta, a formulação desenvolvida por Jagannathan<sup>11,12</sup> corresponde à Lagrangeana deste trabalho, limitada à análise não-linear geométrica. Entretanto, a obtenção das forças de equilíbrio nodal através da integração direta das tensões internas (correspondentes ao estado de deformação do elemento) resulta em maior eficiência computacional em relação às fornecidas com o uso da matriz de rigidez secante.

A formulação Lagrangeana Atualizada mostrou-se geralmente mais econômica que a Lagrangeana. Diferenças expressivas, de até 9,01%, foram obtidas. Confrontando as Equações (2.123) e (2.131), que calculam a matriz de rigidez tangente do elemento, e as que fornecem a resultante das tensões internas, Equações (2.125) e (2.134), verifica-se que o menor esforço computacional deve ser esperado (apesar da atualização contínua do referencial). Pelo menos para o elemento em estudo, e da forma com que se considerou as equações constitutivas, o uso da formulação Lagrangeana Atualizada parece mais aconselhável.

Os diversos métodos de solução das equações não-lineares são discutidos na exposição dos exemplos testados. É difícil escolher um processo que, dentro da precisão desejada, ofereça o melhor desempenho para um determinado problema. O número de fatores a serem analisados é em muito acrescido, aconselhando

se dispor de diversas opções<sup>4,8</sup>.

A grande restrição que se tem feito ao método de Newton-Raphson é quanto ao esforço computacional que requer. É, entretanto, o mais comumente utilizado pela segurança dos resultados que fornece. Em todos os exemplos em que foi utilizado com apenas um incremento de cargas forneceu (economicamente) a solução esperada (equilíbrio nodal): o que não pode ser generalizado por se tratar de um processo de convergência localizada. É um método dispendioso quando aplicado com grande quantidade de etapas de carregamento. No Exemplo (5.3.1), em que o comportamento do material é não-linear, com valores do módulo de elasticidade tangente muito próximos de zero, o condicionamento do método é prejudicado: a norma Euclideana modificada dos deslocamentos não detecta a convergência dos resultados. Deve ser adicionado um outro teste para interromper o processo, através de um critério de forças.

Em estruturas de comportamento não-linear acentua-se o método de Newton-Raphson modificado não fornece resultados satisfatórios (na forma como foi programado). Torna-se também oneroso devido ao grande número de iterações para o equilíbrio. Dever-se-ia ter considerado a atualização da matriz de rigidez tangente sempre que a velocidade de convergência se tornasse lenta, podendo inclusive ser aliado a um acelerador de convergência. No Exemplo (5.3.1), em que a curva tensão-deformação do material possui trechos com módulo de elasticidade tangente próximos de zero, o método tornou-se instável.

Entre os métodos incrementais (convencional, modificado e auto-corretivo de primeira ordem) que têm custos aproximados, o auto-corretivo fornece os melhores resultados. É reco-

mendável o seu uso em estruturas de comportamento desconhecido, para proceder uma primeira análise. Os resultados em alguns casos são satisfatórios. Esta decisão pode ser tomada analisando-se as cargas de equilíbrio nodal fornecidas pelo programa.

Na maioria dos exemplos testados, o método de Runge-Kutta de quarta ordem apresentou-se preciso. Surpreendeu quando foi utilizado na viga plana do Exemplo (5.3.1). É desaconselhável pelo alto custo, pois a matriz de rigidez tangente é calculada quatro vezes por incremento. Além do mais, o processo de integração numérica do sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é mais lento que a solução do sistema de equações lineares.

O método "predictor-corrector" de Hamming merece destaque entre os puramente incrementais por ser o que melhor concilia precisão e eficiência computacional. A matriz de rigidez tangente é gerada apenas duas vezes em cada etapa do carregamento, exceto nas três primeiras (recorre-se ao método de Runge-Kutta). Este processo, nos dois exemplos em que se considerou também a não-linearidade física (Seção 5.3), se mostrou mais efetivo que o de Runge-Kutta (o que não aconteceu nos demais exemplos), mostrando ser um método estável (veja-se a Seção 3.2).

Acredita-se que os diversos algoritmos empregados foram codificados de forma eficiente. Trata-se porém de um programa que ainda segue orientação acadêmica, destinado à comparação das formulações e métodos de solução. Algumas sugestões para possíveis aprimoramentos e extensão são citadas: a consideração de deslocamentos prescritos não nulos, apoios elásticos e influência dos efeitos de temperatura, e a possibilidade da análise de cabos são ampliações que tornariam o programa mais flexível.

vel. A eficiência computacional será melhorada com: o armazenamento das variáveis em forma vetorial controlado, por exemplo, por uma sub-rotina que aproveitasse ao máximo a memória disponível, e a utilização de uma sub-rotina para a solução do sistema de equações lineares usando técnicas de esparsidade. Do ponto de vista do usuário, facilidades seriam introduzidas através de implementações mais sofisticadas, como por exemplo, sub-rotinas encarregadas da geração da numeração de nós, barras e conectividades dos elementos (não muito complexas para treliças), e da reordenação da numeração dos nós da estrutura para permitir a largura de banda mínima na matriz de rigidez (calculada pelo próprio programa).

Espera-se também que o programa possa ser adaptado a elementos mais complexos.

A análise de estruturas, quando submetidas a carregamentos muito próximos do crítico, pode ser efetuada com vantagem através do controle de deslocamento. Acarretaria entretanto em mudança expressiva no corpo do programa.

A análise não-linear física, como considerada, corresponde à análise de materiais elásticos não-lineares (deformações reversíveis).

## BIBLIOGRAFIA

- 1 - FUNG, Y.C. - Foundations of Solid Mechanics - Prentice-Hall Inc., 1965.
- 2 - MALVERN, L.E. - Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium - Prentice-Hall Inc., 1969.
- 3 - WOOD, R.D. & ZIENKIEWICZ, O.C. - Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells - Computers & Structures, Vol.7, 725-735, Pergamon Press, 1977.
- 4 - ZIENKIEWICZ, O.C. & NAYAK, G.C. - A General Approach to Problems of Plasticity and Large Deformation Using Isoparametric Elements - Third Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton, Ohio, W<sup>ri</sup>ght Patterson, 1971.
- 5 - STRICKLIN, J.A. & HAISLER, W.E. - Formulations and Solution Procedures for Nonlinear Structural Analysis - Computers & Structures, Vol. 7, 125-136, Pergamon Press, 1977.
- 6 - BATHE, K.J. & OZDEMIR, H. - Elastic-Plastic Large Deformation Static and Dynamic Analysis - Computers & Structures, vol. 6, 81-92, Pergamon Press, 1976.
- 7 - BATHE, K.J.; RAMM, E. & WILSON, E.L. - Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis-International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 9, 353-386, 1975.
- 8 - EBECKEN, N.F.F. - LORANE-NL - Uma Linguagem Orientada a Análise Estrutural Não-Linear - Tese de D.Sc., COPPE /UFRJ, 1977.
- 9 - ZIENKIEWICZ, O.C. - The Finite Element Method in Engineering Science - McGraw-Hill, 2<sup>nd</sup> edition, 1971.
- 10 - CODES, R.A. & TELLES, J.C.F. - Análise Não-Linear de Tre-

liças Espaciais - Anais do II Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil, CESP, São Paulo, 120-138, 1978.

- 11 - JAGANNATHAN, D.S.; EPSTEIN, H.I. & CHRISTIANO, P. - Non-linear Analysis of Reticulated Space Trusses - Journal of the Structural Division, A.S.C.E., vol. 101 , 2641-2658, 1975.
- 12 - JAGANNATHAN, D.S. - Nonlinear Analysis of Reticulated Space Trusses - Ph.D. Thesis, University of Minnesota , Minneapolis, Minn., 1974.
- 13 - COOK, R.D. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis - John Wiley & Sons Inc., 1974.
- 14 - MARTIN, H.C. - Finite Elements and the Analysis of Geometrically Nonlinear Problems - Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, R.H. Gallagher et al., ed., University of Alabama Press , Huntsville, Ala., 343-381, 1971.
- 15 - VENÂNCIO FILHO, F. - Análise Matricial de Estruturas - Almeida Neves Ed., 1975.
- 16 - HALBRITTER, A.L. - Analisis No-Lineal de Estructuras Formadas por Cables y Barras - COPPE/UFRJ, 1975.
- 17 - MARTIN, H.C. & CAREY, G.F. - Introduction to Finite Element Analysis - McGraw-Hill Book Company, 1973.
- 18 - STRICKLIN, J.A.; HAISLER, W.E. & VON RIESEMANN, W.A. - Geometrically Nonlinear Structural Analysis by Direct Stiffness Method - Journal of the Structural Division, A.S.C.E., vol. 97, 2299-2314, 1971.
- 19 - MEEK, J.L. - Matrix Structural Analysis - McGraw-Hill Kogakusha Ltd., 1971.
- 20 - TEZCAN, S.S. & KRISHNA, P. - Discussion of Numerical Solution of Nonlinear Structures - Journal of the Structural Division, A.S.C.E., vol. 94, 1613-1623, 1968 .

- 21 - PRZEMIENIECKI, J.S. - Theory of Matrix Structural Analysis - McGraw-Hill Book Company, 1968.
- 22 - MARTIN, H.C. - On the Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems - Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AFFDL-TR-66-80, 697-716, 1966.
- 23 - EBNER, A.M. & UCCIFERRO, J.J. - A Theoretical and Numerical Comparison of Elastic Nonlinear Finite Element Methods - Computers & Structures, vol. 2, 1043-1061, 1972.
- 24 - STRICKLIN, J.A.; HAISLER, W.E. & VON RIESEMANN, W.A. - Evaluation of Solution Procedures for Material and/or Geometrically Nonlinear Structural Analysis-A.I.A.A. Journal, Vol. 11, 292-299, 1973.
- 25 - HAISLER, W.E.; STRICKLIN, J.A. & STEBBINS, F.J. - Development and Evaluation of Solution Procedures for Geometrically Nonlinear Structural Analysis - A.I.A.A. Journal - Vol. 10, 264-272, 1972.
- 26 - STRICKLIN, J.A.; VON RIESEMANN, W.A.; TILLERSON, J.R. & HAISLER, W.E. - Static Geometric and Material Nonlinear Analysis - Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, 2<sup>nd</sup> U.S. - Japan Seminar Matrix Methods Structural Analysis and Design, Univ. of Alabama Press, 301-324, 1972.
- 27 - KAO, R. - A Comparison of Newton-Raphson Methods and Incremental Procedures for Geometrically Nonlinear Analysis - Computers & Structures, vol. 4, 1091-1097, Pergamon Press, 1974.
- 28 - BERGAN, P.G. & CLOUGH, R.W. - Convergence Criteria for Iterative Processes - A.I.A.A. Journal, vol. 10, 1107-1108, 1972.
- 29 - PIAN, T.H.P. & TONG, P. - Variational Formulation of Finite-Displacement Analysis - I.U.T.A.M., High Speed Com

puting on Elastic Structures, University of Liege, Belgium, 1970.

- 30 - CARNAHAN, B.; LUTHER, H.A. & WILKES, J.O. - Applied Numerical Methods - John Wiley & Sons Inc., 1969.
- 31 - MASSETT, D.A. & STRICKLIN, J.A. - Self-Correcting Incremental Approach in Nonlinear Structural Mechanics - A.I.A.A. Journal, vol. 9, 2464-2466, 1971.
- 32 - STRICKLIN, J.A.; HAISLER, W.E. & VON RIESEMANN, W.A. - Self-Correcting Initial Value Formulations in Nonlinear Structural Mechanics - A.I.A.A. Journal, vol.9, 2066-2067, 1971.
- 33 - BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. - Computational Methods for the Solution of Engineering Problems - Pentech Press Limited, 1978.
- 34 - MALLETT, R.H. & HAFTKA, R.T. - Progress in Nonlinear Finite Element Analysis Using Asymptotic Solution Techniques - Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, J.T. Oden et al., ed., University of Alabama Press, Huntsville, 357-373, 1972.
- 35 - MANTILLA, E.P. - Um Método Iterativo para Análise da Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Reticulares - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1974.
- 36 - TEZCAN, S.S. & OVUNC, B. - An Iteration Method for the Nonlinear Buckling of Framed Structures - International Conference on Space Structures, University of Surrey, 1966.
- 37 - HANGAI, Y. & KAWAMATA, S. - Perturbation Method in the Analysis of Geometrically Nonlinear and Stability Problems - Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, J.T. Oden et al., ed., University of Alabama Press, Huntsville, 473-489, 1972.



- 38 - REILLY, R.J. & SUTTON, E.L. - An Iterative Solution for Geometrically Nonlinear Trusses - Computers & Structures, Vol. 3, 1053-1061, Pergamon Press, 1973.
- 39 - HENSLEY, R.C. & AZAR, J.J. - Computer Analysis of Nonlinear Truss-Structures - Journal of the Structural Division, A.S.C.E., vol. 94, 1427-1439, 1968.
- 40 - NOOR, A.K. - Nonlinear Analysis of Space Trusses - Journal of the Structural Division, A.S.C.E., vol. 100, 533-546, 1974.
- 41 - NOOR, A.K. & LOWDER, H.E. - Approximate Techniques of Structural Reanalysis - Computers & Structures, vol. 4, 801-812, 1974.
- 42 - LANDAU, L. - Análise de Grandes Deformações e Plasticidade por Meio de Elementos Finitos Isoparamétricos - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1976.
- 43 - YAMADA, Y. - Incremental Formulation for Problems with Geometric and Material Nonlinearities - Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, J.T. Oden et al., ed., University of Alabama Press, Huntsville, 325-355, 1972.
- 44 - NOVOZHILOV, V.V. - Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity - Graylock Press, Rochester, New York, 1953.

## SIMBOLOGIA

$[ \ ]$	- matriz quadrada ou retangular.
$\{ \ }$	- matriz coluna ou vetor coluna.
$[ \ ]$	- matriz linha ou vetor linha.
$( \ )$	- matriz ou vetor.
$( \ )^t$	- matriz transposta ou vetor transposto.

CAPÍTULO II

$d( \ )$	- variação de $( \ )$ .
$(n), (i) \text{ e } (d)$	- configurações natural (não deformada), intermediária e deformada.
$A$	- área da seção transversal do elemento.
$A, A', \bar{A}$	- áreas do corpo nas configurações $(n), (i) \text{ e } (d)$ .
$V, V', \bar{V}$	- volumes do corpo ou elemento nas configurações $(n), (i) \text{ e } (d)$ .
$\rho, \rho', \bar{\rho}$	- massas específicas nas configurações $(n), (i) \text{ e } (d)$ .
$\epsilon_{ij}, \epsilon$	- componentes do tensor de deformações de Green no referencial da configuração $(n)$ correspondente às deformações entre $(n) \text{ e } (d)$ , e primeira componente do mesmo.
$\bar{\epsilon}_{oij}, \bar{\epsilon}_o$	- componentes do tensor de deformações de Cauchy no referencial da configuração $(d)$ correspondente às deformações entre $(n) \text{ e } (d)$ , e primeira componente do mesmo.
$\epsilon'_{ij}, \epsilon'$	- componentes do tensor de deformações de Green no referencial da configuração $(i)$ correspondente às deformações entre $(i) \text{ e } (d)$ , e primeira componente do mesmo.
$\sigma_{ij}, \sigma$	- componentes do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff no referencial da configuração $(n)$ correspondente às deformações entre $(n) \text{ e } (d)$ , e primeira componente do mesmo.
$\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\sigma}$	- componentes do tensor de tensões de Cauchy no referencial da configuração $(d)$ correspondente às deformações entre $(n) \text{ e } (d)$ , e primeira componente do mesmo.
$\sigma'_{ij}, \sigma'$	- componentes do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff no referencial da configuração $(i)$ , e primeira componente do mesmo.

- $\bar{\sigma}_{ij}^i, \bar{\sigma}^i$  - componentes do tensor de tensões de Cauchy no referencial da configuração (i) correspondente às deformações entre (n) e (i), e primeira componente do mesmo.
- $\sigma_{ij}^i, \sigma^i$  - componentes do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff no referencial da configuração (i) correspondente às deformações entre (i) e (d), e primeira componente do mesmo.
- $D_{Tijrs}, \bar{D}_{Tijrs}$  - componentes do tensor constitutivo tangente referido às configurações (n) e (d).
- $D_{ijrs}, \bar{D}_{ijrs}$  - componentes do tensor constitutivo referido às configurações (n) e (d).
- $\underline{x}, \underline{x}', \bar{\underline{x}}$  - vetores das coordenadas cartesianas nas configurações (n), (i) e (d).
- $\underline{u}, \underline{u}'$  - vetores de deslocamentos correspondentes às deformações: entre as configurações (n) e (d), e entre as configurações (i) e (d).
- $\underline{P}, \underline{P}', \bar{\underline{P}}$  - vetores de forças externas sobre a superfície nas configurações (n), (i) e (d).
- $\underline{Q}$  - vetor de forças de volume por unidade de massa.
- $dW^e$  - trabalho virtual das forças externas.
- $\underline{\delta}, \underline{\delta}'$  - vetores dos deslocamentos nodais do elemento correspondentes às deformações: entre as configurações (n) e (d), e entre as configurações (i) e (d).
- $\underline{A}'$  - matriz de gradientes dos deslocamentos na configuração (i).
- $\underline{\epsilon}'_0, \underline{\theta}'$  - vetores de gradientes dos deslocamentos na configuração (i).
- $\underline{N}'$  - matriz das funções de interpolação do elemento na configuração (i).
- $\underline{G}'$  - matriz das derivadas das funções de interpolação do elemento na configuração (i).
- $\underline{B}'$  - matriz de deformações do elemento na configuração (i).
- $\underline{B}'_0$  - matriz de deformações do elemento (termos constantes) na configuração (i).
- $\underline{B}'_L$  - matriz de deformações do elemento (termos lineares) na configuração (i).
- $\underline{\psi}'$  - vetor de forças de desequilíbrio nodal ou de forças residuais para o elemento na configuração (i).

$\underline{K}_T, \underline{K}'_T, \underline{\tilde{K}}_T$	- matriz de rigidez tangente do elemento nas configurações (n), (i) e (d).
$\underline{I}_3$	- matriz identidade 3 x 3.
$\ell, \ell', \bar{\ell}$	- comprimentos do elemento nas configurações (n), (i) e (d).
$E_T, E'_T, \bar{E}_T$	- módulo de elasticidade tangente do elemento referido às configurações (n), (i) e (d).
$E, E', \bar{E}$	- módulo de elasticidade do elemento referido às configurações (n), (i) e (d).
$\underline{F}$	- vetor das resultantes das tensões internas correspondentes ao estado de deformação do elemento.

### CAPÍTULO III

$(\cdot)$	- derivação em relação ao parâmetro de carga $\lambda$ .
$\Delta(\ )$	- incremento de $(\ )$ .
$\underline{K}$	- matriz de rigidez linear (convencional) total.
$\underline{P}$	- vetor de forças devido às cargas aplicadas, referido ao sistema de referência global.
$\underline{Q}$	- vetor de pseudo-forças devido aos efeitos não-lineares, referido ao sistema de referência global.
$\underline{q}$	- vetor de deslocamentos nodais, referido ao sistema de referência global.
$\underline{\psi}$	- vetor das forças de desequilíbrio nodal ou das forças residuais, referido ao sistema de referência global.
$\lambda$	- parâmetro de carga.
$\underline{p}$	- vetor de cargas normalizadas, referido ao sistema de referência global.
$\underline{N}$	- matriz de rigidez não-linear total.
$\underline{K} + \underline{N}$	- matriz de rigidez tangente total.
$\  \epsilon \ $	- norma dos deslocamentos.
$\gamma$	- valor de teste da convergência.
$F(\ )$	- equação diferencial ordinária de primeira ordem.
$e$	- erro de truncamento.
$Z$	- parâmetro escalar.
$Z\Delta\lambda$	- fator de amplificação do desequilíbrio.

A P Ê N D I C E

LISTAGEM DO PROGRAMA

FILE 8=CARTOES,UNIT=READER  
FILE 5=IMPRESS,UNIT=PRINTER

# P R O G R A M A     A N A L I T E

C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

ANALISE NAO-LINEAR GEOMETRICA E FISICA DE TRELICAS ESPACIAIS

C

METODO DOS ELEMENTOS FINITOS - MODELO DESLOCAMENTO

C

IFORM = 1 - ANALISE LINEAR

C

2 - ANALISE NAO-LINEAR GEOMETRICA

C

FORMULACAO LAGRANGEANA

C

TENSOR DE DEFORMACOES COMPLETO

C

EQUILIBRIO NODAL ATRAVES DA MATRIZ SECANTE

C

3 - ANALISE NAO-LINEAR GEOMETRICA

C

FORMULACAO LAGRANGEANA

C

TENSOR DE DEFORMACOES DESPREZANDO O TERMO  $UX^{**2/2}$ .

C

EQUILIBRIO NODAL ATRAVES DA MATRIZ SECANTE

C

4 - ANALISE NAO-LINEAR GEOMETRICA, OU AMBAS

C

FORMULACAO LAGRANGEANA

C

TENSOR DE DEFORMACOES COMPLETO

C

CALCULO DIRETO DO EQUILIBRIO NODAL

C

5 - ANALISE NAO-LINEAR GEOMETRICA, OU AMBAS

C

FORMULACAO LAGRANGEANA ATUALIZADA

C

TENSOR DE DEFORMACOES COMPLETO

C

CALCULO DIRETO DO EQUILIBRIO NODAL

C

METOD = 1 - METODO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON

C

2 - METODO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO

C

3 - METODO INCREMENTAL CONVENCIONAL

C

4 - METODO INCREMENTAL AUTO-CORRETIVO DE PRIMEIRA

C

ORDEM

C

5 - METODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

C

6 - METODO PREDICTOR-CORRECTOR DE HAMMING (OS TRES

C

PRIMEIROS INCREMENTOS SAO OBTIDOS NO METODO 5)

COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,

\*E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG

REAL LLIN

DIMENSION TITUL(60),X(100),Y(100),Z(100),ICON(200),

\*PROP(100),IAPD(80),REAC(300),TICAR(10),P(300),DTADP(300),

\*D(300),FORC(100),AUXI(30),RITO(300,30),RIEL(6,6),R(6,6),

\*RT(6,6),DL1(3),DL2(3),PRESC(300),FX(100),FY(100),FZ(100),

\*LLIN(100),RAUX(300,30),FR(300),DPRED(300),DH(300,4),

\*FH(300,3),ET(300),SIG(30),EPS(30)

C

INICIALIZACAO DOS PARAMETROS DO PROGRAMA

C

NLMX = NUMERO DE LINHAS DA MATRIZ DE RIGIDEZ TOTAL

C

NCMX = NUMERO DE COLUNAS DA MATRIZ DE RIGIDEZ TOTAL, OU

C

LARGURA MAXIMA PERMITIDA PARA A SEMI-BANDA

C

NGL = NUMERO DE GRAUS DE LIBERDADE POR NO

C

NNE = NUMERO DE NOS POR ELEMENTO

C

NGLEL = NUMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE PARA UM ELEMENTO

```

NLMX=300
NCMX=30
NGL=3
NNE=2
NGLEL=NGL*NNE

```

```

C
C  FIXACAO DE VALORES NUMERICOS PARA DESIGNAR LC (LEITORA DE
C  CARTOES) E IM (IMPRESSORA)
    LC=8
    IM=5
C
C  LEITURA DOS DADOS EM CARTOES
204 CONTINUE
    CALL DADOS(TITUL,X,Y,Z,ICON,PROP,IAPO,PRESC,NUMER,TICAR,P,
    *NPONT,SIG,EPS)
C
C  APLICACAO DA ANALISE DESEJADA, FUNCAO DE IFORM E METOD
    IF(JFORM,NE.1)GO TO 201
C  IFORM = 1
    CALL ALINE1(TITUL,X,Y,Z,ICON,PROP,IAPO,REAC,TICAR,P,DTADP,
    *D,FORC,AUX1,RITO,RIEL,R,RT,DL1,DL2,PRESC,FX,FY,FZ,LLIN,
    *NUMER,NPONT,SIG,EPS)
    GO TO 202
201 CONTINUE
    IF((METOD.EQ.5).OR.(METOD.EQ.6))GO TO 203
C  IFORM = 2, 3, 4 OU 5 - METOD = 1, 2, 3 OU 4
CALL F2SM14(TITUL,X,Y,Z,ICON,PROP,IAPO,REAC,TICAR,P,DTADP,
*D,FORC,AUX1,RITO,RIEL,R,RT,DL1,DL2,PRESC,FX,FY,FZ,LLIN,
*RAUX,NUMER,NPONT,SIG,EPS)
    GO TO 202
203 CONTINUE
C  IFORM = 2, 3, 4 OU 5 - METOD = 5 OU 6
    CALL F2SM56(TITUL,X,Y,Z,ICON,PROP,IAPO,REAC,TICAR,P,DTADP,
    *D,FORC,AUX1,RITO,RIEL,R,RT,DL1,DL2,PRESC,FX,FY,FZ,LLIN,
    *FR,DPRED,DH,FH,ET,NUMER,NPONT,SIG,EPS)
202 CONTINUE
    GO TO 204
END

```

```

    SUBROUTINE DADOS(TITUL,X,Y,Z,ICON,PROP,IAPO,PRESC,NUMER,
    *TICAR,P,NPONT,SIG,EPS)

```

```

C
C  LEITURA DOS DADOS EM CARTOES
C
C  ACAR = VETOR AUXILIAR PARA ARMAZENAR TEMPORARIAMENTE UM
C  CONJUNTO DE VALORES PRESCRITOS DAS RESTRICUES NODAIS,
C  E UM CONJUNTO DE CARGAS NODAIS
C  ICAP = VETOR AUXILIAR PARA ARMAZENAR TEMPORARIAMENTE UM
C  CONJUNTO DE CONECTIVIDADES DE UM ELEMENTO, E UM
C  CONJUNTO DE INDICADORES DAS RESTRICUES NODAIS
COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
    *E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZOLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
DIMENSION TITUL(1),X(1),Y(1),Z(1),ICON(1),PROP(1),IAPO(1),

```

```
*PRESC(1),TICAR(1),P(1),ACAR(3),ICAP(3),SIG(1),EPS(1)
```

```
C
```

```
C LEITURA DO TITULO E IMPRESSAO DO CABECALHO E DO TITULO
```

```
  READ(LC,103,END=199)(TITUL(I),I=1,60)
```

```
103 FORMAT(20A4)
```

```
  WRITE(IM,101)
```

```
101 FORMAT(16X,100("*") / 16X,"*", 98X,"*" / 16X,"*",9X, "COP",
* "PE / UFRJ - PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL - ",
* " AREA DE ESTRUTURAS", 9X,"*" / 16X,"*", 98X,"*" / 16X,
*"*",9X, "ANALITE - ANALISE NAO-LINEAR GEOMETRICA E ",
* " FISICA DE TRELICAS ESPACIAIS", 9X,"*" / 16X,"*", 98X,
*"*" / 16X,"*",9X, "TESE DE MESTRADO - AUTOR: RODRIGO A",
* "MARAL DE CODES - DATA: DEZEMBRO DE 1978", 9X,"*" / 16X,
* " ", 98X,"*" / 16X,100("*") /)
```

```
  WRITE(IM,104)(TITUL(I),I=1,60)
```

```
104 FORMAT(26X,"TITULO" / 26X,6("-") // 26X,20A4 / 26X,20A4 /
*26X,20A4 /)
```

```
C
```

```
C LEITURA E IMPRESSAO DO TIPO DE ANALISE
```

```
C (ANALISE LINEAR E NAO-LINEAR GEOMETRICA)
```

```
C IFORM = INDICE QUE DEFINE A FORMULACAO
```

```
C METOD = INDICE QUE DEFINE O METODO DE SOLUCAO
```

```
C MINCR = NUMERO DE INCREMENTOS
```

```
C MITER = NUMERO MAXIMO DE ITERACOES POR INCREMENTO
```

```
C GAMA = VALOR DE TESTE DA CONVERGENCIA
```

```
C ZDLAM = FATOR DE AMPLIFICACAO DO DESEQUILIBRIO
```

```
C IMPRE = 0 - IMPRESSAO DE RESULTADOS NO FINAL DA ANALISE
```

```
C 1 - IMPRESSAO DE RESULTADOS NO FIM DE CADA INCREMENTO
```

```
C 2 - IMPRESSAO DE RESULTADOS EM CADA PASSO ITERATIVO
```

```
  READ(LC,123)IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE
```

```
123 FORMAT(2(9X,I1),2(5X,I5),F10.8,F10.5,9X,I1)
```

```
  IF(IFORM.EQ.1)METOD=7
```

```
  GO TO(231,231,233,234,235,235,237),METOD
```

```
237 CONTINUE
```

```
  METOD=0
```

```
  MINCR=0
```

```
235 CONTINUE
```

```
  MITER=0
```

```
233 CONTINUE
```

```
  ZDLAM=0.
```

```
234 CONTINUE
```

```
  GAMA=0.
```

```
  GO TO 239
```

```
231 CONTINUE
```

```
  ZDLAM=1.
```

```
239 CONTINUE
```

```
  IF((METOD.EQ.3).OR.(METOD.EQ.4))MITER=1
```

```
  WRITE(IM,105)
```

```
105 FORMAT(16X,100("=") // 26X,"DADOS INTERNOS" / 26X,14("=")
```

```
*// 16X,100("-") /)
```

```
  GO TO(251,252,253,254,255),IFORM
```

```
251 CONTINUE
```

```
  WRITE(IM,151)
```

```
151 FORMAT(26X, "ANALISE LINEAR" / 26X, 14("-") /)
```



```

GO TO 299
252 CONTINUE
WRITE(IM,152)
152 FORMAT(26X, "ANALISE NAO-LINEAR GEOMETRICA" / 26X, 29("-"))
*// 26X, "FORMULACAO LAGRANGEANA (2)" / 26X, "- TENSOR DE ",
*"DEFORMACOES COMPLETO" / 26X, "- CALCULO DO EQUILIBRIO NO",
*"DAL ATRAVES DA MATRIZ DE RIGIDEZ SECANTE" )
GO TO 259
253 CONTINUE
WRITE(IM,153)
153 FORMAT(26X, "ANALISE NAO-LINEAR GEOMETRICA" / 26X, 29("-"))
*// 26X, "FORMULACAO LAGRANGEANA (3)" / 26X, "- TENSOR DE ",
*"DEFORMACOES DESPREZANDO O TERMO  $UX^{*2/2}$ ." / 26X, "- CALC",
*"ULO DO EQUILIBRIO NODAL ATRAVES DA MATRIZ DE RIGIDEZ SEC",
*"ANTE" )
GO TO 259
254 CONTINUE
WRITE(IM,154)
154 FORMAT(26X, "ANALISE NAO-LINEAR GEOMETRICA" / 26X, 29("-"))
*// 26X, "FORMULACAO LAGRANGEANA (4)" / 26X, "- TENSOR DE ",
*"DEFORMACOES COMPLETO" / 26X, "- CALCULO DIRETO DO EQUILI",
*"BRIO NODAL" )
GO TO 259
255 CONTINUE
WRITE(IM,155)
155 FORMAT(26X, "ANALISE NAO-LINEAR GEOMETRICA" / 26X, 29("-"))
*// 26X, "FORMULACAO LAGRANGEANA ATUALIZADA (5)" / 26X, "- "
*" TENSOR DE DEFORMACOES COMPLETO" / 26X, "- CALCULO DIRET",
*"O DO EQUILIBRIO NODAL" )
259 CONTINUE
GO TO(271,272,273,274,275,276),METOD
271 CONTINUE
WRITE(IM,171)
171 FORMAT(/26X, "METODO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON (1)" )
GO TO 278
272 CONTINUE
WRITE(IM,172)
172 FORMAT(/26X, "METODO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICA",
*"DO (2)" )
GO TO 278
273 CONTINUE
WRITE(IM,173)
173 FORMAT(/26X, "METODO INCREMENTAL CONVENCIONAL (3)" )
GO TO 278
274 CONTINUE
WRITE(IM,174)
174 FORMAT(/26X, "METODO INCREMENTAL AUTO-CORRETIVO DE PRIMEI",
*"RA ORDEM (4)" )
278 CONTINUE
WRITE(IM,122)MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM
122 FORMAT(26X, "NUMERO DE INCREMENTOS", 18X,"=", 5X,I5 / 26X,
*"MAXIMO DE ITERACOES POR INCREMENTO", 5X,"=", 5X,I5 / 26X,
*"VALOR DE TESTE DA CONVERGENCIA", 9X,"=", F10.7 / 26X,
*"FATOR DE AMPLIFICACAO DO DESEQUILIBRIO =", F10.5 )

```

```

      GO TO 299
275 CONTINUE
      WRITE(IM,175)
175 FORMAT(/26X, "METODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM (5)" )
      GO TO 279
276 CONTINUE
      WRITE(IM,176)
176 FORMAT(/26X, "METODO PREDICTOR-CORRECTOR DE HAMMING (6)" /
      *26X, "- OS TRES PRIMEIROS INCREMENTOS SAO OBTIDOS NO METO",
      *"DO DE RUNGE-KUTTA" )
279 CONTINUE
      WRITE(IM,124)MINCR
124 FORMAT(26X, "NUMERO DE INCREMENTOS      =", 9X,15 )
299 CONTINUE

```

C

C LEITURA E IMPRESSAO DOS PARAMETROS BASICOS E DOS DADOS DA

C ANALISE NAO-LINEAR FISICA

C NN = NUMERO DE NOS

C NE = NUMERO DE ELEMENTOS

C NNAP = NUMERO DE NOS APOIADOS

C NNCR = NUMERO DE NOS CARREGADOS

C E = MODULO DE ELASTICIDADE

C NPONT = NUMERO DE PONTOS DO GRAFICO DE TENSÃO X DEFORMAÇÃO

C SIG = VETOR CONTENDO AS TENSOES NOS PONTOS DO GRAFICO

C EPS = VETOR CONTENDO AS DEFORMACOES NOS PONTOS DO GRAFICO

READ(LC,106)NN,NE,NNAP,NNCR,E,NPONT

-----106 FORMAT(4(4X,I6),F10.0,5X,15)-----

IF(NPONT.EQ.0)GO TO 201

WRITE(IM,125)

```

125 FORMAT(/16X,100("-") // 26X, "ANALISE NAO-LINEAR FISICA" /
      *26X,25("-") // 26X,"PONTO", 15X,"TENSÃO", 17X,"DEFORMAÇÃO",
      * 12X,"MOD. ELAST. TG." / 26X,5("-"), 3(16X,15("-"))) )
      READ(LC,126)(1,SIG(I),EPS(I),I=1,NPONT)

```

126 FORMAT(5X,15,2F10.5)

DO 305 IP=1,NPONT

IF(IP.EQ.NPONT)GO TO 202

DT=(SIG(IP+1)-SIG(IP))/(EPS(IP+1)-EPS(IP))

GO TO 203

202 CONTINUE

DT=0.

203 CONTINUE

WRITE(IM,127)IP,SIG(IP),EPS(IP),DT

127 FORMAT(26X,15,2(10X,F15.6),10X,F15.4)

305 CONTINUE

201 CONTINUE

WRITE(IM,107)NN,NE,NNAP,NNCR

```

107 FORMAT(/16X,100("-") // 26X, "NUMERO DE NOS", 12X,"=", 8X,
      *16 / 26X, "NUMERO DE ELEMENTOS", 6X,"=", 8X,16 / 26X, "NU",
      *"MERO DE NOS APOIADOS . =", 8X,16 / 26X, "NUMERO DE NOS C",
      *"ARREGADOS =", 8X,16 )

```

IF(NPONT.NE.0)GO TO 204

WRITE(IM,128)E

128 FORMAT(26X, "MODULO DE ELASTICIDADE =", 4X,F10.0 )

204 CONTINUE

```

C
C  LEITURA DAS COORDENADAS NODAIS E ARMAZENAMENTO NOS VETORES X,
C  Y E Z, E IMPRESSAO DAS MESMAS
      WRITE(IM,108)
108  FORMAT(/16X,100("-") // 26X, "COORDENADAS NODAIS" / 26X,
      *18("-") // 28X,"NO", 18X,"X", 24X,"Y", 24X,"Z" /26X,6("-"),
      * 9X,15("-"), 10X,15("-"), 10X,15("-"))
      READ(LC,109)(I,X(I),Y(I),Z(I),I=1,NN)
109  FORMAT(4X,16,3F10.4)
      WRITE(IM,110)(I,X(I),Y(I),Z(I),I=1,NN)
110  FORMAT(26X,16,9X,F15.6,10X,F15.6,10X,F15.6)
C
C  LEITURA DAS CONECTIVIDADES DOS ELEMENTOS E ARMAZENAMENTO NO
C  VETOR ICON, LEITURA DAS PROPRIEDADES (AREAS) DOS ELEMENTOS E
C  ARMAZENAMENTO NO VETOR PROP, E IMPRESSAO DAS MESMAS
      WRITE(IM,111)
111  FORMAT(/ 16X,100("-") // 26X, "CONECTIVIDADES E PROPRIEDA",
      * "DES DOS ELEMENTOS" / 26X,43("-") // 26X, "ELEMENTO", 13X,
      * "NO INICIAL", 12X, "NO FINAL", 18X, "AREA" / 26X,8("-"),
      *13X,10("-"), 12X,10("-"), 12X,15("-"))
      DO 301 J=1,NE
      READ(LC,112)I,ICAP(1),ICAP(2),PROP(1)
112  FORMAT(3(4X,16),F10.5)
      WRITE(IM,113)I,ICAP(1),ICAP(2),PROP(1)
113  FORMAT(27X,16,16X,16,16X,16,14X,F15.6)
      N1=NNE*(I-1)
      ICON(N1+1)=ICAP(1)
      ICON(N1+2)=ICAP(2)
301  CONTINUE
C
C  CALCULO DE N, ATUAL NUMERO DE INCOGNITAS, E INICIALIZACAO DO
C  VETOR DE CARGAS NODAIS
      N=NN*NGL
      DO 302 I=1,N
      P(I)=0.
302  CONTINUE
C
C  LEITURA DAS RESTRICOES NODAIS: ARMAZENAMENTO DOS INDICADORES
C  DAS CONDICÕES DE RESTRICAO NO VETOR IAPD, VALORES PRESCRITOS
C  NO VETOR PRESC, E IMPRESSAO DAS MESMAS
      WRITE(IM,114)
114  FORMAT(/ 16X,100("-") // 26X, "CONDICOES DE CONTORNO (RES",
      * "TRICOES NODAIS OU APOIOS)" / 26X,51("-") //45X,"CONDICAO",
      * 23X, "VALORES PRESCRITOS" / 28X,"NO", 7X, "(0=PRESCRITO ",
      * "- 1=LIVRE)", 4X,42("-") / 39X,"U", 8X,"V", 8X,"W", 12X,"U"
      *, 14X,"V", 14X,"W" / 26X,6("-"), 5X,5("-"), 4X,5("-"), 4X,
      *5("-"), 4X,12("-"), 3X,12("-"), 3X,12("-"))
      DO 303 I=1,NNAP
      READ(LC,115)J,(ICAP(K),K=1,NGL),(ACAR(K),K=1,NGL)
115  FORMAT(4X,16,3(9X,11),3(F10.5))
      WRITE(IM,116)J,(ICAP(K),K=1,NGL),(ACAR(K),K=1,NGL)
116  FORMAT(26X,16,7X,11,8X,11,8X,11,6X,F12.6,3X,F12.6,3X,F12.6)
      L1=(NGL+1)*(I-1)+1
      L2=NGL*(J-1)

```

```

      IAP0(L1)=J
      DO 303 K=1,NGL
      N1=L1+K
      N2=L2+K
      IAP0(N1)=ICAP(K)
      PRESC(N2)=ACAR(K)
303 CONTINUE
C
C  LEITURA DO NUMERO E DO TITULO DO CARREGAMENTO, LEITURA DAS
C  CARGAS NODAIS E ARMAZENAMENTO NO VETOR P, E IMPRESSAO DOS
C  MESMOS
      READ(LC,117)NUMER,(TICAR(I),I=1,10)
117 FORMAT(6X,I4,10A4)
      WRITE(IM,118)NUMER,(TICAR(I),I=1,10)
118 FORMAT(/ 16X,100("-") // 26X, "CARGAS NODAIS" / 26X,13("-")
      *// 26X, "CARREGAMENTO = ", I4,12X, "TITULO = ", 10A4 //28X,
      * "NO", 18X,"PX", 23X,"PY", 23X,"PZ" / 26X,6("-"),9X,15("-")
      *, 10X,15("-"), 10X,15("-"))
      DO 304 I=1,NNCR
      READ(LC,119)J,(ACAR(K),K=1,NGL)
119 FORMAT(4X,I6,3F10.3)
      WRITE(IM,120)J,(ACAR(K),K=1,NGL)
120 FORMAT(26X,I6,9X,F15.6,2(10X,F15.6))
      DO 304 K=1,NGL
      L=NGL*(J-1)+K
      P(L)=ACAR(K)
-----304 CONTINUE-----
      WRITE(IM,121)
121 FORMAT(/16X,100("="))
      RETURN
199 CONTINUE
      CALL EXIT
      END

      SUBROUTINE ROTAC(R,RT,CX,CY,CZ,IROT)
C
C  IROT=1 - CALCULO DA MATRIZ DE ROTACAO
C  IROT=2 - CALCULO DA MATRIZ DE ROTACAO E DA SUA TRANSPOSTA
C
C  R = MATRIZ DE ROTACAO
C  RT = MATRIZ DE ROTACAO TRANSPOSTA
      COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
      *E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
      REAL LL
      DIMENSION R(NGLEL,NGLEL),RT(NGLEL,NGLEL)
C
C  CALCULO DA MATRIZ DE ROTACAO R
      IF(ABS(CX)-0.000001)201,201,202
201 IF(ABS(CZ)-0.000001)203,203,202
202 CONTINUE
C  MATRIZ R PARA ELEMENTO COM DIRECAO ARBITRARIA
      R(1,1)=CX
      R(1,2)=CY

```

```

R(1,3)=CZ
R(2,1)=- (CX*CY)/SQRT(CX*CX+CZ*CZ)
R(2,2)=SQRT(CX*CX+CZ*CZ)
R(2,3)=- (CY*CZ)/SQRT(CX*CX+CZ*CZ)
R(3,1)=-CZ/SQRT(CX*CX+CZ*CZ)
R(3,2)=0.
R(3,3)=CX/SQRT(CX*CX+CZ*CZ)
DO 301 I=1,NGL
DO 301 J=1,NGL
K1=I+NGL
K2=J+NGL
R(K1,K2)=R(I,J)
R(I,K2)=0.
R(K1,J)=0.
301 CONTINUE
GO TO 204
203 CONTINUE
C  MATRIZ R PARA ELEMENTO VERTICAL
DO 302 I=1,NGL
DO 302 J=1,NGL
302 R(1,J)=0.
R(1,2)=CY
R(2,1)=-CY
R(3,3)=1.
R(4,5)=CY
R(5,4)=-CY
RT(6,6)=1.
204 CONTINUE
IF(IROT-1)205,206,205
205 CONTINUE
C
C  CALCULO DA MATRIZ DE ROTACAO TRANSPONSTA RT
DO 305 I=1,NGL
DO 305 J=1,NGL
305 RT(I,J)=R(J,I)
206 CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE DELOC(D,DL1,DL2,R,N1,N2)
C
C  CALCULO DOS DESLOCAMENTOS DOS NOS DO ELEMENTO ATUAL NO SISTEMA
C  DE EIXOS LOCAL
C
C  DL1 = VETOR DOS DESLOCAMENTOS DO NO INICIAL
C  DL2 = VETOR DOS DESLOCAMENTOS DO NO FINAL
COMMON NLMX,NCNX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
*E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
DIMENSION D(1),DL1(1),DL2(1),R(NGLEL,NGLEL),DAUX(3)
C
LD1=NGL*(N1-1)
DAUX(1)=D(LD1+1)
DAUX(2)=D(LD1+2)

```

```

      DAUX(3)=D(LD1+3)
      DO 301 I=1,NGL
      DL1(I)=0.
      DO 301 J=1,NGL
      DL1(I)=DL1(I)+R(I,J)*DAUX(J)
301  CONTINUE
      LD2=NGL*(N2-1)
      DAUX(1)=D(LD2+1)
      DAUX(2)=D(LD2+2)
      DAUX(3)=D(LD2+3)
      DO 302 I=1,NGL
      DL2(I)=0.
      DO 302 J=1,NGL
      DL2(I)=DL2(I)+R(I,J)*DAUX(J)
302  CONTINUE
      RETURN
      END

```

SUBROUTINE NLFIS(NPONT,SIG,EPS,TENSA,DEFOR,DT)

```

C
C  INTRODUCAO DA NAO-LINEARIDADE FISICA NO ELEMENTO ATUAL
C
C  DEFOR = DEFORMACAO DO ELEMENTO PARA O CALCULO DE DT E TENSA
C  DT     = RELACOES CONSTITUTIVAS TANGENTES (CALCULADAS)
C  TENSA  = TENSAO NO ELEMENTO (CALCULADA)
C  -----
C  DIMENSION SIG(I),EPS(I)
C
      DO 301 IP=2,NPONT
      IF(ABS(DEFOR).LT.EPS(IP))GO TO 201
301  CONTINUE
      DT=0.
      TENSA=SIG(NPONT)*SIGN(1.,DEFOR)
      RETURN
201  CONTINUE
      DT=(SIG(IP)-SIG(IP-1))/(EPS(IP)-EPS(IP-1))
      TENSA=((ABS(DEFOR)-EPS(IP-1))*DT+SIG(IP-1))*SIGN(1.,DEFOR)
      RETURN
      END

```

SUBROUTINE RLINI(NEL,PROP,LL,RIEL)

```

C
C  CALCULO DOS COEFICIENTES DA MATRIZ DE RIGIDEZ LINEAR PARA O
C  ELEMENTO ATUAL NO SISTEMA LOCAL (IFORM=1)
C  - ANALISE LINEAR
C
      COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
      *E,IFORM,MFTUD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
      REAL LL
      DIMENSION PROP(1),RIEL(NGLEL,NGLEL)
C
      COEF=E*PROP(NEL)/LL
      DO 301 I=1,NGLEL

```

```

DO 301 J=1,NGLEL
301 RIEL(I,J)=0.
   RIEL(1,1)=COEF
   RIEL(1,4)=-COEF
   RIEL(4,1)=-COEF
   RIEL(4,4)=COEF
   RETURN
END

```

```

SUBROUTINE RTAN2(NEL,PROP,LL,DL1,DL2,RIEL)

```

```

C
C  CALCULO DOS COEFICIENTES DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE PARA O
C  ELEMENTO ATUAL NO SISTEMA LOCAL (IFORM=2)
C  - FORMULACAO LAGRANGEANA
C  - TENSOR DE DEFORMACOES COMPLETO
C
COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
*E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
REAL LL
DIMENSION PROP(1),DL1(1),DL2(1),RIEL(NGLEL,NGLEL)
C
COEF=E*PROP(NEL)/LL
UX=(DL2(1)-DL1(1))/LL
VX=(DL2(2)-DL1(2))/LL
WX=(DL2(3)-DL1(3))/LL
-----
DELTA=(UX*UX+VX*VX+WX*WX)/2.
RIEL(1,1)=COEF*(1.+3.*UX+DELTA+UX*UX)
RIEL(1,2)=COEF*(VX+UX*VX)
RIEL(1,3)=COEF*(WX+UX*WX)
RIEL(2,1)=COEF*(VX+UX*VX)
RIEL(2,2)=COEF*(UX+DELTA+VX*VX)
RIEL(2,3)=COEF*(VX*WX)
RIEL(3,1)=COEF*(WX+UX*WX)
RIEL(3,2)=COEF*(VX*WX)
RIEL(3,3)=COEF*(UX+DELTA+WX*WX)
DO 301 I=1,NGL
DO 301 J=1,NGL
K1=I+NGL
K2=J+NGL
RIEL(K1,K2)=RIEL(I,J)
RIEL(I,K2)=-RIEL(I,J)
RIEL(K1,J)=-RIEL(I,J)
301 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE RTAN3(NEL,PROP,LL,DL1,DL2,RIEL)

```

```

C
C  CALCULO DOS COEFICIENTES DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE PARA O
C  ELEMENTO ATUAL NO SISTEMA LOCAL (IFORM=3)
C  - FORMULACAO LAGRANGEANA
C  - TENSOR DE DEFORMACOES DESPREZANDO O TERMO  $UX**2/2$ .

```

C

```

COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
*E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
REAL LL
DIMENSION PROP(1),DL1(1),DL2(1),RIEL(NGLEL,NGLEL)

```

C

```

COEF=E*PROP(NEL)/LL
UX=(DL2(1)-DL1(1))/LL
VX=(DL2(2)-DL1(2))/LL
WX=(DL2(3)-DL1(3))/LL
RIEL(1,1)=COEF
RIEL(1,2)=COEF*VX
RIEL(1,3)=COEF*WX
RIEL(2,1)=COEF*VX
RIEL(2,2)=COEF*(UX+(3.*VX*VX/2.))
RIEL(2,3)=COEF*(3.*VX*WX/2.)
RIEL(3,1)=COEF*WX
RIEL(3,2)=COEF*(3.*VX*WX/2.)
RIEL(3,3)=COEF*(UX+(3.*WX*WX/2.))
DO 301 I=1,NGL
DO 301 J=1,NGL
K1=I+NGL
K2=J+NGL
RIEL(K1,K2)=RIEL(I,J)
RIEL(I,K2)=-RIEL(I,J)
RIEL(K1,J)=-RIEL(I,J)
301 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE RTAN4(NEL,PROP,LL,DL1,DL2,RIEL,NPONT,SIG,EPS)

```

C

C

C

C

C

C

C

```

COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
*E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
REAL LL
DIMENSION PROP(1),DL1(1),DL2(1),RIEL(NGLEL,NGLEL),SIG(1),
*EPS(1)

```

C

```

UX=(DL2(1)-DL1(1))/LL
VX=(DL2(2)-DL1(2))/LL
WX=(DL2(3)-DL1(3))/LL
DEFOR=UX*(UX+VX*VX+WX*WX)/2.
IF(NPONT.NE.0)GO TO 201
COEF1=PROP(NEL)*E/LL
COEF2=PROP(NEL)*E*DEFOR/LL
GO TO 202

```

```

201 CONTINUE

```

```

CALL NLFIS(NPONT,SIG,EPS,TENSA,DEFOR,DT)

```



```

COEF1=PROP(NEL)*DT/LL
COEF2=PROP(NEL)*TENSA/LL
202 CONTINUE
RIEL(1,1)=COEF1*(1+UX)**2+COEF2
RIEL(1,2)=COEF1*(1+UX)*VX
RIEL(1,3)=COEF1*(1+UX)*WX
RIEL(2,1)=COEF1*(1+UX)*VX
RIEL(2,2)=COEF1*VX*VX+COEF2
RIEL(2,3)=COEF1*VX*WX
RIEL(3,1)=COEF1*(1+UX)*WX
RIEL(3,2)=COEF1*VX*WX
RIEL(3,3)=COEF1*WX*WX+COEF2
DO 301 J=1,NGL
DO 301 J=1,NGL
K1=I+NGL
K2=J+NGL
RIEL(K1,K2)=RIEL(I,J)
RIEL(I,K2)=-RIEL(I,J)
RIEL(K1,J)=-RIEL(I,J)
301 CONTINUE
RETURN
END

```

SUBROUTINE RTANS(NEL,PROP,LL,LLIN,RIEL,NPONT,SIG,EPS)

C

~~C CALCULO DOS COEFICIENTES DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE PARA O~~  
C ELEMENTO ATUAL NO SISTEMA LOCAL (IFORM=5)  
C - FORMULACAO LAGRANGEANA ATUALIZADA  
C - TENSOR DE DEFORMACOES COMPLETO

C

```

COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
*E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
REAL LL,LLIN
DIMENSION PROP(1),LLIN(1),RIEL(NGLEL,NGLEL),SIG(1),EPS(1)

```

C

```

IF(NPONT.NE.0)GO TO 201
DEFOR=(LL**2-LLIN(NEL)**2)/(2.*LL**2)
EBAR=(LL/LLIN(NEL))**3*E
COEF1=PROP(NEL)*EBAR/LL
COEF2=PROP(NEL)*EBAR*DEFOR/LL
GO TO 202
201 CONTINUE
DEFOR=(LL**2-LLIN(NEL)**2)/(2.*LLIN(NEL)**2)
CALL NLFIS(NPONT,SIG,EPS,SIGMA,DEFOR,DT)
SIGBA=(LL/LLIN(NEL))*SIGMA
DTBAR=(LL/LLIN(NEL))**3*DT
COEF1=PROP(NEL)*DTBAR/LL
COEF2=PROP(NEL)*SIGBA/LL
202 CONTINUE
RIEL(1,1)=COEF1+COEF2
RIEL(1,2)=0.
RIEL(1,3)=0.
RIEL(2,1)=0.

```

```

RIEL(2,2)=COEF2
RIEL(2,3)=0.
RIEL(3,1)=0.
RIEL(3,2)=0.
RIEL(3,3)=COEF2
DO 301 I=1,NGL
DO 301 J=1,NGL
K1=I+NGL
K2=J+NGL
RIEL(K1,K2)=RIEL(I,J)
RIEL(I,K2)=-RIEL(I,J)
RIEL(K1,J)=-RIEL(I,J)
301 CONTINUE
RETURN
END

```

SUBROUTINE RSEC2(NEL,PROP,LL,DL1,DL2,RIEL)

```

C
C  CALCULO DOS COEFICIENTES DA MATRIZ DE RIGIDEZ SECANTE PARA O
C  ELEMENTO ATUAL NO SISTEMA LOCAL (IFORM=2)
C  - FORMULACAO LAGRANGEANA
C  - TENSOR DE DEFORMACOES COMPLETO
C
COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
+E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
REAL LL
DIMENSION PROP(1),DL1(1),DL2(1),RIEL(NGLEL,NGLEL)

C
COEF=E*PROP(NEL)/LL
UX=(DL2(1)-DL1(1))/LL
VX=(DL2(2)-DL1(2))/LL
WX=(DL2(3)-DL1(3))/LL
DELTA=(UX*UX+VX*VX+WX*WX)/2.
RIEL(1,1)=COEF*(1.+3.*UX/2.+(DELTA+UX*UX)/3.)
RIEL(1,2)=COEF*(VX/2.+UX*VX/3.)
RIEL(1,3)=COEF*(WX/2.+UX*WX/3.)
RIEL(2,1)=COEF*(VX/2.+UX*VX/3.)
RIEL(2,2)=COEF*(UX/2.+(DELTA+VX*VX)/3.)
RIEL(2,3)=COEF*(VX*WX/3.)
RIEL(3,1)=COEF*(WX/2.+UX*WX/3.)
RIEL(3,2)=COEF*(VX*WX/3.)
RIEL(3,3)=COEF*(UX/2.+(DELTA+WX*WX)/3.)
DO 301 I=1,NGL
DO 301 J=1,NGL
K1=I+NGL
K2=J+NGL
RIEL(K1,K2)=RIEL(I,J)
RIEL(I,K2)=-RIEL(I,J)
RIEL(K1,J)=-RIEL(I,J)
301 CONTINUE
RETURN
END

```

SUBROUTINE RSEC3(NEL,PROP,LL,DL1,DL2,RIEL)

```

C
C  CALCULO DOS COEFICIENTES DA MATRIZ DE RIGIDEZ SECANTE PARA O
C  ELEMENTO ATUAL NO SISTEMA LOCAL (IFORM=3)
C  - FORMULACAO LAGRANGEANA
C  - TENSOR DE DEFORMACOES DESPREZANDO O TERMO  $UX**2/2$ .
C
COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
*E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
REAL LL
DIMENSION PROP(1),DL1(1),DL2(1),RIEL(NGLEL,NGLEL)

C
COEF=E*PROP(NEL)/LL
UX=(DL2(1)-DL1(1))/LL
VX=(DL2(2)-DL1(2))/LL
WX=(DL2(3)-DL1(3))/LL
RIEL(1,1)=COEF
RIEL(1,2)=COEF*(VX/2.)
RIEL(1,3)=COEF*(WX/2.)
RIEL(2,1)=COEF*(VX/2.)
RIEL(2,2)=COEF*((UX+VX*VX)/2.)
RIEL(2,3)=COEF*(VX*WX/2.)
RIEL(3,1)=COEF*(WX/2.)
RIEL(3,2)=COEF*(VX*WX/2.)
RIEL(3,3)=COEF*((UX+WX*WX)/2.)
-----
DO 301 I=1,NGL
DO 301 J=1,NGL
K1=I+NGL
K2=J+NGL
RIEL(K1,K2)=RIEL(I,J)
RIEL(I,K2)=-RIEL(I,J)
RIEL(K1,J)=-RIEL(I,J)
301 CONTINUE
RETURN
END

```

SUBROUTINE RIGEL(NEL,ICON,X,Y,Z,D,PROP,RIEL,R,RT,DL1,DL2,  
\*LLIN,IREL,NPONT,SIG,EPS)

```

C
C  IREL=1 - MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO ATUAL NO SISTEMA GLOBAL
C  IREL=2 - MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO ATUAL NO SISTEMA LOCAL
C
C  NEL = NUMERO DO ELEMENTO ATUAL
C  N1  = NUMERO DO NO INICIAL
C  N2  = NUMERO DO NO FINAL
COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
*E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
REAL LL,LLIN
DIMENSION ICON(1),X(1),Y(1),Z(1),D(1),PROP(1),
*RIEL(NGLEL,NGLEL),R(NGLEL,NGLEL),RI(NGLEL,NGLEL),DL1(1),
*DL2(1),AUX(6),LLIN(1),SIG(1),EPS(1)

```

```

L=NNE*(NEL-1)
N1=ICON(L+1)
N2=ICON(L+2)

```

```

C
C  CALCULO DO COMPRIMENTO DO ELEMENTO, DOS TRES COSENOS DIRETORES
C  DO SEU EIXO LOCAL X, E ARMAZENAMENTO EM LL, CX, CY E CZ,
C  RESPECTIVAMENTE
  LL=SQRT((X(N2)-X(N1))**2+(Y(N2)-Y(N1))**2+(Z(N2)-Z(N1))**2)
  CX=(X(N2)-X(N1))/LL
  CY=(Y(N2)-Y(N1))/LL
  CZ=(Z(N2)-Z(N1))/LL

```

```

C
C  CALCULO DO COMPRIMENTO INICIAL DO ELEMENTO
  IF(IFORM.NE.5)GO TO 206
  IF(INCR.NE.1)GO TO 206
  IF(ITER.NE.1)GO TO 206
  LLIN(NEL)=LL
206 CONTINUE

```

```

C
C  CALCULO DA MATRIZ DE ROTACAO OU CALCULO DA MATRIZ DE ROTACAO E
C  DA SUA TRANSPOSTA
  IF(IREL-1)201,202,201
202 CONTINUE
C  IREL=1
  IROT=2
  GO TO 203

```

```

201 CONTINUE
C  IREL=2
  IROT=1
203 CONTINUE
  CALL ROTAC(R,RT,CX,CY,CZ,IROT)

```

```

C
C  CALCULO DOS DESLOCAMENTOS DO NO INICIAL E DO NO FINAL, E
C  ARMAZENAMENTO NOS VETORES DL1 E DL2, RESPECTIVAMENTE
  IF((IFORM.EQ.1).OR.(IFORM.EQ.5))GO TO 207
  CALL DELOC(D,DL1,DL2,R,N1,N2)
207 CONTINUE

```

```

C
C  CALCULO DOS COEFICIENTES DA MATRIZ RIEL NO SISTEMA LOCAL,
C  FUNCAO DO VALOR DE IRIG
  GO TO(251,252,253,254,255,256,257),IRIG
251 CONTINUE
  CALL RLIN1(NEL,PROP,LL,RIEL)
  GO TO 299
252 CONTINUE
  CALL RTAN2(NEL,PROP,LL,DL1,DL2,RIEL)
  GO TO 299
253 CONTINUE
  CALL RTAN3(NEL,PROP,LL,DL1,DL2,RIEL)
  GO TO 299
254 CONTINUE
  CALL RTAN4(NEL,PROP,LL,DL1,DL2,RIEL,NPONT,SIG,EPS)
  GO TO 299
255 CONTINUE

```

```

      CALL RTANS(NEL,PROP,LL,LLIN,RIEL,NPONT,SIG,EPS)
      GO TO 299
256 CONTINUE
      CALL RSEC2(NEL,PROP,LL,DL1,DL2,RIEL)
      GO TO 299
257 CONTINUE
      CALL RSEC3(NEL,PROP,LL,DL1,DL2,RIEL)
299 CONTINUE
      IF(IREL-1)204,205,204
204 CONTINUE
C   OBTIDA A MATRIZ RIEL NO SISTEMA LOCAL
      RETURN
205 CONTINUE
C
C   CALCULO DA MATRIZ RIEL NO SISTEMA GLOBAL: RIEL=RT*RIEL*R
C   PRODUTO DE RT POR RIEL, RESULTADO EM RT
      DO 301 I=1,NGLEL
      DO 302 J=1,NGLEL
      AUX(J)=0.
      DO 302 K=1,NGLEL
      AUX(J)=AUX(J)+RT(I,K)*RIEL(K,J)
302 CONTINUE
      DO 303 J=1,NGLEL
      RT(I,J)=AUX(J)
303 CONTINUE
301 CONTINUE
C   PRODUTO DE RT POR R, RESULTADO EM RIEL
      DO 304 I=1,NGLEL
      DO 304 J=1,NGLEL
      RIEL(I,J)=0.
      DO 304 K=1,NGLEL
      RIEL(I,J)=RIEL(I,J)+RT(I,K)*R(K,J)
304 CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE MOREL(NEL,ICON,RITO,RIEL)
C
C   ARMAZENAMENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO NEL NA MATRIZ
C   DE RIGIDEZ TOTAL
C
C   NEL = NUMERO DO ELEMENTO ATUAL
C   N1  = NUMERO DO NO INICIAL
C   N2  = NUMERO DO NO FINAL
      COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
      *E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
      DIMENSION ICON(1),RITO(NLMX,NCMX),RIEL(NGLEL,NGLEL)
C
      L1=NNE*(NEL-1)
      DO 301 I=1,NNE
      L2=L1+I
      N1=ICON(L2)
      I1=NGL*(I-1)

```

```

J1=NGL*(N1-1)
DO 301 J=I,NNE
  L2=L1+J
  N2=ICON(L2)
  I2=NGL*(J-1)
  J2=NGL*(N2-1)
  DO 301 K=1,NGL
    KI=1
    IF(N1-N2)201,202,203

```

```

202 CONTINUE

```

```

C
C  ARMAZENAMENTO DE UMA SUBMATRIZ NA DIAGONAL PRINCIPAL
  KI=K

```

```

201 CONTINUE

```

```

C
C  ARMAZENAMENTO DE UMA SUBMATRIZ FORA DA DIAGONAL PRINCIPAL

```

```

  KL=J1+K
  IC=J2-KL+1
  K1=I1+K
  GO TO 204

```

```

203 CONTINUE

```

```

C
C  ARMAZENAMENTO DA TRANSPONSTA DE UMA SUBMATRIZ FORA DA DIAGONAL
C  PRINCIPAL

```

```

  KL=J2+K
  IC=J1-KL+1
  K2=I2+K

```

```

204 CONTINUE

```

```

  DO 301 L=KI,NGL
    KC=IC+L

```

```

  IF(N1-N2)205,205,206

```

```

205 CONTINUE

```

```

  K2=I2+L
  GO TO 207

```

```

206 CONTINUE

```

```

  K1=I1+L

```

```

207 CONTINUE

```

```

  RITO(KL,KC)=RITO(KL,KC)+RIEL(K1,K2)

```

```

301 CONTINUE

```

```

  RETURN
  END

```

```

SUBROUTINE RIGTO(RITO,ICON,X,Y,Z,D,PROP,RIEL,R,RT,DL1,DL2,
*LLIN,NPONT,SIG,EPS)

```

```

C
C  MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ TOTAL

```

```

C
C  IIRIG - INDICE QUE INDICA A MATRIZ QUE SERA CALCULADA
COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
*E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZOLAM,IMPRE,INCR,ITER,IIRIG
REAL LLIN
DIMENSION RITO(NLMX,NCMX),ICON(1),X(1),Y(1),Z(1),D(1),
*PROP(1),RIEL(NGLEL,NGLEL),R(NGLEL,NGLEL),RT(NGLEL,NGLEL),

```

```

      *DL1(1),DL2(1),LLIN(1),SIG(1),EPS(1)
C
C  CALCULO DA LARGURA DA SEMI-BANDA E ARMAZENAMENTO EM LSB
      LSB=0
      DO 301 I=1,NE
        L1=2*I-1
        L2=2*I
        L=ABS(ICON(L1)-ICON(L2))
        IF(LSB-L)201,202,202
201  CONTINUE
        LSB=L
202  CONTINUE
301  CONTINUE
      LSB=NGL*(LSB+1)
C
C  INICIALIZACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ TOTAL
      DO 302 I=1,N
        DO 302 J=1,LSB
          RITO(I,J)=0.
302  CONTINUE
C
C  MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE CADA ELEMENTO NA MATRIZ DE
C  RIGIDEZ TOTAL
C
C  MATRIZ DO ELEMENTO NO SISTEMA GLOBAL
      IREL=1
      DO 303 NEL=1,NE
C
C  CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO NEL
        CALL RIGEL(NEL,ICON,X,Y,Z,D,PROP,RIEL,R,RT,DL1,DL2,LLIN,
          *IREL,NPONT,SIG,EPS)
C
C  LOCALIZACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO NA MATRIZ DE
C  RIGIDEZ TOTAL
        CALL MOREL(NEL,ICON,RITO,RIEL)
303  CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE ARMRT(RITO,RAUX)
C
C  ARMAZENAMENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE EM RAUX NO METODO
C  ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO (METOD=2)
C  ITER IGUAL A 1 - GUARDAR RITO EM RAUX
C  ITER MAIOR QUE 1 - DEVOLVER RAUX
C
      COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
        *E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
      DIMENSION RITO(NLMX,NCMX),RAUX(NLMX,NCMX)
C
      IF(ITER.GT.1)GO TO 201
C
C  GUARDAR A MATRIZ RITO EM RAUX (ITER IGUAL A 1)

```

```

      DO 301 I=1,N
      DO 301 J=1,LSB
      RAUX(I,J)=RITO(I,J)
301 CONTINUE
      GO TO 202
201 CONTINUE

C
C  DEVOLVER A MATRIZ RAUX (ITER MAIOR QUE 1)
      DO 302 I=1,N
      DO 302 J=1,LSB
      RITO(I,J)=RAUX(I,J)
302 CONTINUE
202 CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE APOIO(IAPO,RITO,DTADP,PRESO)

C
C  INTRODUCAO DAS CONDICAOES DE CONTORNO (RESTRICOES NODAIS OU
C  APOIOS)
C
C  NO = NUMERO DO NO APOIADO ATUAL
      COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NEE,NGL,NGLLEL,N,LSB,LC,IM,
      *E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
      DIMENSION IAPO(1),RITO(NLMX,NCMX),DTADP(1),PRESO(1)

C-----
      DO 301 L=1,NNAP
      L1=(NGL+1)*(L-1)+1
      NO=IAPO(L1)
      K1=NGL*(NO-1)
      DO 302 I=1,NGL
      L2=L1+I
      IF(IAPO(L2))201,202,201
202 CONTINUE

C
C  VALORES PRESCRITOS A SEREM CONSIDERADOS:
C  FIXACAO DO COEFICIENTE DA DIAGONAL PRINCIPAL DE RITO IGUAL A
C  1, E LOCALIZACAO DOS VALORES PRESCRITOS EM DTADP
      KL=K1+I
      RITO(KL,1)=1.
      IF(INCR-2)203,204,204
203 CONTINUE
      IF(ITER-2)205,204,204
205 CONTINUE
      DTADP(KL)=PRESO(KL)
      GO TO 206
204 CONTINUE
      DTADP(KL)=0.
206 CONTINUE
      DO 303 J=2,LSB
      KV=KL+J-1
      IF(N-KV)207,208,208
208 CONTINUE

```



```

C
C MODIFICACAO DA LINHA DE RITO E CORRESPONDENTE ELEMENTO DE
C DTADP
      DTADP(KV)=DTADP(KV)-RITO(KL,J)*DTADP(KL)
      RITO(KL,J)=0.
207 CONTINUE
      KV=KL-J+1
      IF(KV)209,209,210
210 CONTINUE

C
C MODIFICACAO DA COLUNA DE RITO E CORRESPONDENTE ELEMENTO DE
C DTADP
      DTADP(KV)=DTADP(KV)-RITO(KV,J)*DTADP(KL)
      RITO(KV,J)=0.
209 CONTINUE
303 CONTINUE
201 CONTINUE
302 CONTINUE
301 CONTINUE
      RETURN
      END

      FUNCTION MIN(I,J)
C
      IF(I-J)201,201,202
201 CONTINUE
      MIN=I
      GO TO 203
202 CONTINUE
      MIN=J
203 CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE SOLSI(A,B,D,N,LSB,NX,MX,IM)
C
C SOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES LINEARES PELO METODO DE
C ELIMINACAO DE GAUSS, PARA SISTEMAS SIMETRICOS EM BANDA
C
C A = MATRIZ CONTENDO A PARTE TRIANGULAR SUPERIOR DO SISTEMA,
C     ARMazenado de acordo com o esquema da banda simetrica
C B = ORIGINALMENTE CONTEM OS COEFICIENTES INDEPENDENTES.
C     DEPOIS DA SOLUCAO CONTEM OS VALORES INCOGNITOS DO
C     SISTEMA
C N = ATUAL NUMERO DE INCOGNITAS
C LSB = ATUAL LARGURA DA SEMI-BANDA
C NX = DIMENSAO DO NUMERO DE LINHAS DE A E B
C MX = DIMENSAO DO NUMERO DE COLUNAS DE A
C D = VETOR AUXILIAR
      DIMENSION A(NX,MX),B(NX),D(MX)
C
      NI=N-1

```

```

      DO 301 K=1,N1
      C=A(K,1)
      K1=K+1
      IF (ABS(C)-0.000001)201,201,202
202 CONTINUE
C
C  DIVISAO DA LINHA PELO COEFICIENTE DA DIAGONAL
      NI=K1+LSB-2
      L=MIN(NI,N)
      DO 302 J=2,LSB
      D(J)=A(K,J)
302 CONTINUE
      DO 303 J=K1,L
      K2=J-K+1
      A(K,K2)=A(K,K2)/C
303 CONTINUE
      B(K)=B(K)/C
C
C  ELIMINACAO DA INCOGNITA X(K) DA LINHA I
      DO 304 I=K1,L
      K2=I-K1+2
      C=D(K2)
      DO 305 J=I,L
      K2=J-I+1
      K3=J-K+1
      A(I,K2)=A(I,K2)-C*A(K,K3)
-----305 CONTINUE
      B(I)=B(I)-C*B(K)
304 CONTINUE
301 CONTINUE
C
C  CALCULO DA ULTIMA INCOGNITA
      IF (ABS(A(N,1))-0.000001)201,201,203
203 CONTINUE
      B(N)=B(N)/A(N,1)
C
C  APLICACAO DO PROCESSO DE RETRO-SUBSTITUICAO PARA CALCULAR AS
C  INCOGNITAS
      DO 306 I=1,N1
      K=N-1
      K1=K+1
      NI=K1+LSB-2
      L=MIN(NI,N)
      DO 306 J=K1,L
      K2=J-K+1
      B(K)=B(K)-A(K,K2)*B(J)
306 CONTINUE
      RETURN
C
201 CONTINUE
      WRITE(IM,101)K
101 FORMAT(/ / 16X,100("*"), 2(/ 16X,"*", 98X,"*") / 16X,"*", 9X,
  * "SINGULARIDADE NA LINHA ", IS, " DA MATRIZ DE RIGIDEZ TOT",
  * "AL", 34X,"*", 2(/ 16X,"*", 98X,"*") / 16X,100("*"))

```

```
CALL EXIT
END
```

```
SUBROUTINE RUNGE(N,AGA,X,Y,F,YBAR,FI,IRUN)
```

```

C
C  INTEGRACAO DO SISTEMA DE EQUACOES DIFERENCIAIS ORDINARIAS DE
C  PRIMEIRA ORDEM PELO METODO DE RUNGE-KUTIA DE QUARTA ORDEM
C  F(I)=DY(I)/DX, (I=1,2,...,N)
C
C  A SUBROUTINE RUNGE E CHAMADA QUATRO VEZES POR INCREMENTO
C  N      = NUMERO DE EQUACOES
C  AGA    = VALOR DE INCREMENTO X
C  X      = VARIAVEL INDEPENDENTE
C  Y      = VETOR DOS VALORES INCOGNITOS DO SISTEMA
C  F      = VETOR CONTENDO AS EQUACOES DIFERENCIAIS
C  YBAR   = VETOR PARA ARMAZENAR OS VALORES INICIAIS DO VETOR Y
C  FI     = VETOR DAS FUNCOES INCREMENTO DO METODO DE RUNGE-KUTIA
C  IRUN   = INDICADOR DA ETAPA DO METODO (IRUN = 1, 2, 3 OU 4)
C          DIMENSION Y(1),F(1),YBAR(1),FI(1)
C
C          GO TO(251,252,253,254),IRUN
C
C  ETAPA 1 DO METODO DE RUNGE-KUTIA (IRUN=1)
251 CONTINUE
   DO 301 I=1,N
   -----YBAR(I)=Y(I)
   FI(I)=F(I)
   Y(I)=YBAR(I)+0.5*AGA*F(I)
301 CONTINUE
   X=X+0.5*AGA
C  SAIDA PARA ATUALIZACAO DOS VALORES DAS DERIVADAS
   RETURN
C
C  ETAPA 2 DO METODO DE RUNGE-KUTIA (IRUN=2)
252 CONTINUE
   DO 302 I=1,N
   FI(I)=FI(I)+2.*F(I)
   Y(I)=YBAR(I)+0.5*AGA*F(I)
302 CONTINUE
C  SAIDA PARA ATUALIZACAO DOS VALORES DAS DERIVADAS
   RETURN
C
C  ETAPA 3 DO METODO DE RUNGE-KUTIA (IRUN=3)
253 CONTINUE
   DO 303 I=1,N
   FI(I)=FI(I)+2.*F(I)
   Y(I)=YBAR(I)+AGA*F(I)
303 CONTINUE
   X=X+0.5*AGA
C  SAIDA PARA ATUALIZACAO DOS VALORES DAS DERIVADAS
   RETURN
C
C  ETAPA 4 DO METODO DE RUNGE-KUTIA (IRUN=4)
```

```

254 CONTINUE
DO 304 I=1,N
Y(I)=YBAR(I)+(FI(I)+F(I))*AGA/6.
304 CONTINUE
RETURN
END

```

SUBROUTINE HMING(N,AGA,X,YPRED,Y,F,ET,IHMI)

```

C
C  INTEGRACAO DO SISTEMA DE EQUACOES DIFERENCIAIS ORDINARIAS DE
C  PRIMEIRA ORDEM PELO METODO PREDICTOR-CORRECTOR DE HAMMING
C
C  O METODO DE HAMMING NECESSITA DE TRES VALORES INICIAIS JA
C  CALCULADOS ANTERIORMENTE.
C  A SUBROUTINE HMING E CHAMADA DUAS VEZES POR INCREMENTO: A
C  ETAPA PREDICTOR E A ETAPA CORRECTOR DO METODO
C  N      = NUMERO DE EQUACOES
C  AGA    = VALOR DE INCREMENTO DE X
C  X      = VARIAVEL INDEPENDENTE
C  YPRED  = VETOR DOS VALORES PREDITOS DE Y (CALCULADO NA ETAPA 1)
C  Y      = MATRIZ DAS SOLUCOES (INCOGNITAS) DO SISTEMA
C  F      = MATRIZ CONTENDO AS EQUACOES DIFERENCIAIS
C  ET     = VETOR DOS ERROS DE TRUNCAMENTO ESTIMADOS
C  IHMI   = INDICADOR DA ETAPA DO METODO (IHMI = 1 OU 2)
C  DIMENSION YPRED(1),Y(N,4),F(N,3),EI(1)
C-----
C      IF(IHMI.EQ.2)GO TO 201
C
C  ETAPA PREDICTOR DO METODO DE HAMMING (IHMI=1)
C
C  CALCULO DOS VALORES PREDITOS PARA O PROXIMO PONTO
C      DO 301 I=1,N
C          YPRED(I)=Y(I,4)+4.*AGA*(2.*F(I,1)-F(I,2)+2.*F(I,3))/3.
C 301 CONTINUE
C
C  ATUALIZACAO DAS MATRIZES Y E F
C      DO 302 I=1,N
C          DO 302 K5=1,3
C              K=5-K5
C              Y(I,K)=Y(I,K-1)
C              IF(K.LT.4) F(I,K)=F(I,K-1)
C 302 CONTINUE
C
C  MODIFICACAO DOS VALORES PREDITOS Y(I) USANDO O ERRO DE
C  TRUNCAMENTO ESTIMADO NA ETAPA ANTERIOR, E INCREMENTO DE X
C      DO 303 I=1,N
C          Y(I,1)=YPRED(I)+112.*ET(I)/9.
C 303 CONTINUE
C      X=X+AGA
C  SAIDA PARA ATUALIZACAO DOS VALORES DAS DERIVADAS
C      RETURN
C
C  ETAPA CORRECTOR DO METODO DE HAMMING (IHMI=2)

```

```

C
C  CALCULO CORREGIDO E MELHORADO DOS VALORES Y(I) E ARMAZENAMENTO
C  DO ERRO DE TRUNCAMENTO ESTIMADO NA ETAPA ATUAL
201 CONTINUE
    DO 304 I=1,N
        Y(I,1)=(9.*Y(I,2)-Y(I,4)+3.*AGA*(F(I,1)+2.*F(I,2)-F(I,3)))/
        *8.
        ET(I)=9.*(Y(I,1)-YPRED(I))/121.
        Y(I,1)=Y(I,1)-ET(I)
304 CONTINUE
    RETURN
    END

```

# SUBROUTINE CORGE(X,Y,Z,DTADP,ICOR)

```

C
C  CALCULO DA NOVA GEOMETRIA DA ESTRUTURA (CORRECAO DAS
C  COORDENADAS DOS NOS)
C
C  ICOR = +1 - CALCULO DAS COORDENADAS DA ESTRUTURA DEFORMADA
C             DTADP = VETOR INCREMENTAL DE DESLOCAMENTOS
C             IFORM = 5 - METOD = 1, 2, 3, 4, 5 OU 6
C  -1 - CALCULO DAS COORDENADAS INICIAIS DA ESTRUTURA
C             DTADP = VETOR DE DESLOCAMENTOS ACUMULADOS
C             IFORM = 5 - METOD = 5 OU 6
C
COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
*E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
DIMENSION X(1),Y(1),Z(1),DTADP(1)
DO 301 I=1,NN
    L=NGL*(I-1)
    X(I)=X(I)+ICOR*DTADP(L+1)
    Y(I)=Y(I)+ICOR*DTADP(L+2)
    Z(I)=Z(I)+ICOR*DTADP(L+3)
301 CONTINUE
    RETURN
    END

```

# SUBROUTINE NORMA(D,DTADP,EPSIL)

```

C
C  CALCULO DA NORMA EUCLIDIANA MODIFICADA DOS DESLOCAMENTOS
C
C  EPSIL = NORMA EUCLIDIANA MODIFICADA PARA O PASSO ITERATIVO
COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
*E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
DIMENSION D(1),DTADP(1)
C
    SOMAT=0.
    DO 301 I=1,N
        IF(ABS(D(I))-0.00000001)201,201,202
202 CONTINUE
        AUX=(DTADP(I)/D(I))*2
        SOMAT=SOMAT+AUX
201 CONTINUE

```

```

301 CONTINUE
  EPSIL=SQRT(SOMAT/N)
  RETURN
  END

```

```

  SUBROUTINE ESFL1(REAC,ICON,X,Y,Z,PROP,FORC,D)

```

```

C
C  CALCULO DOS ESFORÇOS (FORÇAS AXIAIS) NOS ELEMENTOS (IFORM=1)
C
  COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
  *E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
  REAL LL
  DIMENSION REAC(1),ICON(1),X(1),Y(1),Z(1),PROP(1),FORC(1),
  *D(1)
C
C  INICIALIZAÇÃO DO VETOR DE REAÇÕES REAC
  DO 301 I=1,N
    REAC(I)=0.
301 CONTINUE
C
  DO 302 NEL=1,NE
C  NEL = NUMERO DO ELEMENTO ATUAL
C  N1 = NUMERO DO NO INICIAL
C  N2 = NUMERO DO NO FINAL
    L=NNE*(NEL-1)
    N1=ICON(L+1)
    N2=ICON(L+2)
    K1=NGL*(N1-1)
    K2=NGL*(N2-1)
C
C  CALCULO DO COMPRIMENTO DO ELEMENTO, DOS TRES COSENOS DIRETORES
C  DO SEU EIXO LOCAL X, E ARMAZENAMENTO EM LL, CX, CY E CZ,
C  RESPECTIVAMENTE
    LL=SQRT((X(N2)-X(N1))**2+(Y(N2)-Y(N1))**2+(Z(N2)-Z(N1))**2)
    CX=(X(N2)-X(N1))/LL
    CY=(Y(N2)-Y(N1))/LL
    CZ=(Z(N2)-Z(N1))/LL
C
C  CALCULO DA FORÇA AXIAL NO ELEMENTO E ARMAZENAMENTO NO VETOR
C  FORC
    COEF=E*PROP(NEL)/LL
    FORC(NEL)=COEF*((D(K2+1)-D(K1+1))*CX+(D(K2+2)-D(K1+2))*CY+
    *(D(K2+3)-D(K1+3))*CZ)
C
C  CALCULO DAS CARGAS DE EQUILIBRIO NODAL
    REAC(K1+1)=REAC(K1+1)-FORC(NEL)*CX
    REAC(K1+2)=REAC(K1+2)-FORC(NEL)*CY
    REAC(K1+3)=REAC(K1+3)-FORC(NEL)*CZ
    REAC(K2+1)=REAC(K2+1)+FORC(NEL)*CX
    REAC(K2+2)=REAC(K2+2)+FORC(NEL)*CY
    REAC(K2+3)=REAC(K2+3)+FORC(NEL)*CZ
302 CONTINUE
  RETURN

```

END

SUBROUTINE DES23(RITO,D,DTADP,P,IAPO,REAC,IDES)

```

C
C IDES = 1 - CALCULO DO VETOR DE DESEQUILIBRIO NODAL DTADP
C           2 - CALCULO DAS CARGAS DE EQUILIBRIO NODAL NO FINAL DO
C               INCREMENTO (CARGAS APLICADAS E REACOES DE APOIO)
C (IFORM = 2 OU 3)
C
COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
*E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
DIMENSION RITO(NLMX,NCMX),D(1),DTADP(1),P(1),IAPO(1),
*REAC(1)
C
C CALCULO DA CARGA DE EQUILIBRIO NODAL PARA O DESLOCAMENTO
C (ACUMULADO) D CONSIDERADO E ARMAZENAMENTO EM REAC, REAC=RITO*D
DO 301 I=1,N
  REAC(I)=0.
DO 301 JB=1,LSB
  IB=I-JB+1
  IF(IB-1)201,202,202
201 CONTINUE
  IF(IB)202,202,203
203 CONTINUE
  REAC(I)=REAC(I)+RITO(IB,JB)*D(IB)
202 CONTINUE
  J=JB+I-1
  IF(N-J)204,205,205
205 CONTINUE
  IF(J)204,204,206
206 CONTINUE
  REAC(I)=REAC(I)+RITO(I,JB)*D(J)
204 CONTINUE
301 CONTINUE
  IF(IDES-1)207,208,207
207 CONTINUE
C OBTIVEMOS O CALCULO DAS CARGAS APLICADAS E REACOES DE APOIO
C (APENAS NO FINAL DE UM INCREMENTO)
  RETURN
208 CONTINUE
C
C CALCULO DO VETOR DE DESEQUILIBRIO NODAL, DTADP=INCR*P-REAC
DO 302 I=1,N
  DTADP(I)=INCR*P(I)-REAC(I)
302 CONTINUE
C
C INTRODUCAO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO: TORNAR NULO O VETOR
C REAC=RITO*D NAS DIREÇÕES APOIADAS, OU SEJA, FAZER DTADP=P NAS
C REFERIDAS DIREÇÕES
DO 303 L=1,NNAP
  L1=(NGL+1)*(L-1)+1
  NO=IAPO(L1)
  K1=NGL*(NO-1)

```

```

      DO 303 M=1,NGL
      L2=L1+M
      K2=K1+M
      IF (IAPO(L2))209,210,209
210  CONTINUE
      DTADP(K2)=P(K2)
209  CONTINUE
303  CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

      SUBROUTINE ESF23(ICON,X,Y,Z,D,PROP,RIEL,R,RT,DL1,DL2,FORC,
      *FX,FY,FZ,LLIN,NPONT,SIG,EPS)

```

```

C
C  CALCULO DOS ESFORÇOS (FORÇAS AXIAIS) NOS ELEMENTOS
C  (IFORM = 2 OU 3)
C
      COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNF,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
      *E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
      DIMENSION ICON(1),X(1),Y(1),Z(1),D(1),PROP(1),
      *RIEL(NGLEL,NGLEL),R(NGLEL,NGLEL),RT(NGLEL,NGLEL),DL1(1),
      *DL2(1),FORC(1),DAUX(6),FAUX(6),FX(1),FY(1),FZ(1),LLIN(1),
      *SIG(1),EPS(1)
C
C  MATRIZ SECANTE DE CADA ELEMENTO NO SISTEMA LOCAL
-----
      IREL=2
      IF(IFORM.EQ.2)IRIG=6
      IF(IFORM.EQ.3)IRIG=7
      DO 301 NEL=1,NE
      CALL RIGEL(NEL,ICON,X,Y,Z,D,PROP,RIEL,R,RT,DL1,DL2,LLIN,
      *IREL,NPONT,SIG,EPS)
      DO 302 I=1,NGL
      DAUX(I)=DL1(I)
      DAUX(NGL+I)=DL2(I)
302  CONTINUE
C
C  PRODUTO DE RIEL POR DAUX, RESULTADO EM FAUX
C
      DO 303 I=1,NGLEL
      FAUX(I)=0.
      DO 303 J=1,NGLEL
      FAUX(I)=FAUX(I)+RIEL(I,J)*DAUX(J)
303  CONTINUE
      FX(NEL)=FAUX(4)
      FY(NEL)=FAUX(5)
      FZ(NEL)=FAUX(6)
C
C  MODULO DA FORÇA AXIAL NO ELEMENTO NEL
      FORC(NEL)=SQRT(FAUX(4)**2+FAUX(5)**2+FAUX(6)**2)
301  CONTINUE
      RETURN
      END

```



```

SUBROUTINE ESEL4(DL1,DL2,LL,UX,VX,WX,PROP,NEL,FLEL,FX,FY,
*FZ,NPONT,SIG,EPS)

```

C  
C  
C  
C  
C  
C

```

CALCULO DOS ESFORÇOS NO ELEMENTO ATUAL NO SISTEMA DE EIXOS
LOCAL (IFORM=4)
- FORMULACAO LAGRANGEANA
- TENSOR DE DEFORMACOES COMPLETO

```

```

COMMON NLMX,NCMX,NI,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IN,
*E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
REAL LL
DIMENSION DL1(1),DL2(1),PROP(1),FLEL(6),FX(1),FY(1),FZ(1),
*SIG(1),EPS(1)

```

C

```

UX=(DL2(1)-DL1(1))/LL
VX=(DL2(2)-DL1(2))/LL
WX=(DL2(3)-DL1(3))/LL
DEFOR=UX+(UX*UX+VX*VX+WX*WX)/2.
IF(NPONT.NE.0)GO TO 201
PROD=PROP(NEL)*E*DEFOR
GO TO 202

```

```

201 CONTINUE
CALL NLFIS(NPONT,SIG,EPS,TENSA,DEFOR,DT)
PROD=PROP(NEL)*TENSA

```

```

202 CONTINUE
FLEL(1)=-PROD*(1+UX)
FLEL(2)=-PROD*VX
FLEL(3)=-PROD*WX
FLEL(4)=PROD*(1+UX)
FLEL(5)=PROD*VX
FLEL(6)=PROD*WX
FX(NEL)=FLEL(4)
FY(NEL)=FLEL(5)
FZ(NEL)=FLEL(6)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ESEL5(NEL,PROP,LLIN,LL,FLEL,FX,FY,FZ,NPONT,SIG,
*EPS)

```

C  
C  
C  
C  
C  
C

```

CALCULO DOS ESFORÇOS NO ELEMENTO ATUAL NO SISTEMA DE EIXOS
LOCAL (IFORM=5)
- FORMULACAO LAGRANGEANA ATUALIZADA
- TENSOR DE DEFORMACOES COMPLETO

```

```

COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
*E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
REAL LL,LLIN
DIMENSION PROP(1),LLIN(1),FLEL(6),FX(1),FY(1),FZ(1),SIG(1),
*EPS(1)

```

C

```

IF(NPONT.NE.0)GO TO 201
DEFOR=(LL**2-LLIN(NEL)**2)/(2.*LL**2)

```

```

EBAR=(LL/LLIN(NEL))*3*E
SIGBA=EBAR*DEFOR
GO TO 202

```

```

201 CONTINUE
DEFOR=(LL**2-LLIN(NEL)**2)/(2.*LLIN(NEL)**2)
CALL NLFIS(NPONT,SIG,EPS,SIGMA,DEFOR,DT)
SIGBA=(LL/LLIN(NEL))*SIGMA

```

```

202 CONTINUE
FLEL(1)=-PROP(NEL)*SIGBA
FLEL(2)=0.
FLEL(3)=0.
FLEL(4)=PROP(NEL)*SIGBA
FLEL(5)=0.
FLEL(6)=0.
FX(NEL)=FLEL(4)
FY(NEL)=FLEL(5)
FZ(NEL)=FLEL(6)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ESF45(ICON,X,Y,Z,D,PROP,R,RT,DL1,DL2,FORC,FX,FY,
*FZ,REAC,DTADP,P,IAPO,LLIN,IESF,NPONT,SIG,EPS)

```

```

C
C CALCULO DOS ESFORÇOS (FORÇAS AXIAIS) NOS ELEMENTOS, E, SE:
C IESF = 1 - CALCULO DO VETOR DE DESEQUILIBRIO NODAL DTADP
C -----2----- CALCULO DAS CARGAS DE EQUILIBRIO NODAL NO FINAL DO
C INCREMENTO (CARGAS APLICADAS E REACOES DE APOIO)
C (IFORM = 4 OU 5)
C

```

```

COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
*E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
REAL LL,LLIN
DIMENSION ICON(1),X(1),Y(1),Z(1),D(1),PROP(1),
*R(NGLEL,NGLEL),RT(NGLEL,NGLEL),DL1(1),DL2(1),FORC(1),FX(1),
*FY(1),FZ(1),REAC(1),DTADP(1),P(1),IAPO(1),FLEL(6),FGEL(6),
*LLIN(1),SIG(1),EPS(1)

```

```

C
C INICIALIZACAO DO VETOR DE REACOES REAC
DO 301 I=1,N
REAC(I)=0.

```

```

301 CONTINUE

```

```

C
DO 302 NEL=1,NE
C NEL = NUMERO DO ELEMENTO ATUAL
C N1 = NUMERO DO NO INICIAL
C N2 = NUMERO DO NO FINAL
L=NNE*(NEL-1)
N1=ICON(L+1)
N2=ICON(L+2)
K1=NGL*(N1-1)
K2=NGL*(N2-1)

```

```

C
C CALCULO DO COMPRIMENTO DO ELEMENTO, DOS TRES COSENOS DIRETORES

```

```

C DO SEU EIXO LOCAL X, E ARMAZENAMENTO EM LL, CX, CY E CZ,
C RESPECTIVAMENTE
  LL=SQRT((X(N2)-X(N1))**2+(Y(N2)-Y(N1))**2+(Z(N2)-Z(N1))**2)
  CX=(X(N2)-X(N1))/LL
  CY=(Y(N2)-Y(N1))/LL
  CZ=(Z(N2)-Z(N1))/LL

C
C CALCULO DA MATRIZ DE ROTACAO E DA SUA TRANSPOSTA
  IROT=2
  CALL ROTAC(R,RT,CX,CY,CZ,IROT)

C
C CALCULO DOS DESLOCAMENTOS DO NO INICIAL E DO NO FINAL, E
C ARMAZENAMENTO NOS VETORES DL1 E DL2, RESPECTIVAMENTE
  IF(IFORM.EQ.5)GO TO 204
  CALL DELOC(D,DL1,DL2,R,N1,N2)
204 CONTINUE

C
C CALCULO DOS ESFORÇOS NO ELEMENTO ATUAL NO SISTEMA DE EIXOS
C LOCAL, FUNCAO DE IFORM
  IF(IFORM.EQ.4)CALL ESEL4(DL1,DL2,LL,UX,VX,WX,PROP,NEL,FLEL,
  *FX,FY,FZ,NPONT,SIG,EPS)
  IF(IFORM.EQ.5)CALL ESEL5(NEL,PROP,LLIN,LL,FLEL,FX,FY,FZ,
  *NPONT,SIG,EPS)

C
C MODULO DA FORÇA AXIAL NO ELEMENTO ATUAL
  FORC(NEL)=SQRT(FLEL(4)**2+FLEL(5)**2+FLEL(6)**2)
-----
C CALCULO DOS ESFORÇOS NO ELEMENTO ATUAL, NO SISTEMA DE EIXOS
C GLOBAL
  DO 303 I=1,NGLEL
    FGEL(I)=0.
    DO 303 J=1,NGLEL
      FGEL(I)=FGEL(I)+RT(I,J)*FLEL(J)
  303 CONTINUE

C
C CALCULO DAS CARGAS DE EQUILIBRIO NODAL
  REAC(K1+1)=REAC(K1+1)+FGEL(1)
  REAC(K1+2)=REAC(K1+2)+FGEL(2)
  REAC(K1+3)=REAC(K1+3)+FGEL(3)
  REAC(K2+1)=REAC(K2+1)+FGEL(4)
  REAC(K2+2)=REAC(K2+2)+FGEL(5)
  REAC(K2+3)=REAC(K2+3)+FGEL(6)
  302 CONTINUE
  IF(IESF.EQ.1)GO TO 203

C OBTIVEMOS O CALCULO DAS CARGAS APLICADAS E REACOES DE APOIO
C (APENAS NO FINAL DE UM INCREMENTO)
  RETURN
203 CONTINUE

C
C CALCULO DO VETOR DE DESEQUILIBRIO NODAL, DTADP=INCR*P-REAC
  DO 304 I=1,N
    DTADP(I)=INCR*P(I)-REAC(I)
  304 CONTINUE

```

```

C  INTRODUCAO DAS CONDIC0ES DE CONTORNO: TORNAR NULO O VETOR REAC
C  NAS DIRECOES APOIADAS, OU SEJA, FAZER DTADP=P NAS REFERIDAS
C  DIRECOES
      DO 305 L=1,NNAP
        L1=(NGL+1)*(L-1)+1
        NO=IAPO(L1)
        K1=NGL*(NO-1)
        DO 305 M=1,NGL
          L2=L1+M
          K2=K1+M
          IF(IAPO(L2))201,202,201
202  CONTINUE
        DTADP(K2)=P(K2)
201  CONTINUE
305  CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

      SUBROUTINE RESUL(NUMER,TICAR,D,REAC,FORC,FX,FY,FZ,EPSIL,
      *IRES)

```

```

C
C  SAIDA DOS RESULTADOS NA IMPRESSORA
C
C  CARACTERISTICAS DOS METODOS ITERATIVOS:
C  IRES = 1 - E OBTIDA A CONVERGENCIA (FINAL DE UM INCREMENTO)
C  2 - E ATINGIDO O MAXIMO DE ITERACOES POR INCREMENTO
C  3 - RESULTADOS PARCIAIS (FINAL DE UM PASSO ITERATIVO)
      COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
      *E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
      REAL LL
      DIMENSION TICAR(1),D(1),REAC(1),FORC(1),FX(1),FY(1),FZ(1)
C
C  IMPRESSAO DO NUMERO E DO TITULO DO CARREGAMENTO
      WRITE(IM,101)NUMER,(TICAR(I),J=1,10)
101  FORMAT("1", 15X,100("=") // 26X, "RESULTADOS" / 26X,10("=")
      * // 26X, "PARA O CARREGAMENTO = ", I4, " DE TITULO = ",
      *10A4 /)
C
C  IMPRESSAO DAS CARACTERISTICAS DA ANALISE, FUNCAO DE METOD
      IF(IFORM.EQ.1)GO TO 201
      GO TO(251,251,252,252,253,253),METOD
251  CONTINUE
      IF(IRES.NE.3)GO TO 202
C  IRES=3
      WRITE(IM,102)
102  FORMAT(16X,100("-") // 26X, "FINAL DE UM PASSO ITERATIVO")
      GO TO 203
202  CONTINUE
252  CONTINUE
      IF(INCR.EQ.MINCR)GO TO 204
      WRITE(IM,103)
103  FORMAT(16X,100("-") // 26X, "FINAL DE UM INCREMENTO" /)
      GO TO 203

```

```

204 CONTINUE
    WRITE(IM,104)
104 FORMAT(16X,100("-") // 26X, "FINAL DA ANALISE (ULTIMO INC",
  * "REMENTO)" /)
203 CONTINUE
    WRITE(IM,105)INCR,ITER,EPSIL,GAMA
105 FORMAT(26X, "NUMERO DO INCREMENTO", 11X,"=", 13X,15 / 26X,
  * "NUMERO DO PASSO ITERATIVO", 6X,"=", 13X,15 / 26X, "NORMA",
  * " DOS DESLOCAMENTOS", 8X,"=", 8X,F10.7 / 26X, "VALOR DE T",
  * "ESTE DA CONVERGENCIA =", 8X,F10.7 /)
    IF((METOD.EQ.3).OR.(METOD.EQ.4))GO TO 259
    IF(IRES.NE.2)GO TO 205
C   IRES=2
    WRITE(IM,106)MIER
106 FORMAT(26X, "O METODO ATINGIU O NUMERO MAXIMO DE ITERACOE",
  * "S POR INCREMENTO = ", 15 / 26X, "(NAO CONVERGIU)" /)
    GO TO 206
205 CONTINUE
    IF(IRES.NE.1)GO TO 206
C   IRES=1
    WRITE(IM,107)MITER
107 FORMAT(26X, "O METODO CONVERGIU" / 26X, "(NAO ATINGIU O N",
  * "UMERO MAXIMO DE ITERACOES POR INCREMENTO = ", 15, " )" /)
206 CONTINUE
    GO TO 259
253 CONTINUE
    IF(INCR.EQ.MINCR)GO TO 207
    WRITE(IM,108)
108 FORMAT(16X,100("-") // 26X, "FINAL DE UM INCREMENTO" /)
    GO TO 208
207 CONTINUE
    WRITE(IM,109)
109 FORMAT(16X,100("-") // 26X, "FINAL DA ANALISE (ULTIMO INC",
  * "REMENTO)" /)
208 CONTINUE
    WRITE(IM,110)INCR
110 FORMAT(26X, "NUMERO DO INCREMENTO", 5X,"=", 9X,15 /)
259 CONTINUE
201 CONTINUE
C
C   IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS
    WRITE(IM,111)
111 FORMAT(16X,100("-") // 26X, "DESLOCAMENTOS NODAIS" / 26X,
  * 20("-") // 28X,"NO", 18X,"U", 24X,"V", 24X,"W" / 26X,6("-")
  * , 9X,15("-"), 10X,15("-"), 10X,15("-"))
    DO 301 I=1,NN
      K1=NGL*(I-1)+1
      K2=K1+NGL-1
      WRITE(IM,112)I,(D(J),J=K1,K2)
112 FORMAT(26X,16,9X,F15.6,2(10X,F15.6))
301 CONTINUE
C
C   IMPRESSAO DAS REACOES E CARGAS NODAIS (EQUILIBRIO NODAL)
    WRITE(IM,113)

```

```

113 FORMAT(/ 16X,100("-") // 26X, "REACOES E CARGAS NODAIS (E",
  * "QUILIBRIO NODAL)" / 26X,42("-") // 28X,"NO", 18X,"RX", 23X
  *, "RY", 23X,"RZ" / 26X,6("-"), 9X,15("-"), 10X,15("-"), 10X,
  *15("-"))

```

```

DO 302 I=1,NN

```

```

K1=NGL*(I-1)+1

```

```

K2=K1+NGL-1

```

```

WRITE(IM,114)I,(REAC(J),J=K1,K2)

```

```

114 FORMAT(26X,I6,9X,F15.6,2(10X,F15.6))

```

```

302 CONTINUE

```

C

C IMPRESSAO DOS ESFORCOS (FORCAS AXIAIS) NOS ELEMENTOS

```

IF(IFORM.GT.1)GO TO 209

```

C IFORM IGUAL A 1

```

WRITE(IM,115)

```

```

115 FORMAT(/ 16X,100("-") // 26X, "ESFORCOS NOS ELEMENTOS"/26X,
  * 22("-") // 26X, "ELEMENTO", 19X, "FORCA AXIAL" / 26X,
  *8("-"), 17X,15("-"))

```

```

DO 303 J=1,NE

```

```

WRITE(IM,116)J,FORC(J)

```

```

116 FORMAT(27X,I6,18X,F15.6)

```

```

303 CONTINUE

```

```

GO TO 210

```

```

209 CONTINUE

```

C IFORM MAIOR OU IGUAL A 2

```

WRITE(IM,117)

```

```

117 FORMAT(/ 16X,100("-") // 26X, "ESFORCOS NOS ELEMENTOS"/26X,
  * 22("-") // 26X, "ELEMENTO", 10X,"FX", 16X,"FY", 16X,"FZ",
  *10X, "IFORCA AXIAL" / 26X,8("-"), 4(3X, 15("-"))))

```

```

DO 304 I=1,NE

```

```

WRITE(IM,118)I,FX(I),FY(I),FZ(I),FORC(I)

```

```

118 FORMAT(27X,I6,4X,F15.6,3X,F15.6,3X,F15.6,3X,F15.6)

```

```

304 CONTINUE

```

```

210 CONTINUE

```

```

WRITE(IM,119)

```

```

119 FORMAT(/16X,100("="))

```

```

RETURN

```

```

END

```

```

SUBROUTINE ALINE1(TITUL,X,Y,Z,ICON,PROP,IAPO,REAC,TICAR,P,
  *DTADP,D,FORC,AUX1,RITO,RIEL,R,RT,DL1,DL2,PRESC,FX,FY,FZ,
  *LLIN,NUMER,NPONT,SIG,EPS)

```

C

C IFORM = 1 - ANALISE LINEAR

C

```

COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
  *E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
REAL LLIN
DIMENSION TITUL(1),X(1),Y(1),Z(1),ICON(1),PROP(1),IAPO(1),
  *REAC(1),TICAR(1),P(1),DTADP(1),D(1),FORC(1),AUX1(1),
  *RITO(NLMX,NCMX),RIEL(NGLEL,NGLEL),R(NGLEL,NGLEL),
  *RT(NGLEL,NGLEL),DL1(1),DL2(1),PRESC(1),FX(1),FY(1),FZ(1),
  *LLIN(1),SIG(1),EPS(1)

```

```

C
C APLICACAO DOS PASSOS DA ANALISE
C
C MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ LINEAR
  INCR=1
  IRIG=IFORM
  CALL RIG10(RITO,ICON,X,Y,Z,D,PROP,RIEL,R,RT,DL1,DL2,LLIN,
  *NPONT,SIG,EPS)
C
C INTRODUCAO DAS CONDICAOES DE CONTORNO (RESTRICOES NODAIS)
  ITER=1
  CALL APO10(IAPO,RITO,P,PRESC)
C
C SOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES LINEARES
  CALL SOLSI(RITO,P,AUXI,N,LSB,NLMX,NCMX,IM)
C
C CALCULO DOS ESFORCOS (FORCAS AXIAIS) NOS ELEMENTOS
  CALL ESFL1(REAC,ICON,X,Y,Z,PROP,FORC,P)
C
C SAIDA DOS RESULTADOS NA IMPRESSURA
  CALL RESUL(NUMER,TICAR,P,REAC,FORC,FX,FY,FZ,EPSIL,IRES)
  RETURN
  END

  SUBROUTINE F25M14(TITUL,X,Y,Z,ICON,PROP,IAPO,REAC,TICAR,P,
  *DTADP,D,FORC,AUXI,RITO,RIEL,R,RT,DL1,DL2,PRESC,FX,FY,FZ,
  *LLIN,RAUX,NUMER,NPONT,SIG,EPS)
C
C ANALISE NAO-LINEAR: GEOMETRICA (IFORM = 2 , 3, 4 OU 5)
C                      GEOMETRICA E FISICA (IFORM = 4 OU 5)
C METOD = 1 - METODO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON
C          2 - METODO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO
C          3 - METODO INCREMENTAL CONVENCIONAL
C          4 - METODO INCREMENTAL AUTO-CORRETIVO DE PRIMEIRA
C              ORDEM
C
  COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
  *E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
  REAL LLIN
  DIMENSION TITUL(1),X(1),Y(1),Z(1),ICON(1),PROP(1),IAPO(1),
  *REAC(1),TICAR(1),P(1),DTADP(1),D(1),FORC(1),AUXI(1),
  *RITO(NLMX,NCMX),RIEL(NGLEL,NGLEL),R(NGLEL,NGLEL),
  *RT(NGLEL,NGLEL),DL1(1),DL2(1),PRESC(1),FX(1),FY(1),FZ(1),
  *LLIN(1),RAUX(NLMX,NCMX),SIG(1),EPS(1)
C
C APLICACAO DOS PASSOS DA ANALISE
C
C INICIALIZACAO DOS VETORES DE: CARGAS NODAIS P; DESLOCAMENTOS
C NODAIS (ACUMULADOS) D, E DESEQUILIBRIO NODAL DTADP
  DO 301 I=1,N
    P(I)=P(I)/MINCR
    D(I)=0.
    DTADP(I)=0.

```

```

301 CONTINUE
C
C   APLICACAO DE CADA INCREMENTO
C
      DO 302 INCR=1,MINCR
C
C   CALCULO DO VETOR INCREMENTAL DE CARGAS NODAIS DTADP
      DO 303 I=1,N
        DTADP(I)=P(I)+ZDLAM*DTADP(I)
303 CONTINUE
C
C   APLICACAO DE CADA PASSO ITERATIVO
C
      DO 304 ITER=1,MITER
C
C   MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE
C   (SE METOD=2 A MATRIZ SO E CALCULADA UMA VEZ POR INCREMENTO)
      IF(METOD.NE.2)GO TO 201
      IF(ITER.NE.1)GO TO 202
201 CONTINUE
      IRIG=IFORM
      CALL RIGTO(RITO,ICON,X,Y,Z,D,PROP,RIEL,R,RT,DL1,DL2,LLIN,
        *NPONT,SIG,EPS)
202 CONTINUE
      IF(METOD.NE.2)GO TO 203
      CALL ARMRT(RITO,RAUX)
-----
203 CONTINUE
C
C   INTRODUCAO DAS CONDICAOES DE CONTORNO (RESTRICOES NODAIS)
      CALL APOIO(IAPO,RITO,DTADP,PRESO)
C
C   SOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES LINEARES
      CALL SOLSI(RITO,DTADP,AUXI,N,LSB,NLMA,NCMX,IM)
C
C   ACUMULO DO VETOR DE DESLOCAMENTOS NODAIS DTADP NO VETOR D
      DO 305 I=1,N
        D(I)=D(I)+DTADP(I)
305 CONTINUE
C
C   MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ SECANTE
C   (A MATRIZ SO E CALCULADA SE IFORM FOR IGUAL A 2 OU 3)
      IF((IFORM.EQ.4).OR.(IFORM.EQ.5))GO TO 204
      IF(IFORM.EQ.2)IRIG=6
      IF(IFORM.EQ.3)IRIG=7
      CALL RIGTO(RITO,ICON,X,Y,Z,D,PROP,RIEL,R,RT,DL1,DL2,LLIN,
        *NPONT,SIG,EPS)
204 CONTINUE
C
C   CALCULO DAS COORDENADAS DA ESTRUTURA DEFORMADA (IFORM=5)
      IF(IFORM.NE.5)GO TO 215
      ICOR=1
      CALL CORGE(X,Y,Z,DTADP,ICOR)
215 CONTINUE
C

```



```

C  CALCULO DA NORMA DOS DESLOCAMENTOS E VERIFICACAO DA
C  CONVERGENCIA DO PROCESSO ITERATIVO
    CALL NORMA(D,DTADP,EPSIL)
    IF(EPSIL.GE.GAMA)GO TO 205
C  E OBTIDA A CONVERGENCIA PARA O INCREMENTO ATUAL
    IRES=1
    GO TO 206
205 CONTINUE
C
C  VERIFICAR SE E O ULTIMO PASSO ITERATIVO
    IF(ITER.LT.MITER)GO TO 207
C  E ATINGIDO O NUMERO MAXIMO DE ITERACOES POR INCREMENTO
    IRES=2
    GO TO 206
207 CONTINUE
C
C  CALCULO DO VETOR DE DESEQUILIBRIO NODAL DTADP E CALCULO DOS
C  ESFORÇOS (FORÇAS AXIAIS) PARCIAIS NOS ELEMENTOS
    IF((IFORM.EQ.4).OR.(IFORM.EQ.5))GO TO 208
C  IFORM = 2 OU 3
    IDES=1
    CALL DES23(RITO,D,DTADP,P,IAPO,REAC,IDES)
    CALL ESF23(ICON,X,Y,Z,D,PROP,RIEL,R,RT,DL1,DL2,FORC,FX,FY,
    *FZ,LLIN,NPONT,SIG,EPS)
    GO TO 209
208 CONTINUE
C  IFORM = 4 OU 5
    IESF=1
    CALL ESF45(ICON,X,Y,Z,D,PROP,R,RT,DL1,DL2,FORC,FX,FY,FZ,
    *REAC,DTADP,P,IAPO,LLIN,IESF,NPONT,SIG,EPS)
209 CONTINUE
C
C  SAIDA DOS RESULTADOS PARCIAIS NA IMPRESSORA, FUNCAO DE IMPRE
    IF(IMPRES.LT.2)GO TO 210
C  IMPRE = 2
    IRES=3
    CALL RESUL(NUMER,TICAR,D,REAC,FORC,FX,FY,FZ,EPSIL,IRES)
210 CONTINUE
304 CONTINUE
206 CONTINUE
C
C  CALCULO DAS CARGAS DE EQUILIBRIO NODAL (CARGAS APLICADAS E
C  REACOES DE APOIO) E CALCULO DOS ESFORÇOS (FORÇAS AXIAIS), NO
C  FINAL DE CADA INCREMENTO
    IF(INCR.EQ.MINCR)GO TO 216
C  CALCULO DO VETOR DE DESEQUILIBRIO NODAL DTADP
    IDES=1
    IESF=1
    GO TO 217
216 CONTINUE
    IDES=2
    IESF=2
217 CONTINUE
    IF((IFORM.EQ.4).OR.(IFORM.EQ.5))GO TO 211

```

```

C  IFORM = 2 OU 3
    CALL DES23(RITO,D,DTADP,P,IAPO,REAC,IDES)
    CALL ESF23(ICON,X,Y,Z,D,PROP,RIEL,R,RT,DL1,DL2,FORC,FX,FY,
    *FZ,LLIN,NPONT,SIG,EPS)
    GO TO 212
211 CONTINUE
C  IFORM = 4 OU 5
    CALL ESF45(ICON,X,Y,Z,D,PROP,R,RT,DL1,DL2,FORC,FX,FY,FZ,
    *REAC,DTADP,P,IAPO,LLIN,IESF,NPONT,SIG,EPS)
212 CONTINUE
C
C  SAIDA DOS RESULTADOS NA IMPRESSORA (FINAL DO INCREMENTO),
C  FUNCAO DE IMPRE
    IF(IMPRE.GE.1)GO TO 213
C  IMPRE = 0
    IF(INCR.NE.MINCR)GO TO 214
213 CONTINUE
C  IMPRE = 1 OU 2
    CALL RESUL(NUMER,TICAR,D,REAC,FORC,FX,FY,FZ,EPSIL,IRES)
214 CONTINUE
302 CONTINUE
    RETURN
    END

SUBROUTINE F25M56(TITUL,X,Y,Z,ICON,PROP,IAPO,REAC,TICAR,P,
*PNORM,DR,FORC,AUXI,RITO,RIEL,R,RT,DL1,DL2,PRESO,FX,FY,FZ,
*LLIN,FR,DPRED,DH,FH,ET,NUMER,NPONT,SIG,EPS)
C
C  ANALISE NAO-LINEAR: GEOMETRICA (IFORM = 2 , 3, 4 OU 5)
C                      GEOMETRICA E FISICA (IFORM = 4 OU 5)
C  METOD = 5 - METODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM
C              6 - METODO PREDICTOR-CORRECTOR DE HAMMING (OS TRES
C              PRIMEIROS INCREMENTOS SAO OBTIDOS NO METODO 5)
C
    COMMON NLMX,NCMX,NN,NE,NNAP,NNCR,NNE,NGL,NGLEL,N,LSB,LC,IM,
    *E,IFORM,METOD,MINCR,MITER,GAMA,ZDLAM,IMPRE,INCR,ITER,IRIG
    REAL LLIN,LAMBD,LAMAX
    DIMENSION TITUL(1),X(1),Y(1),Z(1),ICON(1),PROP(1),IAPO(1),
    *REAC(1),TICAR(1),P(1),PNORM(1),DR(1),FORC(1),AUXI(1),
    *RITO(NLMX,NCMX),RIEL(NGLEL,NGLEL),R(NGLEL,NGLEL),
    *RT(NGLEL,NGLEL),DL1(1),DL2(1),PRESO(1),FX(1),FY(1),FZ(1),
    *LLIN(1),FR(1),DPRED(1),DH(N,4),FH(N,3),ET(1),SIG(1),EPS(1)
C
C  APLICACAO DOS PASSOS DA ANALISE
C
C  INICIALIZACAO DO PARAMETRO DE CARGA LAMBD, SEU VALOR MAXIMO
C  LAMAX E SEU VALOR DE INCREMENTO DTLAM
    LAMBD=0.
    LAMAX=MINCR
    DTLAM=1.
C
C  INICIALIZACAO DO VETOR DE DESLOCAMENTOS NODAIS DR (METODO DE
C  RUNGE-KUTTA) E DA MATRIZ DE DESLOCAMENTOS NODAIS DH (METODO DE

```

```

C  HAMMING)
    DO 301 I=1,N
      DR(I)=0.
      DH(I,4)=DR(I)
301 CONTINUE
C
C  FIXACAO DO INDICE QUE TESTA O TIPO DE INTEGRACAO A SER USADA
    IF(METOD.EQ.6)GO TO 201
C  METOD=5
    IMET=MINCR
    GO TO 202
201 CONTINUE
C  METOD=6
    IMET=3
202 CONTINUE
C
C  APLICACAO DE CADA INCREMENTO
C
    DO 302 INCR=1,MINCR
      IF(INCR.GT.IMET)GO TO 203
C
C  SOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES DIFERENCIAIS ORDINARIAS DE
C  PRIMEIRA ORDEM PELO METODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM
C
    DO 303 IRUN=1,4
      ITER=IRUN
C  CALCULO DO VETOR DE CARGAS NODAIS NORMALIZADAS PNORM
    DO 304 I=1,N
      PNORM(I)=P(I)/LAMAX
304 CONTINUE
C  MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE
    IIRIG=IFORM
    CALL RIGTO(RITO,ICON,X,Y,Z,DR,PROP,RIEL,R,RT,DL1,DL2,LLIN,
    *NPONT,SIG,EPS)
C  INTRODUCAO DAS CONDICAOES DE CONTORNO (RESTRICOES NODAIS)
    CALL APOIO(IAPO,RITO,PNORM,PRESO)
C  CALCULO DAS DERIVADAS
    CALL SOLSI(RITO,PNORM,AUXI,N,LSB,NLMX,NCMX,IM)
    DO 305 I=1,N
      FR(I)=PNORM(I)
305 CONTINUE
C  CALCULO DAS COORDENADAS INICIAIS DA ESTRUTURA (IFORM=5)
    IF(IFORM.NE.5)GO TO 204
    ICOR=-1
    CALL CORGE(X,Y,Z,DR,ICOR)
204 CONTINUE
C  INTEGRACAO DO SISTEMA DE EQUACOES DIFERENCIAIS
    CALL RUNGE(N,DTLAM,LAMBD,DR,FR,DPRED,ET,IRUN)
C  CALCULO DAS COORDENADAS DA ESTRUTURA DEFORMADA (IFORM=5)
    IF(IFORM.NE.5)GO TO 205
    ICOR=1
    CALL CORGE(X,Y,Z,DR,ICOR)
205 CONTINUE
303 CONTINUE

```

```

C
C  GUARDAR DR E FR PARA O METODO DE HAMMING (METOD=6)
      IF(METOD.FQ.5)GO TO 206
      IN=4-INCR
      DO 306 I=1,N
      DH(I,IN)=DR(I)
      FH(I,IN)=FR(I)
306  CONTINUE
206  CONTINUE
      GO TO 207
203  CONTINUE

C
C  SOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES DIFERENCIAIS ORDINARIAS DE
C  PRIMEIRA ORDEM PELO METODO PREDICTOR-CORRECTOR DE HAMMING
C
C  INICIALIZACAO DO VETOR DE ERROS DE TRUNCAMENTO ET (INCR=4)
      IF(INCR.NE.4)GO TO 208
      DO 307 I=1,N
      ET(I)=0.
307  CONTINUE
208  CONTINUE

C  ETAPA PREDICTOR DO METODO DE HAMMING
      IHMI=1
209  CONTINUE

C  CALCULO DAS COORDENADAS INICIAIS DA ESTRUTURA (IFORM=5)
      IF(IFORM.NE.5)GO TO 210
      DO 308 I=1,N
      L=NGL*(I-1)
      X(I)=X(I)-DH(L+1,1)
      Y(I)=Y(I)-DH(L+2,1)
      Z(I)=Z(I)-DH(L+3,1)
308  CONTINUE
210  CONTINUE

C  INTEGRACAO DO SISTEMA DE EQUACOES DIFERENCIAIS
      CALL HMING(N,DTLAM,LAMBDA,DPRED,DH,FH,ET,IHMI)

C  CALCULO DO VETOR DE CARGAS NODAIS NORMALIZADAS PNORM E
C  ARMAZENAMENTO DA PRIMEIRA COLUNA DA MATRIZ DH NO VETOR DR
      DO 309 I=1,N
      PNORM(I)=P(I)/LAMAX
      DR(I)=DH(I,1)
309  CONTINUE

C  CALCULO DAS COORDENADAS DA ESTRUTURA DEFORMADA (IFORM=5)
      IF(IFORM.NE.5)GO TO 211
      ICOR=1
      CALL CORGE(X,Y,Z,DR,ICOR)
211  CONTINUE

C  MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE
      IRIG=IFORM
      CALL RIGTO(RITO,ICON,X,Y,Z,DR,PROP,RIEL,R,RT,DL1,DL2,LLIN,
      *NPONT,SIG,EPS)

C  INTRODUCAO DAS CONDICÕES DE CONTORNO (RESTRICOES NODAIS)
      CALL APOIO(IAPO,RITO,PNORM,PRESC)

C  CALCULO DAS DERIVADAS
      CALL SOLSI(RITO,PNORM,AUXI,N,LSB,NLMX,NCMX,IM)

```

```

      DO 310 I=1,N
      FH(I,1)=PNORM(I)
310 CONTINUE
      IF(IHMI.EQ.2)GO TO 212
C  ETAPA CORRECTOR DO METODO DE HAMMING
      IHMI=2
      GO TO 209
212 CONTINUE
207 CONTINUE

C
C  MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ SECANTE
C  (A MATRIZ SO E CALCULADA SE IFORM FOR IGUAL A 2 OU 3)
      IF((IFORM.EQ.4).OR.(IFORM.EQ.5))GO TO 213
      IF(IFORM.EQ.2)IRIG=6
      IF(IFORM.EQ.3)IRIG=7
      CALL RIGTO(RITO,ICON,X,Y,Z,DR,PROP,RIEL,R,RT,DL1,DL2,LLIN,
+NPONT,SIG,EPS)
213 CONTINUE

C
C  CALCULO DAS CARGAS DE EQUILIBRIO NODAL (CARGAS APLICADAS E
C  REACOES DE APOIO) E CALCULO DOS ESFORÇOS (FORÇAS AXIAIS), NO
C  FINAL DE CADA INCREMENTO
      IF((IFORM.EQ.4).OR.(IFORM.EQ.5))GO TO 214
C  IFORM = 2 OU 3
      IDES=2
      CALL DES23(RITO,DR,PNORM,P,IAPO,REAC,IDES)
      CALL ESF23(ICON,X,Y,Z,DR,PROP,RIEL,R,RT,DL1,DL2,FORC,FX,FY,
+FZ,LLIN,NPONT,SIG,EPS)
      GO TO 215
214 CONTINUE
C  IFORM = 4 OU 5
      IESF=2
      CALL ESF45(ICON,X,Y,Z,DR,PROP,R,RT,DL1,DL2,FORC,FX,FY,FZ,
+REAC,PNORM,P,IAPO,LLIN,IESF,NPONT,SIG,EPS)
215 CONTINUE

C
C  SAIDA DOS RESULTADOS NA IMPRESSORA (FINAL DO INCREMENTO),
C  FUNCAO DE IMPRE
      IF(IMPRES.FQ.1)GO TO 216
C  IMPRE=0
      IF(INCR.NE.MINCR)GO TO 217
216 CONTINUE
C  IMPRE=1
      CALL RESUL(NUMER,TICAR,DR,REAC,FORC,FX,FY,FZ,EPSIL,IRES)
217 CONTINUE
302 CONTINUE
      RETURN
      END

```