MODELOS MISTOS DE ELEMENTOS FINITOS PARA
ANÁLISE DE GRANDES DEFORMAÇÕES

Elson Magalhães Toledo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:

Nelson Francisco Favilla Ebecken
Presidente

Luis Bevilacqua

Andrés Ludovico Halbritter

Edison Castro Prates de Lima

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
JANEIRO DE 1980

TOLEDO, ELSON MAGALHÃES

Modelos Mistos de Elementos Finitos para Análise de Grandes Deformações |Rio de Janeiro| 1980.

VIII, 80p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1980.

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia

1. Elasticidade, Modelos Mistos, Grandes Deformações I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A Regina
Aos Meus Pais

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Nelson Francisco Favilla Ebecken, pela orientação, amizade e constante estímulo.

Aos Professores da COPPE/UFRJ, na pessoa de seu Diretor Paulo Alcântara Gomes, pelos ensinamentos ministrados.

A Abimael F.D. Loula pela amizade e colaboração.

Ao Laboratório de Cálculo do CBPF pelas condições oferecidas na etapa final desse trabalho.

Aos funcionários da Biblioteca Central do Centro de Tecnologia da UFRJ pela atenção.

A CAPES-CNPq e a Universidade Federal de Juiz de Fora pelo apoio financeiro.

A Helena Santos de Oliveira pelo esmerado trabalho de datilografia.

SUMÁRIO

No presente trabalho pretende-se estudar o problema de grandes deformações de meios contínuos através de modelos de elementos finitos mistos. Para tal deriva-se um princípio variacional incremental tipo Reissner a partir do princípio da energia potencial incremental. A análise se vale de formulação Lagrangeana total e é aplicada a problemas de estado plano de tensões e estado plano de deformações e sólidos axissimétricos.

O processo de solução é puramente incremental e incremental com verificação de equilíbrio.

Consideram-se equações constitutivas de materiais elásticos e hiperelásticos incompressíveis do tipo Mooney-Rivlin.

O elemento implementado é do tipo isoparamétrico, aproximando-se tanto as tensões como os deslocamentos pela mesma função.

Alguns resultados são apresentados e comparados com outras aproximações.

ABSTRACT

In the present work finite elasticity problems are studied through the use of an isoparametric mixed element in wich stresses and displacements are approximated by the same interpolation functions.

This finite element model is derived from a Reissner-type incremental variational principle based on an incremental potential energy principle.

A total Lagrangian formulation is used to analyse axisymmetric solids, plane stress and plane strain problems.

Two types of solution are available: a purely incremental solution and an incremental scheme with equilibrium checking.

Constitutive equations for elastic and incompressible Mooney-Rivlin type materials are considered.

Some results are presented and compared with other solutions.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos, modelo deslocamento encontra-se atualmente bem estabelecido e amplamente difundido no estudo de estruturas de comportamento linear. Entretanto, a necessidade de se considerarem modelos mais realísticos e, de se efetuarem análises cada vez mais precisas de determinados comportamentos estruturais críticos determinou a extensão desse método para o tratamento de problemas envolvendo não linearidades.

Dessa forma, a solução dos problemas da elasticidade finita por intermédio do Método dos Elementos Finitos tem sido extensivamente desenvolvida com o uso de modelos de deslocamentos[1,5,8,17]. Nesses estudos vale-se quase sempre de uma forma modificada do princípio dos deslocamentos virtuais que conduz a um procedimento incremental.

Apesar dos modelos mistos e hibridos fornecerem excelentes aproximações quando aplicados a análise linear[32,20,37,30] um reduzido número de publicações é encontrado na literatura utilizando essas formulações no tratamento de problemas envolvendo comportamentos não lineares físico ou geométrico.

No entanto, algumas referências empregam esses modelos para tratar de não linearidade geométrica[36,27,40], incluindo-se análise de estabilidade elástica[38] e, materiais não lineares[24].

A referência [7] apresenta um desenvolvimento unificado de formas incrementais dos diversos princípios variacionais associados aos modelos de elementos finitos, sendo essas formas derivadas diretamente de uma expressão incremental do princí pio dos deslocamentos virtuais.

Através da segunda variação dos funcionais associados a esses modelos, Pian e Tong[29] desenvolvem formas incrementais que são interpretadas como um sistema de equações diferenciais ordinárias, tendo como variável independente um parâmetro de carregamento.

Mais recentemente em [2], aplica-se um modelo misto derivado de um princípio variacional incremental, tipo Reissner, a corpos de materiais hiperelásticos incompressíveis sujeitos a grandes deformações. A análise desses problemas tem sido desenvolvida em [1, 6, 8, 11, 14, 15] empregando-se modelos de deslocamentos.

Ainda com relação aos materiais hiperelásticos incompressíveis merecem ser destacadas as contribuições de Argyris[33,34,39].

No presente trabalho, valendo-se de uma formulação Lagrangeana total, a análise de problemas de elasticidade finita de materiais elásticos lineares e hiperelásticos incompressíveis é conduzida por elementos mistos isoparamétricos, derivados de uma forma incremental do princípio variacional de Reissner.

A partir do princípio dos deslocamentos virtuais deriva-se no Capítulo I, para o caso de materiais elásticos lineares, a forma do princípio variacional incremental utilizada, bem como sua consequente aplicação no contexto do Método dos Elementos Finitos.

No Capítulo seguinte, analisa-se para os materiais incompressíveis a classe particular de problemas em que a pressão hidrostática pode ser eliminada da formulação (estado plano de tensão).

Em seguida, obtém-se o princípio variacional para os casos em que essa variável deve ser considerada como uma incógnita adicional.

Ressaltam-se, nas formulações desenvolvidas os termos que permitem efetuar para cada incremento de carga, correções iterativas de modo a evitar que a resposta obtida se afaste da solução exata.

No Capítulo IV comparam-se alguns resultados numéricos com outras aproximações e, finalmente, algumas conclusões são apresentadas no Capítulo V.

II - MATERIAIS ELÁSTICOS LINEARES

2.1 - PROCEDIMENTOS INCREMENTAIS

Os procedimentos incrementais fornecem uma alternativa que tem se mostrado de grande utilidade na análise pelo Método dos Elementos Finitos, de problemas envolvendo grandes deslocamentos, grandes deformações e relações constitutivas diversas.

Valendo-se de uma formulação Lagrangeana total, desenvolve-se a seguir uma forma incremental do princípio variacional de Hellinger-Reissner aplicado a materiais de comportamento elástico. A aplicação da técnica do Método dos Elementos Finitos a esse princípio, por intermédio de aproximações adequadas para os campos de tensões e deslocamentos no domínio considerado, permite estabelecer um procedimento incremental para a resolução dos problemas mencionados.

Considere-se o movimento genérico de um corpo, como indicado na Figura 2.1

Durante o movimento, a área e o volume desse corpo variam continuamente, denotando-se por ${}^{o}A$, ${}^{t}A$, ${}^{t+\Delta t}A$ e ${}^{o}V$, ${}^{t}V$, ${}^{t+\Delta t}V$ os valores dessas grandezas nos tempos 0 , t e $t+\Delta t$ respectivamente. Além disso supõe-se a superfície externa, ${}^{o}A$, dividida em:

${}^{o}S_{\sigma}$ - parte do contorno onde são prescritas as forças de superfície

${}^{o}S_{u}$ - parte do contorno onde se prescrevem os deslocamentos

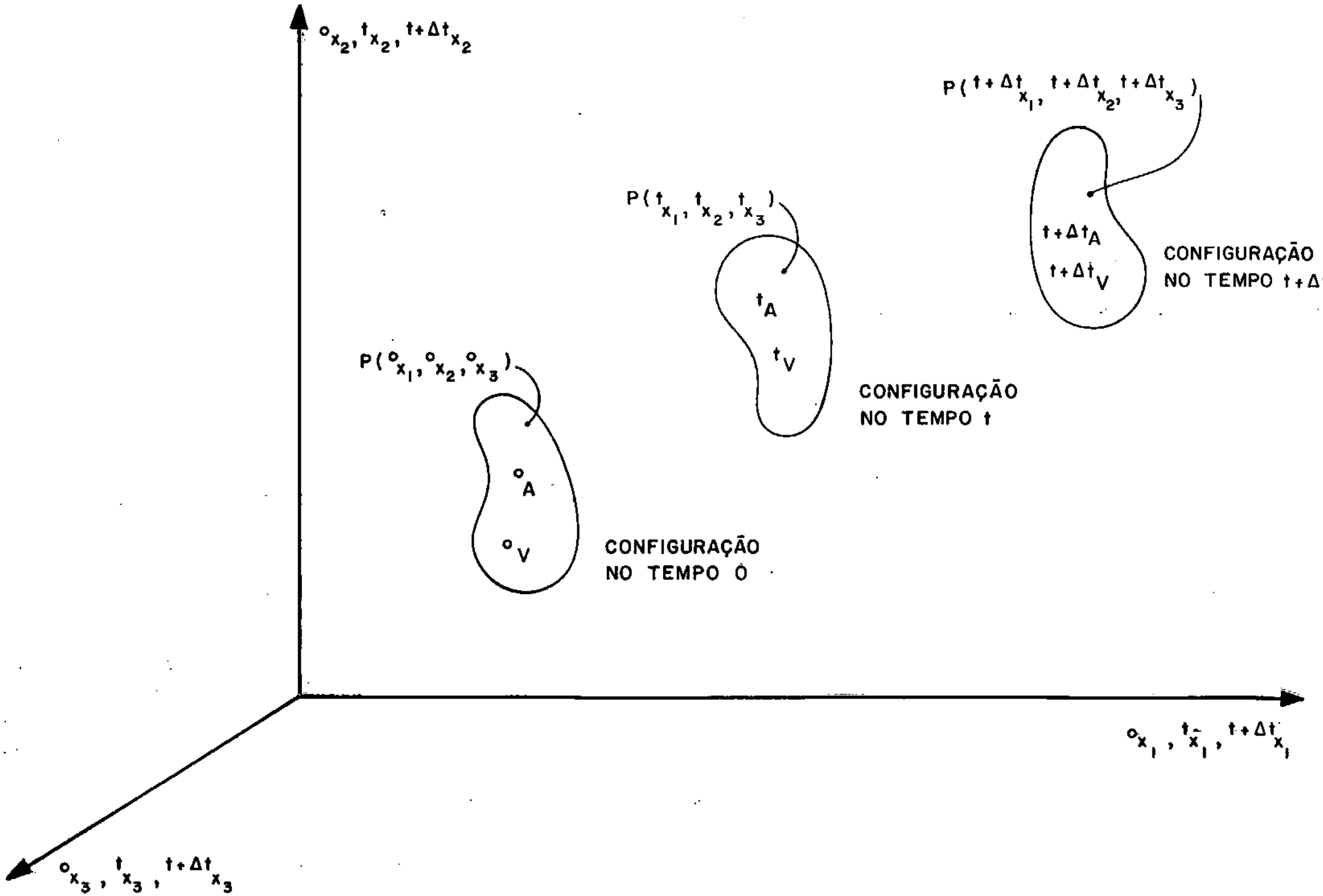


Figura 2.1_ Movimento de um corpo em um sistema de coordenadas cartesianas

Utilizando-se coordenadas cartesianas para a descrição do movimento desse corpo e, denotando por ${}^{o}x_i$, ${}^{t}x_i$ e ${}^{t+\Delta t}x_i$ as coordenadas de um ponto P , respectivamente no tempo zero, t e t + Δt , com i = 1, 2, 3 tem-se as relações:

$$ {}^{t+\Delta t}x_i = {}^{o}x_i + {}^{t+\Delta t}u_i \qquad (2.1) $$

$$ {}^{t}x_i = {}^{o}x_i + {}^{t}u_i \qquad (2.2) $$

onde ${}^{t}u_i$ e ${}^{t+\Delta t}u_i$ são as componentes cartesianas dos deslocamentos desse ponto, em t e t + Δt .

O incremento de deslocamento do tempo t ao tempo t + Δt é dado por:

$$ u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^{t}u_i \qquad (2.3) $$

O que se pretende de um procedimento incremental no estudo do movimento de um corpo, como o da Figura 2.1, é a determinação das configurações de equilíbrio desse corpo em intervalos discretos de tempo, 0 , Δt , 2 Δt , ... , t e t + Δt .

Assumindo que as soluções em todos intervalos do tempo 0 ao tempo t , inclusive, tenham sido encontradas, procura-se estabelecer um processo que permita determinar a solução para o instante t + Δt , seguinte. A aplicação sucessiva desse processo permite a determinação de todas configurações de equilíbrio desejadas.

2.2 - FORMA INCREMENTAL DO PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL

A condição de equilíbrio de um corpo na configuração de tempo $t + \Delta t$, referida a sua geometria indeformada, pode ser expressa pelo Princípio dos Deslocamentos Virtuais que se escreve[13,8]:

$$\int_{^{o}V} {}^{t+\Delta t}_{o}S_{ij} \; \delta \; {}^{t+\Delta t}_{o}E_{ij} \; {}^{o}dV = {}^{t+\Delta t}R \qquad (2.4)$$

sendo:

$${}^{t+\Delta t}R = \int_{^{o}S_{\sigma}} {}^{t+\Delta t}_{o}T_{k} \; \delta \; u_{k} \; {}^{o}dS_{\sigma} + \int_{^{o}V} {}^{t+\Delta t}_{o}P_{k} \; \delta \; u_{k} \; {}^{o}dV \qquad (2.5)$$

onde:

${}^{t+\Delta t}R$	- trabalho virtual das forças externas
${}^{t+\Delta t}_{o}S_{ij}$	- componentes do 2º tensor de tensões de Piola-Kirchhoff
${}^{t+\Delta t}_{o}E_{ij}$	- componentes do tensor de deformação de Green-Lagrange
${}^{t+\Delta t}_{o}T_{k}$, ${}^{t+\Delta t}_{o}P_{k}$	- Forças de superfície e de volume respectivamente.

Todas as grandezas definidas como atuantes na configuração de tempo $t + \Delta t$, são medidas com relação ao estado inicial, indeformado $(t = 0)$, que é a configuração de referência de uma formulação Lagrangeana total.

O tensor de deformação utilizado é definido por suas componentes como[13] :

$$ {}^{t+\Delta t}_{\ \ \ o}E_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^{t+\Delta t}_{\ \ \ o}u_{i,j} + {}^{t+\Delta t}_{\ \ \ o}u_{j,i} + {}^{t+\Delta t}_{\ \ \ o}u_{k,i} \ {}^{t+\Delta t}_{\ \ \ o}u_{k,j} \right) \tag{2.6} $$

onde:

$$ {}^{t+\Delta t}_{\ \ \ o}u_{i,j} = \frac{\partial \ {}^{t+\Delta t}u_i}{\partial \ {}_{o}x_j} \tag{2.7} $$

sendo todas as outras derivadas obtidas de modo análogo.

Em virtude da escolha da configuração indeformada como referência para exprimir a condição de equilíbrio após a deformação, torna-se necessário a definição dos tensores de deformação e de tensão medidos com relação a essa configuração.

O uso das deformações de Green-Lagrange, já definidas anteriormente na equação (2.6), decorre desse fato. Com relação as tensões, o segundo tensor de Piola-Kirchhoff aparece como uma alternativa para essa definição. A relação entre esse tensor e o tensor de tensões de Cauchy expressa em termos de suas componentes é dada por[13]:

$$ {}^{t+\Delta t}\sigma_{ji} = \frac{1}{\det F} F_{j\ell} \ {}^{t+\Delta t}_{\ \ \ o}S_{\ell k} \ F_{ki} \tag{2.8} $$

com

$$ F_{k\ell} = \frac{\partial \ {}^{t+\Delta t}x_k}{\partial \ {}^{o}x_\ell} \tag{2.9} $$

onde:

$^{t+\Delta t}\sigma_{ji}$ - componentes do tensor de tensões de Cauchy em $t + \Delta t$

F_{ki} - componentes do gradiente da deformação entre as configurações de tempo zero e $t + \Delta t$

O princípio dos deslocamentos virtuais apresentado na equação (2.4) é inteiramente geral, sendo válido para problemas envolvendo grandes deslocamentos e grandes deformações, não contendo nenhuma limitação com relação as equações constitutivas. Deve-se esclarecer no entanto que no presente estudo a análise fica restrita a consideração de cargas externas conservativas.

Como na expressão (2.4), as tensões $^{t+\Delta t}_{\ o}S_{ij}$ e as deformações $^{t+\Delta t}_{\ o}E_{ij}$ não são conhecidas, efetuam-se as seguintes decomposições incrementais:

$$^{t+\Delta t}_{\ o}S_{ij} = {}^{t}_{o}S_{ij} + {}_{o}S_{ij} \tag{2.10}$$

$$^{t+\Delta t}_{\ o}E_{ij} = {}^{t}_{o}E_{ij} + {}_{o}E_{ij} \tag{2.11}$$

onde $^{t}_{o}E_{ij}$ e $^{t}_{o}S_{ij}$ são respectivamente as deformações e as tensões, previamente determinadas, atuantes no instante t. As demais parcelas, ${}_{o}S_{ij}$, ${}_{o}E_{ij}$, representam os incrementos dessas grandezas entre as configurações de tempo t e $t + \Delta t$.

Com essas decomposições e notando-se que

$$\delta \, {}^{t+\Delta t}_{\ o}E_{ij} = \delta \, {}_{o}E_{ij} \tag{2.12}$$

obtem-se, a partir de (2.4), uma forma incremental do Princípio dos

Deslocamentos Virtuais que se exprime por:

$$\int_{{}^oV} {}_oS_{ij} \; \delta \; {}_oE_{ij} \; {}^o dV = {}^{t+\Delta t}R - \int_{{}^oV} {}^t_oS_{ij} \; \delta \; {}_oE_{ij} \; {}^o dV \tag{2.13}$$

A aplicação do Método dos Elementos Finitos, modelo deslocamento, a formas linearizadas de (2.13) tem permitido a obtenção de soluções aproximadas de diversos problemas da elasticidade não-linear[1,3,5,6,8,14,17].

Definindo-se uma função energia de deformação incremental ${}_oA$, tal que

$$\frac{\partial \; {}_oA \; ({}_oE_{ij})}{\partial \; {}_oE_{ij}} = {}_oS_{ij} \tag{2.14a}$$

ou

$$\delta \; {}_oA \; ({}_oE_{ij}) = {}_oS_{ij} \; \delta \; {}_oE_{ij} \tag{2.14b}$$

e, admitindo-se a existência de um potencial para as forças externas, a equação (2.13) se escreve:

$$\delta \; (\Delta \; \pi_p) = 0 \tag{2.15}$$

onde

$$\Delta \; \pi_p = \int_{{}^oV} ({}_oA \; ({}_oE_{ij}) + {}^t_oS_{ij} \; {}_oE_{ij} - {}^{t+\Delta t}_oP_k \; u_k) \; {}^o dV - \int_{{}^oS_\sigma} {}^{t+\Delta t}_oT_k \; u_k \; {}^o dS_\sigma \tag{2.16}$$

A equação (2.15) representa uma forma incremental do princípio da energia potencial para o caso de materiais elásticos.

2.3 - FORMA INCREMENTAL DO PRINCÍPIO VARIACIONAL DE HELLINGER-REISSNER :

As relações deslocamento-deformação na configuração de tempo $t + \Delta t$ podem ser incrementalmente decompostas como[18] :

$$ {}^{t}_{o}E_{ij} + {}_{o}E_{ij} = {}^{t}_{o}\ell_{ij} + {}^{t}_{o}\eta_{ij} + {}_{o}\ell_{ij} + {}_{o}\eta_{ij} \qquad (2.17) $$

onde:

$$ {}^{t}_{o}\ell_{ij} = \frac{1}{2}\left({}^{t}_{o}u_{i,j} + {}^{t}_{o}u_{j,i}\right) \qquad (2.18a) $$

$$ {}_{o}\ell_{ij} = \frac{1}{2}\left({}_{o}u_{i,j} + {}_{o}u_{j,i} + {}^{t}_{o}u_{k,i}\,{}_{o}u_{k,j} + {}^{t}_{o}u_{k,j}\,{}_{o}u_{k,i}\right) \qquad (2.18b) $$

$$ {}^{t}_{o}\eta_{ij} = \frac{1}{2}\left({}^{t}_{o}u_{k,i}\,{}^{t}_{o}u_{k,j}\right) \qquad (2.19a) $$

$$ {}_{o}\eta_{ij} = \frac{1}{2}\left({}_{o}u_{k,i}\,{}_{o}u_{k,j}\right) \qquad (2.19b) $$

Para obter um princípio variacional incremental no qual estejam sujeitos a variações, os incrementos de deslocamentos e de tensões, introduz-se inicialmente a relação (2.17) em (2.16) utilizando a técnica dos multiplicadores de Lagrange[26] .

Dessa forma, obtem-se um novo funcional:

$$\pi_p^* = \Delta\,\pi_p - \int_{{}^oV} \lambda_{ij}\,({}^t_oE_{ij} + {}_oE_{ij} - {}^t_o\ell_{ij} - {}^t_o\eta_{ij} - {}_o\ell_{ij} - {}_o\eta_{ij})\,{}^odV \tag{2.20}$$

Em π_p^* os multiplicadores de Lagrange, representados na expressão anterior por λ_{ij}, devem ser tratados como grandezas adicionais sujeitas a variações ou seja:

$$\pi_p^* = \pi_p^*\,({}_oE_{ij}\,,\ \lambda_{ij}\,,\ u_k) \tag{2.21}$$

A condição de estacionaridade de π_p^*

$$\delta\,\pi_p^* = 0 \tag{2.22}$$

fornece:

$$\delta\,\pi_p^* = \frac{\partial\,\pi_p^*}{\partial\,{}_oE_{ij}}\,\delta\,{}_oE_{ij} + \frac{\partial\,\pi_p^*}{\partial\,\lambda_{ij}}\,\delta\,\lambda_{ij} + \frac{\partial\,\pi_p}{\partial\,u_k}\,\delta\,u_k = 0 \tag{2.23}$$

que leva a:

$$\delta\,\pi_p^* = \int_{{}^oV} \left(\frac{\partial\,{}_oA\,({}_oE_{ij})}{\partial\,{}_oE_{ij}} + {}^t_oS_{ij} - \lambda_{ij}\right)\delta\,{}_oE_{ij}\,{}^odV + \int_{{}^oV} \lambda_{ij}\,\delta\,({}_o\ell_{ij} + {}_o\eta_{ij})\,{}^odV -$$

$$- \int_{{}^oV} ({}^t_oE_{ij} + {}_oE_{ij} - {}^t_o\ell_{ij} - {}^t_o\eta_{ij} - {}_o\ell_{ij} - {}_o\eta_{ij})\,\delta\,\lambda_{ij}\,{}^odV -$$

$$- \int_{{}^oV} {}^{t+\Delta t}_oP_k\,\delta\,u_k\,{}^odV - \int_{{}^oS_\sigma} {}^{t+\Delta t}_oT_k\,\delta\,u_k\,{}^odS_\sigma = 0 \tag{2.24}$$

Considerando-se, sem perda de generalidade, a simetria dos multiplicadores λ_{ij}, redefinindo

$$\lambda_{ij} = \frac{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}}{2} \tag{2.25}$$

e, aplicando o teorema da divergência sobre o segundo termo da expressão (2.24), levando em conta que $\delta\, u_k = 0$ em ${}^{o}S_u$, tem-se:

$$\delta\, \pi_p^* = \int_{{}^{o}V} \left(\frac{\partial\, {}_{o}A}{\partial\, {}_{o}E_{ij}} + {}_{o}^{t}S_{ij} - \lambda_{ij}\right) \delta\, {}_{o}E_{ij}\; {}^{o}dV -$$

$$- \int_{{}^{o}V} \left({}_{o}^{t}E_{ij} + {}_{o}E_{ij} - {}_{o}^{t}\ell_{ij} - {}_{o}^{t}\eta_{ij} - {}_{o}\ell_{ij} - {}_{o}\eta_{ij}\right) \delta\, \lambda_{ij}\; {}^{o}dV +$$

$$+ \int_{{}^{o}S_\sigma} \left[(\lambda_{kj} + {}^{t+\Delta t}_{\;\;o}u_{k,i}\, \lambda_{ij})\, {}_{o}n_j - {}^{t+\Delta t}_{\;\;o}T_k\right] \delta\, u_k\; {}^{o}d\, S_\sigma -$$

$$- \int_{{}^{o}V} \left[\lambda_{kj,j} + ({}^{t+\Delta t}_{\;\;o}u_{k,i}\, \lambda_{ij})_{,j} - {}^{t+\Delta t}_{\;\;o}P_k\right] \delta\, u_k\; {}^{o}dV = 0 \tag{2.26}$$

onde ${}_{o}n_j$ são os cossenos diretores da normal ao contorno do corpo considerado, na configuração indeformada.

Como as variações $\delta\, {}_{o}E_{ij}$, $\delta\, \lambda_{ij}$ e $\delta\, u_k$ são arbitrárias e independentes, para que (2.26) seja satisfeita é necessário que se cumpram:

em ${}^{o}V$:

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial\, {}_{o}A}{\partial\, {}_{o}E_{ij}} + {}_{o}^{t}S_{ij} \tag{2.27}$$

$${}_{o}^{t}E_{ij} + {}_{o}E_{ij} = {}_{o}^{t}\ell_{ij} + {}_{o}^{t}\eta_{ij} + {}_{o}\ell_{ij} + {}_{o}\eta_{ij} \tag{2.28}$$

$$\lambda_{kj,j} + ({}^{t+\Delta t}_{\;\;o}u_{k,i}\, \lambda_{ij})_{,j} = {}^{t+\Delta t}_{\;\;o}P_k \tag{2.29a}$$

e em ${}^{o}S_{\sigma}$:

$$ {}_{o}n_{j} \left(\lambda_{kj} + {}^{t+\Delta t}_{o}u_{k,i} \; \lambda_{ij}\right) = {}^{t+\Delta t}_{o}T_{k} \tag{2.29b} $$

As expressões (2.27) e (2.14a) permitem identificar o significado físico dos multiplicadores de Lagrange λ_{ij} . Conclue-se então que:

$$ \lambda_{ij} = {}^{t+\Delta t}_{o}S_{ij} \tag{2.30} $$

Dessa forma as equações (2.27) a (2.29) obtidas da condição de estacionaridade de π^{*}_{p} são respectivamente, as equações constitutivas conforme definidas em (2.14a), as relações deslocamento-deformação e as condições de equilíbrio no domínio e no contorno.

A utilização de uma função energia de deformação complementar incremental dada por:

$$ {}_{o}B \left({}_{o}S_{ij}\right) = {}_{o}S_{ij} \; {}_{o}E_{ij} - {}_{o}A \left({}_{o}E_{ij}\right) \tag{2.31} $$

juntamente com a relação (2.30), na expressão de π^{*}_{p} , permite que se elimine o campo de deformações das variáveis desse funcional.

Obtem-se dessa forma um funcional que contem como variáveis o campo de incremento de deslocamentos e de tensões.

$$\Delta \pi_R = \int_{^oV} \{- {}_oB ({}_oS_{ij}) + {}^t_oS_{ij}\, {}_o\eta_{ij} + {}_oS_{ij}\, {}_o\ell_{ij}\}\, {}^odV - \int_{^oS_\sigma} {}_oT_k\, u_k\, {}^od\, S_\sigma -$$

$$- \int_{^oV} {}_oP_k\, u_k\, {}^odV + \left[\int_{^oV} {}_oS_{ij}\, ({}^t_oE^d_{ij} - {}^t_oE^s_{ij})\, {}^odV\right] + \left[\int_{^oV} {}^t_oS_{ij}\, {}_o\ell_{ij}\, {}^odV -\right.$$

$$\left.- \int_{^oS_\sigma} {}^t_oT_k\, u_k\, {}^od\, S_\sigma - \int_{^oV} {}^t_oP_k\, u_k\, {}^odV\right] + \int_{^oV} {}_oS_{ij}\, {}_o\eta_{ij}\, {}^odV \qquad (2.32)$$

onde as parcelas não sujeitas a variações foram eliminadas e:

$${}^t_oE^s_{ij} = {}^t_o\ell_{ij} + {}^t_o\eta_{ij} \qquad (2.33)$$

Para o caso de materiais lineares:

$${}^t_oE^d_{ij} = {}_oD_{ijk\ell}\, {}^t_oS_{k\ell} \qquad (2.34)$$

A condição de estacionaridade desse funcional, representa o que se convencionou denominar de forma incremental do princípio variacional de Hellinger-Reissner, isto é:

$$\delta\ (\Delta\ \pi_R) = 0 \qquad (2.35)$$

Nas aplicações do Método dos Elementos Finitos a esse princípio variacional, a última integral da expressão de $\Delta\ \pi_R$, termo incremental de terceira ordem, é desprezada obtendo-se assim, uma forma linearizada de (2.32). Além disso, os dois termos entre colchetes dessa equação, possibilitam, que se façam em cada incremento, iterações de modo a evitar que a solução obtida se afaste da solução exata. Desta forma, é possível, neste caso, verificar o equilíbrio e a compatibilidade das deformações.

Neste trabalho, desenvolveu-se um processo puramente incremental e um processo incremental com verificação do equilíbrio, utilizando

$$\Delta \pi_R = \int_{^oV} \left(- {}_oB\,({}_oS_{ij}) + {}^t_oS_{ij}\;{}_o\eta_{ij} + {}_oS_{ij}\;{}_o\ell_{ij} - {}_oP_k\;u_k\right)\;{}^odV -$$

$$- \int_{^oS_\sigma} {}_oT_k\;u_k\;{}^od\,S_\sigma \tag{2.36}$$

para a solução puramente incremental, e com $\Delta\,\pi_R$ da expressão anterior acrescido do termo:

$$\left[\int_{^oV} \left({}^t_oS_{ij}\;{}_o\ell_{ij} - {}^t_oP_k\;u_k\right)\;{}^odV - \int_{^oS_\sigma} {}^t_oT_k\;u_k\;{}^od\,S_\sigma\right] \tag{2.37}$$

para a solução incremental-iterativa com verificação do equilíbrio.

No entanto é importante notar que procedimentos iterativos envolvendo verificações na compatibilidade das deformações tornam-se convenientes quando durante a análise se utilizam grandes incrementos.

A referência [27] apresenta excelentes resultados obtidos em casos onde se pretende a solução para um determinado nível de carregamento, aplicando-se um único incremento de carga.

2.4 - MODELO DISCRETO

Fazendo uso da notação matricial, o funcional da equação (2.36) com a parcela apresentada em (2.37), pode ser escrito como:

$$\Delta \pi_R = \int_{{}^{o}V} \left[- B\,({}_{o}\underset{\sim}{S}) + {}_{o}\underset{\sim}{S}^{T}\,{}_{o}\underset{\sim}{\ell} + {}^{t}_{o}\underset{\sim}{S}^{T}\,{}_{o}\underset{\sim}{\eta} - {}_{o}\underset{\sim}{P}^{T}\,\underset{\sim}{u} \right] {}^{o}dV - \int_{{}^{o}S_{\sigma}} {}_{o}\underset{\sim}{T}^{T}\,\underset{\sim}{u}\,{}^{o}d\,S_{\sigma} +$$

$$+ \left[\int_{{}^{o}V} {}^{t}_{o}\underset{\sim}{S}^{T}\,{}_{o}\underset{\sim}{\ell}\,{}^{o}dV - \int_{{}^{o}V} {}^{t}_{o}\underset{\sim}{P}^{T}\,\underset{\sim}{u}\,{}^{o}dV - \int_{{}^{o}V} {}^{t}_{o}\underset{\sim}{T}^{T}\,\underset{\sim}{u}\,{}^{o}dV \right] \qquad (2.38)$$

Na presente análise, valeu-se de elementos isoparamétricos utilizando-se as mesmas funções de interpolação que aproximam a geometria, para expandir os incrementos de deslocamentos e de tensões.

Estas expansões são representadas matricialmente por:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{v} \qquad e \qquad {}_{o}\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{p} \qquad (2.39)$$

onde:

$\underset{\sim}{v}$ - vetor dos incrementos dos deslocamentos nodais

$\underset{\sim}{p}$ - vetor dos incrementos das tensões nodais

Dessa forma tem-se que:

$${}_{o}\underset{\sim}{\ell} = {}^{t}_{o}\underset{\sim}{B}_{L}\,\underset{\sim}{v} \qquad e \qquad \underset{\sim}{u}' = {}^{t}_{o}\underset{\sim}{B}_{NL}\,\underset{\sim}{v} \qquad (2.40)$$

Considerando-se um único elemento a introdução de (2.39) e (2.40) em (2.38), conduz a:

$$\Delta\, \pi_R = -\frac{1}{2}\int_{^oV} \underset{\sim}{p}^T \underset{\sim}{A}^T\, {}_o\underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{p}\; {}^o dV + \int_{^oV} \underset{\sim}{p}^T \underset{\sim}{A}^T\, {}^t_o\underset{\sim}{B}_L\, \underset{\sim}{v}\; {}^o dV\, +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{^oV} \underset{\sim}{u}'^T\, {}^t_o\underset{\sim}{S}\, \underset{\sim}{u}'\; {}^o dV - \int_{^oV} \underset{\sim}{v}^T \underset{\sim}{N}^T\, {}_o\underset{\sim}{P}\; {}^o dV - \int_{^oS_\sigma} \underset{\sim}{v}^T \underset{\sim}{N}^T\, {}_o\underset{\sim}{T}\; {}^o d\, S_\sigma\, -$$

$$- \int_{^oV} \underset{\sim}{v}^T \underset{\sim}{N}^T\, {}^t_o\underset{\sim}{P}\; {}^o dV - \int_{^oS_\sigma} \underset{\sim}{v}^T \underset{\sim}{N}^T\, {}^t_o\underset{\sim}{T}\; {}^o d\, S_\sigma + \int_{^oV} {}^t_o\underset{\sim}{B}_L^T\, {}^t_o\hat{\underset{\sim}{S}}\; {}^o dV \qquad (2.41)$$

ou seja:

$$\Delta\, \pi_R = -\frac{1}{2}\, \underset{\sim}{p}^T\, \underset{\sim}{f}\, \underset{\sim}{p} + \underset{\sim}{p}^T\, \underset{\sim}{g}\, \underset{\sim}{v} + \frac{1}{2}\, \underset{\sim}{v}^T\, \underset{\sim}{k}_\sigma\, \underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{v}^T\, ({}_o\underset{\sim}{q} + {}^t\underset{\sim}{q}) + \underset{\sim}{v}^T\, \underset{\sim}{r} \qquad (2.42)$$

onde:

$$\underset{\sim}{f} = \int_{^oV} \underset{\sim}{A}^T\, {}_o\underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{A}\; {}^o dV \qquad (2.43a)$$

$$\underset{\sim}{g} = \int_{^oV} \underset{\sim}{A}^T\, {}^t_o\underset{\sim}{B}_L\; {}^o dV \qquad (2.43b)$$

$$\underset{\sim}{k}_\sigma = \int_{^oV} {}^t_o\underset{\sim}{B}_{NL}^T\, {}^t_o\underset{\sim}{S}\, {}^t_o\underset{\sim}{B}_{NL}\; {}^o dV \qquad (2.43c)$$

$${}_o\underset{\sim}{q} = \int_{^oV} \underset{\sim}{N}^T\, {}_o\underset{\sim}{P}\; {}^o dV + \int_{^oS_\sigma} \underset{\sim}{N}^T\, {}_o\underset{\sim}{T}\; {}^o d\, S_\sigma \qquad (2.43d)$$

$${}^t\underset{\sim}{q} = \int_{^oV} \underset{\sim}{N}^T\, {}^t_o\underset{\sim}{P}\; {}^o dV + \int_{^oS} \underset{\sim}{N}^T\, {}^t_o\underset{\sim}{T}\; {}^o d\, S_\sigma \qquad (2.43e)$$

$$\underset{\sim}{r} = \int_{^oV} {}^t_o\underset{\sim}{B}_{NL}\, {}^t_o\hat{\underset{\sim}{S}}\; {}^o dV \qquad (2.43f)$$

A condição de estacionaridade de $\Delta\, \pi_R$ fornece:

$$\left\{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{g}^T \\ \underset{\sim}{g} & -\underset{\sim}{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{k}_\sigma & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix}\right\} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{v} \\ \underset{\sim}{p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}_o\underset{\sim}{q} + {}^t\underset{\sim}{q} \\ \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{r} \\ \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

Definindo-se os parâmetros nodais para o nó i ($\underset{\sim}{v}_i^*$) por:

$$\underset{\sim}{v}_i^* = \begin{bmatrix} {}_o\underset{\sim}{p}_i & \underset{\sim}{v}_i \end{bmatrix}^T \tag{2.45}$$

A equação (2.45) toma a seguinte forma

$$(\underset{\sim}{k}_o^* + \underset{\sim}{k}_\sigma^*)\, \underset{\sim}{v}^* - ({}_o\underset{\sim}{q}^* + {}^t\underset{\sim}{q}^*) + \underset{\sim}{r}^* = \underset{\sim}{0} \tag{2.46}$$

quando se pretende efetuar verificações de equilibrio em cada incremento e

$$(\underset{\sim}{k}_o^* + \underset{\sim}{k}_\sigma^*)\, \underset{\sim}{v}^* - {}_o\underset{\sim}{q}^* = \underset{\sim}{0} \tag{2.47}$$

para a solução puramente incremental.

Estas equações são estendidas a todo o domínio, somando-se as contribuições de cada elemento, e resolvidas em cada incremento e/ou iteração segundo os processos usuais.

Para o estudo de estados planos de tensões e de sólidos axissimétricos, optou-se por elementos isoparamétricos quadráticos com oito pontos nodais, como na Figura 2.2.

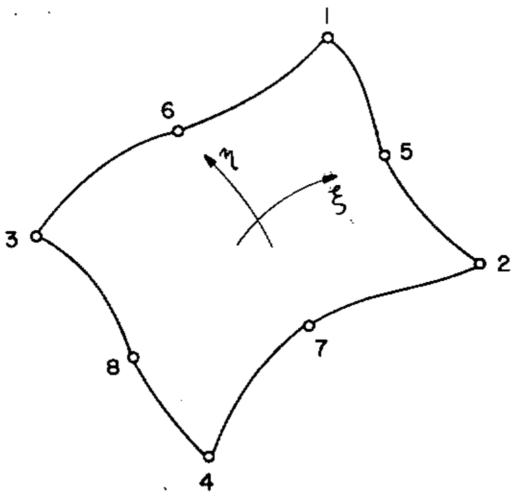


Figura 2.2 _ Elemento isoparamétrico quadrático

Nesse caso:

$$\underset{\sim}{v} = \left[\underset{\sim}{v}_1 \quad \underset{\sim}{v}_2 \quad \cdots \quad \underset{\sim}{v}_8 \right]^T \tag{2.48a}$$

e

$$\underset{\sim}{p} = \left[{}_o\underset{\sim}{p}_1 \quad {}_o\underset{\sim}{p}_2 \quad \cdots \quad {}_o\underset{\sim}{p}_8 \right]^T \tag{2.48b}$$

O cálculo de derivadas do tipo

$${}_oN_{i,1} = \frac{\partial \; {}_oN_i}{\partial \; {}^ox_1} \tag{2.49}$$

sendo N_i a função de interpolação para o nó i , é obtido a partir das derivadas com relação as coordenadas locais $(\xi \; , \; \eta)$, utilizando-se uma matriz Jacobiana, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\, {}^{o}x_1} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial\, {}^{o}x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det F} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\, {}^{o}x_1}{\partial \xi} & \dfrac{\partial\, {}^{o}x_2}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial\, {}^{o}x_1}{\partial \eta} & \dfrac{\partial\, {}^{o}x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

onde:

$$\det F = \frac{\partial\, {}^{o}x_1}{\partial \xi}\,\frac{\partial\, {}^{o}x_2}{\partial \eta} - \frac{\partial\, {}^{o}x_1}{\partial \eta}\,\frac{\partial\, {}^{o}x_2}{\partial \xi} \tag{2.51}$$

2.4.1 - Estado Plano de Tensões

Nesse caso temos para um nó i :

$$\underset{\sim}{v}_i = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \\ u_2 \end{Bmatrix}_i \tag{2.52a}$$

$${}_{o}\underset{\sim}{p}_i = \begin{Bmatrix} {}_{o}S_{11} \\ {}_{o}S_{22} \\ {}_{o}S_{12} \end{Bmatrix}_i \tag{2.52b}$$

As matrizes de interpolação $\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{N}$, como usual, são convenientemente formadas de suas submatrizes $\underset{\sim}{A}_i$ e $\underset{\sim}{N}_i$.

A matriz que relaciona a parte linear dos incrementos de deformação com os incrementos de deslocamentos nodais é obtida por:

$$ {}^{t}_{o}\underset{\sim}{B}_{L} = \left[{}^{t}_{o}\underset{\sim}{B}^{1}_{L} \quad {}^{t}_{o}\underset{\sim}{B}^{2}_{L} \quad \cdots \quad {}^{t}_{o}B^{8}_{L} \right] \tag{2.53a} $$

onde para um nó genérico i tem-se:

$$ {}^{t}_{o}\underset{\sim}{B}^{i}_{L} = \left[\begin{array}{c|c} {}^{t}_{o}x_{1,1}\ {}_{o}N_{i,1} & {}^{t}_{o}x_{2,1}\ {}_{o}N_{i,1} \\ \hline {}^{t}_{o}x_{1,2}\ {}_{o}N_{i,2} & {}^{t}_{o}x_{2,2}\ {}_{o}N_{i,2} \\ \hline {}^{t}_{o}x_{1,1}\ {}_{o}N_{i,2} + {}^{t}_{o}x_{1,2}\ {}_{o}N_{i,1} & {}^{t}_{o}x_{2,2}\ {}_{o}N_{i,1} + {}^{t}_{o}x_{2,1}\ {}_{o}N_{i,2} \end{array} \right] \tag{2.53b} $$

onde:

$$ {}_{o}N_{i,j} = \frac{\partial\ N_i}{\partial\ {}^{o}x_j} \tag{2.54} $$

Da mesma forma a matriz ${}^{t}_{o}\underset{\sim}{B}_{NL}$ é composta das submatrizes

$$ {}^{t}_{o}\underset{\sim}{B}^{i}_{NL} = \left[\begin{array}{c|c} {}_{o}N_{i,1} & 0 \\ \hline {}_{o}N_{i,1} & 0 \\ \hline 0 & {}_{o}N_{i,1} \\ \hline 0 & {}_{o}N_{i,2} \end{array} \right] \tag{2.55} $$

Para estado plano de tensões ${}^{t}_{o}\underset{\sim}{S}$ e ${}^{t}_{o}\underset{\sim}{\hat{S}}$ são defi-
nidas como:

$$
{}^{t}_{o}\underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} {}^{t}_{o}S_{11} & {}^{t}_{o}S_{12} & 0 & 0 \\ {}^{t}_{o}S_{21} & {}^{t}_{o}S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{t}_{o}S_{11} & {}^{t}_{o}S_{12} \\ 0 & 0 & {}^{t}_{o}S_{21} & {}^{t}_{o}S_{22} \end{bmatrix} \tag{2.56}
$$

$$
{}^{t}_{o}\underset{\sim}{\hat{S}} = \begin{bmatrix} {}^{t}_{o}S_{11} \\ {}^{t}_{o}S_{22} \\ {}^{t}_{o}S_{12} \end{bmatrix} \tag{2.57}
$$

2.4.2 - Sólido Axissimétrico

Na análise de sólidos axissimétricos, os vetores dos incrementos de deslocamentos e de tensões nodais são:

$$
\underset{\sim}{v}_i = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_i \tag{2.58a}
$$

$$
{}_{o}\underset{\sim}{p}_i = \begin{Bmatrix} {}_{o}S_{11} \\ {}_{o}S_{22} \\ {}_{o}S_{12} \\ {}_{o}S_{33} \end{Bmatrix}_i \tag{2.58b}
$$

As matrizes de ${}^{t}_{o}\underset{\sim}{B}_{L}$ e ${}^{t}_{o}\underset{\sim}{B}_{NL}$ ficam então

$$
{}^{t}_{o}\underset{\sim}{B}{}^{i}_{L} = \left[\begin{array}{c:c}
{}^{t}_{o}x_{1,1}\ {}_{o}N_{i,1} & {}^{t}_{o}x_{2,1}\ {}_{o}N_{i,1} \\ \hdashline
{}^{t}_{o}x_{1,2}\ {}_{o}N_{i,2} & {}^{t}_{o}x_{2,2}\ {}_{o}N_{i,2} \\ \hdashline
{}^{t}_{o}x_{1,1}\ {}_{o}N_{i,2} + {}^{t}_{o}x_{1,2}\ {}_{o}N_{i,1} & {}^{t}_{o}x_{2,2}\ {}_{o}N_{i,1} + {}^{t}_{o}x_{2,1}\ {}_{o}N_{i,2} \\ \hdashline
\dfrac{{}^{t}x_{1}}{{}^{o}x_{1}}\ \dfrac{N_{i}}{{}^{o}x_{1}} & 0
\end{array} \right] \tag{2.59}
$$

$$
{}^{t}_{o}\underset{\sim}{B}{}^{i}_{NL} = \left[\begin{array}{c:c}
{}_{o}N_{i,1} & 0 \\ \hdashline
0 & {}_{o}N_{i,2} \\ \hdashline
{}_{o}N_{i,2} & {}_{o}N_{i,1} \\ \hdashline
\dfrac{N_{i}}{{}^{o}x_{1}} & 0
\end{array} \right] \tag{2.60}
$$

As matrizes ${}^{t}_{o}\underset{\sim}{S}$ e ${}^{t}_{o}\underset{\sim}{\hat{S}}$ tem a seguinte forma:

$$
{}_{o}^{t}\underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} {}_{o}^{t}S_{11} & {}_{o}^{t}S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ {}_{o}^{t}S_{21} & {}_{o}^{t}S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}_{o}^{t}S_{11} & {}_{o}^{t}S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & {}_{o}^{t}S_{21} & {}_{o}^{t}S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}_{o}^{t}S_{33} \end{bmatrix} \qquad (2.61)
$$

$$
{}_{o}^{t}\hat{\underset{\sim}{S}} = \begin{bmatrix} {}_{o}^{t}S_{11} \\ {}_{o}^{t}S_{22} \\ {}_{o}^{t}S_{12} \\ {}_{o}^{t}S_{33} \end{bmatrix} \qquad (2.62)
$$

Todas as integrações indicadas foram, como usual em elementos isoparamétricos, efetuadas numericamente pelo método de integração de Gauss.

III - MATERIAIS HIPERELÁSTICOS

3.1 - INTRODUÇÃO

Em decorrência dos materiais de que são constituídos, alguns corpos ao se deformarem, sofrem apenas pequenas variações em seus volumes. Como consequência natural, tais materiais podem ser considerados incompressíveis.

A hipótese de incompressibilidade apresenta-se como a forma mais conveniente e que melhor se adapta ao estudo desses problemas.

A análise de deformações finitas em corpos incompressíveis,constitue uma importante parte da elasticidade finita, já que nas aplicações, é frequente encontrá-los submetidos a grandes deformações. Como exemplo, citam-se as borrachas naturais e sintéticas que compõem as membranas de balões infláveis de grandes altitudes e alguns propelentes sólidos.

Além da preservação de volume nos materiais incompressíveis,o estado de deformação não se altera quando se adiciona às tensões atuantes,um estado de tensão associado a uma variação de volume. Dessa forma, as deformações determinam as tensões a menos de um escalar que é reconhecido como uma pressão hidrostática.

A condição de incompressibilidade se escreve:

$$\det F = 1 \tag{3.1}$$

sendo as componentes de F definidas em (2.9). Esta expressão conduz a algumas simplificações na obtenção da solução analítica de problemas da elasticidade finita. Entretanto, isto não ocorre quando se utiliza o Método dos Elementos Finitos na determinação de soluções aproximadas.

Conclue-se da expressão (3.1) que as deformações nos corpos constituidos de materiais incompressíveis, se limitam a classe de movimentos isocóricos.

Pode-se exprimir a equação (3.1) em termos do terceiro invariante (I_3) do tensor de deformação (C) definido por:

$$C = F^T F \tag{3.2a}$$

Tem-se então que:

$$\det C = I_3 = 1 \tag{3.3}$$

Com o objetivo de ilustrar a verificação da restrição (3.3) para o caso do neoprene, apresentam-se nas Figuras (3.1) os resultados experimentais, obtidos por Alexander[12]. Nestas figuras, indicam-se a variação de I_3 e de σ_1 com a deformação em uma película submetida a uma solicitação axial.

Em consequência da definição desses materiais como hiperelásticos, o estado de tensões pode ser obtido por derivação de uma função potencial W , que representa a energia de deformação relativa a configuração atual por unidade de volume indeformado, isto é:

$$S = \frac{\partial W}{\partial E} \tag{3.4a}$$

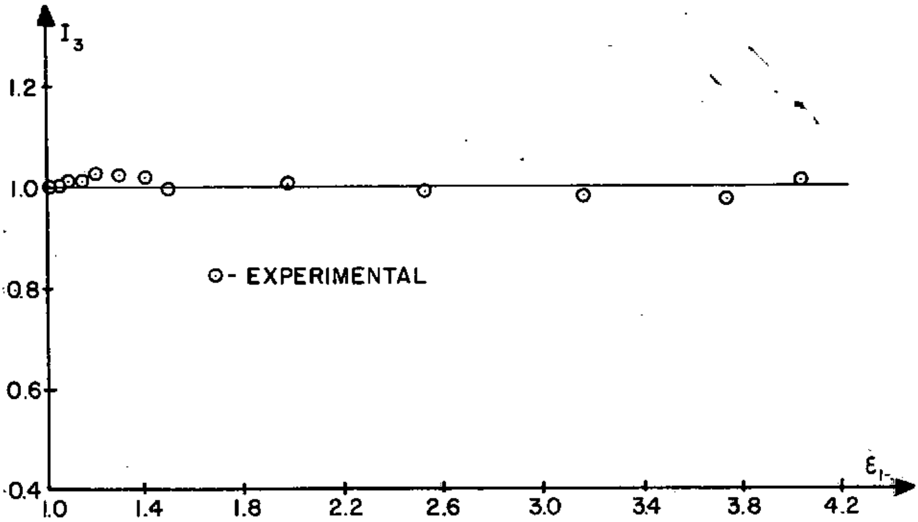


Figura 3.1_ Verificação da hipótese de incompressibilidade do neoprene

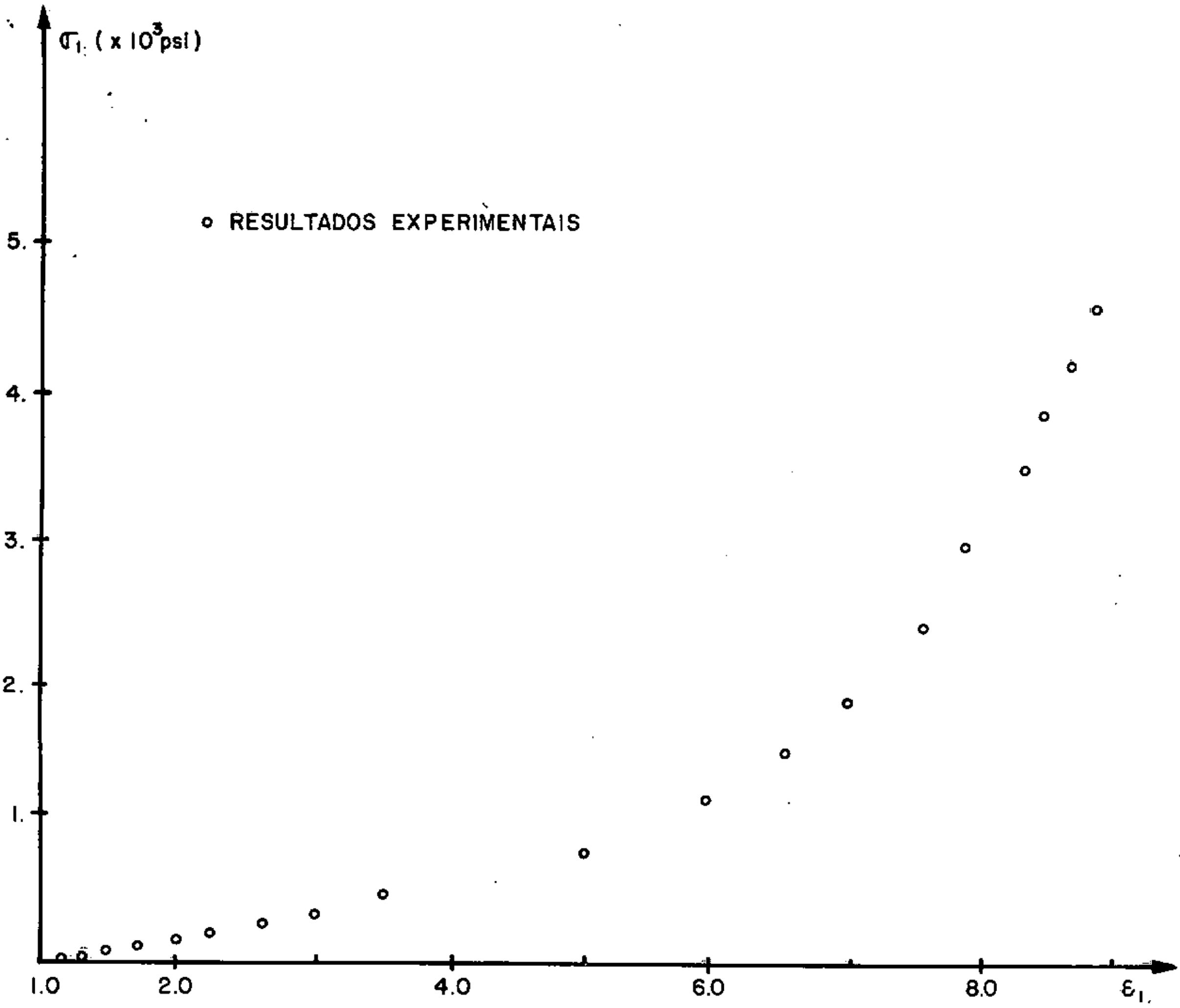


Figura 3.1(a)_ Diagrama tensão - deformação

ou tendo em vista que:

$$C = 2 \cdot E + I \tag{3.4b}$$

$$S = 2 \frac{\partial W}{\partial C} \tag{3.4c}$$

onde as componentes de S são as tensões do 2º tensor de Piola-Kirchhoff referidas à configuração inicial.

Considerando-se isotropia, pode-se demonstrar que W é função somente dos invariantes do tensor C, ou seja:

$$W = W\ (I_1\ ,\ I_2\ ,\ I_3) \tag{3.5}$$

onde:

$$I_1 = tr\ C \tag{3.6a}$$

$$I_2 = det\ C\ (tr\ C^{-1}) \tag{3.6b}$$

$$I_3 = det\ C \tag{3.6c}$$

são os invariantes de C e $tr\ C$ denota o traço do tensor C.

Dessa forma, a equação (3.4) fica:

$$S = 2\ (\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial C} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial C}) \tag{3.7}$$

Para os materiais hiperelásticos incompressíveis a equação (3.3), tratada como uma restrição na expressão de W, permite que se escreva:

$$W = \hat{W}\,(I_1\ ,\ I_2) + \frac{h}{2}\,(I_3 - 1) \tag{3.8}$$

A introdução da expressão (3.8) em (3.7), conduz a:

$$S = 2\left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1}\,I + \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}\,(I_1\ I - C)\right] + \frac{h}{2}\,C^{-1} \tag{3.9}$$

onde se utilizaram as derivadas dos invariantes de C que são dadas por:

$$\frac{\partial I_1}{\partial C} = I \tag{3.10a}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial C} = I_1\ I - C \tag{3.10b}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial C} = (\det C)\ C^{-1} \tag{3.10c}$$

Nas expressões (3.4b), (3.9) e (3.10) o tensor identidade é representado por I.

Várias aproximações de $\hat{W}\,(I_1\ ,\ I_2)$, para materiais específicos, são propostas nas referências [1, 12]. Como exemplo citam-se as seguintes funções:

a) Estatística ou Neo-Hookeana

$$\hat{W} = C\,(I_1 - 3) \tag{3.11a}$$

b) Mooney-Rivlin

$$\hat{W} = C_1 \ (I_1 - 3) + C_2 \ (I_2 - 3) \qquad (3.11b)$$

c) Isihara, Hashitsume e Tatibana ou de três termos

$$\hat{W} = C_1 \ (I_1 - 3) + B_1 \ (I_1 - 3)^2 + C_2 \ (I_2 - 3) \qquad (3.11c)$$

d) Hart-Smith

$$\hat{W} = C \int e^{k_1 \ (I_1-3)^2} \ d \ I_1 + k_2 \ \ell n \ (\frac{I_2}{3}) \qquad (3.11d)$$

e) Alexander

$$\hat{W} = C_1 \int e^{k_1 \ (I_1-3)^2} \ d \ I_1 + C_2 \ (I_2 - 3) + C_3 \ \ell n \ \frac{I_2 - 3 + k_2}{k_2}$$

(3.11e)

Na Figura 3.2, apresenta-se uma comparação entre algumas dessas aproximações, com os resultados experimentais obtidos por Treloar em testes uniaxiais com borrachas sulfurosas.

Utiliza-se no presente trabalho,a função $\hat{W}$ proposta por Mooney, que é usualmente denominada de função de Mooney-Rivlin, dada pela relação (3.11b).

A equação (3.11b) tem sido a mais amplamente difundida e utilizada para os materiais incompressíveis.

Essa expressão tem-se mostrado bastante apropriada para certas borrachas naturais e vulcanizadas, quando em regi me de grandes deformações. Entretanto para deformações superiores a 450 a 500% pode-se notar uma discrepância entre as experiências e os resultados obtidos com a utilização dessa aproximação para $\hat{W}$.

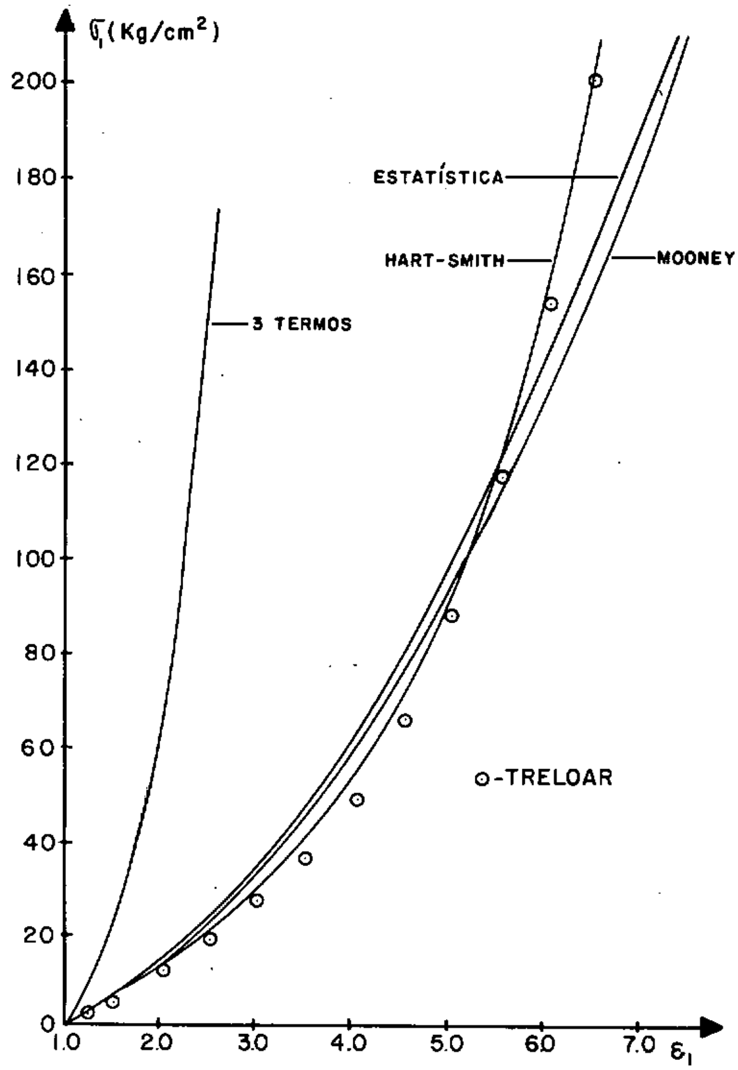


Figura 3.2 _ Teste Uniaxial de uma borracha sulfurosa

A introdução de (3.11b) na expressão das tensões (equação (3.9)), conduz a:

$$S = 2\ C_1\ I + 2\ C_2\ (I_1\ I + C) + h\ C^{-1} \qquad (3.12a)$$

ou, em componentes:

$$S_{ij} = 2\ C_1\ \delta_{ij} + 2\ C_2\ (I_1\ \delta_{ij} + C_{ij}) + h\ C^{-1}_{ij} \qquad (3.12b)$$

onde δ_{ij} denota o delta de Kronecker.

3.2 - PROBLEMAS DE ESTADO PLANO DE TENSÕES

Tratando-se de estado plano de tensões, não se considera a pressão hidrostática como uma variável adicional do problema, já que pode-se eliminá-la da expressão (3.12), a partir da consideração de que a tensão normal ao plano S_{33}, é nula.

Assim matricialmente a relação (3.12) fica:

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix} = 2\ C_1 \begin{bmatrix} 1 - C_{33}^2\ C_{22} \\ 1 - C_{33}^2\ C_{11} \\ - C_{33}^2\ C_{12} \end{bmatrix} + 2\ C_2 \left\{ \begin{bmatrix} C_{33} \\ C_{22} \\ 0 \end{bmatrix} + \left[1 - C_{33}^2\ (C_{11} + C_{22})\right] \begin{bmatrix} C_{22} \\ C_{11} \\ - C_{12} \end{bmatrix} \right\} \qquad (3.13)$$

onde já foi levado em conta que no tensor de deformação C :

$$C_{13} = C_{23} = 0 \qquad (3.14)$$

Além disso, a condição de incompressibilidade fornece:

$$C_{33}\,(C_{11}\,C_{22} - C_{12}^2) = 1 \qquad (3.15)$$

que permite eliminar de (3.13) a variável C_{33} .

Dessa forma, deriva-se de (3.13) uma equação constitutiva incremental expressa por:

$$_{o}S_{ij} = \frac{\partial\,S_{ij}}{\partial\,E_{k\ell}}\,{}_{o}E_{k\ell} \qquad (3.16)$$

A equação (3.16) é matricialmente representada por [3,8]:

$$\begin{bmatrix} _{o}S_{11} \\ _{o}S_{22} \\ _{o}S_{12} \end{bmatrix} = {}_{o}\underset{\sim}{D}^{-1} \begin{bmatrix} _{o}E_{11} \\ _{o}E_{22} \\ 2\;{}_{o}E_{12} \end{bmatrix} \qquad (3.17)$$

sendo ${}_{o}\underset{\sim}{D}^{-1}$ avaliado no tempo t por:

$$_{o}\underset{\sim}{D}^{-1} = 4\,C_1\,C_{33}^2 \left\{ 2\,C_{33} \begin{bmatrix} C_{22}^2 & C_{11}\,C_{22} & -\,C_{12}\,C_{22} \\ & C_{11} & -\,C_{12}\,C_{11} \\ \text{SIMÉTRICA} & & C_{12}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} +$$

$$+ 4 C_2 C_{33}^2 \left\{ 2 C_{33} (C_{11} + C_{22}) \begin{bmatrix} C_{22}^2 & C_{12} C_{22} & - C_{12} C_{22} \\ & C_{11}^2 & - C_{12} C_{11} \\ \text{SIMÉTRICA} & & C_{12}^2 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + (C_{11} + C_{22}) \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 C_{22} & C_{33}^{-2} & C_{12} \\ C_{33}^{-2} & -2 C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{12} & -2 C_{33}^{-2} \end{bmatrix} \right\} \quad (3.18)$$

A inversão de (3.17) fornece:

$${}_{o}\underset{\sim}{E} = {}_{o}\underset{\sim}{D} \; {}_{o}\underset{\sim}{S} \quad (3.19a)$$

ou em componentes:

$${}_{o}E_{ij} = {}_{o}D_{ijk\ell} \; {}_{o}S_{k\ell} \quad (3.19b)$$

Uma vez obtida a relação entre os incrementos de tensão e de deformação (equação (3.19)), a análise de problemas de estado plano de tensões envolvendo materiais hiperelásticos incompressíveis, é conduzida através da forma incremental do princípio variacional de Hellinger-Reissner conforme apresentada na equação (2.36).

Apenas um procedimento puramente incremental foi considerado.

Procedendo-se a discretização do contínuo por meio das expansões (2.39), deriva-se um sistema de equação idêntico ao apresentado na equação (2.44).

Conclue-se então que a única diferença entre a formulação apresentada no Capítulo II e a aqui desenvolvida, se relaciona com a matriz $_{o}\underline{D}$, que neste caso deverá ser obtida a partir da inversão de (3.18).

É importante ressaltar que em qualquer outro tipo de problema que não de estado plano de tensão, a pressão hidrostática não pode ser eliminada da expressão (3.12).

3.3 - ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO

3.3.1 - Equação Constitutiva

Nos problemas de estado plano de deformação, a relação entre os incrementos de tensão e de deformação deve ser derivada da equação (3.12), considerando-se S_{ij} , como função das deformações e da pressão hidrostática (h) . Tem-se assim que :

$$_{o}S_{ij} = \frac{\partial\ S_{ij}}{\partial\ E_{ij}}\ _{o}E_{ij} + \frac{\partial\ S_{ij}}{\partial\ h}\ _{o}h \qquad (3.20)$$

Dessa forma:

$$_{o}S_{ij} = {_{o}S'_{ij}} + {_{o}h}\ {^{t}_{o}C^{-1}_{ij}} \qquad (3.21)$$

onde:

$$_{o}S'_{ij} = {_{o}D^{-1}_{ijk\ell}}\ {_{o}E_{k\ell}} \qquad (3.22)$$

são os incrementos das tensões de distorção, sendo $_{o}h$ o incremento na pressão hidrostática entre t e $t + \Delta t$.

A inversa de (3.22) fornece:

$$ {}_{o}\dot{E}_{ij} = {}_{o}D_{ijk\ell}\ {}_{o}\dot{S}'_{k\ell} \qquad (3.23)$$

Para problemas de estado plano de deformação pode se escrever:

$$ {}^{t}_{o}C_{33} = 1 $$

e

$$ {}^{t}_{o}C_{13} = {}^{t}_{o}C_{23} = 0 $$

Assim, a relação (3.22) fica:

$$\begin{bmatrix} {}_{o}S'_{11} \\ {}_{o}S'_{22} \\ {}_{o}S'_{12} \end{bmatrix} = \left\{ -2\ {}^{t}h \begin{bmatrix} {}^{t}_{o}C^{2}_{22} & {}^{t}_{o}C^{2}_{12} & -{}^{t}_{o}C_{12}\ {}^{t}_{o}C_{22} \\ & {}^{t}_{o}C^{2}_{11} & {}^{t}_{o}C_{12}\ {}^{t}_{o}C_{11} \\ \text{SIMÉTRICA} & & \dfrac{{}^{t}_{o}C_{11}\ {}^{t}_{o}C_{22} + {}^{t}_{o}C^{2}_{12}}{2} \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + 4\ C_{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} {}_{o}E_{11} \\ {}_{o}E_{22} \\ 2\ {}_{o}E_{12} \end{bmatrix} \qquad (3.24)$$

3.3.2 - Forma Incremental do Princípio da Energia Potencial

O desenvolvimento de uma forma incremental do princípio variacional de Hellinger-Reissner, aplicável a análise não linear geométrica e/ou física, sob a condição de movimento isocórico, pode ser derivada a partir do princípio da energia potencial total. Esse princípio, aplicado aos materiais incompressíveis isotrópicos, estabelece que:

$$\delta \left({}^{t+\Delta t}\pi_p \right) = 0 \qquad (3.25)$$

com

$$
\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}\pi_p = {}^{t+\Delta t}\pi_p \; (u_k\, ,\, h) &= \int_{{}^oV} \left[\hat{W}\,(I_1\, ,\, I_2) + \frac{h}{2}\,(I_3 - 1) - P_k\, u_k \right] {}^o dV \\
&- \int_{{}^oS_\sigma} T_k\, u_k\, {}^o dS_\sigma
\end{aligned} \qquad (3.26)
$$

onde a condição de incompressibilidade é tratada como uma restrição e introduzida no funcional, considerando-se a pressão hidrostática $\frac{h}{2}$ como um multiplicador de Lagrange. Convém lembrar que em (3.26) todas as grandezas atuam no instante $t + \Delta t$ estando porém referidas a configuração inicial $(t = 0)$.

Ao exprimir as variáveis envolvidas em (3.26) em termos de seus valores na configuração de tempo t, acrescidas de seus respectivos incrementos, tem-se:

$$
\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}\pi_p = &\int_{{}^oV} \left[({}^t_oW + {}_oW) - ({}^t_oP_k + {}_oP_k)\; ({}^tu_k + u_k) \right] {}^o dV \; - \\
&\int_{{}^oS_\sigma} ({}^t_oT_k + {}_oT_k)\; ({}^tu_k + u_k)\; {}^o dS_\sigma
\end{aligned} \qquad (3.27)
$$

Subtraindo-se de (3.27) a expressão do funcional da energia potencial, escrito para o instante t, e denotando por $\Delta\pi_p$ essa diferença, obtém-se:

$$\Delta\pi_p = {}^{t+\Delta t}\pi_p - {}^{t}\pi_p = \int_{^oV} \left[{}_oW - ({}^t_oP_k - {}_oP_k)\, u_k \right] {}^o dV -$$

$$- \int_{^oS_\sigma} ({}^t_oT_k + {}_oT_k)\, u_k \; {}^o dS_\sigma \qquad (3.28)$$

onde foram eliminadas todas as expressões constantes, isto é, não sujeitas a variações. Tem-se então, uma forma incremental do princípio da energia potencial para os materiais incompressíveis:

$$\delta\, (\Delta\pi_p) = 0 \qquad (3.29)$$

Sendo a função W analítica na vizinhança de ${}^t_oE_{ij}$ e th, a utilização de uma expansão em série de Taylor em torno desse ponto, permite obter uma expressão para o incremento ${}_oW$.

Desprezando-se termos de ordem superior, essa expansão fornece:

$${}_oW\, ({}_oE_{ij}\, ,\, {}_oh) = \frac{\partial W}{\partial\, E_{ij}}\, {}_oE_{ij} + \frac{\partial W}{\partial h}\, {}_oh + \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 W}{\partial\, E_{ij}\, \partial\, E_{k\ell}}\, {}_oE_{ij}\, {}_oE_{k\ell} +$$

$$+ \frac{1}{2}\, \frac{\partial W}{\partial h^2}\, {}_oh^2 + \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 W}{\partial\, E_{ij}\, \partial h}\, {}_oE_{ij}\, {}_oh \qquad (3.30)$$

Em vista das relações (3.4), (3.10c) e (3.12) conclue-se que:

$${}_oW\, ({}_oE_{ij}\, ,\, {}_oh) = {}^t_oS_{ij}\, {}_oE_{ij} + \frac{1}{2}\, (I_3 - 1)\, {}_oh + A'\, ({}_oE_{ij}) + {}^t_oC^{-1}_{ij}\, {}_oE_{ij}\, {}_oh$$

$$(3.31)$$

onde

$$A' \, ({}_oE_{ij}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \, \partial E_{k\ell}} \, {}_oE_{ij} \, {}_oE_{k\ell} \tag{3.32a}$$

ou

$$A' \, ({}_oE_{ij}) = \frac{1}{2} \, {}_oD^{-1}_{ijk\ell} \, {}_oE_{ij} \, {}_oE_{k\ell} \tag{3.32b}$$

é definida como uma função energia de deformação incremental de distorção.

Associada a função $A' \, ({}_oE_{ij})$ define-se também uma função $B \, ({}_oS'_{ij})$, denominada de função energia complementar de deformação incremental de distorção, dada por:

$$B \, ({}_oS'_{ij}) = {}_oS'_{ij} \, {}_oE_{ij} - A' \, ({}_oE_{ij}) \tag{3.33}$$

A introdução da expressão (3.31) em (3.28) permite que (3.29) seja escrito como:

$$\Delta\pi_p = \int_{{}^oV} \left[A' \, ({}_oE_{ij}) + {}^t_oS_{ij} \, {}_oE_{ij} + \frac{1}{2} \, {}_oh \, (I_3 + 2 \, {}^t_oC^{-1}_{ij} \, {}_oE_{ij} - 1) \right] {}^odV$$
$$- \int_{{}^oV} ({}^t_oP_k + {}_oP_k) \, u_k \, {}^odV - \int_{{}^oS_\sigma} ({}^t_oT_k + {}_oT_k) \, u_k \, {}^odS_\sigma \rightarrow \text{estacionário} \tag{3.34}$$

3.3.3 - Forma Incremental do Princípio Variacional de Hellinger-Reissner

Por intermédio da relaxação das relações deslocamentos-deformações (equação 2.28) em $\Delta\pi_p$ de (3.34), obtém-se o seguinte funcional:

$$\pi_p^* = \Delta\pi_p - \int_{{}^oV} \lambda_{ij} \, ({}^t_oE_{ij} + {}_oE_{ij} - {}^t_o\ell_{ij} - {}^t_o\eta_{ij} - {}_o\ell_{ij} - {}_o\eta_{ij}) \, {}^odV \tag{3.35}$$

sendo λ_{ij} os multiplicadores de Lagrange associados a essa relaxação.

A condição de estacionaridade desse funcional

$$\delta \left[\pi_p^* \, (\lambda_{ij} \, , \, {}_oE_{ij} \, , \, u_k \, , \, {}_oh) \right] = 0 \tag{3.36}$$

determina de modo análogo ao apresentado no Capítulo II que:

$$\lambda_{ij} = {}^t_oS_{ij} + {}_oS_{ij} \tag{3.37a}$$

ou tendo em vista (3.21):

$$\lambda_{ij} = {}^t_oS_{ij} + {}_oS'_{ij} + {}_oh \; {}^t_oC^{-1}_{ij} \tag{3.37b}$$

A substituição em (3.35) de $A' \, ({}_oE_{ij})$ pela função $B \, ({}_oS'_{ij})$, definida pela relação (3.33), resulta numa forma incremental do princípio variacional de Hellinger-Reissner para o caso de materiais incompressíveis ou seja:

$$\begin{aligned}
\Delta\pi_R = & \int_{{}^oV} \{- B \, ({}_oS'_{ij}) + ({}_oS'_{ij} + {}_oh \; {}^t_oC^{-1}_{ij}) \, {}_o\ell_{ij} + {}^t_oS_{ij} \, {}_o\eta_{ij} - {}_oP_k \, u_k\} \, {}^odV \\
& - \int_{{}^oS_\sigma} {}_oT_k \, u_k \, {}^odS_\sigma + \left[\int_{{}^oV} ({}^t_oS_{ij} \, {}_o\ell_{ij} - {}^t_oP_k \, u_k) \, {}^odV - \int_{{}^oS_\sigma} {}^t_oT_k \, u_k \, {}^odS_\sigma \right] + \\
& + \left[\int_{{}^oV} ({}_oS'_{ij} + {}_oh \; {}^t_oC^{-1}_{ij}) \, ({}^t_oE^d_{ij} - {}^t_oE^s_{ij}) \, {}^odV \right] + \left[\int_{{}^oV} \frac{{}_oh}{2} \, (I_3 - 1) \, {}^odV \right] \\
& + \int_{{}^oV} ({}_oS'_{ij} + {}_oh \; {}^t_oC^{-1}_{ij}) \, {}_o\eta_{ij} \, {}^odV \rightarrow \text{estacionário}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

onde:

$$ {}^t_oE^d_{ij} = \frac{1}{2}\,({}^t_ou_{i,j} + {}^t_ou_{j,i} + {}^t_ou_{k,i}\,{}^t_ou_{k,j}) \tag{3.39} $$

e

$$ {}^t_oE^s_{ij} = \Sigma\ {}_oD_{ijk\ell}\ {}_oS'_{k\ell} \tag{3.40} $$

sendo que em (3.40) o símbolo Σ deve ser interpretado como um somatório no qual cada parcela,representa o incremento de deformação em cada intervalo de tempo, entre os tempos 0 e t .

Na obtenção de (3.38), considerou-se também a relação (3.37),que identifica o significado físico dos multiplicadores de Lagrange λ_{ij} .

Uma forma linearizada de (3.38), conveniente a aplicação do Método dos Elementos Finitos, é obtida não se considerando a última integral dessa expressão.

No princípio variacional apresentado,as integrais escritas entre colchetes, tornam possível efetuar em cada passo da solução incremental, três distintas formas de iteração. Tem-se assim, a verificação de equilíbrio e da compatibilidade das deformações,derivadas das duas primeiras dessas integrais conforme mencionado no Capítulo II. Além disso, a consideração da última dessas integrais, permite que se verifique no decorrer do processo incremental de resolução, a condição de incompressibilidade.

Em um procedimento puramente incremental vale-se do seguinte princípio:

$$\Delta\pi_R = \int_{^oV} \{- B\,({}_oS'_{ij}) + ({}_oS'_{ij} + {}_oh\;{}^t_oC^{-1}_{ij})\;{}_o\ell_{ij} + {}^t_oS_{ij}\;{}_o\eta_{ij} - P_k\,u_k\}\;{}^odV -$$

$$- \int_{^oV_\sigma} {}_oT_k\,u_k\;{}^odS_\sigma \rightarrow \text{estacionário} \qquad (3.41)$$

3.3.4 - Modelo Discreto

Algumas considerações adicionais devem ser feitas a respeito da discretização da classe de problemas, em que a pressão hidrostática é mantida no princípio variacional, como ocorre em estados plano de deformações.

Nesses casos, os incrementos de tensão que são expandidos, representam somente as tensões de distorção,devendo os incrementos totais de tensão serem calculados por:

$${}_oS_{ij} = {}_oS'_{ij} + {}^t_oC^{-1}_{ij}\;{}_oh \qquad (3.42)$$

Deve-se ainda adotar uma hipótese para a distribuição dos incrementos da pressão hidrostática no domínio do elemento.

Admitindo-se uma variação quadrática para essa grandeza tem-se:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{N}\;\underset{\sim}{v} \qquad (3.43a)$$

$${}_o\underset{\sim}{S}' = \underset{\sim}{A}\;\underset{\sim}{p} \qquad (3.43b)$$

$${}_o\underset{\sim}{h} = \underset{\sim}{N}_h\;\underset{\sim}{h} \qquad (3.43c)$$

onde:

${}_{o}\tilde{S}'$ - vetor dos incrementos de tensão de distorção

$\tilde{h}$ - vetor dos incrementos nodais de pressão hidrostática

$\tilde{p}$ - vetor dos incrementos nodais das tensões de distorção

A partir das expansões em (3.43), a condição de estacionaridade de $\Delta\pi_R$ conforme a equação (3.41), conduz a um sistema de equações que tem a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \tilde{k}_\sigma & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{0} & \tilde{g}^T & \tilde{g}_h^T \\ \tilde{g} & -\tilde{f} & \tilde{0} \\ \tilde{g}_h & \tilde{0} & \tilde{0} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{p} \\ \tilde{h} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}_{o}\tilde{q} \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

sendo a submatriz $\tilde{g}_h$ dada por:

$$\tilde{g}_h = \int_{{}^{o}V} \tilde{N}_h^T \, \tilde{c} \quad {}_{o}^{t}\tilde{B}_L \; {}^{o}dV \tag{3.45}$$

e $\tilde{c}$ é um vetor que contém os termos distintos de ${}_{o}^{t}\tilde{C}^{-1}$ convenientemente dispostos, isto é:

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} {}_{o}^{t}C_{11}^{-1} \\ {}_{o}^{t}C_{22}^{-1} \\ {}_{o}^{t}C_{12}^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

Todas as outras submatrizes indicadas na equação (3.44) são calculadas de modo análogo ao descrito no trecho do Capítulo II, em que se trata de problemas de estado plano de tensões.

Na formulação do modelo desenvolvido, procurou-se manter o mesmo grau de aproximação na expansão da geometria e das incógnitas nodais, como aconteceu nos modelos apresentados anteriormente. Entretanto, neste caso, tal procedimento conduziu a obtenção de matrizes mal condicionadas, o que dificultou a obtenção de soluções satisfatórias.

A forma do sistema de equações geradas, como mostrado na equação (3.44), sugere a utilização de uma técnica de condensação em relação aos graus de liberdade, relativos aos incrementos de tensão de distorção. Mesmo assim, a alternativa que parece ser a mais efetiva para tratar essa classe de problemas é a proposta por Pian[2]. Nessa referência o modelo desenvolvido utiliza uma função de interpolação linear para a geometria, deslocamentos e tensões de distorção, admitindo ainda, que a pressão hidrostática seja constante em todo domínio do elemento.

Tal como apresentado no Capítulo IV, essa aproximação conduz a resultados que se mostram bastante concordantes com as soluções analíticas.

A expansão dos incrementos de deslocamento e de pressão hidrostática por funções do mesmo grau de aproximação em modelos de deslocamento, é sugerida em Oden[1].

IV - RESULTADOS E COMPARAÇÕES

4.1 - INTRODUÇÃO

O objetivo deste Capítulo é apresentar alguns resultados numéricos obtidos com a formulação desenvolvida anteriormente e confrontá-los com resultados experimentais e de outras formulações. Estabelece-se também uma comparação entre os diversos procedimentos de análise.

Para o caso de materiais elásticos lineares pode-se adotar um procedimento puramente incremental ou um procedimento incremental com verificação de equilíbrio. No estudo de materiais hiperelásticos incompressíveis surgem duas alternativas relacionadas com o cálculo das deformações empregadas na equação constitutiva: expressão (3.18) para o caso de problemas de estado plano de tensão e (3.24) para problemas de estado plano de deformação. Essas deformações podem ser determinadas a partir dos deslocamentos nodais ou dos incrementos de tensões nodais.

4.2 - VIGA EM BALANÇO

Como primeira aplicação analisou-se o comportamento de uma viga em balanço submetida a ação de carga concentrada no bordo livre. A geometria e as propriedades físicas adotadas são apresentadas na Figura 4.1. A discretização utilizou cinco elementos isoparamétricos quadráticos de estado plano de tensão com integração 5 x 5 para todas as submatrizes do sistema de equações (2.44).

Para efeito de comparação considerou-se como solução "exata" a fornecida na referência [17]

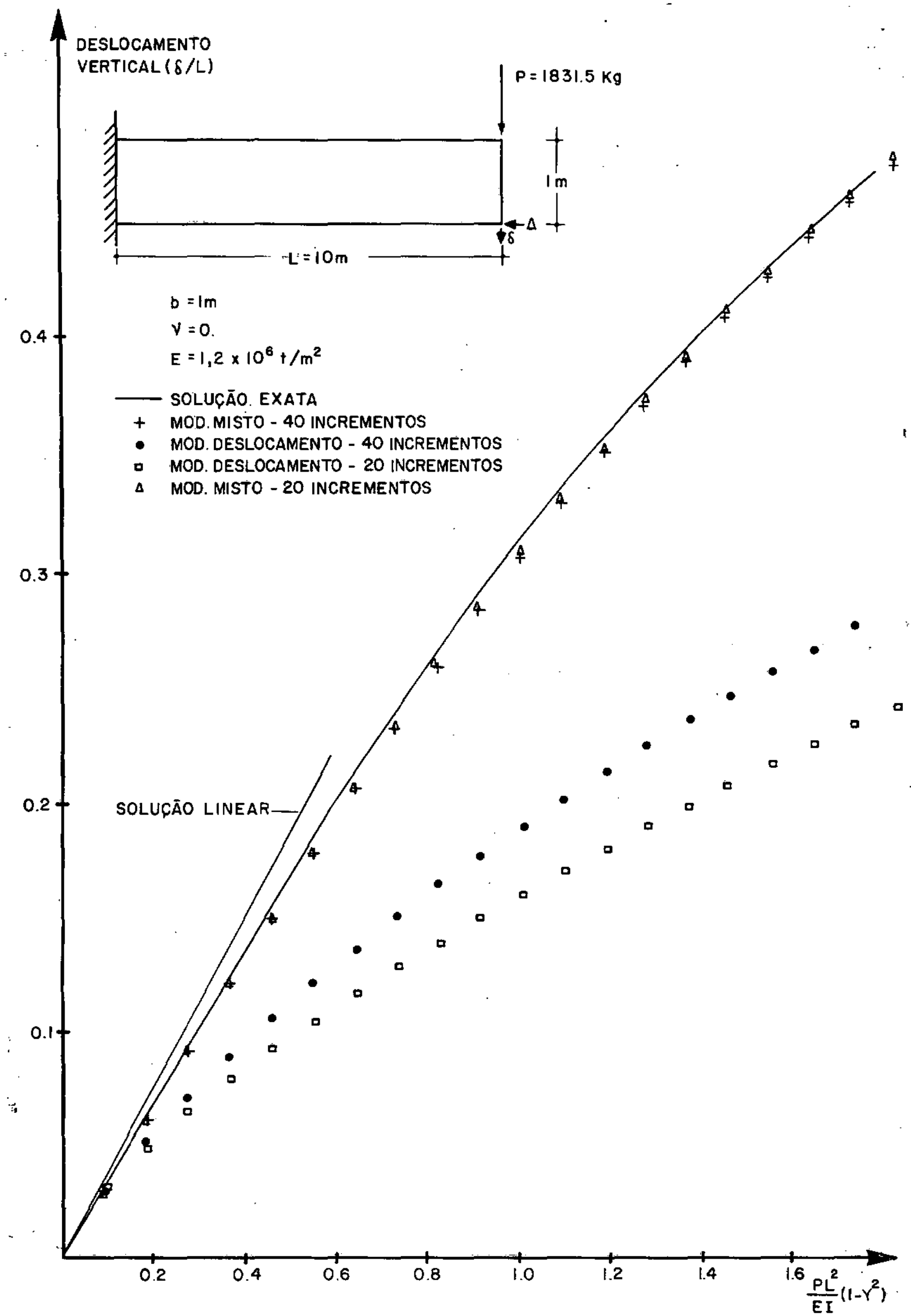


Figura 4.1 _ Desloc. Vertical _ Soluções puramente incrementais

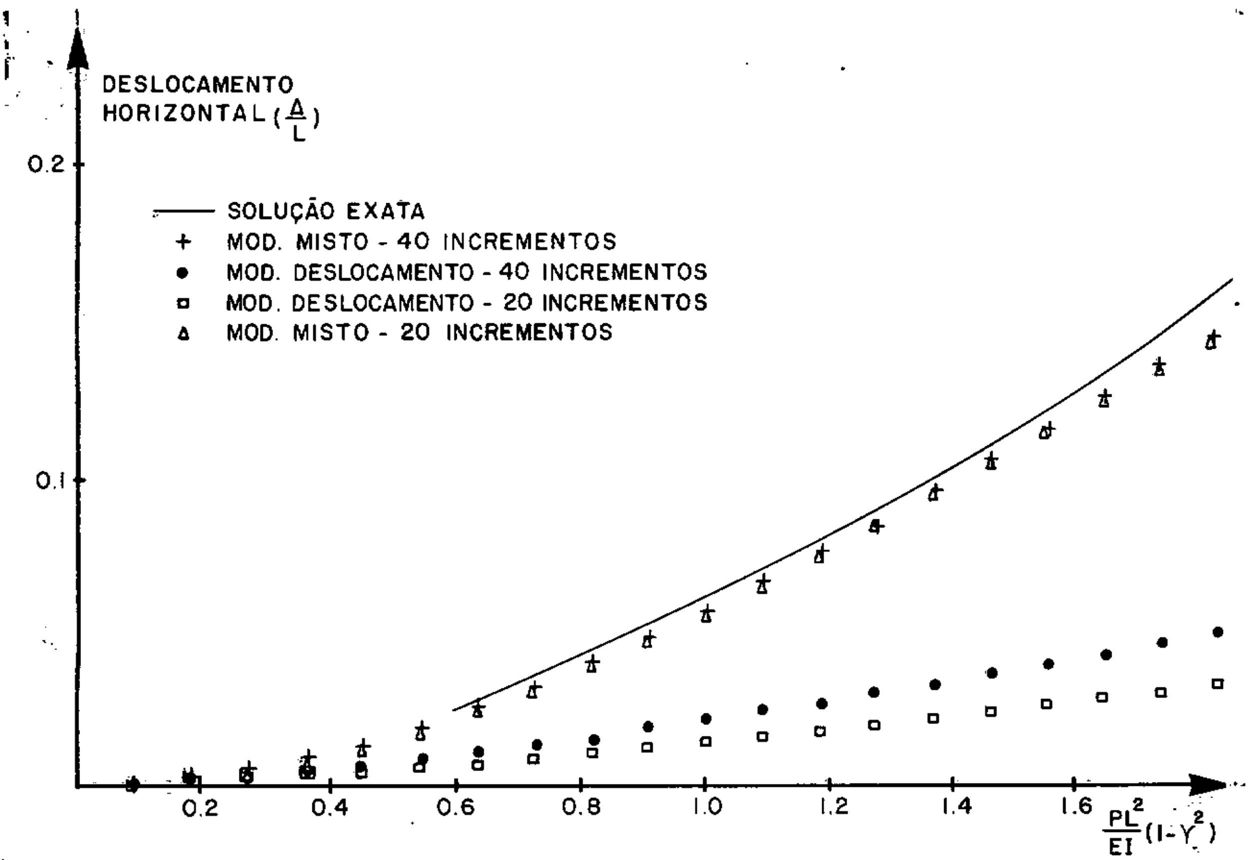


Figura 4.2 _ Deslocamento Horizontal _ Soluções puramente incremental

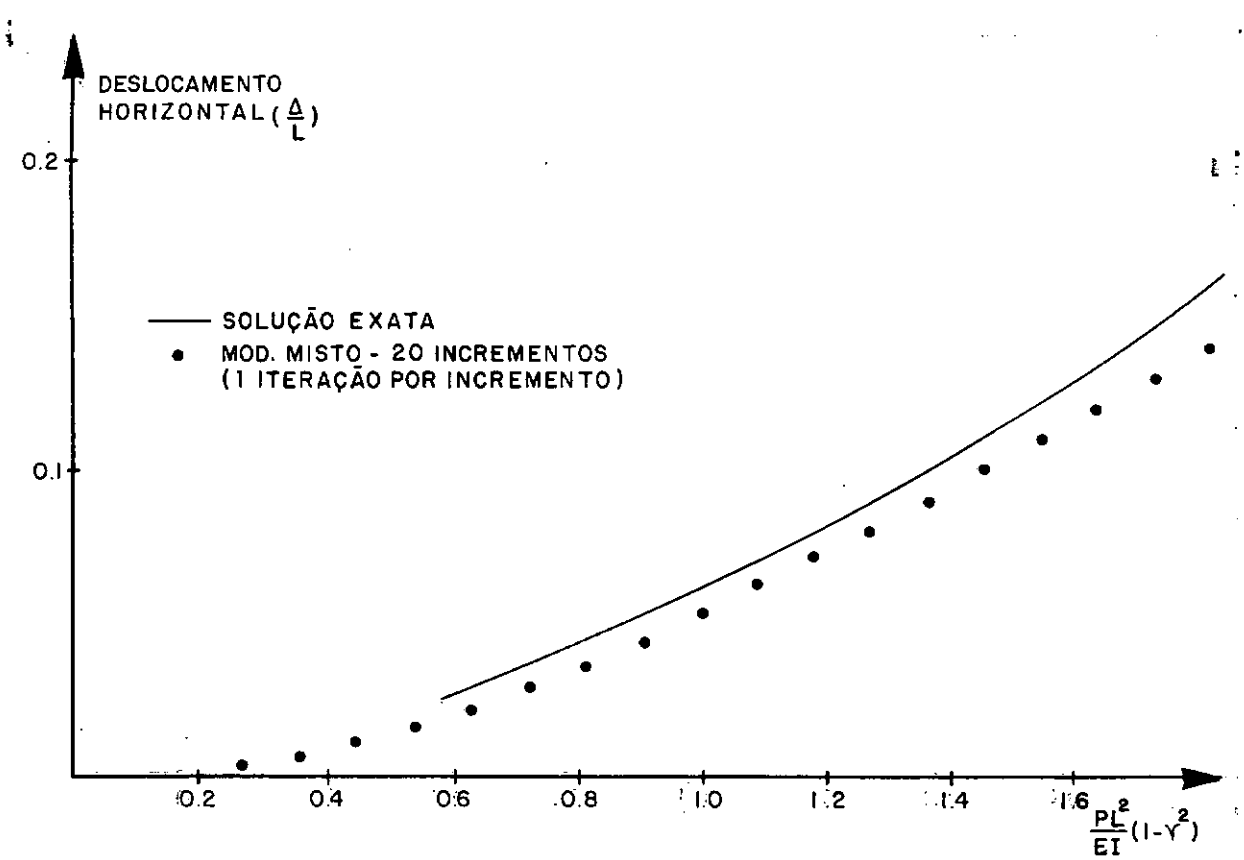


Figura 4.3 _ Deslocamento Horizontal _ Solução incremental/iterativa

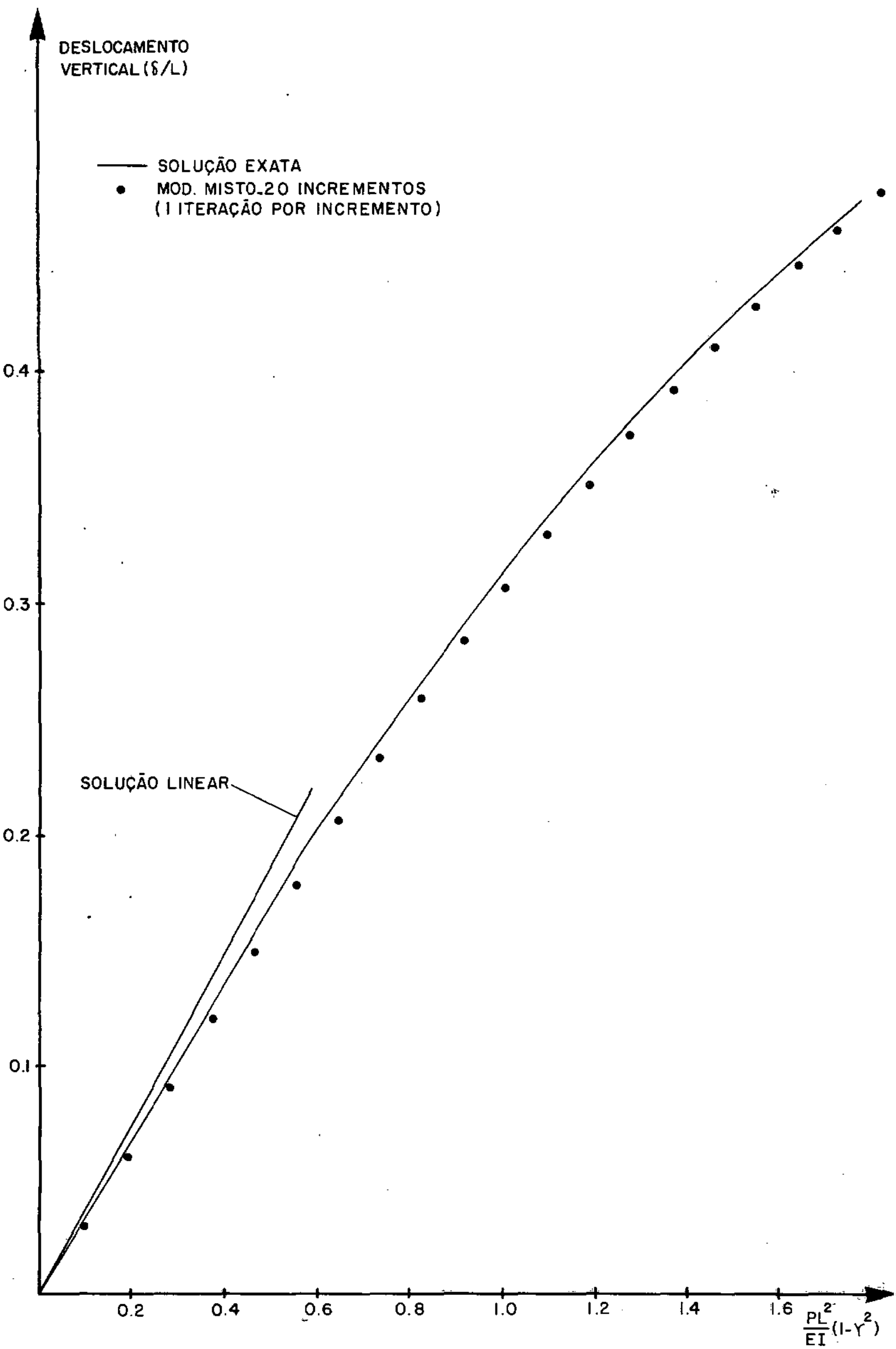


Figura 4.4 _ Deslocamento Vertical _ Solução incremental/iterativa

Inicialmente estudou-se a resposta da estrutura através de soluções puramente incrementais. Nas Figuras 4.1 e 4.2 apresentam-se respectivamente as curvas deslocamento vertical (δ) - carga e deslocamento horizontal (Δ) - carga, para esse tipo de solução.

A utilização de apenas 20 incrementos no modelo misto fornece resultados considerados satisfatórios, o que não ocorre com a análise por modelo deslocamento quando se usa o mesmo número de incrementos.

Mesmo com o aumento do número de incrementos para 40, a resposta da estrutura obtida pelo modelo deslocamento ainda se apresenta bastante afastada da solução exata. Por outro lado, não se observa melhora significativa ao se elevar o número de incrementos de 20 para 40 na análise conduzida pela formulação mista.

Nas Figuras 4.3 e 4.4 apresentam-se as mesmas curvas carga-deslocamento citadas, obtidas por um procedimento incremental/iterativo com uma iteração por incremento. Como se pode notar, tal consideração não alterou sensivelmente a resposta da estrutura.

4.3 - CASCA ESFÉRICA ABATIDA

Estudou-se em seguida a resposta de uma casca esférica engastada, submetida a ação de carga concentrada axial ($P = 100\ \ell b$) . A estrutura foi discretizada com a utilização de 10 elementos isoparamétricos quadráticos de sólido de revolução com integração 5×5 . Detalhes da geometria da casca e características físicas do material encontram-se na Figura 4.5. Nessa mesma figura e, na Figura 4.6 as soluções obtidas para 40 e

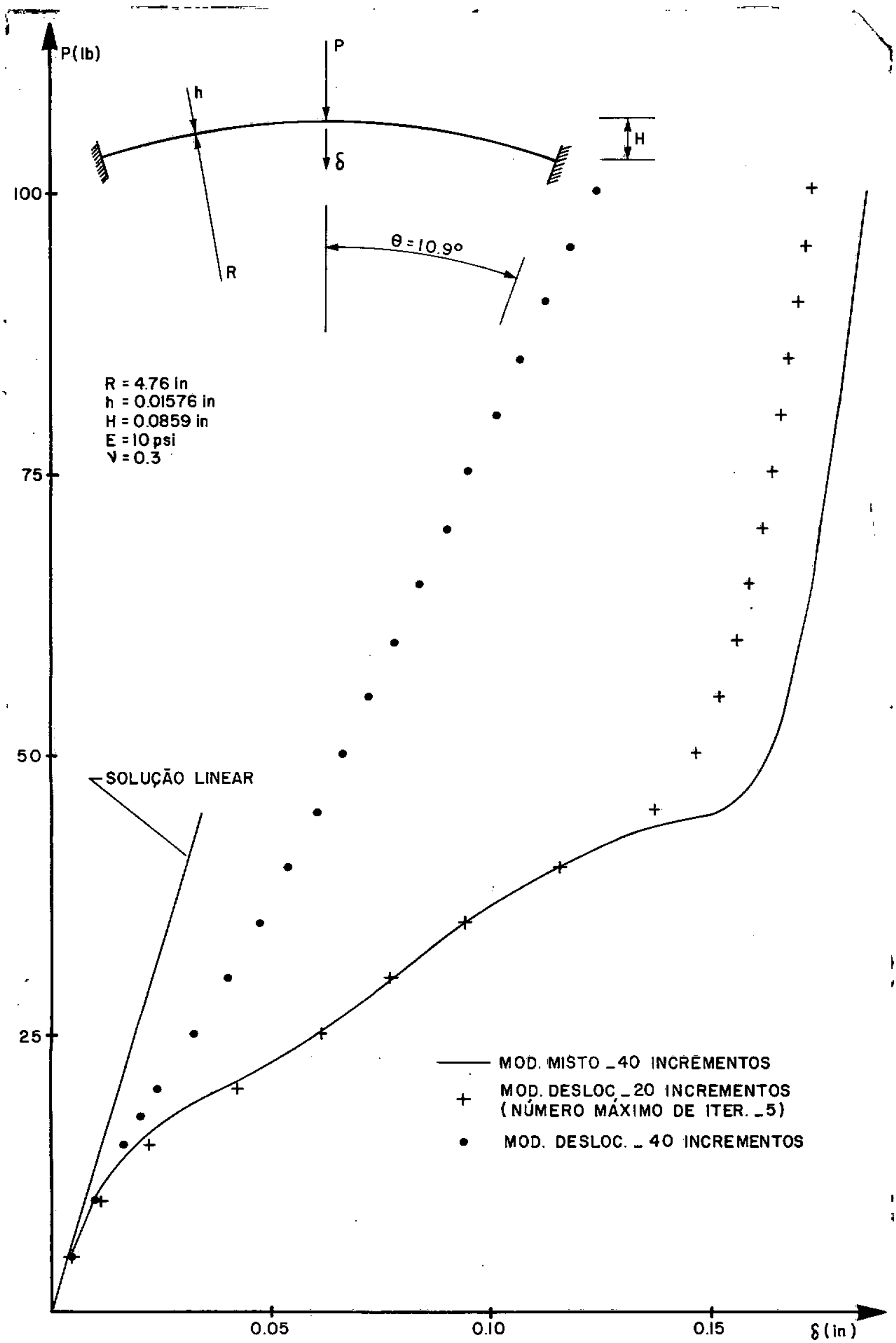


Figura 4.5 _ Casca abatida _ Deflexão central

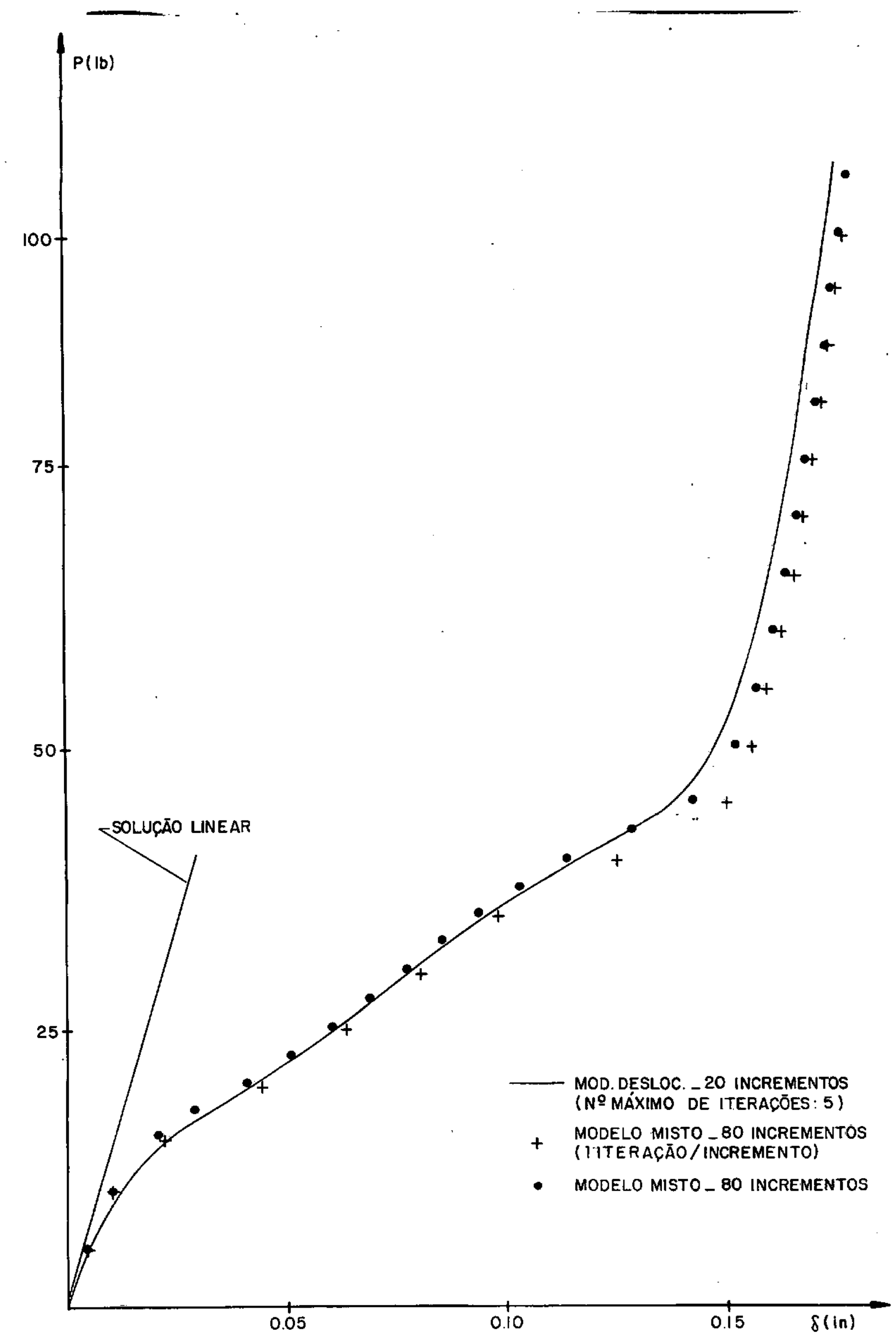


Figura 4.6 _ Casca abatida _ Deflexão central

80 incrementos pela formulação mista são confrontadas com as soluções puramente incremental e, incremental/iterativa com número máximo de iterações igual a 5 efetuada por Landau[5].

Fica evidenciado nessas figuras o alto grau de não linearidade do problema e, o comportamento estável da presente formulação mesmo para a consideração de apenas 40 incrementos.

Como observado na Figura 4.5, com igual número de incrementos o modelo deslocamento fornece para esse exemplo uma resposta bastante afastada da solução incremental/iterativa.

4.4 - MEMBRANA DE MATERIAL HIPERELÁSTICO INCOMPRESSÍVEL

Para ilustrar a aplicação da formulação desenvolvida, analisou-se a membrana da Figura 4.7, que é constituida de um material hiperelástico incompressível, suposto do tipo Mooney Rivlin com $C_1 = 21.605$ psi e $C_2 = 15.747$ psi .

A Figura 4.8 mostra a concordância entre os resultados experimentais e os obtidos por aproximações pelo Método dos Elementos Finitos com modelos misto e deslocamento, utilizando-se um procedimento puramente incremental com 16 incrementos.

Em seguida são apresentadas na Figura 4.9 a distribuição, ao longo da secção AA, das tensões normais σ_x (Cauchy). A comparação entre essas tensões reais e as tensões de Piola-Kirchhoff na secção BB, obtidas pelas duas formulações, é indicada na Tabela 4.1 .

Deve-se ressaltar a grande diferença existente entre essas tensões, o que é uma característica dos problemas de grandes deformações.

Os resultados da Figura 4.8 e da Tabela 4.1 apre-

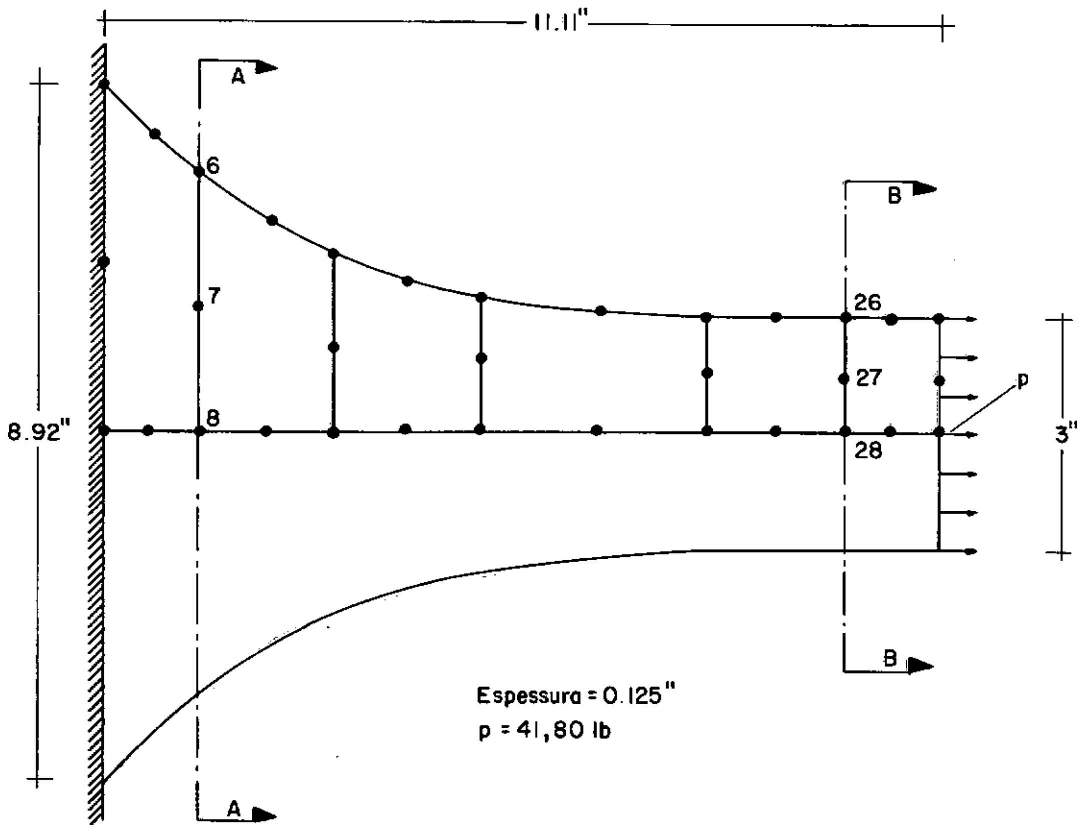


Figura. 4.7_ Membrana de material hiperelástico incompressivel_Geometria e Discretização

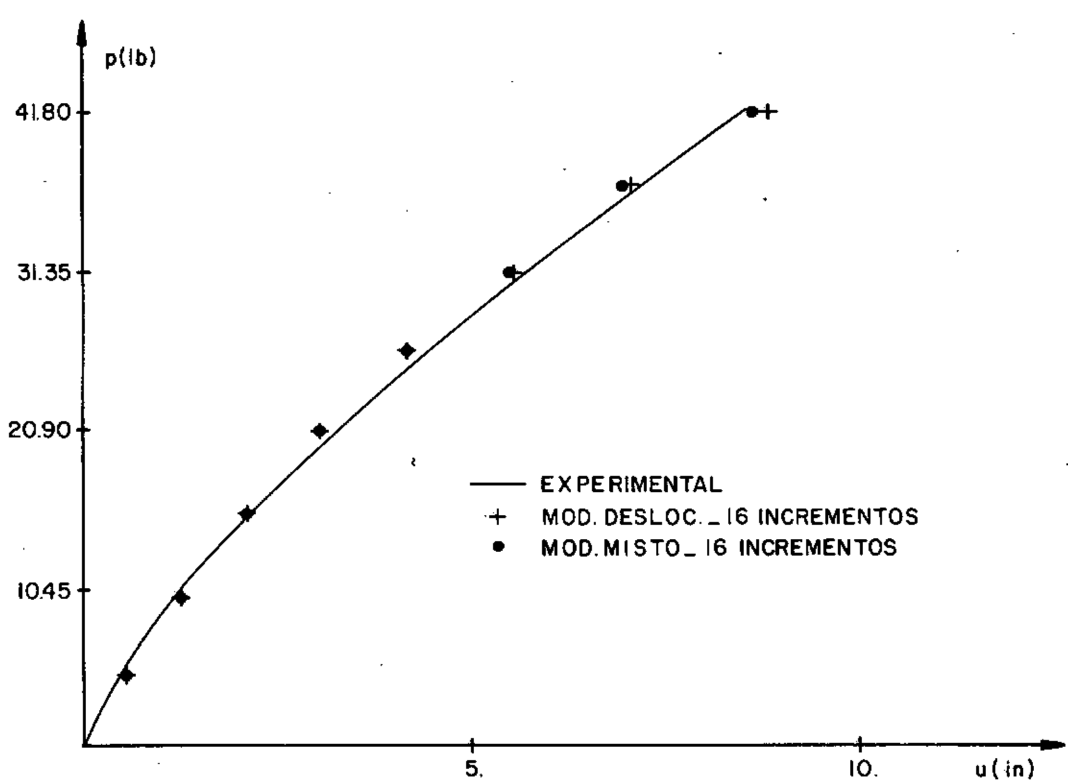


Figura 4.8_ Deslocamento horizontal no bordo carregado

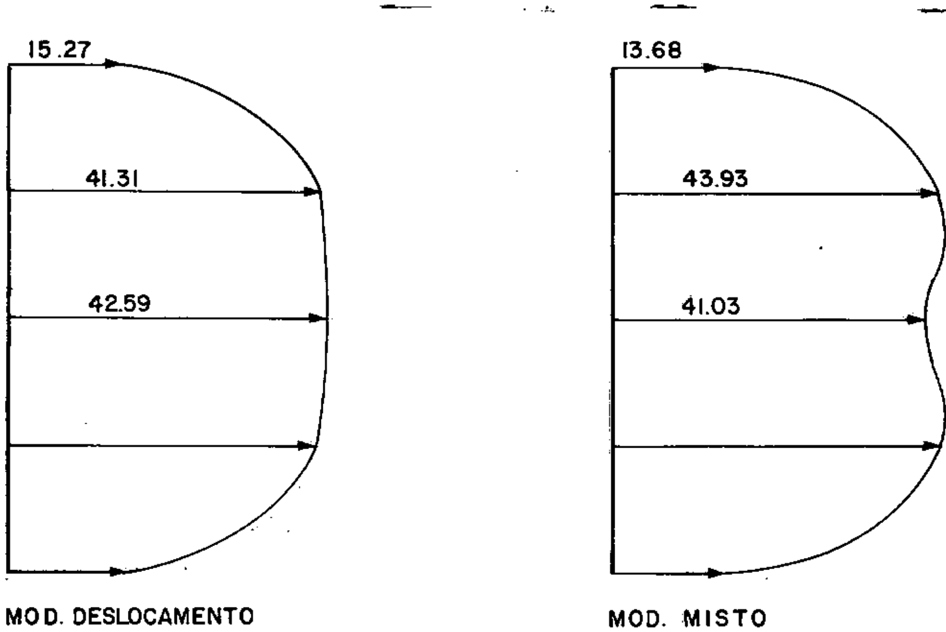


Figura 4.9 _ Tensão σ_x real (psi) na secção A A

TENSÃO / NÓ	PIOLA-KIRCHHOFF		REAL (CAUCHY)	
	MODELO DESLOCAMENTO	MODELO MISTO	MODELO DESLOCAMENTO	MODELO MISTO
26	52.	53.	238.	217.
27	52.	55.	238.	247.
28	52.	58.	238.	204.

TABELA 4.1 - TENSÃO σ_x (PSI) NA SECÇÃO BB

sentados como modelo deslocamento, foram obtidos com a consideração de 4 incrementos e 5 iterações por incremento, ao passo que no misto valeram-se de 16 incrementos.

Em todos resultados do presente exemplo utilizaram-se 5 x 5 pontos de integração sendo que, na formulação mista as deformações necessárias ao cálculo da equação constitutiva foram determinadas a partir do campo de deslocamentos nodais.

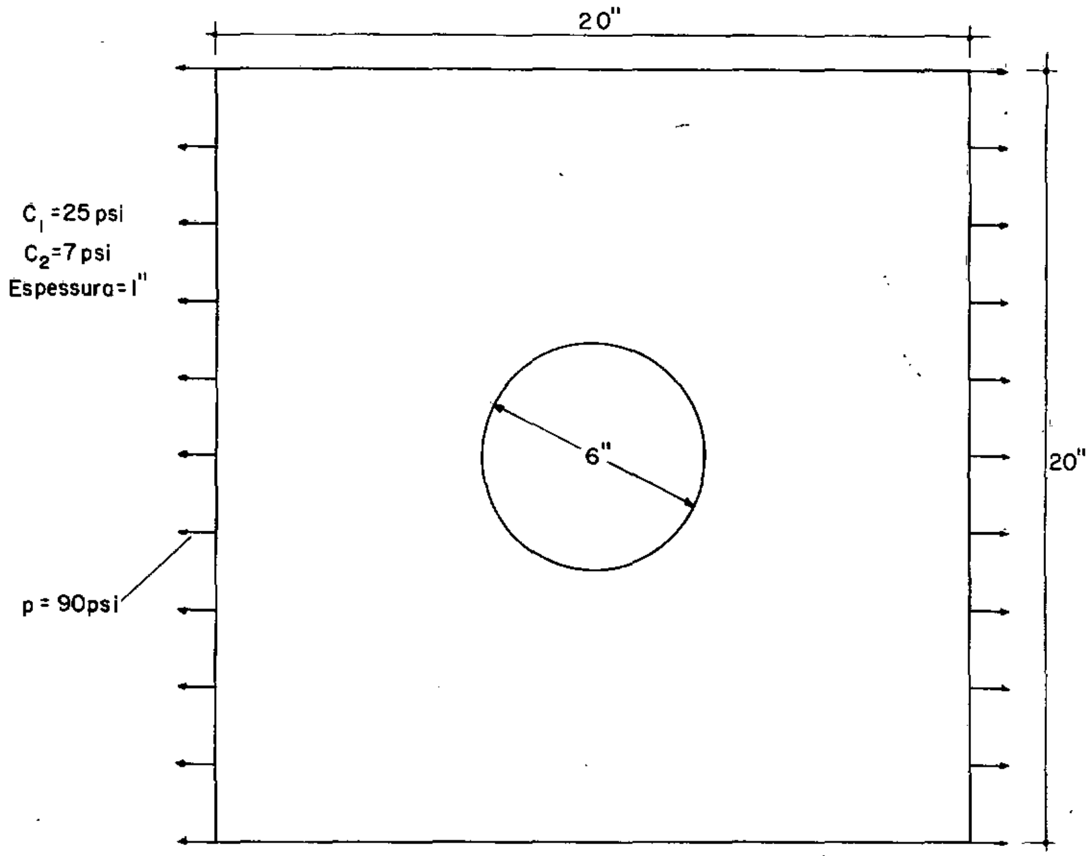
4.5 - MEMBRANA COM FURO CIRCULAR

Analisou-se também o comportamento da membrana com furo circular indicada na Figura 4.10. Nesta figura apresentam-se ainda, a malha de elementos finitos e as propriedades físicas do material. Mostra-se na Figura 4.11, um confronto entre as aproximações para a deformada final (p = 90 psi) dessa membrana, ficando bastante evidente a ocorrência de grandes deformações.

Na referência mencionada nessa figura foi utilizada integração 5 x 5, com 3 incrementos e 5 iterações por incremento. Para o modelo misto a carga final foi atingida em 12 incrementos com integração 2 x 2, sendo, além disso, as deformações calculadas a partir dos deslocamentos nodais.

Nas Figuras 4.12 a 4.14 os deslocamentos horizontais dos nós 5, 19 e 29 obtidos quando se calculam as deformações a partir dos deslocamentos (MISTO 1) ou a partir dos incrementos de tensões nodais (MISTO 2), são comparados com a solução do modelo deslocamento com o mesmo número de incrementos.

Em seguida representam-se, nas Figuras 4.15 a 4.17, as soluções puramente incrementais, modelo deslocamento e MISTO 2, e uma solução refinada[6]. Os resultados do modelo deslocamen-



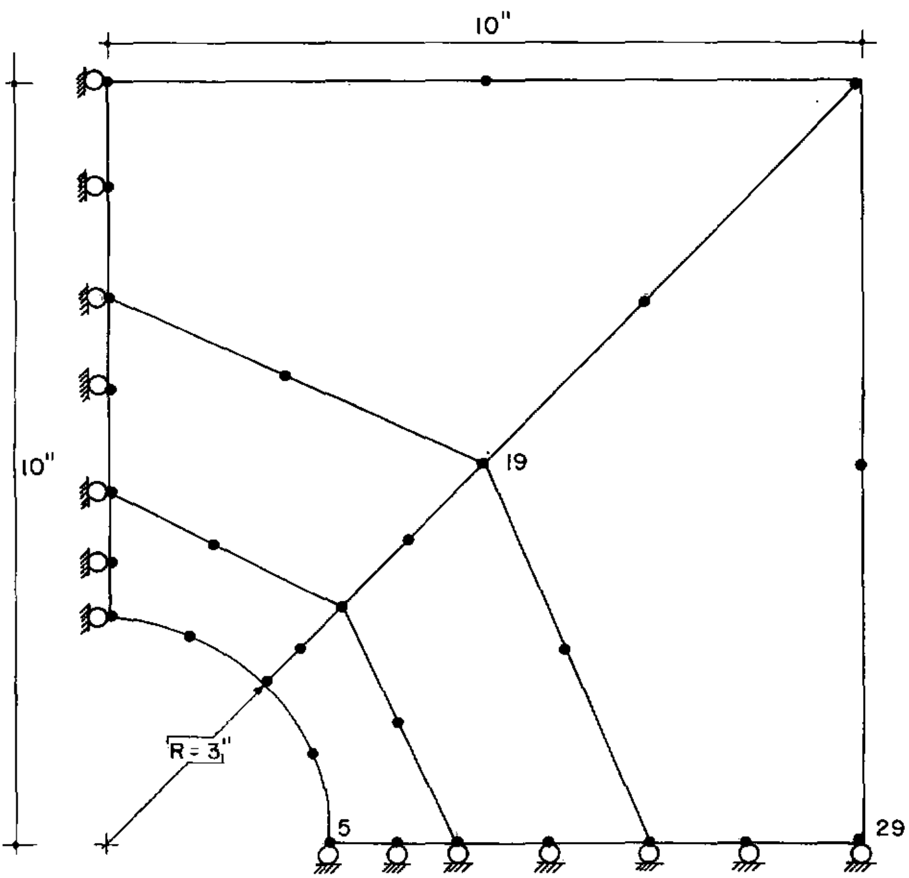


Figura 4.10 _ Membrana com furo circular _ Geometria e Discretização

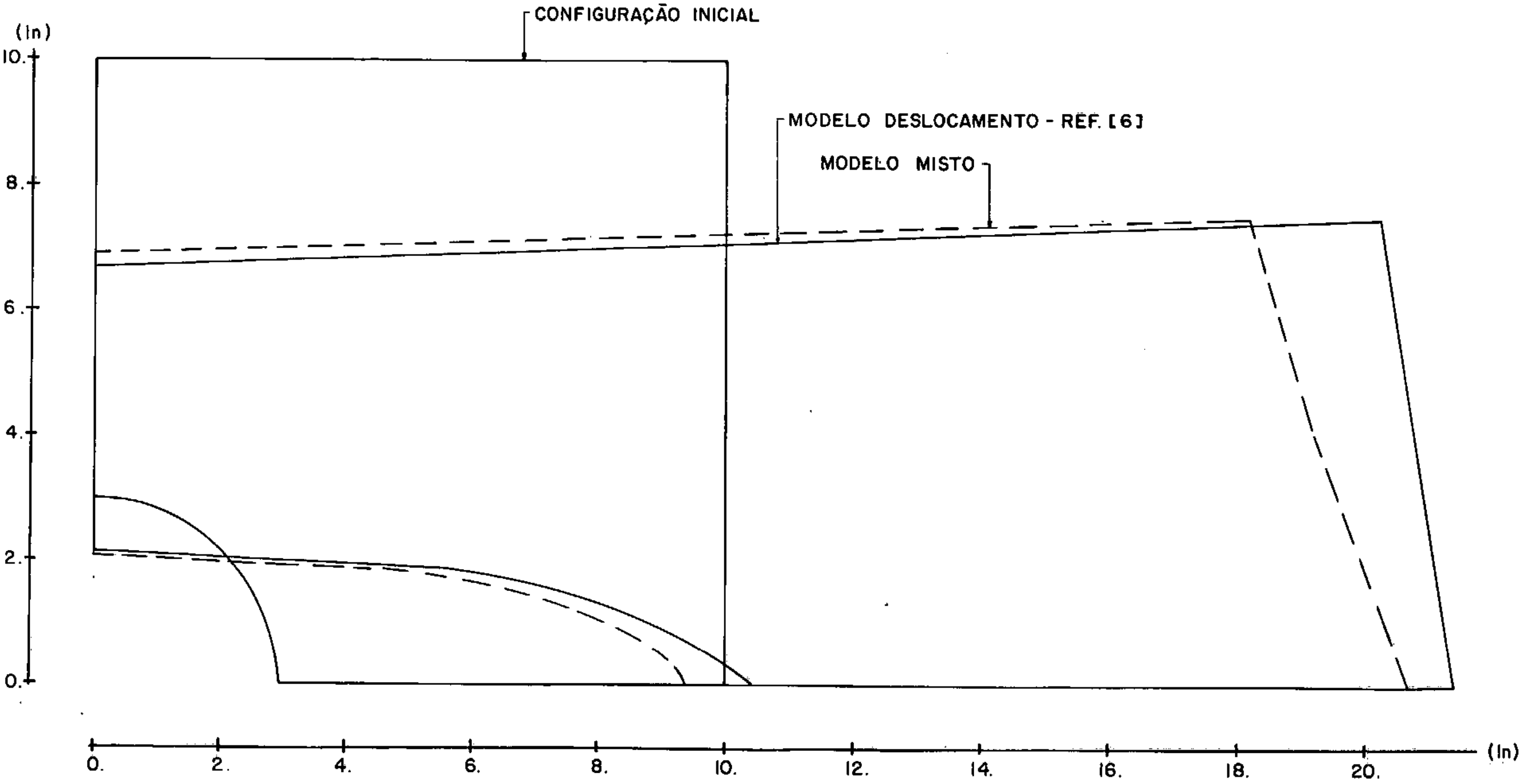


Figura 4.11_ Deformada para p=90psi

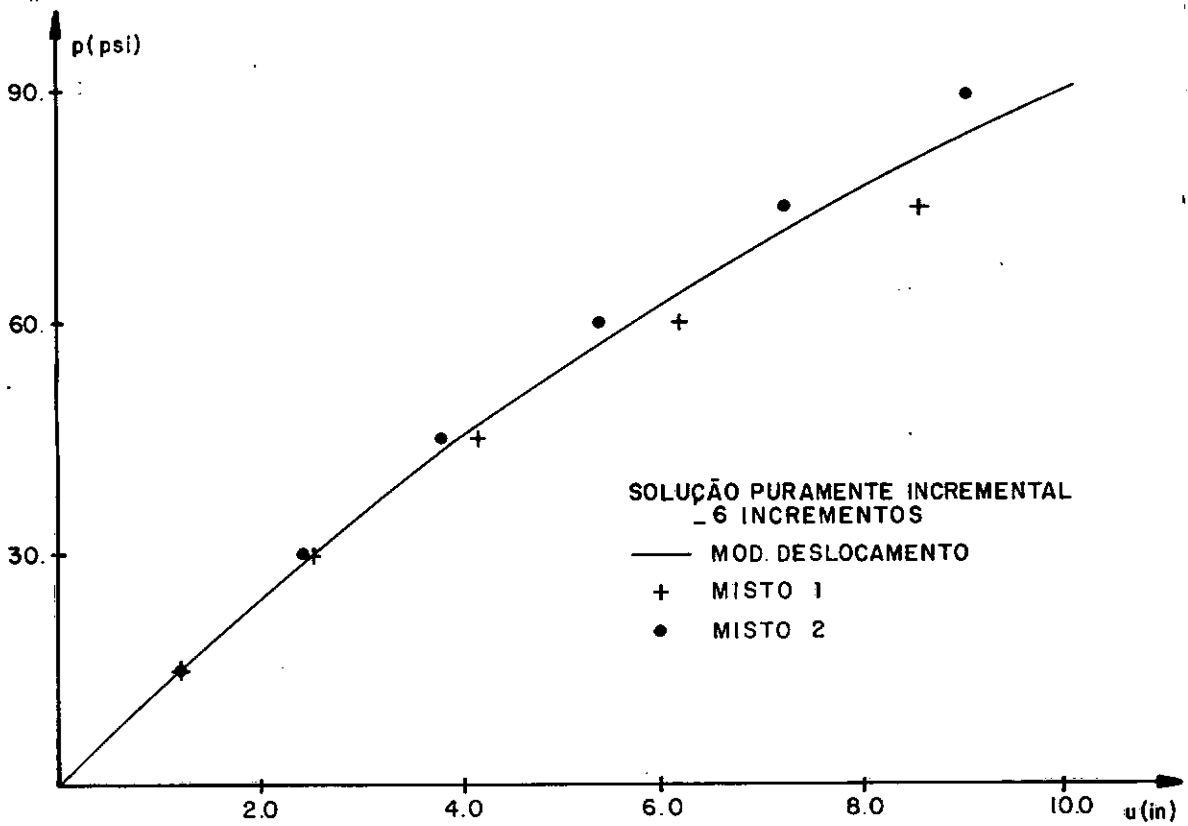


Figura 4.12 _ Deslocamento horizontal do nó 29

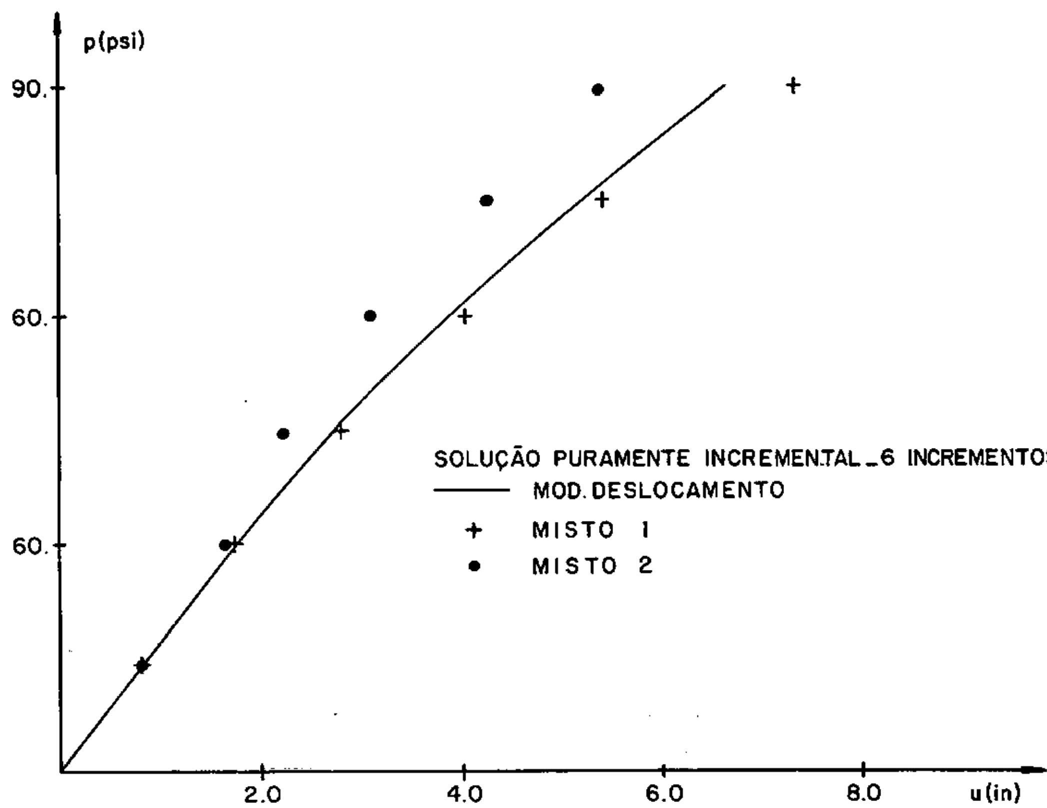


Figura 4.13 _ Deslocamento horizontal do nó 5

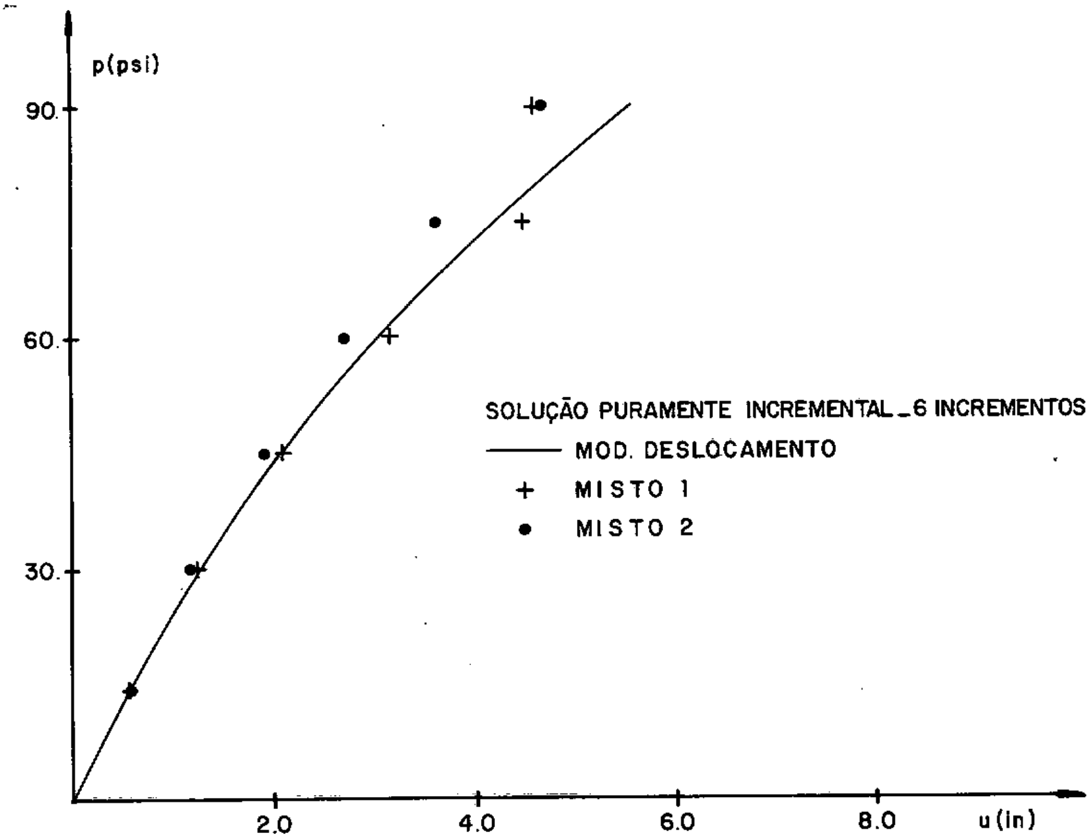


Figura 4.14 _ Deslocamento horizontal do nó 19

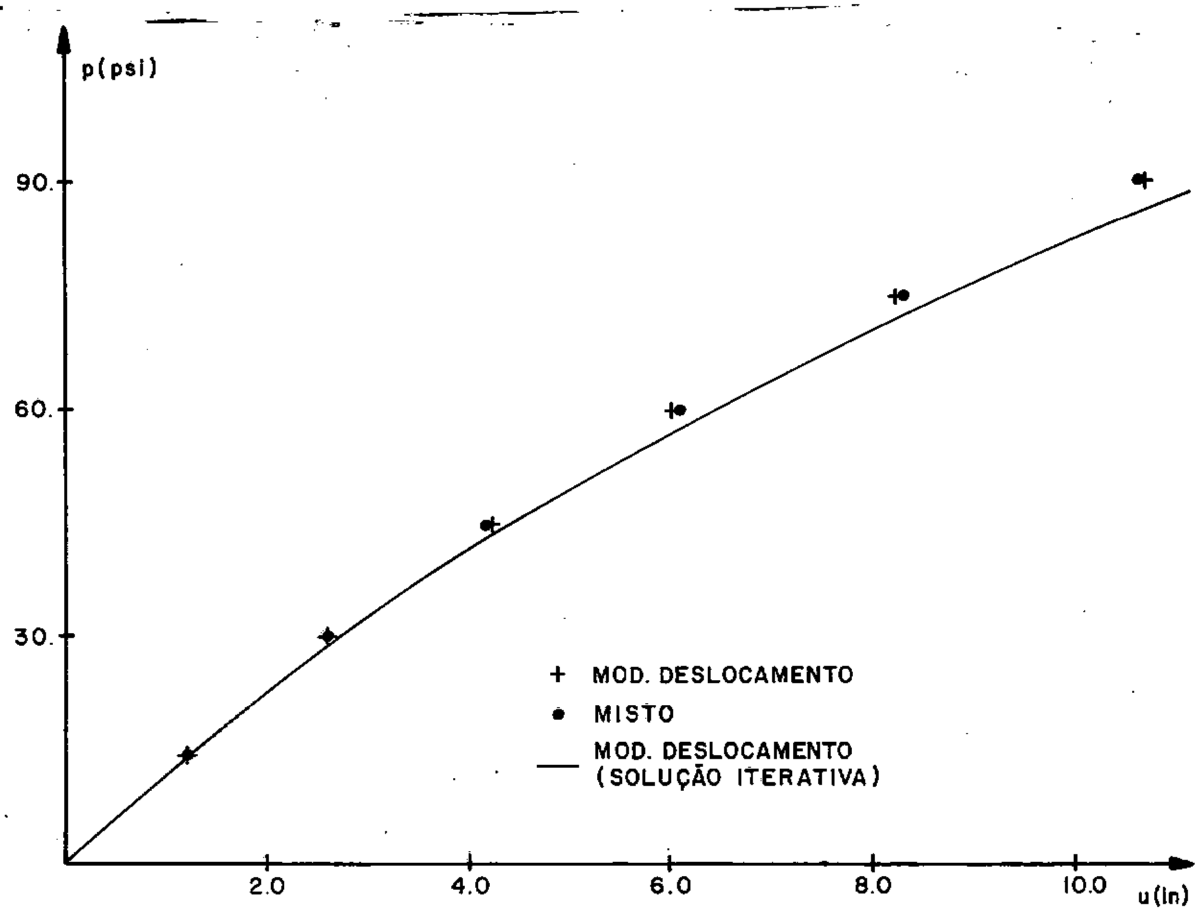


Figura 4.15 _ Deslocamento horizontal do nó 29

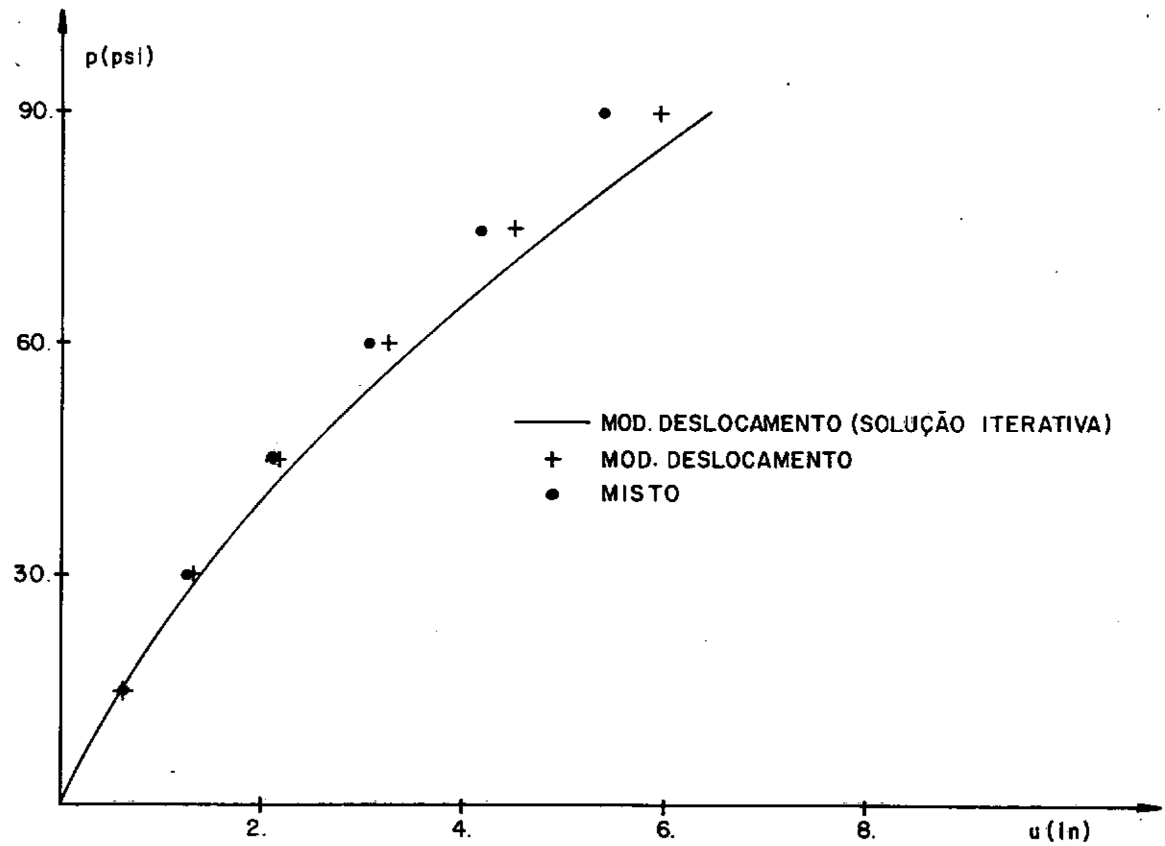


Figura 4.16 _ Deslocamento horizontal do nó 19

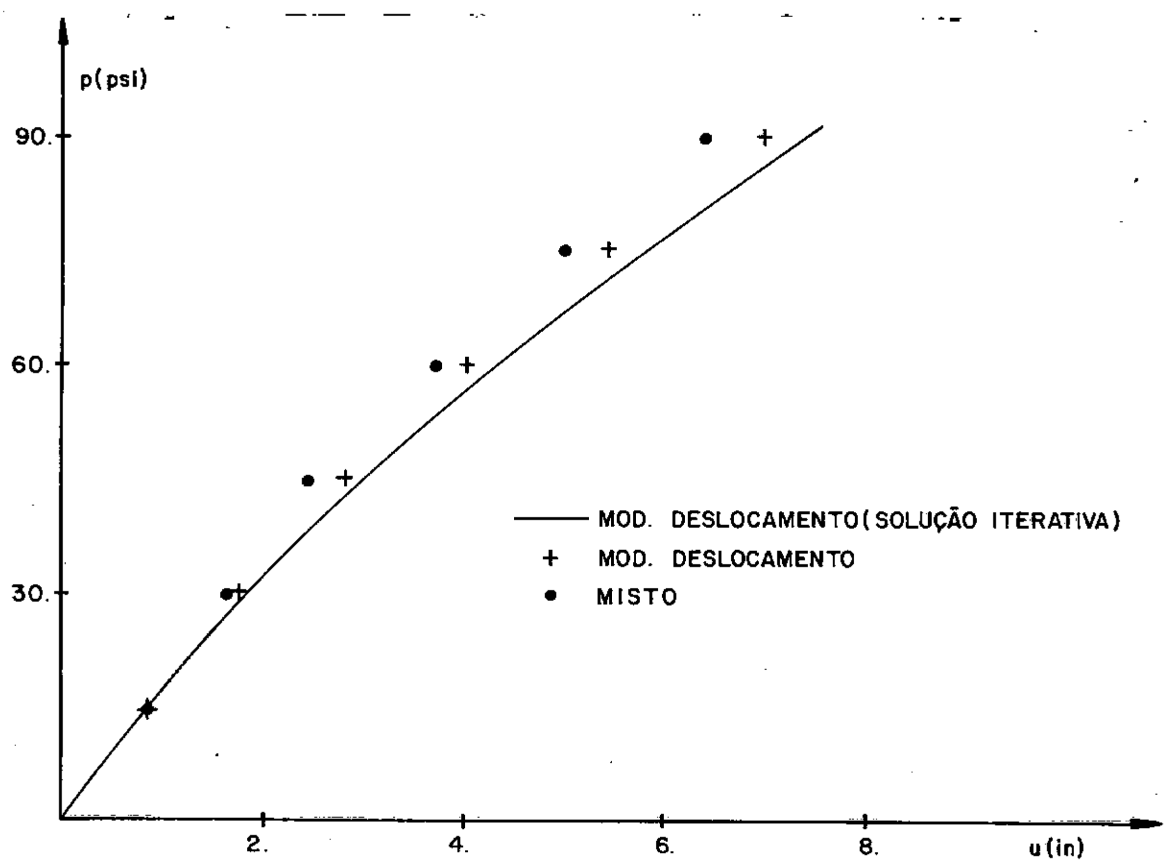


Figura 4.17 _ Deslocamento horizontal do nó 5

to neste caso, foram obtidos com integração 5 x 5, e no misto com integração 2 x 2.

4.6 - CILINDRO DE COMPRIMENTO INFINITO

Com o objetivo de ilustrar a aplicação da formulação desenvolvida no caso de estado plano de deformação de corpos de material hiperelástico incompressível, quando a pressão hidrostática deve ser considerada como incógnita adicional do problema, apresenta-se em seguida a análise de um cilindro espesso de comprimento infinito sujeito a ação de uma pressão interna ($p = 150$ psi). Tal como comentado no Capítulo III a solução deste problema se vale da alternativa proposta em [2]. Este modelo assume uma variação linear para os campos de incrementos de deslocamento e de tensão, mantendo constante a pressão hidrostática no domínio do elemento.

Posteriormente, os incrementos de tensões nodais são condensados estaticamente, resultando como incógnitas do problema, os incrementos de deslocamentos nodais e a pressão hidrostática em cada elemento. Todos resultados foram obtidos utilizando-se, no cálculo das submatrizes da equação (3.44), um esquema de integração de Gauss com 2 x 2 pontos.

Na Figura 4.18, indicam-se a geometria e a discretização adotada, onde são empregados 10 elementos isoparamétricos lineares de estado plano de deformação.

A escolha desse problema deve-se principalmente ao fato de existir uma solução analítica conhecida[28].

Assume-se que o material que constitue o cilindro seja do tipo Mooney-Rivlin com $C_1 = 80$ psi e $C_2 = 20$ psi.

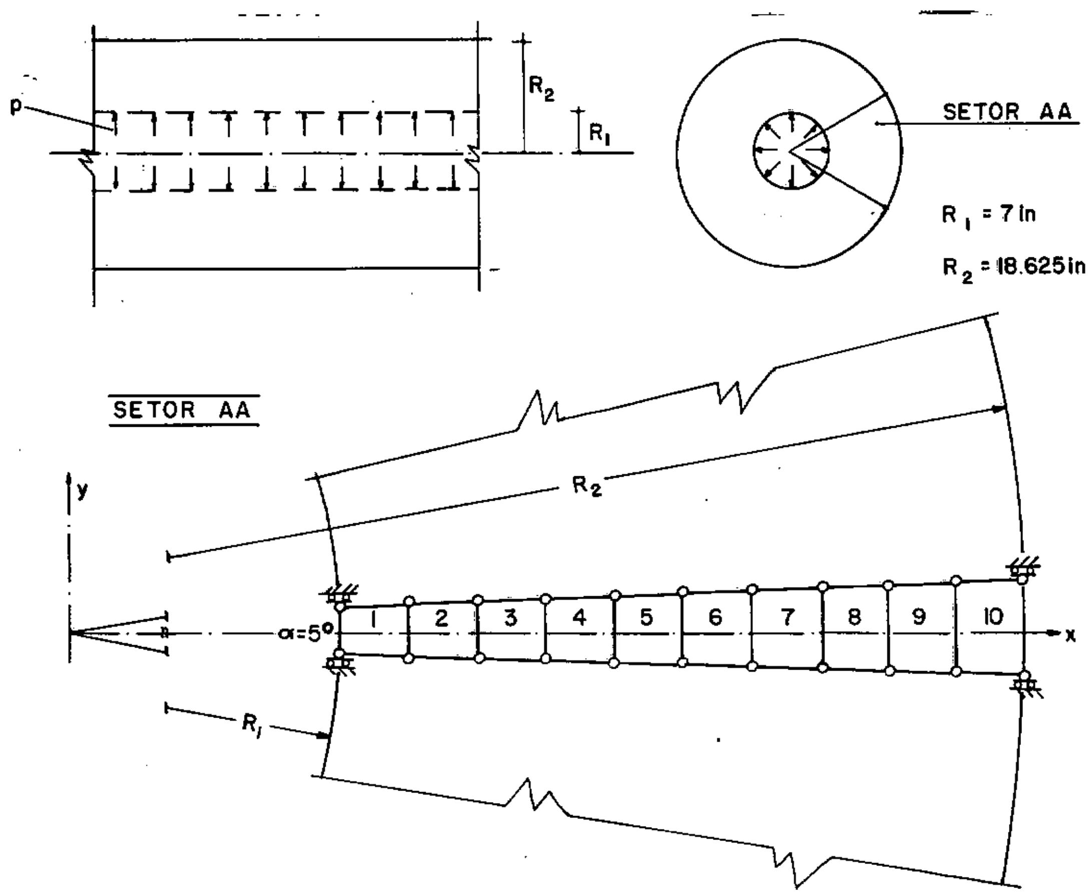


Figura 4.18 _ Cilindro de comprimento infinito _ Geometria e Discretização

Convém ressaltar que o uso de elementos de lados retos, acarreta algum erro na geometria, entretanto tal erro se torna desprezível a medida que o ângulo α , indicado na Figura 4.18, é reduzido. O valor adotado, $\alpha = 5^o$, como mostrado a seguir, conduz a resultados satisfatórios.

Na Figura 4.19 observa-se, para a curva pressão-deslocamento do bordo interno, a concordância obtida entre a solução exata e a formulação desenvolvida quando atinge-se a pressão final (p = 150 psi) em 5, 9 e 29 incrementos.

Indicam-se na Figura 4.20 a convergência da solução apresentada para o deslocamento do bordo interno, a pressão hidrostática nos elementos 1 e 3 e, a área do elemento 1, que deve permanecer constante devido a restrição de incompressibili-

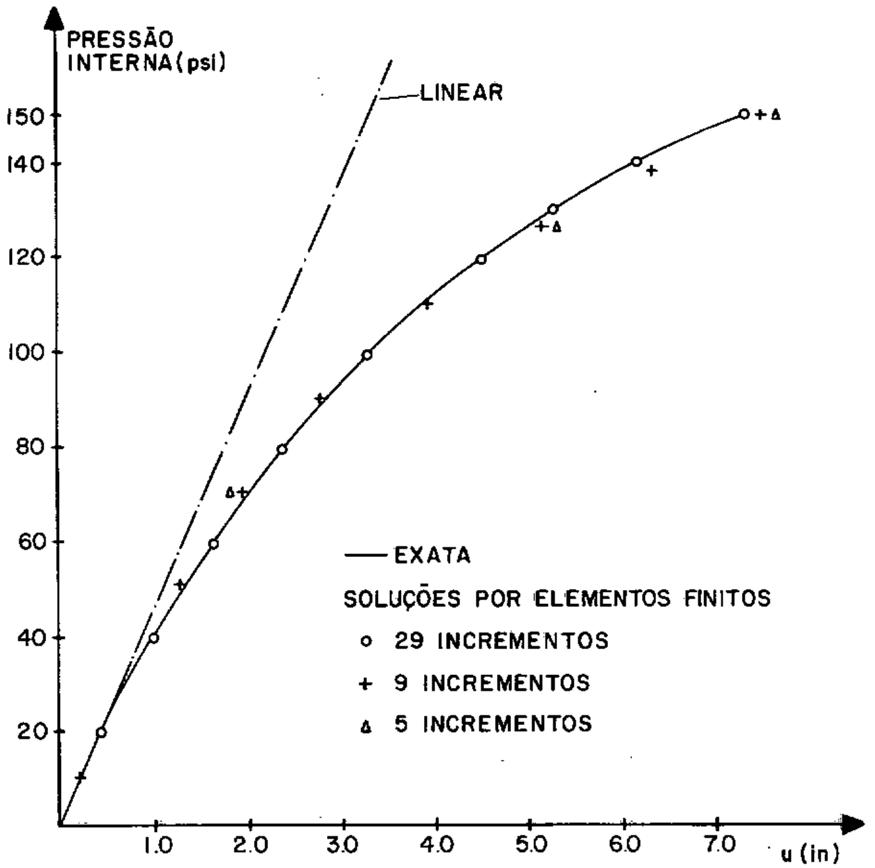


Figura 4.19_ Deslocamento do bordo interno

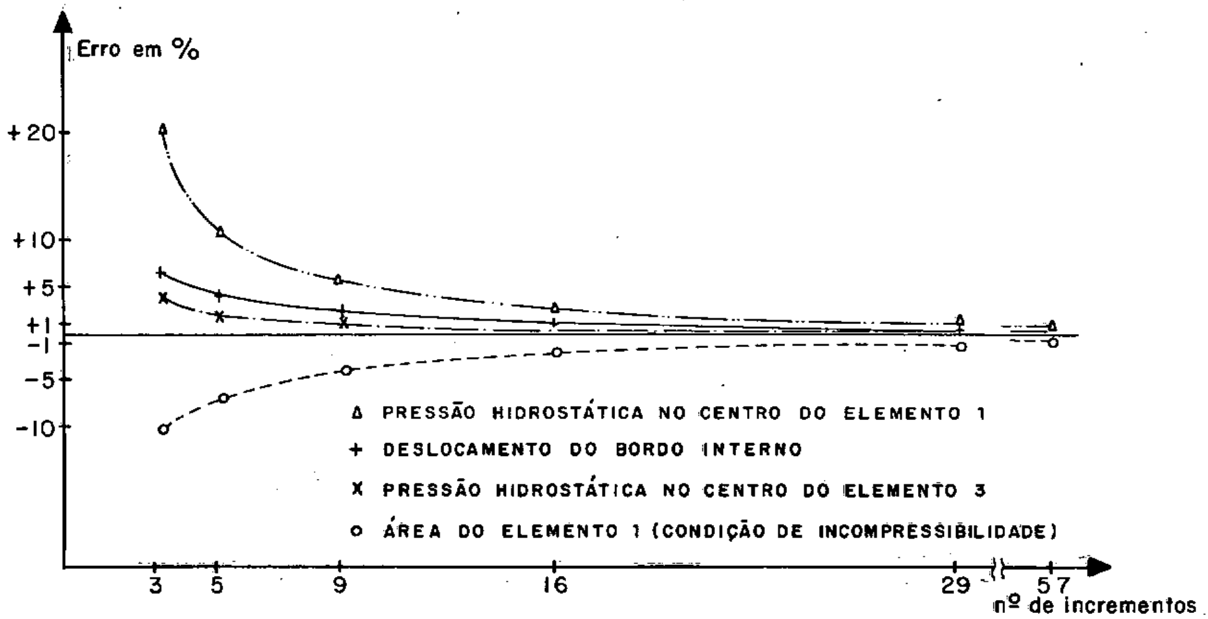


Figura 4.20_ Convergencia da solução obtida

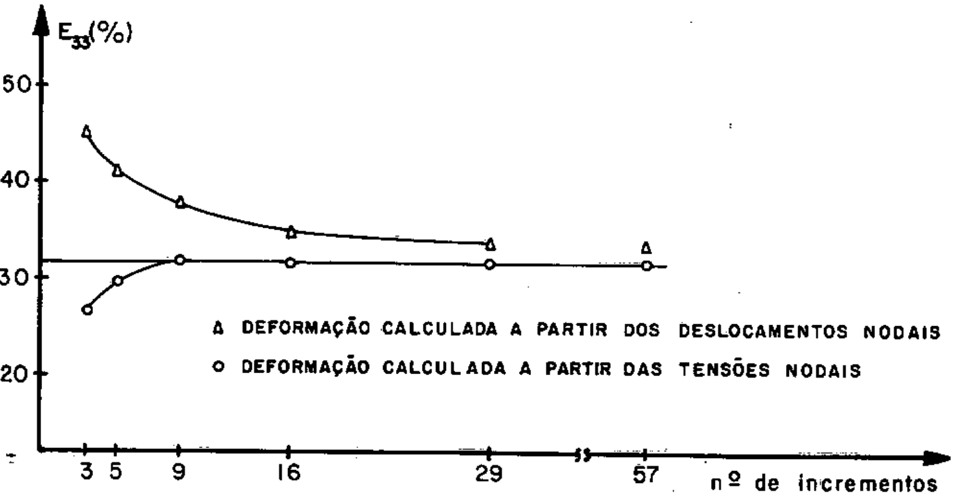


Figura 4.21 _ Convergencia da deformação circunferencial

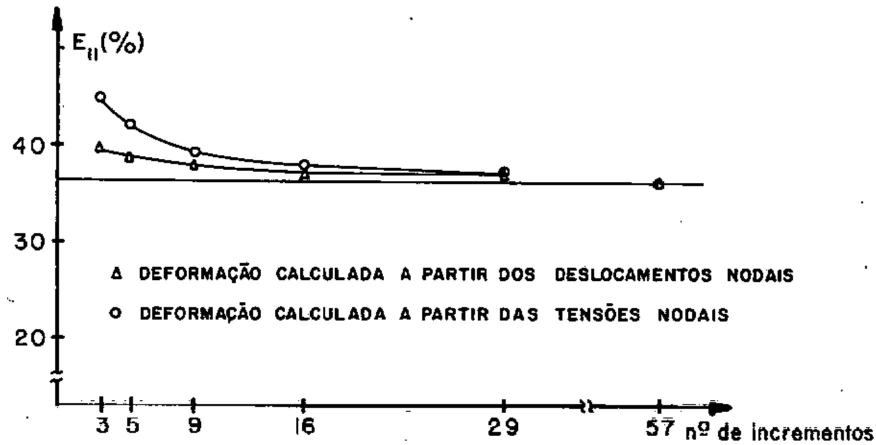


Figura 4.22 _ Convergencia da deformação radial

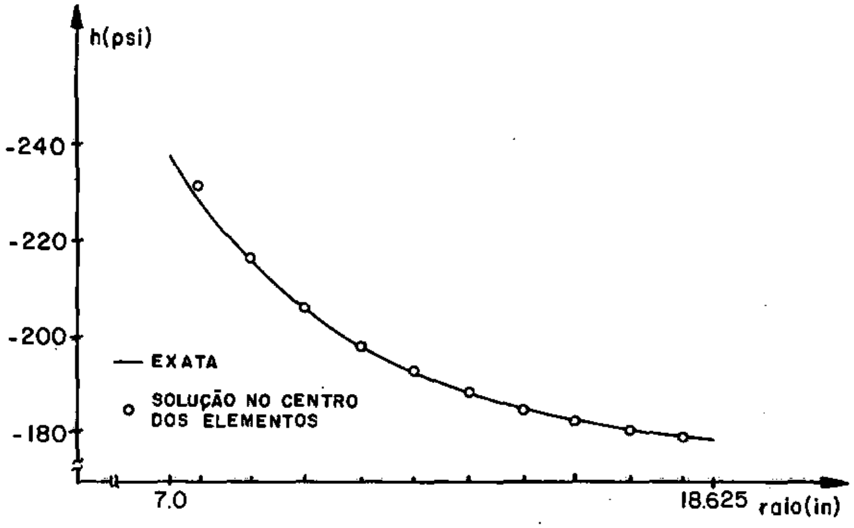


Figura 4.23_ Pressão hidrostática

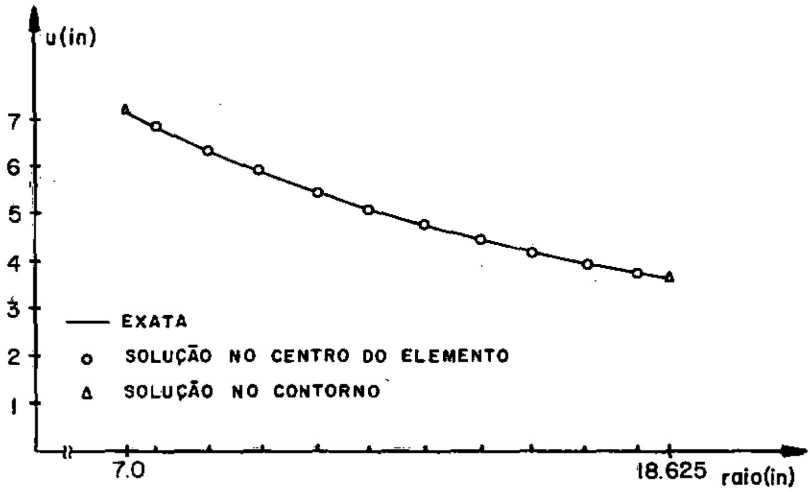


Figura 4.24_ Deslocamento ao longo da espessura

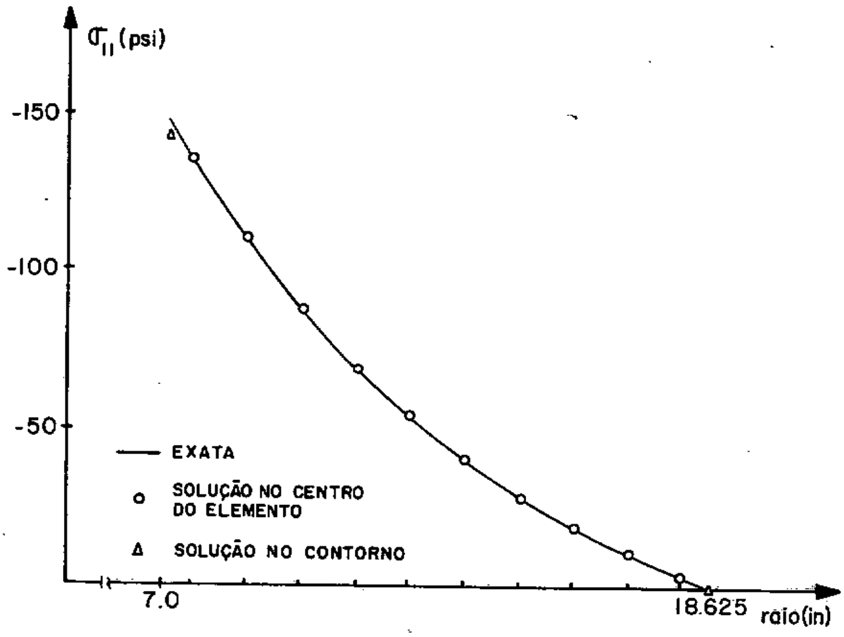


Figura 4.25 _ Tensão radial (Cauchy)

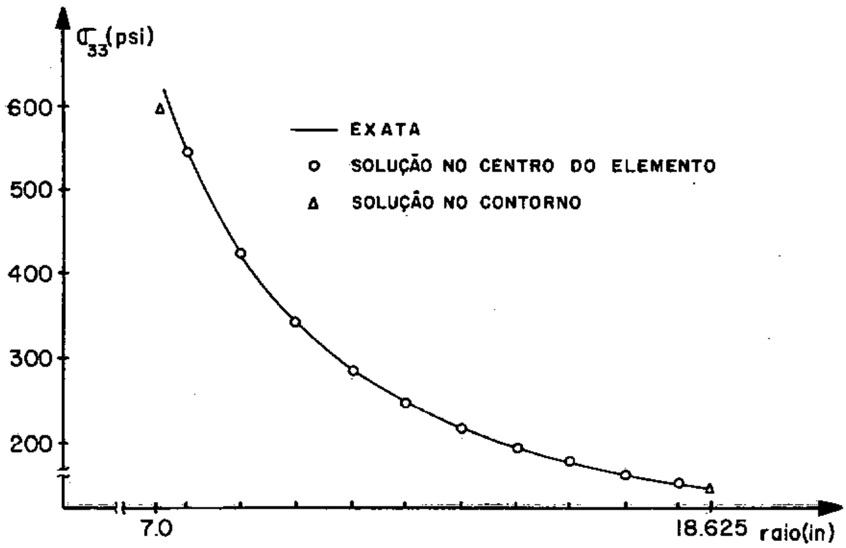


Figura 4.26 _ Tensão circunferencial (Cauchy)

dade.

Em seguida comparam-se, nas Figuras 4.21 e 4.22 respectivamente, a convergência das deformações circunferencial e radial calculadas a partir dos incrementos de tensão de distorção, conforme equação (3.40), e a partir dos deslocamentos nodais.

Observa-se nessas figuras, a acelerada convergência da deformação circunferencial quando calculada pela equação (3.40). Com a utilização do campo de deslocamentos nodais, não se obtem convergência para o valor exato desta deformação, mesmo com 57 incrementos.

Tal característica não ocorre com relação a deformação radial. Apesar disto, essas deformações calculadas a partir dos incrementos de tensões ou, dos deslocamentos nodais, ambas convergem para o valor exato quando se usam 57 incrementos.

Finalmente, apresentam-se nas Figuras 4.23 a 4.26 a distribuição ao longo da espessura da pressão hidrostática, do deslocamento, e das tensões radial e circunferencial (Cauchy) . Esses resultados, obtidos com a utilização de 57 incrementos, se mostram concordantes com a solução exata.

V - CONCLUSÕES

As características principais da formulação discutida neste trabalho, foram comentadas durante o desenvolvimento do texto dos capítulos precedentes. Contudo, tornam-se ainda necessárias algumas observações e conclusões. Apresentam-se também neste Capítulo sugestões visando a continuidade do presente trabalho.

A formulação desenvolvida é derivada diretamente dos princípios da mecânica do contínuo, não se introduzindo nenhuma simplificação no que diz respeito a definição das tensões e deformações. Utiliza-se desse modo, para as tensões o 2º tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e, para as deformações o tensor de Green-Lagrange. O emprego desses tensores decorre da escolha da configuração indeformada como configuração de referência.

Além disso, um princípio variacional tipo Reissner permite aproximações independentes para os campos de tensão e deslocamento. Dessa forma evita-se o cálculo das tensões a partir dos deslocamentos nodais, característica das soluções por modelo de deslocamento.

Pretende-se nesse trabalho avaliar a performance numérica da aproximação fornecida por um princípio variacional tipo Reissner na análise de grandes deformações de corpos de materiais elásticos lineares e hiperelásticos incompressíveis. Entretanto, é importante notar que, é na teoria de corpos orientados onde são mais exploradas as vantagens das aplicações do Método dos Elementos Finitos por modelos mistos.

Para o caso de materiais elásticos lineares as soluções apresentadas demonstram claramente a superioridade sobre as obtidas pelo modelo de deslocamento,quando se utilizam procedimentos que não efetuem qualquer tipo de verificação.

Tratando-se de materiais hiperelásticos incompressíveis,ambas formulações mostram boa concordância com a soluções exatas e os resultados experimentais, não se notando diferenças sensíveis entre os dois modelos.

Todavia um procedimento incremental/iterativo incluindo todas as possíveis formas de verificação deve ser examinado de modo a se determinar precisamente a importância de cada uma dessas correções nas soluções de diversos problemas da Mecânica das Estruturas.

Com relação a pressão hidrostática,encontram-se na literatura[1,2,33] modelos, de deslocamento e misto, considerando essa pressão constante no domínio do elemento. A aproximação quadrática adotada para essa variável acarreta problemas de mal condicionamento. Entende-se que a influência da escolha do campo de pressão hidrostática assumido requer um estudo mais detalhado.

Outro aspecto que deve ser considerado, refere-se a utilização de esquemas diferentes de integração para as submatrizes das equações (2.44) e (3.44).

O uso de um número adequado de pontos de integração no cálculo de cada uma dessas submatrizes poderia resultar em melhor desempenho do modelo apresentado.

Finalmente,resta analisar a consideração de carregamentos não conservativos para o estudo de grandes deformações como as que ocorrem em membranas incompressíveis sujeitas a soli citações normais a sua superfície média [1,15] .

BIBLIOGRAFIA

1 ODEN, J.T. - Finite Elements of Nonlinear Continua - McGraw Hill Inc., 1972.

2 SHARNHORST, T., PIAN, T.H.H. - Finite Element Analysis of Rubber-like Materials by a Mixed Model - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, 665-676, 1978.

3 BATHE,K.J.; RAMM, E.: WILSON, E.L. - Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, 353-386, 1975.

4 IDING, H.; PISTER, K.S.; TAYLOR, R.L. - Identification of Nonlinear Elastic Solids by a Finite Element Method - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 4, 121-142, 1974.

5 LANDAU, L. - Análise de Grandes Deformações e Plasticidade por Meio de Elementos Finitos Isoparamétricos - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1976.

6 EBECKEN, N.F.F. - Grandes Deformações de Membranas de Materiais Hiperelásticos Incompressíveis - Anais do IV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - Florianópolis, 1977.

7 HORRIGMOE, G.; BERGAN, P.G. - Incremental Variational Principles and Finite Element Models for Nonlinear Problems - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 7, 201-217, 1976.

8 BATHE, K.J.; OZDEMIR, H.; WILSON, E.L. - Static and Dynamic Geometric and Material Nonlinear Analysis - Report UCESM 74-4, Berkeley, California University, 1974.

9 TOLEDO, E.M.; EBECKEN, N.F.F. - Elementos Finitos Mistos para Análise de Grandes Deformações - Anais do I Congresso Brasileiro de Energia, Rio de Janeiro, Dezembro, 1978.

10. SHAMES, I.H.; DYM, C.L. - Solid Mechanics: A Variational Approach - McGraw-Hill Inc., 1973.

11 ODEN, J.T. - Finite Plane Strain of Incompressible Elastic Solids by the Finite Element Method - The Aeronautical Quaterly, 254-264, 1968.

12 ALEXANDER, H. - A Constitutive Relation for Rubber-Like Materials - International Journal of Engineering Science 6, 549-563, 1968.

13 MALVERN, L.E. - Introduction to the Mechanics of a Contitinuous Medium - Prentice-Hall Inc., 1969.

14 ODEN, J.T. e SATO, T. - Finite Strains and Displacements of Elastic Membranes by the Finite Element Method - International Journal of Solids and Structures, May, 471-488, 1967.

15 ODEN, J.T.; KEY, J.E. - On Some Generalizations of the Incremental Stiffness Relations for Finite Deformations of Compressible and Incompressible Finite Elements - Nuclear Engineering and Design 15, 121-134, 1971.

16 NOVOZHILOV, V.V. - Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity - Graylock Press, Rochester, N.Y., 1953.

17 ZIENKIEWICZ, O.C. and NAYAK, G.C. - A General Approach to Problems of Large Deformation and Plasticity Using Isoparametric Elements - Third Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton, Ohio, Wright-Patterson, 1971.

18 WASHIZU, K. - Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon-Press, 1975.

19 EBECKEN, N.F.F. - LORANE-NL - Uma Linguagem Orientada a Análise Estrutural Não-Linear - Tese de D.Sc.,COPPE/UFRJ, 1977.

20 BIGNON, P.G. - Elementos Finitos Isoparamétricos Mixtos para Flexion de Placas - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1972.

21 TOLEDO, E.M. e EBECKEN, N.F.F. - Modelos Mistos para a Análise de Membranas e Sólidos Axissimétricos de Materiais Hiperelásticos Incompressíveis - V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Campinas, S.P., Dez. 1979.

22 LARSEN, P.K. and POPOV, E.P. - A Note on Incremental Equilibrium Equations and Approximate Constitutive Relations in Large Inelastic Deformations - Acta Mechanica 19,1-14, Springer, Verlag, 1974.

23 ODEN, J.T. and KEY, J.E. - Numerical Analysis of Finite Axissymetric Deformations of Incompressible Elastic Solids of Revolution - International Journal of Solids and Structures - Vol. 6, 497-518, 1970.

24 PIAN, T.H.H. - Variational Principles for Incremental Finite Elements Methods - Journal of the Franklin Institute, Vol. 302, 473-488, Nov/Dec, 1976.

25 TOLEDO, E.M. e EBECKEN, N.F.F - Elasticidade Finita via Elementos Isoparamétricos Mistos - III Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil e I Congresso Latino-Americano sobre Sistemas Computacionais para Engenharia, Porto Alegre, R.S., Dez. 1979.

26 BEVILACQUA, L. - Notas de Aula do Curso "Introdução aos Métodos Variacionais em Mecânica" . COPPE/UFRJ, 1975.

27 BOLAND, P.L. e PIAN, T.H.H. - "Large Deflection Analysis of Thin Elastic Structures by the Assumed Stress Hybrid Finite Element Method - Computers and Structures, 1-12, Vol. 7, 1977.

28 GREEN, A.E. e ZERNA, W. - Theoretical Elasticity - 2nd ed., Oxford University Press London, 1968.

29 PIAN, T.H.P.; TONG, P. - Variational Formulation of Finite Displacement Analysis - High Speed Computing of Elastic Structures, ed. por B. Fraeijs de Veubeke Univ. Liege, Belgium, 1971.

30 FABRIS, C.R. - Análise de Cascas Espessas com Elementos Finitos Mistos - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1978.

31 GALLAGHER, R.H. - Finite Element Analysis-Fundamentals - Prentice-Hall, Inc. 1975.

32 LIMA, E.C.P. - Elementos Finitos para Flexão de Placas com Campo de Tensões Assumido - Tese de M.Sc., COPPE /UFRJ, 1972.

33 ARGYRIS, J.H.; DUNNE, P.C.; HAASE, M.; ORKISZ, J. - Higher-Order Simplex Elements for Large Strain Analysis-Natural Approach - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 16, 369-403, 1978.

34 ARGYRIS, J.H.; DUNNE, P.C.; MÜLLER, M. - Note on Large Strain Applications of Modified Constant Strain Finite Elements - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 15, 389-405, 1978.

35 TAROCO, E.; FEIJOO, R.A.; MARTINS, L.C. - Forma Incremental del Teorema de los Trabajos Virtuales Aplicado a Grandes Deformaciones - Publicação Interna A 00 30/77, CBPF, Rio de Janeiro, julho 1977.

36 PRATO, C.A. - A Mixed Finite Element Method for Thin Shell Analysis - Tese de Ph.D. - Department of Civil Engineering - MIT, May, 1968.

37 HALBRITTER, A.L. - Aplicação do Método dos Elementos Finitos à Análise do Comportamento Reológico Estrutural - Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, 1977.

38 ALTMAN, W.; VENÂNCIO FILHO, F. - Stability of Plates Using a Mixed Finite Element Formulation - Computer and Structures, Vol. 4, 437-444, March 1974.

39 ARGYRIS, J.H.; DUNNE, P.C.; MÜLLER, M. - Isochoric Constant Strain Finite Elements - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - 13, 245-279, 1978.

40 MURAKAWA, H.; ATLURI, S.N. - Finite Elasticity Solutions Using Hybrid Finite Elements Based on a Complementary Energy Principle - Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME - Vol. 45, 539-547, September,1978.

NOTAÇÃO

${}^{o}A$, ${}^{t}A$, ${}^{t+\Delta t}A$	- áreas do corpo nas configurações de tempo 0 , t , e t + Δt .
${}^{o}V$, ${}^{t}V$, ${}^{t+\Delta t}V$	- volumes do corpo nas configurações de tempo 0 , t e t + Δt .
${}^{o}x_i$, ${}^{t}x_i$, ${}^{t+\Delta t}x_i$	- coordenadas cartesianas nas configurações de tempo 0 , t e t + Δt .
${}^{t}u_i$, ${}^{t+\Delta t}u_i$	- componentes do vetor de deslocamentos da configuração de tempo 0 às configuração de tempo t e t + Δt .
u_i	- incremento da componente de deslocamentos $u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^{t}u_i$.
${}^{t}u_i^k$	- componente de deslocamentos do ponto nodal k na configuração de tempo t.
${}^{t}_{o}u_{i,j}$, ${}^{t+\Delta t}_{o}u_{i,j}$	- derivadas da componente de deslocamentos das configurações de tempo t e t + Δt com relação a coordenada ${}^{o}x_j$.
${}_{o}u_{i,j}$, ${}_{t}u_{i,j}$, ${}_{t+\Delta t}u_{i,j}$	- derivada do incremento de deslocamentos com relação as coordenadas ${}^{o}x_j$, ${}^{t}x_j$ e ${}^{t+\Delta t}x_j$.
${}^{t+\Delta t}_{o}P_i$	- componente do vetor de forças de volume por unidade de volume no tempo t + Δt referidas a configuração de tempo 0 .

${}^{t+\Delta t}_{o}T_i$	- componente do vetor de forças de superfície por unidade de área, no tempo $t + \Delta t$ referidas à configuração de tempo 0 .
${}^{t}\sigma_{ij}$, ${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}$	- componentes do tensor de tensões de Cauchy nas configurações de tempo t e $t + \Delta t$.
${}^{t}_{o}S_{ij}$, ${}^{t+\Delta t}_{o}S_{ij}$	- componentes do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, nas configurações de tempo t e $t + \Delta t$, referidas à configuração de tempo 0 .
${}^{t}_{o}E_{ij}$, ${}^{t+\Delta t}_{o}E_{ij}$	- componentes do tensor de deformações de Green-Lagrange, nas configurações de tempo t e $t + \Delta t$, referidas à configuração de tempo 0 .
${}_{o}\ell_{ij}$, ${}_{t}\ell_{ij}$	- parte linear de ${}_{o}E_{ij}$, ${}_{t}E_{ij}$.
${}_{o}\eta_{ij}$, ${}_{t}\eta_{ij}$	- parte não linear de ${}_{o}E_{ij}$, ${}_{t}E_{ij}$.
${}_{o}D_{ijrs}$	- componentes do tensor constitutivo tangente no tempo t , referido à configuração de tempo 0 .
${}^{t}_{o}\underset{\sim}{S}$, ${}^{t}_{o}\hat{S}$	- matriz e vetor de tensões do 2º tensor de Piola-Kirchhoff, na configuração de tempo t , referido à configuração de tempo 0 .
ε , η	- coordenadas locais

N_i - função de interpolação relativa ao ponto nodal i .

${}_oE_{ij}$ - componentes do tensor de deformações incrementais de Green-Lagrange referidas à configuração de tempo 0 .

${}_oA$ - função energia de deformação incremental.

${}_oB$ - função energia de deformação complementar incremental.

$\underset{\sim}{v}$ - vetor dos incrementos de deslocamentos nodais.

$\underset{\sim}{p}$ - vetor dos incrementos das tensões nodais.

${}_oh$ - incremento de pressão hidrostática do tempo t ao tempo $t + \Delta t$.

th - pressão hidrostática no tempo t .

I_1 , I_2 , I_3 - invariantes do tensor C

${}_o\underset{\sim}{q}$ - vetor dos incrementos de forças nodais externas.

${}^t\underset{\sim}{q}$ - vetor de forças nodais externas no tempo t .

${}^{t}_{o}\underset{\sim}{B}_{L}$	- matriz que relaciona a parte linear dos incrementos de deformação com os incrementos de deslocamentos nodais.
F	- gradiente da deformação.
${}_{o}S'_{ij}$	- incrementos das tensões de distorção.
$B\ ({}_{o}S'_{ij})$	- função energia complementar de deformação incremental de distorção.
C_{ij}	- componentes do tensor de deformação de Green.
$\underset{\sim}{r}$	- vetor de forças nodais equivalentes a configuração anterior.
A'	- função energia de deformação incremental de distorção.
λ_{ij}	- multiplicadores de Lagrange.