

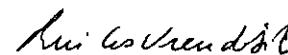
MÉTODOS ITERATIVOS DE ANÁLISE HIDRÁULICA E  
DIMENSIONAMENTO ÓTIMO POR PROGRAMAÇÃO  
LINEAR DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA

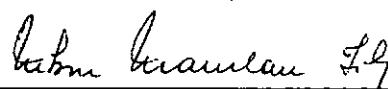
Ailton de Mesquita Vieira

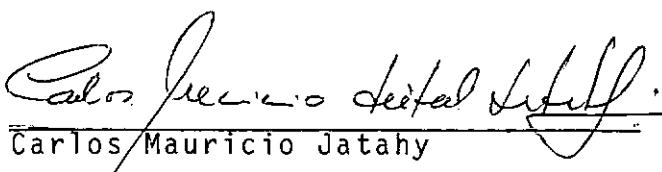
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO  
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

  
Pedro Luiz A. Guerrero Salazar

  
Rui Carlos Vieira da Silva

  
Nelson Maculan Filho

  
Carlos Mauricio Jatahy

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
SETEMBRO DE 1980

VIEIRA, AILTON DE MESQUITA

Métodos Iterativos de Análise Hidráulica e Dimensionamento Ótimo por Programação Linear de Redes de Distribuição de Água | Rio de Janeiro | 1980.

viii, 226 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ - M.Sc., Engenharia Civil, 1980

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Fac. Engenharia

1.

I. COPPE/UFRJ

II. Título (Série)

ii

Aos meus pais Narciso e Luiza

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Pedro Guerrero pela sugestão e orientação deste trabalho.

Aos Professores da COPPE/UFRJ pelos conhecimentos transmitidos.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

A Biblioteca Central do Centro Tecnológico da UFRJ pelo apoio prestado durante a pesquisa bibliográfica.

Ao Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ pela ajuda no desenvolvimento dos programas computacionais.

A todas outras pessoas que direta ou indiretamente tenham contribuído para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Uma avaliação comparativa das técnicas iterativas de análise hidráulica das redes de distribuição de água, segundo os métodos de Hardy Cross, Newton-Raphson e da Análise Linear, é feita inicialmente. O método de melhor desempenho computacional, no caso, o método de Newton-Raphson com uma formulação nodal, é empregado numa otimização econômica das redes de distribuição de água fundamentada apenas em preceitos heurísticos. Os resultados desta otimização, dita heurística, são confrontados aos obtidos por um modelo linear de otimização que utiliza programação linear em conjunto com uma técnica de busca por gradiente baseada nas variáveis duais do problema de programação linear. A comparação dos resultados alcançados com as duas metodologias visa avaliar a efetividade do modelo linear de otimização na prática profissional. Os resultados obtidos desta comparação indicam que as soluções alcançadas pelo modelo linear de otimização são satisfatórias. Contudo, limitações computacionais impõem restrições ao uso geral do modelo linear de otimização.

## ABSTRACT

A comparative evaluation of iterative techniques of hydraulic analysis of water distribution networks according to Hardy Cross, Newton-Raphson and Linear Analysis methods, is introduced firstly. The best computational performance method, in case, the Newton-Raphson with a nodal formulation is used into an economical optimization of water distribution networks, which is only based on heuristic percepts. The outcomes of this heuristic optimization are compared to those obtained through a linear optimization model. This model uses linear programming together with a gradient search technique based on dual variables of the linear programming problem. The comparison of the results of the two methods is performed to evaluate the effectiveness of the linear optimization model in professional applications. The results obtained by this comparison indicate that satisfactory outcomes may be reached with the linear optimization model. However, computational limitations set constraints to the general use of the linear optimization model.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO.....</u>	1
I.1 - Generalidades.....	1
I.2 - O Projeto do Sistema de Distribuição de Água.....	3
I.2.1 - Solução Hidráulica.....	7
I.2.2 - Otimização.....	10
I.3 - Objetivos do Trabalho.....	12
<u>CAPÍTULO II - EQUACIONAMENTO HIDRÁULICO E SOLUÇÕES PARA AS REDES EM MALHA.....</u>	14
II.1 - Considerações Iniciais.....	14
II.2 - Formulações Usuais.....	18
II.2.1 - $\Delta Q$ -Equações.....	20
II.2.2 - Q-Equações.....	21
II.2.3 - H-Equações.....	22
II.3 - Soluções dos Sistemas de Equações.....	25
II.3.1 - Método de Hardy Cross.....	25
Formulação pelas $\Delta Q$ -Equações.....	26
Comentários Sobre o Método.....	29
II.3.2 - Método de Newton-Raphson.....	30
Formulação pelas $\Delta Q$ -Equações.....	33
Formulação pelas H-Equações.....	35
Extensão para a Inclusão de Dispositivos Hidráulicos.....	41

Análise de Sensibilidade da Solução.....	44
Comentários Sobre o Método.....	46
II.3.3 - Método da Análise Linear.....	48
Formulação pelas Q-Equações.....	49
Comentários Sobre o Método.....	53
<u>CAPÍTULO III - OTIMIZAÇÃO DOS PROJETOS DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA.....</u>	55
III.1 - Otimização Heurística.....	56
III.2 - Otimização por Programação Linear.....	59
Extensão para a Inclusão de Dispositivos Hidráulicos.....	74
Comentários Sobre o Modelo.....	80
<u>CAPÍTULO IV - APLICAÇÃO DAS METODOLOGIAS.....</u>	85
IV.1 - Métodos de Análise Hidráulica de Redes de Distribuição.....	87
IV.1.1 - Exemplo nº 1.....	87
Solução pelo Método de Hardy Cross ( $\Delta Q$ -Equações). . . . .	90
Solução pelo Método de Newton-Raphson ( $\Delta Q$ -Equações) . . . . .	93
Solução pelo Método de Newton-Raphson (H-Equações) . . . . .	96

Solução pelo Método da Análise Linear(Q-Equações)	103
IV.1.2 - Exemplo nº 2.....	107
IV.1.3 - Exemplo nº 3.....	120
IV.1.4 - Discussão dos Resultados.....	132
IV.2 - Dimensionamento Ótimo de Redes de Distribuição.....	134
IV.2.1 - Exemplo nº 1.....	135
IV.2.2 - Exemplo nº 2.....	149
IV.2.3 - Exemplo nº 3.....	177
IV.2.4 - Exemplo nº 4.....	201
IV.2.5 - Discussão dos Resultados.....	212
 <u>CAPÍTULO V - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.</u> .....	215
 <u>BIBLIOGRAFIA</u> .....	218

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

#### I.1 - GENERALIDADES

O processo de urbanização no Brasil é muito acelerado. Projeções dos resultados do último censo, mostram que ao início da atual década, 80 milhões de brasileiros estão vivendo em cidades, enquanto a metade - 40 milhões - vive nas áreas rurais |Costa, 1974| .

Prover as cidades dos diversos serviços de infra-estrutura, essenciais para uma harmônica e equilibrada evolução, exige elevados investimentos públicos, e somente planos a nível nacional podem gerar recursos para o atendimento de amplas faixas de comunidades.

A implantação do saneamento básico é prioritário, pois o progresso em geral e a preservação da saúde pública estão diretamente condicionados a eficientes sistemas de distribuição de água potável e a coleta das águas servidas.

Considerando a problemática apresentada foi promovida a implementação do Plano Nacional de Saneamento (PLANASA), iniciado em 1968 e tendo continuidade até a presente década. Mecanismos de financiamento a juros subsidiados permitiram o atendimento não somente as grandes concentrações urbanas, mas,

também as pequenas e médias cidades, muitas totalmente incapazes de auto-sustentarem um investimento financiado, bem como os custos de operação |Bentes, 1977|.

A avaliação dos resultados alcançados pelo PLANASA em seus primeiros dez anos de implantação - 1968 a 1978 - mostrou o avanço que significou a introdução do plano apesar das dificuldades apresentadas ao longo do período. O enorme volume de obras e serviços gerados para o curto espaço de tempo, significou um grande impacto na área, o que por vezes tem colocado em questão a eficiência dos trabalhos |Pires, 1978|.

Uma criteriosa metodologia que oriente os projetos a uma utilização eficiente dos recursos é desejável. Diversas são as entidades atuantes no campo do saneamento básico que desenvolvem pesquisa aplicada neste sentido, notadamente pela definição de critérios técnicos e de projeto, na padronização de materiais e na determinação de índices de demanda |Pires, 1978|.

O presente trabalho direciona sua atenção a otimização dos sistemas de distribuição de água. Este problema é importante devido a ser o abastecimento de água o primeiro passo para o saneamento básico, e mais, os sistemas de distribuição significam em geral, mais de 50% do custo total de implantação de um sistema de abastecimento de água. Acrescenta-se no entanto, que a otimalidade mencionada não considera sómente o aspecto econômico, mas, também, os aspectos hidráulicos e de operação do sistema.

## I.2 - O PROJETO DO SISTEMA DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA

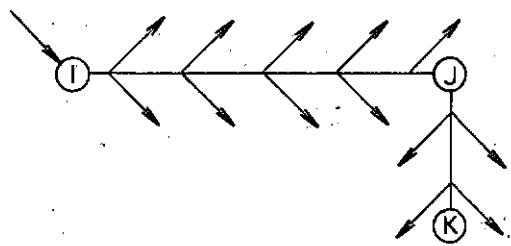
Planejar para o uso futuro os sistemas de abastecimento de água das cidades, de forma a satisfazer as demandas dentro de uma certa confiabilidade, de maneira econômica e com condições de pressão adequadas, envolve a consideração de diversos aspectos tendo alguns deles muitas incertezas na sua definição. Por exemplo, determinar as vazões de dimensionamento das várias partes constitutivas dos sistemas de distribuição de água implica no conhecimento dos fatores determinantes dos consumos de águas nas cidades, tais como populações a serem atendidas, sua distribuição demográfica e a quantidade de água necessária a cada indivíduo. O crescimento de uma população é fenômeno de grande complexidade em que diversos são os itens intervenientes, entre os quais fatores econômicos, geopolíticos e sociais, de complicada avaliação. A própria evolução dos costumes de cada população pode alterar substancialmente as previsões.

Devido as incertezas acima indicadas é extremamente conveniente para os projetos dos sistemas de distribuição o parcelamento do horizonte de projeto, de modo que as populações iniciais não sejam excessivamente oneradas e os desvios de previsão melhor atacados.

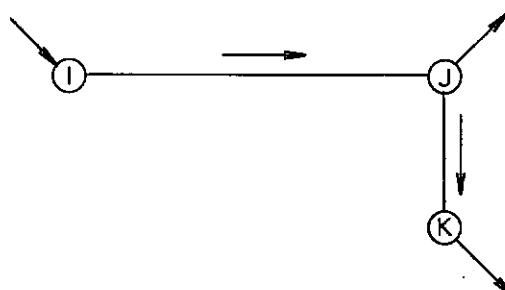
Para efeito da solução hidráulica das redes de distribuição, certas simplificações são necessárias de modo a diminuir a complexidade do problema. As principais premissas necessárias para se obter uma solução hidráulica são:

- (i) A distinção de dois tipos de canalização: as principais e as secundárias. Condutos principais seriam aqueles de maior diâmetro através dos quais os condutos secundários são alimentados. Condutos secundários seriam as demais tubulações da rede de distribuição, as quais os pontos de consumo estão diretamente ligados.
- (ii) As vazões variáveis ao longo dos trechos podem ser concentradas em pontos fictícios da rede, e para estas condições então, o escoamento do fluido pelas canalizações passa a ser considerado permanente.

Os pontos de concentração das vazões, denominados nós, são em geral estabelecidos nas junções dos condutos principais e nos pontos em que ocorram mudanças nas características do conduto, tais como mudança de diâmetros. A Figura 1.1 esquematiza a simplificação decorrente da concentração das vazões variáveis nos nós.



a) Situação real com distribuição em marcha

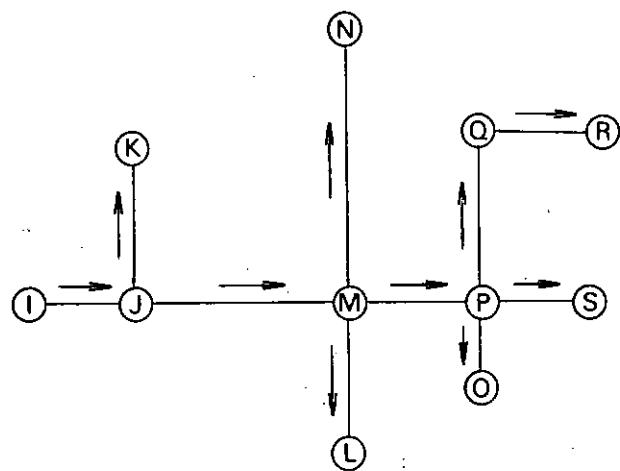


b) Situação na solução hidráulica com vazões concentradas nos nós

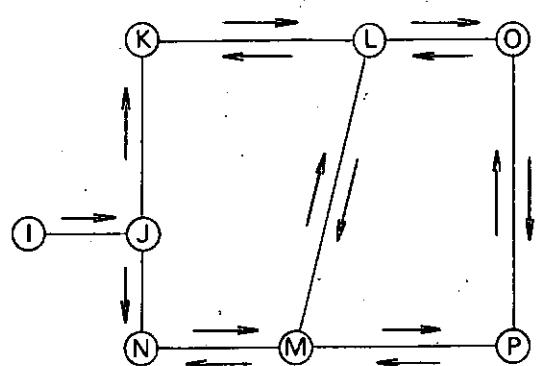
Figura 1.1 - Esquema de distribuição com vazões concentradas nos nós.

Como somente as canalizações principais são submetidas a análise de vazão e pressão, de modo a reduzir os cálculos necessários, é comum os projetistas serem induzidos a simplificações, às vezes exageradas, quando do estabelecimento de quais sejam os condutos principais. A hipótese do escoamento permanente se fundamenta na consideração de que as vazões nas derivações serão pequenas quando comparadas com a vazão total no conduto principal. Uma consideração ruim dos condutos principais compromete a análise hidráulica da rede. [Martins|1973] propõe um critério para o espaçojamento entre as tubulações principais em função das características dos condutos secundários, porém de difícil aplicação na prática. No lugar são comuns julgamentos baseados na experiência profissional.

A configuração dos condutos principais determinam o tipo de rede. Uma configuração em que os condutos principais estão conectados a um conduto principal central recebe o nome de rede ramificada e naquelas em que os condutos principais estão conectados em circuitos ou anéis recebe o nome de rede malhada. A Figura 1.2 mostra as duas configurações usuais.



a) Rede ramificada (um único sentido para as vazões nos trechos)



b) Rede malhada (sentido variável para as vazões nos trechos conforme as condições de operação da rede)

Figura 1.2 - Tipos de redes de distribuição: redes ramificadas e redes malhadas.

Entre os dois tipos, as redes malhadas possuem inegáveis vantagens. O fato do fluxo no interior das redes malhadas poder acontecer em qualquer sentido dá grande versatilidade na operação do sistema, pois propicia uma rápida adaptação às variações de demanda, sem afetar de modo drástico às pressões na rede, e ainda, facilita às manobras na rede para o isolamento de determinados trechos sujeitos a um reparo, sem afetar grandes extensões da rede. A adoção das redes ramificadas só se justifica quando a configuração geométrica da rede apresenta acentuado desenvolvimento linear ou quando os fatores econômicos se sobrepõem em muito a eficiência hidráulica do sistema. Pela razão, de se utilizar um menor número de tubulações principais para o transporte da água aos pontos de consumo, as redes ramificadas são obviamente de menor custo, porém como já dito, um custo menor da rede não pode estar divorciado dos critérios de eficiência hidráulica e da operação do sistema. Grandes redes de distri

buição não comportam um tipo ramificado pois as diversas oscilações na demanda e a maior incidência de reparos favorecem uma configuração em malha. A tendência que se verifica registra que redes ramificadas evoluem para uma malhada conforme a evolução urbana, salvo as pequenas comunidades rurais e aquelas de persistente crescimento linear.

### I.2.1 - Solução Hidráulica

Hipóteses de cálculo tornam o equacionamento hidráulico simples, baseado apenas nas equações de continuidade e na conservação da energia. A solução para as redes ramificadas na prática pode ser rápida, sendo feita quase que exclusivamente segundo os critérios de velocidades máximas e mínimas e das cargas piezométricas estipuladas. Para as redes malhadas a solução já não é rápida, havendo dificuldades nos cálculos. Com poucas exceções, a formulação do problema resultará num sistema de equações simultâneas não lineares. Por não ser prático uma solução analítica, métodos de aproximações sucessivas são utilizados. O procedimento mais antigo e ainda largamente adotado, utiliza a técnica de relaxação proposta por Cross [1936]. Dificuldades, porém na análise de grandes redes, em razão principalmente dos exaustivos cálculos iterativos forçaram a partição das redes, impondo mais simplificações no processo. Obter uma solução viável já era o suficiente para o fim do processo. A busca por soluções mais econômicas ficava bastante comprometida. Problemas com a verificação da estabilidade hidráulica impunham um dimensionamento conservativo. Na ausência de tais análises o dimensionamento

namento dos sistemas ou das suas ampliações devido a novas demandas, ficam sujeitos a elevados investimentos acrescidos geralmente além do necessário pela escolha de condutos com diâmetros maiores que os realmente requeridos e da adoção de linhas redundantes.

O advento dos computadores digitais permitiu o estudo de grandes redes de distribuição de água. A técnica de relaxação de Cross |1936|, foi facilmente programada e diversos são os programas existentes baseados nesta técnica ou em pequenas modificações dela |Alexander et al, 1975; Brater & King, 1976; Brock, 1963; Chenoweth & Crawford, 1974; Couto, 1978; Dillingham, 1967ab; Egner & Polkowski, 1976; Graves & Branscome, 1958; Hoag & Weinberg, 1957; Williams, 1973|. No entanto, estes programas não são eficientes para o estudo de redes complexas, nas quais os elementos hidráulicos envolvidos, tais como válvulas, bombas e reservatórios tornam a convergência muito lenta |Jeppson, 1976|.

A pesquisa por novos métodos de cálculo, que melhor explorem as técnicas computacionais disponíveis tem sido intensa nos últimos anos e variadas foram as técnicas propostas. O emprego do método de Newton-Raphson na solução das redes, surgiu com um grande potencial, pois ajusta todas as equações simultaneamente, ao contrário do método de Hardy Cross que resolve cada equação a um tempo |Dooge et al, 1978; Donachie, 1973; Epp & Fowler, 1970; Lekane, 1979; Lemieux, 1972; Martin & Peters, 1963; Shamir & Howard, 1968; Zarghamee, 1971|. O número de itera-

ções necessárias para se alcançar uma solução por Newton-Raphson resulta praticamente independente do tamanho da rede.

Um outro método sugerido para a solução iterativa das redes hidráulicas, aplica uma linearização artificial à equação de perda de carga, de modo a solução ser obtida por álgebra linear [Chin et al, 1978; Collins & Johnson, 1975; Righetto, 1978; Wood & Charles, 1972]. Poucas são as distinções fundamentais entre estes trabalhos, ressaltando apenas que a formulação adotada por Wood & Charles [1972] se distingue por ser baseada no cálculo das vazões nos trechos, enquanto as demais são baseadas na continuidade nos nós. O método da linearização trouxe vantagens adicionais sobre os métodos de Hardy Cross e Newton Raphson, devidas principalmente ao fato do método prescindir de uma inicialização externa.

O mais recente enfoque dado a análise hidráulica das redes parte para uma solução não iterativa do problema, através do emprego de técnicas de programação matemática [Hall, 1976; Collins et al, 1978a; Collins & Kennington, 1978; Collins et al, 1978b]. A solução não iterativa é baseada no fato da solução hidráulica das redes representar condições estacionárias, de modo que o problema hidráulico é equivalente a um problema de otimização não linear. A desvantagem deste método frente as soluções iterativas, está no fato de o mesmo incorrer em algoritmos de programação não linear bastante complexos quando comparados com as simples técnicas iterativas de uso corrente.

### I.2.2 - Otimização

A verificação da estabilidade hidráulica das redes às condições requeridas, feita rapidamente pelo uso dos computadores, permitiu aprimorar o processo de planejamento dos sistemas de distribuição de água. O projetista pode rapidamente explorar um grande número de configurações do sistema avaliando deste modo aquela que seja a mais viável economicamente. Esta aproximação tem sido o procedimento usual em projetos de redes de distribuição. Este processo no entanto não é satisfatório por estar diretamente baseado na habilidade do engenheiro em manipular os elementos do sistema.

A consideração dos princípios e critérios econômicos diretamente nas bases de cálculo é desejável. Recentes formulações empregam técnicas matemáticas de otimização de modo que os critérios de custo mínimo ou alguma relação benefício-custo, representados por uma função objetivo, são agregados ao problema hidráulico. Estas formulações conduzem geralmente a um problema de programação não linear. Jacoby [1968] propõe um método em que as variáveis são todas contínuas, sendo os diâmetros aproximados para valores comerciais ao final do processo. Na otimização a técnica do gradiente é usada. Watanatada [1973b] também considera os diâmetros como variável contínua, utilizando no entanto, na otimização, a técnica dos multiplicadores de Lagrange. Stepheson [1976] adota um esquema de busca por gradiente, que pode ser empregado em conjunto com qualquer método iterativo de solução hidráulica. Deb & Sarkar [1971] desenvolvem um método

baseado no conceito de diâmetros equivalentes. Cembrowicz & Harrington |1973| equacionam o problema por equações lineares, considerando os diâmetros variáveis contínuas e empregam na otimização a teoria dos grafos. A solução obtida é tal que retirados os trechos de diâmetros mínimos da análise, a rede malhada se transforma numa rede ramificada. Cenedese & Mele |1978| obtém solução similar, embora por um método distinto. Os autores adotam uma função objetivo, na qual as condições hidráulicas são automaticamente satisfeitas, e determinam o mínimo da função iterativamente. A variável diâmetro é discretizada. Artina |1973| parte de uma formulação não linear, a qual é posteriormente linearizada de modo a solução poder ser alcançado por programação inteira.

As técnicas citadas acima possuem, no entanto, restrições que as tornam pouco atraentes para emprego na prática. Os métodos de Jacoby |1968|, Watanatada |1973b| e Cembrowicz & Harrington |1973| por exemplo, incorrem em algoritmos bastante complexos, e nenhuma referência é feitas as técnicas computacionais adotadas e aos tempos de máquina consumidos. O método de Deb & Sarkar |1971| possui falhas conceituais como Liebman & Brill |1971| reportam: O método de Artina |1973| conduz a um tamanho excessivo do problema, decorrente da aproximação feita para a solução por programação inteira, o que ainda acarreta outras dificuldades devido ao comportamento imprevisível do algoritmo, conforme o próprio autor reporta. Outro tipo de restrição às técnicas citadas é que as mesmas, de um modo geral, são de aplicação limitada devido aos propósitos serem válidos

dos somente sob certas condições particulares.

Uma outra linha de pesquisa adota algum tipo de linearização de modo a empregar a programação linear na otimização das redes. A motivação está no fato de que a partir de uma formulação linear do problema a solução pode ser facilmente obtida, pois os programas para solução dos problemas de programação linear são em geral disponíveis em qualquer centro de computação eletrônica. Gupta |1969|, Karmeli et al |1968| e Robinson & Austin |1976| utilizam a programação linear, com formulações do problema idênticas, na otimização de redes ramificadas. Alperovits & Shamir |1977| fazem uma extensão desta formulação, de modo que redes malhadas são também otimizadas por programação linear. O método possui abrangência suficiente para a otimização de redes com elementos hidráulicos, de forma que a técnica surge com bom potencial para emprego na prática.

### I.3 - OBJETIVOS DO TRABALHO

A fim de avaliar as perspectivas do emprego da programação linear na otimização das redes de abastecimento de água, são revistas no Capítulo II as formulações usuais na análise hidráulica das redes pelos métodos iterativos de Hardy-Cross, Newton-Raphson e Análise Linear. Redes ramificadas foram excluídas do escopo deste trabalho, em razão das mesmas terem sido estudadas por Pires |1979|.

No Capítulo III um modelo de otimização por programação linear de redes hidráulicas é apresentado. A formulação adotada é basicamente a de Alperovits & Shamir [1977]. No Capítulo IV a experiência computacional do emprego das técnicas citadas é relatada. Dois tipos de comparações são feitas para análise do significado numérico das soluções. A primeira comparação é entre os resultados computacionais obtidos pelos três métodos iterativos, de modo a avaliar a eficiência dos mesmos. O melhor método, no caso o método de Newton-Raphson, segundo a formulação de Shamir & Howard [1968], foi utilizado numa segunda comparação visando a avaliação da otimização por programação linear e uma otimização heurística, conforme a prática corrente nos escritórios de engenharia.

No Capítulo V são apresentados as conclusões e identificadas novas direções que podem ser tomadas na solução hidráulica e na otimização das redes de abastecimento de água.

CAPÍTULO IIEQUACIONAMENTO HIDRÁULICO E SOLUÇÕES PARA  
AS REDES EM MALHAII.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A análise das vazões e pressões em redes é baseada na formulação de um sistema de equações simultâneas. Este sistema é criado considerando as leis de conservação de massa e energia. Estas leis físicas quando aplicadas a uma rede com configuração e características hidráulicas dadas, são denominadas equação da continuidade e equação de anel respectivamente, e podem ser expressas da seguinte forma:

(i) Equação de Continuidade

"O somatório das vazões de entrada em cada nó deve ser igual ao somatório das vazões de saída";

(ii) Equação de Anel

"A soma algébrica das perdas de carga ao longo do circuito é igual a zero".

As equações de anéis são simplesmente uma aplicação particular do princípio da conservação de energia aos circuitos hidráulicos. Para a solução é necessário ainda, estabelecer uma relação entre a vazão e o gradiente hidráulico para cada conduto ou dispositivo hidráulico. Esta relação é não linear

e a maioria das equações sugeridas na literatura, estabelecem essa relação levando em consideração as propriedades do fluido, o diâmetro e a resistência da parede do conduto ao escoamento.

Diversas são as equações existentes, muito embora, somente algumas alcançaram o uso corrente no meio profissional [Azevedo Netto, 1966]. Atualmente existe um consenso geral pela adoção de somente duas equações, a de Darcy-Weisbach e a fórmula empírica de Hazen-Williams de largo emprego no cálculo de redes. As equações de perda de carga podem ser colocadas numa forma exponencial geral como se segue:

$$h = K Q^n \quad (2.1)$$

onde:  $h$  = perda de carga;

$K$  = resistência ou condutividade hidráulica;

$Q$  = vazão;

$n$  = expoente empírico usualmente variando entre 1,8 e 2,0.

Se a fórmula de Darcy-Weisbach é usada a equação (2.1) fica:

$$h = \frac{8f L}{\pi^2 D^5 g} Q^2 \quad (2.2)$$

onde:  $h$  = perda de carga;

$Q$  = vazão

L = comprimento;  
 f = coeficiente de rugosidade;  
 D = diâmetro;  
 g = aceleração da gravidade.

Esta equação é válida para qualquer sistema  
 de unidades consistentes.

Adotando a equação de Hazen-Williams a equa-  
 ção (2.1) toma a forma:

$$h = \frac{\alpha L}{C_{HW}^{1.852} D^{4.87}} \cdot Q^{1.852} \quad (2.3)$$

onde:  
 h = perda de carga;  
 Q = vazão;  
 α = coeficiente que depende das unidades usa-  
 das;  
 C<sub>HW</sub> = coeficiente de Hazen-Williams;  
 D = diâmetro;  
 L = comprimento.

Empregando as unidades métricas usuais em pro-  
 jetos de redes de distribuição de água, a equação 2.3 fica:

$$h = \frac{1.21 \times 10^{10} L}{C_{HW}^{1.852} D^{4.87}} \cdot Q^{1.852} \quad (2.4)$$

onde:  $|h| = |m|;$   
 $|L| = |m|;$   
 $|D| = |mm|;$   
 $|Q| = |l/s|.$

Embora a equação de Darcy-Weisbach seja corretamente fundamentada é de menor emprego que a equação empírica de Hazen-Williams, obtida através de estudo estatístico de grande número de dados experimentais. A razão pode ser uma maior dificuldade no uso da equação de Darcy-Weisbach. O fator de atrito ( $f$ ) na equação de Darcy-Weisbach depende das condições do escoamento, que geralmente são desconhecidas até uma solução ser encontrada. Desta forma uma solução por tentativas é geralmente necessária. Portanto, a adoção da fórmula de Darcy-Weisbach exigirá a solução de equações implícitas para determinação do fator de atrito. Wood [1966] e Jain [1976] propõem aproximações através de equações explícitas para determinação do fator de atrito. Embora a aproximação de Jain [1976] seja menos restritiva que a de Wood [1966], pois é aplicável a todas as zonas do escoamento turbulento em tubulações, poucas são as justificativas para seus empregos [Davis & Jeppson, 1979]. Devido a generalização do emprego da fórmula de Hazen-Williams nos projetos de redes de distribuição de água, somente esta equação será adotada no escopo deste trabalho.

O sistema de equações simultâneas formulado é não-linear e indeterminado, no qual a variável "diâmetro" é discreta, isto é, somente poderá admitir valores que sejam comer-

cialmente viáveis. A solução precisa de uma inicialização para eliminar a indeterminação. Em geral, os diâmetros comerciais para todos os trechos são fixados a partir de um escoamento desejado e das velocidades limites admissíveis.

A solução analítica do sistema é inviável em razão de não linearidade e do elevado número de equações, mesmo para uma rede de mediana proporção. Métodos iterativos são usuais e o método numérico de Newton-Raphson ou casos particulares dele (Hardy Cross) são de uso generalizado. A seguir são apresentadas as formulações usualmente empregadas e os métodos de solução.

## II.2 - FORMULAÇÕES USUAIS

Na formulação do sistema de equações são comuns três tipos:

- (i) As  $\Delta Q$ -equações, em que as correções nas vazões nos trechos que formam os circuitos hidráulicos são consideradas incógnitas;
- (ii) As  $Q$ -equações, em que as vazões em cada trecho são consideradas incógnitas;
- (iii) As  $H$ -equações, em que os níveis piezométricos nos nós são considerados incógnitas.

A distinção principal entre as formulações está no fato de que se usando as H-equações, as vazões nos trechos são substituídas por expressões de perda de carga, sendo a equação de continuidade satisfeita para estas expressões. As Q-equações e as  $\Delta Q$ -equações resolvem o sistema pelo balanceamento das cargas nos anéis.

Para ilustrar os três tipos de formulação será adotada a rede fictícia da figura 2.1 cuja simplicidade permite uma melhor compreensão.

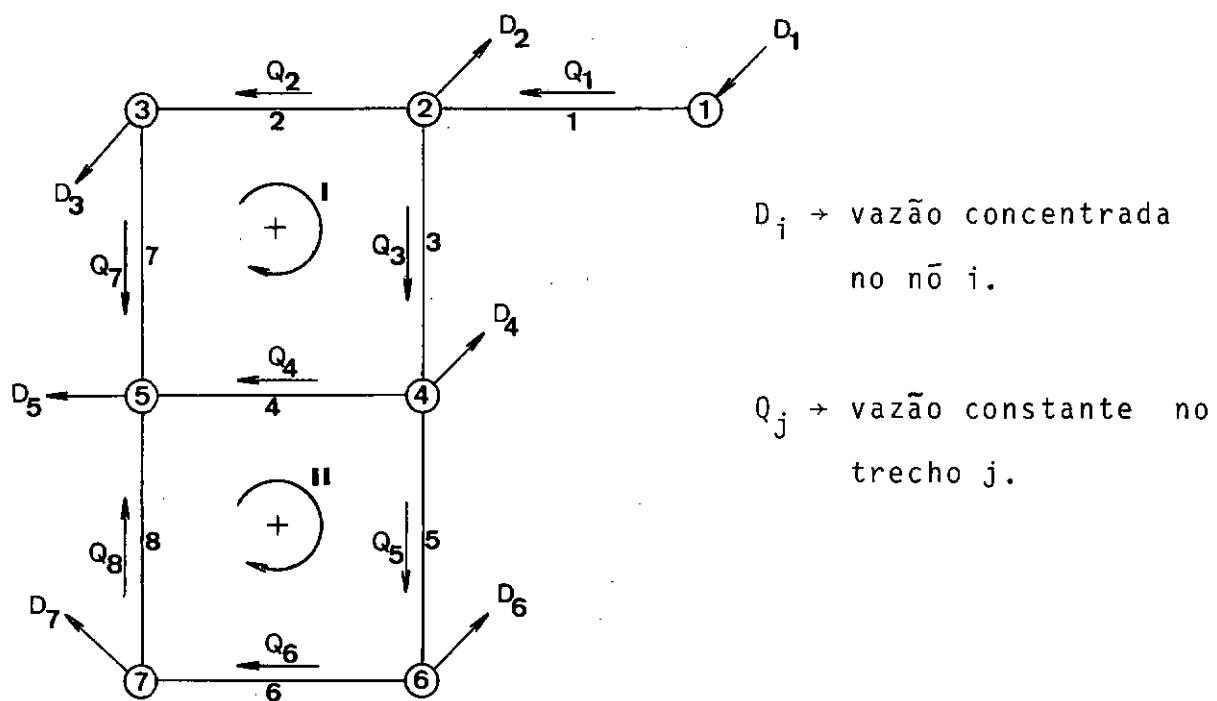


Figura 2.1 - Rede fictícia usada para a exposição dos métodos iterativos de solução hidráulica.

Na figura 2.1 um sentido inicial das vazões é arbitrado bem como uma convenção de sinais é adotada. Tal procedimento não é imprescindível a todas as formulações, como será visto adiante.

Os critérios usuais para determinação dos sentidos das vazões assume que a água percorrerá o menor caminho possível para atingir um dado nó. A convenção usual para os sinais arbitra como positivas as vazões no sentido dos ponteiros do relógio e negativas as em sentido contrário. Nas formulações é vantajoso expressar a perda de carga conforme a equação geral 2.1.

### II.2.1 - $\Delta Q$ -Equações

A formulação que considera as correções nas vazões ( $\Delta Q_i$ ) no interior dos NA anéis como incógnitas é a de maior emprego. Isto é devido ao menor número de equações requeridas na formulação do problema, ou seja, o número de incógnitas será igual ao número de anéis a serem balanceados. Para a inicialização do problema é necessário uma distribuição que satisfaça a continuidade em todos os nós. Tem-se então as  $Q_{0,i}$ ,  $i = 1, \dots, NT$  que são as vazões iniciais nos  $NT$  trechos e os  $\Delta Q_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, NA$  que são as correções nas vazões no interior dos NA anéis. As equações de balanceamento dos anéis ficam:

$$\sum K_i (Q_{0,i} + \Delta Q_\ell)^n = 0 \quad \ell = 1, \dots, NA . \quad (2.5)$$

onde o somatório inclui somente os trechos que formam o anel  $\ell$ .

Para a rede fictícia da figura 2.1 somente duas equações são necessárias:

$$(i) \quad K_3(Q_{0,3} + \Delta Q_1)^n + K_4(Q_{0,4} + \Delta Q_1 - \Delta Q_2)^n - K_7(Q_{0,7} - \Delta Q_1)^n - K_2(Q_{0,2} - \Delta Q_1)^n = 0$$

$$(ii) \quad K_5(Q_{0,5} + \Delta Q_2)^n + K_6(Q_{0,6} + \Delta Q_2)^n + K_8(Q_{0,8} + \Delta Q_2)^n - K_4(Q_{0,4} + \Delta Q_1 - \Delta Q_2)^n = 0$$

### II.2.2 - Q-Equações

Numa rede de  $NT$  trechos,  $NN$  nós e  $NA$  anéis a seguinte identidade é obtida:

$$NT = NN + NA - 1 \quad (2.6)$$

Esta relação sempre se verifica, tanto para redes com todos os anéis fechados como para redes que sejam combinação de redes malhadas e ramificadas.

Na formulação do problema considerando as vazões nos trechos como incógnitas é necessário formular um sistema de  $NT$  equações independentes. Se a rede contém  $NN$  nós e todas as vazões concentradas são conhecidas é possível escrever  $(NN-1)$  equações de continuidade para os nós. Uma outra equação de continuidade será redundante, pois não é independente. Da equação 2.6 pode-se ver que  $NA$  equações podem completar o número de equações necessárias para o sistema de  $NT$  equações indepen-

dentes. Isto é obtido então pelo emprego das equações de anel. Para a rede da figura 2.1, tem-se o sistema:

$$(i) \quad Q_1 - Q_2 - Q_3 - d_2 = 0$$

$$(ii) \quad Q_2 - Q_7 - d_3 = 0$$

$$(iii) \quad Q_3 - Q_4 - Q_5 - d_4 = 0$$

$$(iv) \quad Q_7 + Q_4 + Q_8 - d_5 = 0$$

$$(v) \quad Q_5 - Q_6 - d_6 = 0$$

$$(vi) \quad Q_6 - Q_8 - d_7 = 0$$

$$(vii) \quad K_3 Q_3^n + K_4 Q_4^n - K_7 Q_7^n - K_2 Q_2^n = 0$$

$$(viii) \quad K_5 Q_5^n + K_6 Q_6^n + K_8 Q_8^n - K_4 Q_4^n = 0$$

Nesta formulação somente as equações de anéis não são lineares. A solução pelas  $Q$ -equações gera um maior número de equações que a formulação pelas  $\Delta Q$ -equações.

### II.2.3 - H-Equações

Quando os níveis piezométricos  $H$  nos nós são considerados incógnitas precisar-se-á formular  $(NN-1)$  equações, onde  $NN$  é o número de nós. Como a formulação pelas  $H$ -equações en-

volverá diferenças entre os níveis piezométricos, ao menos um deve ser conhecido de modo a ser referência para os demais. Da equação 2.1 explicita-se a vazão  $Q$  e substitui-se  $h$  pela diferença entre os níveis piezométricos nos nós extremos, de modo que a vazão no trecho é obtida como função dos níveis piezométricos a montante e jusante conforme a equação:

$$Q_{ij} = \left| \frac{H_i - H_j}{K_{ij}} \right|^{1/n} \quad (2.7)$$

onde os índices  $i$  e  $j$  indicam o nó a montante e jusante, respectivamente, para o escoamento no trecho. As equações de continuidade podem ser escritas para  $(NN-1)$  nós como:

$$\sum \left| \frac{H_i - H_j}{K_{ij}} \right|^{1/n} = d_k \quad k = 1, \dots, (NN-1) \quad (2.8)$$

onde  $d_k$  é a demanda no nó  $k$  e o somatório é somente sobre os trechos ligados ao nó  $k$ .

Para a rede da figura 2.1, assumindo conhecido o nível piezométrico no nó 1, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$(i) \quad \left| \frac{H_1 - H_2}{K_1} \right|^{1/n} - \left| \frac{H_2 - H_3}{K_2} \right|^{1/n} - \left| \frac{H_2 - H_4}{K_3} \right|^{1/n} - d_2 = 0$$

$$(ii) \left| \frac{H_2 - H_3}{K_2} \right|^{1/n} - \left| \frac{H_3 - H_5}{K_7} \right|^{1/n} - d_3 = 0$$

$$(iii) \left| \frac{H_2 - H_4}{K_3} \right|^{1/n} - \left| \frac{H_4 - H_5}{K_4} \right|^{1/n} - \left| \frac{H_4 - H_6}{K_5} \right|^{1/n} - d_4 = 0$$

$$(iv) \left| \frac{H_3 - H_5}{K_7} \right|^{1/n} + \left| \frac{H_4 - H_5}{K_4} \right|^{1/n} + \left| \frac{H_7 - H_5}{K_8} \right|^{1/n} - d_5 = 0$$

$$(v) \left| \frac{H_4 - H_6}{K_5} \right|^{1/n} - \left| \frac{H_6 - H_7}{K_6} \right|^{1/n} - d_6 = 0$$

$$(vi) \left| \frac{H_6 - H_7}{K_6} \right|^{1/n} - \left| \frac{H_7 - H_5}{K_8} \right|^{1/n} - d_7 = 0$$

A formulação pelas H-equações conduz a uma menor quantidade de equações do que pelas Q-equações, muito embora isto não signifique necessariamente uma vantagem, desde que todas as equações são não lineares, enquanto que na formulação pelas Q-equações somente as equações de anéis são não lineares.

Pela solução do sistema das H-equações, as vazões nos trechos são imediatamente obtidas pela substituição na equação 2.8. Vazões com valor negativo significam que o sentido

inicialmente arbitrado não se verificou na solução, sendo portanto necessário trocar-se o sentido da vazão no trecho.

### II.3 - SOLUÇÕES DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES

A formulação do sistema por quaisquer das três maneiras apresentadas conduz a um sistema de equações simultâneas não lineares. Nesta seção apenas serão focalizados três métodos de solução de conhecimento geral, muito embora nem todos de uso corrente. Cada qual possui suas particularidades e adequamento a determinadas situações. Os métodos serão vistos com as formulações que lhes são mais convenientes.

#### II.3.1 - Método de Hardy Cross

O mais antigo método de solução e ainda de largo emprego é a técnica de relaxação proposta por [Cross, 1936]. A principal vantagem desta técnica consiste na facilidade de solução por cálculos manuais. A própria época de surgimento do método indica que o mesmo foi desenvolvido para ter esta característica. O advento dos computadores generalizou o seu uso, pois a técnica é facilmente programável, e requer pouca memória da máquina.

Conforme visto na seção anterior o equacionamento pelas  $\Delta Q$ -equações conduz a um menor número de equações. Esta é a razão pela qual a maioria das soluções por Hardy Cross adota esta formulação. Para o desenvolvimento matemático do méto

do neste ítem, somente as  $\Delta Q$ -equações serão utilizadas.

### Formulação pelas $\Delta Q$ -equações

Considerando uma distribuição de vazões que satisfaça a continuidade em todos os nós da rede, restará somente verificar se as equações de energia são satisfeitas para os anéis. Certamente uma distribuição inicial arbitrária poucas chances tem de satisfazer esta condição, e correções nestas vazões serão necessárias, sendo feitas iterativamente tal que dentro de uma precisão adequada, este objetivo seja alcançado.

Para os anéis de uma rede as equações de balançoamento das cargas são:

$$F_\ell = \sum h_i = \sum K_i Q_i^n = \sum K_i (Q_{0,i} + \Delta Q_\ell)^n = 0 \quad \ell = 1, \dots, NA \quad (2.9)$$

onde o somatório é sobre os trechos que formam os NA anéis. Interessa saber o valor dos  $\Delta Q$ , ou seja as correções nas vazões dos anéis.

Expandindo a equação 2.9 como uma série de Taylor tem-se:

$$\sum K_i (Q_{0,i} + \Delta Q_\ell)^n = \sum K_i (Q_{0,i}^n + n Q_{0,i}^{n-1} \Delta Q_\ell + \frac{n(n-1)}{1.2} Q_{0,i}^{n-2} \Delta Q_\ell^2 + \dots) = 0 \quad (2.10)$$

Desprezando os termos nos quais  $\Delta Q_\ell$  esteja elevado a uma potência maior que um (isto porque  $\Delta Q_\ell$  deve ser pequeno)

no comparado ao valor das vazões nos trechos), tem-se:

$$\sum K_i Q_i^n = \sum K_i (Q_{0,i}^n + n Q_{0,i}^{n-1} \Delta Q_\ell) = 0 \quad (2.11)$$

Explicitando  $\Delta Q_\ell$  a equação 2.11 fica:

$$\Delta Q_\ell = -\frac{\sum K_i Q_{0,i}^n}{\sum n K_i Q_{0,i}^{n-1}} \quad (2.12)$$

A equação 2.12 é então continuamente aplicada aos anéis até a convergência ser alcançada.

Esta técnica na verdade é um caso particular do método numérico de Newton-Raphson na qual em vez de se resolver as equações simultaneamente, cada equação é resolvida a um tempo, ou seja, os  $\Delta Q$  dos demais anéis são assumidos conhecidos temporariamente. Isto pode ser mostrado como se segue:

Resolvendo a equação 2.9 pela técnica de Newton-Raphson tem-se:

$$\Delta Q_\ell^{(m+1)} = \Delta Q_\ell^{(m)} - \frac{F_\ell^{(m)}}{\frac{dF_\ell^{(m)}}{d(\Delta Q_\ell^{(m)})}} \quad (2.13)$$

Os índices superiores indicam o número da iteração. Como no método de Hardy Cross aplica-se as correções nos anéis uma única vez, até todos os anéis terem sido corrigidos, a

verificação da equação 2.9 é feita considerando como zero todos os incrementos  $\Delta Q$  de uma iteração anterior. A equação 2.13 fica:

$$\Delta Q_\ell = - \frac{\frac{F_\ell}{d F_\ell}}{d(\Delta Q_\ell)} \quad (2.14)$$

Os índices indicativos das iterações são retidos uma vez que somente o  $\Delta Q$  atual interessa.

Substituindo a equação 2.9 na equação 2.14 e derivando tem-se a equação 2.12, mostrando assim que o método de Hardy Cross é um caso particular do método de Newton-Raphson.

Usando a equação de Hazen-Williams, apresentada na equação 2.3, onde  $n$  é um valor constante, a equação 2.12 fica:

$$\Delta Q_i = - \frac{\sum K_i Q_i^{1,852}}{1,852 \sum (K_i Q_i^{0,852})} = - \frac{\sum h_i}{1.852 \sum (h_i / Q_i)} \quad (2.15)$$

O algoritmo para o emprego do método de Hardy Cross, adotando-se as  $\Delta Q$ -equações, segue basicamente a seguinte sequência:

- (i) Arbitrar uma distribuição de vazões iniciais que satisfaça a continuidade em todos os nós;

- (ii) Calcular as perdas de energia nos trechos que formam os anéis;
- (iii) Verificar se os balanceamentos das cargas nos anéis estão sendo satisfeitos;
- (iv) Se não satisfeitos, aplica-se as correções nas vazões segundo a equação 2.15 e uma nova iteração é feita a partir do passo'(ii).

#### Comentários Sobre o Método

O método de Hardy Cross sofre de várias limitações. Problemas de solvabilidade e convergência são suscetíveis de ocorrer devido a diferentes causas. Algumas restrições podem ser enumeradas como se segue:

- (i) Uma inicialização ruim pode conduzir a uma convergência muito lenta ou a divergência;
- (ii) O problema de escala, em que equações com incógnitas de ordem de grandezas diferentes geram elevadas correções, o que frequentemente leva a divergência da solução |Dillingham, 1967a|;
- (iii) O método é pouco hábil para a análise de redes que incluem dispositivos hidráulicos |Chemoweth & Crawford, 1974|;

- (iv) A adoção de uma outra formulação, que não pelas  $\Delta Q$ -equações conduz a uma convergência excessivamente lenta [Brater & King, 1976].

A favor da técnica de Hardy Cross está a simplicidade da sequência de operações, possibilitando desta forma uma solução por cálculos manuais, muito embora esta sequência de operações possa se tornar extremamente laboriosa para grandes redes.

### II.3.2 - Método de Newton-Raphson

Conforme visto no ítem anterior a técnica de relaxação utilizada no método de Hardy Cross é simplesmente uma variação do método de Newton-Raphson, em que cada equação do sistema é resolvida separadamente das demais. Tal artifício visa tornar possível a solução por cálculos manuais. Com a utilização dos computadores na solução das redes, esta técnica perdeu muito em atrativos, pois a solução pelo pleno uso do método de Newton-Raphson se tornou viável, produzindo uma maior rapidez na solução, já que todas as equações são resolvidas simultaneamente. Esse novo procedimento para o cálculo das redes signifíc当地 um grande avanço sobre o tradicional método de Hardy Cross.

A exposição da técnica iterativa de Newton-Raphson para a solução de sistemas não lineares, pode aqui ser resumida. A técnica iterativa de Newton-Raphson estendida a soluções

ção de um sistema de  $n$  equações não lineares a  $n$  incógnitas, resultará numa aproximação de primeira ordem da expansão por séries de Taylor das  $n$  equações. Deste modo a solução do sistema não linear resultará na solução iterativa de um sistema linear.

Considerando o sistema de  $n$  equações a  $n$  incógnitas:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde as equações são contínuas e diferenciáveis, de modo que as mesmas podem ser expandidas em séries de Taylor. Negligenciando os termos não lineares o sistema 2.16 pode ser reescrito como:

$$f_1(x_1^{i+1}, \dots, x_n^{i+1}) = f_1(x_1^i, \dots, x_n^i) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^{i+1} - x_1^i) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_n^{i+1} - x_n^i) \tag{2.17}$$

$$f_n(x_1^{i+1}, \dots, x_n^{i+1}) = f_n(x_1^i, \dots, x_n^i) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1^{i+1} - x_1^i) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_n^{i+1} - x_n^i)$$

Supondo que os  $(x_1^{i+1}, \dots, x_n^{i+1})$  estejam muito próximos das raízes reais  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , o lado direito do sistema pode ser feito igual a zero, e o sistema 2.17 fica simplificado para:

$$\begin{aligned}
 0 &= f_1(x_1^i, \dots, x_n^i) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} (x_1^{i+1} - x_1^i) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} (x_n^{i+1} - x_n^i) \\
 0 &= f_n(x_1^i, \dots, x_n^i) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} (x_1^{i+1} - x_1^i) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} (x_n^{i+1} - x_n^i)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Simplificando a notação o sistema se resume para:

$$\begin{aligned}
 0 &= F_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n \\
 0 &= F_n + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 x_1^{i+1} - x_1^i &= \Delta x_1, \dots, x_n^{i+1} - x_n^i = \Delta x_n \text{ e } f_1(x_1^i, \dots, x_n^i) = F_1, \dots, \\
 f_n(x_1^i, \dots, x_n^i) &= F_n.
 \end{aligned}$$

Numa forma matricial, o sistema 2.19 fica:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{vmatrix} \tag{2.20}$$

As correções obtidas através da solução do sistema linear (equação 2.20) são somadas a solução inicial arbitrária de modo a fornecer uma segunda aproximação, que é então

utilizada para formar uma nova matriz das derivadas e um novo lado direito no sistema. Os valores na matriz das derivadas e do lado direito serão continuamente mudados de iteração para iteração, até uma solução dentro de uma precisão desejada seja alcançada. A convergência para uma solução é bastante rápida, pois os erros subsequentes são proporcionais ao quadrado dos erros anteriores, ou seja, é quadrática. O método é extremamente eficiente quando uma solução inicial arbitrada está próxima da solução real |Stark, 1970|.

O método de Newton-Raphson pode ser usado para solução de quaisquer dos três tipos de formulações usuais já apresentados. Como as formulações pelas  $\Delta Q$ -equações e H-equações produzem um menor número de equações o comum é a adoção destas. Neste item somente a formulação pelas  $\Delta Q$ -equações e a particular formulação pelas H-equações de Shamir & Howard, [1968] serão expostas.

#### Formulação pelas $\Delta Q$ -Equações

A aplicação do método de Newton-Raphson na solução de redes segundo as  $\Delta Q$ -equações, resultará na solução iterativa de um sistema linear em que o vetor das incógnitas contém as correções para as vazões no interior dos NA anéis, ou seja os  $\Delta Q$ , e a matriz conterá as derivadas das equações de balanceamento das cargas em relação aos  $\Delta Q$ . As equações de balanceamento dos anéis (equação 2.9) derivadas em relação aos  $\Delta Q$  ficam:

$$\frac{\partial F_\ell}{\partial \Delta Q_\ell} = n \sum K_i (Q_{0,i} + \Delta Q_\ell)^{n-1} \quad \ell = 1, \dots, NA \quad (2.21)$$

onde o somatório é sobre os trechos que formam os anéis.

Colocando o sistema de equações na forma matricial como na equação 2.20, tem-se:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Q_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Q_\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_\ell}{\partial \Delta Q_1} & \dots & \frac{\partial F_\ell}{\partial \Delta Q_\ell} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta Q_1 \\ \vdots \\ \Delta Q_\ell \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_\ell \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

O algoritmo para a solução pelas  $\Delta Q$ -equações pode ser resumido nos seguintes passos:

- (i) arbitrar uma distribuição de vazões iniciais que satisfaça a continuidade em todos os nós;
- (ii) inicializar o processo iterativo considerando os  $\Delta Q_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, NA$  iguais a zero;
- (iii) calcular a resistência hidráulica para todos os trechos que formam os anéis;
- (iv) montar a matriz das derivadas, calculando as derivadas conforme a equação 2.21;
- (v) montar o lado direito conforme a equação 2.5;

(vi) resolver o sistema linear continuamente, até que as correções das vazões nos anéis ( $\Delta Q$ ) sejam insignificantes, conforme a precisão estipulada.

### Formulação pelas H-equações

O emprego do método de Newton-Raphson ganhou grande potencialidade a partir do trabalho de Shamir & Howard [1968]. Isto foi devido a formulação nodal proposta, na qual não somente as cargas piezométricas nos nós podem ser incógnitas, mas, também, as demandas nos nós e as resistências hidráulicas dos trechos. A consideração de elementos hidráulicos pode ser feita diretamente na solução. Deste modo, as soluções podem ser obtidas para variados conjuntos de incógnitas.

A apresentação do equacionamento de uma rede de NN nós e NT trechos conforme Shamir & Howard [1968], pode ser iniciada pelo estabelecimento de uma conveniente convenção de sinais para as vazões na rede, conforme as premissas abaixo:

- (i) vazões concentradas nos nós quando de entrada são positivas e quando de saída são negativas;
- (ii) vazões nos trechos tem o mesmo sinal que a diferença entre os níveis piezométricos em seus nós extremos.

A equação de continuidade aplicada a todos os

nós é:

$$F_i = \sum_{j=1}^{NN} Q_{ij} + d_i = 0 \quad i = 1, \dots, NN \quad (2.23)$$

onde  $d_i$  é a demanda no nó  $i$ , e  $Q_{ij}$  é a vazão do nó  $i$  para o nó  $j$ ,  $Q_{ij}$  é igual a zero quando não existe conexão entre os nós  $i$  e  $j$ .

Como a formulação adotada é a nodal (H-equações), emprega-se a equação 2.7, a qual pode ser modificada pela introdução de um conveniente artifício tal que a segunda convenção sempre seja respeitada:

$$Q_{ij} = \frac{1}{K_{ij}^{1/n}} (h_i - h_j) \cdot |h_i - h_j|^{(1/n)-1} \quad (2.24)$$

Isto pode ser verificado notando-se que  $Q_{ij}$  será positivo somente quando  $h_i > h_j$ .

Conforme já dito, a equação de Hazen-Williams é a adotada neste trabalho. Pode-se então estabelecer a expressão da resistência hidráulica e o valor do expoente  $n$ . A resistência hidráulica conforme as unidades usadas na equação 2.4 fica:

$$K_{ij} = \frac{1,21 \times 10^{10} \cdot L_{ij}}{C_{ij}^{1,852} \cdot D_{ij}^{4,87}} \quad (2.25)$$

Pode-se substituir a equação 2.24 na equação 2.23, de forma que esta fique expressa como função dos níveis piezométricos, das demandas e das resistências hidráulicas. A equação 2.23 fica:

$$F_i = \sum_{j=1}^{NN} \frac{1}{K_{ij}^{0,54}} \cdot (H_i - H_j) \cdot |H_i - H_j|^{-0,46} + d_i = 0$$

$$i = 1, \dots, NN \quad (2.26)$$

Este sistema de NN equações não lineares pode então ser resolvido usando o método iterativo de Newton-Raphson.

Considerando que tem-se NN equações pode-se portanto ter NN incógnitas, as quais podem ser os níveis piezométricos ou as demandas nos nós e as resistências hidráulicas nos trechos.

Indicando por  $\bar{H}$  o conjunto das incógnitas de carga piezométrica nos nós, por  $\bar{D}$  o conjunto de incógnitas de demanda nos nós e por  $\bar{K}$  o conjunto de incógnitas de resistência nos trechos, pode-se estabelecer as NN equações simultâneas segundo o método de Newton-Raphson. Tem-se:

$$F_i(\bar{K}, \bar{H}, \bar{D}) + \sum_{K_{ij} \in \bar{K}} \frac{\partial F_i}{\partial K_{ij}} \Delta K_{ij} + \sum_{H_j \in \bar{H}} \frac{\partial F_i}{\partial H_j} \Delta H_j + \sum_{D_i \in \bar{D}} \delta_{ij} \Delta d_j = 0$$

$$i = 1, \dots, NN \quad (2.27)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  quando  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  quando  $i \neq j$ ).

As derivadas parciais na equação 2.27 obtidas das equações 2.23 e 2.24 são dadas por:

$$\frac{\partial F_i}{\partial H_j} = \frac{0,54}{K_{ij}} \cdot |H_i - H_j|^{-0,46} = \frac{\partial F_j}{\partial H_i} \quad i \neq j \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial H_i} = - \sum_{j \neq i} \frac{\partial F_i}{\partial H_j} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial K_{ij}} = - \frac{0,54}{K_{ij}} (H_i - H_j) \cdot |H_i - H_j|^{-0,46} \quad (2.30)$$

O algoritmo para a solução segundo esta formulação pode também ser resumido em poucos passos, como se segue:

- (i) selecionar o conjunto de incógnitas do problema;
- (ii) estimar os níveis piezométricos nos nós em que os mesmos são desconhecidos, de modo a inicializar o processo iterativo;
- (iii) montar a matriz das derivadas, conforme as incógnitas selecionadas, utilizando as equações 2.28, 2.29 e 2.30;
- (iv) montar o lado direito conforme a equação 2.23;

- (v) resolver o sistema linear continuamente até que as correções nos níveis piezométricos se tornem desprezíveis, de forma que a continuidade nos nós é satisfeita dentro da precisão desejada.

Apesar do grande número de variáveis ( $NN$  demandas,  $NN$  níveis piezométricos e  $NT$  resistências hidráulicas) passíveis de seleção para incógnitas, nem todas as combinações de incógnitas são praticáveis. Certas restrições são necessárias para a solubilidade do problema. Estas limitações provêm do próprio método numérico e da observância de certos aspectos relativos a solução hidráulica das redes. Shamir [1973], estabelece estas regras, com as quais sempre se garantirá uma solução para o problema, são elas:

- (i) se existem  $NN$  equações deve-se ter portanto  $NN$  incógnitas;
- (ii) desde que as equações de continuidade envolvem somente diferenças entre níveis piezométricos nos nós, ao menos um nível piezométrico deve ser conhecido para ser referenciado aos demais. A violação desta regra conduz a uma solução não única, ou seja um infinito número de soluções é possível;
- (iii) ao menos uma demanda tem que ser desconhecida. Se todas as demandas são conhecidas ou elas já estão balanceadas, e neste caso se terá um problema proposto já resolvido, ou elas estão desequilibradas, e neste caso uma condição im-

praticável foi proposta;

- (iv) tem-se uma solução para NN incógnitas se e somente se o posto da matriz das derivadas é igual a NN. Em outras palavras, a cada nó ao menos uma incógnita tem de ser referenciada, de modo a não haver linhas somente com zeros. A cada nó portanto ao menos uma das variáveis seguintes tem de ser desconhecida: o nível piezométrico no nó, a demanda no nó, o nível piezométrico nos nós adjacentes ou a resistência hidráulica dos trechos ligados ao nó;
- (v) para cada trecho que tenha sua resistência hidráulica como incógnita, somente uma das quatro variáveis dos nós extremos (dois níveis piezométricos e duas demandas) pode ser incógnita. A violação desta regra também conduz a uma solução não única;
- (vi) se o nível piezométrico e a demanda em um nó são ambos desconhecidos, então em pelo menos um dos nós adjacentes a demanda deve ser conhecida. A não observância desta regra, também leva a uma solução não única;
- (vii) o problema hidráulico proposto deve ser tal que, se os valores das variáveis conhecidas são impostas ao sistema real este deverá se estabilizar para uma única solução hidráulica. Esta é a regra geral a qual não se pode especificar precisamente. As regras (ii), (v) e (vi) são casos particulares desta regra. Se a solução de uma rede é dificultada, a

aplicação desta regra geral deve ser feita para verificar se o problema tem solução.

#### Extensão para a Inclusão de Dispositivos Hidráulicos

Redes de distribuição contêm em geral uma série de dispositivos hidráulicos, os quais aumentam bastante a complexidade da rede. O método de Newton-Raphson é extremamente hábil para a inclusão de tais dispositivos na análise. Bombas e válvulas podem ser introduzidas diretamente na solução, sem a necessidade de recursos externos.

A curva característica de uma bomba pode ser transportada para o problema através de uma representação polinomial. Diversas são as alternativas possíveis para esta representação, no entanto graus elevados devem ser evitados de modo a não introduzir dificuldades desnecessárias, pois o ganho em precisão pela adoção de polinômios de ordem elevada é frequentemente incompatível com a própria acurácia usada na construção da curva. Deste modo, uma curva característica pode ser convenientemente representada por uma curva do tipo:

$$Q = A - B\Delta H^2 \quad \Delta H_1 < \Delta H < \Delta H_2 \quad (2.31)$$

onde  $\Delta H$  é o acréscimo de carga fornecida pela bomba ou seja, a diferença entre os níveis piezométricos na descarga e na sucção,  $Q$  é a vazão e  $A$  e  $B$  são coeficientes de ajuste que podem ser obtidos na curva, de um modo geral pelo método dos mínimos quadra-

dos. As restrições na equação 2.31 são correspondentes as descargas admissíveis conforme a curva característica da bomba.

A equação para um dispositivo hidráulico, num trecho cujos nós a montante e jusante sejam respectivamente i e j, pode ser formulada como se segue:

$$Q_{ij} = f_E(H_i - H_j) = - Q_{ij} \quad (2.32)$$

onde a função  $f_E$  pode ser uma curva característica de uma bomba, conforme a equação 2.31, ou uma curva de perda de carga de um dispositivo hidráulico qualquer.

As derivadas em relação a  $H_i$  e  $H_j$  na equação 2.27 são:

$$\frac{\partial F_i}{\partial H_i} = - \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} \frac{0,54}{K_{ik}^{0,54} |H_i - H_k|^{0,46}} + \frac{\partial f_E}{\partial H_i} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial H_j} = \frac{\partial f_E}{\partial H_j} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial H_i} = - \frac{\partial f_E}{\partial H_i} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial H_j} = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} \frac{0,54}{K_{jk}^{0,54} |H_j - H_k|^{0,46}} - \frac{\partial f_E}{\partial H_j} \quad (2.36)$$

onde k é o ponto de locação do dispositivo hidráulico. As demais

derivadas permanecem inalteradas, conforme são obtidas pelas equações 2.28, 2.29 e 2.30.

O problema decorrente das equações representativas dos dispositivos hidráulicos é que a função  $f_E$  é contínua, mas suas derivadas podem não o ser, dificultando desta forma o processo iterativo, pois o mesmo não pode ter convergência garantida.

O fato da resistência hidráulica poder ser considerada como incógnita, fornece uma alternativa simples e eficaz para simulação de redes com dispositivos hidráulicos, pois desta forma se poderá calcular diretamente a resistência requerida no dispositivo hidráulico, para satisfazer uma especificada condição de pressão e demanda. Uma bomba tipo booster pode ser tratada como um trecho de resistência negativa. O efeito da operação das válvulas pode ser simulado de modo semelhante, fazendo-se a calibragem do coeficiente de rugosidade do trecho, conforme o estado de abertura da válvula, por exemplo, uma válvula fechada pode ser simulada dando-se um valor baixo para o coeficiente de rugosidade do trecho. A mesma simulação pode ser feita pela variação fictícia do diâmetro, ou seja, o diâmetro pode ser diminuído artificialmente de modo a aumentar a resistência do trecho. A última opção no caso é melhor, pois o diâmetro é elevado a uma potência maior do que o coeficiente de rugosidade, na equação de Hazen-Williams (equação 2.3).

## Análise de Sensibilidade da Solução

O conhecimento do equilíbrio hidráulico da rede devido a uma nova conformação do sistema, é necessária tanto na fase de projeto quanto na operação do sistema. Na fase de projeto das redes verifica-se o equilíbrio hidráulico da solução adotada para diferentes carregamentos, de modo a se garantir a eficiência da rede sob as diversas situações. Quando da operação da rede, estas diferentes soluções poderão fornecer o meio adequado para o planejamento da operação do sistema.

Quando uma nova configuração altera substancialmente o comportamento da rede, casos em que por exemplo todas as demandas são alteradas, uma nova solução é necessária. Casos outros porém, em que nos interessa saber o comportamento da rede devido somente a mudança de uma única variável, uma nova solução é desnecessária, pois a sensibilidade da solução devido a perturbação em uma única variável pode ser rapidamente obtida.

Considere-se um vetor  $X$  de solução da rede e uma variável  $y_m$  sujeita a uma perturbação, tem-se desta forma, novos valores na equação 2.24. Tomando-se as derivadas em relação a  $y_m$  nas equações de continuidade nos nós (equação 2.27) tem-se a equação:

$$\frac{dF_i}{dy_m} = 0 \quad i = 1, \dots, NN \quad (2.37)$$

a qual sendo expandida para suas derivadas parciais, fica:

$$\frac{dF_i}{dy_m} = \frac{\partial F_i}{\partial y_m} + \sum_{j=1}^{NN} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial y_m} \quad i = 1, \dots, NN \quad (2.38)$$

e que colocada numa forma matricial, fica:

$$\left| \begin{array}{c} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \hline \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial y_m} \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} -\frac{\partial F}{\partial y_m} \\ \hline \end{array} \right| \quad (2.39)$$

onde  $|\partial x / \partial y_m|$  é o vetor das sensibilidades das NN variáveis em  $x$ ;  $|\partial F / \partial x|$  é a matriz das derivadas da última iteração (a solução da rede) e  $|- \partial F / \partial y_m|$  é o vetor das derivadas parciais da função  $F$  em relação a  $y_m$ . As expressões para estas derivadas são as mesmas utilizadas na matriz das derivadas montada para a solução da rede.

Pela solução do sistema 2.39 obtem-se as variações nos  $x_j$ , causadas por uma mudança unitária em  $y_m$ , ou seja, os resultados obtidos na solução do sistema são realmente as derivadas parciais avaliadas nos pontos  $x_j$ . A solução obtida fornece valores aproximados, pois uma solução da rede com um  $y'_m$  igual a:

$$y'_m = y_m + 1 \quad (2.40)$$

fornecerá uma solução na qual as finitas variações nos pontos  $x_j$  não são idênticas as obtidas na solução do sistema 2.39. A análise

se de sensibilidade, contudo, mostra corretamente a direção das mudanças e suas magnitudes, sendo um meio rápido e eficiente para a comparação dos efeitos decorrentes das diversas mudanças possíveis. Tais comparações são bastante úteis tanto na fase de projeto, pois facilita o estudo da rede para diferentes conformações, como na operação do sistema onde é comum as alterações em um único elemento do sistema.

#### Comentários Sobre o Método

O efetivo uso do método de Newton-Raphson abriu novos horizontes no projeto de redes de distribuição de água. A rapidez com que as respostas são obtidas tem facilitado a obtenção de uma rede econômica através de uma otimização baseada em alguma técnica de gradiente. As extensões feitas por Shamir & Howard [1968], tornaram o método eficiente para o estudo de redes com quaisquer complexidade. A capacidade de obter uma série de soluções para uma rede básica pela mudança de suas características (tais como demandas, diâmetros dos tubos, elevação dos reservatórios, número de bombas operando, abertura e fechamento de válvulas) é extremamente adequado para o estudo dos sistemas e para o estabelecimento das regras de operação dos mesmos. A formulação nodal adotada, por outro lado, facilita sobremaneira os dados necessários para a implementação do programa, sem a necessidade de caracterizar os circuitos externamente ao programa, bem como o estabelecimento de uma distribuição de vazão inicial.

Os pontos críticos do método podem ser citados como se segue:

- (i) o método requer uma suposição inicial razoável, de outro modo a convergência pode ser lenta ou mesmo não ocorrer, conforme a natureza das equações;
- (ii) a matriz das derivadas pode ser singular ou muito próximo, de modo que assim possa ser considerada. A verificação da singularidade é de difícil obtenção e somente é constatada após o processo iterativo ter sido iniciado [Stark, 1970]. Uma regra heurística pode ser empregada para transladar a solução corrente, de modo a dar continuidade ao processo iterativo;
- (iii) valores das incógnitas podem oscilar indefinidamente entre dois pontos. Novamente critérios heurísticos podem ser usados, para mudar as correções calculadas para as variáveis que registram as oscilações;
- (iv) o problema de escala, ou seja, grandes diferenças nos valores das incógnitas ou nos termos da matriz das derivadas podem conduzir a divergência ou a convergência muito lenta. Dillingham [1967b] reporta este problema em sua análise do método de Hardy Cross. Ele mostra que equações onde os termos são de diferentes ordens de magnitude o balanceamento é de difícil obtenção;

(v) o método requer mais memória quando em confronto com o método de Hardy Cross. No entanto, esta objeção vem se diluindo com o tempo, ora pelo emprego dos modernos computadores com memória virtual, ora pelo uso de técnicas computacionais que exploram a esparsidade das matrizes |Hachtel et al, 1971| :

### II.3.3 - Método da Análise Linear

A utilização da álgebra linear na solução hidráulica das redes, parte de uma linearização da relação entre a vazão e a perda de carga. Um dos primeiros trabalhos empregando esta linearização foi o de Wood & Charles |1972|. Os autores formularam o problema segundo as Q-equações. Dois aspectos são relevantes no emprego deste método; primeiramente, o método não necessita de uma inicialização, e segundo, sempre converge em poucas iterações. A extensão desta técnica para a análise de redes com reservatórios e dispositivos hidráulicos foi feita por Jeppson |1976|. Um outro método que emprega a linearização é o de Collins & Johnson |1975|, no qual uma formulação nodal é empregada. Righetto |1977| formula o problema de modo semelhante, com a distinção de propor um esquema acelerador da convergência. Chin et al |1978| também formulam o problema de modo semelhante, explorando no entanto, a esparsidade das matrizes, de forma a reduzir o processamento na solução dos sistemas de equações.

Neste item somente a abordagem de Wood & Charles |1972| será focalizada, pois o objetivo é unicamente ex-

por a t cnica da lineariza o.

### Formula o pelas Q-equac es

A formula o por Wood & Charles [1972] emprega as Q-equac es, de modo que para uma rede de NT trechos, a solu o resultar  num sistema de NT equac es independentes. Conforme visto em II.2.2 somente as equac es de balanceamento dos an is s o n o lineares, devido as equac es que relacionam a perda de carga a vaz o, assim o serem. Desta forma, o m todo da An lise Linear prop e uma transforma o da equac o geral da perda de car-  
ga (equac o 2.1), de forma as equac es de an is ficarem linearizadas. Esta transforma o consiste de uma aproxima o da equac o 2.1 para todos os trechos, pelo seguinte art ficio:

$$h_i = K_i Q_{0,i}^{n-1} \cdot Q_i = K_i^! Q_i \quad i = 1, \dots, NT \quad (2.41)$$

em que os  $Q_{0,i}$  s o aproxima es das vaz es reais  $Q_i$ . Naturalmente quando os  $Q_{0,i}$  forem bastante pr ximos dos valores de  $Q_i$ , a equac o 2.41 se tornar  uma exata representa o da equac o 2.1. O coeficiente  $K_i^!$  ´e definido para cada trecho  $i$  como o produto da resist ncia hidr ulica do trecho ( $K_i$ ) por  $Q_{0,i}^{n-1}$ . A lineariza o conforme a equac o 2.41 pode ser esquematizada conforme a figura 2.4.

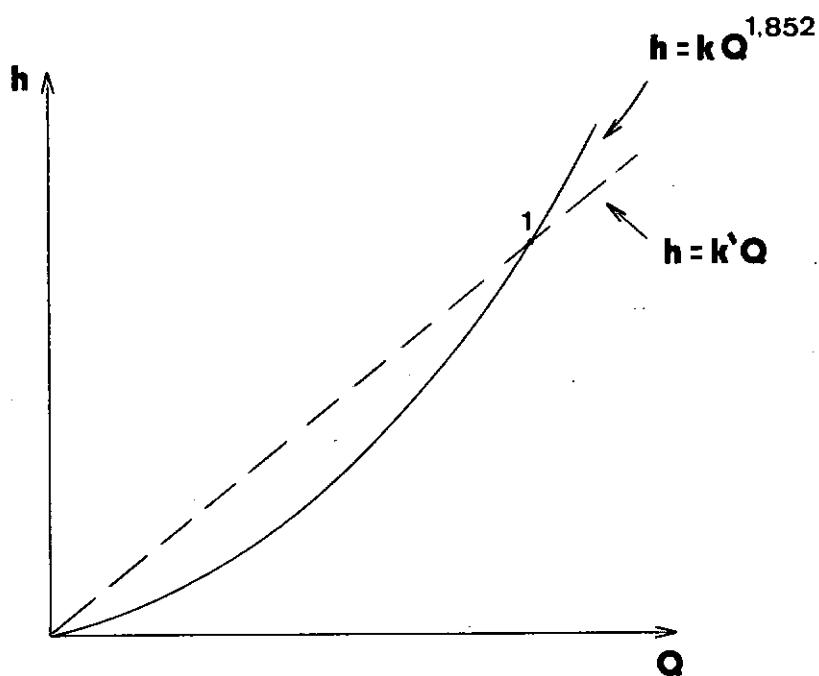


Figura 2.4 Linearização da equação de perda de carga

Na figura 2.4 a linha tracejada representa a linearização do sistema para uma condição inicial, a qual intercepta a curva do sistema no ponto 1. A solução pelo método da Análise Linear consistirá na localização do exato ponto em que a curva do sistema é interceptada pela apropriada curva linearizada. Para cada elemento hidráulico da rede somente um único ponto de solução existirá.

A linearização das equações de anéis conduz o problema a um sistema de equações lineares, que pode ser resolvido por álgebra linear. A solução inicial certamente não será satisfatória, pois os  $Q_{0,i}$  inicialmente estimados certamente não coincidirão com os  $Q_i$  obtidos na solução do siste-

ma. Estes valores podem então ser usados para calcular novos valores dos coeficientes  $K'_i$ , formando um novo conjunto de equações que resolvido dará aproximações melhores para as vazões nos trechos. Este processo pode ser continuado até os valores das vazões obtidas em duas iterações sucessivas não diferirem significantemente entre si.

Na aplicação do método da Análise Linear não é necessário uma suposição inicial das vazões, como possa parecer. Uma inicial distribuição das vazões pode ser negligenciada, assumindo que numa primeira aproximação, para efeito da linearização do sistema, possa-se fazer:

$$K'_i = K_i \quad i = 1, \dots, NT \quad (2.42)$$

o que é equivalente a fazer as vazões nos NT trechos iguais a um. A solução obtida desta maneira é semelhante a uma que considere um escoamento laminar na rede, uma vez que no escoamento laminar as perdas de carga são diretamente proporcionais a velocidade média, tal como decorre da aproximação pela equação 2.42. As exatas configurações das curvas de perda de carga, segundo as duas maneiras, diferem muito pouco entre si, de forma que os resultados obtidos são bastantes próximos. Collins & Johnson |1974| e Righetto |1977| inicializam o processo iterativo assumindo um escoamento laminar enquanto Chin et al |1978| inicializa de modo semelhante a Wood & Charles |1972|, no caso, fazendo os níveis piezométricos iniciais nos nós igual a um, isto porque a formulação adotada é a nodal. Apesar dos autores dos tra-

balhos citados acima, não apresentarem uma prova formal, as duas maneiras empregadas para o cálculo das vazões iniciais parecem sempre assegurar a convergência da solução.

Wood & Charles |1972| no desenvolvimento do método de Análise Linear, reportam que sucessivas iterações ten dem a oscilar sobre a solução final. Isto pode ser entendido, observando-se que o método da Análise Linear é uma variação do método de Newton-Raphson, onde os  $K_i^t$  seriam iguais as derivadas de  $h_i$  se multiplicados por  $n$ , conforme pode-se ver na equação abaixo:

$$\frac{\partial h_i}{\partial Q_i} = n K_i Q_i^{n-1} = n K_i \quad i = 1, \dots, NT \quad (2.43)$$

As oscilações podem ser evitadas multiplicando-se todos os  $K_i$  por  $n$ , de modo que a matriz do método da Análise Linear ficará igual a uma do método de Newton-Raphson, e neste caso, as oscilações que ocasionalmente venham a ocorrer, seriam atacadas segundo critérios heurísticos |Shamir, 1973|. Wood & Charles |1972| propõe no entanto, um outro procedimento com um menor número de operações e de rápida convergência. Os autores sugerem que após duas iterações terem sido feitas, as vazões  $Q_i$  usadas na determinação dos  $K_i^t$ , podem ser obtidas pela média das soluções alcançadas em duas iterações anteriores, conforme a equação abaixo:

$$Q_i^{(m)} = \frac{Q_i^{(m-1)} + Q_i^{(m-2)}}{2} \quad i = 1, \dots, NT \quad (2.44)$$

onde os índices superiores indicam o número da iteração.

O algoritmo para a solução pelo método da Análise Linear segundo a formulação pelas Q-equações, pode ser resumido nos seguintes passos:

- (i) determinar a resistência hidráulica para todos os trechos;
- (ii) assumir uma vazão inicial igual a um para todos os trechos;
- (iii) montar a matriz dos coeficientes conforme visto no item II.2.2, sendo que as equações de anéis são linearizadas conforme a equação 2.41;
- (iv) montar o lado direito conforme visto em II.2.2;
- (v) resolver o sistema de equações lineares iterativamente, empregando para isto a equação 2.44 para o cálculo das vazões a partir da segunda iteração. O processo iterativo terminará quando as vazões forem suficientemente próximas entre duas iterações sucessivas, de forma que se verifique a equação 2.41.

#### Comentários Sobre o Método

O mérito do método da Análise Linear está no fato de que dispensar uma inicialização externa ao problema, e

de sempre convergir em poucas iterações, no entanto alguns pontos críticos podem ser enumerados:

- (i) a formulação de Wood & Charles |1972| emprega as Q-equações, o que necessariamente conduz a um maior número de equações. Deste modo as soluções pelos métodos de Newton Raphson e Hardy Cross, com outras formulações que não pelas Q-equações, podem levar um menor ou igual tempo de processamento, mesmo que com maior número de iterações, e com a vantagem de requererem menos memória. Desta forma o método perde competitividade na análise de grandes redes;
- (ii) inclusão de reservatórios e dispositivos hidráulicos na análise, conforme a extensão do método feita por Jeppson |1976|, requer a formação de anéis fictícios, aumentando desta forma o número de equações;
- (iii) o método requer uma grande quantidade de dados de entrada, pois os mesmos devem ser grupados tanto para os nós como para os anéis |Watanatada, 1973a|;
- (iv) as formulações nodais de Collins & Johnson |1975|, Righetto |1977| e Chin et al |1978| apesar de conduzirem a um menor número de equações que a formulação de Wood & Charles |1972|, não são suficientemente abrangentes para a análise de redes complexas.

### CAPÍTULO III

#### OTIMIZAÇÃO DOS PROJETOS DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA

O projeto de um sistema de distribuição de água pode ser definido como uma combinação dos elementos unitários do sistema, das saídas e dos procedimentos de operação, os quais preenchem todos os objetivos do projeto melhor que qualquer outra combinação. Nos termos desta definição, a otimização deve visar a seleção das variáveis de decisão, tais como diâmetros dos tubos, capacidade das bombas, tamanho e elevação dos reservatórios, que associadas às condições de operacionalidade do sistema, conduzam ao menor custo da rede. Estas condições de operação aparecem no processo de otimização como restrições que condicionam o custo mínimo à eficiência hidráulica da rede. A otimização da rede deverá então satisfazer a certos requisitos hidráulicos, geralmente traduzíveis em critérios de projeto em termos de pressões máximas e mínimas admissíveis nos nós, e como velocidades máximas e mínimas toleráveis nas tubulações.

As técnicas convencionais de projeto de redes hidráulicas não podem identificar a rede ótima diretamente. O procedimento prático consiste na avaliação de um número suficientemente grande de possíveis alternativas do projeto para tentar justificar a afirmação de que a melhor destas aproxima o ótimo teórico. A otimização conseguida nestas condições pode ser chamada de heurística, desde que se interprete a palavra "heurística" como uma estratégia através da qual o número de

soluções plausíveis é reduzido, mas que por outro lado não garante a melhor solução do problema. A melhora desta metodologia tem sido objeto de atenção de diversos pesquisadores (item I.2.2), os quais de um modo geral, aplicam técnicas de otimização oriundas da pesquisa operacional. Dentre estas, a programação linear é uma técnica de otimização largamente utilizada na resolução de problemas que sejam modelados por expressões lineares.

Neste capítulo serão vistos as condições desejáveis para se viabilizar uma otimização heurística e a otimização por programação linear a partir de uma formulação linear do problema.

### III.1 - OTIMIZAÇÃO HEURÍSTICA

O processo de projeto de um sistema de distribuição pode ser eficientemente auxiliado pelo emprego de modelos de análise hidráulica, que permitam ao projetista rapidamente explorar e heuristicamente avaliar um grande número de configurações do sistema. A necessidade óbvia para este processo é se dispor de um modelo que dê respostas rápidas de maneira eficiente, ou seja, uma técnica que programada em computadores digitais não incorra em tempo de processamento excessivo, bem como em memória requerida. Neste ponto fica implícito que não somente a técnica matemática é importante, mas, também, o bom emprego das técnicas de programação. Além disto um eficiente programa de análise hidráulica de redes deve ter certas flexibili-

dades que facilitem a sua utilização numa otimização heurística tanto como na análise hidráulica de grandes redes. Estas flexibilidades do programa podem ser resumidas como se segue:

- (i) possuir uma entrada de dados que requisite o mínimo de informações, e as quais possam ser rapidamente obtidas. É importante ainda, que a entrada de dados seja hábil para atualizar os dados devido a mudanças nos mesmos;
- (ii) possuir rotinas para verificação dos dados de entrada, emitindo mensagens de erro que indiquem claramente os pontos de engano;
- (iii) possuir uma saída que forneça todos os dados iniciais e resultados obtidos numa forma clara e concisa, tanto para os nós como para os trechos;
- (iv) permitir a escolha de diferentes unidades para as vazões ( $m^3/s$  ou  $\ell/s$ );
- (v) permitir a inclusão de dispositivos hidráulicos na análise, sem que isto afete de modo drástico a convergência da solução;
- (vi) ser capaz de obter, numa única rodada, um conjunto de soluções para uma rede básica, pela continua mudança nos dados de entrada, tais como as demandas nos nós, diâmetros dos tubos, elevações dos reservatórios, incógnitas

do problema, etc.

Estes, de um modo geral, seriam os requisitos básicos, embora outras flexibilidades possam ser agregadas ao programa. Davis & Jeppson |1979| citam uma série de outras flexibilidades que tornam os programas de análise hidráulica de redes bastante sofisticados, de forma que satisfaçam à uma larga faixa de aplicações.

Para uma eficiente entrada de dados, como explicitada em (i), a utilização de uma formulação nodal (H-equações) é claramente superior a outras formulações que empreguem as  $\Delta Q$ -equações ou as Q-equações, pois precisar-se-á de dados relativos somente aos nós e trechos, prescindindo-se de dados relativos aos anéis, tais como os trechos que formam cada anel e dos sinais indicativos dos sentidos das vazões nos trechos. Outra facilidade importante é de ser dispensável uma suposição inicial da distribuição das vazões na rede, dado que para grandes redes, assinalar uma distribuição de vazões, que satisfaça a continuidade em todos os nós, é trabalho cansativo sujeito a muitos erros.

Conforme os requisitos e considerações vistas acima, pode-se observar que a formulação nodal de Shamir & Howard |1968|, vista no capítulo II, se adapta melhor para os objetivos de uma otimização heurística do que os métodos de Hardy-Cross e da Análise Linear.

Satisfeito os requisitos advindos de uma adequada formulação matemática, os demais requisitos como citados anteriormente, são dependentes de uma boa utilização das técnicas de programação computacional, e podem desta forma serem agregados ao método de Shamir & Howard [1968]. Este método ficará particularmente flexível para uma otimização heurística, se acoplado à uma função objetivo, que avalie o custo da rede à cada conformação estabelecida para a rede.

### III.2 - OTIMIZAÇÃO POR PROGRAMAÇÃO LINEAR

A otimização de redes hidráulicas de uma forma geral parte de uma formulação não linear. Contudo é possível se articular o problema para uma solução por programação linear, desde que certas suposições sejam aceitas.

Considere-se primeiramente o caso em que a rede seja constituída unicamente por tubulações, de modo que o problema consista na escolha dos diâmetros mais econômicos. O comprimento dos trechos, assim como as elevações e demandas nos nós, são assumidos conhecidos.

Inicialmente no lugar do procedimento comum de se supor um diâmetro para cada trecho, uma lista de diâmetros candidatos, será considerada, e a cada trecho será permitido a combinação de segmentos com diferentes diâmetros [Gupta, 1969]. Desta forma as variáveis de decisão serão os comprimentos dos segmentos de mesmo diâmetro que formam os trechos. Para

um trecho conectado aos nós i e j e de comprimento  $L_{i,j}$ , indicar-se-á o comprimento de um dado segmento de diâmetro m-ésimo da lista de diâmetros candidatos por  $x_{i,j,m}$ , de maneira que a equação abaixo:

$$\sum_m x_{i,j,m} = L_{i,j} \quad (3.1)$$

deve ser satisfeita para todos os trechos, podendo-se acentuar que as listas de diâmetros candidatos de cada trecho podem ser diferentes entre si. Como os comprimentos  $x_{i,j,m}$  são as variáveis de decisão do modelo linear, os mesmos devem satisfazer a condição de não-negatividade como abaixo:

$$x_{i,j,m} \geq 0 \quad (3.2)$$

Uma vez que as demandas nos nós são conhecidas, é possível se supor uma distribuição de vazão na rede que satisfaça a continuidade em todos os nós. A perda de carga num dado segmento de diâmetro m poderá ser obtida conforme a equação:

$$h_{i,j,m} = J_{i,j,m} \cdot x_{i,j,m} \quad (3.3)$$

onde  $J$  é o gradiente hidráulico, o qual pode ser obtido pela equação de Hazen-Williams (equação 2.3) e  $h$  é a perda de carga no segmento.

Conforme dito anteriormente, as velocidades máximas e mínimas toleráveis nas tubulações, e as pressões máximas e mínimas admissíveis nos nós, serão elementos restritivos no processo de otimização. Nesta formulação as velocidades admissíveis, determinarão a lista de diâmetros candidatos para cada trecho, a partir do instante que uma distribuição inicial das vazões foi suposta. Começando por um nó r de nível piezométrico conhecido, em geral um reservatório, pode-se escrever para um nó n qualquer a restrição relativa aos níveis piezométricos admissíveis conforme a equação:

$$H_{\min_n} \leq H_r + \sum_{i,j} \sum_m J_{i,j,m} \cdot x_{i,j,m} \leq H_{\max_n} \quad (3.4)$$

onde o primeiro somatório é sobre os trechos  $(i,j)$ , que formam a rota que liga o nó r ao nó n. O segundo somatório é sobre os segmentos de diâmetro m-ésimo em cada trecho. Os sinais dos termos no somatório serão decorrentes do sentido das vazões nos trechos em relação ao sentido da rota do nó r para o nó n.

As restrições conforme as equações 3.1, 3.2 e 3.4 não são, no entanto, suficientes para a modelagem de uma rede hidráulica. É necessário acrescentar uma restrição de igualdade para assegurar que uma conhecida diferença de carga piezométrica entre dois nós será verificada. Pode-se escrever esta restrição conforme a equação abaixo:

$$\sum_{i,j} \sum_m J_{i,j,m} \cdot x_{i,j,m} = b_r \quad (3.5)$$

onde  $b_r$  é a diferença entre os níveis piezométricos e os somatórios são conduzidos como visto na equação 3.4. Considerando o caso em que os trechos  $(i,j)$  na equação 3.5 formem um circuito fechado, ter-se-á  $b_r$  igual a zero e a equação 3.5 representando o balanceamento das cargas nos anéis.

Assumindo que os custos dos tubos sejam linearmente proporcionais a seus comprimentos, pode-se montar uma função objetivo que reflita o custo total da rede, conforme a equação:

$$\sum_{i,j} \sum_m c_{i,j,m} \cdot x_{i,j,m} \quad (3.6)$$

onde  $c_{i,j,m}$  é o custo por unidade de comprimento para os segmentos de diâmetro  $m$ -ésimo no trecho  $(i,j)$ , e o primeiro somatório é sobre todos os trechos que formam a rede. Minimizar a equação 3.6 sujeita as restrições das equações 3.1, 3.3 e 3.4 e a condição de não negatividade (equação 3.2) é um problema de programação linear que pode ser resolvido pelo uso do algoritmo Simplex.

Esta formulação pode ser melhor visualizada exemplificando-se o seu emprego na rede simples da figura 2.1.

Admitindo-se que o nó 1 da rede da figura 2.1 seja um reservatório, e portanto de nível piezométrico conhecido, pode-se escrever as restrições de pressões para os demais nós, levando em conta os sentidos assinalados na figura 2.1. Estas restrições, conforme a equação 3.4., são:

$$(i) \quad H_{\min_2} \leq H_1 - \sum_{1,2} \sum_m J_{1,2,m} \cdot X_{1,2,m} \leq H_{\max_2}$$

$$(ii) \quad H_{\min_3} \leq H_1 - \sum_{1,2} \sum_m J_{1,2,m} \cdot X_{1,2,m} - \sum_m J_{2,3,m} \leq H_{\max_3}$$

$$(iii) \quad H_{\min_4} \leq H_1 - \sum_{1,2} \sum_m J_{1,2,m} \cdot X_{1,2,m} - \sum_{2,4} \sum_m J_{2,4,m} \cdot X_{2,4,m} \leq H_{\max_4}$$

(3.7)

$$(iv) \quad H_{\min_5} \leq H_1 - \sum_{1,2} \sum_m J_{1,2,m} \cdot X_{1,2,m} - \sum_{2,4} \sum_m J_{2,4,m} \cdot X_{2,4,m} - \sum_{4,5} \sum_m J_{4,5,m} \cdot X_{4,5,m} \leq H_{\max_5}$$

$$(v) \quad H_{\min_6} \leq H_1 - \sum_{1,2} \sum_m J_{1,2,m} \cdot X_{1,2,m} - \sum_{2,4} \sum_m J_{2,4,m} \cdot X_{2,4,m} - \sum_{4,6} \sum_m J_{4,6,m} \cdot X_{4,6,m} \leq H_{\max_6}$$

$$(vi) \quad H_{\min_7} \leq H_1 - \sum_{1,2} \sum_m J_{1,2,m} \cdot X_{1,2,m} - \sum_{2,4} \sum_m J_{2,4,m} \cdot X_{2,4,m} - \sum_{4,6} \sum_m J_{4,6,m} \cdot X_{4,6,m} - \sum_{6,7} \sum_m J_{6,7,m} \cdot X_{6,7,m} \leq H_{\max_7}$$

Como a rede da figura 2.1 possui dois anéis, são necessários duas restrições para garantia do balanceamento das cargas nos mesmos. Novamente, os sentidos das vazões nos trechos devem ser observados. Estas restrições para os anéis I e II respectivamente, conforme a equação 3.5, são:

$$(vii) \sum_{2,4} \sum_m J_{2,4,m} \cdot x_{2,4,m} + \sum_{4,5} \sum_m J_{4,5,m} \cdot x_{4,5,m} =$$

$$\sum_{3,5} \sum_m J_{3,5,m} \cdot x_{3,5,m} - \sum_{2,3} \sum_m J_{2,3,m} \cdot x_{2,3,m} = 0$$

$$(viii) \sum_{4,6} \sum_m J_{4,6,m} \cdot x_{4,6,m} + \sum_{6,7} \sum_m J_{6,7,m} \cdot x_{6,7,m} +$$

$$\sum_{7,5} \sum_m J_{7,5,m} \cdot x_{7,5,m} - \sum_{4,5} \sum_m J_{4,5,m} \cdot x_{4,5,m} = 0$$

(3.8)

Completando o conjunto de restrições, a equação 3.1 é aplicada a todos os trechos:

$$(vii) \sum_m x_{1,2,m} = L_{1,2}$$

$$(ix) \sum_m x_{2,3,m} = L_{2,3}$$

$$(x) \sum_m x_{2,4,m} = L_{2,4} \quad (3.9)$$

$$(xi) \sum_m x_{3,5,m} = L_{3,5}$$

$$(xii) \sum_m x_{4,5,m} = L_{4,5}$$

$$(xiii) \sum_m x_{4,6,m} = L_{4,6}$$

$$(x_{iv}) \quad \sum_m x_{6,7,m} = L_{6,7}$$

$$(x_{v}) \quad \sum_m x_{7,5,m} = L_{7,5}$$

A função objetivo, conforme a equação 3.6  
fica:

$$\begin{aligned} \min CT = & \sum_{1,2} \sum_m c_{1,2,m} \cdot x_{1,2,m} + \sum_{2,3} \sum_m c_{2,3,m} \cdot x_{2,3,m} + \\ & \sum_{2,4} \sum_m c_{2,4,m} \cdot x_{2,4,m} + \sum_{3,5} \sum_m c_{3,5,m} \cdot x_{3,5,m} + \\ & \sum_{4,6} \sum_m c_{4,6,m} \cdot x_{4,6,m} + \sum_{6,7} \sum_m c_{6,7,m} \cdot x_{6,7,m} + \sum_{7,5} \sum_m c_{7,5,m} \cdot x_{7,5,m} \end{aligned} \quad (3.10)$$

O número total de variáveis de decisão será igual ao somatório do número de diâmetros selecionados para cada trecho.

A solução ótima para este problema linear (obtida com o algoritmo Simplex e com o auxílio de um computador digital), será tal que os trechos conterão no máximo dois segmentos, e cujos diâmetros serão vizinhos na lista de diâmetros candidatos. Esta última afirmação pode ser entendida, observando-se que a perda de carga num trecho, assim como o custo das tubulações, são funções monótonas do diâmetro. Desta forma, se na otimização um trecho aparece como combinação de dois segmentos, seus diâmetros necessariamente serão adjacentes na lis

ta de diâmetros candidatos. Este fato, inclusive, contribui para a não consideração da perda de carga concentrada na emenda de dois segmentos, pois o erro já embutido na determinação da perda de carga nos segmentos, torna irrelevante a perda concentrada na emenda.

A compreensão de que na otimização um dado trecho poderá no máximo aparecer como combinação de dois segmentos é pertinente ao espaço de solução do problema linear. Da discussão sobre as soluções básicas é sabido que das  $n$  variáveis do problema, somente  $m$  variáveis, onde  $m$  é igual ao número de restrições do problema, podem assumir valores positivos. Portanto, de imediato sabe-se que  $(n-m)$  variáveis serão iguais a zero. Partindo-se deste fato é possível se formalizar a demonstração teórica, o que no entanto se alonga numa série de verificações. Uma boa discussão a este respeito pode ser vista em Hadley [1962].

O modelo linear como formulado, conduz a um dimensionamento "ótimo" das tubulações, em função de uma distribuição de vazões, fixada em todos os trechos da rede. Indicando por  $Q$  o vetor que contém estas vazões, as quais satisfazem a continuidade em todos os nós, pode-se escrever a equação:

$$CT = PL(Q) \quad (3.11)$$

onde  $PL$  indica que  $CT$ , o custo total da rede, é consequência de um problema linear condicionado pelo vetor  $Q$ . Portanto, o próxi-

mo passo para o desenvolvimento do modelo será "descobrir" qual seja o melhor vetor  $Q$ , isto é, o vetor de vazões  $Q$  que produza o menor custo dentre todos os resultados possíveis da equação 3.11. Nesta situação, então, pode-se dizer que o vetor  $Q$  é a variável de decisão inicial. Portanto, um método que sistematicamente mude o vetor  $Q$ , visando atingir a melhor distribuição de vazões, deve ser acrescentado ao modelo linear. Existem diferentes maneiras para se tentar atingir este objetivo através de uma busca por gradientes. Entretanto a exploração da interpretação econômica do conceito de dualidade pode conduzir a uma rápida formulação da busca por gradiente |Alperovits & Shamir, 1977; Quindry et al, 1979|.

E sabido que a todo problema de programação linear existirá um outro problema de programação linear, chamado dual, a ele associado. Uma técnica para mudanças no vetor  $Q$ , baseada nas variáveis duais da equação 3.5 pode ajudar a definir a direção da busca. Definindo o vetor  $\Delta Q$  como o vetor que contém as mudanças nas vazões em todos os trechos que formam os anéis da rede, pode-se pesquisar através de uma busca por gradiente a direção pela qual a condição abaixo é satisfeita:

$$PL(Q + \Delta Q) < PL(Q) \quad (3.12)$$

ou seja, a pesquisa será na direção do gradiente negativo do custo total (CT) da rede.

Indicando por  $\Delta Q_r$  a mudança nas vazões dos trechos de um dado anel, os quais formam a rota  $r$ , e por  $\Delta Q_v$  os incrementos nas vazões nos anéis de rota  $v$  os quais tem trechos em comum com a rota  $r$ , pode-se definir o gradiente  $G_r$  para o anel de rota  $r$  usando a seguinte equação:

$$G_r = \frac{\partial(CT)}{\partial(\Delta Q_r)} = \frac{\partial(CT)}{\partial b_r} \cdot \frac{\partial b_r}{\partial(\Delta Q_r)} + \sum_{v \in V} \frac{\partial(CT)}{\partial b_v} \cdot \frac{\partial b_v}{\partial(\Delta Q_v)} = W_r \cdot \frac{\partial b_r}{\partial(\Delta Q_r)} + \\ + \sum_{v \in V} W_v \cdot \frac{\partial b_v}{\partial(\Delta Q_v)} \quad (3.13)$$

onde  $V$  é usado para indicar o conjunto de rotas  $v$ , que tenham trechos em comum com a rota  $r$ .  $W_r$  e  $W_v$  são as variáveis duais das restrições 3.11 feitas para os anéis de rotas  $r$  e  $v$  respectivamente, ou seja, as variáveis  $W_r$  e  $W_v$  representam o valor marginal dos recursos  $b_r$  e  $b_v$  disponíveis, ou ainda, representam a razão com a qual a função objetivo CT diminuirá (aumentará) de valor, caso as quantidades disponíveis dos recursos  $b_r$  e  $b_v$  sejam diminuídas (aumentadas) dentro de um certo limite. A equação 3.13 como vista não é estritamente correta, desde que  $b_r$  e  $b_v$  são valores constantes. Entretanto, os  $b_r$  no modelo representam uma alocação antecipada dos recursos para um conjunto de atividades em consideração (uma distribuição de vazões inicial) de forma que alguma flexibilidade na locação dos recursos é viável. Todo este processo pode ser traduzido numa linguagem comum, dizendo-se que nesta formulação é procurado o  $\Delta Q$ , que adicionado as vazões no anel, produza o balanceamento das cargas no anel com o maior consumo possível de energia (o recurso dis-

ponível), o que necessariamente levará a maiores segmentos de diâmetro mínimo, e portanto a um custo menor. O valor de  $b_r$  para um dado anel como em 3.13, pode então ser obtido, lembrando-se que a equação de Hazen-Williams (equação 2.3) é adotada, conforme a equação:

$$\begin{aligned} b_r &= \sum_{i,j} \sum_m J_{i,j,m} \cdot x_{i,j,m} \\ &= \sum_{i,j} \sum_m |\alpha \cdot Q_{i,j}^{1,852} \cdot C_{i,j,m}^{-1,852} \cdot D_{i,j,m}^{-4,87} \cdot x_{i,j,m}| \quad (3.14) \end{aligned}$$

Neste ponto deve-se acentuar que os somatórios na equação 3.14 são efetuados sem a consideração dos sentidos das vazões no anel, pois interessa no caso, o gasto de energia no equilíbrio do anel. Tem-se então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_r}{\partial (\Delta Q_r)} &\equiv \frac{\partial b_r}{\partial Q_r} = \sum_{i,j} \sum_m |1,852 \alpha Q_{i,j}^{0,852} C_{i,j,m}^{-1,852} D_{i,j,m}^{-4,87} x_{i,j,m}| \\ &= \sum_{i,j} \sum_m |1,852 (\Delta H_{i,j,m} / Q_{i,j})| \quad (3.15) \end{aligned}$$

Já que a constante 1,852 aparece em todos os componentes da equação 3.14, e interessa somente os valores relativos, pode-se retirar esta constante, e definir o gradiente  $G_r$  para a rota r como:

$$G_r = \frac{\partial(CT)}{\partial(\Delta Q_r)} = W_r \sum_{(i,j) \in r} (1/Q_{i,j}) \cdot \sum_m \Delta H_{i,j,m} + \sum_{v \in V} W_v \sum_{v \neq (i,j) \in V} (1/Q_{i,j}) \sum_m \Delta H_{i,j,m} \quad (3.16)$$

O sinal das parcelas adicionais, provenientes das rotas que possuem trechos em comum com a rota  $r$ , serão positivos quando as vazões nos trechos em comum entre as rotas  $r$  e  $v$  estiverem num mesmo sentido, e negativos no caso contrário. Deve-se observar ainda que para um gradiente  $G_r$  positivo, ou seja,  $\partial(CT)/\partial(\Delta Q_r) > 0$ , tem-se necessariamente que  $\Delta CT > 0$  para  $\Delta Q_r > 0$ . Como o objetivo é minimizar  $CT$ , o gradiente  $G_r$  considerado para a mudança nas vazões na rede, deve ser assumido com o sinal contrário da derivada, ficando a equação 3.16 modificada para:

$$G_r = - \frac{\partial(CT)}{\partial(\Delta Q_r)} = -|W_r \sum_{(i,j) \in r} (1/Q_{i,j}) \cdot \sum_m \Delta H_{i,j,m} + \sum_{v \in V} W_v \sum_{v \neq (i,j) \in V} (1/Q_{i,j}) \sum_m \Delta H_{i,j,m}| \quad (3.17)$$

A equação 3.17 pode então ser aplicada a todos os anéis da rede, desde que os  $\Delta H_{i,j,m}$  e  $Q_{i,j}$  foram utilizados na montagem do problema de programação linear, e as variáveis duais ( $W_r$  e  $W_v$ ) são dele obtidas.

Os componentes do vetor de mudanças nas vazões,  $\Delta Q$ , será feito proporcional aos correspondentes componentes

tes do vetor que contém os gradientes, como obtidos em 3.17. A busca por gradientes pode então ser implementada. O tamanho do passo, dado em termos de um incremento nas vazões, pode inicialmente ser especificado como um dado de entrada. Ao anel que tenha o componente do gradiente de maior valor absoluto, será dado o incremento com o tamanho especificado, e nos demais anéis as mudanças serão tomadas pela razão de seus componentes do gradiente pelo componente do gradiente de maior valor absoluto. O passo feito desta forma será na direção do gradiente negativo do custo. Uma rotina para aumentar ou diminuir o incremento de uma dada percentagem, de uma iteração para outra, pode ser desenvolvida. Ela será baseada no sucesso e falha de cada passo. A busca terminará quando nenhuma melhora for conseguida com um incremento mínimo estabelecido, ou quando o número máximo de iterações especificado for excedido.

Uma última restrição de ordem prática será necessária uma vez que uma possível tendência da busca por gradiente, será a de levar a rede a uma configuração ramificada, dado que esta é a conformação obviamente mais econômica. Isto é detectado no processo pela anulação da vazão em determinados trechos, o que os tornam prescindíveis, ocorrendo desta forma a abertura dos anéis. Portanto, se isto não é desejável para a melhor operacionalidade da rede, uma restrição pode ser feita de modo a que um diâmetro mínimo, com uma vazão mínima admissível seja especificado.

O modelo linear formulado é apto a consideração de diferentes carregamentos simultaneamente, ou seja, um carregamento "típico" e um outro "crítico" podem explicitamente condicionar o dimensionamento da rede, bastando somente se proceder as restrições para ambos os carregamentos. Cada carregamento considerado adiciona um conjunto de restrições, e o problema de programação linear será resolvido para todos estas restrições.

A otimização da rede como procedida pelo modelo, poderá contudo, conduzir a segmentos de comprimento irrazoáveis para serem levados em consideração. Deste modo, a solução final obtida deve ser submetida a um refinamento pela retirada destes segmentos. Este procedimento pode conduzir a violação das condições de pressões máximas e mínimas admissíveis, o que no entanto não deve, de uma forma geral, inviabilizar tecnicamente o projeto pois os limites para as pressões podem sofrer pequenas variações, uma vez que estes limites são estabelecidos em geral, considerando uma margem de segurança.

Os passos principais do algoritmo de otimização linear, pode ser resumida como se segue:

- (i) a partir do conhecimento das demandas concentradas em todos os nós, supor uma distribuição inicial das vazões que satisfaça a continuidade em todos os nós;

- (ii) selecionar uma lista de diâmetros candidatos para cada trecho, a partir da suposição da distribuição de vazões, levando em conta as velocidades máximas e mínimas admissíveis nas tubulações;
- (iii) formular as restrições, conforme as equações 3.1, 3.2, 3.4 e 3.5;
- (iv) montar a função objetivo a partir da seleção das listas de diâmetros candidatos para todos os trechos e dos custos unitários das tubulações;
- (v) montar o lado direito para o problema linear conforme as restrições feitas;
- (vi) montar a matriz dos coeficientes, cujos elementos são os gradientes hidráulicos para todos os trechos, segundo suas listas de diâmetros candidatos;
- (vii) resolver o problema de programação linear com o algoritmo Simplex;
- (viii) a partir de uma solução inicial, empreender uma busca por gradiente à melhor distribuição de vazões, utilizando para isto as equações 3.10, 3.11 e 3.12, e os procedimentos heurísticos comuns de uma busca por gradiente. A cada alteração nas vazões nos anéis retorna-se aos passos (vi) e (vii);

- (ix) submeter a solução final obtida a um refinamento para a retirada de segmentos de comprimentos irrazoáveis.

#### Extensão para a Inclusão de Dispositivos Hidráulicos

O modelo por programação linear não é restrito a redes formadas somente por tubulações. Desde que dispositivos hidráulicos meramente forneçam um ganho de energia (bombas e reservatórios elevados) ou uma perda de energia (válvulas), pode-se incluí-los diretamente na formulação, considerando para isto os acréscimos ou decréscimos de carga como variáveis de decisão representativos da ação destes elementos hidráulicos.

Considere-se inicialmente o caso das bombas. A inclusão de bombas no modelo linear importará na consideração da operação do sistema, isto é, tem-se que saber sob que condições de carregamento da rede as bombas irão operar. Pode-se indicar a variável de decisão para uma dada bomba como  $XB(t, \ell)$ , onde  $XB$  é a carga adicionada pela bomba  $t$  sob o carregamento  $\ell$ . A restrição de pressão nos nós (equação 3.4), com a inclusão destas variáveis, supondo um carregamento da rede, ficará modificada para:

$$H_{\min_r}(\ell) \leq H_r(\ell) + \sum_t XB(t, \ell) + \sum_{i,j} \sum_m J_{i,j,m}(\ell) \cdot x_{i,j,m} \leq H_{\max_r}(\ell) \quad (3.18)$$

onde o primeiro somatório é sobre as bombas existentes na rota que liga o nó  $r$  ao nó  $n$ . Caso as bombas consideradas estejam num anel, ou em uma rota cuja diferença de carga entre os nós extremos seja conhecida, ter-se-á de modo similar à equação 3.5 a equação:

$$\sum_{i,j} \sum_m j_{i,j,m}(\ell) \cdot x_{i,j,m} \stackrel{+}{=} \sum_t x_B(t, \ell) = b_r(\ell) \quad (3.19)$$

onde um carregamento  $\ell$  é considerado, e o somatório sobre as variáveis  $x_B$  é tal como na equação 3.18.

Para completar a formulação do problema com a inclusão de bombas, restará pois o estabelecimento dos custos unitários das variáveis  $x_B(t, \ell)$  na função objetivo. Isto pode ser feito pela consideração de uma função de custo para as bombas, a qual leve também em conta os custos de operação, e cujo argumento seja a capacidade das bombas em termos de potência instalada. Esta relação certamente é não linear, sendo no entanto uma função discreta em razão das potências comerciais assim serem. Desta forma uma rotina que sucessivamente aproxime as potências requeridas pelos pontos de operação das bombas, para as potências comerciais discretizadas na função de custo, fornecida como dado de entrada, será necessária para se conciliar com a não linearidade da curva. Os dados relativos a função de custos das bombas podem, deste modo, ser introduzidos no programa sem a necessidade de se assumir uma dada curva para a relação. Este esquema iterativo pode ser explicitado sabendo-se que a potência em HP para a operação de uma bomba é dada por:

$$P = \frac{Q \cdot AMT \cdot \gamma}{76 \cdot \eta} \quad (3.20)$$

onde:  $|P|$  = potência em HP;

$|Q|$  = vazão em  $m^3/s$ ;

$|AMT|$  = altura manométrica total em m;

$|\gamma|$  = peso específico do fluido em  $kg/m^3$ ;

$|\eta|$  = rendimento.

Sabendo-se que o peso específico da água é igual a  $1.000 \text{ kg/cm}^3$  e utilizando-se as unidades comuns em projetos de redes de distribuição de água, a equação 3.20 fica:

$$P = \frac{Q \cdot AMT}{76 \cdot \eta} \quad (3.21)$$

onde:  $|P|$  = potência em HP;

$|Q|$  = vazão em  $\ell/s$ ;

$|AMT|$  = altura manométrica total em m;

$|\eta|$  = rendimento.

Assumindo-se um rendimento global médio de 67% [Azevedo Netto, 1966] e colocando-se a variável XB no lugar da altura manométrica total, a equação 3.21 fica simplificada para:

$$P = \frac{Q}{51} \cdot XB \quad (3.22)$$

onde:  $|P|$  = potência em HP;

$|Q|$  = vazão em  $\ell/s$ ;

$|XB|$  = carga acrescida em m.

E tem-se então, uma relação onde a potência é linearmente proporcional à carga fornecida pela bomba, à cada solução do modelo linear.

Os passos deste algoritmo são resumidos em:

- (i) assumir uma potência inicial para as bombas;
- (ii) resolver o problema de programação linear, tendo para coeficientes das variáveis  $XB$  na função objetivo, os respectivos custos por HP instalado, em função das potências assumidas;
- (iii) para as variáveis  $XB$  obtidas na solução do problema linear, calcular a potência conforme a equação 3.22. Caso os valores obtidos sejam suficientemente próximos das potências arbitradas nenhuma mudança é necessária, caso contrário as potências calculadas devem ser aproximadas para as potências comerciais mais próximas, sendo a função objetivo, atualizada conforme a função de custos para as bombas.

Cada variável  $XB$  designada pelo procedimento acima representa uma estação elevatória em local assumido a priori, como no entanto, na otimização pode-se ter valores nulos

para as variáveis XB, pode ser dito que os locais de fixação das bombas são selecionadas pelo modelo.

A consideração de válvulas no modelo é feita de modo similar às bombas. Pode-se indicar as variáveis de decisão para as válvulas como  $XV(t, \ell)$ , onde XV é a perda de energia provocada pela válvula t sob o carregamento  $\ell$ . As equações 3.4 e 3.5 com a inclusão das variáveis XV, considerando um carregamento  $\ell$ , ficam respectivamente:

$$H_{\min_n}(\ell) \leq H_r(\ell) + \sum_t XV(t, \ell) \pm \sum_{i,j} \sum_m J_{i,j,m}(\ell) \cdot X_{i,j,m} \leq H_{\max_n}(\ell) \quad (3.23)$$

e

$$\sum_{i,j} \sum_m J_{i,j,m}(\ell) \cdot X_{i,j,m} \pm \sum_t XV(t, \ell) = b_r(\ell) \quad (3.24)$$

onde os somatórios sob as variáveis XV são tomados de modo semelhante aos das variáveis XB nas equações 3.13 e 3.14.

Os custos para as válvulas são de fácil consideração na função objetivo, podendo seus custos ser incorporados aos custos dos tubos onde estejam localizadas.

As variáveis XV são especialmente importante em duas situações, quando então representarão válvulas (variáveis) fictícias da rede. Primeiramente, quando mais de um carregamento são considerados simultaneamente no dimensionamen-

to da rede. Como as vazões iniciais para cada carregamento são arbitrárias, nada pode ser garantido ao fato que exista um conjunto de diâmetros que satisfaça o equilíbrio hidráulico para to das as condições de carga da rede. Para superar esta dificuldade duas variáveis XV (uma para cada possível sentido da vazão no trecho) devem ser colocadas nas restrições do tipo 3.5 para cada carregamento considerado. A essas variáveis uma grande penalidade é assumida na função objetivo de forma que as variáveis XV tenderão a ser retiradas da solução pelo algoritmo de otimização. Caso não se alcance a retirada total das variáveis fictícias, isto significará que válvulas reais são necessárias nos pontos onde as variáveis fictícias permaneceram, desde que a rede deva operar como especificado. Uma segunda situação onde as válvulas fictícias são necessárias é na expansão de redes existentes, quando então deve-se inserir nos anéis já existentes duas variáveis XV (novamente uma para cada possível sentido da vazão no trecho). Elas serão necessárias devido as vazões inicialmente supostas, de um modo geral não conduzirem ao balanceamento hidráulico dos anéis. Uma grande penalidade é também assumida na função objetivo, e desta forma a busca por gradiente da melhor distribuição de vazões deverá guiar a uma solução na qual as variáveis fictícias serão retiradas.

Na consideração de elementos hidráulicos tem-se por último o caso dos reservatórios elevados. No modelo linear não é possível se considerar o tamanho do reservatório como uma variável de decisão, no entanto pode-se considerar uma adicional elevação na altura do reservatório como uma variável de

decisão, dado que isto significa um ganho de energia. Pode-se indicar a variável de decisão por  $XR(t)$  onde  $XR$  é o acréscimo na altura do reservatório  $t$ . A inclusão desta variável nas restrições do tipo 3.4, para uma rota que ligue o reservatório  $t$ , localizado no nó  $r$ , ao nó  $n$ , com a rede submetida ao carregamento  $\ell$ , fica:

$$H_{\min_n}(\ell) \leq (H_0_r + XR(t)) \pm \sum_{i,j} \sum_m J_{i,j,m}(\ell) \cdot X_{i,j,m} \leq H_{\max_n}(\ell) \quad (3.25)$$

A variável  $XB$  é única para todos os carregamentos, uma vez que a altura do reservatório sendo fixada para um dado carregamento não pode ser modificada.

A consideração das variáveis  $XR$  na função objetivo é feita simplesmente colocando-se um custo unitário para a elevação dos reservatórios. O custo do reservatório a diferentes alturas certamente é uma relação não linear, no entanto, dado que alturas dos reservatórios são limitadas por critérios de engenharia prática, a relação linear é aceitável já que a variável  $XR$  poderá variar somente num estreito intervalo.

#### Comentários Sobre o Modelo

Um dado inicial favorável ao modelo linear está no fato dos programas de solução dos problemas de programação linear serem, em geral, disponíveis nos centros de computação eletrônica. Desta forma a programação computacional do modelo li

near como formulado é relativamente fácil, consistindo basicamente de rotinas que processem os dados de entrada para a montagem do problema linear (função objetivo, matriz dos coeficientes e lado direito), de rotinas que manipulem as sucessivas soluções obtidas por programação linear, para a implementação da busca por gradiente e de rotinas de saída que apresentem os resultados de forma clara e concisa.

As principais características do modelo podem ser citadas como se segue:

- (i) O modelo pode dimensionar a rede considerando diferentes carregamentos simultaneamente, deste modo, regras de operação da rede podem ser incluídas explicitamente no processo de dimensionamento;
- (ii) O modelo realmente dimensiona a rede, escolhendo os diâmetros dos tubos, capacidade das bombas, localização de válvulas, altura do reservatório, e indicando ainda os pontos de operação das bombas e válvulas para cada carregamento considerado;
- (iii) O modelo produz um dimensionamento que é obtido em conjunto com o balanceamento hidráulico da rede para todos os carregamentos considerados;
- (iv) Os diâmetros dos tubos são variáveis discretas, assumindo somente os valores comerciais;

O modelo no entanto possui uma série de pontos críticos, que limitam o seu emprego em determinadas situações. Estes pontos são:

- (i) a entrada de dados não é simples. A exigência da suposição de uma distribuição de vazões que satisfaça a continuidade de em todos os nós, a consideração de sinais indicativos dos sentidos das vazões nos trechos e a indicação das rotas seguidas pelos tubos nas formulações das restrições de pressões nos nós e de equilíbrio entre nós de nível piezométrico conhecido, criam uma situação bastante desfavorável no dimensionamento de grandes redes, quando a pouca simplicidade nos dados de entrada será uma fonte de muitos enganos;
- (ii) o modelo não pode considerar as demandas concentradas nos nós, bem como o tamanho do reservatório como variáveis de decisão;
- (iii) alguma subjetividade é necessária na consideração de dispositivos hidráulicos, de forma que eventualmente os resultados podem não ser representativos do real desempenho do dispositivo hidráulico ou não significarem a melhor opção;

- (iv) o modelo necessita de rotinas especiais para a consideração de trechos com diâmetros em paralelo;
- (v) a busca por gradiente conduz somente a um ótimo local. A busca é dificultada devido ao modelo linear ficar muito condicionado a distribuição de vazões iniciais, dado que o acúmulo de restrições de igualdade ( $\pm 60\%$  das restrições) não dá muita flexibilidade a movimentação da busca;
- (vi) um refinamento da solução é necessário para a retirada de segmentos irrigáveis, inviáveis tanto operacionalmente como economicamente;
- (vii) os procedimentos heurísticos envolvidos na busca por gradiente requerem alguma experiência com técnicas de otimização para serem eficientemente colocados;
- (viii) o dimensionamento de grandes redes pode incorrer em um problema de programação linear com elevado número de restrições e variáveis de decisão, de forma que o problema só poderá ter solução ou com o auxílio de computadores de grande porte ou se utilizando o recurso de se dividir a rede em setores;
- (ix) como uma última restrição pode-se citar aquelas advindas das limitações da programação linear, no caso as hipóteses de proporcionalidade, aditividade, divisibilidade

e coeficientes constantes. As suposições de proporcionalidade e aditividade são para o modelo as mais críticas; pois considerações referentes a economia de escala, possivelmente irão alterar o dimensionamento "ótimo" obtido. A hipótese de divisibilidade não é relevante, pois os arredondamentos dos valores fracionados assumidos pelas variáveis de decisão, não conduzem a erros significativos. Quanto a hipótese de coeficientes constantes, viu-se que uma análise de pós-otimização (a busca por gradiente) é necessária justamente para se minorar as incertezas nos valores  $a_{ij}$  da matriz dos coeficientes, os quais são dependentes da distribuição de vazões assumida.

## CAPÍTULO IV

### APLICAÇÃO DAS METODOLOGIAS

Neste capítulo será inicialmente avaliado o comportamento das técnicas iterativas de verificação da estabilidade hidráulica, segundo os métodos de Hardy Cross, Newton-Raphson e Análise Linear. Os métodos serão empregados com as formulações das equações com as quais são usualmente utilizados, tal como visto no capítulo II. Posteriormente avaliar-se-ão os resultados alcançados na otimização com o modelo linear, recorrendo-se para isto à uma comparação com a otimização obtida através de uma abordagem heurística.

Para a experiência computacional com as metodologias foram selecionados quatro exemplos. Primeiramente uma rede simples, similar a da figura 2.1 (exemplo nº 1) será estudada, para em seguida serem vistos os casos da rede apresentada por Martins [1973] (exemplo nº 2) e da expansão de parte da rede da cidade de Apucarana, conforme projetado por uma consultoria de engenharia [Serete, 1973]. Uma última rede (exemplo nº 4) será vista somente ao final do capítulo unicamente com a finalidade de prover uma demonstração computacional da validade do modelo linear na solução de redes complexas. As unidades empregadas nos exemplos, são aquelas usuais em projetos de distribuição de água conforme citadas para a equação 2.4.

Para a aplicação das metodologias foram desenvolvidos dois programas em linguagem FORTRAN. O computador utilizado foi o Burroughs 6700 do Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, com 1,6 Mb de memória principal, considerado de grande porte. Todos os programas utilizam precisão simples.

O primeiro programa chamado PARH (Programa de Análise de Redes Hidráulicas), verifica o equilíbrio hidráulico de uma dada rede, empregando a formulação nodal de Shamir & Howard |1968|. A solução iterativa pelo método de Newton-Raphson utiliza o método de Gauss-Jordan para a solução dos sucessivos sistemas lineares. O segundo programa chamado PORH (Programa de Otimização de Redes Hidráulicas), realiza o dimensionamento ótimo de redes hidráulicas, utilizando na otimização programação linear, segundo o modelo linear apresentado no capítulo III.

O PORH utiliza para solução de problema de programação linear as subrotinas ZX1LP/ZX2LP, ZX3LP e UERTST do "pacote" de rotinas do IMSL |1977|. Uma outra versão deste programa utiliza o programa TEMPO |Burroughs, 1974| na solução do problema de programação linear. Nesta versão a busca por gradiente não é implementada devido às dificuldades computacionais na utilização do programa TEMPO como subrotina.

Aproveitando o fato do modelo linear de otimização ter uma formulação baseada na fixação das vazões nos trechos, foi adicionado ao programa PORH rotinas que opcionalmente realizam a verificação do balanceamento hidráulico de uma dada

rede, segundo os métodos de Hardy Cross e Newton-Raphson, formulados com as  $\Delta Q$ -equações, e pelo método da Análise Linear, formulado com as Q-equações. Os dois últimos métodos acima citados utilizam o método de Gauss-Jordan na solução dos sistemas lineares decorrentes do processo iterativo.

#### IV.1 - MÉTODOS DE ANÁLISE HIDRÁULICA DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO

No estudo inicial da rede simples do exemplo nº 1 (figura 4.1) as equações envolvidas para cada técnica de solução são apresentadas de forma a mostrar claramente a aplicação dos métodos. Os diâmetros assinalados na rede da figura 4.1 foram fixados arbitrariamente, desde que neste item interessada somente a solução hidráulica. Os diâmetros assumidos para as redes das figuras 4.2 e 4.3 são os originalmente assumidos por Martins [1973] e pela consultoria de engenharia Serete, 1973], respectivamente. As soluções são expostas seguindo a mesma ordem adotada no item II.3.

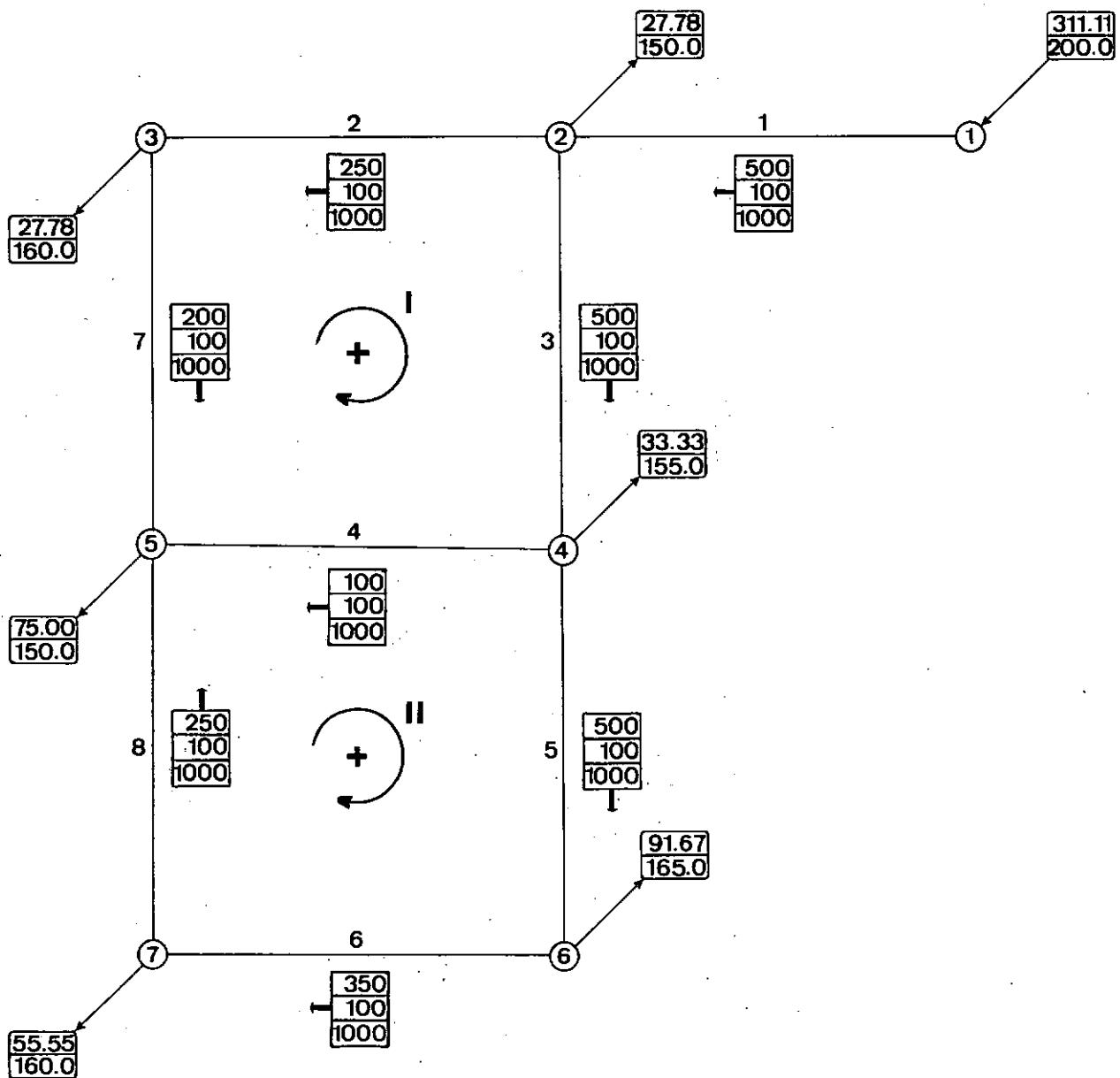
##### IV.1.1 - Exemplo nº 1

A rede deste exemplo é similar a figura 2.1. O esquema representativo da rede bem como os dados relativos aos nós e trechos estão assinalados na figura 4.1. As resistências hidráulicas nos trechos, calculadas conforme a fórmula de Hazen-Williams (equação 2.4), são vistas na tabela 4.1. As soluções com as técnicas que necessitam de uma inicialização externa (Hardy-Cross e Newton-Raphson) são apresentadas considerando uma

boa inicialização, entendendo-se como boa inicialização uma distribuição de vazões que seja compatível com a capacidade das tubulações. A tabela 4.11 apresentada ao final, mostra o resumo de experiência computacional com a rede da figura 4.1. No resumo são vistos apenas o número de iterações e os tempos de processamento consumidos em cada solução. Os tempos de processamento são considerados de dois modos. Primeiramente são apresentados os tempo consumidos nas iterações, ou seja, os tempos gastos na montagem do problema não são considerados e a seguir são vistos os tempos totais de processamento, não sendo no entanto considerados os tempos de entrada e saída. A distinção feita pela observação dos tempos consumidos apenas nas iterações, visa evitar possíveis distorções decorrentes de um emprego desigual das técnicas computacionais na programação dos métodos.

Tabela 4.1 Resistência nos trechos da rede simples da figura 4.1

TRECHO	RESISTÊNCIA (K) $f(L, D, CHW)$
1	61,69
2	1.803,83
3	61,69
4	156.373,95
5	61,69
6	350,39
7	5.347,47
8	1.803,83



D
E

D - demanda em l/s

E - elevação em m

$\phi$  - diâmetro em mm

Ø
CHW
L

CHW - coeficiente de Hazen-Williams

L - comprimento em m

Figura 4.1 Esquema representativo da rede simples usada para exposição detalhada dos métodos iterativos de análise de redes de distribuição (exemplo nº 1)

Solução pelo Método de Hardy Cross ( $\Delta Q$ -Equações)

A formulação pelas  $\Delta Q$ -equações conduz a somente duas equações, uma para cada anel, de forma que somente os trechos que formam os anéis são submetidos à análise. A equação 2.9 aplicada aos anéis da figura 4.1 resulta em:

$$(i) F_1 = K_3(Q_{0,3} + \Delta Q_1)^{1.852} + K_4(Q_{0,4} + \Delta Q_1 - \Delta Q_2)^{1.852} - K_7(Q_{0,7} - \Delta Q_1)^{1.852} - K_2(Q_{0,2} - \Delta Q_1)^{1.852} = 0 \quad (4.1)$$

$$(ii) F_2 = K_5(Q_{0,5} + \Delta Q_2)^{1.852} + K_6(Q_{0,6} + \Delta Q_2)^{1.852} + K_8(Q_{0,8} + \Delta Q_2)^{1.852} - K_4(Q_{0,4} + \Delta Q_1 - \Delta Q_2)^{1.852} = 0$$

A partir de uma boa inicialização nas vazões, a sequência de operações para a solução das equações segundo os passos vistos em II.3.1, pode ser ilustrada para a primeira iteração conforme os quadros a seguir:

ANEL I

TRECHO	Q	KQ <sup>1.852</sup>	1.852 KQ <sup>0.852</sup>
3	222,22	1,37 x 10 <sup>6</sup>	1,14 x 10 <sup>4</sup>
4	8,33	7,93 x 10 <sup>6</sup>	1,76 x 10 <sup>6</sup>
7	33,33	- 3,54 x 10 <sup>6</sup>	1,96 x 10 <sup>5</sup>
2	61,11	- 3,67 x 10 <sup>6</sup>	1,11 x 10 <sup>5</sup>
	$\Sigma$	2,10 x 10 <sup>6</sup>	2,08 x 10 <sup>6</sup>

$$\Delta Q_1 = - \frac{2 \cdot 10 \times 10^6}{2,08 \times 10^6} = 1,01$$

## ANEL II

TRECHO	Q	KQ <sup>1.852</sup>	1.852 KQ <sup>0.852</sup>
5	180,56	$9,32 \times 10^5$	$9,56 \times 10^3$
6	88,89	$1,43 \times 10^6$	$2,97 \times 10^4$
8	33,33	$1,19 \times 10^6$	$6,63 \times 10^4$
4	8,33	$-7,93 \times 10^6$	$1,76 \times 10^6$
		$\Sigma -3,89 \times 10^6$	$1,87 \times 10^6$

$$\Delta Q_2 = - \frac{-3,89 \times 10^6}{1,87 \times 10^6} = 2,08$$

Após as correções nas vazões o processo se repete até o critério de convergência ser satisfeito. Como variável de controle da convergência é adotado o somatório dos valores absolutos das correções nas vazões nos anéis, e para erro admissível é assumido o valor de  $10^{-3}$  l/s. A solução final para esta condição de convergência, tal como obtida pelo programa PORH é vista nas tabelas 4.2 e 4.3, as quais mostram os resultados para os trechos e nós respectivamente.

TABELA 4.2 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS

TRECHO	COMPRIMENTO (M)	DIAMETRO (MM)	CHW	VAZAO (L/S)	PERDA DE CARGA (M)
1	1000.00	500	100	311.11	7.12
2	1000.00	250	100	56.25	8.77
3	1000.00	500	100	227.08	3.98
4	1000.00	100	100	6.03	12.16
5	1000.00	500	100	187.72	2.80
6	1000.00	350	100	96.05	4.59
7	1000.00	200	100	28.47	7.37
8	1000.00	250	100	40.49	4.77

DES. RESULTADO OBTIDO POR HARDY CROSS EM 58 ITERACOES

TABELA 4.3 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS

NO	ELEVACAO (M)	DEMANDA (L/S)	PRESSAO MINIMA	PRESSAO
			ADMISSIVEL (M)	DISPONIVEL (M)
1	200.00	311.11	10.00	10.00
2	150.00	-27.78	30.00	52.88
3	160.00	-27.78	30.00	34.10
4	155.00	-33.33	30.00	43.90
5	150.00	-75.00	30.00	36.74
6	165.00	-91.67	30.00	31.10
7	160.00	-55.55	30.00	31.51

Solução pelo Método de Newton-Raphson ( $\Delta Q$ -Equações)

Conforme visto no item anterior, a formulação pelas  $\Delta Q$ -equações da rede da figura 4.1 conduz a somente duas equações (equações 4.1(i) e 4.1(ii)). Para montar o sistema de equações lineares a serem resolvidas pelo método de Newton-Raphson, basta pois derivar estas mesmas equações em relação aos  $\Delta Q_i$  para montagem da matriz das derivadas. Pela equação 2.21, tem-se:

$$(i) \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Q_1} = 1,852 K_3 (Q_{0,3} + \Delta Q_1)^{0.852} + 1,852 (Q_{0,4} + \Delta Q_1 - \Delta Q_2)^{0.852} + 1,852 K_7 (Q_{0,7} - \Delta Q_1)^{0.852} + 1,852 K_2 (Q_{0,2} - \Delta Q_1)^{0.852}$$

$$(ii) \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Q_2} = - 1,852 K_4 (Q_{0,4} + Q_1 - \Delta Q_2)^{0.852} \quad (4.2)$$

$$(iii) \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Q_1} = - 1,852 K_4 (Q_{0,4} + \Delta Q_1 - \Delta Q_2)^{0.852}$$

$$(iv) \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Q_2} = 1,852 K_5 (Q_{0,5} + \Delta Q_2)^{0.852} + 1,852 K_6 (Q_{0,6} + \Delta Q_2)^{0.852} + 1,852 K_8 (Q_{0,8} + \Delta Q_2)^{0.852} + 1,852 K_4 (Q_{0,4} + \Delta Q_1 - \Delta Q_2)^{0.852}$$

Começando a solução com uma boa distribuição de vazões (a mesma suposição das vazões vista na solução por Hardy-Cross) e considerando que inicialmente  $\Delta Q_1 = \Delta Q_2 = 0$ , pode-se montar o sistema de equações lineares numa forma matricial tal como visto para o sistema de equações 2.22. Nesta primeira

iteração o sistema assume .. a seguinte conformação:

$$\begin{vmatrix} 2,081 \times 10^6 & -1,763 \times 10^6 \\ -1,763 \times 10^6 & 1,868 \times 10^6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta Q_1^{(1)} \\ \Delta Q_2^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,097 \times 10^6 \\ -4,379 \times 10^6 \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

A solução iterativa do sistema de equações, é obtida conforme a sequência de operações apresentada em II.3.2. A variável de controle da convergência é novamente os somatórios dos valores absolutos das correções nas vazões nos trechos, tanto como o erro admissível é igual a  $10^{-3}$  l/s. As soluções para os trechos e nós, tal como obtidos pelo programa PORH, são vistos nas tabelas 4.4 e 4.5.

TABELA 4.4 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS

TRECHO	COMPRIMENTO (M)	DIAMETRO (MM)	CHW	VAZAO (L/S)	PERDA DE CARGA (M)
1	1000.00	500	100	311.11	7.12
2	1000.00	250	100	56.24	8.77
3	1000.00	500	100	227.09	3.98
4	1000.00	100	100	6.03	12.16
5	1000.00	500	100	187.73	2.80
6	1000.00	350	100	96.06	4.59
7	1000.00	200	100	28.46	7.37
8	1000.00	250	100	40.50	4.77

02S. RESULTADO OBTIDO POR NEWTON-RAPHSON EM 4 ITERACOES

TABELA 4.5 RESULTADOS FINAIS PARA OS NCS

NO	ELEVACAO (M)	DEMANDA (L/S)	PRESSAO MINIMA	PRESSAO
			ADMISSIVEL (M)	DISPONIVEL (M)
1	200.00	311.11	10.00	10.00
2	150.00	-27.78	30.00	52.88
3	160.00	-27.78	30.00	34.10
4	155.00	-33.33	30.00	43.90
5	150.00	-75.00	30.00	36.74
6	165.00	-91.67	30.00	31.10
7	160.00	-55.55	30.00	31.51

### Solução pelo Método de Newton-Raphson (H-Equações)

Pode-se também formular o problema pelas H-equações, conforme o particular enfoque de Shamir & Howard [1968], considerando para incógnitas o conjunto de variáveis abaixo, as quais satisfazem as condições apresentadas em II.3.2. O nível piezométrico no nó 1 é conhecido e de valor igual a 210 m.

- (i)  $\bar{H} = (H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7)$  (4.4)
- (ii)  $\bar{D} = (D_1)$

O sistema de equações resultante da aplicação da equação de continuidade aos nós, conforme a equação 2.26, é:

$$(i) F_1 = \frac{1}{K_{1,2}^{0,54}} \cdot (210,0 - H_2) \cdot |210,0 - H_2|^{-0,46} + D_1 = 0$$

$$(ii) F_2 = \frac{1}{K_{1,2}^{0,54}} \cdot (210,0 - H_2) \cdot |210,0 - H_2|^{-0,46} + \frac{1}{K_{2,3}^{0,54}} \cdot (H_2 - H_3) \cdot$$

$$\cdot |H_2 - H_3|^{-0,46} + \frac{1}{K_{2,4}^{0,54}} (H_2 - H_4) \cdot |H_2 - H_4|^{-0,46} - 27,78 = 0$$

$$(iii) F_3 = \frac{1}{K_{3,2}^{0,54}} \cdot (H_3 - H_2) \cdot |H_3 - H_2|^{-0,46} + \frac{1}{K_{3,5}^{0,54}} \cdot (H_3 - H_5) \cdot |H_3 - H_5|^{-0,46}$$

$$- 27,78 = 0 (4.5)$$

$$(iv) F_4 = \frac{1}{K_{4,2}^{0,54}} \cdot (H_4 - H_2) \cdot |H_4 - H_2|^{-0,46} + \frac{1}{K_{3,4}^{0,54}} \cdot (H_4 - H_5) \cdot |H_4 - H_5|^{-0,46}$$

$$+ \frac{1}{K_{4,6}^{0,54}} (H_4 - H_6) \cdot |H_4 - H_6|^{-0,46} - 33,33 = 0$$

$$(v) F_5 = \frac{1}{K_{5,3}^{0,54}} \cdot (H_5 - H_3) \cdot |H_5 - H_3|^{-0,46} + \frac{1}{K_{5,4}^{0,54}} (H_5 - H_4) \cdot |H_5 - H_4|^{-0,46} -$$

$$- 75,00 = 0$$

$$(vi) F_6 = \frac{1}{K_{6,4}^{0,54}} \cdot (H_6 - H_4) \cdot |H_6 - H_4|^{-0,46} + \frac{1}{K_{6,7}^{0,54}} \cdot (H_6 - H_7) \cdot |H_6 - H_7|^{-0,46}$$

$$- 91,67 = 0$$

$$(vii) F_7 = \frac{1}{K_{7,5}^{0,54}} \cdot (H_7 - H_5) \cdot |H_7 - H_5|^{-0,46} + \frac{1}{K_{7,6}^{0,54}} (H_7 - H_6) \cdot |H_7 - H_6|^{-0,46}$$

$$- 55,55 = 0$$

A solução do sistema de equações formuladas conforme as incógnitas selecionadas, leva a seguinte configuração matricial do problema:

$$\begin{vmatrix} 1 & \partial F_1 / \partial H_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial F_2 / \partial H_2 & \partial F_2 / \partial H_3 & \partial F_2 / \partial H_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial F_3 / \partial H_2 & \partial F_3 / \partial H_3 & 0 & \partial F_3 / \partial H_5 & 0 & 0 \\ 0 & \partial F_4 / \partial H_2 & 0 & \partial F_4 / \partial H_4 & \partial F_4 / \partial H_5 & \partial F_4 / \partial H_6 & 0 \\ 0 & 0 & \partial F_5 / \partial H_3 & \partial F_5 / \partial H_4 & \partial F_5 / \partial H_5 & 0 & \partial F_5 / \partial H_7 \\ 0 & 0 & 0 & \partial F_6 / \partial H_4 & 0 & \partial F_6 / \partial H_6 & \partial F_6 / \partial H_7 \\ 0 & 0 & 0 & \partial F_6 / \partial H_4 & 0 & \partial F_6 / \partial H_6 & \partial F_6 / \partial H_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \\ \Delta H_4 \\ \Delta H_5 \\ \Delta H_6 \\ \Delta H_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

As derivadas envolvidas na solução do sistema são obtidas de acordo com as equações 2.28, 2.29 e 2.30.

A solução iterativa do sistema 4.6 pode ser alcançada a partir de uma razoável inicialização dos níveis piezométricos desconhecidos. Tal inicialização envolve uma certa subjetividade, sendo um tanto difícil se estabelecer um procedimento que sempre forneça boas inicializações. De um modo geral no entanto, pode-se considerar as elevações dos nós como uma boa informação para a suposição dos níveis piezométricos, de forma que pode ser assumido um critério baseado na premissa de que os nós cujas elevações sejam baixas em relação aos pontos de maiores elevações da rede, disporão de maiores cargas piezométricas do que aqueles com maiores elevações. Baseado nesta premissa o programa PARH iniciaiza o processo internamente considerando o seguinte critério:

- (i) Para os nós cujas as elevações estejam abaixo da média das elevações de todos os nós da rede, os níveis piezométricos são estimados segundo a equação:

$$H_i = E_i + DIF + (DIF \cdot V \cdot p_1) \quad (4.7)$$

onde:

$H_i$  = nível piezométrico estimado para o nó i (m);

$E_i$  = elevação do nó i (m);

DIF = diferença entre as elevações máxima e mínima dos nós da rede (m);

$V$  = número aleatório uniformemente distribuído entre -1 e 1;

$p_1$  = percentagem arbitrada.

(ii) Para os nós cujas as elevações estejam acima da média das elevações de todos os nós da rede, os níveis piezométricos são estimados segundo a equação:

$$H_i = E_i + (DIF \cdot p_2) + (DIF \cdot V \cdot p_1) \quad (4.8)$$

onde as variáveis são as mesmas como definidas na equação (4.8), a exceção da variável  $p_2$  que é uma percentagem acrescentada para servir como fator redutor da variável DIF quando esta é somada a elevação dos nós.

Gerando os números aleatórios com a função RANDOM |Burroughs, 1978| adotando como semente o número 127, arbitrando uma percentagem  $p_1$  igual a 5% e assumindo uma percentagem  $p_2$  igual a 60%, os níveis piezométricos estimados para os nós da rede da figura 4.1 ficam:

$$(i) H_2 = 199,80;$$

$$(ii) H_3 = 210,95;$$

$$(iii) H_4 = 205,30;$$

$$(iv) H_5 = 198,69;$$

$$(v) H_6 = 195,13;$$

$$(vi) H_7 = 207,62.$$

A solução iterativa do sistema 4.6 pode então ser obtida conforme a sequência de operações vista em II.3.2. O critério de convergência adotado tem como variável de controle a descontinuidade máxima admissível nos nós, sendo adotado como de equilíbrio máximo o valor de  $10^{-3}$  l/s. Os resultados finais para os nós e trechos alcançados com o programa PARH, são vistos nas tabelas 4.6 e 4.7.

TABELA 4.6 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS

NO	DEMANDA (L/S)	ELEVACAO (m)	PRESSAO MINIMA ADMISSIVEL (k)	NIVEL PIEZOMETRICO (m)	PRESSAO DISPONIVEL (k)
1	311.11 *	230.00	16.00	210.00	10.00
2	-27.76	150.00	30.00	202.68 *	52.88
3	-27.78	160.00	30.00	194.12 *	34.12
4	-33.33	155.00	30.00	193.91 *	43.91
5	-75.00	150.00	30.00	185.73 *	36.73
6	-91.67	165.00	30.00	195.11 *	31.11
7	-55.55	160.00	30.00	191.53 *	31.53

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCOGNITAS DO PROBLEMA

TABELA 4.7 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS

TRECHO	NO MONTANTE	NO JUZANTE	COMPRIMENTO (m)	VAZAO (L/S)	DIAMETRO (mm)	CHW	RESISTENCIA F (L.D.CHW)	VELOCIDADE (m/s)	PERDA DE CARGA (m)
1	1	2	1000.00	311.11	300	100	.17214E-03	1.58	7.12
2	2	3	1000.00	56.24	250	100	.50338E-02	1.15	8.77
3	2	4	1000.00	227.09	300	100	.17214E-03	1.16	3.95
4	4	5	1000.00	6.03	100	100	.43638E+00	0.77	12.16
5	4	6	1000.00	187.73	300	100	.17214E-03	0.96	2.80
6	6	7	1000.00	96.08	350	100	.97790E-03	1.00	4.59
7	3	5	1000.00	28.46	250	100	.14923E+01	0.91	7.37
6	7	5	1000.00	40.51	250	100	.50338E-02	0.93	4.78

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCOGNITAS DO PROBLEMA

Após a solução ter sido alcançada, tal como apresentada nas tabelas 4.6 e 4.7, pode-se desejar examinar os efeitos provocados no vetor de solução (solução para o vetor de incógnitas 4.4) devidos a mudanças nas demais variáveis da rede assumidas conhecidas. Pode-se detalhar este problema de sensibilidade da solução considerando a demanda no nó 7 ( $D_7$ ) como uma variável sujeita a alteração. Este problema, conforme a equação 2.39, toma a seguinte configuração matricial:

1	$\partial F_1 / \partial H_2$	0	0	0	0	0	$\partial D_1 / \partial D_7$	$\partial F_1 / \partial D_7$
0	$\partial F_2 / \partial H_1$	$\partial F_2 / \partial H_3$	$\partial F_2 / \partial H_4$	0	0	0	$\partial H_2 / \partial D_7$	$\partial F_2 / \partial D_7$
0	$\partial F_3 / \partial H_2$	$\partial F_3 / \partial H_3$	0	$\partial F_3 / \partial H_5$	0	0	$\partial H_3 / \partial D_7$	$\partial F_3 / \partial D_7$
0	$\partial F_4 / \partial H_2$	0	$\partial F_4 / \partial H_4$	$\partial F_4 / \partial H_5$	$\partial F_4 / \partial H_6$	0	$\partial H_4 / \partial D_7$	$\partial F_4 / \partial D_7$
0	0	$\partial F_5 / \partial H_3$	$\partial F_5 / \partial H_4$	$\partial F_5 / \partial H_5$	0	$\partial F_5 / \partial H_7$	$\partial H_5 / \partial D_7$	$\partial F_5 / \partial D_7$
0	0	0	$\partial F_6 / \partial H_4$	0	$\partial F_6 / \partial H_5$	$\partial F_6 / \partial H_7$	$\partial H_6 / \partial D_7$	$\partial F_6 / \partial D_7$
0	0	0	0	$\partial F_7 / \partial H_5$	$\partial F_7 / \partial H_6$	$\partial F_7 / \partial H_7$	$\partial H_7 / \partial D_7$	$\partial F_7 / \partial D_7$

(4.7)

A solução do sistema 4.7 para as derivadas em relação a  $D_7$  indicará então, as mudanças em todas as variáveis colocadas como incógnitas, devido a um incremento unitário em  $D_7$ . Um valor negativo significará um decréscimo nas variáveis. Os resultados desta análise são vistos na tabela 4.8. Nela ve-se que o incremento unitário na demanda no nó 7 ( $D_7$ ) acarretou um decréscimo unitário na demanda no nó 1 ( $D_1$ ). É importante neste ponto lembrar que as vazões de saídas nos nós são convençãoadas serem negativas sendo as vazões de entrada consideradas positivas. Portanto o acréscimo unitário em  $D_7$  significou na verdade um decréscimo unitário, acarretando desta forma um decréscimo unitário em  $D_1$  que é a demanda de alimentação da rede. Isto explica por outro lado os acréscimos nos níveis piezométricos em todos os nós onde os mesmos sejam variáveis, isto causado pela menor perda de carga na rede devida ao decréscimo na vazão de alimentação da rede.

TABELA 4.8 RESULTADOS DA ANALISE DE SENSIBILIDADE EM RELACAO A D<sub>7</sub>

0	1	H 2	H 3	H 4	H 5	H 6	H 7
-1.000	0.042	0.079	0.071	0.139	0.094	0.170	

H - NIVEL PIEZOMETRICO D - DEMANDA R - RESISTENCIA

A sensibilidade para a variável  $D_7$ , como desenvolvida, considera as alterações somente nas variáveis assumidas como incógnitas. No entanto, desde que se pode rearranjar o vetor de incógnitas, os efeitos provocados considerando outras conformações podem ser também obtidas, requerendo para isto no entanto que se monte uma nova matriz das derivadas para ser utilizada na equação 2.39.

Desta forma, portanto, a sensibilidade para diversas variáveis considerando diferentes conformações do problema podem ser obtidas, fornecendo um meio adicional para um estudo detalhado do desempenho de uma rede hidráulica sob variadas condições de operação, bem como, da influência de variações unitárias numa dada variável sobre as outras, indicando assim as variáveis mais sensíveis a alterações no carregamento da rede.

#### Solução Pelo Método da Análise Linear (Q-Equações)

Pela formulação com as Q-equações se terá um sistema de equações de número igual ao de trechos. A rede da figura 4.1 tem sete nós de modo que seis equações de continuidade independentes podem ser escritas. Montando as equações para os seis últimos nós, temos:

- (i)  $F_1 = Q_1 - Q_2 - Q_3 - 27,78 = 0$
- (ii)  $F_2 = Q_2 - Q_7 - 27,78 = 0$
- (iii)  $F_3 = Q_3 - Q_4 - Q_5 - 33,33 = 0 \quad (4.8)$
- (iv)  $F_4 = Q_7 + Q_4 + Q_8 - 75,00 = 0$
- (v)  $F_5 = Q_5 - Q_6 - 91,67 = 0$
- (vi)  $F_6 = Q_5 - Q_3 - 55,55 = 0$

A convenção de sinais para as vazões nos nós arbitra que as vazões de entrada são negativas e as de saída positivas.

A linearização das equações de balanceamento das cargas nos anéis, conforme a equação 2.41, completam o sistema linear. Inicializando a solução iterativa do problema fazendo todos os  $Q_i$  igual a um, ter-se-á as equações de anéis linearizadas, concluindo assim o sistema de equações 4.8. As equações são:

- (vii)  $F_7 = K_3 Q_3 + K_4 Q_4 - K_7 Q_7 - K_2 Q_2 = 0$
- (viii)  $F_8 = K_5 Q_5 + K_6 Q_6 + K_8 Q_8 - K_4 Q_4 = 0$

Colocando o sistema na forma matricial tem-se:

1	-1	-1	0	0	0	0	0	$Q_1$	27,78
0	1	0	0	0	0	-1	0	$Q_2$	27,78
0	0	1	-1	-1	0	0	0	$Q_3$	33,33
0	0	0	1	0	0	1	1	$Q_4$	75,00
0	0	0	0	1	-1	0	0	$Q_5$	91,67
0	0	0	0	1	0	0	-1	$Q_6$	55,55
0	$-K_2$	$K_3$	$K_4$	0	0	$-K_7$	0	$Q_7$	0
0	0	0	$-K_4$	$K_5$	$K_6$	0	$K_8$	$Q_8$	0

(4.9)

O critério de convergência adotado emprega como variável de controle o somatório dos valores absolutos das diferenças entre as vazões calculadas, em duas sucessivas iterações. O erro admissível assumido é igual a  $10^{-3}$  l/s.

A solução iterativa conforme a sequência de passos vista em II.3.3, alcançada com o programa PORG conduziu aos resultados apresentados nas tabelas 4.9 e 4.10. A tabela 4.11 que se segue mostra o resumo computacional das soluções obtidas para a rede da figura 4.1. A discussão dos resultados apresentados nesta tabela é vista, conjuntamente com as das tabelas similares dos exemplos subsequentes, no item IV.1.4.

TABELA 4.9 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS

TRECHO	COMPRIMENTO (M)	DIAMETRO (MM)	CH <sub>H</sub>	VAZAO (L/S)	PERDA DE CARGA (M)
1	1000.00	530	100	311.11	7.12
2	1000.00	250	100	56.25	8.77
3	1000.00	500	100	227.08	3.98
4	1000.00	100	100	6.03	12.16
5	1000.00	500	100	187.72	2.80
6	1000.00	350	100	96.05	4.59
7	1000.00	200	100	28.47	7.37
8	1000.00	250	100	40.50	4.78

OBS. RESULTADO OBTIDO POR ANALISE LINEAR EM 8 ITERACOES

TABELA 4.10 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS

NO	ELEVACAO (M)	DEMANDA (L/S)	PRESSAO MINIMA	PRESSAO
			ADMISSIVEL (M)	DISPONIVEL (M)
1	200.00	311.11	10.00	10.00
2	150.00	-27.73	30.00	52.88
3	160.00	-27.78	30.00	34.10
4	155.00	-33.33	30.00	43.90
5	150.00	-75.00	30.00	36.74
6	165.00	-91.67	30.00	31.10
7	160.00	-55.55	30.00	31.51

Tabela 4.11 Resumo da Experiência Computacional com a Rede da Figura 4.1 (Exemplo nº 1)

MÉTODOS ITERATIVOS DE ANÁLISE HIDRÁULICA	HARDY CROSS	NEWTON-RAPHSON	ANÁLISE LINEAR	
PARÂMETROS DE COMPUTAÇÃO	$\Delta Q$ -EQUAÇÕES <sup>(1)</sup>	$\Delta Q$ -EQUAÇÕES <sup>(1)</sup>	H-EQUAÇÕES <sup>(2)</sup>	$Q$ -EQUAÇÕES <sup>(1)</sup>
Número de iterações	58	4	7	8
Tempo de processamento em segundos consumidos somente nas iterações	1,69	0,09	1,05	0,56
Tempo total de processamento em segundos	2,98	1,40	2,98	2,17

(1) Solução obtida com o programa PQRH

(2) Solução obtida com o programa PARH

#### IV.1.2 - Exemplo nº 2

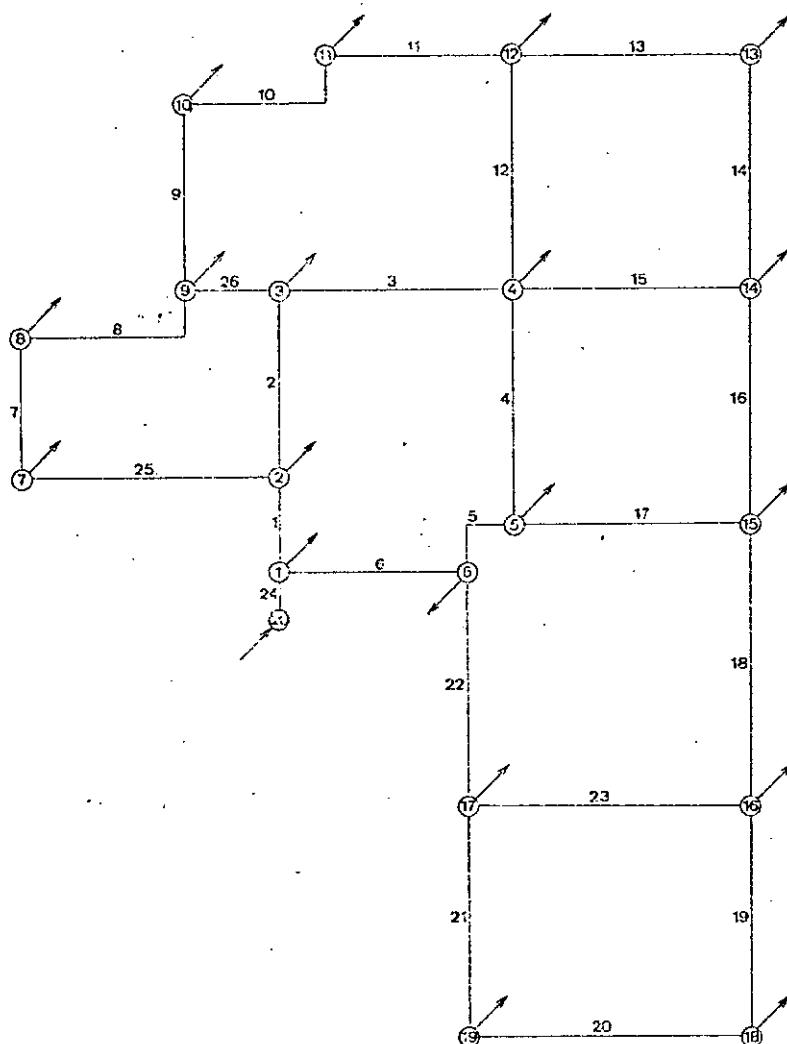
A rede deste exemplo é a adotada por Martins |1973| em seu trabalho sobre redes de distribuição. Neste exemplo é apresentada somente a saída referente a solução alcançada por Newton-Raphson (H-equações) pelo programa PARH. A apresentação das demais soluções é dispensável devido a unicidade da solução ser garantida em razão do erro admissível para todos os métodos iterativos, tal como visto no exemplo nº 1, ser bastante rigoroso.

O programa PARH possui uma saída que opcionalmente fornece uma descrição completa do problema proposto. Deste modo os dados relativos ao esquema representativo da rede deste exemplo, que aparece na figura 4.2, são apresentados nas tabelas 4.12, 4.13 e 4.14. Na tabela 4.12 aparece os dados básicos referentes ao problema proposto. O fator de consumo ali referenciado é um fator multiplicativo das demandas nos nós, que é útil para a verificação da estabilidade hidráulica da rede sob diferentes carregamentos. A tabela 4.13 apresenta os dados referentes aos nós. A iniciação para os níveis piezométricos desconhecidos, obtida sob as mesmas condições consideradas no exemplo nº 1, também aparece na tabela 4.13. O nó 20 é o ponto de alimentação da rede sendo o seu nível piezométrico conhecido e de valor igual a 744 m. A tabela 4.14 mostra os dados relativos aos trechos. A tabela 4.15 que se segue, é uma tabela adicional onde é apresentado a matriz de conexão da rede, ou seja, é a matriz que armazena o "lay-out" da rede. A configuração interna da matriz de conexão no programa PARH é tal como apresentada na tabela 4.15.

A solução da rede é apresentada nas tabelas 4.16, 4.17 e 4.18. Na tabela 4.16 aparecem os resultados parciais do processo iterativo onde pode ser visto o progresso da solução. As oscilações dos valores das incógnitas entre dois pontos são também documentados. A regra heurística adotada nos casos de oscilação consistiu unicamente na divisão da correção dos valores das incógnitas por dois. As tabelas 4.17 e 4.18 apresentam a solução final obtida para os nós e trechos respectivamente. Nelas estão assinaladas as variáveis que foram consideradas

incógnitas do problema. A tabela 4.19 mostra o resumo computacional das soluções da rede da figura 4.2, obtidas com os métodos considerados, tal como no exemplo anterior. A discussão da tabela 4.19 é vista no item IV.1.4.

A inicialização das vazões para as soluções por Hardy Cross e Newton-Raphson, formulados pelas  $\Delta Q$ -equações, foi a mesma considerada por Martins [1973].



## EXEMPLO N.º 2 - REDE DO TRABALHO DE MARTINS (1973)

TABELA 4.12 DADOS BASICOS DA REDE

	VALOR
NUMERO DE NOS	20
NUMERO DE TRECHOS	26
FATOR DE CONSUMO	1.00
NUMERO MAXIMO DE ITERACOES	30
MAXIMA DESCONTINUIDADE ADMISSIVEL EM CADA NO, L/S	0.001

TABELA 4.13 DADOS DOS NOS

NO	DEMANDA (L/S)	ELEVACAO (M)	PRESSAO MINIMA	NIVEL PIEZOMETRICO
			(M)	(M)
1	-1.50	720.00	20.00	743.25
2	-7.20	715.00	20.00	739.14
3	-9.30	695.00	20.00	734.24
4	-15.90	699.00	20.00	736.98
5	-10.00	709.00	20.00	732.50
6	-6.50	713.00	20.00	734.54
7	-6.00	718.00	20.00	740.58
8	-4.50	710.00	20.00	733.31
9	-5.40	691.00	20.00	731.88
10	-6.50	693.00	20.00	730.59
11	-7.20	695.00	20.00	732.21
12	-10.60	699.00	20.00	739.67
13	-10.30	715.00	20.00	739.88
14	-11.70	702.00	20.00	742.58
15	-13.60	692.00	20.00	732.32
16	-12.20	709.00	20.00	732.03
17	-11.20	720.00	20.00	744.56
18	-9.70	705.00	20.00	742.52
19	-9.70	712.00	20.00	735.85
20	0.00	730.00	14.00	744.00

OBS. DEMANDAS POSITIVAS INDICAM ENTRADA NO NO  
DEMANDAS NEGATIVAS INDICAM SAIDA DO NO

TABELA 4.14 DADOS DOS TRECHOS

TRECHO	NO MONTANTE	NO JUZANTE	COMPRIMENTO (M)	DIAMETRO (MM)	COEF. DE H. WILLIAMS
1	1	2	200.00	300	100
2	2	3	400.00	250	100
3	3	4	500.00	200	100
4	4	5	500.00	200	100
5	5	6	200.00	300	100
6	1	6	400.00	350	100
7	7	8	300.00	100	100
8	8	9	450.00	100	100
9	9	10	400.00	150	100
10	10	11	400.00	100	100
11	11	12	400.00	100	100
12	4	12	500.00	200	100
13	12	13	500.00	150	100
14	13	14	500.00	150	100
15	4	14	500.00	150	100
16	14	15	500.00	150	100
17	5	15	500.00	250	100
18	15	16	600.00	150	100
19	16	18	500.00	100	100
20	18	19	600.00	100	100
21	17	19	500.00	200	100
22	6	17	500.00	250	100
23	15	17	600.00	150	100
24	1	20	100.00	400	100
25	2	7	550.00	150	100
26	3	9	200.00	200	100

TABELA 4.15 MATRIZ DE CONEXAO (MAXIMO DE SEIS CONEXOES EM CADA NO)

NUMERO DE

NO	TRECHOS CONECTADOS	NO	TRECHO										
1	3	2	1	6	6	20	24	0	0	0	0	0	0
2	3	1	1	3	2	7	25	0	0	0	0	0	0
3	3	2	2	4	3	9	26	0	0	0	0	0	0
4	4	3	3	5	4	12	12	14	15	0	0	0	0
5	3	4	4	6	5	15	17	0	0	0	0	0	0
6	3	5	5	1	6	17	22	0	0	0	0	0	0
7	2	8	7	2	25	0	0	0	0	0	0	0	0
8	2	7	7	9	8	0	0	0	0	0	0	0	0
9	3	8	8	10	9	3	26	0	0	0	0	0	0
10	2	9	9	11	10	0	0	0	0	0	0	0	0
11	2	10	10	12	11	0	0	0	0	0	0	0	0
12	3	11	11	4	12	13	13	0	0	0	0	0	0
13	2	12	13	14	14	0	0	0	0	0	0	0	0
14	3	13	14	4	15	15	16	0	0	0	0	0	0
15	3	14	16	5	17	16	18	0	0	0	0	0	0
16	3	15	18	18	19	17	23	0	0	0	0	0	0
17	3	19	21	6	22	16	23	0	0	0	0	0	0
18	2	16	19	19	20	0	0	0	0	0	0	0	0

TABELA 4.15 MATRIZ DE CONEXAO (MAXIMO DE SEIS CONEXOES EM CADA NO) (CONTINUACAO)

NUMERO DE												
NO	TRECHOS CONECTADOS	NO TRECHO										
19	2	18	20	17	21	0	0	0	0	0	0	0
20	1	1	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABELA 4.16 RESULTADOS PARCIAIS

ITERACAO	DESCONTINUIDADE	NUMERO DO NO	NUMERO DE OSCILACOES
	MAXIMA		
1	.20532E+03	6	0
2	.19651E+03	6	1
3	.12504E+03	17	0
4	.37877E+02	17	1
5	.67771E+02	17	2
6	.18493E+02	17	2
7	.23316E+01	6	2
8	.44749E-01	6	2
9	.52107E-04	13	2

TABELA 4.17 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS

NO	DEMANDA (L/S)	ELEVACAO (M)	PRESSAO MINIMA ADMISSIVEL (M)	NIVEL PIEZOMETRICO (M)	PRESSAO DISPONIVEL (M)
1	-1.50	720.00	20.00	743.32 *	23.32
2	-7.20	715.00	20.00	742.43 *	27.43
3	-9.30	695.00	20.00	739.96 *	44.96
4	-15.90	699.00	20.00	738.05 *	39.05
5	-10.00	709.00	20.00	740.28 *	31.28
6	-5.50	713.00	20.00	741.17 *	28.17
7	-6.00	718.00	20.00	740.34 *	22.34
8	-4.50	710.00	20.00	739.12 *	29.12
9	-5.40	691.00	20.00	739.38 *	48.38
10	-6.50	693.00	20.00	737.46 *	44.46
11	-7.20	695.00	20.00	735.05 *	40.05
12	-10.60	699.00	20.00	736.44 *	37.44
13	-10.30	715.00	20.00	735.95 *	20.95
14	-11.70	702.00	20.00	736.73 *	34.73
15	-13.60	692.00	20.00	738.81 *	46.81
16	-12.20	709.00	20.00	737.17 *	28.17
17	-11.20	720.00	20.00	739.36 *	19.36
18	-9.70	705.00	20.00	733.24 *	28.24

DOS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCOGNITAS DO PROBLEMA

TABELA 4.17 RESULTADOS FINAIS PARA OS NDS (CONTINUACAO)

NO	DEMANDA (L/S)	ELEVACAO (M)	PRESSAO MINIMA ADMISSIVEL (M)	NIVEL PIEZOMETRICO (M)	PRESSAO DISPONIVEL (M)
19	-9.70	712.00	20.00	738.28 *	26.28
20	169.00 *	730.00	14.00	744.00	14.00

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCOGNITAS DO PROBLEMA

TABELA 4.18 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS

TRECHO	NO. MONTANTE	NO JUZANTE	COMPRIMENTO (M)	VAZAO (L/S)	DIAMETRO (MM)	CHW	RESISTENCIA F (L,D,CHW)	VELOCIDADE (M/S)	PERDA DE CARGA (M)
1	1	2	200.00	63.03	300	100	.41430E-03	0.89	0.89
2	2	3	400.00	46.50	250	100	.20135E-02	0.95	2.47
3	3	4	500.00	20.00	200	100	.74613E-02	0.64	1.92
4	5	4	500.00	21.75	200	100	.74613E-02	0.69	2.24
5	6	5	200.00	62.99	300	100	.41430E-03	0.89	0.89
6	1	6	400.00	104.47	350	100	.39112E-03	1.09	2.15
7	7	8	300.00	3.34	100	100	.13091E+00	0.42	1.22
8	9	8	450.00	1.16	100	100	.19637E+00	0.15	0.25
9	9	10	400.00	10.63	150	100	.24230E-01	0.60	1.93
10	10	11	400.00	4.13	100	100	.17455E+00	0.53	2.41
11	12	11	400.00	3.07	100	100	.17455E+00	0.39	1.40
12	4	12	500.00	18.19	200	100	.74613E-02	0.58	1.61
13	12	13	500.00	4.51	150	100	.30288E-01	0.26	0.49
14	14	13	500.00	5.79	150	100	.30288E-01	0.33	0.73
15	4	14	500.00	7.67	150	100	.30288E-01	0.43	1.32
16	15	14	500.00	9.81	150	100	.30288E-01	0.56	2.08
17	5	15	500.00	31.24	250	100	.25169E-02	0.64	1.43
18	15	16	600.00	7.82	150	100	.36345E-01	0.44	1.64

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCOGNITAS DO PROBLEMA

TABELA 4.18 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS (CONTINUACAO)

NO TRECHO	NO MONTANTE	NO JUZANTE	COMPRIMENTO (M)	VAZAO (L/S)	DIAMETRO (MM)	CHW	RESISTENCIA F (L,D,CHW)	VELOCIDADE (CM/S)	PERDA DE CARGA (M)
19	16	18	500.00	4.76	100	100	.21819E+00	0.61	3.93
20	19	18	600.00	4.94	100	100	.26183E+00	0.63	5.04
21	17	19	500.00	14.64	200	100	.74613E-02	0.47	1.07
22	6	17	500.00	34.98	250	100	.25169E-02	0.71	1.82
23	17	16	600.00	9.14	150	100	.36345E-01	0.52	2.19
24	20	1	100.00	169.00	400	100	.51030E-04	1.34	0.68
25	2	7	550.00	9.34	150	100	.33316E-01	0.53	2.09
26	3	9	200.00	17.19	200	100	.29845E-02	0.55	0.58

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCOGNITAS DO PROBLEMA

Tabela 4.19 Resumo da Experiência Computacional com a Rede da Figura 4.2 (Exemplo nº 2)

MÉTODOS ITERATIVOS DE ANÁLISE HIDRÁULICA →	HARDY CROSS	NEWTON-RAPHSON		ANALISE LINEAR
	(1) ΔQ-EQUAÇÕES	(1) ΔQ-EQUAÇÕES	(2) H-EQUAÇÕES	(1) Q-EQUAÇÕES
Número de iterações	12	3	9	7
Tempo de processamento em segundos consumidos somente nas iterações	1,13	0,35	7,91	10,38
Tempo total de processamento em segundos	3,03	2,32	11,13	12,37

(1) Solução obtida com o programa PORH

(2) Solução obtida com o programa PARH

#### IV.1.3 - Exemplo nº 3

A rede considerada neste exemplo consiste de parte da expansão da rede de distribuição da cidade de Apucarana, tal como projetado pela firma Serete [1973]. O esquema representativo da rede é apresentado na figura 4.3. O nó 1 é o ponto de alimentação da rede com nível piezométrico conhecido igual a 888,0 mA. Inicialização para os níveis piezométricos desconhecidos é obtida seguindo as mesmas considerações assumidas para o exemplo nº 1. Procedendo de modo idêntico ao exemplo anterior é apresentado somente a solução alcançada com o programa PARH.

As tabelas 4.20, 4.21 e 4.22 mostram os dados relativos a rede da figura 4.3 na mesma ordem vista para o exemplo anterior. A tabela 4.23 mostra a matriz de conexão para a rede considerada. A solução final é vista nas tabelas 4.24, 4.25 e 4.26. Os resultados parciais são vistos na tabela 4.24, estando nas tabelas 4.25 e 4.26 os resultados finais para os nós e trechos respectivamente. A tabela 4.27 que se segue mostra o resumo da experiência computacional com a rede da figura 4.30. A discussão desta tabela é vista no item IV.1.4. As soluções por Hardy-Cross e Newton-Raphson, formulados pelas  $\Delta Q$ -equações, foram inicializadas considerando a mesma distribuição inicial da vazão assumida pela consultoria de engenharia [Serete, 1973].

## EXEMPLO N°. 3 - REDE DA CIDADE DE APUCARANA (ZONA DE PRESSAO N°. 1)

TABELA 4.20 DADOS BASICOS DA REDE

	VALOR
NUMERO DE NOS	25
NUMERO DE TRECHOS	33
FATOR DE CONSUMO	1.00
NUMERO MAXIMO DE ITERACOES	30
MAXIMA DESCONTINUIDADE ADMISSIVEL EM CADA NO, L/S	0.031

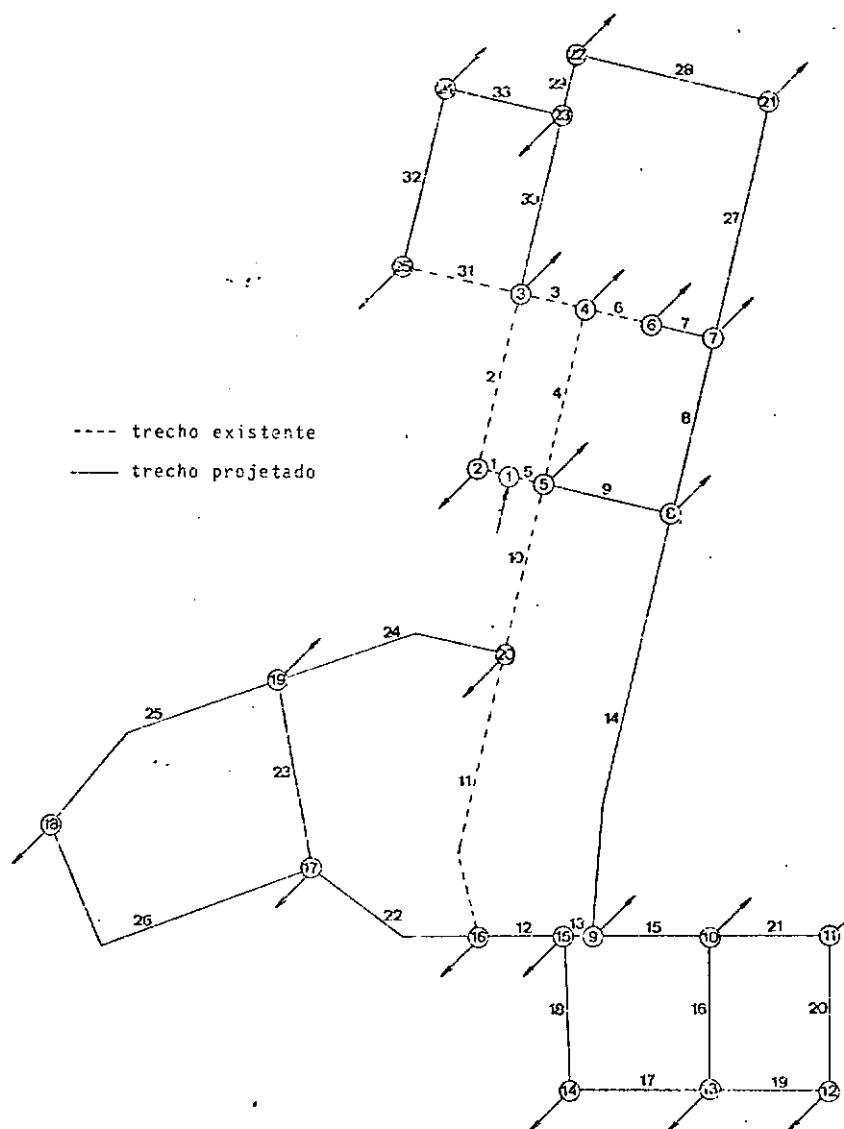


Figura 4.3 Esquema representativo da parte da expansão da rede de distribuição da cidade de Apucarana (exemplo n° 3).

TABELA 4.21 DADOS DOS NOS

NO	DEMANDA (L/S)	ELEVACAO (M)	PRESSAO MINIMA	NIVEL PIEZOMETRICO (M)
			ADMISSIVEL (M)	
1	0.00	864.50	23.50	888.00
2	-3.00	860.00	15.00	875.80
3	-8.00	859.00	15.00	875.40
4	0.00	862.90	15.00	878.96
5	0.00	864.10	15.00	879.30
6	0.00	862.20	15.00	878.17
7	-15.00	860.30	15.00	874.94
8	-7.00	856.00	15.00	881.95
9	-4.00	860.50	15.00	876.34
10	-5.00	859.00	15.00	876.18
11	-3.00	852.00	15.00	877.54
12	-3.00	848.00	15.00	873.29
13	-6.00	849.00	15.00	876.64
14	-3.00	838.00	15.00	865.53
15	0.00	861.00	15.00	877.97
16	-6.00	860.80	15.00	877.59
17	-6.00	848.50	15.00	874.75
18	-10.00	855.80	15.00	883.09
19	-8.00	861.50	15.00	876.39
20	-5.00	859.50	15.00	875.71
21	-14.00	852.00	15.00	878.69
22	0.00	852.00	15.00	878.36
23	-9.00	855.00	15.00	881.02
24	-14.00	851.00	15.00	878.03
25	-11.00	854.60	15.00	881.80

OBS. DEMANDAS POSITIVAS INDICAM ENTRADA NO NO  
DEMANDAS NEGATIVAS INDICAM SAIDA DO NO

TABELA 4.22 DADOS DOS TRECHOS

TRECHO	NO MONTANTE	NO JUZANTE	COMPRIMENTO (CM)	DIAMETRO (MM)	COEF. DE H. WILLIAMS
1	1	2	70.00	250	90
2	2	3	360.00	250	90
3	3	4	130.00	200	90
4	4	5	360.00	200	90
5	1	5	65.00	350	90
6	4	6	125.00	150	90
7	6	7	120.00	160	140
8	7	8	364.00	110	140
9	5	8	240.00	140	140
10	5	20	263.00	350	90
11	15	20	454.00	350	90
12	15	15	93.00	160	140
13	9	15	122.00	160	140
14	8	9	509.00	110	140
15	9	10	216.00	140	140
16	10	13	348.00	110	140
17	13	14	338.00	85	140
18	14	15	351.00	110	140
19	12	13	235.00	110	140
20	11	12	348.00	85	140
21	10	11	233.00	85	140
22	15	17	358.00	110	140
23	17	19	282.00	110	140
24	19	20	402.00	140	140
25	18	19	543.00	110	140
26	17	18	752.00	110	140
27	7	21	468.00	110	140
28	21	22	374.00	160	140
29	22	23	116.00	250	90
30	3	23	358.00	250	90
31	3	25	246.00	125	90
32	24	25	354.00	110	140
33	23	24	248.00	125	90

TABELA 4.23 MATRIZ DE CONEXAO (MAXIMO DE SEIS CONEXOES EM CADA NO)

NUMERO DE

NO	TRECHOS CONECTADOS	NO	TRECHO										
1	2	2	1	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	1	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	4	2	2	4	3	23	30	25	31	0	0	0	0
4	3	3	3	5	4	6	6	0	0	0	0	0	0
5	4	4	4	1	5	8	9	20	10	0	0	0	0
6	2	4	6	7	7	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	6	7	8	8	21	27	0	0	0	0	0	0
8	3	7	8	5	9	9	14	0	0	0	0	0	0
9	3	15	13	8	14	10	15	0	0	0	0	0	0
10	3	9	15	13	16	11	21	0	0	0	0	0	0
11	2	12	20	10	21	0	0	0	0	0	0	0	0
12	2	13	19	11	20	0	0	0	0	0	0	0	0
13	3	10	16	14	17	12	19	0	0	0	0	0	0
14	2	13	17	15	18	0	0	0	0	0	0	0	0
15	3	16	12	9	13	14	18	0	0	0	0	0	0
16	3	20	11	15	12	17	22	0	0	0	0	0	0
17	3	16	22	19	23	18	26	0	0	0	0	0	0
18	2	19	25	17	26	0	0	0	0	0	0	0	0

TABELA 4.23 MATRIZ DE CONEXAO (MAXIMO DE SEIS CONEXOES EM CADA NO) (CONTINUACAO)

NUMERO DE

NO	TRECHOS CONECTADOS	NO TRECHO								
19	3	17	23	20	24	18	25	0	0	0
20	3	5	10	16	11	19	24	0	0	0
21	2	7	27	22	28	0	0	0	0	0
22	2	21	28	23	29	0	0	0	0	0
23	3	22	29	3	30	24	33	0	0	0
24	2	25	32	23	33	0	0	0	0	0
25	2	3	31	24	32	0	0	0	0	0

TABELA 4.24 RESULTADOS PARCIAIS

ITERACAO	DESCONTINUIDADE MAXIMA	NUMERO DO NO	NUMERO DE OSCILACOES
1	.78858E+03	1	0
2	.69583E+03	1	1
3	.50527E+03	1	0
4	.55929E+03	1	1
5	.37629E+03	1	1
6	.43273E+03	1	1
7	.25448E+03	1	1
8	.30289E+03	1	1
9	.12387E+03	1	1
10	.53030E+02	1	1
11	.12932E+02	22	1
12	.98234E+01	23	1
13	.58310E+01	23	1
14	.15080E+01	23	1
15	.89618E-01	23	1
16	.31074E-03	23	1

TABELA 4.25 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS

NO	DEMANDA (L/S)	ELEVACAO (M)	PRESSAO MINIMA ADMISSIVEL (M)	NIVEL PIEZOMETRICO (M)	PRESSAO DISPONIVEL (M)
1	140.00 *	864.50	23.50	888.00	23.50
2	-3.00	860.00	15.00	887.49 *	27.49
3	-8.00	859.00	15.00	885.20 *	26.20
4	0.00	862.90	15.00	885.37 *	22.47
5	0.00	864.10	15.00	887.65 *	23.55
6	0.00	862.20	15.00	884.25 *	22.05
7	-15.00	860.30	15.00	883.77 *	23.47
8	-7.00	856.00	15.00	885.32 *	29.32
9	-4.00	860.50	15.00	885.01 *	24.51
10	-5.00	859.00	15.00	882.76 *	23.76
11	-3.00	852.00	15.00	880.60 *	28.60
12	-3.00	848.00	15.00	880.53 *	32.53
13	-6.00	849.00	15.00	880.84 *	31.84
14	-3.00	838.00	15.00	883.39 *	45.39
15	0.00	861.00	15.00	885.70 *	24.70
16	-6.00	860.80	15.00	886.65 *	25.85
17	-6.00	848.50	15.00	881.99 *	33.49
18	-10.00	855.80	15.00	879.16 *	23.36

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCOGNITAS DO PROBLEMA

TABELA 4.25 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS (CONTINUACAO)

NO	DEMANDA (L/S)	ELEVACAO (M)	PRESSAO MINIMA ADMISSIVEL (M)	NIVEL PIEZOMETRICO (M)	PRESSAO DISPONIVEL (M)
19	-8.00	861.50	15.00	882.16 *	20.66
20	-5.00	859.50	15.00	887.09 *	27.59
21	-14.00	852.00	15.00	882.83 *	30.83
22	0.00	852.00	15.00	883.83 *	31.83
23	-9.00	855.00	15.00	883.89 *	28.89
24	-14.00	851.00	15.00	879.60 *	28.60
25	-11.00	854.60	15.00	879.96 *	25.36

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCOGNITAS DO PROBLEMA

TABELA 4.26 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS

NO TRECHO	NO MONTANTE	NO JUZANTE	COMPRIMENTO (M)	VAZADO (L/S)	DIAMETRO (MM)	CHW	RESISTENCIA F (L,D,CHW)	VELOCIDADE (M/S)	PERDA DE CARGA	
1	1	2	70.00	45.62	250	90	.42829E-03	0.93	0.51	
2	2	3	360.00	42.62	250	90	.22026E-02	0.87	2.30	
3	4	3	130.00	10.19	200	90	.23579E-02	0.32	0.17	
4	5	4	360.00	23.60	200	90	.65297E-02	0.75	2.28	
5	1	5	65.00	94.38	350	90	.77251E-04	0.98	0.35	
6	4	6	125.00	13.41	150	90	.92034E-02	0.76	1.13	
7	6	7	120.00	13.41	160	140	.38981E-02	0.76	0.48	
8	8	7	364.00	4.78	110	140	.85179E-01	0.61	1.55	
9	5	8	240.00	13.46	140	140	.18945E-01	1.10	2.33	
10	5	20	263.00	57.33	350	90	.31257E-03	0.60	0.56	
11	20	16	454.00	37.09	350	90	.53957E-03	0.39	0.43	
12	16	15	93.00	22.33	160	140	.30210E-02	1.26	0.95	
13	15	9	122.00	16.27	160	140	.39630E-02	0.92	0.69	
14	8	9	509.00	1.67	110	140	.11911E+00	0.21	0.31	
15	9	10	216.00	13.94	140	140	.17050E-01	1.14	2.24	
16	10	13	348.00	5.51	110	140	.81435E-01	0.70	1.92	
17	14	13	338.00	3.06	85	140	.32107E+00	0.69	2.55	
18	15	14	351.00	6.06	110	140	.82137E-01	0.77	2.31	

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCOGNITAS DO PROBLEMA

TABELA 4.26 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS (CONTINUACAO)

NO TRECHO	NO MONTANTE	NO JUZANTE	COMPRIMENTO (M)	VAZAO (L/S)	DIAMETRO (MM)	CHW	RESISTENCIA F (L,D,CHW)	VELOCIDADE (M/S)	PERDA DE CARGA (M)
19	13	12	235.00	2.57	110	140	.54992E-01	0.33	0.32
20	11	12	348.00	0.43	85	140	.33357E+00	0.10	0.07
21	10	11	233.00	3.43	85	140	.22133E+00	0.78	2.17
22	16	17	358.00	8.76	110	140	.83775E-01	1.12	4.67
23	19	17	282.00	1.72	110	140	.65990E-01	0.22	0.18
24	20	19	402.00	15.24	140	140	.31733E-01	1.24	4.92
25	19	18	543.00	5.52	110	140	.12707E+00	0.70	3.01
26	17	18	752.00	4.48	110	140	.17597E+00	0.57	2.83
27	7	21	468.00	3.19	110	140	.10952E+00	0.41	0.94
28	22	21	374.00	10.81	160	140	.12149E-01	0.61	1.00
29	23	22	116.00	10.81	250	90	.70973E-03	0.22	0.06
30	3	23	358.00	31.61	250	90	.21904E-02	0.64	1.31
31	3	25	246.00	13.20	125	90	.44014E-01	1.08	5.24
32	25	24	354.00	2.20	110	140	.82839E-01	0.28	0.36
33	23	24	248.00	11.80	125	90	.44371E-01	0.96	4.28

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCÓGNITAS DO PROBLEMA

Tabela 4.27 Resumo da Experiência Computacional com a Rede da Figura 4.3 (Exemplo nº 3)

MÉTODOS ITERATIVOS DE ANÁLISE HIDRÁULICA →	HARDY CROSS	NEWTON-RAPHSON	ANALISE LINEAR
	(1) ΔQ-EQUAÇÕES	(1) ΔQ-EQUAÇÕES	(2) H-EQUAÇÕES
Número de iterações	7	2	17
Tempo de processamento em segundos consumidos somente nas iterações	0,93	0,35	19,29
Tempo total de processamento em segundos	3,08	2,52	25,50

(1) Solução obtida com o programa PORH

(2) Solução obtida com o programa PARH

#### IV.1.4 - Discussão dos Resultados

A aplicação dos métodos de análise hidráulica aos três exemplos considerados confirmaram, pode-se assim dizer, resultados já esperados, uma vez que as características dos métodos e das formulações adotadas já terem tido suas tendências evidenciadas no capítulo II. Pode-se no entanto realçar algumas conclusões dos resultados apresentados nas tabelas 4.11, 4.19 e 4.27. Nelas vê-se que o método de Hardy Cross, formulados com as  $\Delta Q$ -equações, teve em todos os exemplos um desempenho inferior, tanto em termos de número de iterações como em tempo de processamento, ao método de Newton-Raphson, também formulado com as  $\Delta Q$ -equações e com idêntica inicialização das vazões. Desta forma pode-se afirmar que poucas são as justificativas para o emprego do método de Hardy Cross em soluções com uso de computadores. As soluções com outras formulações que não as  $\Delta Q$ -equações certamente agravam as desvantagens do método de Hardy Cross em razão do maior número de equações a serem resolvidas.

O emprego do método de Newton-Raphson formulando com as H-equações conduziu a bons resultados. Apesar das H-equações consumirem um maior tempo de processamento que as  $\Delta Q$ -equações, estas possuem a vantagem da simplicidade dos dados de entrada, os quais prescindem da colocação de sinais para as vazões nos trechos. O esquema utilizado para a inicialização automática dos níveis piezométricos (equações 4.7 e 4.8) possivelmente não será o suficiente para fornecer inicializações que estejam próximas das soluções reais em todas as situações de complexidade que

as redes hidráulicas possam comportar. Tal esquema adotado tem no entanto o mérito de estabelecer um critério para a inicialização evitando desta forma que os resultados apresentados nas tabelas 4.11, 4.19 e 4.27 ficassem irrelevantes devido a inicializações tendenciosas dos níveis piezométricos.

O método da Análise Linear também obteve bons resultados, sendo no entanto constatado a tendência para um maior gasto computacional tanto na solução como na montagem do problema. Isto ocorre em razão da formulação pelas Q-equações incorrerem na resolução de sistemas de equações linear de ordem igual ao número de trechos da rede e para cuja montagem é necessário a manipulação de dados referentes a continuidade nos nós (suposição de sinais para as vazões nos trechos) e ao balanceamento hidráulico dos anéis (estabelecimento dos trechos que formam os anéis). Tal desvantagem não impediu no entanto um resultado melhor do método da Análise Linear no exemplo nº 1 em termos de processamento quando comparado ao alcançado pelo método de Newton-Raphson, formulado com as H-equações. Isto possivelmente ocorre em razão do sistema de equações resultantes da formulação pelas Q-equações possuir a maioria das equações realmente lineares. Esta vantagem no entanto se dilui em redes maiores que a do exemplo nº 1, como pode ser visto nos exemplos nº 2 e nº 3, onde observa-se que apesar de um menor número de iterações, as soluções com o método da Análise Linear consumiram um tempo de processamento maior nas iterações que as soluções obtidas pelo método de Newton-Raphson com a formulação nodal. Exemplos que incluissem dispositivos hidráulicos não foram considerados em

razão de que para a análise hidráulica somente o programa PARTH está capacitado para este fim. Entretanto pode-se dizer que tais exemplos só fariam agravar as tendências identificadas nos exemplos estudados.

Pelos resultados expostos pode-se considerar que o método de Newton-Raphson com uma formulação nodal como a de Shamir & Howard [1968] é o método iterativo, que de uma forma geral, melhor se adapta ao uso em computadores, sendo este portanto, o método adotado para o objetivo imediato de se dispor de um programa de análise hidráulica suficientemente eficiente para se empreender uma otimização heurística, conforme os requisitos citados no Ítem III.1.

#### IV.2 - DIMENSIONAMENTO ÓTIMO DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO

Procedendo de maneira similar ao Ítem anterior será visto inicialmente a aplicação do modelo linear de otimização a uma rede simples (exemplo nº 1), sendo apresentados a seguir os exemplos das redes de Martins [1973] (exemplo nº 2) e da cidade de Apucarana [Serete 1973] (exemplo nº 3). Neste dois últimos exemplos citados os resultados alcançados pelo modelo linear de otimização serão confrontados aos obtidos através de uma otimização heurística, tal como definida no Ítem III.1. Uma última aplicação do modelo linear de otimização (exemplo nº 4) considerará uma rede simples na qual serão incluídos elementos hidráulicos.

Os limites de velocidade adotados neste trabalho considera como velocidade máxima 0,3 m/s e como velocidade máxima 2,5 m/s, valores médios estes que em geral são adotados na prática profissional. O rompimento dos limites de velocidade serão somente tolerados nos casos de trechos com vazões muito baixas quando então nem com o diâmetro mínimo estabelecido a restrição de velocidade mínima pode ser satisfeita.

Os custos unitários das tubulações adotados nas funções objetivos são valores do mercado do Rio de Janeiro, e que foram válidos no período de junho de 1979.

#### IV.2.1 - Exemplo nº 1

Neste exemplo será solucionado o problema de programação linear formulado para a rede da figura 2.1, como detalhado no ítem III.2. Serão considerados para isto as mesmas condições impostas para a rede da figura 4.1, observando apenas que os diâmetros lá fixados não serão aqui levados em conta. Os dados básicos necessários à solução pelo modelo são vistos na tabela 4.28. O incremento inicial ali referenciado é o primeiro passo arbitrado para a implementação da busca por gradiente. A lista de diâmetros comerciais adotada no dimensionamento aparece na tabela 4.29. Os dados relativos aos nós, obtidos da figura 4.1, são vistos na tabela 4.30. Nela observa-se que somente um único carregamento é considerado para o dimensionamento da rede. O nível piezométrico no nó 1 é conhecido e de valor igual a 210 m. A tabela 4.31 mostra os dados para os trechos. A dis-

tribuição inicial das vazões é ali assinalada (a mesma distribuição utilizada no item IV.1.1). Os diâmetros inicialmente selecionados para cada trecho, a partir da distribuição de vazões arbitrária e da consideração dos limites de velocidades admissíveis vistos na tabela 4.28, são também vistos na tabela 4.31. A tabela 4.32 mostra um esquema da estrutura assumida pelo problema de programação linear. Nesta tabela são vistas as rotas consideradas para as restrições de pressão nos nós (equação 3.7). Somente os requisitos de pressão mínima são considerados. As rotas para as equações de anel (equação 3.8) são também assinaladas. Os sinais negativos indicam que o trecho tem vazão com sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. A tabela 4.33 que se segue mostra os resultados assumidos pela função objetivo (equação 3.10) a cada solução do problema de programação linear. Uma detalhada apresentação dos resultados parciais usados na busca por gradiente é também vista nesta tabela. Neste exemplo simples detalhes da busca por gradiente implantada no programa PORH podem ser melhor esclarecidos. Indicando por  $DQ_{\max}$  o incremento dado nas vazões dos trechos que compõem a rota da restrição do tipo 3.5, a qual deve possuir o maior valor absoluto do gradiente (equação 3.17), tem-se para as demais restrições do tipo 3.5, o incremento  $DQ$ , estabelecido como abaixo:

$$DQ = \frac{G}{G_{\max}} \cdot DQ_{\max} \quad (4.10)$$

onde  $G_{\max}$  e  $G$  são os gradientes das respectivamente restrições acima consideradas. A cada passo da busca que resulte num aumen-

to da função objetivo, o incremento máximo (valor absoluto) é diminuído de 40%. Na tabela 4.33 vê-se que para a rede deste exemplo o incremento máximo foi em todas as soluções, aplicado a restrição do balanceamento das cargas no anel 1, sendo as correções para o anel 2 obtidas conforme a equação 4.10.

A busca por gradiente termina quando nenhuma melhora é conseguida com o menor incremento estabelecido (1/5 do incremento inicial arbitrado), quando a vazão num trecho qualquer de diâmetro mínimo atinge um valor mínimo admissível (no caso a vazão resultante da velocidade mínima tolerada), ou quando o número máximo de iterações assumido é superado. Na tabela 4.33 pode-se ver que a busca neste exemplo parou devido ao maior incremento ter atingido o mínimo estabelecido.

A mudança nas vazões nos anéis só são feitas quando a relação abaixo se verifica |Alperovits & Shamir, 1977|.

$$\frac{DQ(i)}{DQ_{\max}} > 0,20 \quad (4.11)$$

onde  $DQ(i)$  é o incremento nas vazões do anel  $i$  e  $DQ_{\max}$  é o maior incremento (valor absoluto) assumido para um dado anel da rede. Após a primeira solução ter sido alcançada, é estabelecido para as demais soluções o seguinte critério de seleção dos diâmetros candidatos para os trechos |Alperovits & Shamir, 1977|:

(i) se na solução do problema de programação linear um dado

trecho é dimensionado com um único diâmetro, sua lista de diâmetros candidatos para a próxima solução será constituída de três diâmetros: o dimensionado e os diâmetros imediatamente inferior e superior;

- (ii) se na solução um trecho é dimensionado em dois segmentos de diâmetros diferentes, sua lista de diâmetros candidatos para a próxima solução será formulada pelos dois diâmetros dimensionados e pelo diâmetro vizinho ao diâmetro do segmento de maior comprimento.

A tabela 4.34 mostra os resultados finais para os trechos após treze soluções do problema de programação linear. Nela pode-se observar que o trecho 4 tem um segmento de comprimento ínfimo para ser levado em consideração, o que caracteriza a necessidade de um posterior refinamento da solução, como será visto adiante. A tabela 4.35 mostra os resultados para os nós. Apenas os nós 2 e 4 dispõem de uma pressão disponível superior a mínima admissível. Isto ocorre devido aos nós 2 e 4 terem elevações menores a dos demais nós e de estarem próximo do ponto de alimentação da rede (nó 1). A tabela 4.36 apresenta o resumo do dimensionamento da rede na qual são vistos os totais parciais para cada diâmetro.

Conforme visto na tabela 4.34 a solução deve ser rearranjada pela retirada dos segmentos de comprimento irrisório. Automatizar um critério para este tipo de operação não é simples como talvez possa parecer. Por exemplo, adotar um cri-

térito que pura e simplesmente retire os segmentos menores que uma dada percentagem do comprimento total do trecho, ou menores que um comprimento mínimo qualquer assumido para todos os trechos, pode conduzir a violação dos requisitos de pressão mínima dado que poderão ser retirados segmentos cujos diâmetros sejam maiores do que os dos segmentos que irão prevalecer. Neste exemplo, inclusive, pode-se observar esta dificuldade. Caso fossem desconsiderados os segmentos de comprimento menor que 100 m, certamente ocorreria a violação dos requisitos de pressão nos nós 3, 5, 6 e 7, devido principalmente ao fato de se estar aumentando as perdas no trecho 1, que é o trecho por onde passa a vazão que alimenta a rede. Estas violações podem no entanto ser evitadas desde que se faça uma distinção para os casos onde os segmentos ínfimos estejam dimensionados com o maior diâmetro, quando então alongar-se-á este segmento até o comprimento adotado no critério (no caso 100 m) ao contrário de se assumir para todo o trecho o diâmetro menor. O refinamento considerando este critério é visto nas tabelas 4.37 e 4.38, onde são vistos os resultados da verificação do equilíbrio hidráulico para os trechos e nós respectivamente, da nova conformação da rede. A tabela 4.39 mostra o custo desta conformação. Os totais parciais e os diâmetros são discriminados nesta tabela. Este critério tem a desvantagem de se poder aumentar desnecessariamente o custo da rede. Do exemplo pode-se novamente observar este efeito, pois desde que se extenda o segmento de maior diâmetro no trecho 1, o mesmo procedimento feito no trecho 4 possivelmente será desnecessário.

## EXEMPLO N.º 1 - REDE SIMPLES

TABELA 4.28 DADOS BASICOS DA REDE

	VALOR
NUMERO DE TRECHOS	8
NUMERO DE NOS	7
NUMERO DE ANEIS	2
NUMERO DE DIFERENTES CARREGAMENTOS DA REDE	1
NUMERO DE BOMBAS	0
NUMERO DE VALVULAS	0
NUMERO DE VARIAVEIS FICTICIAS	0
NUMERO DE RESERVATORIOS	0
DIAMETRO MINIMO ADMISSIVEL, MM	100
DIAMETRO MAXIMO ADMISSIVEL, MM	600
VELOCIDADE MINIMA ADMISSIVEL, M/S	0.30
VELOCIDADE MAXIMA ADMISSIVEL, M/S	2.50
INCREMENTO INICIAL, L/S	1.5

TABELA 4.29 DADOS BASICOS DOS TUBOS

DIAMETRO NOMINAL (MM)	COEFICIENTE DE CLASSE K9	CUSTO UNITARIO (CR\$/M)
100	100	319.25
150	100	531.58
200	100	771.44
250	100	1050.19
300	100	1344.06
350	100	1699.27
400	100	2064.74
450	100	2486.38
500	100	2920.64
600	100	3890.38

TABELA 4.30 DADOS DOS NOS

NO	ELEVACAO (M)	PRESSAO MINIMA		DEMANDA	
		ADMISSIVEL		(L/S)	
		CARR. 1	CARR. 2	CARR. 1	CARR. 2
1	200.00	-10.00	0.00	311.11	0.00
2	150.00	30.00	0.00	-27.78	0.00
3	160.00	30.00	0.00	-27.78	0.00
4	155.00	30.00	0.00	-33.33	0.00
5	150.00	30.00	0.00	-75.00	0.00
6	165.00	30.00	0.00	-91.67	0.00
7	160.00	30.00	0.00	-55.55	0.00

OBS. DEMANDAS POSITIVAS INDICAM ENTRADA NO NO  
 DEMANDAS NEGATIVAS INDICAM SAIDA DO NO

TABELA 4.31 DADOS DOS TRECHOS

TRECHO	COMPRIMENTO (M)	ADMISSIVEIS (MM)	DIAMETROS SELECCIONADOS (MM)	
			CARREGAMENTO 1 (L/S)	CARREGAMENTO 2 (L/S)
1	1000.00	100 - 600	311.11	0.00
2	1000.00	100 - 600	61.11	0.00
3	1000.00	100 - 600	222.22	0.00
4	1000.00	100 - 600	8.33	0.00
5	1000.00	100 - 600	180.56	0.00
6	1000.00	100 - 600	88.89	0.00
7	1000.00	100 - 600	33.33	0.00
8	1000.00	100 - 600	33.33	0.00

TABELA 4.32 ESTRUTURA INICIAL DO PROBLEMA LINEAR

NO INICIAL	NO FINAL	NO CARR. ENTRE OS NOS	NUMERO DE ORDEM DOS TRECHOS CONECTADOS	NUMERO DE ORDEM DOS ELEMENTOS		
				HIDRAULICOS	BOMBAS	VALVULAS RESERVATORIOS

## EQUACOES DE PRESSAO

1	2	1	1			
1	3	1	1, 2			
1	4	1	1, 3			
1	5	1	1, 3, 4			
1	6	1	1, 3, 5			
1	7	1	1, 3, 5, 6			

## EQUACOES DE ANEL

2	2	1	3, 4, -7, -2			
7	7	1	5, -6, -8, -4			

OBS. AS RESTRICOES INCLUEM 36 VARIAVEIS, 6 EQUACOES DE PRESSAO, 0 EQUACOES DE FONTE,  
 2 EQUACOES DE ANEL E 8 EQUACOES DE TRECHO

TABELA 4.33 RESULTADOS PARCIAIS

ITERACAO	CUSTO TOTAL DA REDE (CR\$)	ANEL 1				ANEL 2					
		AB / AQ		W	G	DQ	AB / BQ		W	G	DQ
		AQ	AB				BQ	AB			
1	12912575.46	2.855	144	411	1.50		2.703	-148	-399	-1.46	
2	12967254.27	2.260	152	343	0.90		2.103	-157	-329	-0.86	
3	12971970.37	2.039	157	320	0.54		1.879	-162	-305	-0.51	
4	12969504.80	1.935	160	310	0.54		1.772	-166	-295	-0.51	
5	12964191.07	1.847	164	302	0.54		1.682	-170	-286	-0.51	
6	12956609.81	1.772	167	297	0.54		1.605	-174	-279	-0.51	
7	12947164.12	1.707	171	293	0.54		1.538	-178	-274	-0.51	
8	12936138.02	1.651	176	290	0.54		1.480	-183	-271	-0.50	
9	12923733.05	1.603	180	288	0.54		1.429	-188	-268	-0.50	
10	12910092.04	1.561	184	288	0.54		1.384	-192	-266	-0.50	
11	12895314.94	1.524	189	289	0.54		1.345	-198	-266	-0.50	
12	12883102.46	1.492	195	290	0.54		1.310	-203	-266	-0.49	
13	12888953.72	1.464	200	293	0.32		1.279	-209	-267	-0.30	

TABELA 4.34 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS

TRECHO	COMPR. (M)	VAZAO (L/S)		SEGMENTO 1			SEGMENTO 2			PERDA DE CARGA (M)		
		CARR. 1	CARR. 2	DIAM. (MM)	CHW	COMPR. (M)	DIAM. (MM)	CHW	COMPR. (M)	CARR. 1	CARR. 2	
1	1000.00	311.11	0.00	500	100	946.87	600	100	53.13	6.9	0.0	
2	1000.00	53.85	0.00	200	100	314.94	250	100	685.06	13.1	0.0	
3	1000.00	229.48	0.00	500	100	1000.00	0	0	0.00	4.1	0.0	
4	1000.00	22.47	0.00	150	100	983.03	200	100	16.97	19.0	0.0	
5	1000.00	173.68	0.00	450	100	1000.00	0	0	0.00	4.0	0.0	
6	1000.00	82.01	0.00	300	100	410.81	350	100	589.19	5.0	0.0	
7	1000.00	26.07	0.00	150	100	195.33	200	100	804.67	10.0	0.0	
8	1000.00	26.45	0.00	150	100	181.39	200	100	818.61	10.0	0.0	

TABELA 4.35 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS

NO	CARR.	CARGA	PERDA DE	PRESSAO MINIMA	PRESSAO	ATIVIDADE
			(M)	(M)	(M)	DUAL
EQUACOES DE PRESSAO						
2	1	6.90	30.00	53.10	0.0	
3	1	20.00	30.00	30.00	50.1	
4	1	10.96	30.00	44.04	0.0	
5	1	30.00	30.00	30.00	412.2	
6	1	15.00	30.00	30.00	1045.6	
7	1	20.00	30.00	30.00	805.1	
EQUACOES DE ANEL						
2	1	0.00			-125.3	
7	1	0.00			121.9	

TABELA 4.36 RESUMO FINAL DO DIMENSIONAMENTO DA REDE

CUSTO TOTAL DAS TUBULACOES, CR\$	12883102.45
COMPRIMENTO TOTAL DE TUBULACAO, M	8000.00

## DISCRIMINACAO DOS TOTAIS PARCIAIS

DIAMETRO NOMINAL, MM	COMPRIMENTO TOTAL, M	CUSTO UNITARIO, CR\$/M	CUSTO TOTAL, CR\$
150	1359.75	531.58	722817.73
200	1955.19	771.44	1508307.96
250	685.06	1050.19	719444.74
300	410.81	1344.06	552156.85
350	589.19	1699.27	1001188.39
450	1030.33	2486.38	2486380.00
500	1946.37	2920.64	5686092.85
600	53.13	3890.38	206713.93

TABELA 4.37 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS

TRECHO	VAZAO			SEGMENTO 1			SEGMENTO 2			PERDA DE CARGA		
	COMPR.	(L/S)		DIAM.	CHW	COMPR.	DIAM.	CHW	COMPR.	(M)		
	(M)	CARR. 1	CARR. 2	(MM)		(M)	(MM)		(M)	CARR. 1	CARR. 2	
1	1000.00	311.11	0.00	500	100	900.00	600	100	100.00	6.7	0.0	
2	1000.00	53.60	0.00	200	100	314.94	250	100	685.06	13.0	0.0	L47
3	1000.00	229.73	0.00	500	100	1000.00	0	0	0.00	4.1	0.0	
4	1000.00	23.07	0.00	150	100	900.00	200	100	100.00	18.7	0.0	
5	1000.00	173.33	0.00	450	100	1000.00	0	0	0.00	4.0	0.0	
6	1000.00	81.66	0.00	300	100	413.81	350	100	589.19	5.0	0.0	
7	1000.00	25.82	0.00	150	100	195.33	200	100	804.67	9.8	0.0	
8	1000.00	26.10	0.00	150	100	181.39	200	100	818.61	9.8	0.0	

OBS. RESULTADO OBTIDO POR NEWTON-RAPHSON EM 3 ITERACOES

TABELA 4.38 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS

NO	CARR.	CARGA	PERDA DE	PRESSAO MINIMA	PRESSAO	ATIVIDADE
			(M)	(M)	(M)	DUAL
EQUACOES DE PRESSAO						
2	1	6.71	30.00	53.29		0.0
3	1	19.69	30.00	30.31		0.0
4	1	10.77	30.00	44.23		0.0
5	1	29.51	30.00	30.49		0.0
6	1	14.80	30.00	30.20		0.0
7	1	19.76	30.00	30.24		0.0
EQUACOES DE ANEL						
2	1	0.00				0.0
7	1	-0.00				0.0

TABELA 4.39 RESUMO FINAL DO DIMENSIONAMENTO DA REDE

CUSTO TOTAL DAS TUBULACOES, CR\$	12948464.99
COMPRIMENTO TOTAL DE TUBULACAO, M	8000.00

DISCRIMINACAO DOS TOTAIS PARCIAIS

DIAMETRO NOMINAL, MM	COMPRIMENTO TOTAL, M	CUSTO UNITARIO, CR\$/M	CUSTO TOTAL, CR\$
150	1276.72	531.58	678681.23
200	2038.21	771.44	1572359.78
250	685.06	1050.19	719444.74
300	410.81	1344.36	552156.85
350	589.19	1699.27	1001188.39
450	1000.00	2486.38	2486380.00
500	1900.00	2920.64	5549216.00
600	100.00	3890.38	389038.00

O tempo de processamento gasto com o programa PÖRH nas treze soluções da rede deste exemplo, e incluindo-se a verificação da estabilidade hidráulica da conformação obtida após o refinamento da solução, foi de 100,5 segundos. Uma única solução deste exemplo empregando-se o programa TEMPO |Burroughs, 1974| consumiu 5 segundos. A discussão dos resultados vistos neste exemplo é apresentada no Item IV.2.5.

#### IV.2.2 - Exemplo nº 2

Inicialmente a rede deste exemplo (figura 4.2) foi submetida a uma otimização heurística através do uso do programa PARH. Dentre todas as soluções estudadas, a que com um menor custo, melhor atendeu as condições hidráulicas para o único carregamento imposto por Martins |1973|, é a apresentada nas tabelas 4.40, 4.41 e 4.42. A tabela 4.40 mostra os resultados para os nós. Nela é visto que a solução obtida satisfaz o requisito de pressão mínima admissível em todos os nós. A tabela 4.41 mostra os resultados para os trechos, na qual observa-se que a restrição de velocidade mínima adotada neste trabalho (0,3 m/s), é violada nos trechos 8 e 10. Isto ocorre devido ao diâmetro mínimo (100 mm) adotado por Martins |1973| ter capacidade excessiva para o carregamento a que a rede está submetida, ou seja, satisfazer os consumos aos quais a rede está submetida conduz a vazões muito baixas em alguns trechos, de forma que nem com o diâmetro mínimo considerado a restrição de velocidade mínima poderá ser satisfeita. A tabela 4.42 apresenta o custo total das tubulações e a discriminação dos totais para os diâmetros considerados na solução.

TABELA 4.40 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS

NO	DEMANDA (L/S)	ELEVACAO (M)	PRESSAO MINIMA ADMISSIVEL (M)	NIVEL PIEZOMETRICO (M)	PRESSAO DISPONIVEL (M)
1	-1.50	720.00	20.00	743.77 *	23.77
2	-7.20	715.00	20.00	742.74 *	27.74
3	-9.30	695.00	20.00	741.48 *	46.48
4	-15.90	699.00	20.00	738.69 *	39.69
5	-10.00	709.00	20.00	740.97 *	31.97
6	-6.50	713.00	20.00	741.82 *	28.82
7	-6.00	718.00	20.00	740.95 *	22.95
8	-4.50	710.00	20.00	740.18 *	30.18
9	-5.40	691.00	20.00	740.82 *	49.82
10	-6.50	693.00	20.00	738.70 *	45.70
11	-7.20	695.00	20.00	735.66 *	40.66
12	-10.60	699.00	20.00	736.63 *	37.63
13	-10.30	715.00	20.00	735.31 *	20.31
14	-11.70	702.00	20.00	736.61 *	34.61
15	-13.60	692.00	20.00	737.10 *	45.10
16	-12.20	709.00	20.00	733.94 *	24.94
17	-11.20	720.00	20.00	740.30 *	20.30
18	-9.70	705.00	20.00	730.35 *	25.35

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCognITAS DO PROBLEMA

TABELA 4.40 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS (CONTINUACAO)

NO	DEMANDA (L/S)	ELEVACAO (M)	PRESSAO MINIMA ADMISSIVEL (M)	NIVEL PIEZOMETRICO (M)	PRESSAO DISPONIVEL (M)
19	-9.70	712.00	20.00	735.82 *	23.82
20	169.00 *	730.00	14.00	744.00	14.00

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCOGNITAS DO PROBLEMA

TABELA 4.41 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS

NO TRECHO	NO MONTANTE	NO JUZANTE	COMPRIMENTO (M)	VAZAO (L/S)	DIAMETRO (MM)	CHW	RESISTENCIA F (L,D,CHW)	VELOCIDADE (CM/S)	CARGA (M)	PERDA DE
1	1	2	200.00	68.10	300	100	.41430E-03	0.96	1.03	
2	2	3	400.00	52.30	300	100	.82859E-03	0.74	1.26	
3	3	4	500.00	24.52	200	100	.74613E-02	0.78	2.79	
4	5	4	500.00	21.99	200	100	.74613E-02	0.70	2.28	
5	6	5	200.00	61.24	300	100	.41430E-03	0.87	0.85	
6	1	6	400.00	99.40	350	100	.39112E-03	1.03	1.96	
7	7	8	300.00	2.60	100	100	.13091E+00	0.33	0.77	
8	9	8	450.00	1.90	100	100	.19637E+00	0.24	0.64	
9	9	10	400.00	11.18	150	100	.24230E-01	0.63	2.12	
10	10	11	400.00	4.68	100	100	.17455E+00	0.60	3.04	
11	12	11	400.00	2.52	100	100	.17455E+00	0.32	0.97	
12	4	12	500.00	20.80	200	100	.74613E-02	0.66	2.06	
13	12	13	500.00	7.68	150	100	.30288E-01	0.43	1.32	
14	14	13	500.00	2.62	100	100	.21819E+00	0.33	1.30	
15	4	14	500.00	9.81	150	100	.30288E-01	0.56	2.03	
16	15	14	500.00	4.51	150	100	.30288E-01	0.26	0.49	
17	5	15	500.00	29.25	200	100	.74613E-02	0.93	3.87	
18	15	16	600.00	11.14	150	100	.36345E-01	0.63	3.16	

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCÓGNITAS DO PROBLEMA

TABELA 4.41 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS (CONTINUACAO)

NO TRECHO	NO MONTANTE	NO JUZANTE	COMPRIMENTO (M)	VAZAO (L/S)	DIAMETRO (MM)	CHW	RESISTENCIA F (L,D,CHW)	VELOCIDADE (M/S)	CARGA (M)	PERDA DE ENERGIA (M)
19	16	18	500.00	4.54	100	100	.21819E+00	0.58	3.59	
20	19	18	600.00	5.16	100	100	.26183E+00	0.66	5.47	
21	17	19	500.00	14.86	150	133	.30288E-01	0.84	4.49	
22	6	17	500.00	31.66	250	100	.25169E-02	0.64	1.51	
23	17	16	600.00	5.60	100	100	.26183E+00	0.71	6.36	
24	20	1	100.00	169.00	500	100	.17214E-04	0.86	0.23	
25	2	7	550.00	8.60	150	100	.33316E-01	0.49	1.79	
26	3	9	200.00	18.47	200	100	.29845E-02	0.59	0.66	153

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCÓGNITAS DO PROBLEMA

**TABELA 4.42 RESUMO FINAL DO DIMENSIONAMENTO DA REDE**

<b>CUSTO TOTAL DAS TUBULACOES, CR\$</b>	<b>7353651.50</b>
<b>COMPRIMENTO TOTAL DE TUBULACAO, M</b>	<b>11300.00</b>

**DISCRIMINACAO DOS TOTAIS PARCIAIS**

<b>DIAMETRO</b>	<b>COMPRIMENTO,</b>	<b>CUSTO</b>	<b>CUSTO</b>
<b>NOMINAL, MM</b>	<b>TOTAL, M</b>	<b>UNITARIO, CR\$/M</b>	<b>TOTAL, CR\$</b>
100	3750.00	319.25	1197187.50
150	3550.00	531.58	1887109.00
200	2200.00	771.44	1697168.00
250	500.00	1050.19	525095.00
300	800.00	1344.06	1075248.00
350	400.00	1699.20	679680.00
500	100.00	2920.64	292064.00

TABELA 4.43 RESULTADOS DA ANALISE DE SENSIBILIDADE EM RELACAO A R 13

D 20	H 1	H 2	H 3	H 4	H 5	H 6	H 7	H 8	H 9
0.000	-0.000	0.140	0.355	0.951	-0.278	-0.183	0.226	0.347	0.485
H 10	H 11	H 12	H 13	H 14	H 15	H 16	H 17	H 18	H 19
1.255	3.894	5.453	-29.626	-5.067	-2.758	-2.079	-0.297	-1.424	-0.547

H - NIVEL PIEZOMETRICO D - DEMANDA R - RESISTENCIA

TABELA 4.44 RESULTADOS DA ANALISE DE SENSIBILIDADE EM RELACAO A R 16

D 20	H 1	H 2	H 3	H 4	H 5	H 6	H 7	H 8	H 9
0.000	-0.000	-0.205	-0.523	-1.889	0.399	0.267	-0.294	-0.420	-0.564
H 10	H 11	H 12	H 13	H 14	H 15	H 16	H 17	H 18	H 19
-0.866	-1.901	-2.512	-3.866	-7.773	4.584	3.446	0.459	2.348	0.878

H - NIVEL PIEZOMETRICO D - DEMANDA R - RESISTENCIA

TABELA 4.45 RESULTADOS DA ANALISE DE SENSIBILIDADE EM RELACAO A R 18

D 20	H 1	H 2	H 3	H 4	H 5	H 6	H 7	H 8	H 9
0.000	-0.000	0.176	0.449	1.640	0.624	-0.230	0.252	0.358	0.481
H 10	H 11	H 12	H 13	H 14	H 15	H 16	H 17	H 18	H 19
0.714	1.517	1.990	2.811	5.178	7.522	-58.465	-3.745	-38.345	-11.415

H - NIVEL PIEZOMETRICO D - DEMANDA R - RESISTENCIA

Na otimização heurística, como definida no item III.1, não é possível se estabelecer um critério que indique a optimalidade da solução obtida. No entanto pode-se explorar a análise de sensibilidade da solução encontrada para analisar a estacionaridade desta solução em um ótimo local. As tabelas 4.43, 4.44 e 4.45 mostram respectivamente as sensibilidades em relação as resistências nos trechos 13, 16 e 18, os quais são trechos que aparentemente estão dimensionados com alguma folga. Na tabela 4.43 vê-se que o incremento unitário na resistência do trecho 13 não provoca grandes alterações nos níveis piezométricos dos nós da rede, isto indica que deve-se avaliar a solução que considere a diminuição do diâmetro no trecho 13. Esta solução causa no entanto a violação da restrição de pressão mínima admissível no nó 13. A violação não é muito significativa pois é da ordem de 0,32 m. Entretanto desde que se deseje observar estritamente as restrições impostas a este exemplo, não será considerada esta solução. As sensibilidades vistas nas tabelas 4.44 e 4.45 indicam que a diminuição nos diâmetros nos trechos 16 e 18 provocam um maior efeito nas pressões nos nós da rede de forma que as alterações nos diâmetros nestes trechos são impraticáveis em razão das violações causados nos requisitos de pressão mínima serem intoleráveis.

A partir do conhecimento desta conformação da rede, assumida ser a melhor solução conhecida, a solução com o modelo com programação linear é implementada de modo a ser veri-

ficado se uma melhor solução é possível. Tal como para o exemplo anterior, a solução alcançada pelo modelo é vista numa série de tabelas que detalham a solução. A tabela 4.46 mostra os dados básicos considerados na solução. O incremento inicial para a busca por gradiente é neste exemplo igual a 0,8 l/s, menor que o do exemplo nº 1 em razão das baixas vazões na rede. Na tabela 4.47 são vistos os dados básicos dos tubos. A lista de diâmetros comerciais fornecida ao programa PORH considera sómente os diâmetros adotados por Martins [1973]. A tabela 4.48 se refere aos dados dos nós. Esta tabela é repetida desde que estes mesmos dados já apareceram na tabela 4.13. Ela é novamente vista neste ítem com o objetivo de harmonizar a sequência de tabelas que apresentam o dimensionamento da rede pelo programa PORH. A tabela 4.49 mostra os dados relativos aos trechos. A distribuição inicial de vazões ali vista é a suposta por Martins [1973]. A tabela 4.50 apresenta a estrutura do problema de programação linear. Somente os requisitos de pressão mínima são consideradas nas restrições de pressão. Na tabela 4.51 são vistos os valores assumidos pela função objetivo na busca por gradiente. A busca implementada segundo os detalhes vistos no exemplo anterior, terminou após cinco soluções devido a próxima solução conduzir a vazão no trecho 7 a um valor menor que o limite estabelecido para este exemplo.

Em razão de uma solução não poder ser encontrada sem que se viole o limite de velocidade mínima (0,3 m/s), isto porque, como já dito, o diâmetro mínimo considerado (100 mm) possui uma capacidade excessiva para as baixas vazões que

ocorrem em certos trechos da rede, foi permitido neste exemplo que na busca por gradiente se pudesse chegar a vazões de até 0,85 l/s, nos trechos de diâmetro mínimo, o que corresponde a uma vazão com velocidade de 0,3 m/s num trecho de diâmetro igual a 60 mm. A solução ótima encontrada nestas condições é vista nas tabelas 4.51 e 4.52, onde são vistos os resultados para os trechos e nós respectivamente..A tabela 4.53 mostra o custo da rede e a discriminação dos totais parciais para os diâmetros utilizados no dimensionamento da rede. Esta solução representa uma melhora de 2,7% sobre o custo da solução heuristicalemente avaliada.

Um refinamento da solução alcançada por programação linear que ainda considere uma solução final na qual os trechos possam ser divididos em dois segmentos de diâmetros diferentes continuará obviamente a conduzir a um custo menor ao alcançado na solução heurística. Será considerado então um refinamento que exija trechos com somente um diâmetro para sermos compatíveis com a solução heuristicamente avaliada. Para este refinamento foi adotado o critério de que quando um trecho é dimensionado em dois segmentos, o segmento de maior diâmetro somente prevalecerá no caso em que este segmento seja maior que 25% do comprimento total do trecho. A solução obtida segundo este critério é vista nas tabelas 4.54, 4.55, 4.56 e 4.57.Na tabela 4.54 observa-se que esta solução é uma das anteriormente aventadas quando da exposição da solução alcançada através da otimização heurística, ou seja, representa a conformação avaliada heuristicamente, com uma única alteração (diminuição) no diâmetro

do trecho 18, alteração esta que tinha sido uma das possibilidades considerada. Na tabela 4.55 é vista que nesta conformação as restrições de pressão mínima são violadas nos nós 16 e 17 de forma que caso se queira neste exemplo, uma solução que estritamente obedeça os requisitos de pressão mínima deve-se aumentar o diâmetro no trecho 18 e chegar-se-á então a solução vista nas tabelas 4.40, 4.41 e 4.42.

Deste exemplo pode ser observado que o problema do refinamento, considerando a exigência de um único diâmetro para cada trecho, é também de difícil automatização sendo possivelmente necessário para o estabelecimento deste refinamento uma análise preliminar do dimensionamento obtido por programação linear, uma vez que um critério suficientemente geral para este tipo de restrição é de complicada formulação.

## EXEMPLO NO. 2 - REDE DO TRABALHO DE MARTINS (1973)

TABELA 4.46 DADOS BASICOS DA REDE

	VALOR
NUMERO DE TRECHOS	26
NUMERO DE NOS	20
NUMERO DE ANEIS	7
NUMERO DE DIFERENTES CARREGAMENTOS DA REDE	1
NUMERO DE BOMBAS	0
NUMERO DE VALVULAS	0
NUMERO DE VARIAVEIS FICTICIAS	0
NUMERO DE RESERVATORIOS	0
DIAMETRO MINIMO ADMISSIVEL, MM	100
DIAMETRO MAXIMO ADMISSIVEL, MM	500
VELOCIDADE MINIMA ADMISSIVEL, M/S	0.30
VELOCIDADE MAXIMA ADMISSIVEL, M/S	2.50
INCREMENTO INICIAL, L/S	0.8

TABELA 4.47 DADOS BASICOS DOS TUBOS

DIAMETRO NOMINAL (MM)	CLASSE	COEFICIENTE DE RUGOSIDADE	CUSTO UNITARIO (CR\$/M)
100	K9	100	319.25
150	K9	100	531.58
200	K9	100	771.44
250	K9	100	1050.19
300	K9	100	1344.06
350	K9	100	1699.27
400	K9	100	2064.74
500	K9	100	2920.64

TABELA 4-48 DADOS DOS NOS

PRESSAO MINIMA

NO	ELEVACAO (M)	ADMISSIVEL		DEMANDA (L/S)	
		CARR. 1	CARR. 2	CARR. 1	CARR. 2
1	720.00	20.00	0.00	-1.50	0.00
2	715.00	20.00	0.00	-7.20	0.00
3	695.00	20.00	0.00	-9.30	0.00
4	699.00	20.00	0.00	-15.90	0.00
5	709.00	20.00	0.00	-10.00	0.00
6	713.00	20.00	0.00	-6.50	0.00
7	718.00	20.00	0.00	-6.00	0.00
8	710.00	20.00	0.00	-4.50	0.00
9	691.00	20.00	0.00	-5.40	0.00
10	693.00	20.00	0.00	-6.50	0.00
11	695.00	20.00	0.00	-7.20	0.00
12	699.00	20.00	0.00	-10.60	0.00
13	715.00	20.00	0.00	-10.30	0.00
14	702.00	20.00	0.00	-11.70	0.00
15	692.00	20.00	0.00	-13.60	0.00
16	709.00	20.00	0.00	-12.20	0.00
17	720.00	20.00	0.00	-11.20	0.00
18	705.00	20.00	0.00	-9.70	0.00
19	712.00	20.00	0.00	-9.70	0.00
20	730.00	14.00	0.00	169.00	0.00

OBS. DEMANDAS POSITIVAS INDICAM ENTRADA NO NO  
 DEMANDAS NEGATIVAS INDICAM SAIDA DO NO

TABELA 4.49 DADOS DOS TRECHOS

TRECHO	COMPRIMENTO (M)	ADMISSIVEIS (MM)	DIAMETROS SELECCIONADOS (MM)	
			DISTRIBUICAO INICIAL DAS VAZOES (L/S)	
			CARREGAMENTO 1	CARREGAMENTO 2
1	200.00	100 - 500	64.30	0.00
2	400.00	100 - 500	48.90	0.00
3	500.00	100 - 500	21.80	0.00
4	500.00	100 - 500	21.90	0.00
5	200.00	100 - 500	62.50	0.00
6	400.00	100 - 500	103.20	0.00
7	300.00	100 - 500	2.20	0.00
8	450.00	100 - 500	2.30	0.00
9	400.00	100 - 500	10.10	0.00
10	400.00	100 - 500	3.60	0.00
11	400.00	100 - 500	3.60	0.00
12	500.00	100 - 500	19.40	0.00
13	500.00	100 - 500	5.20	0.00
14	500.00	100 - 500	5.10	0.00
15	500.00	100 - 500	8.40	0.00
16	500.00	100 - 500	8.40	0.00
17	500.00	100 - 500	30.60	0.00
18	600.00	100 - 500	8.60	0.00

TABELA 4.4.9 DADOS DOS TRECHOS (CONTINUACAO)

TRECHO	COMPRIMENTO (M)	DIAMETROS ADMISSIVEIS (MM)	DISTRIBUICAO INICIAL DAS VAZOES		DIAMETROS SELECIONADOS (MM)
			CARREGAMENTO 1 (L/S)	CARREGAMENTO 2 (L/S)	
19	500.00	100 - 500	4.90	0.00	100
20	600.00	100 - 500	4.80	0.00	100
21	500.00	100 - 500	14.50	0.00	100, 150, 200
22	500.00	100 - 500	34.20	0.00	150, 200, 250, 300, 350
23	600.00	100 - 500	8.50	0.00	100, 150
24	100.00	100 - 500	169.00	0.00	300, 350, 400, 500
25	550.00	100 - 500	8.20	0.00	100, 150
26	200.00	100 - 500	17.80	0.00	100, 150, 200, 250

TABELA 4.50 ESTRUTURA INICIAL DO PROBLEMA LINEAR

NO INICIAL	NO FINAL	NO CARR.	NUMERO DE ORDEM DOS TRECHOS CONECTADOS ENTRE OS NOS	NUMERO DE ORDEM DOS ELEMENTOS	
				HIDRAULICOS	BOMBAS VALVULAS RESERVATORIOS

## EQUACOES DE PRESSAO

20	1	1	24		
20	2	1	24, 1		
20	3	1	24, 1, 2		
20	4	1	24, 1, 2, 3		
20	5	1	24, 6, 5		
20	6	1	24, 6		
20	7	1	24, 1, 25		
20	8	1	24, 1, 25, 7		
20	9	1	24, 1, 2, 26		
20	10	1	24, 1, 2, 26, 9		
20	11	1	24, 1, 2, 26, 9, 10		
20	12	1	24, 6, 5, 4, 12		
20	13	1	24, 1, 2, 3, 12, 13		
20	14	1	24, 6, 5, 17, 16		
20	15	1	24, 6, 5, 17		
20	16	1	24, 6, 22, 23		
20	17	1	24, 6, 22		
20	18	1	24, 6, 22, 21, 20		

OBS. AS RESTRICOES INCLUEM 74 VARIAVEIS, 19 EQUACOES DE PRESSAO, 0 EQUACOES DE FONTE,  
 7 EQUACOES DE ANEL E 26 EQUACOES DE TRECHO

TABELA 4.50 ESTRUTURA INICIAL DO PROBLEMA LINEAR (CONTINUACAO)

NO INICIAL	NO FINAL	NO CARR. ENTRE OS NOS	NUMERO DE ORDEM DOS TRECHOS CONECTADOS	NUMERO DE ORDEM DOS ELEMENTOS	
				HIDRAULICOS	BOMBAS VALVULAS RESERVATORIOS

## EQUACOES DE PRESSAO

20	19	1	24, 6, 22, 21
----	----	---	---------------

## EQUACOES DE ANEL

1	1	1	1, 2, 3, -4, -5, -6
2	2	1	25, 7, -3, -26, -2
3	3	1	26, 9, 10, -11, -12, -3
4	4	1	12, 13, -14, -15
5	5	1	4, 15, -16, -17
6	5	1	5, 17, 18, -23, -22
17	17	1	23, 19, -20, -21

OBS. AS RESTRICOES INCLUEM 74 VARIAVEIS, 19 EQUACOES DE PRESSAO, 0 EQUACOES DE FONTE,  
 7 EQUACOES DE ANEL E 26 EQUACOES DE TRECHO

TABELA 4.51 RESULTADOS PARCIAIS

ITERACAO	VALOR DA FUNCAO OBJETIVO (CR\$)
1	7852356.75
2	7257949.52
3	7194788.57
4	7177734.87
5	7155570.70

TABELA 4.52 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS

TRECHO	VAZAO			SEGMENTO 1			SEGMENTO 2			PERDA DE CARGA		
	COMPR. (M)	(L/S)		DIAM. (MM)	CHW	COMPR. (M)	DIAM. (MM)	CHW	COMPR. (M)			
		CARR. 1	CARR. 2							CARR. 1	CARR. 2	
1	200.00	65.50	0.00	300	100	200.00	0	0	0.00	1.0	0.0	
2	400.00	51.32	0.00	250	100	65.75	300	100	334.25	1.5	0.0	
3	500.00	24.22	0.00	200	100	500.00	0	0	0.00	2.7	0.0	
4	500.00	23.09	0.00	200	100	500.00	0	0	0.00	2.5	0.0	
5	200.00	59.83	0.00	300	100	200.00	0	0	0.00	0.8	0.0	
6	400.00	102.00	0.00	350	100	330.80	400	100	69.20	1.9	0.0	167
7	300.00	0.98	0.00	100	100	300.00	0	0	0.00	0.1	0.0	
8	450.00	3.52	0.00	100	100	450.00	0	0	0.00	2.0	0.0	
9	400.00	8.88	0.00	100	100	212.31	150	100	187.69	5.9	0.0	
10	400.00	2.38	0.00	100	100	400.00	0	0	0.00	0.9	0.0	
11	400.00	4.82	0.00	100	100	400.00	0	0	0.00	3.2	0.0	
12	500.00	23.01	0.00	200	100	440.03	250	100	59.97	2.3	0.0	
13	500.00	7.59	0.00	150	100	500.00	0	0	0.00	1.3	0.0	
14	500.00	2.71	0.00	100	100	500.00	0	0	0.00	1.4	0.0	
15	500.00	8.40	0.00	100	100	32.81	150	100	467.19	2.2	0.0	
16	500.00	6.01	0.00	100	100	55.31	150	100	444.69	1.4	0.0	
17	500.00	26.74	0.00	200	100	500.00	0	0	0.00	3.3	0.0	
18	600.00	7.13	0.00	100	100	520.00	150	100	80.00	8.8	0.0	

TABELA 4.52 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS (CONTINUACAO)

TRECHO	VAZAO			SEGMENTO 1			SEGMENTO 2			PERDA DE CARGA		
	COMPR. (M)	COMPR. (L/S)	DIAM. (MM)	CHW	COMPR. (M)	DIAM. (MM)	CHW	COMPR. (M)	DIAM. (MM)	CHW	CARR. 1	CARR. 2
	CARR. 1	CARR. 2										
19	500.00	3.43	0.00	100	100	500.00	0	0	0.00	2.1	0.0	
20	600.00	6.27	0.00	100	100	600.00	0	0	0.00	7.9	0.0	
21	500.00	15.97	0.00	100	100	2.33	150	100	497.67	5.3	0.0	
22	500.00	35.67	0.00	250	100	500.00	0	0	0.00	1.9	0.0	
23	600.00	8.50	0.00	100	100	459.38	150	100	140.62	11.0	0.0	
24	100.00	169.00	0.00	500	100	100.00	0	0	0.00	0.2	0.0	
25	550.00	6.98	0.00	100	100	261.63	150	100	288.37	4.8	0.0	
26	200.00	17.80	0.00	150	100	84.63	200	100	115.37	1.4	0.0	

TABELA 4.53 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS

NO	CARR.	CARGA	PERDA DE	PRESSAO MINIMA	PRESSAO	ATIVIDADE
			(M)	(M)	(M)	DUAL
EQUACOES DE PRESSAO						
1	1	0.23	20.00	23.77	0.0	
2	1	1.19	20.00	27.81	0.0	
3	1	2.69	20.00	46.31	0.0	
4	1	5.42	20.00	39.58	0.0	
5	1	2.92	20.00	32.08	0.0	
6	1	2.11	20.00	28.89	0.0	
7	1	6.00	20.00	20.00	309.5	
8	1	6.13	20.00	27.87	0.0	
9	1	4.11	20.00	48.89	0.0	
10	1	10.05	20.00	40.95	0.0	
11	1	10.92	20.00	38.08	0.0	
12	1	7.71	20.00	37.29	0.0	
13	1	9.00	20.00	20.00	1259.6	
14	1	7.62	20.00	34.38	0.0	
15	1	6.20	20.00	45.80	0.0	
16	1	15.00	20.00	20.00	289.5	
17	1	4.00	20.00	20.00	460.4	
18	1	17.13	20.00	21.87	0.0	
19	1	9.28	20.00	22.72	0.0	
EQUACOES DE ANEL						
1	1	0.00			-739.8	
2	1	0.00			-155.0	
3	1	-0.00			99.0	
4	1	-0.00			-313.6	
5	1	-0.00			-203.9	
6	1	0.00			148.8	
17	1	0.00			-33.4	

TABELA 4.54 RESUMO FINAL DO DIMENSIONAMENTO DA REDE

CUSTO TOTAL DAS TUBULACOES, CR\$	7155570.70		
COMPRIMENTO TOTAL DE TUBULACAO, M	11300.00		
<u>DISCRIMINACAO DOS TOTAIS PARCIAIS</u>			
DIAMETRO	COMPRIMENTO	CUSTO	CUSTO
NOMINAL, MM	TOTAL, M	UNITARIO, CR\$/M	TOTAL, CR\$
100	4693.78	319.25	1498490.44
150	2690.84	531.58	1430398.82
200	2055.41	771.44	1585622.89
250	625.72	1050.19	657121.48
300	734.25	1344.06	986874.68
350	330.80	1699.27	562119.17
400	69.20	2064.74	142879.22
500	100.00	2920.64	292064.00

TABELA 4.55 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS

TRECHO	VAZAO			SEGMENTO 1			SEGMENTO 2			PERDA DE CARGA		
	COMPR. (M)	CARR. 1 (L/S)		DIAM. (MM)	CHW	COMPR. (M)	DIAM. (MM)	CHW	COMPR. (M)	CARR. 1 (M)		
		CARR. 2								CARR. 1	CARR. 2	
1	200.00	67.51	0.00	300	100	200.00	0	0	0.00	1.0	0.0	
2	400.00	51.72	3.00	300	100	400.00	0	0	0.00	1.2	0.0	
3	500.00	23.99	0.00	200	100	500.00	0	0	0.00	2.7	0.0	
4	500.00	21.50	0.00	200	100	500.00	0	0	0.00	2.2	0.0	
5	200.00	57.94	0.00	300	100	200.00	0	0	0.00	0.8	0.0	
6	400.00	99.99	0.00	350	100	400.00	0	0	0.00	2.0	0.0	
7	300.00	2.59	0.00	100	100	300.00	0	0	0.00	0.8	0.0	
8	450.00	1.91	0.00	100	100	450.00	0	0	0.00	0.7	0.0	
9	400.00	11.12	0.00	150	100	400.00	0	0	0.00	2.1	0.0	
10	400.00	4.62	0.00	100	100	400.00	0	0	0.00	3.0	0.0	
11	400.00	2.58	3.00	100	100	400.00	0	0	0.00	1.0	0.0	
12	500.00	20.63	0.00	200	100	500.00	0	0	0.00	2.0	0.0	
13	500.00	7.45	0.00	150	100	500.00	0	0	0.00	1.2	0.0	
14	500.00	2.85	0.00	100	100	500.00	0	0	0.00	1.5	0.0	
15	500.00	8.96	0.00	150	100	500.00	0	0	0.00	1.8	0.0	
16	500.00	5.59	0.00	150	100	500.00	0	0	0.00	0.7	0.0	
17	500.00	26.44	3.00	200	100	500.00	0	0	0.00	3.2	0.0	
18	600.00	7.25	0.00	100	100	600.00	0	0	0.00	10.3	0.0	

OBS. RESULTADO OBTIDO POR NEWTON-RAPHSON EM

3 ITERACOES

TABELA 4.55 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS (CONTINUACAO)

TRECHO	COMPR. (M)	VAZAO (L/S)		SEGMENTO 1			SEGMENTO 2			PERDA DE CARGA (M)		
		CARR. 1	CARR. 2	DIAM. (MM)	CHW	COMPR. (M)	DIAM. (MM)	CHW	COMPR. (M)	CARR. 1	CARR. 2	
19	500.00	3.06	0.00	100	100	500.00	0	0	0.00	1.7	0.0	
20	600.00	6.54	0.00	100	100	600.00	0	0	0.00	8.7	0.0	
21	500.00	16.34	0.00	150	100	500.00	0	0	0.00	5.3	0.0	
22	500.00	35.55	0.00	250	100	500.00	0	0	0.00	1.9	0.0	
23	600.00	8.01	0.00	100	100	600.00	0	0	0.00	12.4	0.0	
24	100.00	169.00	0.00	500	100	100.00	0	0	0.00	0.2	0.0	
25	550.00	8.59	0.00	150	100	550.00	0	0	0.00	1.8	0.0	
26	200.00	18.43	0.00	200	100	200.00	0	0	0.00	0.7	0.0	

OBS. RESULTADO OBTIDO POR NEWTON-RAPHSON EM 3 ITERACOES

TABELA 4.56 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS

NO	CARR.	CARGA	PERDA DE	PRESSAO MINIMA	PRESSAO	ATIVIDADE
			(M)	(M)	(M)	DUAL
EQUACOES DE PRESSAO						
1	1	0.23	20.00	23.77	0.0	
2	1	1.24	20.00	27.76	0.0	
3	1	2.48	20.00	46.52	0.0	
4	1	5.16	20.00	39.84	0.0	
5	1	2.97	20.00	32.03	0.0	
6	1	2.21	20.00	28.79	0.0	
7	1	3.03	20.00	22.97	0.0	
8	1	3.79	20.00	30.21	0.0	
9	1	3.14	20.00	49.86	0.0	
10	1	5.23	20.00	45.77	0.0	
11	1	8.20	20.00	40.80	0.0	
12	1	7.19	20.00	37.81	0.0	
13	1	8.44	20.00	20.55	0.0	
14	1	6.92	20.00	35.08	0.0	
15	1	6.18	20.00	45.82	0.0	
16	1	16.44	20.00	18.56	0.0	
17	1	4.08	20.00	19.92	0.0	
18	1	18.16	20.00	20.84	0.0	
19	1	9.43	20.00	22.57	0.0	
EQUACOES DE ANEL						
1	1	0.00			0.0	
2	1	-0.00			0.0	
3	1	-0.00			0.0	
4	1	0.00			0.0	
5	1	0.00			0.0	
6	1	-0.00			0.0	
17	1	0.00			0.0	

## TABELA 4.57 RESUMO FINAL DO DIMENSIONAMENTO DA REDE

CUSTO TOTAL DAS TUBULACOES, CRS	7226181.50
COMPRIMENTO TOTAL DE TUBULACAO, M	11300.00

## DISCRIMINACAO DOS TOTAIS PARCIAIS

DIAMETRO NOMINAL, MM	COMPRIMENTO TOTAL, M	CUSTO UNITARIO, CRS/M	CUSTO TOTAL, CRS
100	4350.00	319.25	1388737.50
150	2950.00	531.58	1568161.00
200	2200.00	771.44	1697168.00
250	500.00	1050.19	525095.00
300	800.00	1344.06	1075248.00
350	400.00	1699.27	679708.00
500	100.00	2920.64	292064.00

O tempo total de processamento gasto pelo programa PORH nas cinco soluções e no posterior refinamento da melhor solução obtida foi de 686 segundos ( $\pm 135$  segundos/solução). Uma única solução com a versão que utiliza o programa TEMPO [Burroughs, 1974] na solução do problema de programação linear consumiu apenas 30 segundos. A razoável diferença no tempo de processamento para uma única solução obtida com as duas versões do programa POHR ocorre em razão do programa TEMPO [Burroughs, 1974] ser muito mais eficiente que as rotinas de programação linear do IMSL [1977]. Pode-se contudo minorar o problema do tempo de processamento observando que em geral algumas restrições de pressão nos nós são desnecessárias. Isto ocorre nos casos de restrições a nós que tenham elevações inferiores a de nós a montante, para os quais restrições de pressão são também formuladas. Como a perda de carga nos trechos é uma função monótona as restrições aos nós que estejam a montante serão necessariamente satisfeitas desde que as restrições para os nós a jusante sejam satisfeitas. A figura 4.4 é um esquema que mostra esta situação. Este esquema representa um corte, no qual é visto que o nó j tem elevação menor que a do nó k: Considerando que o nó i é um ponto de nível piezométrico conhecido pode-se ver que a restrição relativa a pressão mínima admissível no nó j ( $P_{min}^{(j)}$ ) é prescindível caso a restrição de pressão no nó ( $P_{min}^{(k)}$ ) seja considerada.

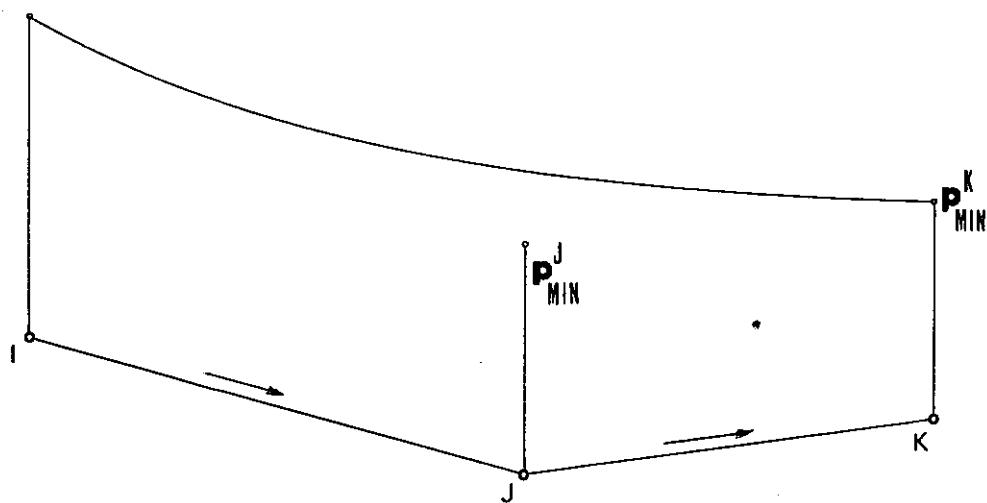


Figura 4.4 Esquema que exemplifica uma situação onde a restrição de pressão ao nó j é desnecessária.

Pelas considerações vistas pode ser observado que o excessivo tempo de processamento gasto neste exemplo pelo programa PORH poderia ser sensivelmente reduzido já que é sabido que os tempos de processamento em problemas de programação linear sofrem uma maior influência devido ao número de restrições do que pelo número de variáveis. Outros comentários a respeito da redução do tempo de processamento são vistos no ítem IV.2.5 onde são discutidos os resultados obtidos nos exemplos.

#### IV.2.3 - Exemplo nº 3

O especial interesse na rede deste exemplo (figura 4.3) está no fato de se tratar de um caso de expansão de rede. Na figura 4.4 os trechos já existentes são assinalados. A otimização heurística aplicada a este exemplo alcançou uma conformação, cujos os resultados da solução hidráulica para os nós e trechos respectivamente, são vistos nas tabelas 4.58 e 4.59. A tabela 4.60 mostra o custo final para esta solução. Somente os trechos dimensionados são discriminados. Os diâmetros considerados no dimensionamento são os mesmos utilizados pela firma Serete |1973|. Como no exemplo anterior esta solução utilizou a análise de sensibilidade das resistência dos trechos para se certificar que a solução alcançada aproxima o ótimo teórico. As tabelas 4.61 a 4.62 mostram as análises de sensibilidade em relação as resistências nos trechos 18 e 28, os quais são trechos que dispõem de alguma folga. Nelas fica indicado que as diminuições dos diâmetros nestes trechos certamente causarão o rompimento das restrições de pressão mínima de modo drástico uma vez que a pressão no nó 10 na solução heuristicamente avaliada já rompe ligeiramente o requisito de pressão mínima.

TABELA 4.58 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS

NO	DEMANDA (L/S)	ELEVACAO (M)	PRESSAO MINIMA (M)	ADMISSIVEL (M)	NIVEL PIEZOMETRICO (M)	PRESSAO DISPONIVEL (M)
1	140.00 *	864.50	23.50		888.00	23.50
2	-3.00	860.00	15.00		887.52 *	27.52
3	-8.00	859.00	15.00		885.33 *	26.33
4	0.00	862.90	15.00		885.58 *	22.68
5	0.00	864.10	15.00		887.64 *	23.54
6	0.00	862.20	15.00		884.92 *	22.72
7	-15.00	860.30	15.00		876.84 *	16.54
8	-7.00	856.00	15.00		880.02 *	24.02
9	-4.00	860.50	15.00		880.02 *	19.52
10	-5.00	859.00	15.00		873.99 *	14.99
11	-3.00	852.00	15.00		870.42 *	18.42
12	-3.00	848.00	15.00		869.72 *	21.72
13	-6.00	849.00	15.00		870.20 *	21.20
14	-3.00	838.00	15.00		873.97 *	35.97
15	0.00	861.00	15.00		885.51 *	24.51
16	-6.00	860.80	15.00		886.58 *	25.78
17	-6.00	848.50	15.00		882.04 *	33.54
18	-10.00	855.80	15.00		877.16 *	21.36

OBS.: VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCOGNITAS DO PROBLEMA

TABELA 4.58 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS (CONTINUACAO)

NO	DEMANDA (L/S)	ELEVACAO (M)	PRESSAO MINIMA ADMISSIVEL (M)	NIVEL PIEZOMETRICO (M)	PRESSAO DISPONIVEL (M)
19	-8.00	861.50	15.00	882.05 *	20.55
20	-5.00	859.50	15.00	887.05 *	27.55
21	-14.00	852.00	15.00	875.17 *	23.17
22	0.00	852.00	15.00	883.82 *	31.82
23	-9.00	855.00	15.00	883.90 *	28.90
24	-14.00	851.00	15.00	879.35 *	28.35
25	-11.00	854.60	15.00	880.37 *	25.77

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCOGNITAS DO PROBLEMA

TABELA 4.59 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS

NO TRECHO	NO MONTANTE	NO JUZANTE	COMPRIMENTO (M)	VAZAO (L/S)	DIAMETRO (MM)	CHW	RESISTENCIA F (L,D,CHW)	VELOCIDADE (M/S)	CARGA (M)	PERDA DE
										180
1	1	2	70.00	44.55	250	90	.42829E-03	0.91	0.48	
2	2	3	360.00	41.55	250	90	.22026E-02	0.85	2.19	
3	4	3	130.00	12.40	200	90	.23579E-02	0.39	0.25	
4	5	4	360.00	22.39	200	90	.65297E-02	0.71	2.07	
5	1	5	65.00	95.45	350	90	.77251E-04	0.99	0.36	
6	4	6	125.00	9.98	150	90	.92034E-02	0.56	0.65	
7	6	7	120.00	9.98	85	140	.11399E+00	2.26	8.08	
8	8	7	364.00	7.06	110	140	.85179E-01	0.90	3.18	
9	5	8	240.00	14.17	110	140	.56162E-01	1.80	7.62	
10	5	20	263.00	58.89	350	90	.31257E-03	0.61	0.59	
11	20	16	454.00	38.53	350	90	.53957E-03	0.40	0.47	
12	16	15	93.00	23.89	160	140	.30210E-02	1.35	1.08	
13	15	9	122.00	17.11	110	140	.28549E-01	2.16	5.49	
14	8	9	509.00	3.11	85	140	.48351E+00	0.02	0.01	
15	9	10	216.00	13.22	110	140	.50546E-01	1.68	6.03	
16	10	13	348.00	3.73	85	140	.33057E+00	0.84	3.79	
17	14	13	338.00	3.78	85	140	.32107E+00	0.86	3.77	
18	15	14	351.00	6.78	85	140	.33342E+00	1.53	11.54	

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCOGNITAS DO PROBLEMA

TABELA 4.59 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS (CONTINUACAO)

NO TRECHO	NO MONTANTE	NO JUZANTE	COMPRIMENTO (M)	VAZAO (L/S)	DIAMETRO (MM)	CHW	RESISTENCIA F (L,D,CHW)	VELOCIDADE (M/S)	PERDA DE CARGA
									(M)
19	13	12	235.00	1.51	85	140	.22323E+00	0.34	0.48
20	11	12	348.00	1.49	85	140	.33057E+00	0.34	0.69
21	10	11	233.00	4.49	85	140	.22133E+00	1.02	3.57
22	15	17	358.00	8.64	110	140	.83775E+01	1.10	4.54
23	19	17	282.00	0.18	85	140	.26738E+00	0.04	0.01
24	20	19	402.00	15.36	140	140	.31733E+01	1.25	5.00
25	19	18	543.00	7.18	110	140	.12707E+00	0.91	4.89
26	17	18	752.00	2.82	85	140	.71433E+00	0.64	4.88
27	7	21	468.00	2.05	85	140	.44456E+00	0.46	1.63
28	22	21	374.00	11.95	110	140	.87519E+01	1.52	3.66
29	23	22	116.00	11.95	250	90	.70973E-03	0.24	0.07
30	3	23	358.00	33.13	250	90	.21904E-02	0.67	1.43
31	3	25	246.00	12.82	125	90	.44014E-01	1.04	4.96
32	25	24	354.00	1.82	85	140	.33627E+00	0.41	1.02
33	23	24	248.00	12.18	125	90	.44371E-01	0.99	4.55

OBS. VALORES ASSINALADOS COM ASTERISCO INDICAM INCOGNITAS DO PROBLEMA

## TABELA 4.60 RESUMO FINAL DO DIMENSIONAMENTO DA REDE

CUSTO TOTAL DAS TUBULACOES, CR\$	1122551.64
COMPRIMENTO TOTAL DE TUBULACAO, M	7050.00

## DISCRIMINACAO DOS TOTAIS PARCIAIS

DIAMETRO NOMINAL, MM	COMPRIMENTO TOTAL, M	CUSTO UNITARIO, CR\$/M	CUSTO TOTAL, CR\$
85	4338.00	116.18	503988.84
110	2217.00	191.99	425641.83
140	402.00	369.30	148458.60
160	93.00	478.09	44462.37

TABELA 4.61 RESULTADOS DA ANALISE DE SENSIBILIDADE EM RELACAO A R 18

D 1	H 2	H 3	H 4	H 5	H 6	H 7	H 8	H 9	H 10
-0.000	-0.007	-0.041	-0.045	0.002	-0.094	-0.696	-1.216	-1.468	-5.445
H 11	H 12	H 13	H 14	H 15	H 16	H 17	H 18	H 19	H 20
-8.163	-9.749	-10.832	-19.523	0.232	0.078	0.054	0.052	0.051	0.037
H 21	H 22	H 23	H 24	H 25					
-0.359	-0.060	-0.058	-0.053	-0.046					

H - NIVEL PIEZOMETRICO D - DEMANDA R - RESISTENCIA

TABELA 4.62 RESULTADOS DA ANALISE DE SENSIBILIDADE EM RELACAO A R 28

D 1	H 2	H 3	H 4	H 5	H 6	H 7	H 8	H 9	H 10
0.000	0.212	1.241	0.636	-0.073	-0.822	-18.836	-6.628	-5.522	-4.985
H 11	H 12	H 13	H 14	H 15	H 16	H 17	H 18	H 19	H 20
-4.619	-4.404	-4.258	-3.085	-1.081	-0.404	-0.301	-0.292	-0.288	-0.224
H 21	H 22	H 23	H 24	H 25					
-59.436	3.604	3.313	2.727	1.848					

H - NIVEL PIEZOMETRICO D - DEMANDA R - RESISTENCIA

A solução com o modelo linear é vista no conjunto de tabelas que se seguem. Como nos exemplos anteriores as tabelas seguem uma ordem que indica os dados de entrada, os resultados parciais e a solução final. A tabela 4.63 indica os dados básicos do problema. A tabela 4.64 mostra a lista de diâmetros considerada para a solução com o modelo linear. As tabelas 4.65 e 4.66 mostram os dados relativos aos nós e trechos respectivamente. A tabela 4.67 indica a estrutura do problema de programação linear. Nela deve ser observado que as restrições de pressão mínima foram consideradas apenas para 15 dos 25 nós da rede, dado que para os demais nós, tais restrições são desnecessárias conforme explicado no exemplo anterior. Na tabela 4.67 é visto ainda que quatro válvulas (variáveis fictícias) são acrescidas ao problema para evitar a ocorrência de soluções não fáteis devido às restrições que incluem trechos existentes. As válvulas 1 e 2 cada qual para um possível sentido da vazão é considerada para os trechos 1, 2, 3, 4 e 5, sendo as válvulas 3 e 4 consideradas da mesma forma para o trecho 31.

A tabela 4.68 mostra os resultados parciais da busca por gradiente. A melhor solução obtida significou uma melhora de 17,2% sobre a solução inicialmente avaliada. As tabelas 4.69 e 4.70 mostram os resultados finais para os trechos e nós respectivamente. Como no exemplo anterior pode-se ver na tabela 4.69 que a solução obtida deverá ser submetida a um refinamento para a retirada dos segmentos irrigatórios. A tabela 4.71 mostra o resumo final do dimensionamento. O custo total ali visto é ligeiramente inferior ao apresentado na tabela 4.68. Isto

ocorre em razão de um pequeno resíduo da variável que representa o efeito da operação da válvula 1 permanecer na base. Desprezar este efeito, da ordem de 0,01 m, não altera em nada o equilíbrio hidráulico da rede.

O refinamento da solução alcançada a partir do mesmo critério adotado no exemplo anterior conduziu a solução vistas nas tabelas 4.72 e 4.73, onde são vistos os resultados para os trechos e nós respectivamente. A tabela 4.74 mostra o resumo final do dimensionamento. Nela rapidamente se verifica que esta solução é a mesma anteriormente obtida através da otimização heurística.

## EXEMPLO N.º 3 - REDE DA CIDADE DE APUCARANA

TABELA 4.63 DADOS BASICOS DA REDE

	VALOR
NUMERO DE TRECHOS	33
NUMERO DE NOS	25
NUMERO DE ANEIS	9
NUMERO DE DIFERENTES CARREGAMENTOS DA REDE	1
NUMERO DE BOMBAS	0
NUMERO DE VALVULAS	3
NUMERO DE VARIAVEIS FICTICIAS	4
NUMERO DE RESERVATORIOS	0
DIAMETRO MINIMO ADMISSIVEL, MM	85
DIAMETRO MAXIMO ADMISSIVEL, MM	250
VELOCIDADE MINIMA ADMISSIVEL, M/S	0.30
VELOCIDADE MAXIMA ADMISSIVEL, M/S	2.50
INCREMENTO INICIAL, L/S	0.3

TABELA 4.64 DADOS BASICOS DOS TUBOS

DIAMETRO NOMINAL (MM)	CLASSE	COEFICIENTE DE RUGOSIDADE	CUSTO UNITARIO (CR\$/M)
85	12	140	116.18
110	12	140	191.99
140	12	140	369.30
160	12	140	478.09
200	K9	100	771.44
250	K9	100	1053.19

TABELA 4.65 DADOS DOS NOS

## PRESSAO MINIMA

NO	ELEVACAO (M)	ADMISSIVEL		DEMANDA (L/S)	
		CARR. 1	CARR. 2	CARR. 1	CARR. 2
1	864.50	23.50	0.00	140.00	0.00
2	850.00	15.00	0.00	-3.00	0.00
3	859.00	15.00	0.00	-8.00	0.00
4	852.00	15.00	0.00	0.00	0.00
5	864.00	15.00	0.00	0.00	0.00
6	852.20	15.00	0.00	0.00	0.00
7	860.30	15.00	0.00	-15.00	0.00
8	856.00	15.00	0.00	-7.00	0.00
9	860.50	15.00	0.00	-4.00	0.00
10	859.00	15.00	0.00	-5.00	0.00
11	852.00	15.00	0.00	-3.00	0.00
12	848.00	15.00	0.00	-3.00	0.00
13	849.00	15.00	0.00	-6.00	0.00
14	838.00	15.00	0.00	-3.00	0.00
15	861.00	15.00	0.00	0.00	0.00
16	860.80	15.00	0.00	-6.00	0.00
17	848.50	15.00	0.00	-6.00	0.00
18	855.80	15.00	0.00	-10.00	0.00
19	861.50	15.00	0.00	-8.00	0.00
20	859.50	15.00	0.00	-5.00	0.00
21	852.00	15.00	0.00	-14.00	0.00
22	852.00	15.00	0.00	0.00	0.00
23	855.00	15.00	0.00	-9.00	0.00
24	851.00	15.00	0.00	-14.00	0.00
25	854.00	15.00	0.00	-11.00	0.00

DBS. DEMANDAS POSITIVAS INDICAM ENTRADA NO NO  
DEMANDAS NEGATIVAS INDICAM SAIDA DO NO

TABELA 4.66 DADOS DOS TRECHOS

RANGE DOS

DIAMETROS DISTRIBUICAO INICIAL DAS VAZOES

TRECHO	COMPRIMENTO (M)	ADMISSIVEIS (MM)	DIAMETROS (L/S) CARREGAMENTO 1	DIAMETROS (L/S) CARREGAMENTO 2	SELECCIONADOS (MM)
1	70.00	85 - 250	45.60	0.00	250
2	360.00	85 - 250	42.60	0.00	250
3	130.00	85 - 250	10.20	0.00	200
4	360.00	85 - 250	23.60	0.00	200
5	65.00	85 - 250	94.40	0.00	350
6	125.00	85 - 250	13.40	0.00	150
7	120.00	85 - 250	13.40	0.00	110, 140, 160, 200
8	364.00	85 - 250	4.80	0.00	85, 110, 140
9	240.00	85 - 250	13.50	0.00	110, 140, 160, 200
10	263.00	85 - 250	57.30	0.00	350
11	454.00	85 - 250	37.30	0.00	350
12	93.00	85 - 250	22.30	0.00	140, 160, 200, 250
13	122.00	85 - 250	16.20	0.00	110, 140, 160, 200, 250
14	509.00	85 - 250	1.70	0.00	85
15	216.00	85 - 250	13.90	0.00	110, 140, 160, 200
16	348.00	85 - 250	5.50	0.00	85, 110, 140, 160
17	338.00	85 - 250	3.10	0.00	85, 110
18	351.00	85 - 250	6.10	0.00	85, 110, 140, 160

TABELA 4.66 DADOS DOS TRECHOS (CONTINUACAO)

TRECHO	COMPRIMENTO (M)	DIAMETROS ADMISSIVEIS		DISTRIBUICAO INICIAL DAS VAZOES		DIAMETROS SELECIONADOS (MM)	
				(L/S)	CARREGAMENTO 1		
		(MM)	RANGE DOS				
19	235.00	85 - 250		2.60	0.00	85, 110	
20	348.00	85 - 250		0.40	0.00	85	
21	233.00	85 - 250		3.40	0.00	85, 110	
22	358.00	85 - 250		9.00	0.00	85, 110, 140, 160	
23	282.00	85 - 250		1.30	0.00	85	
24	402.00	85 - 250		15.00	0.00	110, 140, 160, 200, 250	
25	543.00	85 - 250		5.70	0.00	85, 110, 140, 160	
26	752.00	85 - 250		4.30	0.00	85, 110, 140	
27	468.00	85 - 250		3.20	0.00	85, 110	
28	374.00	85 - 250		10.80	0.00	85, 110, 140, 160, 200	
29	116.00	85 - 250		10.80	0.00	250	
30	358.00	85 - 250		31.60	0.00	250	
31	246.00	85 - 250		13.20	0.00	125	
32	354.00	85 - 250		2.20	0.00	85	
33	248.00	85 - 250		11.80	0.00	125	

TABELA 4.67 ESTRUTURA INICIAL DO PROBLEMA LINEAR

NO INICIAL	NO FINAL	NO CARR. ENTRE OS VOS	NUMERO DE ORDEM DOS TRECHOS CONECTADOS	NUMERO DE ORDEM DOS ELEMENTOS	HIDRAULICOS	
					BOMBAS	VALVULAS RESERVATORIOS

## EQUACOES DE PRESSAO

1	7	1	5, 9, 8		1, -2
1	8	1	5, 9		1, -2
1	9	1	5, 9, 14		1, -2
1	10	1	5, 9, 14, 15		1, -2
1	11	1	5, 9, 14, 15, 21		1, -2
1	12	1	5, 9, 14, 15, 16, 19		1, -2
1	13	1	5, 9, 14, 15, 16		1, -2
1	14	1	5, 9, 14, -13, 18		1, -2
1	16	1	5, 9, -14, -13, -12		1, -2
1	17	1	5, 10, 24, 23		1, -2
1	18	1	5, 10, 24, 25		1, -2
1	19	1	5, 10, 24		1, -2
1	21	1	5, 9, 8, 27		1, -2
1	22	1	5, 9, 8, 27, -28		1, -2
1	24	1	1, 2, 31, 32		3, -4

## EQUACOES DE ANEL

1	1	1	1, 2, -3, -4, -5	1, -2
3	3	1	31, 32, -33, -30	3, -4
4	4	1	6, 7, -8, -9, 4	

OBS. AS RESTRICOES INCLUEM 81 VARIAVEIS, 15 EQUACOES DE PRESSAO, 3 EQUACOES DE FONTE,  
 9 EQUACOES DE ANEL E 33 EQUACOES DE TRECHO

TABELA 4.67 ESTRUTURA INICIAL DO PROBLEMA LINEAR (CONTINUACAO)

NO	NO	NUMERO DE ORDEM DOS TRECHOS CONECTADOS	NUMERO DE ORDEM DOS ELEMENTOS
INICIAL	FINAL	CARR. ENTRE OS NOS	HIDRAULICOS
			BOMBAS VALVULAS RESERVATORIOS

## EQUACOES DE ANEL

5	5	1	9, 14,-13,-12,-11,-10
9	9	1	15, 16,-17,-18, 13
7	7	1	-7, -6, 3, 30, 29, 28,-27
10	10	1	21, 20,-19,-16
16	16	1	22,-23,-24, 11
17	17	1	26,-25, 23

OBS. AS RESTRICOES INCLUEM 81 VARIAVEIS, 15 EQUACOES DE PRESSAO, 0 EQUACOES DE FONTE,  
 9 EQUACOES DE ANEL E 33 EQUACOES DE TRECHO

TABELA 4.68 RESULTADOS PARCIAIS

VALOR DA FUNCAO OBJETIVO

ITERACAO

(CR\$)

1	1273957.58
2	1143563.75
3	1098063.41
4	1113682.02
5	1089405.30
6	1094981.44
7	1068550.28
8	1052588.46
9	1063406.34

TABELA 4.69 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS

TRECHO	VAZAO			SEGMENTO 1			SEGMENTO 2			PERDA DE CARGA		
	COMPR. (M)	COMPR. (L/S) CARR. 1	COMPR. (L/S) CARR. 2	DIAM. (MM)	CHW	COMPR. (M)	DIAM. (MM)	CHW	COMPR. (M)	CARR. 1 (M)	CARR. 2 (M)	
1	70.00	45.48	0.00	250	90	70.00	0	0	0.00	0.5	0.0	
2	360.00	42.48	0.00	250	90	360.00	0	0	0.00	2.3	0.0	
3	130.00	11.41	0.00	200	90	130.00	0	0	0.00	0.2	0.0	
4	360.00	23.34	0.00	200	90	360.00	0	0	0.00	2.2	0.0	
5	65.00	94.52	0.00	350	90	65.00	0	0	0.00	0.4	0.0	
6	125.00	11.93	0.00	150	90	125.00	0	0	0.00	0.9	0.0	
7	120.00	11.93	0.00	85	140	90.94	110	140	29.06	9.2	0.0	
8	364.00	5.18	0.00	85	140	250.98	110	140	113.02	5.6	0.0	
9	240.00	13.25	0.00	85	140	0.42	110	140	239.58	6.8	0.0	
10	263.00	57.93	0.00	350	90	263.00	0	0	0.00	0.6	0.0	
11	454.00	36.60	0.00	350	90	454.00	0	0	0.00	0.4	0.0	
12	93.00	22.93	0.00	140	140	22.96	160	140	70.04	1.4	0.0	
13	122.00	16.20	0.00	110	140	122.00	0	0	0.00	5.0	0.0	
14	509.00	1.07	0.00	85	140	509.00	0	0	0.00	0.5	0.0	
15	216.00	13.27	0.00	85	140	2.91	110	140	213.09	6.3	0.0	
16	348.00	3.78	0.00	85	140	334.74	110	140	13.26	3.8	0.0	
17	338.00	3.73	0.00	85	140	338.00	0	0	0.00	3.7	0.0	
18	351.00	6.73	0.00	85	140	351.00	0	0	0.00	11.4	0.0	

TABELA 4.69 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS (CONTINUACAO)

TRECHO	VAZAO			SEGMENTO 1			SEGMENTO 2			PERDA DE CARGA		
	COMPR.	CL/S		DIAM.	CHW	COMPR.	DIAM.	CHW	COMPR.	(M)		
		(M)	CARR. 1	CARR. 2	(MM)	(M)	(MM)	(M)	CARR. 1	CARR. 2		
19	235.00	1.51	0.00	85	140	235.00	0	0	0.00	0.5	0.0	
20	348.00	1.49	0.00	85	140	348.00	0	0	0.00	0.7	0.0	
21	233.00	4.49	0.00	85	140	233.00	0	0	0.00	3.6	0.0	
22	358.00	7.68	0.00	85	140	217.97	110	140	140.03	10.5	0.0	
23	282.00	1.30	0.00	85	140	282.00	0	0	0.00	0.4	0.0	
24	402.00	16.32	0.00	110	140	177.33	140	140	224.67	10.4	0.0	
25	543.00	7.02	0.00	85	140	42.37	110	140	500.63	5.8	0.0	
26	752.00	2.98	0.00	85	140	752.00	0	0	0.00	5.4	0.0	
27	468.00	2.11	0.00	85	140	468.00	0	0	0.00	1.8	0.0	
28	374.00	11.89	0.00	85	140	22.76	110	140	351.24	10.2	0.0	
29	116.00	11.89	0.00	250	90	116.00	0	0	0.00	0.1	0.0	
30	358.00	33.07	0.00	250	90	358.00	0	0	0.00	1.4	0.0	
31	246.00	12.82	0.00	125	90	246.00	0	0	0.00	5.0	0.0	
32	354.00	1.82	0.00	85	140	351.75	110	140	2.25	1.0	0.0	
33	248.00	12.18	0.00	125	90	248.00	0	0	0.00	4.5	0.0	

TABELA 4.70 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS

NO	CARR.	CARGA	PERDA DE	PRESSAO MINIMA	PRESSAO	ATIVIDADE
			(M)	(M)	(M)	

## EQUACOES DE PRESSAO

7	1	12.70	15.00	15.00	71.9
8	1	7.13	15.00	24.87	0.0
9	1	7.68	15.00	19.82	0.0
10	1	14.00	15.00	15.00	29.3
11	1	17.57	15.00	18.43	0.0
12	1	18.26	15.00	21.74	0.0
13	1	17.78	15.00	21.22	0.0
14	1	14.10	15.00	35.90	0.0
15	1	1.37	15.00	25.83	0.0
17	1	11.82	15.00	27.68	0.0
18	1	17.20	15.00	15.00	89.2
19	1	11.38	15.00	15.12	0.0
21	1	14.48	15.00	21.52	0.0
22	1	4.31	15.00	31.69	0.0
24	1	8.76	15.00	28.24	0.0

## EQUACOES DE ANEL

1	1	0.00	-1193.4
3	1	-0.00	349.2
4	1	-0.00	21.5
5	1	-0.00	-70.8
9	1	0.00	-20.5
7	1	-0.00	10.8
10	1	-0.00	-110.5
16	1	-0.00	24.3
17	1	-0.00	63.5

TABELA 4.71 RESUMO FINAL DO DIMENSIONAMENTO DA REDE

CUSTO TOTAL DAS TUBULACOES, CR\$	1051249.22
COMPRIMENTO TOTAL DE TUBULACAO, M	7050.00

DISCRIMINACAO DOS TOTAIS PARCIAIS

DIAMETRO NOMINAL, MM	COMPRIMENTO TOTAL, M	CUSTO UNITARIO, CR\$/M	CUSTO TOTAL, CR\$
85	4830.84	116.18	561246.53
110	1901.49	191.99	365037.86
140	247.63	369.30	91450.67
160	70.04	478.09	33484.15

TABELA 4.72 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS

TRECHO	VAZAO			SEGMENTO 1			SEGMENTO 2			PERDA DE CARGA		
	COMPR.	(L/S)		DIAM.	CHW	COMPR.	DIAM.	CHW	COMPR.	(M)		
	(M)	CARR. 1	CARR. 2	(MM)		(M)	(MM)		(M)	CARR. 1	CARR. 2	
1	70.00	44.31	0.00	250	90	70.00	0	0	0.00	3.5	0.0	
2	360.00	41.31	0.00	250	90	360.00	0	0	0.00	2.2	0.0	
3	130.00	12.09	0.00	200	90	130.00	0	0	0.00	0.2	0.0	
4	360.00	22.29	0.00	200	90	360.00	0	0	0.00	2.0	0.0	
5	65.00	95.69	0.00	350	90	65.00	0	0	0.00	0.4	0.0	
6	125.00	10.19	0.00	150	90	125.00	0	0	0.00	0.7	0.0	
7	120.00	10.19	0.00	85	140	120.00	0	0	0.00	4.6	0.0	
8	364.00	7.40	0.00	110	140	364.00	0	0	0.00	2.2	0.0	
9	240.00	14.68	0.00	110	140	240.00	0	0	0.00	5.1	0.0	
10	263.00	58.73	0.00	350	90	263.00	0	0	0.00	0.6	0.0	
11	454.00	37.99	0.00	350	90	454.00	0	0	0.00	0.5	0.0	
12	93.00	23.73	0.00	160	140	93.00	0	0	0.00	0.8	0.0	
13	122.00	16.73	0.00	110	140	122.00	0	0	0.00	3.3	0.0	
14	509.00	0.27	0.00	85	140	509.00	0	0	0.00	0.0	0.0	
15	216.00	13.01	0.00	110	140	216.00	0	0	0.00	3.7	0.0	
16	348.00	3.60	0.00	85	140	348.00	0	0	0.00	1.9	0.0	
17	338.00	3.99	0.00	85	140	338.00	0	0	0.00	2.3	0.0	
18	351.00	6.99	0.00	85	140	351.00	0	0	0.00	6.6	0.0	

OBS. RESULTADO OBTIDO POR NEWTON-RAPHSON EM 4 ITERACOES

TABELA 4.72 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS (CONTINUACAO)

TRECHO	VAZAO			SEGMENTO 1			SEGMENTO 2			PERDA DE CARGA		
	COMPR. (M)	(L/S)		DIAM. (MM)	CHW	COMPR. (M)	DIAM. (MM)	CHW	COMPR. (M)	(M)		
		CARR. 1	CARR. 2							CARR. 1	CARR. 2	
19	235.00	1.59	0.00	85	140	235.00	0	0	0.00	0.3	0.0	
20	348.00	1.41	0.00	85	140	348.00	0	0	0.00	0.3	0.0	
21	233.00	4.41	0.00	85	140	233.00	0	0	0.00	1.9	0.0	
22	358.00	8.26	0.00	110	140	358.00	0	0	0.00	2.6	0.0	
23	282.00	0.70	0.00	85	140	282.00	0	0	0.00	0.1	0.0	
24	402.00	15.74	0.00	140	140	402.00	0	0	0.00	3.0	0.0	
25	543.00	7.04	0.00	110	140	543.00	0	0	0.00	3.0	0.0	
26	752.00	2.96	0.00	85	140	752.00	0	0	0.00	2.9	0.0	
27	468.00	2.60	0.00	85	140	468.00	0	0	0.00	1.4	0.0	
28	374.00	11.40	0.00	110	140	374.00	0	0	0.00	5.0	0.0	
29	116.00	11.40	0.00	250	90	116.00	0	0	0.00	0.1	0.0	
30	358.00	32.38	0.00	250	90	358.00	0	0	0.00	1.4	0.0	
31	246.00	13.02	0.00	125	90	246.00	0	0	0.00	5.1	0.0	
32	354.00	2.02	0.00	85	140	354.00	0	0	0.00	0.7	0.0	
33	248.00	11.98	0.00	125	90	248.00	0	0	0.00	4.4	0.0	

OBS. RESULTADO OBTIDO POR NEWTON-RAPHSON EM 4 ITERACOES

TABELA 4.73 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS

NO	CARR.	CARGA	PERDA DE	PRESSAO MINIMA	PRESSAO	ATIVIDADE
			(M)	(M)	(M)	DUAL

## EQUACOES DE PRESSAO

7	1	7.65	15.00	20.05	0.0
8	1	5.47	15.00	26.53	0.0
9	1	5.49	15.00	22.01	0.0
10	1	9.17	15.00	19.83	0.0
11	1	11.05	15.00	24.95	0.0
12	1	11.39	15.00	28.61	0.0
13	1	11.10	15.00	27.90	0.0
14	1	8.83	15.00	41.17	0.0
16	1	1.40	15.00	25.80	0.0
17	1	4.03	15.00	35.47	0.0
18	1	6.93	15.00	25.27	0.0
19	1	3.95	15.00	22.54	0.0
21	1	9.07	15.00	26.93	0.0
22	1	4.08	15.00	31.92	0.0
24	1	8.43	15.00	28.57	0.0

## EQUACOES DE ANEL

1	1	-0.00		0.0
3	1	0.00		0.0
4	1	-0.00		0.0
5	1	0.00		0.0
9	1	-0.00		0.0
7	1	0.00		0.0
10	1	0.00		0.0
16	1	0.00		0.0
17	1	-0.00		0.0

TABELA 4.74 RESUMO FINAL DO DIMENSIONAMENTO DA REDE

CUSTO TOTAL DAS TUBULACOES, CRS	1122551.64		
COMPRIMENTO TOTAL DE TUBULACAO, M	7050.00		
<u>DISCRIMINACAO DOS TOTAIS PARCIAIS</u>			
DIAMETRO NOMINAL, MM	COMPRIMENTO TOTAL, M	CUSTO UNITARIO, CRS/M	CUSTO TOTAL, CRS
85	4338.00	116.18	503983.84
110	2217.00	191.99	425641.83
140	402.00	369.30	148458.60
160	93.00	478.39	44462.37

O tempo total de processamento gasto pelo programa PORH nas 9 soluções e no posterior refinamento da melhor solução obtida foi de 1404 segundo ( $\pm 150$  segundos/solução). Uma única solução com a versão que utiliza o programa TEMPO [Burroughs, 1974] na solução do problema de programação linear consumiu apenas 32 segundos. Os resultados obtidos são discutidos no Ítem IV.2.5.

#### IV.2.4 - Exemplo nº 4

A rede deste exemplo é uma extensão da rede da figura 4.1. A inclusão de uma bomba e de um reservatório aliados a consideração de dois carregamentos para o dimensionamento da rede, fornecem os elementos necessários para caracterizar um exemplo onde se possa aplicar plenamente as características do modelo linear. A figura 4.5 mostra o esquema da rede com a nova conformação.

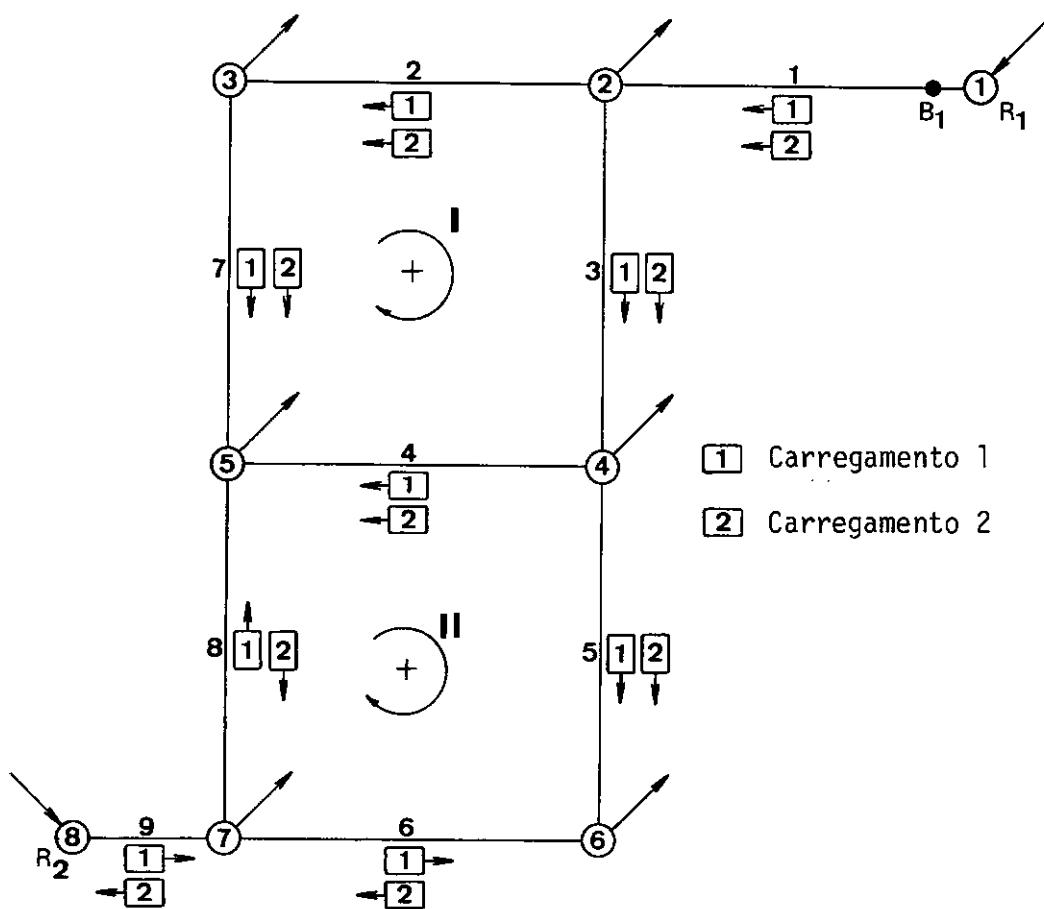


Figura 4.5 Esquema representativo da extensão da rede da figura 4.1 para a inclusão de dispositivos hidráulicos(exemplo nº 4)

Na tabela 4.75 são vistos os dados básicos para o dimensionamento da rede. Na tabela 4.76 é vista a função de custo para a bomba. Esta função foi aproximada a partir de custos válidos em junho de 1979. Os custos de energia estão incluídos de acordo com o custo da energia consumida por um HP de potência em um ano. Outras implicações que interférem nesta função não foram consideradas já que o objetivo deste exemplo é de apenas validar o modelo linear para a consideração de dispositivos hidráulicos. A tabela 4.77 mostra a lista de diâmetros considerados na solução. Na tabela 4.78 são vistos os dados referentes aos nós. Nela observa-se que o carregamento 2 é relativo ao enchimento do reservatório situado no nó 9 num período de baixo consumo. A tabela 4.79 apresenta os dados relativos aos trechos. Os diâmetros inicialmente selecionados para os trechos são obtidos como função da maior vazão que ocorre em cada trecho. Na tabela 4.80 é vista a estrutura assumida pelo problema de programação linear. Nela pode-se ver que as restrições de pressão nos nós são relativas apenas ao carregamento 1, bem como estas restrições consideram unicamente os requisitos de pressão mínima. São também assinaladas as restrições relativas ao equilíbrio hidráulico da rede. Duas equações de equilíbrio entre os reservatórios (equações de fonte) são necessárias, uma para cada carregamento considerado. Da mesma forma quatro são as equações de anel. A cada anel duas equações de equilíbrio são observadas, cada qual relativa a um dos dois carregamentos assumidos. Pode ser notado também, de que modo são incluídas as variáveis que representam a ação dos elementos hidráulicos considerados. Observa-se que com um efeito similar ao da bomba é

aceita a hipótese de uma adicional elevação do reservatório localizado no nó 9. O custo para esta eventual elevação foi assumido igual a Cr\$ 15.000,00/m. Na tabela 4.80 vê-se ainda que seis variáveis fictícias (válvulas) são acrescentadas ao problema. Cada qual relacionada aos possíveis sentidos das vazões nas seis equações de equilíbrio da rede, no caso, as duas equações de fonte e as quatro equações de anel. A tabela 4.81 mostra os resultados parciais da busca por gradiente. A busca terminou devido a próxima solução conduzir, no trecho 7, a uma vazão menor que a mínima permitida. Tal como nos dois exemplos anteriores, é permitido neste exemplo atingir-se uma vazão mínima a qual é relativa a um diâmetro de 60 mm e a velocidade mínima de 0,8 m/s. As tabelas 4.82 e 4.83 apresentam a solução final para os trechos e nós respectivamente. A tabela 4.84 mostra o custo das tubulações dimensionadas. Logo abaixo desta tabela são vistos os resultados para os elementos hidráulicos. Pode-se ver que a bomba foi retirada na solução, prevalecendo como melhor opção a elevação do reservatório do nó 9. Esta elevação é de 4,62 m e significa um custo adicional de Cr\$ 69.300,00. Nesta solução ocorre ainda que a variável fictícia 1 permanece na base indicando deste modo que uma válvula deve ser considerada no trecho 1. Esta válvula só operará quando a rede estiver submetida ao carregamento 1, quando então deverá causar uma perda de 10.26 m.

O tempo de processamento gasto nas três iterações pelo programa PORH foi de 74,5 segundos ( $\pm$  25 segundos/solução). Uma única solução com a versão que emprega o programa

TEMPO | Burroughs, 1974 | consomiu apenas 5 segundos.

A discussão dos resultados alcançados neste exemplo bem como os alcançados nos demais exemplos é vista no item IV.2.5.

## EXEMPLO NO. 4 - REDE SIMPLES COM ELEMENTOS HIDRAULICOS

TABELA 4.75 DADOS BASICOS DA REDE

	VALOR
NUMERO DE TRECHOS	9
NUMERO DE NOS	8
NUMERO DE ANEIS	2
NUMERO DE DIFERENTES CARREGAMENTOS DA REDE	2
NUMERO DE BOMBAS	1
NUMERO DE VALVULAS	0
NUMERO DE VARIAVEIS FICTICIAS	6
NUMERO DE RESERVATORIOS	1
DIAMETRO MINIMO ADMISSIVEL, MM	100
DIAMETRO MAXIMO ADMISSIVEL, MM	600
CAPACIDADE MAXIMA DAS BOMBAS, HP	60
VELOCIDADE MINIMA ADMISSIVEL, M/S	0.30
VELOCIDADE MAXIMA ADMISSIVEL, M/S	2.50
INCREMENTO INICIAL, L/S	1.5

TABELA 4.76 DADOS BASICOS DAS BOMBAS

## FUNCAO DE CUSTO

HP	CUSTO, CR\$/HP
1	17700.00
3	16000.00
5	15900.00
10	15200.00
20	15000.00
30	15000.00
40	15000.00
60	15000.00

TABELA 4.77 DADOS BASICOS DOS TUBOS

DIAMETRO NOMINAL (MM)	CLASSE	COEFICIENTE DE RUGOSIDADE	CUSTO UNITARIO (CRS/M)
100	K9	100	319.25
150	K9	100	531.58
200	K9	100	771.44
250	K9	100	1050.19
300	K9	100	1344.06
350	K9	100	1699.27
400	K9	100	2064.74
450	K9	100	2486.38
500	K9	100	2920.64
600	K9	100	3890.38

TABELA 4.78 DADOS DOS NOS

NO	ELEVACAO (M)	PRESSAO MINIMA		DEMANDA (L/S)	
		ADMISSIVEL		CARR. 1	CARR. 2
		CARR. 1	CARR. 2		
1	200.00	10.00	10.00	116.67	83.33
2	150.00	30.00	30.00	-27.78	0.00
3	160.00	30.00	30.00	-27.78	0.00
4	155.00	30.00	30.00	-33.33	0.00
5	150.00	30.00	30.00	-75.00	0.00
6	165.00	30.00	30.00	-91.67	0.00
7	160.00	30.00	30.00	-55.55	0.00
8	195.50	0.00	0.00	194.44	-83.33

OBS. DEMANDAS POSITIVAS INDICAM ENTRADA NO NO  
 DEMANDAS NEGATIVAS INDICAM SAIDA DO NO

TABELA 4.79 DADOS DOS TRECHOS

RANGE DOS

DIAMETROS DISTRIBUICAO INICIAL DAS VAZOES

TRECHO	COMPRIMENTO (M)	ADMISSIVEIS (MM)	(L/S)		DIAMETROS SELECIONADOS (MM)
			CARREGAMENTO 1	CARREGAMENTO 2	
1	1000.00	100 - 600	116.67	83.33	250, 300, 350, 400, 450
2	1000.00	100 - 600	30.56	27.78	150, 200, 250, 300, 350
3	1000.00	100 - 600	58.33	55.56	200, 250, 300, 350, 400
4	1000.00	100 - 600	2.78	27.77	150, 200, 250, 300
5	1000.00	100 - 600	22.22	27.78	150, 200, 250, 300
6	1000.00	100 - 600	69.44	27.78	200, 250, 300, 350, 400
7	1000.00	100 - 600	2.78	27.78	150, 200, 250, 300
8	1000.00	100 - 600	69.44	55.56	200, 250, 300, 350, 400
9	100.00	100 - 600	194.44	83.33	350, 400, 450, 500, 600

TABELA 4.80 ESTRUTURA INICIAL DO PROBLEMA LINEAR

NO INICIAL	NO FINAL	NO CARR. ENTRE OS NOS	NUMERO DE ORDEM DOS TRECHOS CONECTADOS	NUMERO DE ORDEM DOS ELEMENTOS		
				HIDRAULICOS	BOMBAS	VALVULAS RESERVATORIOS

## EQUACOES DE PRESSAO

1	3	1	1, 2	-1		
1	4	1	1, 3	-1		
1	5	1	1, 3, 4	-1		
1	6	1	1, 3, 5	-1		
8	7	1	9			1

## EQUACOES DE FONTE

1	8	1	1, 3, 5, -6, -9	-1	1	-1
1	8	2	1, 3, 5, 6, 9	-1	2	-1

## EQUACOES DE ANEL

2	2	1	3, 4, -7, -2	-3, 4	
2	2	2	3, 4, -7, -2	-3, 4	
4	4	1	5, -6, 8, -4	-5, 6	
4	4	2	5, 6, -8, -4	-5, 6	

OBS. AS RESTRICOES INCLUEM 51 VARIAVEIS, 5 EQUACOES DE PRESSAO, 2 EQUACOES DE FONTE,  
 4 EQUACOES DE ANEL E 9 EQUACOES DE TRECHO

TABELA 4.81 RESULTADOS PARCIAIS

ITERACAO	CUSTO TOTAL DA REDE (CR\$)	ANEL 1				ANEL 2			
		AB / AG	W	G	DG	AB / AG	W	G	DG
1	10433665.77	0.260 0.659	0 597	3 394	-0.00 0.88	0.375 0.559	-605 1204	-227 672	-1.50 1.50
2	10358581.62	0.303 0.674	260 304	79 205	0.40 0.53	0.443 0.606	-667 958	-295 581	-1.50 1.50
3	10267010.79	0.374 0.718	359 198	134 142	0.72 0.40	0.404 0.572	-687 937	-278 535	-1.50 1.50

TABELA 4.82 RESULTADOS FINAIS PARA OS TRECHOS

TRECHO	VAZAO			SEGMENTO 1			SEGMENTO 2			PERDA DE CARGA		
	COMPR. (M)	COMPR. (L/S) CARR. 1	COMPR. (L/S) CARR. 2	DIAM. (MM)	CH <sub>n</sub>	COMPR. (M)	DIAM. (MM)	CH <sub>n</sub>	COMPR. (M)	CARR. 1 (M)	CARR. 2 (M)	
1	1000.00	116.67	83.33	350	100	1000.00	0	0	0.00	6.6	3.5	
2	1000.00	29.43	25.97	200	100	779.90	250	100	220.10	6.7	5.3	
3	1000.00	59.46	57.37	250	100	342.87	300	100	657.13	6.0	5.6	
4	1000.00	8.41	25.08	200	100	1000.00	0	0	0.00	3.3	5.8	
5	1000.00	17.72	32.28	200	100	702.25	250	100	297.75	2.5	7.5	
6	1000.00	73.94	32.28	250	100	47.68	300	100	952.32	6.4	1.4	
7	1000.00	1.65	25.97	200	100	970.16	250	100	29.84	0.0	6.1	
8	1000.00	64.94	51.06	300	100	1000.00	0	0	0.00	4.7	3.0	
9	100.00	194.44	83.33	450	100	100.00	0	0	0.00	0.5	0.1	

TABELA 4.83 RESULTADOS FINAIS PARA OS NOS

NO	CARR.	CARGA	PERDA DE	PRESSAO MINIMA	PRESSAO	ATIVIDADE
			(M)	(M)	(M)	DUAL
EQUACOES DE PRESSAO						
3	1	13.27	30.00	36.73	0.0	
4	1	12.54	30.00	42.46	0.0	
5	1	13.31	30.00	46.69	0.0	
6	1	15.00	30.00	30.00	1070.7	
7	1	4.05	30.00	31.45	0.0	
EQUACOES DE FUNTE						
8	1	14.50			-1000.0	
8	2	14.50			1150.0	
EQUACOES DE ANEL						
2	1	-0.00			-0.0	
2	2	-0.00			-676.6	
4	1	-0.00			699.8	
4	2	-0.00			-951.3	

TABELA 4.84 RESUMO FINAL DO DIMENSIONAMENTO DA REDE

CUSTO TOTAL DAS TUBULACOES, CR\$	9103742.50		
COMPRIMENTO TOTAL DE TUBULACAO, M	8100.00		
DISCRIMINACAO DOS TOTAIS PARCIAIS			
DIAMETRO NOMINAL, MM	COMPRIMENTO TOTAL, M		
	CUSTO UNITARIO, CR\$/M		
	CUSTO TOTAL, CR\$		
200	3452.31	771.44	2663253.79
250	938.24	1050.19	985331.58
300	2609.44	1344.06	3507249.13
350	1000.00	1699.27	1699270.00
450	100.00	2486.34	248633.00

#### IV.2.5 - Discussão dos Resultados

Apesar dos programas PARH e PORH não terem sido utilizados em redes realmente complexas, pode-se obter da experiência computacional com os exemplos apresentados um conjunto de informações que indicam as reais possibilidades do emprego das metodologias estudadas, bem como permitem inferir algumas conclusões a respeito do dimensionamento por programação linear das redes de distribuição de água.

Um fato que pode ser inicialmente citado é quanto aos critérios de projeto (limites de velocidades, diâmetros mínimos admissíveis entre outros). Nenhuma comparação foi feita em relação aos custos das soluções apresentadas por Martins [1973] e pela firma Serete [1973] nos exemplos 2 e 3, respectivamente, devido ao fato dos critérios utilizados não serem uniformes. De um modo geral cada companhia de saneamento no Brasil possui seus próprios critérios para o dimensionamento das redes de distribuição. Estes critérios ditados pela experiência profissional, principalmente os relativos aos limites de velocidade e aos diâmetros mínimos admissíveis, variam muito provocando desta forma uma discrepância nas soluções. No exemplo nº 3 pode ser observado que na solução proposta pela firma Serete [1973] optou-se claramente por um projeto conservador. Esta solução é 31,5% mais onerosa que a solução heuristicaamente avaliada segundo os critérios e custos empregados neste trabalho. Isto evidencia que os critérios que condicionam o dimensionamento de redes de distribuição devem ser melhor explicitados já que o di-

mensionamento econômico é obviamente sensível a estes critérios. Neste sentido vem sendo estudado a adoção de uma norma |ABNT, 1977| para a regularização dos critérios de elaboração de projetos de redes de distribuição de água.

Quanto a otimização heurística obtida com o programa PARH viu-se que bons resultados foram alcançados muito embora seja difícil extrapolar estes resultados para grandes redes, nas quais o número de conformações viáveis é muito elevado. Um dado que pode ser aqui acentuado é referente a análise de sensibilidade. De um modo geral a este tipo de análise não é dada muita atenção na literatura sobre redes de distribuição. No entanto este recurso é bastante importante principalmente na aplicação vista na otimização heurística, pois no caso de se dimensionar uma rede de grande porte certamente não se poderá avaliar um grande número de conformações, contudo, o auxílio da análise de sensibilidade facilitará a seleção de quais sejam as conformações que devam ser avaliadas.

As soluções alcançadas pelo modelo linear de otimização significaram de um modo geral um bom resultado, no entanto mesmo nos exemplos simples estudados algumas dificuldades foram sentidas nas aplicações do modelo. Uma informação detectada logo no primeiro exemplo é relativa aos critérios para o refinamento das soluções alcançadas com o programa PORH. Ficou indicado ser bastante dificultado a elaboração de um critério suficientemente geral para o refinamento, sem que ocorram as violações das restrições consideradas, bem como um aumento desnecessário do custo to-

tal da rede. Portanto, este refinamento deve ser feito, possivelmente, baseado apenas nos julgamentos críticos do projetista para a distinção dos segmentos que devam ser eliminados.

Uma outra dificuldade fundamental na aplicação do modelo linear de otimização é devida a inicialização das vazões. A solução pelo modelo fica muito condicionada a esta inicialização e ela é assumida arbitrariamente. Soluções obtidas a partir de diferentes inicializações (considerando inclusive sentidos diversos para as vazões nos trechos) são passíveis de resultados bem diferentes. Aliado ao problema da vazão assumida (a quantidade) existe o problema de se procurar as rotas de caminho mīnimo para a consideração das restrições de pressão nos nōs. Mesmas vazões para diferentes rotas nas equações de pressão também fornecem soluções diferentes. Devido a estas particularidades, a montagem das restrições exigem algum cuidado, e para redes grandes torna-se um problema pouco simples descobrir-se de forma expedita as rotas de caminho mīnimo.

O modelo linear de otimização não teve um desempenho computacional satisfatório tanto em memória requerida como em tempo de processamento. Para uma rede de grande porte estes fatores limitam a utilidade do programa PORH.0 modelo não deve no entanto ser julgado rigorosamente devido a este tipo de problema dado que isto não se constitui num problema de essência da tēcnica, ou seja, esta tēcnica pode em termos computacionais ser melhor explorada. Um subsídio a esta afirmação está nas aplicações com a versão que utiliza o programa TEMPO |Burroughs, 1977| na solu-

ção do problema de programação linear. Uma acentuada redução no tempo de processamento é alcançada para uma única solução com esta versão do programa PORH. Uma modificação no programa PORH que certamente salvaria muito tempo computacional, seria aquela que a partir de uma primeira solução, considerasse como base inicial a solução alcançada na iteração anterior [Alperovits & Shamir, 1977]. A obtenção deste artifício foi tentada na versão que utiliza o programa TEMPO [Burroughs, 1977]. No entanto dificuldades na manipulação deste programa como subrotina impediriam este objetivo. Estas dificuldades, contudo, são oriundas de uma documentação imperfeita do programa TEMPO [Burroughs, 1977], de forma que a superação dessa dificuldade é mais uma questão de familiaridade com o programa. Quanto ao problema de memória requerida existe a possibilidade da otimização por setores da rede, ocorrendo desta forma a partição do problema.

Uma dificuldade observada principalmente no exemplo nº 4 é relativa às variáveis fictícias. O objetivo destas variáveis é impedir a ocorrência de soluções não fátilveis. Estas variáveis no entanto podem causar uma influência muito grande na solução, de modo que alguma experiência com o uso do modelo é exigida para a suposição das variáveis fictícias. A experiência computacional com diferentes considerações destas variáveis nas equações de equilíbrio entre os reservatórios (equações de fonte) no exemplo nº 4 conduziram a diferentes soluções, de forma que este é um outro fato que dificulta a aplicação do modelo linear de otimização a redes complexas.

CAPÍTULO VCONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Da análise dos resultados alcançados com a utilização dos métodos iterativos de análise hidráulica de redes de distribuição e com o modelo de otimização por programação linear, foram obtidas as seguintes conclusões:

- (i) o método de Newton-Raphson formulado pelas H-equações é, de um ponto de vista geral, a melhor solução iterativa para à análise hidráulica de redes de distribuição quando comparada aos métodos de Hardy Cross e da Análise Linear. A adoção desta técnica aos objetivos de uma otimização heurística demonstrou ter sido uma escolha adequada, em razão do suporte que esta técnica fornece para a rápida verificação da estabilidade hidráulica de diversas conformações de uma rede de distribuição. Deve-se ressaltar neste ponto a análise de sensibilidade como um instrumento de importante desempenho no processo de otimização heurística;
- (ii) quanto aos resultados da otimização heurística em si, pode-se dizer que este processo quando bem manipulado pode alcançar soluções bem próximas das alcançadas pelo modelo de otimização por programação linear. No entanto é fácil de se observar que este processo se torna menos atraente a medida que aumenta o tamanho da rede;

(iii) os resultados com o modelo de otimização por programação linear no dimensionamento de redes de distribuição indicam que é viável a obtenção de projetos mais econômicos com esta técnica. Entretanto, as soluções através deste modelo estão sujeitas a limitações computacionais bem como exigem alguma subjetividade na formulação do problema como citadas na discussão dos resultados (item IV.2.5).

Visando basicamente melhorar o desempenho do modelo de otimização por programação linear as seguintes recomendações são sugeridas:

- (i) objetivando dispensar a cansativa tarefa de arbitrar uma inicial distribuição de vazões que satisfaça a continuidade em todos os nós, poderia ser considerado, ao contrário da inicial distribuição de vazões, uma inicial conformação da rede, obtendo-se a partir desta, então, as vazões nos trechos. Isto pode ser feito acoplando-se o programa PARH ao programa PORH. Desta forma a partir da solução alcançada pelo programa PARH (no caso as vazões) se entraria no modelo linear de otimização. Pode-se acentuar, embora isto possa parecer um tanto óbvio, que o modelo linear dará melhores soluções a medida que seja mais próximo do ótimo teórico a conformação inicialmente arbitrada;
- (ii) implementar alterações no programa PORH, preferencialmente na versão que utiliza o programa TEMPO

[Burroughs, 1977], de modo que a partir de uma solução fável ter sido alcançada esta sirva como base inicial para a próxima solução, e assim sucessivamente. Isto certamente salvará muito tempo computacional e viabilizará o modelo linear para o estudo de grandes redes;

- (iii) acoplar rotinas para descobrir as rotas mínimas entre os nós para a consideração automática pelo programa PORH das restrições de pressão nos nós, bem como eliminar as restrições de pressão que sejam desnecessárias;
- (iv) estudar outros métodos de busca que sejam menos dependentes de critérios subjetivos;
- (v) estudar o comportamento do modelo linear de otimização para outras funções objetivos, que considerem por exemplo o problema de economia de escala |Salcedo & Weiss, 1972| ;
- (vi) estudar melhor a consideração das variáveis fictícias de modo a eliminar a subjetividade na inclusão destas variáveis no problema.

BIBLIOGRAFIA

- |<sup>1</sup>| ABNT - Elaboração de projetos hidráulicos de redes de distribuição de água potável para abastecimento público, P-NB-594/77. Rio de Janeiro, Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1977.
- |<sup>2</sup>| ALEXANDER, M.S.; GLENN, N. L.; BIRD, D. W. - Advances Techniques in the mathematical modeling of water-distribution systems. J. Am. Water Works Assoc., 67(7): 343-346, 1975.
- |<sup>3</sup>| ALPEROVITS, E. & SHAMIR, U. - Design of optimal water distribution systems. Water Resources Research, 13(6): 885-900, 1977.
- |<sup>4</sup>| ARTINA, S. - The use of mathematical programming techniques in designing hydraulic networks. Meccanica, 8(3): 158-167, 1973.
- |<sup>5</sup>| AZEVEDO NETTO, J. M. - Manual de hidráulica, 4 ed. São Paulo, Edgard Blücher, 1966. 866 p.
- |<sup>6</sup>| BENTES, J. F. V. - Comunidades de pequeno porte serão beneficiadas pelo Planasa. Engenharia Sanitária, ABES, 16(2): 170-171, 1977.
- |<sup>7</sup>| BRATER, E. F. & KING, H. W. - Handbook of hydraulics, 6 ed. McGraw-Hill, 1976.

- |<sup>8</sup>| BROCK, D. A. - Closed loop automatic control of water system operations. J. Am. Water Works Assoc., 55(4): 467-480, 1963.
- |<sup>9</sup>| BURROUGHS - Large system tempo mathematical programming system user's manual, No. 1073665. Detroit, Mich. Burroughs Corporation, 1974.
- |<sup>10</sup>| BURROUGHS - Fortran reference manual, No. 5001506. Detroit, Mich. Burroughs Corporation, 1978.
- |<sup>11</sup>| CEMBROWICZ, R. G. & HARRINGTON, J. J. - Capital - cost minimization of hydraulic network. J. Hydraulics Div., ASCE, 99 (HY3): 431-440, 1973.
- |<sup>12</sup>| CENEDESE, A. & MELE, P. - Optimal design of water distribution networks. J. Hydraulics Div., ASCE, 104(HY2): 237-247, 1978.
- |<sup>13</sup>| CHENOWETH, H. & CRAWFORD, C. - Pipe network analysis. J. Am. Water Works Assoc., 66(1): 55-58, 1974.
- |<sup>14</sup>| CHIN, K. K.; GAY, R. K. L.; CHUA, S. H.; CHAN, H. C.; HO, S. Y. - Solution of water networks by sparse matrix methods. Int. J. Num. Meth. Engng., 12(8):1261-1277, 1978.
- |<sup>15</sup>| COLLINS, A. G. & JOHNSON, R. L. - Finite - element method for water-distribution networks. J. Am. Water Works Assoc.,

67(7): 385-389, 1975.

- |<sup>16</sup>| COLLINS, M.; COOPER, L.; HELGASON, R.; KENNINGTON, J.; LE-BRANC, L. - Solving the pipe network analysis problem using optimization techniques. Management Sciences, 24(7): 747-760, 1978a.
- |<sup>17</sup>| COLLINS, M. & KENNINGTON, J. - Solution of large scale pipe networks by mathematical programming techniques. In: ASCE Spring Convention, Pittsburgh, Pennsylvania, april, 1978.
- |<sup>18</sup>| COLLINS, M.; COOPER, L.; HELGASON, R.; KENNINGTON, J. - Solution of large scale pipe networks by improved mathematical approaches, Technical completion Report. IEOR 77016 WR77001, School of Engineering and Applied Science, Southern Methodist Univ., August, 1978 b.
- |<sup>19</sup>| COSTA, R. V. - Apresentação. In: Simpósio sobre desenvolvimento urbano. Banco Nacional de Habitação. Rio de Janeiro, Secretaria de divulgação do BNH, 1974. 182 p.
- |<sup>20</sup>| COUTO, N. C. - Algoritmo numérico para projetos de sistemas hidráulicos. Rio de Janeiro, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1978. 135 p. (Tese de M.Sc).
- |<sup>21</sup>| CROSS, H. - Analysis of flow in networks of conduits or conductors. Engineering Experiments Station, Bulletin No. 286, University of Illinois, Nov. 1936.

- |<sup>22</sup>| DAVIS, A. L. & JEPSON, R. W. - Developing a computer program for distribution system analysis. J. Am. Water Works Assoc., 71(5): 236-241, 1979.
- |<sup>23</sup>| DEB, A. K. & SARKAR, A. K. - Optimization in design of hydraulic network. J. Sanitary Engng. Div., ASCE, 97(SA2): 141-159, 1971.
- |<sup>24</sup>| DILLINGHAM, D. J. - Computer analysis of water distribution systems, part 2. Water and Sewage Works, 114(2): 43-45, 1967a.
- |<sup>25</sup>| DILLINGHAM, D. J. - Computer analysis of water distribution systems, part 4, program application. Water and Sewage Works, 114(4): 141-142, 1967b.
- |<sup>26</sup>| DONACHIE, R. P. - Digital program for water analysis. J. Hydraulics Div., ASCE, 100(HY3): 393-403, 1973.
- |<sup>27</sup>| DOOGEE, R. E.; HOELLEIN, H. B.; TETMAIER, L. - The analysis of large, complex water networks with small computer systems. J. Am. Water Works Assoc., 70(7): 366-370, 1978.
- |<sup>28</sup>| EGGLER, C. L. & POLKOWSKI, L. B. - Network models and the impact of modeling assumptions. J. Am. Water Works Assoc., 68(4): 189-196, 1976.
- |<sup>29</sup>| EPP, R. & FOWLER, A. G. - Efficient code for steady-state flows in networks. J. Hydraulics Div., ASCE, 96(HY1): 43-

56, 1970.

- |<sup>30</sup>| GRAVES, Q. B. & BRANSCOME, D. - Digital computers for pipeline networks analysis. J. Sanitary Engng. Div., ASCE, 84 (SA2): 1608-1 - 1608-18, 1958.
- |<sup>31</sup>| GUPTA, I. - Linear programming analysis of water supply system. AIEE Trans., 1(1): 56-61, 1969.
- |<sup>32</sup>| HACHTEL, G. D.; BRAYTON, R. K.; GUSTAVSON, F. G. - The sparse tableau approach to network analysis and design. IEEE Trans. Circuit Theory, CT-18(1): 101-113, 1971.
- |<sup>33</sup>| HADLEY, G. - Linear programming, Addison - Wesley, 1962. 520 p.
- |<sup>34</sup>| HALL, M. A. - Hydraulic network analysis using (generalized) geometric programming. Networks, 6: 105-130, 1976.
- |<sup>35</sup>| HOAG, L. N. & WEINBERG, G. - Pipeline network analysis by electronic digital computer. J. Am. Water Works Assoc., 49(5): 517-524, 1957.
- |<sup>36</sup>| ISML - Library 3 Reference Manual V.2, 6 ed. Houston, Texas. International Mathematical & Statistical Libraries Inc., 1977 (Burroughs 6700/7700 Series).

- |<sup>37</sup>| JACOBY, S. L. S. - Design of the optimal hydraulic network. J. Hydraulics Div., ASCE, 94(HY3): 641-661, 1968.
- |<sup>38</sup>| JAIN, A. K. - Accurate explicit equation for friction factor. J. Hydraulics Div., ASCE, 102(HY5): 674-677, 1976.
- |<sup>39</sup>| JEPPSON, R. W. - Analysis of flow in pipe networks. Ann Arbor, Mich. Ann Arbor Science, 1976, 164 p.
- |<sup>40</sup>| KARMELI, D.; GADISH, Y.; MEYERS, S. - Design of optimal water distribution networks. J. Pipeline Div., ASCE, 94(PL1): 1-10, 1968.
- |<sup>41</sup>| LEKANE, T. - Modèle de calcul de l'écoulement en régime permanent dans un réseau d'eau maillé. J. Hydraulic Research, 17(2): 149-164, 1979.
- |<sup>42</sup>| LEMIEUX, P. F. - Efficient algorithm for distribution networks. J. Hydraulics Div., ASCE, 98(HY11): 1911-120, 1972.
- |<sup>43</sup>| LIEBMAN, J. C. & BRILL, E. D. Jr. - Discussion of Optimization in design of hydraulic network. J. Sanitary Engng. Div., ASCE, 97(SA5): 786-792, 1971.
- |<sup>44</sup>| MARTIN, D. W. & PETERS, G. - The application of Newton's method to network analyses by digital computer. Institution of Water Engineers, 17(2): 115-129, 1963.

- |<sup>45</sup>| MARTINS, J. A. - Rede de distribuição. In: AZEVEDO NETTO, J. M. & et al. Planejamento de sistemas de abastecimento de água. Curitiba, Paraná, Universidade Federal do Paraná, Organização Pan-Americana da Saúde, 1973, p. 185-213.
- |<sup>46</sup>| PIRES, R. - Utilização de técnicas de otimização em redes de abastecimento de água. Rio de Janeiro, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1979, 120 p. (Tese de M.Sc.).
- |<sup>47</sup>| PIRES, I. M. - Planasa: Avaliação dos resultados e perspectivas. In: ABES - Catálogo Brasileiro de Engenharia Sanitária e Ambiental. No. 4, Rio de Janeiro, ABES, 1978. p. 6-12.
- |<sup>48</sup>| QUINDRY, G. E.; BRILL, E. D.; LIEBMAN, J. C., ROBINSON, A. R. - Comment on "Design of Optimal Water Distribution Systems". Water Resources Research, 15(12): 1651-1854, 1979.
- |<sup>49</sup>| RIGHETTO, A. M. - Desenvolvimento de modelos de simulação para o dimensionamento de redes de distribuição de água, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1977. 166 p. (Tese de D.Sc.).
- |<sup>50</sup>| ROBINSON, R. B. & AUSTIN, T. A. - Cost optimization of rural water systems. J. Hydraulics Div. ASCE, 102(HY8): 1119 - 1134, 1976.

- | 51 | SALCEDO, D. & WEISS, A. O. - Solution of a water resources problem with economics of scale by linear programming. Water Resources Bulletin, 8(3): 546-552, 1972.
- | 52 | SERETE - Abastecimento de água da Cidade de Apucarana. Memorial descritivo, especificações técnicas e orçamento, Vol. I, 1973.
- | 53 | SHAMIR, U. - Water distribution systems analysis. IBM Research Report BC 4389 (No. 19671). Yorktown Heights, New York, IBM Thomas J. Watson Research Center, June 13, 1973.
- | 54 | SHAMIR, U. & HOWARD, C. D. - Water distribution system analysis. J. Hydraulics Div., ASCE, 94(HY1): 219-234, 1968.
- | 55 | STARK, P. A. - Introduction to numerical methods. New York, Macmillan, 1970.
- | 56 | STEPHENSON, D. - Pipeline design for water engineers, New York, Elsevier, 1976. (Developments in Water Science, V. 6).
- | 57 | WATANATADA, T. - Discussion of hydraulic network analysis, using linear theory. J. Hydraulics Div., ASCE, 99(HY4): 693-697, 1973a.
- | 58 | WATANATADA, T. - Least cost design of water distribution systems. J. Hydraulics Div., ASCE, 99(HY9): 1497-1515, 1973b.

- |<sup>59</sup>| WILLIAMS, G. N. - Enhancement of convergence of pipe network solutions. J. Hydraulics Div., ASCE, 99(HY7): 1057-1067, 1973.
- |<sup>60</sup>| WILLIAMS, G. S. & HAZEN, A. - Hydraulics tables, 3 ed. rev. New York, John Wiley & Sons., 1933.
- |<sup>61</sup>| WOOD, D. J. - An explicit friction factor relationship. Civil Engng. 36(12): 60-61, 1966.
- |<sup>62</sup>| WOOD, D. J. & CHARLES, C. - Hydraulics network analysis using linear theory. J. Hydraulics Div., ASCE, 98(HY7): 1157-1170, 1972.
- |<sup>63</sup>| ZARGHAMEE, M. S. - Mathematical model of water distribution systems. J. Hydraulics Div., ASCE, 97(HY1): 1-14, 1971.