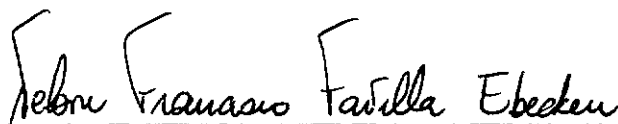


COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO COM  
APLICAÇÃO A ANÁLISE DE VASOS DE PRESSÃO DE USINAS NUCLEARES

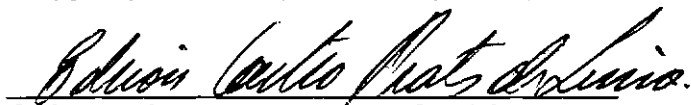
Lêa Margarida Bueno Troina

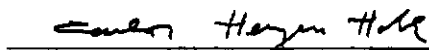
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA  
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.).

Aprovada por:

  
Nelson Francisco Favilla Ebecken  
(Presidente)

  
Antonio Claudio Ferraro Maia

  
Edison Castro Prates de Lima

  
Carlos Henrique Holck

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
ABRIL DE 1981



## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Nelson Francisco Favilla Ebecken pela orientação e amizade.

À Comissão Nacional de Energia Nuclear pelo auxílio financeiro.

Aos Professores do Curso de Estruturas da COPPE/UFRJ, pelos ensinamentos transmitidos.

A Helena Santos de Oliveira e Soneize Miranda pela esmerada confecção gráfica deste trabalho.

Apresenta-se a formulação e implementação numérica de um modelo para concreto incorporado no sistema computacional LORANE-NL.

O material é descrito através de um modelo hip-elástico baseado na relação-tensão deformação uniaxial não linear que é generalizada para levar em conta condições biaxiais e triaxiais de tensão. Considera-se fissuração, esmagamento na compressão e carregamento cíclico.

Simula-se o comportamento do concreto armado através da introdução de molas não lineares.

Apresentam-se os resultados de algumas análises, nas quais são discutidas a estabilidade e a convergência do modelo, em estruturas discretizadas por meio de elementos finitos isoparamétricos com número variado de pontos nodais.

## ABSTRACT

The formulation and numerical implementation of a concrete model that has been incorporated in the computer program LORANE-NL has been presented.

The material model is a hypoelastic model based on a nonlinear uniaxial stress-strain relation that is generalized to take account biaxial and triaxial stress conditions. Tensile cracking, compression crushing and cyclic loading conditions are considered.

Steel reinforcement has been modeled by discrete nonlinear spring elements.

The results of various sample analysis are given, in which the stability and accuracy of the finite element representations by four to eight node isoparametric quadrilateral elements have been studied.

## ÍNDICE

I	- INTRODUÇÃO .....	1
II	- COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DO CONCRETO .....	6
	2.1 - Fissuração do Concreto .....	7
	2.2 - Critérios de Ruptura .....	9
	2.1.1 - Teorias de Ruptura .....	9
	2.2.2 - Critérios Utilizados para o Concreto .....	14
	2.3 - Relação Constitutiva .....	24
	2.3.1 - Relação Constitutiva Incremental ...	25
	2.3.2 - Relação Tensão Deformação Uniaxial .	30
III	- MODELO IMPLEMENTADO .....	33
	3.1 - Modelo para o Concreto .....	33
	3.1.1 - Relação Tensão Deformação Uniaxial .	34
	3.1.2 - Matriz de Elasticidade .....	38
	3.1.3 - Comportamento na Ruptura .....	42
	3.2 - Modelo para o Aço .....	47
IV	- ALGORITMOS INCREMENTAIS PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR ..	48
	4.1 - Equações Incrementais de Movimento .....	48
	4.2 - Discretização por Elementos Isoparamétricos.	50
	4.3 - Solução das Equações de Equilíbrio Estático e Dinâmico .....	52
	4.4 - Comportamento Crítico e Pós-Crítico .....	53
V	- IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL .....	57
	5.1 - Generalidades .....	57
	5.2 - Processo de Análise .....	58
	5.3 - Subprogramas Desenvolvidos .....	61
	5.4 - Entrada de Dados do Modelo .....	64

VI - ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	66
6.1 - Exemplo 1 .....	66
6.2 - Exemplo 2 .....	67
6.3 - Exemplo 3 .....	70
6.4 - Exemplo 4 .....	74
6.5 - Exemplo 5 .....	75
6.6 - Exemplo 6 .....	83
 VII - CONCLUSÕES .....	 89
 BIBLIOGRAFIA .....	 93

## I - INTRODUÇÃO

Ultimamente, tem sido dada muita atenção à análise da deformação e do carregamento último de estruturas de concreto armado e protendido, pelo método dos elementos finitos. Isto se deve ao crescente uso do concreto ciclópico, armado e protendido como elemento estrutural, e ao desenvolvimento de técnicas relativamente poderosas de discretização e análise em computadores digitais. Mediante uma simulação numérica da resposta estrutural completa, até o colapso, é possível verificar a segurança sobre todos os aspectos, e na maioria dos casos reduzir os custos da estrutura.

O concreto armado apresenta um comportamento muito complexo, envolvendo fenômenos como: inelasticidade, fissuração, deformação dependente do tempo e efeitos da interação entre o aço e o concreto.

O método dos elementos finitos vem sendo usado na análise não linear de estruturas de concreto armado há mais de uma década. Ngo e Scordelis<sup>1</sup> em 1967 propuseram um modelo para análise de vigas de concreto armado com o objetivo de explorar as potencialidades e as dificuldades encontradas no uso do método dos elementos finitos.

Cada fenômeno que o comportamento do concreto apresenta, pode ou não ser tomado em consideração, de forma mais ou menos simplificada, em função do objetivo do estudo realizado.

Durante o carregamento, o concreto não somente apresenta deformações elásticas, mas também deformações inelásticas e deformações dependentes do tempo, causadas por variações da microestrutura. Para carregamentos biaxiais e proporcionais,



existem resultados experimentais que fornecem os diagramas tensão-deformação para diversas razões de tensão, como aqueles, obtidos por Kupfer, et Alii<sup>4</sup> em 1969. Os ensaios triaxiais apresentam grandes dificuldades mecânicas. Devido a este fator, os resultados experimentais disponíveis, para estados triaxiais de tensão geralmente se referem apenas às características de resistência.

Apesar das óbvias restrições que apresenta, a teoria da elasticidade tem sido largamente empregada, para descrever o comportamento do concreto (5, 14, 15, 16, 31, 32).

Obino<sup>30</sup>, implementou um modelo que considera o concreto como material ortotrópico, elástico, com relação tensão-deformação uniaxial não-linear, para análise de estruturas submetidas a estado plano de tensão e deformação, utilizando elementos triangulares com campo de deslocamentos linear.

A formulação elástica pode apresentar bons resultados nos casos em que o carregamento não é cíclico, porém é falha na identificação das deformações inelásticas que se tornam aparentes quando são feitas experiências de descarregamento. Esse fato levou diversos autores à utilização de modelos elastoplásticos e hipoeelásticos.

Suidan e Schonobrich<sup>3</sup>, em trabalho publicado em 1973, tratam o concreto como material elastoplástico perfeito. Argyris et Alii<sup>7</sup>, têm examinado regras de escoamento aplicáveis ao concreto, que é tratado como material elastoplástico com endurecimento. Exemplos da aplicação da teoria da plasticidade a estruturas de concreto podem ser encontrados em (9, 17, 33, 7).

Alguns autores (6, 13, 12) têm utilizado modelos

baseados em relações tensão - deformação hipoeelásticas para representar o comportamento do concreto.

A formação de fissuras, é a principal fonte de não linearidade nas estruturas de concreto. Para simula-la, duas aproximações têm sido usualmente empregadas. O procedimento mais comum é assumir que o concreto, após fissurar, permanece contínuo, e que as fissuras são distribuídas sobre o domínio do elemento . Outra alternativa é considerar a introdução, na estrutura, de fissuras discretas, o que é feito separando os nós dos elementos vizinhos à fissura. O primeiro procedimento foi adotado por Ras-hid<sup>29</sup> em 1968 e o segundo por Ngo e Scordelis<sup>1</sup> em 1967.

Em geral é assumida a aderência perfeita entre o aço das armaduras e o concreto, o que implica em compatibilidade de deslocamentos entre os componentes da estrutura, porém nas referências (1, 31) são encontrados esclarecimentos quanto ao emprego de elementos escalares do tipo mola para ligar o aço ao concreto. Mediante a utilização de funções lineares ou não, é possível simular o deslizamento da armadura.

Poucos trabalhos têm sido publicados sobre o com-portamento dinâmico das estruturas de concreto armado. Isto se deve à falta de resultados experimentais no que concerne a en-saios dinâmicos. No entanto em algumas estruturas, tais como va-sos de pressão de reatores nucleares, devem ser consideradas car-gas transientes, como as causadas por impactos e explosões. Em função disto, alguns autores (13, 27), baseados nos resultados experimentais, e nos modelos desenvolvidos para o caso estático, têm formulado modelos elastoplásticos ou hipoeelásticos, que conside-ram carregamento e descarregamento e podem ser aplicados à análise dinâmica.

As propriedades do concreto armado, devem ser consideradas em todos os estágios do processo computacional, incluindo a formulação variacional, a técnica de discretização e a solução adotada na resolução das equações não-lineares.

O objetivo deste trabalho, é implementar um modelo, que de forma simples, reproduza o comportamento não-linear das estruturas de concreto armado, até o colapso. Para ser passível de utilização o modelo deve requerer para parâmetros de entrada apenas resultados experimentais facilmente disponíveis. Além disso requer-se que o modelo seja numericamente estável.

Na forma em que foi implementado, o modelo efetua a análise estática e dinâmica de estruturas representadas por estado plano de tensão e deformação, e de sólidos axissimétricos.

Para discretizar o concreto utilizam-se elementos finitos isoparamétricos com número variado de pontos nodais, e representa-se o aço com elementos escalares não lineares.

A formulação não-linear é do tipo incremental, verificando-se o equilíbrio a cada intervalo pelo método de Newton-Raphson Modificado.

O modelo adotado apresenta as seguintes características:

- considera o concreto como material ortotrópico, contínuo, e hipelástico; os efeitos não lineares considerados são devidos à fissuração e à relação tensão-deformação não-linear;
- para o aço admite curva tensão-deformação especificada por pontos, com a possibilidade de incluir deformações permanentes;
- considera aderência perfeita entre o aço e o concreto.

O presente trabalho está dividido em seis capítulos.

No Capítulo II são feitas considerações sobre os principais problemas envolvidos quando se utilizam modelos hip-elásticos, apresentando-se soluções empregadas usualmente na literatura.

No Capítulo III é descrito o modelo implementado.

No Capítulo IV é feita uma breve revisão dos algoritmos empregados na análise não linear.

No Capítulo V descreve-se o programa computacional desenvolvido.

No Capítulo VI apresentam-se algumas aplicações, cujos resultados são comparados àqueles obtidos em ensaios de laboratório, analiticamente ou mediante utilização de outros modelos.

## II - COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DO CONCRETO

A principal causa de não-linearidade no concreto é o desenvolvimento de fissuras que aparecem devido à sua baixa resistência quando submetido à solicitações de tração. A adoção de critérios de ruptura adequados para detectar o aparecimento das fissuras e a simulação do comportamento do concreto fissurado são de primordial importância nos modelos que visam a análise de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos.

Devido as dificuldades que os ensaios triaxiais apresentam, eles são geralmente restritos ao caso de compressão triaxial. Os critérios de ruptura para o caso triaxial são largamente baseados em resultados experimentais relativos a solicitações biaxiais. Sobre os vários fenômenos que influem no comportamento do concreto fissurado como o encaixe do agregado e ação do aço através da fissura, existem poucos resultados experimentais disponíveis, mesmo para o caso biaxial.

São feitas considerações sobre as soluções apresentadas por vários autores para o tratamento da fissuração. Apresentam-se também alguns critérios de ruptura encontrados na literatura, para determinação dos estados de tensão que causam ruptura por tração ou compressão.

O comportamento do concreto na compressão é outra fonte de não linearidade. Devido ao fenômeno de microfissuração, para carregamentos muito inferiores ao de ruptura, o concreto já apresenta deformações não lineares e inelásticas. Alguns autores têm adotado modelos elastoplásticos com endurecimento<sup>7</sup>, outros, modelos hipoeelásticos (6, 12, 13), para apresentar este comporta-

mento. Alguns modelos são desenvolvidos supondo que o concreto se comporta linearmente até atingir uma superfície de escoamento (3, 17). Modelos deste tipo, são perfeitamente aplicáveis, se for considerado que a maior influência no comportamento não linear do material é a formação de fissuras.

No presente trabalho adotou-se uma formulação hipelástica.

Faz-se uma análise dos principais problemas que se apresentam no uso desta formulação. São apresentadas soluções e simplificações adotadas por vários autores no que diz respeito à equação constitutiva e à relação tensão-deformação uniaxial.

## 2.1 - FISSURAÇÃO DO CONCRETO

A fissuração pode ser considerada o fenômeno de maior importância quando se visa uma análise não linear de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos.

As posições e orientações das fissuras são obtidas com o emprego de critérios de ruptura como o da máxima tensão ou deformação de tração, pelo critério de Mohr-Coulomb, combinações destes dois, ou outros que representem os resultados obtidos experimentalmente.

Vários modelos têm sido estudados para simular a formação de fissuras em estruturas de concreto discretizadas pelo Método dos Elementos Finitos.

Alguns são baseados na alteração das propriedades topológicas da estrutura. Qualquer fissura que tome lugar no concreto pode ser representada separando-se os elementos vizinhos a fissura, isto é, assumindo-se diferentes pontos nodais em

cada face da fissura (Ngo e Scordelis<sup>1</sup>).

Os modelos mais correntemente empregados são aqueles que supõem que no instante em que trações inadmissíveis aparecem no interior do elemento, este é atravessado por uma série de fissuras paralelas, sendo então todo o elemento considerado fissurado (Cedolin e Dei Poli<sup>2</sup>). A orientação das fissuras introduz anisotropia na lei do material contínuo equivalente ao concreto fissurado. O procedimento mais usual, é considerar o concreto como ortotrópico, passando a ter um dos eixos de ortotropia orientado na direção em que se deu a ruptura, ao mesmo tempo em que apresenta uma perda de resistência à tração nesta direção.

Uma outra forma de solucionar o problema é adotada quando se usam elementos isoparamétricos, sejam estes planos ou tridimensionais (Suidan e Schnobrick<sup>3</sup>). Admite-se que o concreto fissurado permanece contínuo, e que as fissuras são distribuídas na área do elemento que corresponde ao ponto de integração numérica em que a tensão de tração foi considerada inadmissível, o que origina a fissuração parcial do elemento.

A consideração de que após o surgimento da fissura, existe ainda alguma rigidez transversal no plano de ruptura devido ao encaixe do agregado, tem resultado boa correlação com os resultados experimentais. Embora não existam comprovações experimentais que forneçam valores precisos para a perda de rigidez transversal, vários autores têm proposto soluções para este problema, que resulta de grande importância na análise de estruturas de concreto armado pelo Método dos Elementos Finitos. Dois procedimentos são mais empregados na literatura: ou se adota uma constante empírica com a finalidade de minorar o módulo de rigidez transversal (Suidan e Schnobrick<sup>3</sup>); ou se admite para rigi-

dez transversal do concreto fissurado um valor que seja função da abertura da fissura (Cedolin e Dei Poli<sup>2</sup>).

A maioria dos autores prefere assumir que o material possui total memória da história das fissuras, isto é, são armazenadas todas as posições e orientações das fissuras que já ocorreram, ao invés de considerar que o material não conserva as orientações e posições das fissuras, e que a cada estágio a fissuração obedece apenas à superfície inicial de ruptura. Isto implica em que novas fissuras podem ocorrer e outras serem consideradas fechadas, mas uma nova fissura deve ocorrer em um antigo plano de ruptura ou em outro perpendicular a este. Esta aproximação é válida no caso de carregamento proporcional. No caso de carregamentos não proporcionais ou cíclicos, devem ser esperados consideráveis desvios do comportamento real do material.

## 2.2 - CRITÉRIOS DE RUPTURA

Os critérios de ruptura propostos para o concreto são baseados nas teorias clássicas de ruptura e nos ensaios experimentais, visando representar o comportamento do concreto sob solicitações multiaxiais.

### 2.2.1 - Teorias de Ruptura

O comportamento de um material sob carregamento, depende de suas propriedades e de seu estado de tensão (Belyaev<sup>18</sup>).

No caso de materiais frágeis, as deformações permanecem quase proporcionais às tensões até a ruptura, e esta acontece sem qualquer deformação plástica. A ruptura ocorre por separação em uma seção perpendicular a tensão de tração ou em várias seções paralelas à tensão de compressão.



No caso de materiais dúcteis as deformações elásticas são sucedidas por consideráveis deformações plásticas e a ruptura final se dá devido ao deslizamento sob tensões máximas de cisalhamento.

Embora exista esta classificação dos materiais em dúcteis e frágeis, um mesmo material, dependendo de suas condições de trabalho pode sofrer ruptura por separação ou deslizamento.

#### a) Materiais Frágeis

A ruptura dos materiais frágeis pode ocorrer devido à máxima tensão normal de tração ou devido à máxima deformação elástica.

A teoria da máxima tensão de tração foi sugerida por Rankine em 1862.

Se  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , a ruptura, ocorrerá quando

$$\sigma_1 = \sigma_{rup} \quad (2.1)$$

onde  $\sigma_{rup}$  é a resistência a ruptura a qual é constante para cada material.

A teoria da máxima deformação foi sugerida por Mariotte em 1686.

Se  $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$ , a ruptura ocorrerá quando

$$\epsilon_1 = \epsilon_{rup} \quad (2.2)$$

onde:

$$\epsilon_{rup} = \frac{\sigma_{rup}}{E}$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade.

## b) Materiais Ducteis

O fato de que aparecem linhas de cisalhamento na superfície do corpo durante a deformação plástica, e que sob tração os materiais dúcteis rompem ao longo de planos de máxima tensão de cisalhamento, torna estas tensões aceitáveis como critérios de ruptura.

A teoria da máxima tensão de cisalhamento foi proposta por Coulomb em 1773. De acordo com esta teoria, o estado crítico do material ocorre quando a máxima tensão de cisalhamento se torna igual a um certo valor.

Sendo  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , a máxima tensão de cisalhamento será dada por:

$$\tau_{max} = f(\sigma_1, \sigma_3) \quad (2.3)$$

independendo da tensão intermediária.

O critério sugerido por Tresca em 1868 assume que a ruptura ocorre em um dado material quando a máxima tensão de cisalhamento atingir um valor constante, sendo  $K$  um valor limite para cada material. O critério de Tresca pode ser expresso por:

$$f(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3 - 2K = 0 \quad (2.4)$$

Mohr em 1900 sugeriu que na ruptura, a tensão de

cizalhamento máxima é função também da tensão normal atuando no plano de ruptura.

Coulomb em 1776 propôs um critério empírico que pode ser visto como caso especial da teoria de Mohr. Em função das tensões principais, tem-se:

$$f(\sigma_1, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_3) - (2c \cos \phi) + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi = 0 \quad (2.5)$$

onde  $c$  é a coesão e  $\phi$  o ângulo de atrito interno.

Expressando (2.5) em função de  $\tau_{\text{máx}}$  e  $\sigma_N$ , máxima tensão de cizalhamento e tensão normal ao plano de cizalhamento, a equação toma a forma mais usual:

$$\tau_{\text{máx}} = c - \sigma_N \operatorname{tg} \phi \quad (2.6)$$

No critério de Mohr-Coulomb a reta de Coulomb é associada à envoltória de Mohr.

Na Figura 2.1 estão representados os critérios de Mohr-Coulomb e Tresca no espaço das tensões principais.

Von Mises em 1913 propôs que o escoamento ou ruptura do material começa quando a energia potencial de distorção por unidade de volume atinge um certo valor limite. Desta forma,

$$f(\sigma) = J_2 - K^2 = 0 \quad (2.7)$$

sendo  $J_2$ , o segundo invariante das tensões desviadoras, em notação tensorial dado por

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (2.8)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_m \quad (2.9)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $\sigma_m = \frac{\sigma_{ii}}{3}$ .

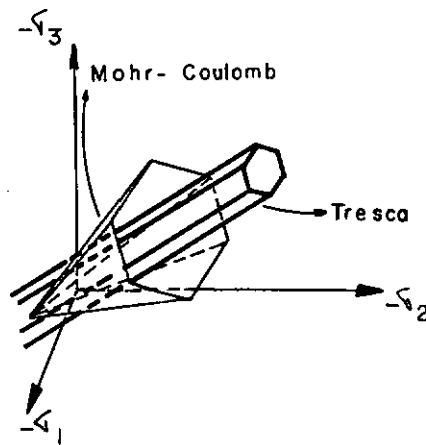


FIGURA 2.1 - CRITÉRIOS DE MOHR-COULOMB E TRESCA NO ESPAÇO DAS TENSÕES PRINCIPAIS

O critério de Drucker-Prager é uma generalização do critério de Von Mises, e é dado pela expressão:

$$f(\sigma) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - K = 0 \quad (2.10)$$

onde  $I_1$  é o primeiro invariante das tensões, em notação tensorial dado por:

$$I_1 = \sigma_{ii} \quad (2.11)$$

e  $\alpha$  e  $K$  são constantes do material relacionadas com o ângulo de fricção interna  $\phi$  e o coeficiente de coesão  $c$ .

No espaço das tensões principais o critério de Von Mises representa um cilindro e o de Drucker-Prager um cone, ambos centrados no eixo hidrostático (Figura 2.2a).

Na Figura 2.2b, são superpostas no plano desviador as interseções apresentadas pelas superfícies de Tresca, Mohr-Coulomb e Von Mises.

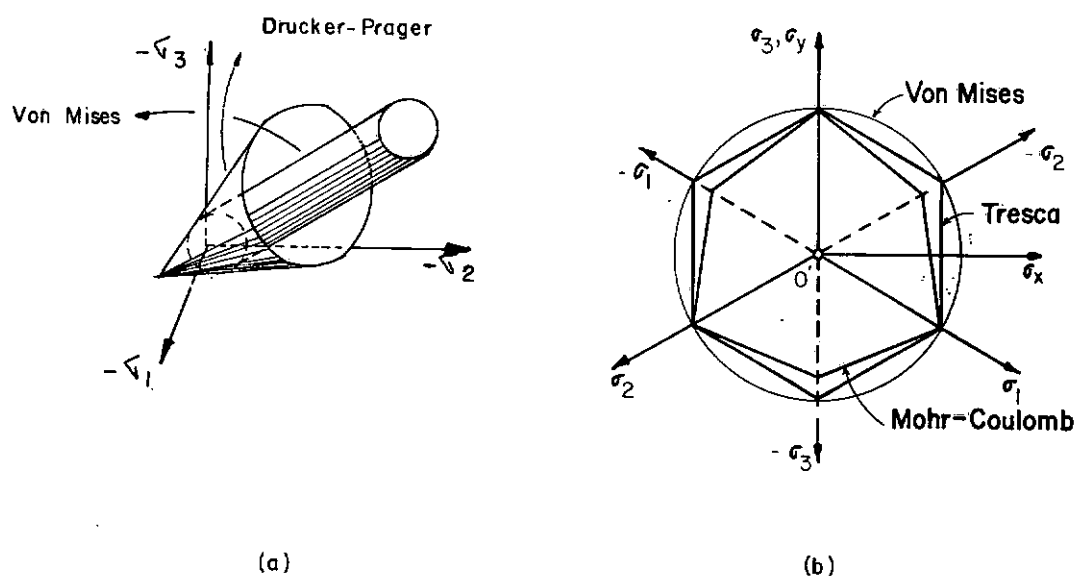


FIGURA 2.2 - a) CRITÉRIOS DE VON MISES E DRUCKER-PRAGER NO ESPAÇO DAS TENSÕES PRINCIPAIS  
b) CRITÉRIOS DE VON MISES, COULOMB E TRESCA NO PLANO DESVIADOR

### 2.2.2 - Critérios Utilizados para o Concreto

Para o caso biaxial os resultados experimentais obtidos por Kupfer et Alii<sup>4</sup>, sugerem que na região compressão +

tração a ruptura acontece por separação, a menos de razões de tensões menores do que 1/15. Na região tração - tração, a ruptura acontece por separação na direção perpendicular a da maior tensão (Figura 2.3).

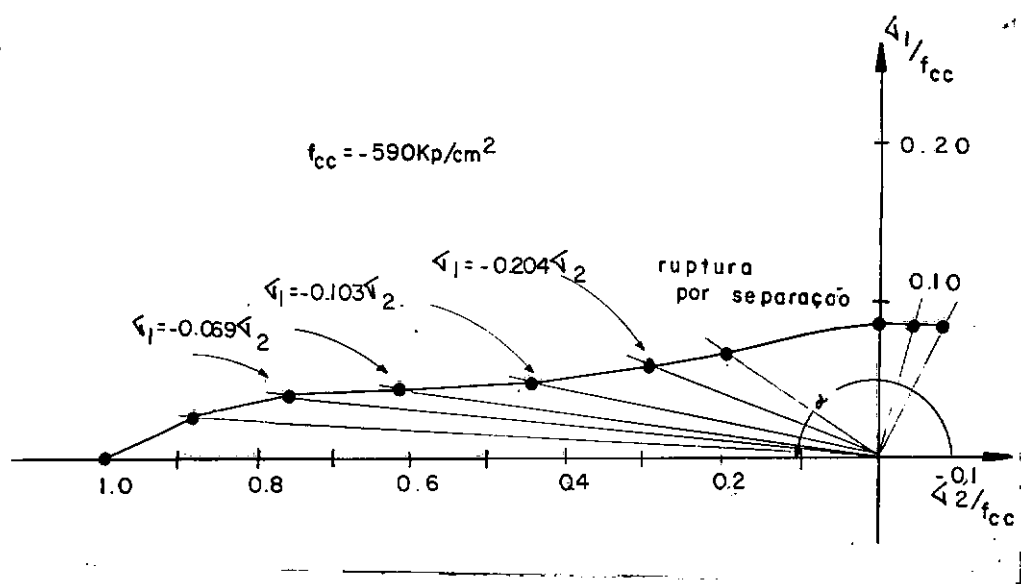


FIGURA 2.3 - RESULTADOS EXPERIMENTAIS OBTIDOS POR KUPFER

Kupfer e Gerstle<sup>5</sup> propõe para o caso biaxial que

a ruptura na região compressão-tração, acontece por separação nos estados de tensão que verifiquem, para  $\sigma_1 \leq \sigma_2$ :

$$f(\sigma) = \frac{\sigma_1}{f_{ct}} - 0,8 \frac{\sigma_2}{f_{cc}} - 1 = 0 \quad (2.12)$$

sendo  $f_{cc}$  a resistência do concreto à compressão e  $f_{ct}$  a resistência do concreto à tração, obtidas do ensaio uniaxial.

A superfície de ruptura utilizada por Connor e Sarne<sup>6</sup>, se baseia largamente nos resultados experimentais obtidos em ensaios biaxiais, uma vez que os ensaios triaxiais geral-

mente são restritos ao caso de compressão triaxial. Connor e Sarne<sup>6</sup> consideram que nos estados de tensão que envolvem tração a ruptura acontece por separação na direção perpendicular a da maior tensão de tração, sempre que o estado de tensão estiver sobre ou fora da superfície de ruptura.

O modelo dos três parâmetros utilizado por Argyris et Alii<sup>7</sup>, consiste em combinar o critério de Mohr-Coulomb com o da máxima tensão de tração (Figura 2.4).

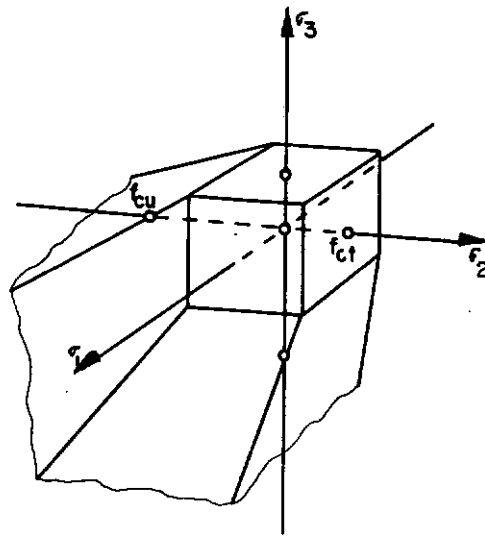


FIGURA 2.4 - MODELO DOS 3 PARÂMETROS

O critério de Mohr-Coulomb é normalmente expresso em termos da coesão  $c$  e do ângulo de atrito interno  $\phi$ . Se  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , tem-se que:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) - (2c \cos \phi) + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi = 0 \quad (2.13)$$

Os parâmetros  $c$  e  $\phi$  podem ser colocados em função de  $f_{cc}$  e  $f_{ct}$ . Conforme a (Figura 2.5) tem-se que:

$$f_{ct} = \frac{2c \cos \phi}{(1 + \sin \phi)} \quad (2.14)$$

$$f_{cc} = \frac{2c \cos \phi}{(1 - \sin \phi)} \quad (2.15)$$

Considerando que a ruptura depende somente da maior e da menor tensão principal, o critério de Mohr-Coulomb pode ser expresso sob a forma:

$$\frac{\sigma_1}{f_{ct}} - \frac{\sigma_3}{f_{cc}} - 1 = 0 \quad (2.16)$$

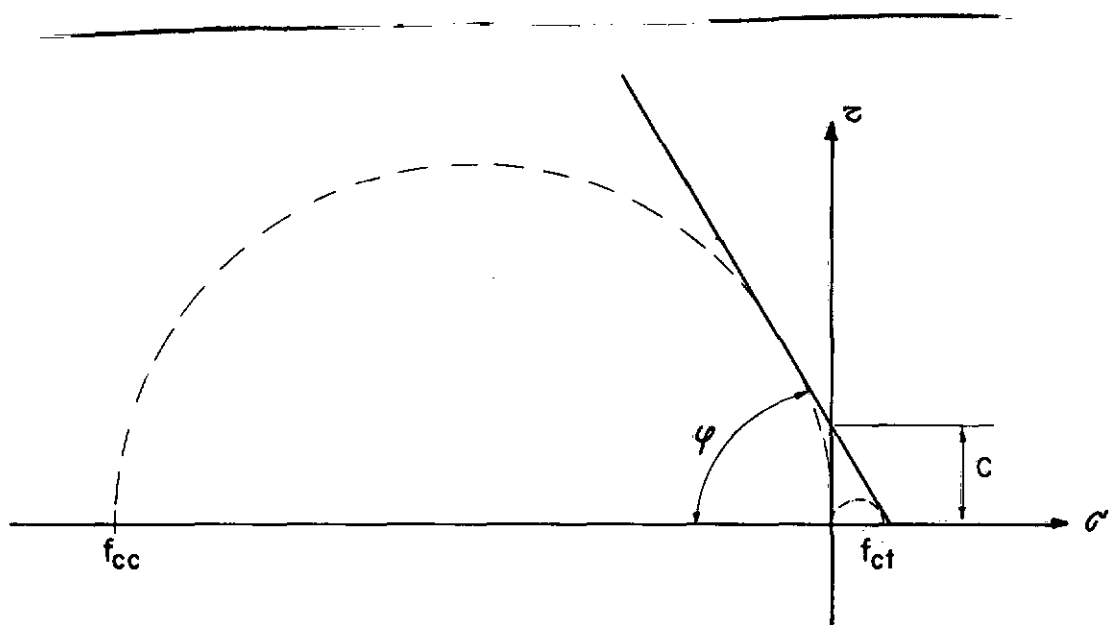


FIGURA 2.5 - CRITÉRIO DE MOHR-COULOMB



Para utilização do critério de Mohr-Coulomb juntamente com o da máxima tensão de tração, a resistência a tração  $f_{ct}$  é substituída por um valor  $f'_{ct}$ , para  $f'_{ct} = A f_{ct}$ , sendo  $A$  uma constante (Figura 2.6).

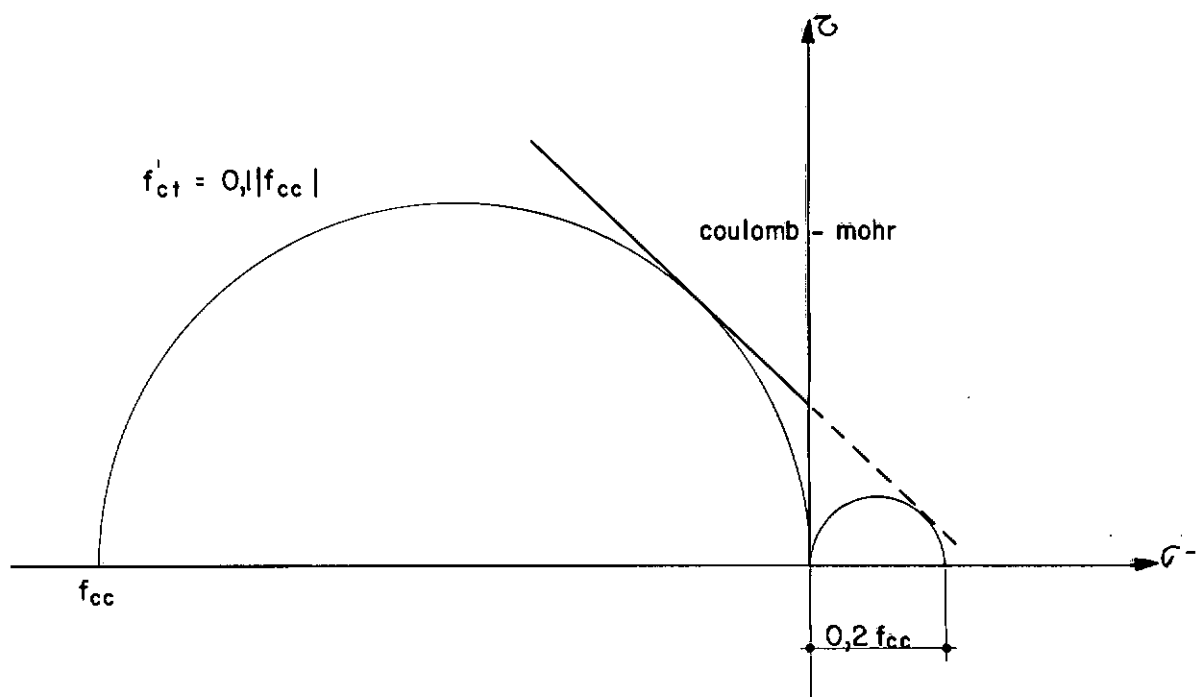


FIGURA 2.6 - CRITÉRIO DE MOHR-COULOMB COMBINADO COM O CRITÉRIO DA MÁXIMA TENSÃO DE TRAÇÃO - MODELO DOS 3 PARÂMETROS

Para  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , a ruptura acontecerá sempre que:

$$\frac{\sigma_1}{f'_{ct}} - \frac{\sigma_3}{f_{cc}} - 1 = 0 \quad (2.17)$$

ou

$$\sigma_1 = f_t \quad (2.18)$$

Na Figura 2.7 são apresentados no plano  $\sigma_2 = 0$ , as interseções obtidas utilizando-se a superfície utilizada por Connor e Sarne<sup>6</sup> e o critério dos 3 parâmetros, delimitando-se as zonas em que a ruptura acontece por separação ou deslizamento.

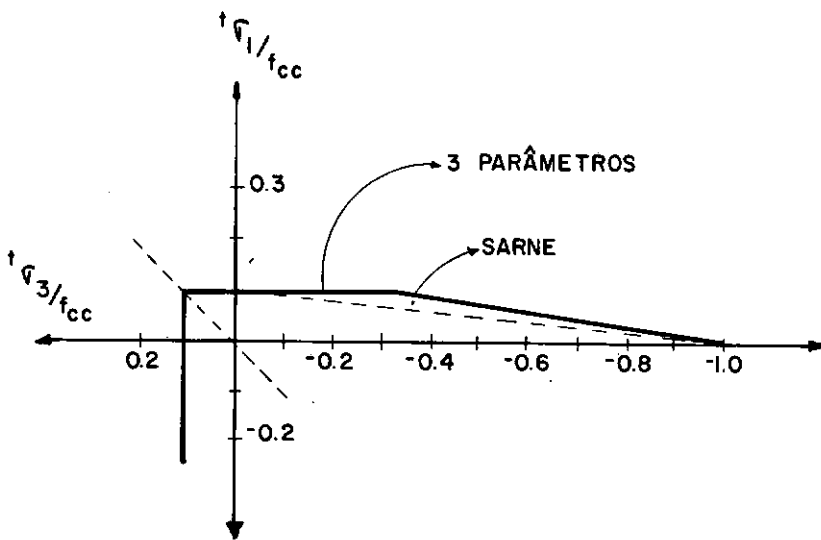


FIGURA 2.7 - SUPERFÍCIE UTILIZADA POR SARNE E MODELO DOS 3 PARÂMETROS

Os ensaios de compressão triaxial mais utilizados na literatura são os de Launay e Gachon<sup>8</sup>. Devido as dificuldades que o ensaio triaxial apresenta, a discrepância entre os resultados obtidos por vários pesquisadores é muito maior do que no caso biaxial.

Todos os resultados experimentais sugerem que a componente hidrostática é de significativa influência no comportamento do concreto. Devido a esse fato, os critérios empregados

para a verificação da ruptura por compressão ou plastificação do concreto incluem o primeiro invariante das tensões. A superfície de ruptura é basicamente um cone com meridianos curvos e seção não circular.

Willam e Warnke<sup>9</sup> desenvolveram um modelo, o qual define uma superfície cônica de base não circular, para representar os estados de tensão que ocasionam a ruptura do concreto. No espaço das tensões principais, esta superfície é convexa, contínua e tem gradiente contínuo. A ruptura acontecerá, sempre que:

$$f(\sigma) = f(J_2, I_1, \theta) = 0 \quad (2.19)$$

Para  $0 \leq \theta \leq 60^\circ$ , sendo  $\theta$  o ângulo de similaridade.

Colocando (2.19) na forma explícita tem-se:

$$\frac{1}{z} \frac{I_1}{3} + \frac{1}{r(\theta)} \left( \frac{2}{5} J_2 \right)^{\frac{1}{2}} - f_{cc} = 0 \quad (2.20)$$

sendo

$$\cos \theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 2 \sigma_3}{\frac{6}{\sqrt{3}} (J_2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.21)$$

e

$$r(\theta) = \frac{2 r_2 (r_2^2 - r_1^2) \cos \theta + r_2 (2 r_1 - r_2) \left[ 4 (r_2^2 - r_1^2) \cos^2 \theta + 5 r_1^2 - 4 r_1 r_2 \right]^{\frac{1}{2}}}{4 (r_2^2 - r_1^2) \cos^2 \theta + (r_2 - 2 r_1)^2} \quad (2.22)$$

Os parâmetros  $z$ ,  $r_1$  e  $r_2$  são identificados em função de  $f_{cb}$ , resistência a compressão obtida no ensaio biaxial para compressões iguais nas duas direções,  $f_{cc}$  e  $f_{ct}$  ( $F_i$

gura 2.8). São empregadas ao todo três condições de teste.

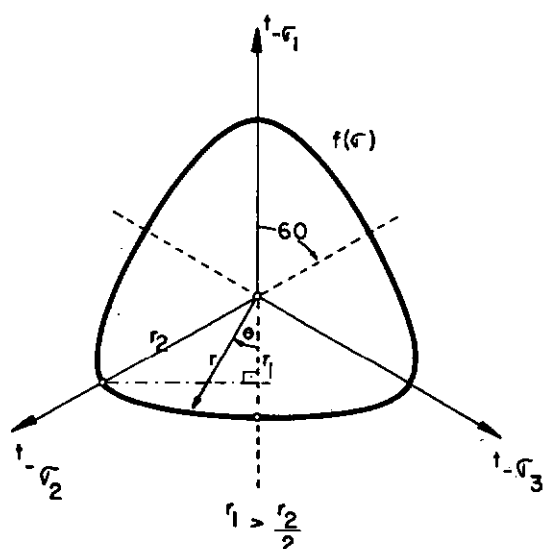


FIGURA 2.8 - REPRESENTAÇÃO NO PLANO DESVIATÓRIO

Estabelecendo-se que:

$$\alpha_z = \frac{f_{ct}}{f_{cc}} \quad (2.23)$$

e

$$\alpha_u = \frac{f_{cb}}{f_{cc}} \quad (2.24)$$

os valores de  $z$ ,  $r_1$  e  $r_2$  serão obtidos substituindo os três resultados de ensaio em (2.20). Obtem-se então:

$$z = \frac{\alpha_u \alpha_z}{\alpha_u - \alpha_z} \quad (2.25)$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\alpha_u \alpha_z}{2 \alpha_u + \alpha_z} \quad (2.26)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\alpha_u \alpha_z}{3 \alpha_u \alpha_z + \alpha_u - \alpha_z} \quad (2.27)$$

A superfície proposta se degenera no modelo de Drucker-Prager se  $r_1 = r_2 = r_0$ . Neste caso somente duas condições de teste são utilizadas.

Khan e Saugy<sup>10</sup> propoem um tronco de cone para a região de compressão e um cone para a região de tração.

Isto equivale a tomar, para a região de compressão:

$$\alpha_z = \frac{\alpha_u}{3 \alpha_u - 2} \quad (2.28)$$

e para a região de tração:

$$\alpha_u = \frac{2 \alpha_z}{3 \alpha_z - 1} \quad (2.29)$$

Calculados  $r_0$  e  $z$ , no primeiro e no segundo caso, (2.20) toma a forma:

$$\frac{\alpha_u - 1}{2 \alpha_u - 1} I_1 + (3 I_2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\alpha_u}{2 \alpha_u - 1} f_{cc} = 0 \quad (2.30)$$

para a região de compressão, e:

$$\frac{1 - \alpha_z}{\alpha_z + 1} I_1 + (3 J_2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2 \alpha_z}{\alpha_z + 1} f_{cc} = 0 \quad (2.31)$$

para a região de tração.

Na Figura 2.9 está representada a superfície de Khan e Saugy<sup>10</sup> no espaço das tensões principais.

Se  $z$  tender a  $\infty$  (2.20) se reduz a:

$$\frac{1}{r_0} \left( \frac{2}{5} J_2 \right)^{\frac{1}{2}} - f_{cc} = 0 \quad (2.32)$$

que é o critério de Von Mises.

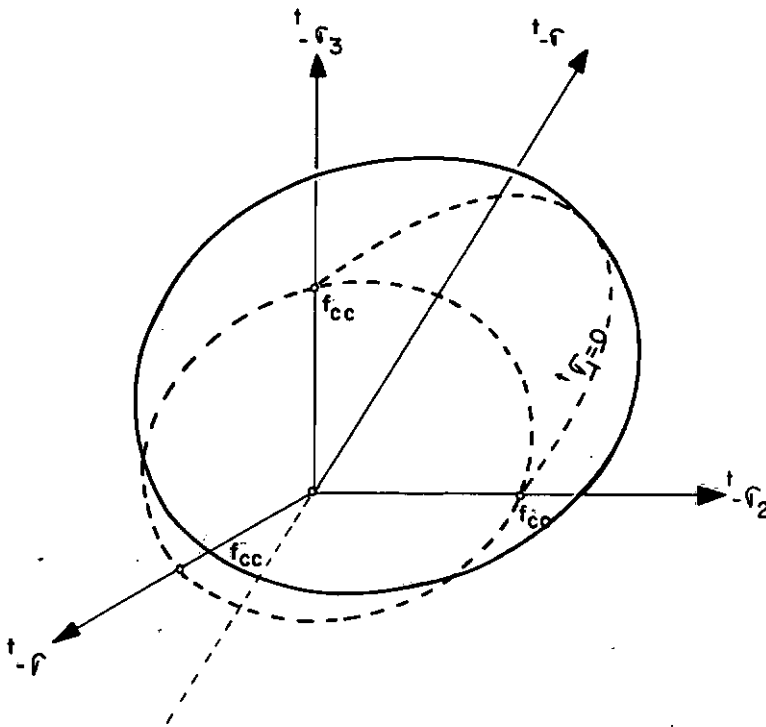


FIGURA 2.9 - SUPERFÍCIE PROPOSTA POR KHAN E SAUGY

### 2.3 - RELAÇÃO CONSTITUTIVA

Existem duas formulações básicas para caracterização da lei tensão-deformação de um material, a formulação secante e a tangente.

As leis constitutivas da primeira categoria são restritas a processos reversíveis, como aqueles representados nos modelos elásticos ou elastoplásticos sem endurecimento. As da segunda categoria se aplicam a problemas em que a descrição do material é feita incrementalmente. A lei constitutiva incremental na qual os incrementos de tensão são obtidos em função das tensões e dos incrementos de deformação foi introduzida por Truesdell, que dominou esta espécie de comportamento, de hipoeelástico.

Pela definição, os modelos elastoplásticos com endurecimento, estariam englobados naqueles de comportamento hipoeelástico. Mróz<sup>11</sup>, faz uma comparação entre os modelos elastoplásticos com endurecimento e os hipoeelásticos, estabelecendo semelhanças e diferenças básicas entre os dois, uma vez que na bibliografia são geralmente, denominados modelos hipoeelásticos apenas aqueles em que os domínios de carregamento e descarregamento não são associados à nenhuma superfície de escoamento.

A Figura 2.10 mostra o diagrama tensão-deformação do concreto, obtido do ensaio a compressão uniaxial. Até o ponto A, limite de proporcionalidade, o material exibe comportamento linear. A partir deste ponto, o material começa a enfraquecer, devido ao fenômeno de microfissuração, até romper no ponto B. As deformações não lineares são basicamente inelásticas. Atingindo o ponto B, a deformação aumentará para decréscimos da tensão.

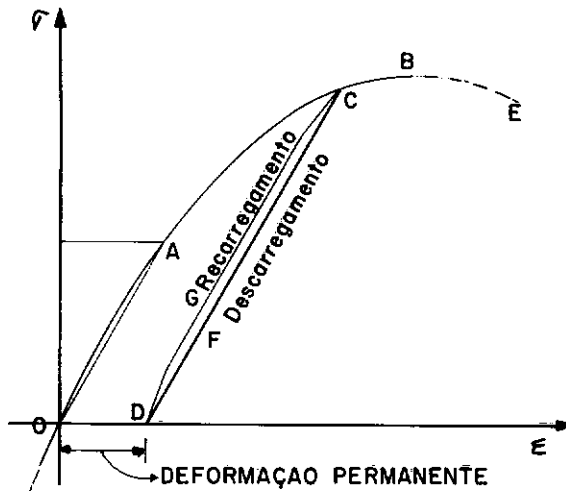


FIGURA 2.10 - CURVA TÍPICA TENSÃO x DEFORMAÇÃO PARA O CONCRETO

Para representar este comportamento, a descrição do material deve ser feita incrementalmente.

### 2.3.1 - Relação Constitutiva Incremental

Algumas considerações serão feitas a seguir sobre as relações constitutivas incrementais usualmente empregadas quando são utilizados modelos hipoeelásticos.

No comportamento não linear, sob condições multiaxiais, a matriz tensão - deformação se torna anisotrópica.

O comportamento diferente em cada direção principal de tensão implica em que essas não sejam as mesmas direções principais de deformação, introduzindo acoplamento entre as tensões normais e as deformações transversais. A não consideração



deste fato, é a primeira simplificação feita na lei constitutiva empregada nos modelos hipoeelásticos, e torna os modelos hipoeelásticos anisotrópicos totalmente aceitos apenas para os casos de carregamento proporcional. Apesar disto, muitas equações hipoeelásticas ortotrópicas tem sido propostas na literatura, para o cálculo de estruturas de concreto pelo Método dos Elementos Finitos.

Seja, a equação constitutiva incremental dada por:

$$\dot{\underline{t}}_{\underline{\sigma}} = \underline{D} \dot{\underline{t}}_{\underline{\epsilon}} \quad (2.33)$$

e

$$\dot{\underline{t}}_{\underline{\epsilon}} = \underline{C} \dot{\underline{t}}_{\underline{\sigma}} \quad (2.34)$$

onde:

$$\dot{\underline{t}}_{\underline{\sigma}} = \frac{d}{dt} (\underline{t}_{\underline{\sigma}}) \quad \text{e} \quad \dot{\underline{t}}_{\underline{\epsilon}} = \frac{d}{dt} (\underline{t}_{\underline{\epsilon}})$$

Assumindo-se que não há acoplamento entre a tensão normal e a deformação transversal, a matriz  $\underline{C}$ , para sólidos axissimétricos, pode ser explicitada por:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

sendo:

$$\underline{t}_{\underline{\sigma}}^T = \{t_{\sigma_1}, t_{\sigma_2}, t_{\sigma_3}, t_{\sigma_{12}}\}$$

e

$$\underline{t}_{\epsilon}^T = \{t_{\epsilon_1}, t_{\epsilon_2}, t_{\epsilon_3}, t_{\epsilon_{12}}\}$$

Definindo-se o material como ortotrópico, a matriz  $\underline{C}$  quando referida aos eixos principais toma a forma (Lekhnitskii<sup>19</sup>):

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_{E_1}} & -\frac{\nu_{12}}{t_{E_2}} & -\frac{\nu_{13}}{t_{E_3}} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{t_{E_1}} & \frac{1}{t_{E_2}} & -\frac{\nu_{23}}{t_{E_3}} & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{t_{E_1}} & -\frac{\nu_{32}}{t_{E_2}} & \frac{1}{t_{E_3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{t_{G_{12}}} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

onde  $t_{E_1}, t_{E_2}, t_{E_3}$  são os módulos de elasticidade tangente nas direções 1, 2 e 3;  $\nu_{12}$  é o coeficiente de Poisson que relaciona as direções 1 e 2 ( $\nu_{13}$ , etc. são definidos similarmente), e  $t_{G_{12}}$  é o módulo de elasticidade transversal no Plano 1-2.

Invertendo (2.36), resulta:

$$\underline{D} = \frac{1}{\phi} \begin{bmatrix} t_{E_1}(1 - \nu_{23} \nu_{32}) & t_{E_1}(\nu_{12} + \nu_{13} \nu_{32}) & t_{E_1}(\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}) & 0 \\ t_{E_2}(\nu_{21} + \nu_{23} \nu_{31}) & t_{E_2}(1 - \nu_{13} \nu_{31}) & t_{E_2}(\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13}) & 0 \\ t_{E_3}(\nu_{13} + \nu_{31} \nu_{21}) & t_{E_3}(\nu_{32} + \nu_{31} \nu_{12}) & t_{E_3}(1 - \nu_{12} \nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi t_{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

onde

$$\phi = 1 - v_{23} v_{32} - v_{12} v_{21} - v_{13} v_{31} - v_{12} v_{23} v_{31} - v_{13} v_{21} v_{32}$$

Para determinação da matriz  $\underline{D}$  são necessárias 10 constantes independentes. Utilizando-se a condição de simetria, o número de constantes decai para sete.

Se  $\underline{C}$  é simétrica tem-se, em notação indicial, que:

$$\frac{v_{ij}}{t_{E_j}} = \frac{v_{ji}}{t_{E_i}} \quad (2.38)$$

e admitindo-se:

$$v_{ij} \cdot v_{ji} = \mu_{ij} \quad (2.39)$$

Em (2.38) e (2.39) não há somatório em  $i$  e  $j$  e  $i$  e  $j$  variam de 1 a 3.

Utilizando-se (2.38) e (2.39) em (2.37), a matriz  $\underline{D}$  pode então ser escrita da seguinte forma:

$$\underline{D} = \frac{1}{\phi} \begin{bmatrix} t_{E_1}(1-\mu_{23}^2) & \sqrt{t_{E_1} t_{E_2}}(\mu_{13} \mu_{32} + \mu_{12}) & \sqrt{t_{E_1} t_{E_3}}(\mu_{12} \mu_{32} + \mu_{13}) & 0 \\ t_{E_2}(1-\mu_{13}^2) & \sqrt{t_{E_2} t_{E_3}}(\mu_{12} \mu_{13} + \mu_{32}) & 0 \\ t_{E_3}(1-\mu_{12}^2) & 0 \\ \text{SIMÉTRICA} & & & \phi t_{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

sendo:

$$\phi = 1 - \mu_{12}^2 - \mu_{13}^2 - \mu_{23}^2 - 2 \mu_{12} \mu_{23} \mu_{13}$$

Nenhum resultado experimental forneceu ainda um valor totalmente aceito para o módulo de elasticidade transversal do concreto, seja para solicitações biaxiais ou triaxiais.

Os valores adotados para o módulo de elasticidade transversal na literatura, são empíricos, baseados somente em que este deve depender igualmente dos módulos longitudinais nas direções envolvidas.

Elwi e Murray<sup>12</sup> utilizam a matriz de tensão - deformação dada em (2.40), e o módulo de elasticidade transversal é dado por:

$$t_{G_{12}} = \frac{1}{4\phi} \left[ t_{E_1} + t_{E_2} - 2 \mu_{12} \sqrt{t_{E_1} t_{E_2}} - (\sqrt{t_{E_1}} \mu_{23} + \sqrt{t_{E_2}} \mu_{31})^2 \right] \quad (2.41)$$

Alguns autores como Connor e Sarne<sup>6</sup> e Bathe e Ramaswamy<sup>13</sup>, utilizam em seus modelos equações constitutivas bem mais simplificadas do que a dada em (2.40). Isto se deve, a dificuldade, encontrada na prática, na determinação das sete constantes envolvidas nesta equação.

A matriz  $\underline{C}$  proposta por Connor e Sarne<sup>6</sup>, tem a seguinte forma:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_{E_1}} & -\frac{\nu}{t_{E_a}} & -\frac{\nu}{t_{E_a}} & 0 \\ & \frac{\nu}{t_{E_2}} & -\frac{\nu}{t_{E_a}} & 0 \\ & & \frac{\nu}{t_{E_3}} & 0 \\ \text{SIMÉTRICA} & & & \frac{2(1+\nu)}{t_{E_b}} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

sendo:

$$t_{E_a} = \frac{1}{3} (t_{E_1} + t_{E_2} + t_{E_3}) \quad \text{e} \quad t_{E_b} = \frac{1}{2} (t_{E_1} + t_{E_2})$$

### 2.3.2 - Relação Tensão Deformação Uniaxial

A relação tensão - Deformação proposta por Saenz<sup>36</sup>, é adotada em diversos modelos hipoeelásticos, para representar o comportamento do concreto sob solicitações uniaxiais (6, 14, 15).

O ramo ascendente da curva tensão deformação, na região de compressão, é aproximado pela função quadrática, sugerida por Saenz, da seguinte forma:

$$t_{\sigma} = \frac{E_o t_{\epsilon}}{1 + \left(\frac{E_o}{E_s} - 2\right) \left(\frac{t_{\epsilon}}{\epsilon_{cc}}\right) + \left(\frac{t_{\epsilon}}{\epsilon_{cc}}\right)^2} \quad (2.43)$$

sendo  $E_o$  o módulo de elasticidade inicial,  $E_s = \frac{f_{cc}}{\epsilon_{cc}}$ ,  $\epsilon_{cc}$  a deformação correspondente a máxima tensão de compressão e  $t_{\sigma}$  e  $t_{\epsilon}$  a tensão e deformação uniaxial.

A relação tensão - deformação proposta por Bathe

e Ramaswamy<sup>13</sup>, é uma função de terceiro grau e inclui os valores de  $\epsilon_{cu}$ , a máxima deformação de compressão e  $f_{cu}$ , a tensão correspondente a esta deformação, com a finalidade de descrever o ramo descendente da curva.

Outros autores (16, 17), utilizam aproximações bilineares para representar o diagrama tensão deformação uniaxial do concreto.

Um modelo hipoeelástico deve descrever o comportamento do material antes e durante a ruptura, para isso a relação tensão - deformação uniaxial, sob condições multiaxiais adotada, deve ser baseada nos estados de tensão que determinam a ruptura sob condições multiaxiais.

No modelo para o caso biaxial, proposto por Nilsson et alli<sup>14</sup> a relação tensão deformação uniaxial, sob condições multiaxiais tem a seguinte forma:

$$t_{\sigma} = \frac{E_o t_{\epsilon}}{1 + \left( \frac{1}{1 - \nu\alpha} \frac{E_o}{E_s} - 2 \right) \left( \frac{t_{\epsilon}}{\epsilon'_{cc}} \right) + \left( \frac{t_{\epsilon}}{\epsilon'_{cc}} \right)^2} \quad (2.44)$$

sendo  $\alpha$  a razão entre as tensões principais,  $\nu$  o coeficiente de Poisson,  $E_s = \frac{f'_{cc}}{\epsilon'_{cc}}$ ,  $f'_{cc}$  a resistência a compressão multiaxial e  $\epsilon'_{cc}$  a deformação correspondente a  $f'_{cc}$ , para um dado valor de  $\alpha$ .

Comparando-se (2.43) e (2.44), nota-se que:

$$f'_{ccu} = (1 - \nu\alpha) f'_{cc} \quad (2.45)$$

sendo  $f'_{ccu}$  a tensão uniaxial equivalente no instante da ruptura

ra.

Substituindo-se  $f'_{ccu}$  juntamente com  $\epsilon'_{cc}$  em (2.43), tem-se a equação sugerida por Nilson.

Deve-se observar que para obter a tensão uniaxial equivalente, o efeito de Poisson foi retirado de  $f'_{cc}$ , considerando-se o material elástico, homogêneo e isotrópico. O modelo de Nilson et alii<sup>14</sup> é derivado em termos de tensões e deformações totais e embora ele sugira sua aplicação a leis constitutivas incrementais, não faz referência a cerca do procedimento a ser adotado neste caso.

Outros modelos como o de Darwin e Pecknold<sup>15</sup> são baseados em uma relação tensão - deformação uniaxial para condições multiaxiais, dependente da deformação uniaxial equivalente. Estes modelos tomam em consideração o fato da lei constitutiva ser incremental.

No modelo proposto por Connor e Sarne<sup>6</sup>, a relação tensão - deformação adotada, embora considere as relações multiaxiais de ruptura, não determina esta. A ruptura a cada passo, é verificada em função do estado multiaxial de tensão. A relação uniaxial adotada para o braço ascendente da curva é a dada em (2.43). O braço descendente é aproximado por uma linha reta. Para estados multiaxiais de tensão os valores de  $f_{cc}$  e  $\epsilon_{cc}$  são substituídos por  $f'_{cc}$  e  $\epsilon'_{cc}$ .

Para condições multiaxiais de tensão o procedimento adotado por Bathe e Ramaswamy<sup>13</sup> é semelhante ao proposto por Connor e Sarne<sup>6</sup>.

### III - MODELO IMPLEMENTADO

Optou-se por implementar um modelo hipoelástico, uma vez que estes modelos, embora oferecendo sérias restrições para os casos de carregamento não proporcional ou cíclico, em que são empregadas leis constitutivas incrementais, têm sido muito utilizados na análise de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos, devido principalmente à sua flexibilidade para serem adaptados a resultados experimentais disponíveis.

O modelo adotado é fundamentalmente baseado naquele proposto por Bathe e Ramaswamy<sup>13</sup>, o qual foi idealizado visando a análise estática e dinâmica de estruturas de concreto armado e pretendido sujeitas a solicitações triaxiais.

Como o objetivo principal do trabalho é a análise de vasos de pressão de reatores nucleares implementou-se um modelo que possibilita a análise de sólidos axissimétricos e estruturas submetidas a estado plano de tensão e deformação.

Neste capítulo é feita uma descrição detalhada do modelo implementado.

#### 3.1 - MODELO PARA O CONCRETO

De acordo com a teoria da hipoelasticidade (Coon e Evans<sup>20</sup>), a diminuição de rigidez de um material devida ao estado de carregamento, pode ser simulada utilizando-se uma relação tensão-deformação incremental, com módulo de elasticidade tangente, da forma:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{D} \dot{\underline{\epsilon}} \quad (3.1)$$



sendo a matriz  $D$  avaliada diferentemente dependendo se o material está sendo carregado ou descarregado.

Define-se a função de carregamento em notação tensorial por:

$$t_f = \left[ \frac{1}{2} (t_{\sigma_{ij}} - \delta_{ij}^t t_{\sigma_m}) (t_{\sigma_{ij}} - \delta_{ij} t_{\sigma_m}) \right]^{\frac{1}{2}} + 3\alpha t_{\sigma_m} \quad (3.2)$$

onde  $t$  representa o estado de carregamento do material

$$t_{\sigma_m} = \frac{1}{3} t_{\sigma_{ii}}$$

$\delta_{ij}$  = delta de Kronecker, e  $\alpha$  uma constante que diz da influência da tensão média no estado de carregamento do material.

Bathe e Ramaswamy<sup>13</sup> sugerem que se adote um valor negativo para  $\alpha$ .

Sendo  $f_{\max}$  o maior valor da função encontrado durante a solução completa, o material está sendo carregado se  $t_f \geq f_{\max}$  e descarregado se  $t_f < f_{\max}$ .

### 3.1.1 - Relação Tensão Deformação Uniaxial

A relação tensão - deformação uniaxial proposta por Bathe e Ramaswamy<sup>13</sup> (Figura 3.1), é traduzida pelas seguintes equações:

$$t_{\sigma} = E_0 t_{\epsilon} \quad t_{\epsilon} > 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{t_{\sigma}}{f_{cc}} = \frac{\frac{E_0}{E_s} \cdot \frac{t_{\epsilon}}{\epsilon_{cc}}}{1 + A\left(\frac{t_{\epsilon}}{\epsilon_{cc}}\right) + B\left(\frac{t_{\epsilon}}{\epsilon_{cc}}\right)^2 + C\left(\frac{t_{\epsilon}}{\epsilon_{cc}}\right)^3} \quad t_{\epsilon} \leq 0 \quad (3.4)$$

Para

$$t_E = \frac{d \frac{t_\sigma}{t_\epsilon}}{d \frac{t_\sigma}{t_\epsilon}} \quad (3.5)$$

tem-se que:

$$t_E = \frac{E_O \left[ 1 - B \left( \frac{t_\epsilon}{\epsilon_{cc}} \right)^2 - 2C \left( \frac{t_\epsilon}{\epsilon_{cc}} \right)^3 \right]}{\left[ 1 + A \left( \frac{t_\epsilon}{\epsilon_{cc}} \right) + B \left( \frac{t_\epsilon}{\epsilon_{cc}} \right)^2 + C \left( \frac{t_\epsilon}{\epsilon_{cc}} \right)^3 \right]^2} \quad t_\epsilon \leq 0 \quad (3.6)$$

para

$$A = \frac{\left[ \frac{E_O}{E_u} + (P^3 - 2P^2) \frac{E_O}{E_S} - (2P^3 - 3P^2 + 1) \right]}{[(P^2 - 2P + 1) P]} \quad (3.7)$$

$$B = \left[ \left( \frac{2E_O}{E_S} - 3 \right) - 2A \right] \quad (3.8)$$

$$C = \left[ \left( 2 - \frac{E_O}{E_S} \right) + A \right] \quad (3.9)$$

onde:

$$E_S = \frac{f_{cc}}{\epsilon_{cc}}, \quad E_u = \frac{f_{cu}}{\epsilon_{cu}}, \quad P = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cc}} \quad (3.10)$$

sendo  $\epsilon_{cu}$  e  $f_{cu}$  o valor da máxima deformação de compressão e da tensão correspondente a esta deformação obtidos no ensaio uniaxial.

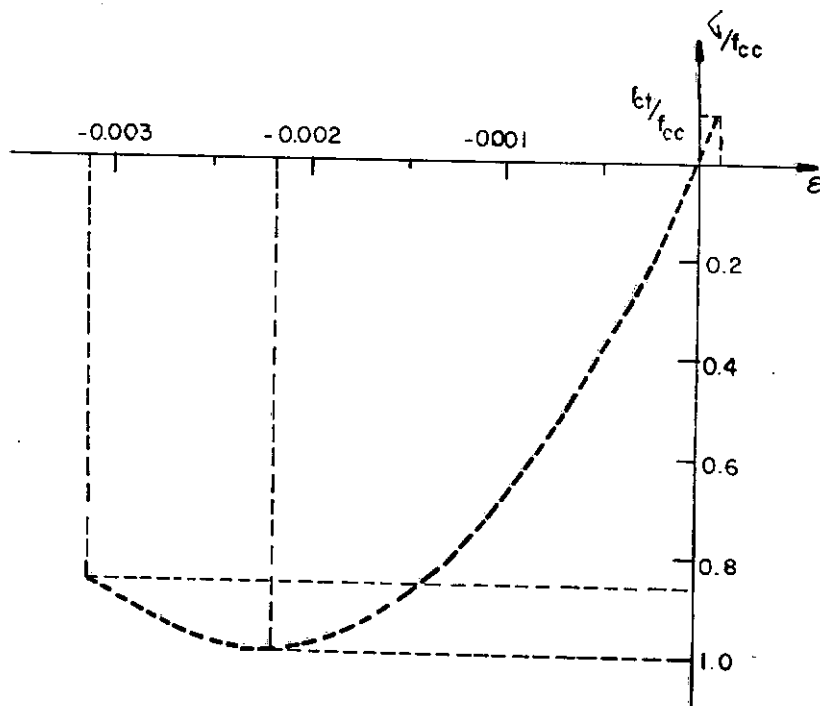


FIGURA 3.1 - RELAÇÃO TENSÃO x DEFORMAÇÃO UNIAXIAL

A relação tensão deformação uniaxial para condições multiaxiais de tensão proposta por Bathe e Ramaswamy<sup>13</sup>, que é descrita a seguir, quando utilizada reproduz deformações bem menores do que as reais para estados de tensão que antecedem o de ruptura, embora na ruptura, a deformação real seja atingida. Considerando-se o fato de que resultados tão próximos da realidade quanto os de Bathe e Ramaswamy<sup>13</sup>, poderiam ser obtidos de forma mais simples do que a sugerida por estes optou-se por adotar dois procedimentos na implementação do modelo.

Conforme a variável "UNIAXIAL" que é dado de entra-

da do programa seja 0 ou 1 se adota a relação tensão - deformação uniaxial para condições multiaxiais proposta por Bathe e Ramaswamy<sup>13</sup>, ou se utiliza diretamente a relação tensão - deformação obtida do ensaio uniaxial.

Calculam-se as tensões principais ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ) e para cada direção principal de tensão determina-se um módulo de elasticidade tangente ( $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ), correspondente a direção principal de tensão, utilizando-se (3.3) e (3.6).

Quando se utiliza (3.6), ou se usam diretamente os resultados do ensaio uniaxial,  $f_{cc}$ ,  $f_{cu}$ ,  $\epsilon_{cc}$ ,  $\epsilon_{cu}$  ou, conforme Bathe e Ramaswamy<sup>13</sup>, estes valores são substituídos por outros que tomem em conta as condições multiaxiais,  $f'_{cc}$ ,  $f'_{cu}$ ,  $\epsilon'_{cc}$ ,  $\epsilon'_{cu}$ .

Se  $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ , utilizando-se, um critério de ruptura para estados de compressão, a cada instante determina-se para  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  tomados constantes, a menor tensão de compressão a ser atingida na direção 3 que ocasionará a ruptura do material. Sendo esta tensão  $f'_{cc}$ , tem-se para  $\gamma_1 = \frac{f'_{cc}}{f_{cc}}$ , que:

$$f'_{cu} = \gamma_1 f_{cu} \quad (3.11)$$

$$\epsilon'_{cu} = \gamma_1 \gamma \epsilon_{cu} \quad (3.12)$$

e

$$\epsilon'_{cc} = \gamma_1 \gamma \epsilon_{cc} \quad (3.13)$$

onde:

$\gamma$  é uma constante, empregada com o objetivo de modificar o módulo de elasticidade secante uniaxial, para considerar condições multiaxiais.

### 3.1.2 - Matriz de Elasticidade

Admitindo-se  $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ , e sendo  $K$  uma constante que fixa o estado de tensão limite para o qual se considera isotropia, se  $t_{\sigma_3} \geq K f'_{cc}$ , o material é considerado isotrópico, com coeficiente de Poisson constante e módulo de elasticidade tangente dado pela seguinte média ponderada:

$$t_E = \frac{t_{E_1} t_{\sigma_1} + t_{E_2} t_{\sigma_2} + t_{E_3} t_{\sigma_3}}{t_{\sigma_1} + t_{\sigma_2} + t_{\sigma_3}} \quad (3.14)$$

Neste caso, a matriz  $\underline{D}$  para sólidos axissimétricos é definida por:

$$\underline{D} = \frac{t_E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1+\nu) & \nu & \nu & 0 \\ & (1+\nu) & \nu & 0 \\ & & (1+\nu) & 0 \\ \text{S I M É T R I C A} & & & \frac{1}{2} (1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Se  $t_{\sigma_3} < K f'_{cc}$ , o material é considerado ortotrópico, sendo as direções de ortotropia definidas pelas direções principais de tensão. Para sólidos axissimétricos, a matriz tensão - deformação correspondente a estas direções é:

$$\underline{D} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) t_{E_1} & \nu t_{E_{12}} & \nu t_{E_{13}} & 0 \\ & (1-\nu) t_{E_2} & \nu t_{E_{23}} & 0 \\ & & (1-\nu) t_{E_3} & 0 \\ \text{S I M É T R I C A} & & & \frac{(1-2\nu)}{2} t_{E_{12}} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

sendo:

$$t_{E_{ij}} = \frac{t_{E_i} t_{\sigma_i} + t_{E_j} t_{\sigma_j}}{t_{\sigma_i} + t_{\sigma_j}} \quad (3.17)$$

para  $i$  e  $j$  variando de 1 a 3 .

Como se usa um sistema local para formação das matrizes dos elementos, é necessário rotacionar a matriz  $\underline{D}$ , definida nas direções principais de tensão, para este sistema. (Figura 3.2)

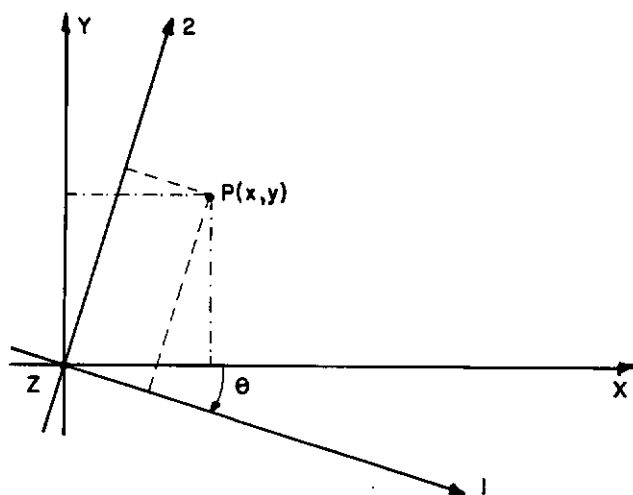


FIGURA 3.2 - SISTEMA DE REFERÊNCIA

Considere-se que se conheça  $t_{\sigma_x}, t_{\sigma_y}, t_{\sigma_z}, t_{\sigma_{xy}}$  e se necessita determinar  $t_{\sigma_1}, t_{\sigma_2}, t_{\sigma_3}, t_{\sigma_{12}}$ . As equações bidimensionais de transformação de tensões têm a forma:

$$\underline{t}_{\sigma^p} = \underline{T}_{\sigma} \underline{t}_{\sigma} \quad (3.18)$$

$$\begin{Bmatrix} t_{\sigma_1} \\ t_{\sigma_2} \\ t_{\sigma_3} \\ t_{\sigma_{12}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sin 2\theta}{2} & \frac{\sin 2\theta}{2} & 0 & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{\sigma_x} \\ t_{\sigma_y} \\ t_{\sigma_z} \\ t_{\sigma_{xy}} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Necessita-se também transformar as deformações. As relações bidimensionais são:

$$\underline{t}_{\varepsilon^p} = \underline{T}_{\varepsilon} \underline{t}_{\varepsilon} \quad (3.20)$$

$$\begin{Bmatrix} t_{\varepsilon_1} \\ t_{\varepsilon_2} \\ t_{\varepsilon_3} \\ t_{\varepsilon_{12}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & \frac{\sin 2\theta}{2} \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & -\frac{\sin 2\theta}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & 0 & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{\varepsilon_x} \\ t_{\varepsilon_y} \\ t_{\varepsilon_z} \\ t_{\varepsilon_{xy}} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

A variação do trabalho de primeira ordem por unidade de volume é invariante e dada por:

$$\underline{t}_{\sigma}^T \delta \underline{\varepsilon} \equiv \underline{t}_{\sigma^p}^T \delta \underline{\varepsilon}^p \quad (3.22)$$

$$\underline{t}_{\sigma}^T \delta \underline{\epsilon} \equiv \underline{t}_{\sigma}^T (\underline{T}_{\sigma}^T \underline{T}_{\epsilon}) \delta \underline{\epsilon} \quad (3.23)$$

Logo

$$\underline{T}_{\sigma}^T \equiv \underline{T}_{\epsilon}^{-1}$$

As leis tensão - deformação nos dois sistemas de referência são:

$$\underline{t}_{\sigma} = \underline{D} \underline{t}_{\epsilon} \quad (3.24)$$

$$\underline{t}_{\sigma}^P = \underline{D}^P \underline{t}_{\epsilon}^P \quad (3.25)$$

onde

$$\underline{D}^P = \underline{T}_{\epsilon}^T \underline{D} \underline{T}_{\epsilon} \quad (3.26)$$

Para o cálculo dos incrementos reais de tensão, no domínio de carregamento, a matriz  $\underline{D}$  é substituída pela matriz  ${}^T\underline{D}$  de:

$$\underline{\sigma} = {}^T\underline{D} \underline{\epsilon} \quad (3.27)$$

onde  ${}^T\underline{D}$  é formada considerando-se o módulo secante incremental  $E_{si}$ , (Figura 3.3), calculado nas direções de ortotropia,

$$E_{si} = E_{s2} - \frac{t_{\epsilon i}}{\epsilon_i} (E_{s1} - E_{s2}) \quad (3.28)$$

para  $i$  variando de 1 a 3, sendo  $E_{si}$  e  $E_{s2}$  obtidos em (3.3) e



(3.4).

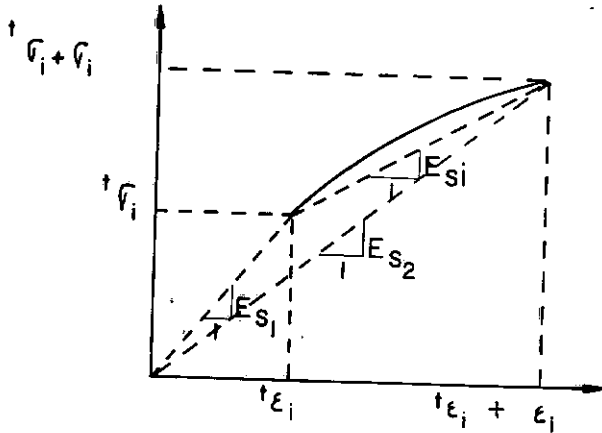


FIGURA 3.3 - CURVA TENSÃO - DEFORMAÇÃO UNIAXIAL

Se  $\tau_D$  for ortotrópica os vetores  $\underline{\sigma}$  e  $\underline{\epsilon}$  devem ser tomados nas direções de ortotropia.

### 3.1.3 - Comportamento na Ruptura

Como a curva tensão-deformação uniaxial adotada não caracteriza os estados que provocam ruptura por compressão, é necessário verificar a cada estado de tensão se esta já foi atingida. Devido à complexidade dos ensaios triaxiais, a discrepância entre os resultados obtidos é muito maior do que no caso biaxial. Numerosos critérios de ruptura por compressão triaxial têm sido sugeridos. A superfície de ruptura foi implementada por pontos situados em planos perpendiculares à direção de menor tensão principal. Supondo-se

$$t_{\sigma_3} \leq t_{\sigma_2} \leq t_{\sigma_1}$$

para

$$\frac{t_{\sigma_1}}{f_{cc}} = K_1$$

devem-se fornecer 3 pontos no plano

$$\frac{t_{\sigma_1}}{f_{cc}} = K_1$$

Estes pontos correspondem a:

$$t_{\sigma_2} = t_{\sigma_1} \quad , \quad t_{\sigma_2} = 0.75 t_{\sigma_3} \quad \text{e} \quad t_{\sigma_2} = t_{\sigma_3}$$

para  $K_1$  variando de 0 a 1.2 . Isto permite grande flexibilidade, na escolha do critério de ruptura a ser utilizado. Na Figura 3.4, é mostrada a superfície de ruptura de Khan e Saugy<sup>10</sup>.

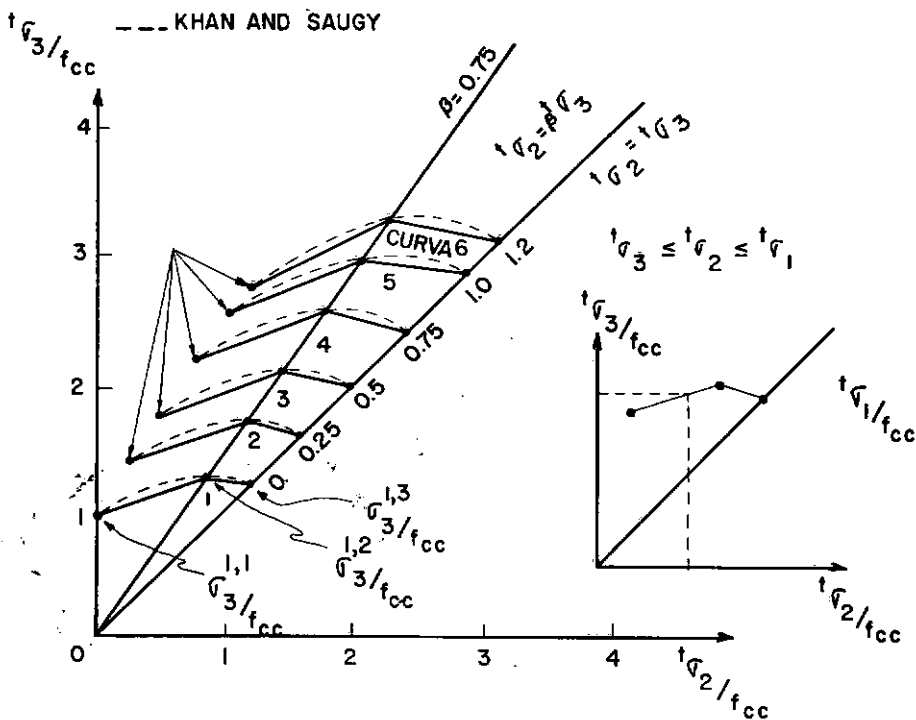


FIGURA 3.4 - SUPERFÍCIE DE RUPTURA A COMPRESSÃO TRIAXIAL

Qualquer estado de tensão sobre ou fora da superfície de ruptura ocasiona esmagamento do material.

No caso de se estar adotando a curva tensão - deformação uniaxial para condições multiaxiais, que não leva em consideração a resistência a compressão multiaxial, deve-se verificar ainda, se na direção de menor compressão, a deformação correspondente à máxima tensão de compressão,  $\epsilon_{cc}$ , obtida no ensaio uniaxial, foi atingida. Quando o procedimento adotado é aquele sugerido por Bathe e Ramaswamy<sup>13</sup>, o estado de tensão limite é sempre atingido antes que a menor deformação de compressão se torne igual a  $\epsilon'_{cc}$ .

Caracterizado o esmagamento, a tensão decrescerá para acréscimos de deformação, fazendo com que o módulo de elasticidade tangente seja negativo. Para montagem da matriz de rigidez emprega-se para  ${}^tE$ , um valor próximo de zero, porém no cálculo dos incrementos reais de tensão, utiliza-se o valor de  $E_{si}$  calculado em (3.4). A matriz tensão - deformação é considerada isotrópica com módulo secante incremental,  ${}^tE_{si}$ , calculado na direção de menor compressão.

Se a menor deformação de compressão se torna igual a máxima deformação de compressão da curva uniaxial utilizada para condições multiaxiais de tensão, os incrementos de tensão são considerados nulos, o que significa que o material não tem mais nenhuma rigidez.

Para caracterização da ruptura nos estados de tensão que envolvam tração, adotou-se a superfície mostrada na Figura 3.5.

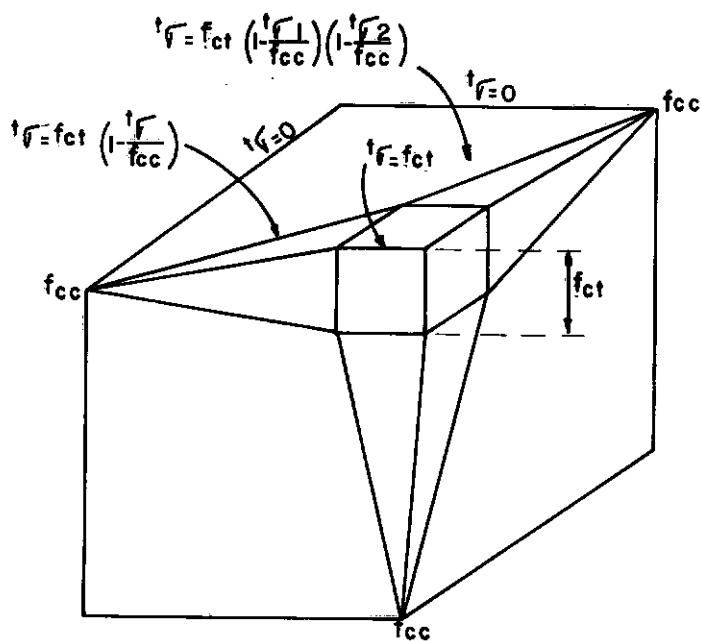


FIGURA 3.5 - SUPERFÍCIE DE RUPTURA A TRAÇÃO

Se a tensão de tração em uma direção principal atingir o valor de resistência a tração obtido na superfície da Figura 3.5, acontece ruptura por separação e o material é considerado incapaz de suportar qualquer tensão de tração nesta direção. Forma-se então um plano de ruptura perpendicular à direção principal em que a ruptura ocorreu. No plano de ruptura assume-se estado plano de tensões e na direção normal ao plano toma-se para rigidez um valor próximo de zero. Quanto a rigidez ao corte, utiliza-se um módulo de elasticidade transversal minorado, tendo levar em consideração a ação do aço e do agregado através da fissura. Os fatores que minoram a rigidez normal e transver-

sal,  $\eta_\eta$  e  $\eta_s$ , são parâmetros de entrada do programa usualmente tomados 0.001 e 0.5..

Se o material, antes do aparecimento da fissura era isotrópico, a matriz  $\underline{D}$  (3.15), toma a forma:

$$\underline{D} = \frac{t_E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} \eta_\eta & \nu\eta_\eta & \nu\eta_\eta & 0 \\ & 1 & \nu & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{SIMÉTRICA} & & & \frac{1}{2} \eta_s (1 - \nu) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Para  $\sigma_1$  maior do que a resistência a tração. Se o material, estiver sendo considerado ortotrópico, a matriz  $\underline{D}$ , (3.16), é expressa por:

$$\underline{D} = \frac{t_E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \eta_\eta t_{E1} & \nu\eta_\eta t_{E12} & \nu\eta_\eta t_{E13} & 0 \\ & t_{E2} & \nu t_{E23} & 0 \\ & & t_{E3} & 0 \\ \text{SIMÉTRICA} & & & \frac{1}{2} \eta_s t_{E12} (1-\nu) \end{bmatrix}$$

para  $t_{\sigma_1}$  maior do que a resistência a tração. Note-se que após a fissuração o material torna-se sempre ortotrópico.

Uma vez formado um plano de ruptura, para carregamentos subsequentes as relações tensão - deformação levarão em consideração o que foi descrito anteriormente, tendo como direções de ortotropia as direções principais no plano de ruptura e a direção perpendicular a este plano. O descarregamento e recarrega

mento do concreto fissurado tem o seguinte tratamento: quando a deformação através da fissura se torna negativa (compressão), e menor do que aquela em que a ruptura ocorreu a fissura é considerada fechada e supõe-se que o material possa resistir a tensões de compressão na direção normal ao plano de ruptura, caso contrário, se considera aberta, sendo o material, ainda, incapaz de resistir a qualquer tensão naquela direção.

### 3.2 - MODELO PARA O AÇO

Para o aço admite-se uma curva tensão - deformação especificada por pontos com a possibilidade de incluir deformações permanentes. (Figura 3.6).

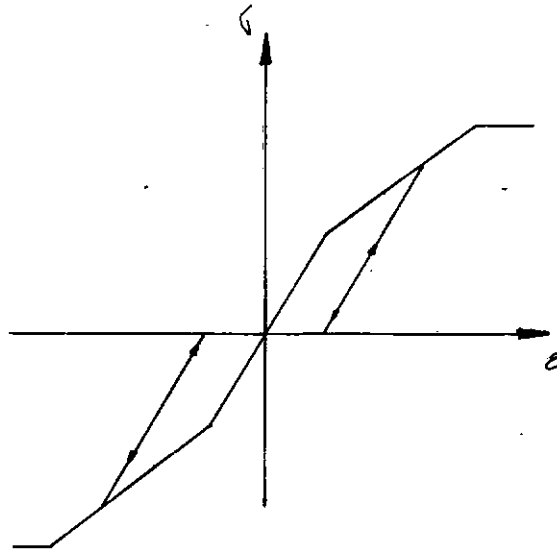


FIGURA 3.6 - DIAGRAMA TENSÃO - DEFORMAÇÃO DO AÇO

## IV - ALGORITMOS UTILIZADOS PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR

4.1 - EQUAÇÕES INCREMENTAIS DE MOVIMENTO

A formulação do Método dos Elementos Finitos para análise não linear compreende a formulação cinemática do problema com o uso de princípios da mecânica do contínuo, a identificação das relações constitutivas e finalmente a discretização das equações resultantes.

Considere-se um corpo genérico sujeito a grandes deslocamentos, grandes deformações e relações constitutivas lineares e não lineares. O movimento do corpo é descrito em coordenadas cartesianas e a coordenada de um ponto é  ${}^0x_i$  no tempo zero,  ${}^tx_i$  no tempo  $t$  e  ${}^{t+\Delta t}x_i$  no tempo  $t+\Delta t$ , com  $i = 1, 2, 3$ .

Tem-se que:

$${}^{t+\Delta t}x_i = {}^0x_i + {}^{t+\Delta t}u_i \quad (4.1)$$

$${}^tx_i = {}^0x_i + {}^tu_i \quad (4.2)$$

onde  ${}^tu_i$  e  ${}^{t+\Delta t}u_i$  são as componentes cartesianas dos deslocamentos do ponto nos tempos  $t$  e  $t+\Delta t$ , respectivamente. O incremento de deslocamento do tempo  $t$  ao tempo  $t+\Delta t$  é definido por  $u_i$ , logo:

$$u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^tu_i \quad (4.3)$$

As equações de equilíbrio são formuladas com base no princípio dos deslocamentos virtuais que pode ser aplicado na análise linear, não linear geométrica e física (Malvern<sup>21</sup>). No

presente trabalho pretende-se enfocar apenas o comportamento não linear físico das estruturas de concreto armado. Faz-se então a hipótese de pequenas deformações.

Considerando-se o equilíbrio do corpo no tempo  $t+\Delta t$ , o princípio dos deslocamentos virtuais leva a:

$$\int_{oV} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}^o dV = {}^{t+\Delta t}R \quad (4.4)$$

onde  ${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}$  são as componentes cartesianas do tensor de tensões e  $\epsilon_{ij}$  as componentes cartesianas do incremento do tensor de deformações infinitesimais, dadas por:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.5)$$

As componentes de deformações são obtidas das interpolações do método dos elementos finitos, e as componentes de tensão são dadas por:

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} = {}^t\sigma_{ij} + D_{ijrs} \epsilon_{rs} \quad (4.6)$$

onde  $D_{ijrs}$  é o tensor constitutivo tangente, no tempo  $t$ .

Substituindo-se (4.6) em (4.4), obtem-se:

$$\int_{oV} D_{ijrs} \epsilon_{rs} \delta \epsilon_{ij}^o dV = {}^{t+\Delta t}R - \int_{oV} {}^t\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}^o dV \quad (4.7)$$

Note-se que a equação (4.7) é a linearização da equação (4.4), logo sua solução não é exata. Se em um único intervalo de tempo ocorrem fortes não linearidades, a equação (4.7)



pode conduzir a uma contínua acumulação de erros.

Deve-se então procurar uma solução mais precisa dentro de cada intervalo de tempo, ou corrigi-la sistematicamente de tempos em tempos, utilizando-se uma técnica iterativa do tipo Newton-Raphson.

Definindo-se:

$$t + \Delta t_{u_i}^{(k)} = t + \Delta t_{u_i}^{(k-1)} + \Delta t_{u_i}^{(k)} \quad (4.8)$$

onde:

$$t + \Delta t_{u_i}^{(0)} = t_{u_i} \quad (4.9)$$

a equação (4.7) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\int_{o_v} D_{ijrs} \epsilon_{rs}^{(K)} \delta \epsilon_{ij}^{(k)} o_v dV = t + \Delta t_R - \int_{o_v} t + \Delta t_{\sigma_{ij}}^{(k-1)} \delta \epsilon_{ij}^{(K)} o_v dV \quad (4.10)$$

A equação (4.10) é discretizada na análise pelo método dos elementos finitos.

## 4.2 - DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS

Na análise não linear as discretizações das equações da mecânica do contínuo utilizando elementos isoparamétricos parecem ser especialmente recomendadas. Neste caso as coordenadas e deslocamentos em cada elemento, são definidas pelas seguintes expressões:

$$x_j = \sum_{i=1}^n N_i x_j^i \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.11)$$

$$u_j = \sum_{i=1}^n N_i u_j^i \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.12)$$

onde  $x_j^i$  é a coordenada do ponto nodal  $i$  correspondente a direção  $j$ ,  $u_j^i$  é o deslocamento do ponto nodal  $i$ , correspondente a direção  $j$ , e  $n$  é o número de nós do elemento.

$N_i$  é a função de interpolação relativa ao ponto nodal  $i$ .

As expressões (4.11) e (4.12) são substituídas em (4.10) para discretizar as relações de equilíbrio, que, em notação matricial, são então expressas por:

$$\underline{t}_K \underline{\Delta u}^{(K)} = \underline{t+\Delta t}_R - \underline{t+\Delta t}_F^{(K-1)} \quad (4.13)$$

onde  $\underline{t}_K$  é a matriz de rigidez não linear no tempo  $t$ ,  $\underline{t+\Delta t}_R$  é o vetor de forças externas aplicadas nos pontos nodais,  $\underline{t+\Delta t}_F^{(K-1)}$  é o vetor de forças nodais equivalentes ao estado de tensões atuais do elemento e  $\underline{\Delta u}^{(K)}$  é o vetor de deslocamentos nodais. Assim:

$$\underline{t+\Delta t}_u^{(K)} = \underline{t+\Delta t}_u^{(K-1)} + \underline{\Delta u}^{(K)} \quad (4.14)$$

As matrizes  $\underline{t}_K$  e  $\underline{t+\Delta t}_F^{(K-1)}$ , necessárias na resolução da equação (4.13), para um elemento, serão dadas por:

$$\underline{t}_K = \int_{\Omega_V} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, dV \quad (4.15)$$

$$\underline{t+\Delta t}_F^{(K-1)} = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{t}_\sigma \, dV \quad (4.16)$$

sendo  $\underline{B}$  a matriz transformação deslocamento-deformação.

Para análise dinâmica os efeitos de massa e amortecimento são introduzidos da forma usual, acrescentando-se a equação (4.13) as expressões que contêm os produtos de matriz de massa e vetor de acelerações, e matriz de amortecimento e vetor de velocidades. Tem-se então:

$$\underline{M} \dot{\underline{u}}^{t+\Delta t}(K) + \underline{C} \underline{\dot{u}}^{t+\Delta t}(K) + \underline{t}_K \Delta \underline{u}(K) = \underline{t}^{t+\Delta t}_R - \underline{t}^{t+\Delta t}_F(K-1) \quad (4.17)$$

#### 4.3 - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO ESTÁTICO E DINÂMICO

O método de Newton-Raphson tem se mostrado efetivo para a solução de problemas não lineares. Entretanto, a atualização da matriz de rigidez em todas as iterações, muitas vezes tem grande influência no custo da análise.

O processo conhecido por método de Newton-Raphson modificado consiste na utilização do método de Newton-Raphson mantendo a matriz de rigidez inalterada durante um mesmo incremento de carga. Este foi o procedimento adotado no presente trabalho, uma vez que em problemas envolvendo não linearidade física apenas, técnicas fundamentalmente incrementais são mais recomendadas.

As equações de equilíbrio consideradas na análise estática, mantendo a rigidez constante, durante o incremento de carga são:

$$\underline{t}_K \Delta \underline{u}(K) = \underline{t}^{t+\Delta t}_R - \underline{t}^{t+\Delta t}_F(K-1) \quad K = 1, 2, 3, \dots \quad (4.18)$$

A equação (4.18) corresponde a iteração do método de Newton-Raphson modificado para o zero da função  $f$ , onde:

$$\underline{f} = \underline{t} + \Delta t \underline{R} - \underline{t} + \Delta t \underline{F}^{(k)} \quad (4.19)$$

A iteração  $K$ , em resumo, exigirá a avaliação do vetor  $\underline{t} + \Delta t \underline{F}^{(K-1)}$  e a solução de um sistema de equações algébricas lineares. Estas equações podem ser resolvidas por um esquema iterativo ou um método direto. Para aplicações gerais são consideradas mais efetivas as implementações do método básico de eliminação de Gauss.

Na análise dinâmica, o sistema de equações diferenciais de segunda ordem pode ser resolvido mediante a aplicação de métodos de integração especialmente derivados para as aplicações do método dos elementos finitos. Estes métodos se encontram detalhados em Bathe<sup>22</sup>. No presente trabalho utilizaram-se os métodos de integração que se encontram implementado na linguagem LORANE-NL<sup>23</sup>.

#### 4.4 - COMPORTAMENTO CRÍTICO E PÓS-CRÍTICO

Na análise de problemas práticos espera-se encontrar dificuldades no processo iterativo de Newton-Raphson Modificado quando ocorrer perda súbita de rigidez durante um incremento de carga.

Na literatura diversos algoritmos para acelerar o processo iterativo são sugeridos (Bathe e Cimento<sup>24</sup>). Entretanto próximo à carga crítica algoritmos de controle de deslocamento são mais recomendáveis (Haisler e Stricklin<sup>25</sup>).

No presente trabalho optou-se pelo algoritmo de controle de deslocamentos sugeridos em Haisler e Stricklin<sup>25</sup>. Este algoritmo, é resumidamente descrito a seguir.

Considere-se o sistema de equações incrementais :

$$\underline{K} \Delta \underline{u} = \underline{R} - \underline{F} \quad (4.20)$$

Se a relação entre as cargas da estrutura é fixada, e apenas seus valores desconhecidos, pode-se utilizar:

$$\underline{R} = \lambda \bar{\underline{R}} \quad (4.21)$$

Tem-se então:

$$\underline{K} \Delta \underline{u} = \lambda \bar{\underline{R}} - \underline{F} \quad (4.22)$$

Quando a matriz  $\underline{K}$  se torna quase-singular, a equação (4.22) não pode mais ser resolvida. Em tais casos, esta dificuldade pode ser contornada incrementando-se uma das componentes de deslocamento. Supondo que o deslocamento  $\Delta u_i$  seja especificado, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_i \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

onde  $\Delta u_1$  é o vetor de deslocamentos não especificados,  $\underline{K}_{11}$  é a matriz  $\underline{K}$  com a linha e a coluna  $i$  removidas,  $\underline{K}_{21}$  é a linha  $i$  da matriz  $\underline{K}$  retirando-se a coluna  $i$ ,  $\underline{K}_{12}$  é a coluna

$i$  da matriz  $\underline{K}$  sem a linha  $i$ ,  $K_{22}$  é o elemento  $K_{ii}$  da matriz  $\underline{K}$ ,  $\bar{R}_1$  é o vetor da relação das cargas na estrutura com a linha  $i$  removida,  $\bar{R}_2$  é o elemento  $\bar{R}_i$  do vetor  $\underline{R}$ ,  $\bar{F}_1$  é o vetor de cargas equivalentes em que se eliminou a linha  $i$  e  $F_2$  é a linha  $i$  do vetor  $\underline{F}$ .

Da equação (4.23) vem que:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & - \bar{R}_1 \\ \underline{K}_{21} & - \bar{R}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} - \Delta u_i \begin{Bmatrix} \underline{K}_{12} \\ K_{22} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

A equação (4.24) é um sistema de  $n$  equações com  $n$  incógnitas, incluindo  $\lambda$ . A matriz dos coeficientes não é simétrica, consequentemente a resolução do sistema não é computacionalmente eficiente. Para resolver o sistema, expande-se (4.24), obtendo-se:

$$\underline{K}_{11} \Delta u_1 = \lambda \bar{R}_1 - \bar{F}_1 - \Delta u_i \underline{K}_{12} \quad (4.25)$$

$$\underline{K}_{21} \Delta u_1 - \lambda \bar{R}_2 = - F_2 - \Delta u_i K_{22} \quad (4.26)$$

De (4.25) sabe-se que  $\Delta u_1$  pode ser expresso por:

$$\Delta u_1 = \underline{A} + \underline{B} \lambda \quad (4.27)$$

onde  $\underline{A}$  e  $\underline{B}$  são as soluções das equações:

$$\underline{K}_{11} \underline{A} = - \bar{F}_1 - \Delta u_i \underline{K}_{12} \quad (4.28)$$

$$\underline{K}_{11} \underline{B} = \underline{\bar{R}}_1 \quad (4.29)$$

Substituindo-se (4.27) em (4.26) tem-se que:

$$\lambda = \frac{-\underline{F}_2 - \underline{K}_{21} \underline{A} - \underline{K}_{22} \Delta \underline{u}_1}{\underline{K}_{21} \underline{B} - \underline{\bar{R}}_2} \quad (4.30)$$

Conhecido o valor de  $\lambda$ , em (4.27), é determinado o vetor  $\Delta \underline{u}_1$ .

Considere-se agora, a equação de recorrência para o esquema de iteração Newton-Raphson,

$$\underline{t}_K \cdot \Delta \underline{u}^{(K)} = \underline{t} + \Delta \underline{t}_R - \underline{t} + \Delta \underline{t}_F^{(K-1)} \quad (4.31)$$

O valor original dos deslocamentos no início do processo iterativo é calculado usando um incremento de deslocamentos fixado. O elemento de  $\Delta \underline{u}^{(K+1)}$  correspondente a direção na qual o incremento de deslocamento foi especificado permanece nulo durante as iterações, o que significa que a cada iteração o sistema de equações a ser resolvido será do tipo:

$$\begin{vmatrix} \underline{K}_{11} & - \underline{\bar{R}}_1 \\ \underline{K}_{21} & - \underline{R}_2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{u}_1 \\ \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \underline{F}_1 \\ \underline{F}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

Para resolução deste sistema, o procedimento adotado é mesmo exposto, para a resolução de (4.24).

## V - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

### 5.1 - GENERALIDADES

O modelo hipoelástico para análise de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos, descrito no Capítulo III, foi implementado no sistema computacional LORANE-NL<sup>23</sup>. Este sistema foi desenvolvido em linguagem algol no computador Burroughs modelo B-6700.

Para discretizar o concreto são utilizados elementos finitos isoparamétricos, e para discretizar o aço, elementos escalares não lineares. Na forma em que o modelo foi implementado, pode ser utilizado para a análise de sólidos axissimétricos e estruturas sujeitas a estado plano de tensão e deformação.

Os elementos isoparamétricos têm número de pontos nodais variáveis de 4 a 8 e a regra de integração de Gauss pode adotar 2, 3 ou 4 pontos de integração em cada direção.

Considera-se que existe aderência perfeita entre aço e concreto. Isto implica em compatibilidade de deslocamentos entre os elementos que representam os dois materiais.

Para descrever o comportamento da estrutura após a carga última, pode-se usar o algoritmo de controle de deslocamentos descritos na seção 4.4.

Considera-se na análise apenas a não linearidade física. A formulação não linear é do tipo incremental verificando-se o equilíbrio em cada intervalo de tempo pelo Método de Newton-Raphson Modificado.

O número de iterações em cada incremento é controlado pela tolerância obtida com o uso de normas euclidianas por:



$$\left| \frac{\| \underline{u}^{(n-1)} \| - \| \underline{u}^{(n)} \|}{\| \underline{u}^{(n)} \|} \right| \leq \text{tolerância}$$

e pelo número máximo de iterações fixado.

## 5.2 - PROCESSO DE ANÁLISE

Considerando que o procedimento adotado para resolver o problema não linear, foi o Método de Newton-Raphson Modificado, a cada iteração é necessário determinar o vetor de forças nodais equivalentes,  ${}^{t+\Delta t}\underline{F}(t)$ , e no início de cada incremento uma matriz de rigidez tangente  ${}^t\underline{K}$  deve ser avaliada.

A cada iteração, deve ser determinado por ponto de integração um vetor das tensões atuais,  ${}^{t+\Delta t}\underline{\sigma}(K)$ , no sistema considerado, principal ou de ruptura. Para determinação de  ${}^{t+\Delta t}\underline{F}(K)$ , todos os vetores  ${}^{t+\Delta t}\underline{\sigma}(K)$  devem ser rotacionados para o sistema local do elemento. Este procedimento é mostrado no diagrama da Figura 5.1.

Para montagem da matriz de rigidez tangente  ${}^t\underline{K}$ , deve ser calculada a matriz tensão deformação correspondente ao tempo  $t$ ,  $\underline{D}$ , em cada ponto de integração. No caso de ortotropia, seja esta devida à não linearidade da lei tensão - deformação uniaxial, ou à fissura do material, a matriz  $\underline{D}$ , calculada no sistema principal ou de ruptura, deve ser rotacionada para o sistema local do elemento. O procedimento seguido para a montagem da matriz  $\underline{D}$  é mostrado na Figura 5.2.

CÁLCULO DOS INCREMENTOS DE DESLOCAMENTO

$$\underline{t}_K \underline{\Delta u}^{(K)} = \underline{t} + \Delta \underline{t}_R - \underline{t} + \Delta \underline{t}_F^{(K-1)}$$

CÁLCULO DOS INCREMENTOS DE DEFORMAÇÃO

$$\underline{t} + \Delta \underline{t}_u^{(K)} = \underline{t} + \Delta \underline{t}_u^{(K-1)} - \underline{\Delta u}^{(t)}$$

$$\underline{\epsilon}^{(K)} = \underline{B}(\underline{t} + \Delta \underline{t}_u^{(K)} - \underline{t}_u)$$

NÃO ROMPEU

SÓ ROMPEU POR TRAÇÃO

ROMPEU POR COMPRESSÃO

CÁLCULO DE  $\underline{t}_{\epsilon}$  e  $\underline{t}_{\sigma}$  NO SISTEMA  
DE COORDENADAS DE RUPTURA

CÁLCULO DAS DIREÇÕES PRINCIPAIS  
DE TENSÃO EM  $\underline{t}$ . CÁLCULO DE  
 $\underline{t}_{\epsilon}$  e  $\underline{t}_{\sigma}$  NESTE SISTEMA

CÁLCULO DE  $\sigma^{(K)}$  CONSIDERANDO  
SE  $\underline{t} + \Delta \underline{t}_F = F_{MAX}$

CÁLCULO DE  $\sigma^{(K)}$ , CONSIDERANDO  
SE  $\underline{t} + \Delta \underline{t}_F = F_{MAX}$ , E O ESTADO  
DE FISSURAÇÃO

SE  $\underline{t} + \Delta \underline{t}_{\epsilon_3}^{(K)} \leq \epsilon'_{cu}$ ,  $\underline{t} + \Delta \underline{t}_{\sigma}^{(K)}$  É  
TOMADO NULO, CASO CONTRÁRIO,  
É CALCULADO

COM  $\underline{t} + \Delta \underline{t}_{\sigma}^{(K)}$ , CÁLCULO DAS  
DIREÇÕES PRINCIPAIS DE TENSÃO E  
VERIFICAÇÃO DA RUPTURA POR  
TRAÇÃO OU COMPRESSÃO

COM  $\underline{t} + \Delta \underline{t}_{\sigma}^{(K)}$  VERIFICAÇÃO DA  
DESATIVAÇÃO, ATIVAÇÃO OU  
ADIÇÃO DE FISSURAS, E DE  
RUPTURA POR COMPRESSÃO

FIGURA 5.1

NÃO ROMPEU POR COMPRESSÃO

ROMPEU POR COMPRESSÃO

↓  
CÁLCULO DE  $t+\Delta t F$ ;  
SE  $t F = F_{MAX}$ , E HOUVE RUPTURA  
NO PASSO ANTERIOR ENTÃO  
 $F_{MAX} = t+\Delta t F$

↓  
USO DE  $t_E = 0$ , NA MONTAGEM DA  
MATRIZ TENSÃO × DEFORMAÇÃO

↓  
NÃO ROMPEU

↓  
ROMPEU POR TRAÇÃO

↓  
SE  $t+\Delta t F \geq F_{MAX}$ , ENTÃO  
 $F_{MAX} = t+\Delta t F$

↓  
SE  $t+\Delta t F \geq F_{MAX}$ , ENTÃO  
 $F_{MAX} = t+\Delta t F$

↓  
MONTAGEM DE D, A SER USADA  
NA MATRIZ DE RIGIDEZ DO TEMPO  
 $t + \Delta t$ , CONSIDERANDO  
 $t+\Delta t F = F_{MAX}$

↓  
MONTAGEM DE D, A SER USADA NA  
MATRIZ DE RIGIDEZ DO TEMPO  
 $t + \Delta t$ , CONSIDERANDO SE  
 $t+\Delta t F = F_{MAX}$ , E O ESTADO DE FISSURAÇÃO

FIGURA 5.2

### 5.3 - SUBPROGRAMAS DESENVOLVIDOS

Os subprogramas desenvolvidos para serem acoplados ao sistema LORANE-NL<sup>23</sup>, são apresentados e descritos a seguir.

MATRIZBPLANA	- Calcula a matriz $\underline{B}$ em um ponto de integração
ROTAÇÃO	- Rotaciona os vetores $\underline{\sigma}$ e $\underline{\epsilon}$ do sistema local para o principal e vice-versa
ROTAÇÃOMATRIZ	- Rotaciona a matriz de elasticidade tangente do sistema principal para o local
TENSÃO	- Verifica a ruptura para estados de compressão
ELASTICIDADENL	- Calcula o módulo de elasticidade uniaxial tangente e a tensão uniaxial, correspondentes a uma determinada direção em um ponto de integração
MONTARC	- Calcula a matriz de elasticidade nas direções principais de tensão a partir dos módulos de elasticidade tangente ou secante incremental correspondentes as direções principais. Modifica a matriz de elasticidade de acordo com as condições de fissuração.
MATRIZD.	- Calcula a função de carregamento e verifica se o material está sendo carregado ou não no início de cada incremento. Chama ELASTICIDADENL, MONTARC e ROTAÇÃO MATRIZ.
TENSAOEDEF	- Calcula as tensões atuais em um ponto de integração. Calcula as direções principais de tensão e verifica a ruptura por tração a cada iteração

Chama ROTAÇÃO, ELASTICIDADENL, MATRIZBPLANA  
TENSÃO e MONTARC

BICONCRETO

- Calcula a contribuição de um ponto de integração no vetor de forças nodais equivalentes e na matriz de rigidez tangente da estrutura.

Chama ROTAÇÃO, TENSAOEDEF e MATRIZD

Na Figura 5.3 é mostrada a estrutura geral do programa

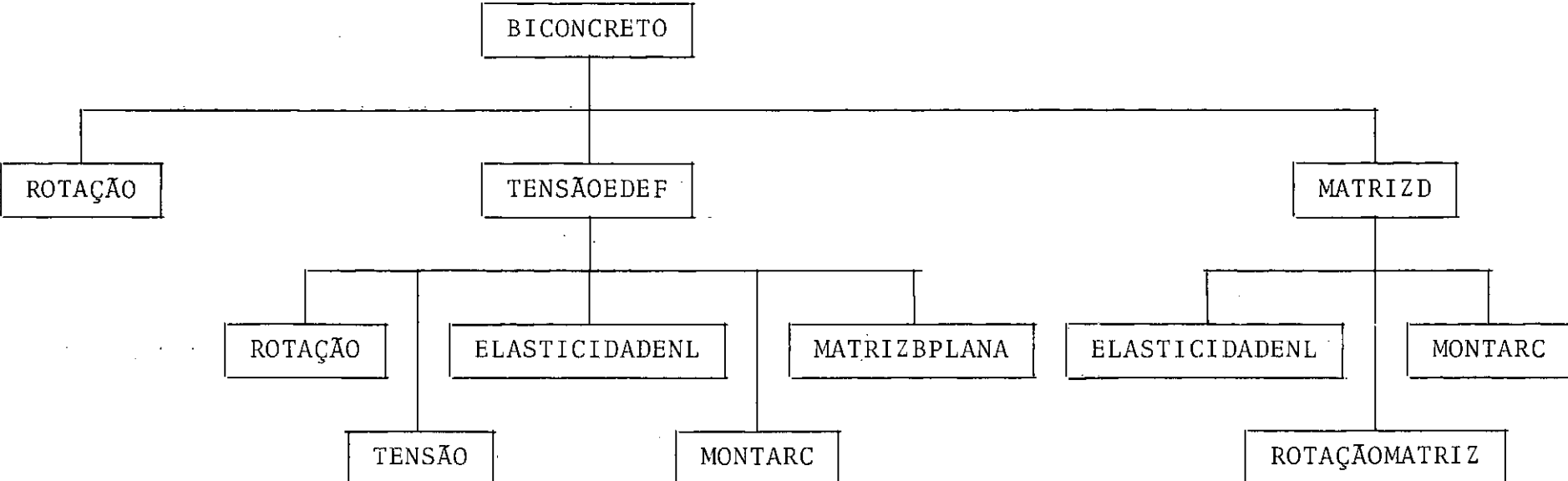


FIGURA 5.3

#### 5.4 - ENTRADA DE DADOS DO MODELO

A seguir serão enumerados os dados que devem ser fornecidos, além dos usuais, no sistema LORANE NL<sup>23</sup>, para o cálculo das estruturas de concreto armado.

- a)  $E_o$  ,  $f_{cc}$  ,  $f_{cu}$  ,  $f_{ct}$  ,  $\epsilon_{cc}$  ;  $\epsilon_{cu}$  , obtidos no ensaio uniaxial e definidos na seção 3.1.1 .
- b)  $\nu$  , coeficiente de Poisson
- c) os seis valores de  $\frac{t_{\sigma 1}^i}{f_{cc}}$  e os dezoito valores de  $\frac{\sigma_3^{i,j}}{f_{cc}}$  , para  $i$  variando de 1 a 6 e  $j$  variando de 1 a 3 , que definem a superfície de ruptura a compressão triaxial, conforme se encontra descrito na seção 3.1.3 .
- d)  $\gamma$  , constante utilizada para modificar a razão de proporcionalidade entre  $\epsilon'_{cc}$  e  $\epsilon_{cc}$  , definida na seção 3.1.1 .
- e)  $K$  , parâmetro utilizado para definir quando se usa a matriz de elasticidade isotrópica ou ortotrópica, conforme está definido na seção 3.1.2 .
- f)  $\alpha$  , constante utilizada para multiplicar a componente hidrostática das tensões, na função de carregamento, definida na seção 3.1 .
- g)  $\eta_n$  e  $\eta_s$  , fatores utilizados para reduzir a rigidez normal e a transversal, após ocorrer ruptura por tração, conforme descrito na seção 3.1.3 .

- h) UNIAXIAL, parâmetro utilizado para determinar quando se adota a relação tensão - deformação uniaxial proposta por Bathe e Ramaswamy<sup>13</sup> (uniaxial = 0), e quando se utiliza o procedimento proposto neste trabalho (uniaxial = 1), conforme descrito na seção 3.1.1 .
  
- i) EPTCON, EPDCON, AXICON , são utilizados para determinar o tipo de elemento a ser utilizado na análise.



## VI - ANÁLISE DE RESULTADOS

Os 2 primeiros problemas analisados, visam elucidar as características básicas do modelo. Nos quatro exemplos que se seguem, o objetivo foi comparar, para casos reais, os resultados que o modelo fornece, com os obtidos por outros pesquisadores. Devido ao fato de que foram feitas muitas simplificações para representar o comportamento das estruturas de concreto armado, e como os modelos utilizados na literatura envolvem uma grande quantidade de aproximações para os diversos aspectos envolvidos na análise, é de extrema importância a análise e comparação de resultados, de casos específicos.

### 6.1 - EXEMPLO 1

Analisa-se o comportamento de um elemento plano, carregado uniaxialmente.

Foi utilizado o elemento isoparamétrico com 8 pontos nodais e ordem de integração  $4 \times 4$ .

Os parâmetros adotados para definir os materiais, foram os seguintes:

#### CARACTERÍSTICAS DO CONCRETO

$E_o$	=	4600.	Ksi	$f_{cu}$	=	- 3.84	Ksi
$f_{cc}$	=	- 4.45	Ksi	$\nu$	=	0.	
$f_{ct}$	=	0.45	Ksi	$\epsilon_{cu}$	=	- 0.00313	in/in
$\epsilon_{cc}$	=	- 0.00218	in/in	$\eta_s$	=	0.5	
$\eta_\eta$	=	0.00001		$\alpha$	=	- 1.	
$K$	=	0.					

Na Figura 6.1 apresenta-se o diagrama tensão-deformação obtido.

O controle de deslocamentos foi utilizado com a finalidade de descrever o braço descendente da curva, pois no caso de se controlar tensões, nesta fase, haveria uma interpretação de descarregamento.

No ponto B ocorreu ruptura por tração, sendo a fissura considerada fechada, no ponto E. Utilizou-se inicialmente uma técnica incremental, e pode-se notar, que neste caso, a resposta a partir do ponto F, se afasta da solução real. Este inconveniente pode ser evitado, utilizando iterações para garantir o equilíbrio em cada incremento de deslocamento. Porém, deve-se notar que mesmo procedendo-se iterações de equilíbrio, a resposta depende fundamentalmente do incremento utilizado. Isto se deve ao fato da função de carregamento ser alterada a cada incremento.

## 6.2 - EXEMPLO 2

Pretende-se comparar os resultados fornecidos pelo modelo implementado com aqueles obtidos experimentalmente por Kupfer et Al<sup>ii</sup><sup>4</sup>. Para isto, analisa-se o comportamento de um elemento plano submetido a compressão biaxial. O carregamento é proporcional e a razão entre as tensões nas duas direções principais,  $t_{\sigma_1}/t_{\sigma_2}$ , é 1/0.52.

Utilizou-se o elemento isoparamétrico com 8 pontos nodais e ordem de integração 4 x 4.

Na Figura 6.2 plotou-se o diagrama tensão-deformação, onde estão representados os resultados obtidos por Kupfer et



hora o aspecto da resposta.

Estão a seguir, os parâmetros que definem o material.

### CARACTERÍSTICAS DO CONCRETO

$$\begin{array}{ll}
 E_o = 4600. & \text{Ksi} \\
 f_{cc} = -4.45 & \text{Ksi} \\
 f_{ct} = 0.45 & \text{Ksi} \\
 \epsilon_{cc} = -0.00218 & \text{in/in} \\
 K = 0.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 f_{cu} = -3.84 & \text{Ksi} \\
 \nu = 0.2 \\
 \epsilon_{cu} = -0.00313 & \text{in/in} \\
 \alpha = -1.
 \end{array}$$

Para a verificação do esmagamento devido à solici-  
 tação de compressão biaxial utilizaram-se os resultados de Kupfer  
 et Alii<sup>4</sup>. Neste caso, a superfície de ruptura é especificada pe-  
 los seguintes valores:

$$\begin{array}{lll}
 t_{\sigma_1^1/f_{cc}} = 0. & t_{\sigma_1^2/f_{cc}} = 0.25 & t_{\sigma_1^3/f_{cc}} = 0.5 \\
 t_{\sigma_1^4/f_{cc}} = 0.75 & t_{\sigma_1^5/f_{cc}} = 1. & t_{\sigma_1^6/f_{cc}} = 1.2 \\
 t_{\sigma_3^{1,1}/f_{cc}} = 1. & t_{\sigma_3^{1,2}/f_{cc}} = 1.2204 & t_{\sigma_3^{1,3}/f_{cc}} = 1.1625
 \end{array}$$

Nesta análise empregou-se controle de deslocamen-  
 to, e garantiu-se o equilíbrio a cada incremento de deslocamento.

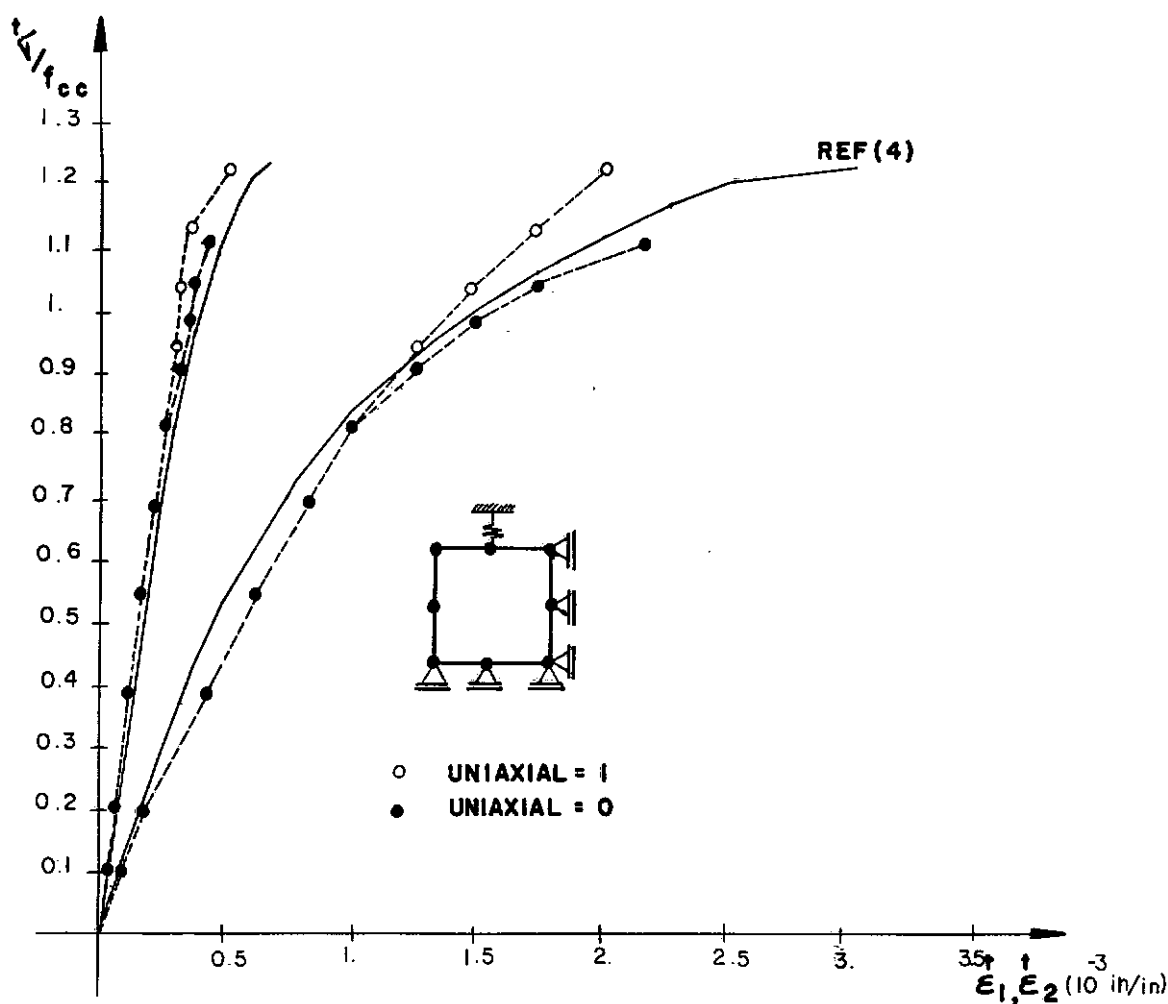


FIGURA 6.2 - DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO

## 6.3 - EXEMPLO 3

A viga da Figura 6.3 foi analisada analiticamente por Krah1 et Alii<sup>42</sup> que obteve o diagrama que representa a progressiva penetração das fissuras na alma da viga, não apresentam porém no citado trabalho nenhum diagrama referente à flecha.

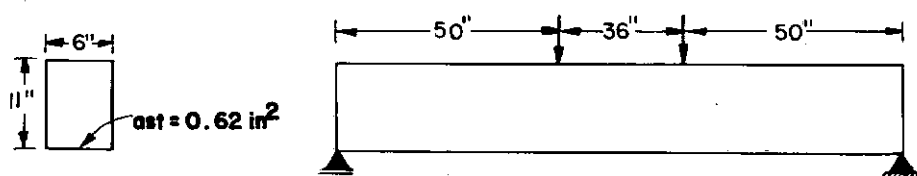


FIGURA 6.3 - VIGA ANALISADA

A mesma viga foi estudada Suidan and Schnobrich<sup>3</sup>, mediante uma análise computacional na qual foram utilizados elementos isoparamétricos tridimensionais e modelo elastoplástico.

Os materiais são definidos pelos seguintes parâmetros:

#### CARACTERÍSTICAS DO CONCRETO

$$\begin{aligned} E_o &= 6100 \text{ Ksi} & f_{cu} &= - 3.225 \text{ Ksi} \\ f_{cc} &= - 3.74 \text{ Ksi} & \nu &= 0.2 \\ f_{ct} &= 0.458 \text{ Ksi} & \epsilon_{cu} &= - 0.003 \text{ in/in} \\ \epsilon_{cc} &= - 0.002 \text{ in/in} \end{aligned}$$

#### CARACTERÍSTICAS DO AÇO

$$\begin{aligned} E &= 3000 \text{ Ksi} & f_y &= 44 \text{ Ksi} \\ E_T &= 300 \text{ Ksi} \\ \gamma &= 1. & k &= 1. & \eta_\eta &= 0.0001 & \eta_s &= 0.5 \\ \alpha &= - 1 & \text{UNIAXIAL} &= 0 \end{aligned}$$

A curva de ruptura à compressão fornecida é aquela sugerida por Kupfer et Alii<sup>4</sup>.

Duas formas de discretização foram adotadas. Na primeira utilizam-se elementos isoparamétricos com 4 pontos nodais (Figura 6.4.a); na segunda, com 6 pontos nodais (Figura 6.4.b).

O aço das armaduras foi representado (Figura 6.5), pela introdução de elementos escalares não lineares ligando nós

do elemento isoparamétrico.

A ordem de integração nesta análise é  $2 \times 2$ .

A carga foi aplicada incrementalmente, procedendo-se iterações para garantir o equilíbrio em cada intervalo.

A tolerância exigida foi 0.001, limitando-se o número de iterações em 20, por incremento.

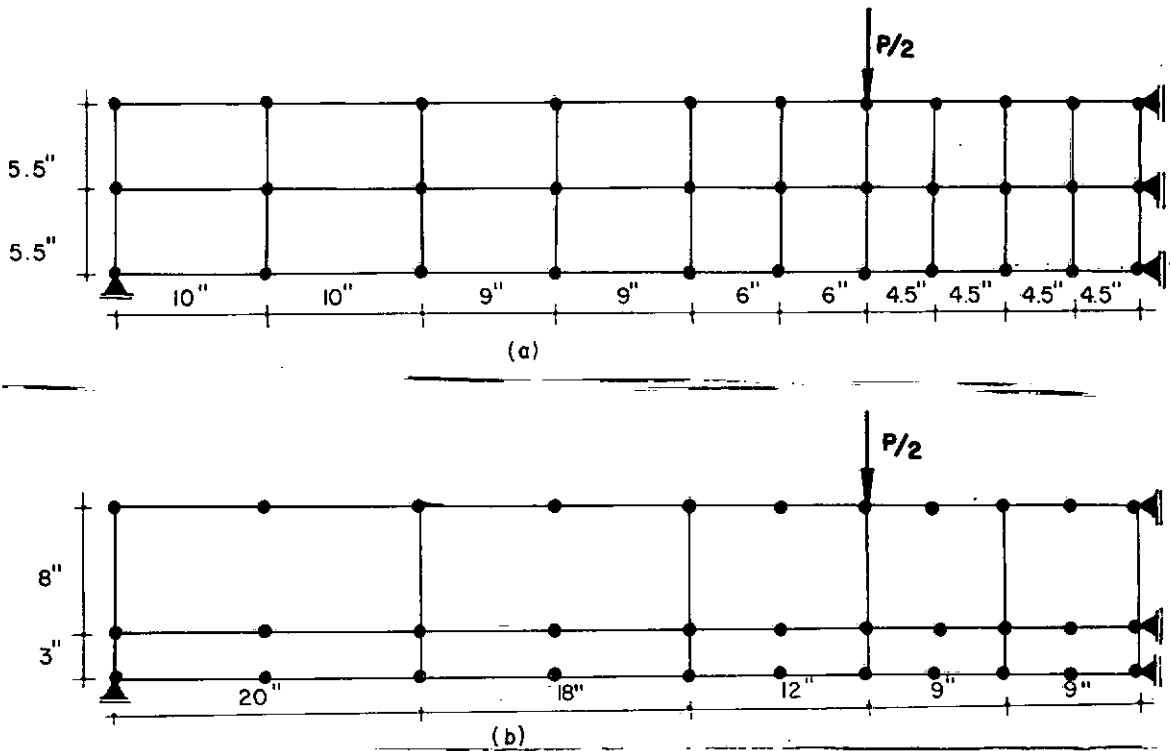


FIGURA 6.4.a - DISCRETIZAÇÃO A

6.4.b - DISCRETIZAÇÃO B

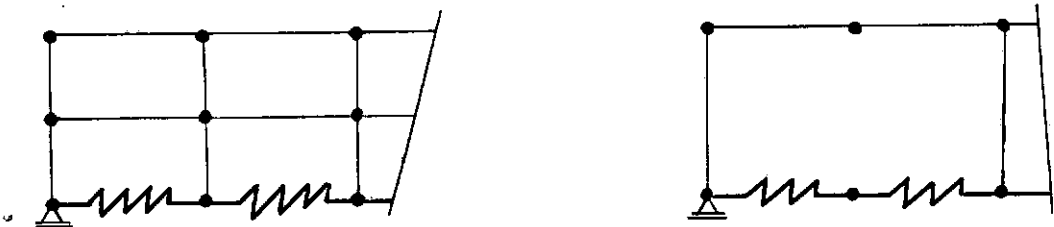


FIGURA 6.5 - COLOCAÇÃO DOS ELEMENTOS ESCALARES

Na Figura 6.6 apresentam-se os diagramas carga-flecha, obtidos através das duas formas de discretização adotadas. Estes resultados são comparados com os obtidos por Suidan and Schnobrich<sup>3</sup>. Deve-se notar que a carga para a qual a fissuração se inicia, conforme os resultados de Suidan and Schnobrich<sup>3</sup> é confirmada pelo modelo implementado.

No primeiro intervalo de carga, seriam necessárias mais de 20 iterações para que se estabelecesse equilíbrio. Notou-se porém, que o equilíbrio é atingido após 8 iterações se a convergência adotada for 0.01.

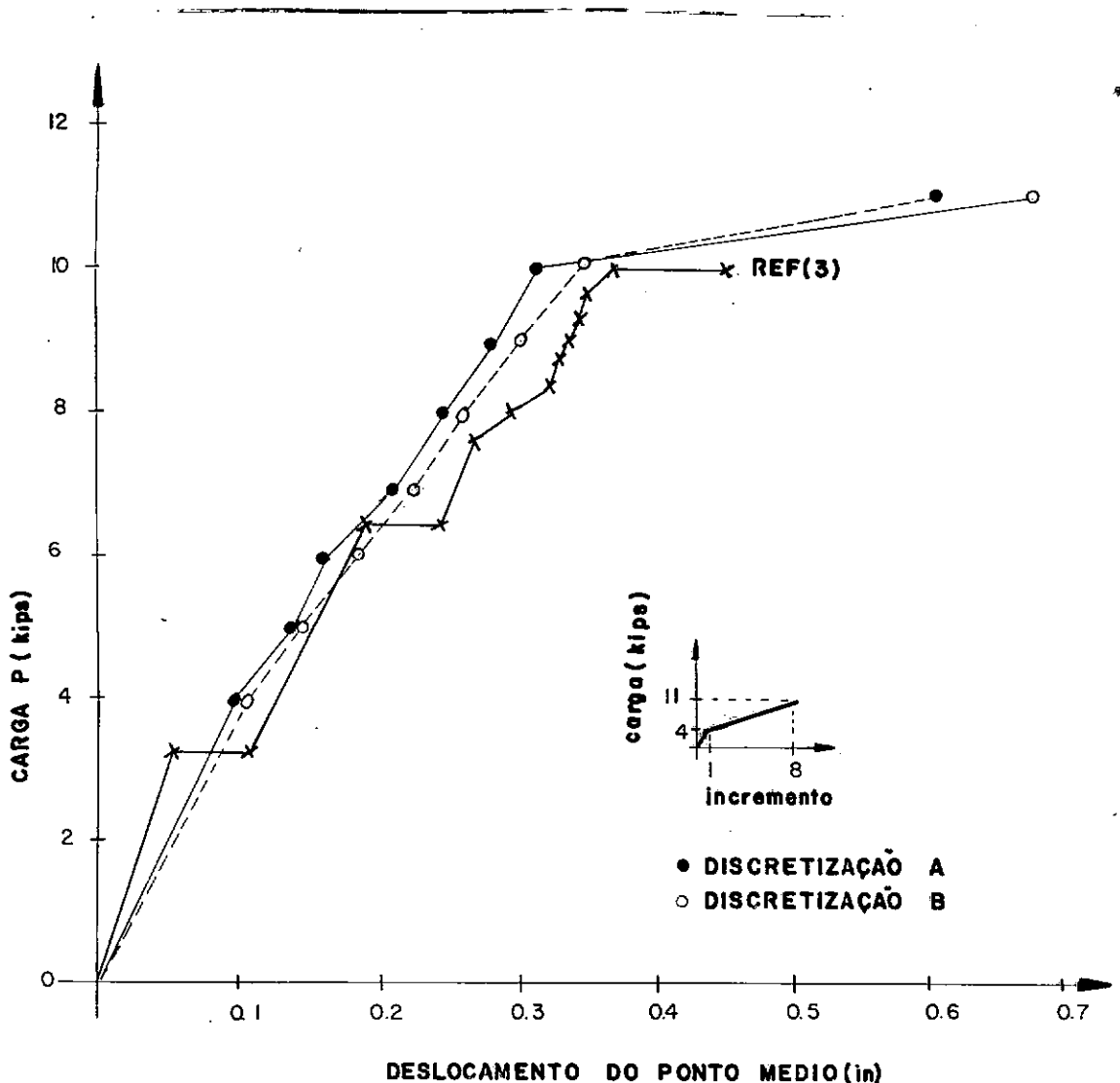


FIGURA 6.6 - DIAGRAMA CARGA-FLECHA



A ruptura se dá por flexão, devido ao escoamento da armadura.

A carga de ruptura obtida pelo modelo, é a mesma apresentada por Suidan e Schnobrich<sup>3</sup>.

Na Figura 6.7 apresenta-se o diagrama que fornece, a cada etapa do carregamento, a penetração da fissura na alma da viga.

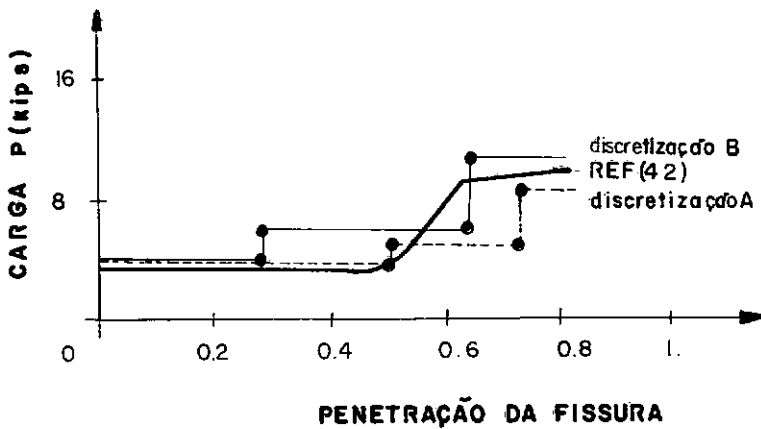


FIGURA 6.7 - DIAGRAMA CARGA-PENETRAÇÃO DA FISSURA

#### 6.4 - EXEMPLO 4

A mesma viga do exemplo 3, foi analisada dinamicamente, para um carregamento concentrado aplicado instantaneamente.

Para representação dos materiais, foram utilizados os mesmos parâmetros do exemplo anterior.

A estrutura foi discretizada da forma mostrada na figura 6.4.b.

Para integração no tempo utilizou-se o método de Newmark e matriz de massa consistente. O intervalo de integração adotado corresponde aproximadamente a  $1/20$  do período fundamental.

Na Figura 6.8, apresenta-se o diagrama da resposta não linear obtida, para o deslocamento do meio do vão.

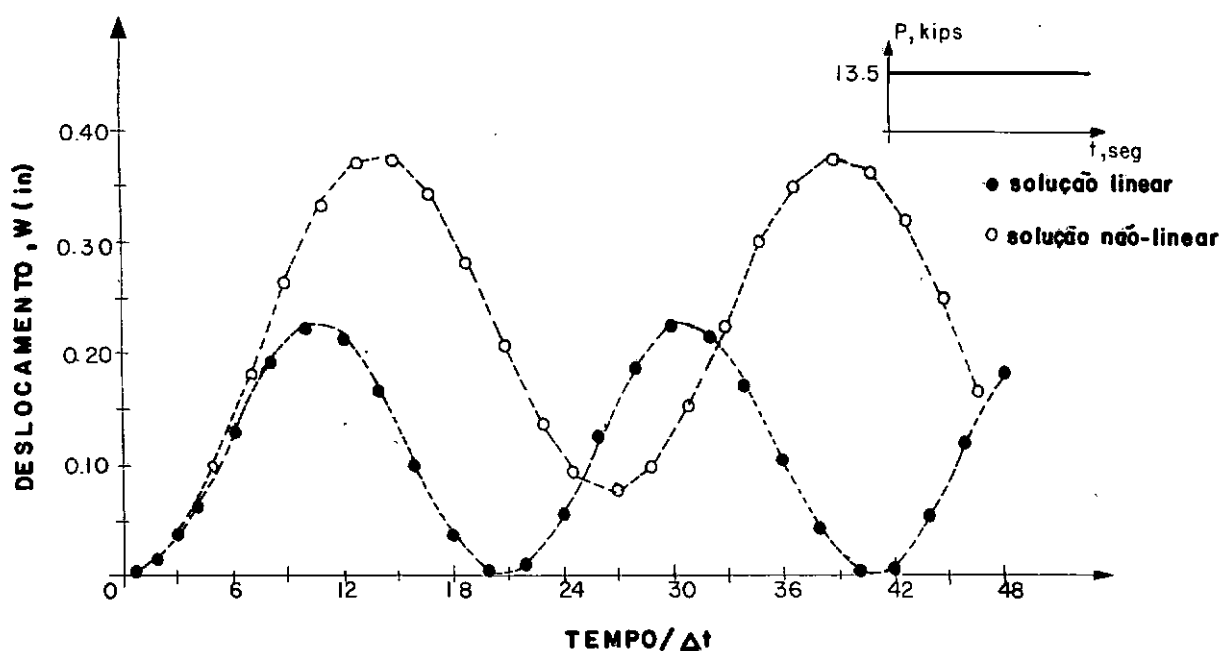


FIGURA 6.8 - RESPOSTA DINÂMICA

## 6.5 - EXEMPLO 5

A viga-parede mostrada na figura 6.9, foi analisada no Laboratório de Estruturas da COPPE/UFRJ, e faz parte do Programa de Testes Desenvolvido por Tezatto<sup>44</sup>.

A armadura de flexão é colocada de forma a garantir que a ruptura acontecerá por cisalhamento.

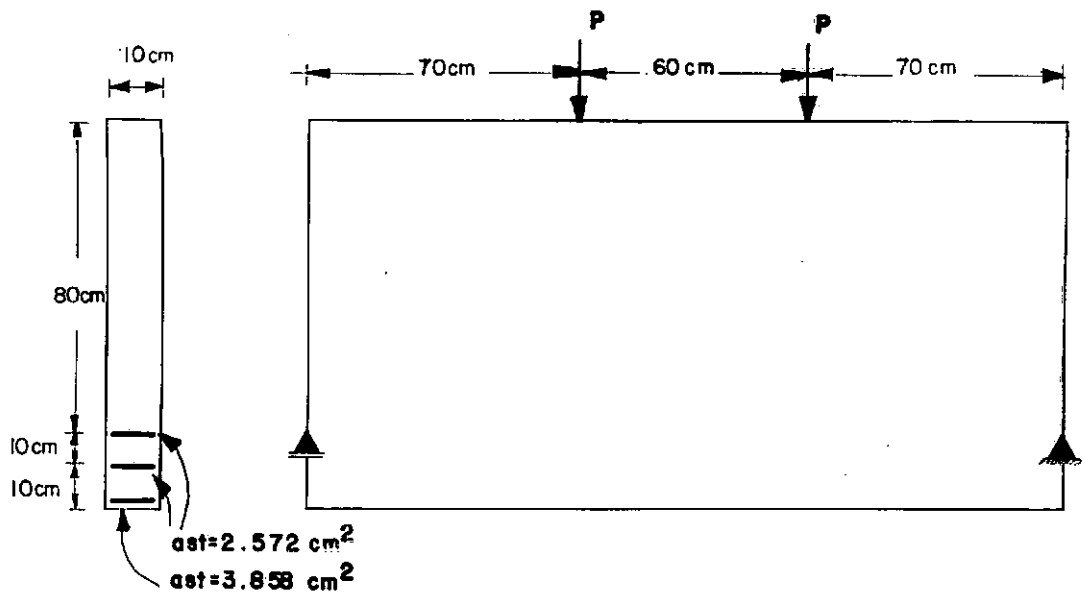


FIGURA 6.9 - VIGA-PAREDE ANALISADA

Nesta análise, foram adotados os seguintes parâmetros, para descrever os materiais:

#### CARACTERÍSTICAS DO CONCRETO

$$E_o = 1335 \text{ KN/cm}^2$$

$$f_{cu} = - 1.65 \text{ KN/cm}^2$$

$$f_{cc} = - 1.95 \text{ KN/cm}^2$$

$$\nu = 0.2$$

$$f_{ct} = 0.208 \text{ KN/cm}^2$$

$$\epsilon_{cu} = - 0.003 \text{ cm/cm}$$

$$\epsilon_{cc} = - 0.002 \text{ cm/cm}$$

#### CARACTERÍSTICAS DO AÇO

$$E_o = 2.1 \times 10^4 \text{ KN/cm}^2$$

$$f_y = 54 \text{ KN/cm}^2$$

$$E_T = 8 \times 10^3 \text{ KN/cm}^2$$

$$\gamma = 1. \quad K = 1 \quad \eta_\eta = 0.0001 \quad \eta'_S = 0.5$$

$$\alpha = -1. \quad \text{UNIAXIAL} = 0$$

Para verificação da ruptura por compressão utilizou-se a curva sugerida por Kupfer et Alii<sup>4</sup>.

Para a discretização (Figura 6.10) foram empregados elementos isoparamétricos com 6 pontos nodais e ordem de integração  $2 \times 2$ .

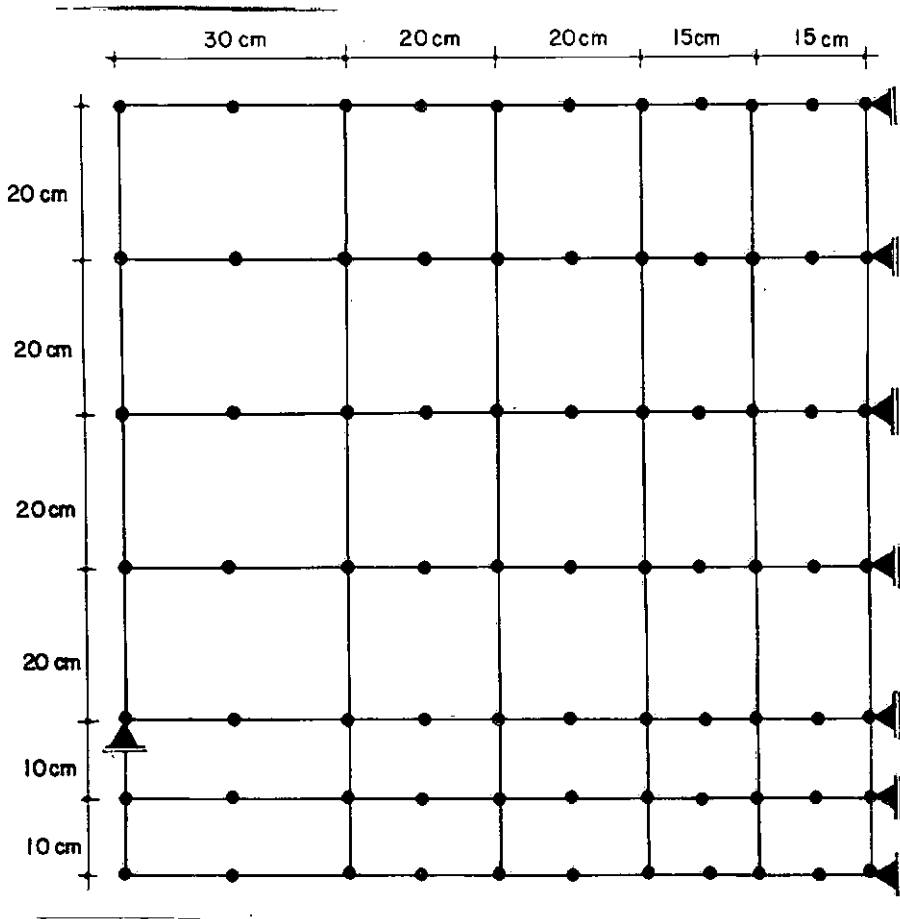


FIGURA 6.10 - DISCRETIZAÇÃO ADOTADA

Na Figura 6.11 é mostrado o detalhe da colocação dos elementos escalares não lineares.

Utilizou-se uma técnica incremental, garantindo-se o equilíbrio a cada incremento de carga.

A tolerância exigida foi de 0.01, com um número máximo de 20 iterações por incremento.

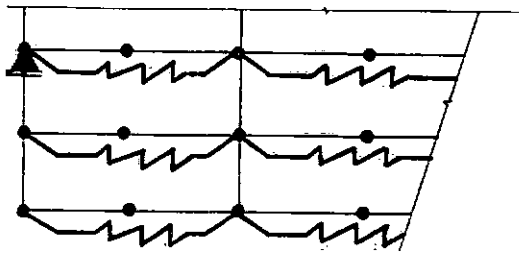


FIGURA 6.11 - COLOCAÇÃO DOS ELEMENTOS ESCALARES

Na Figura 6.12, o diagrama carga-flecha fornecido pelo modelo é comparado àquele obtido experimentalmente.

A ruptura é atingida, quando o estado de fissuração da peça é tal, que torna a matriz de rigidez da estrutura singular, fazendo com que não se obtenha mais convergência no processo iterativo de verificação de equilíbrio.

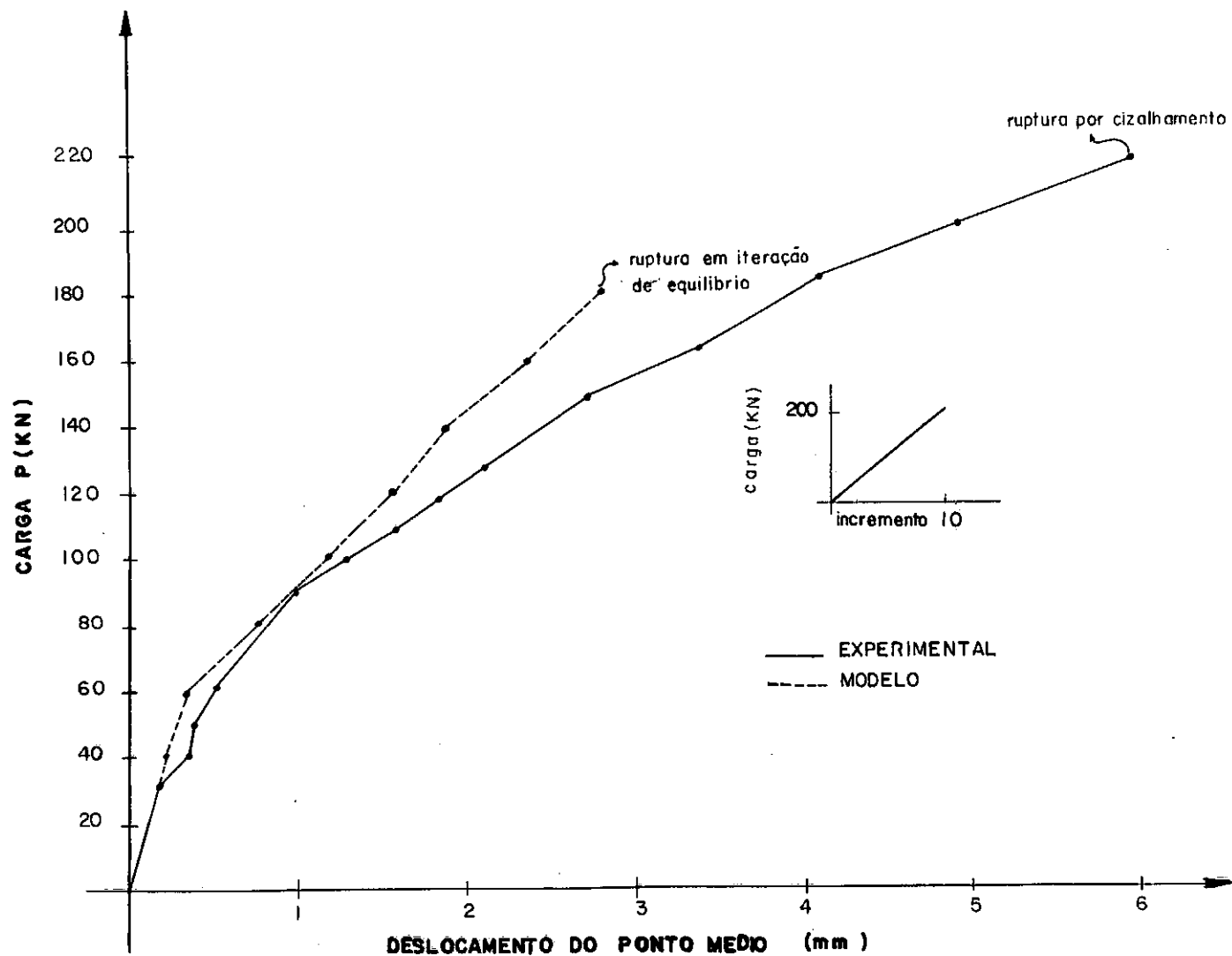
A carga de ruptura, encontrada com o modelo é de 81,8% da experimental.

Os deslocamentos que o modelo fornece, para o meio do vão, são muito próximos dos obtidos experimentalmente, até 50% da carga de ruptura.

Para cargas superiores a esta, os deslocamentos são menores do que os medidos no ensaio. Isto se deve às simplificações feitas no tratamento do concreto fissurado. Principalmente ao fato, de não se tomar em conta o crescimento da abertura da fissura.

Nas Figuras 6.13 a 6.18, mostra-se a configuração das fissuras obtidas experimentalmente, e com o modelo, para as cargas de 80 KN, 120 KN e 160 KN.

FIGURA 6.12 - DIAGRAMA CARGA-FLECHA



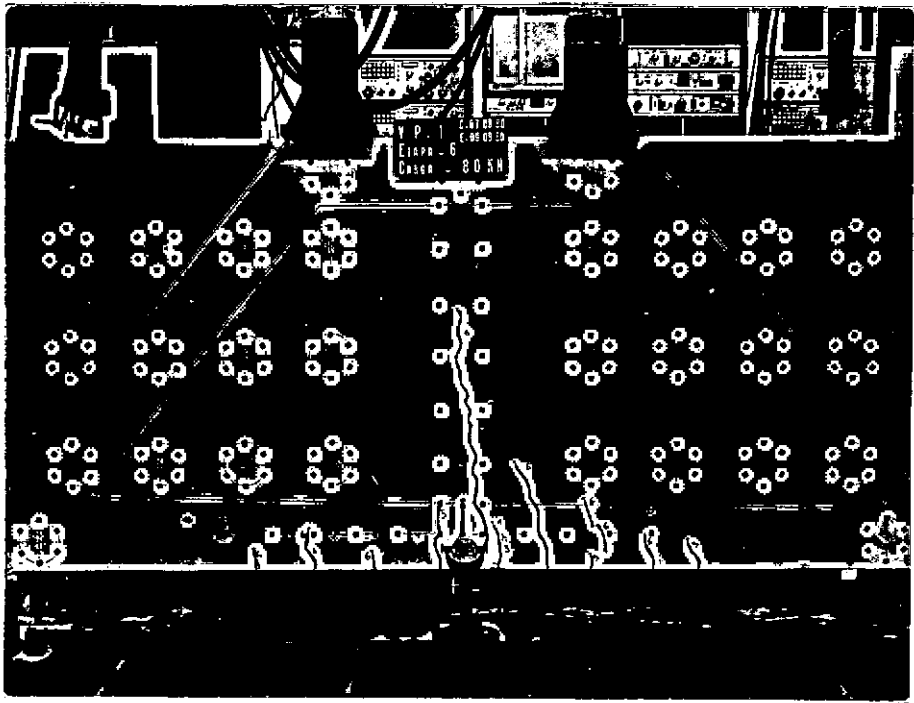


FIGURA 6.13 - CONFIGURAÇÃO DE FISSURAS (EXPERIMENTAL)

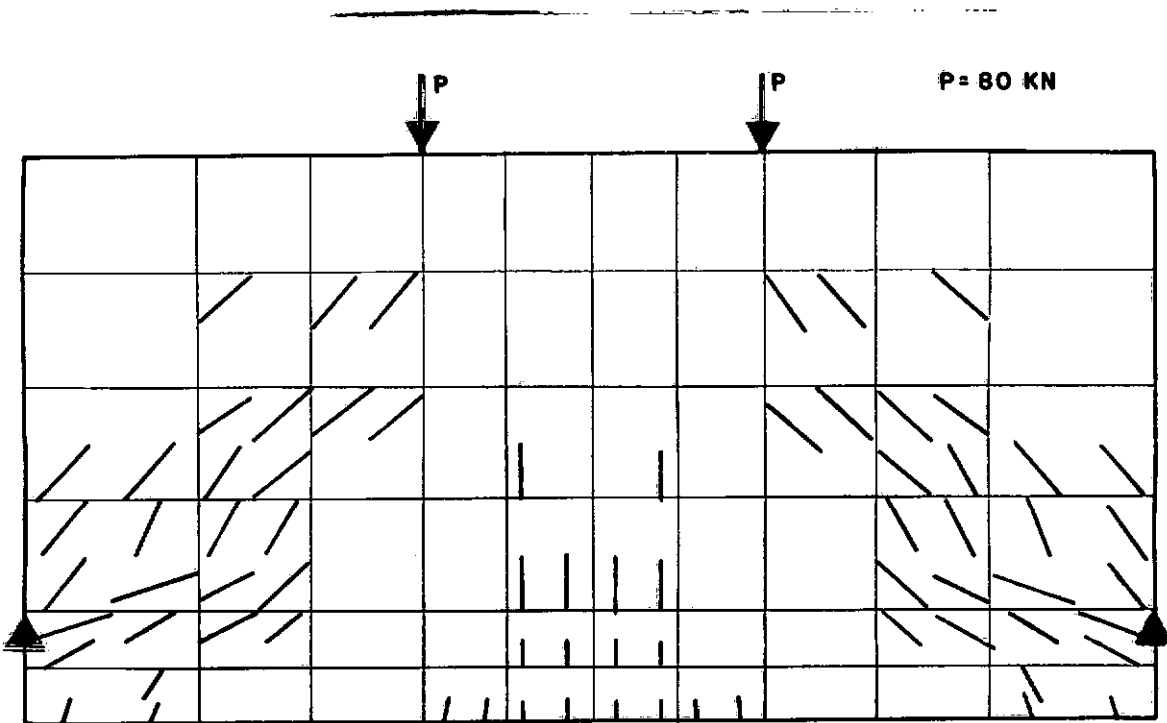


FIGURA 6.14 - CONFIGURAÇÃO DE FISSURAS (MODELO)

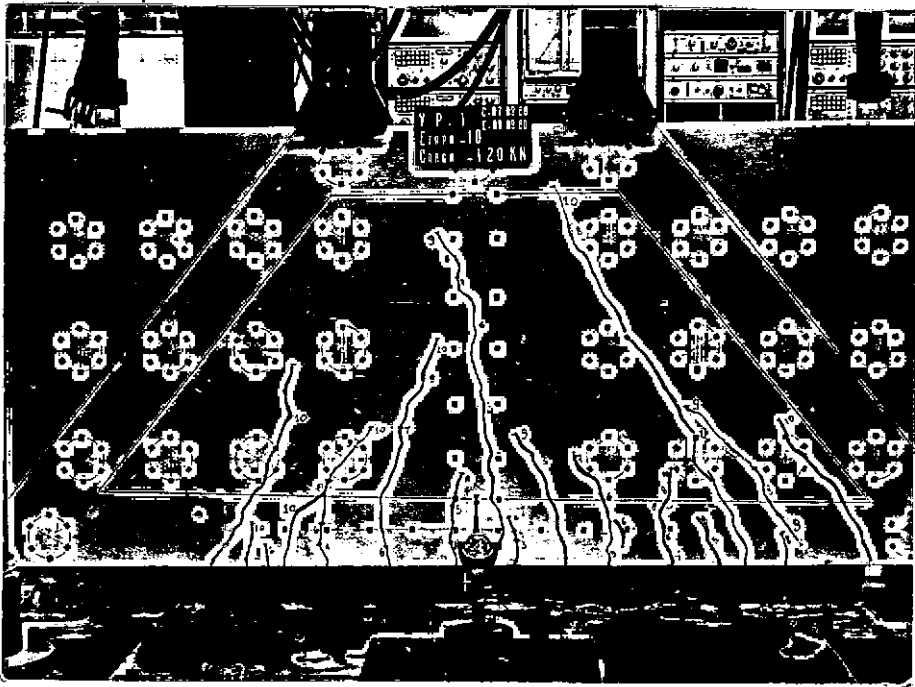


FIGURA 6.15 - CONFIGURAÇÃO DE FISSURAS (EXPERIMENTAL)

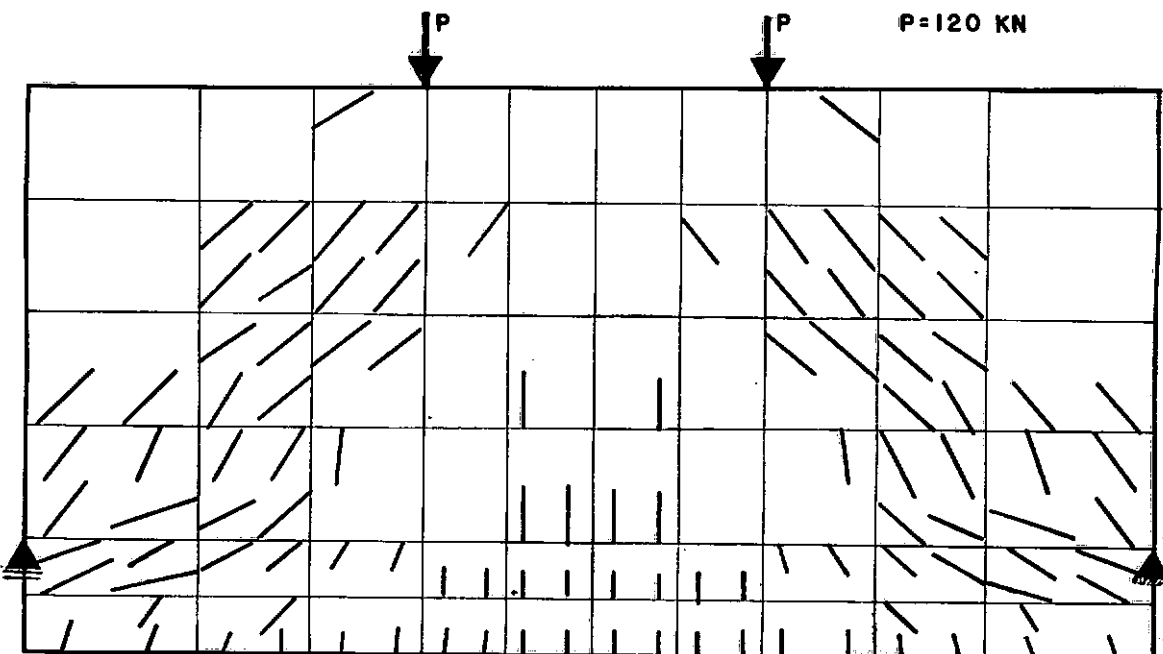


FIGURA 6.16 - CONFIGURAÇÃO DE FISSURAS (MODELO)



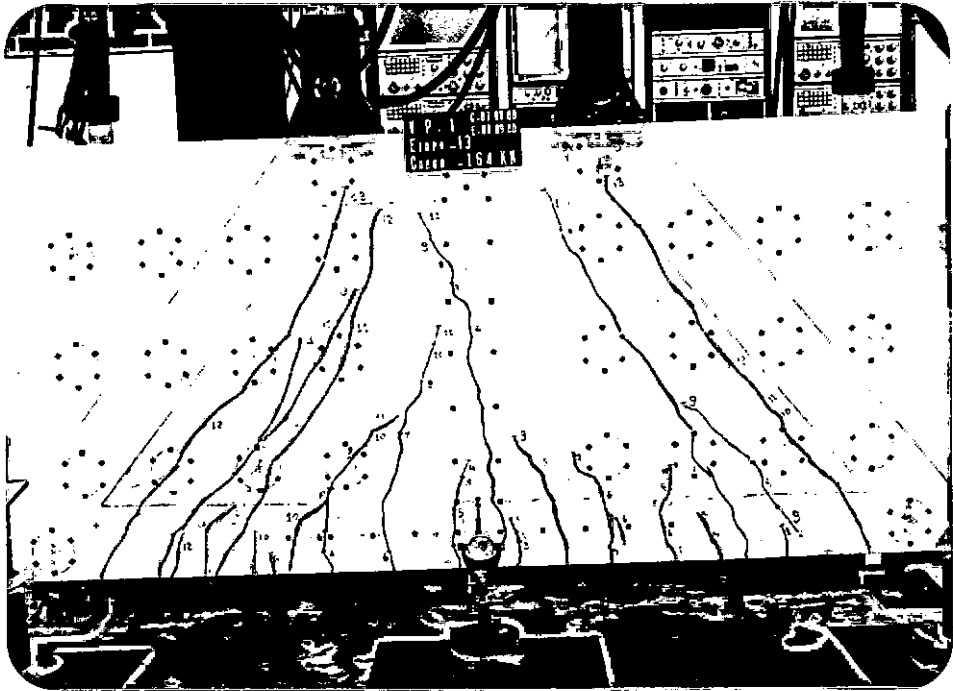


FIGURA 6.17 - CONFIGURAÇÃO DE FISSURAS (EXPERIMENTAL)

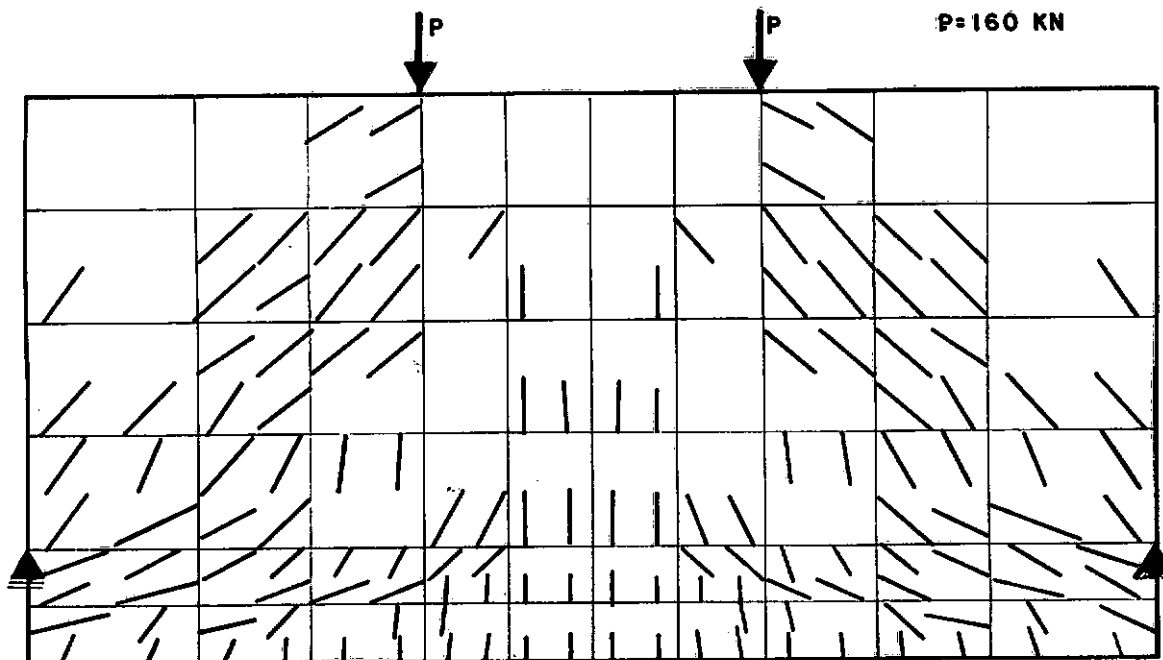


FIGURA 6.18 - CONFIGURAÇÃO DE FISSURAS (MODELO)

Como se pode notar, a configuração das fissuras fornecida pelo modelo, representa bem os resultados experimentais.

Somente as fissuras que surgem sobre a linha carga-apoio, parecem ser excessivas, uma vez que experimentalmente não são detectadas. Porém para a carga de 220 KN, acontece ruptura brusca da peça, devido à uma fissura que se desenvolve exatamente sobre a linha carga-apoio (Figura 6.19).

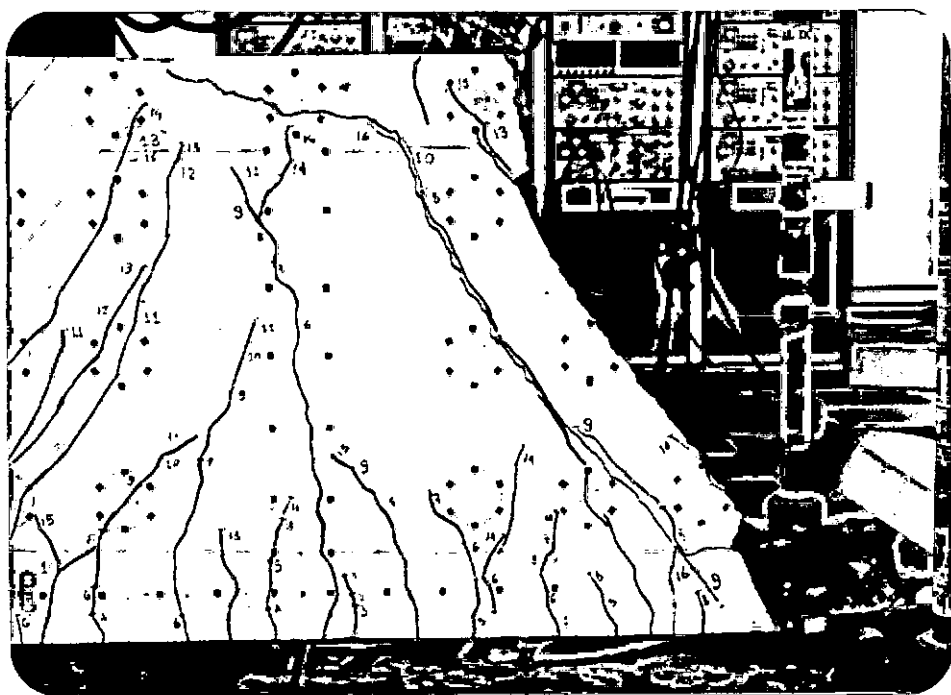


FIGURA 6.19 - CONFIGURAÇÃO FINAL DAS FISSURAS (EXPERIMENTAL)

#### 6.6 - EXEMPLO 6

O vaso de pressão de concreto protendido (PCRVP) da figura 6.20 foi estudado experimentalmente por Sozen and Paul<sup>43</sup>.

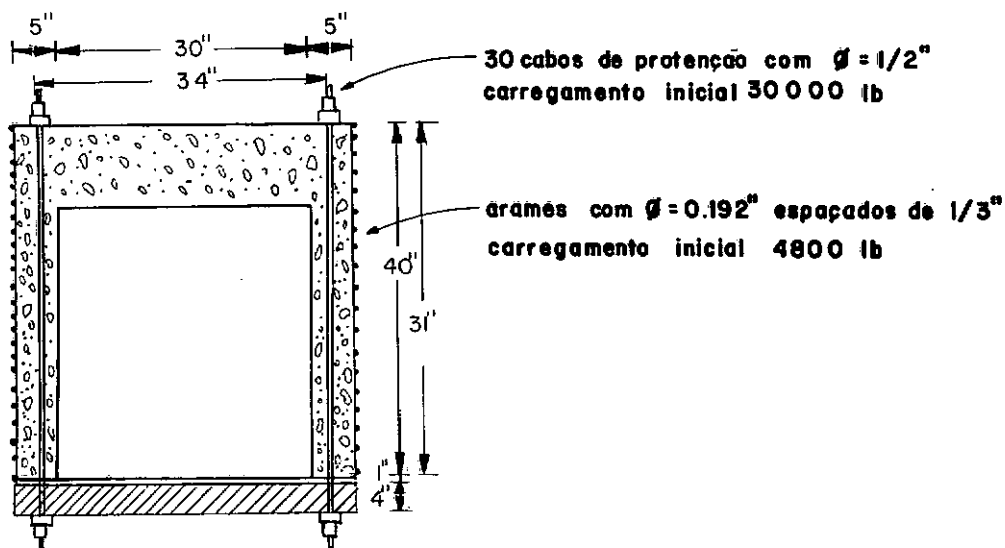


FIGURA 6.20 - SEÇÃO LONGITUDINAL DO VASO ANALISADO

Este vaso foi também analisado numericamente com um modelo elastoplástico por Zienkiewics et Alii<sup>33</sup>.

Para modelar o comportamento dos materiais, os seguintes parâmetros foram fornecidos:

#### CARACTERÍSTICAS DO CONCRETO

$$E_o = 4300. \text{ Ksi}$$

$$f_{cu} = - 5.865 \text{ Ksi}$$

$$f_{cc} = - 6.9 \text{ Ksi}$$

$$\nu = 0.15$$

$$f_{ct} = 0.615 \text{ Ksi}$$

$$\epsilon_{cu} = - 0.0033 \text{ in/in}$$

$$\epsilon_{cc} = - 0.0025 \text{ in/in}$$

#### CARACTERÍSTICAS DO AÇO

$$E_o = 28500. \text{ Ksi}$$

$$f_y = 225. \text{ Ksi}$$

$$E_T = 0$$

$$\gamma = 1 \quad K = 1 \quad \eta_{\eta} = 0.01 \quad \eta_s = 0.5$$

$$\alpha = -1 \quad \text{UNIAXIAL} = 0$$

Para verificação do esmagamento na compressão, foi utilizada a superfície de Launay e Gachon<sup>8</sup>.

Na Figura 6.21 é mostrada a forma de discretização adotada no presente estudo.

Foram empregados 32 elementos isoparamétricos de sólido axissimétrico com número variado de pontos nodais e ordem de integração  $2 \times 2$ .

O aço da protensão circunferencial, e da protensão longitudinal, foi simulado mediante a introdução de 12 elementos escalares não lineares.

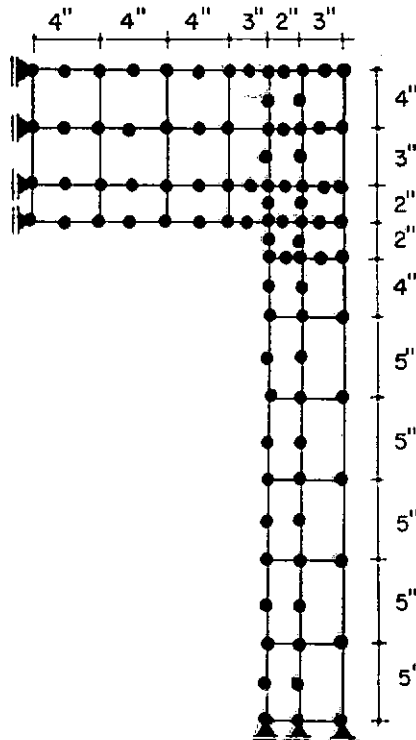


FIGURA 6.21 - MODELO DE ELEMENTOS FINITOS UTILIZADO NA ANÁLISE

O carregamento foi aplicado incrementalmente. Em um primeiro incremento aplicou-se uma pressão externa de 626.4 psi, equivalente à protensão circunferencial. No segundo incremento foi introduzida a protensão longitudinal, pela aplicação da carga de 900 Kips. Finalmente, a estrutura foi submetida à pressão interna, na forma mostrada na figura 6.22.

O processo de verificação de equilíbrio foi efetuado a cada incremento de carga. A tolerância exigida foi de 0.01, com um número máximo de 20 iterações por incremento. Foram necessárias em média duas iterações por incremento.

Os resultados da análise são apresentados na figura 6.22. O diagrama mostrado fornece para cada incremento de carga o deslocamento do ponto médio da laje superior do vaso. Na figura, os deslocamentos indicados, são os medidos a partir da configuração após a aplicação da protensão.

Na Figura 6.23 apresenta-se a configuração de fissuras, obtida com o modelo, para a pressão interna de 700 psi.

Na Figura 6.24, se encontram os resultados obtidos para a carga de 675 psi, por Zienkiewics et Alii<sup>33</sup>, e para a carga de 700 psi, por Bathe e Ramaswamy<sup>13</sup>.

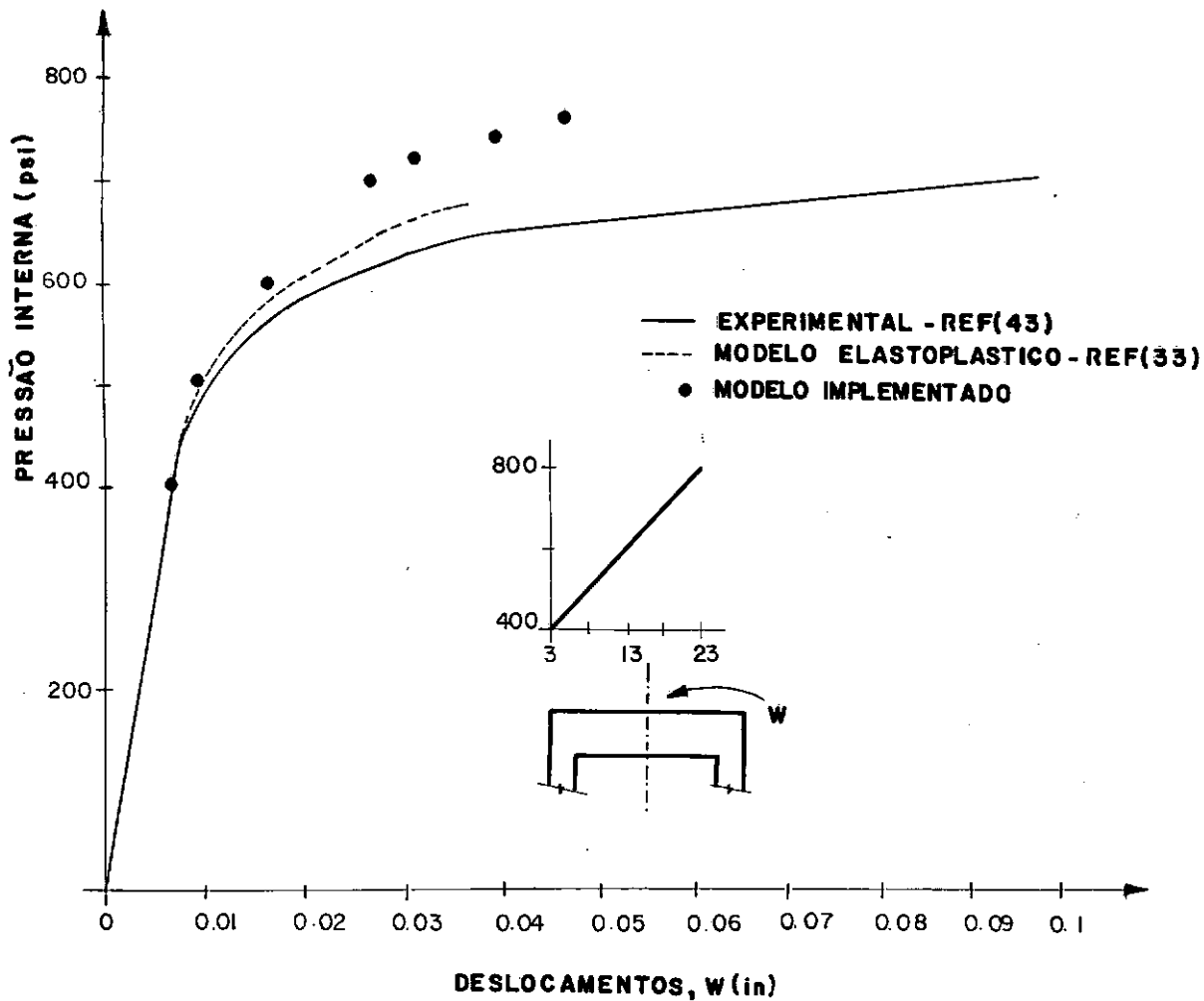


FIGURA 6.22 - DIAGRAMA CARGA-FLECHA NO CENTRO DA LAJE

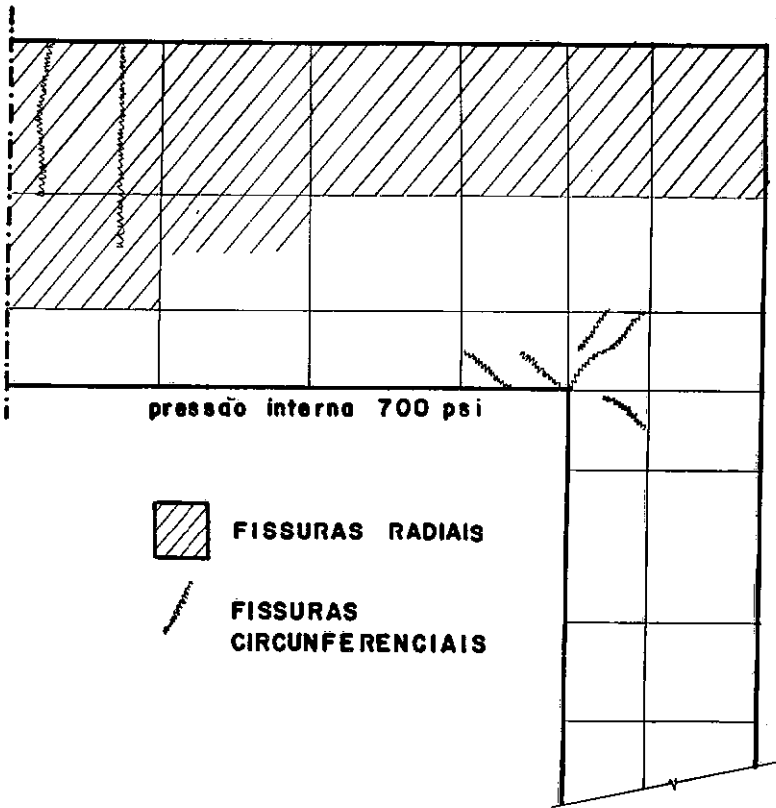


FIGURA 6.23 - CONFIGURAÇÃO DE FISSURAS (MODELO)

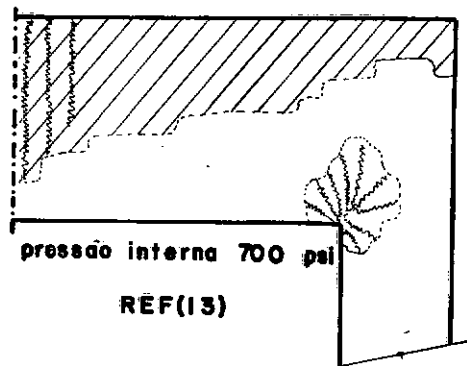
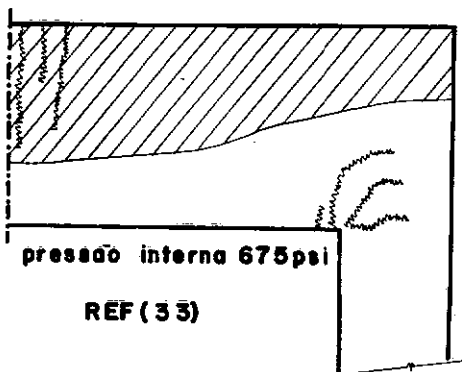


FIGURA 6.24 - CONFIGURAÇÃO DE FISSURAS

## VII - CONCLUSÕES

Procurou-se neste trabalho, abordar alguns dos problemas inerentes à análise de estruturas de concreto armado utilizando-se o método dos elementos finitos. Em especial, os que concernem aos casos em que a relação tensão-deformação do concreto é representada através de um modelo hipoeelástico.

O modelo utilizado para representar o concreto, apresentou-se estável, convergindo rapidamente para a solução, exceto nos incrementos de carregamento em que se estabelecem simultaneamente muitas fissuras e nos incrementos em que o carregamento está muito próximo à ruptura. O modelo apresenta grande flexibilidade de emprego, podendo ser utilizado para representar o comportamento não-linear de outros materiais.

No exemplo 1, pode-se concluir, que para análise de estrutura submetidas a carregamento cíclico, a resposta depende fundamentalmente do incremento utilizado, sendo aconselhável, para uma boa descrição dos deslocamentos da estrutura, a utilização de pequenos incrementos de carga.

No exemplo 2 são comparados os resultados obtidos com o emprego da curva tensão-deformação fornecida em ensaios uniaxiais, e da proposta por Bathe e Ramaswamy<sup>13</sup>. Ambas representam com boa aproximação o comportamento não linear do material na compressão. Uma vez que as deformações obtidas quando se utiliza a curva proposta por Bathe e Ramaswamy<sup>13</sup>, para o caso multiaxial, são inferiores às reais, considera-se a simplificação de usar diretamente a curva fornecida pelo ensaio uniaxial, mais viável.

A introdução de elementos escalares não lineares



para representar o aço mostrou-se eficiente, dentro da limitação de considerar aderência perfeita entre os dois materiais, não apresentando problemas de compatibilidade.

No exemplo 3, pode-se notar que a adoção de elementos de grau superior, e redução do número de elementos, não prejudica a resposta. Somente no caso de se desejar uma representação mais precisa da configuração das fissuras, é necessário adotar um número maior de elementos.

No mesmo exemplo, nota-se que no primeiro incremento de carga, a fissuração acontece simultaneamente em muitos pontos de integração. Devido à este fato, as 20 iterações permitidas são insuficientes para que se obtenha convergência de 1%. O aumento do número de incrementos não implica em convergência mais rápida. Conforme se pode constatar, as fissuras acontecem todas em um único incremento de carga, mesmo quando este é bastante pequeno. Verificou-se também que a cada iteração, a partir das 10 primeiras, a resposta converge lentamente para a exata, e que uma convergência de 1% seria alcançada, já na 9ª iteração.

No exemplo 5, a estrutura analisada apresenta fissuração simultânea e ruptura local. Verificou-se que ao ocorrer ruptura localizada a estrutura não foi mais capaz de transmitir esforços para as regiões não fissuradas de modo a permitir o prosseguimento da análise. A matriz de rigidez se torna singular devido à formação de um mecanismo de ruptura. O processo numérico, nesta etapa, não apresenta mais convergência. Mediante o controle dos deslocamentos, a análise numérica poderia ter prosseguimento, porém uma vez que a carga de ruptura já foi atingida, isto não se faz necessário.

A carga de ruptura fornecida nesta análise, foi 80% do valor determinado experimentalmente. Ao contrário do exemplo 3, em que a ruptura era resultado do escoamento da armadura, neste exemplo ela é atingida devido à fissuração.

Tanto a convergência lenta nos casos em que a fissuração acontece simultaneamente em muitos pontos de integração, quanto a subestimativa da carga de ruptura são consequências do critério de ruptura adotado e das simplificações feitas na consideração do comportamento do concreto fissurado.

Comprovadamente a fissuração é a fonte de não linearidade de maior importância na análise de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos. Para obtenção de resultados mais próximos dos reais, faz-se necessário um tratamento mais apropriado da fissuração e de efeitos tais como a perda de aderência do aço, e a ação deste através da fissura. Porém quando se visam modelos que serão utilizados para o cálculo de estruturas submetidas a estados triaxiais de tensão, pouco se sabe sobre a estratégia a ser utilizada para consideração destes efeitos.

No exemplo 6 foi analisado um vaso de pressão de concreto protendido. Os resultados obtidos com o modelo prevêm deformações menores do que as reais para o concreto. A carga de ruptura, porém, é considerada satisfatória quando comparada com a obtida experimentalmente.

Os resultados calculados com o presente modelo são também comparados com os obtidos mediante o emprego de um modelo elastoplástico. A comparação feita mostra que os deslocamentos fornecidos pelo modelo elastoplástico estão mais próximos dos

reais do que os calculados com o modelo hipoelástico. Porém, uma vez que cada modelo inclui a representação de outros fenômenos, como a fissuração, isto não nos leva a conclusões definitivas. Somente uma comparação entre modelos semelhantes, em que se examine apenas a diferença no tratamento das deformações inelásticas, pode levar a conclusões quanto a eficiência de se adotar leis hipoelásticas ou elastoplásticas.

Para o caso triaxial, a consideração de uma lei constitutiva hipoelástica que tome em conta os resultados experimentais obtidos para carregamentos multiaxiais e inclua a consideração de que o carregamento não é proporcional, pode onerar bastante a análise. Para o caso biaxial, porém, este tipo de análise pode ser conduzida com bastante simplicidade.

## BIBLIOGRAFIA

- 1    NGO, D. and SCORDELIS, A.C. - Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams - American Concrete Institute Journal, Vol. 64, No. 3, March, 1967.
- 2    CEDOLIN, L. and DEI POLI, S. - Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 103, No. EM3, June, 1977.
- 3    SUIDAN, M. and SCHNOBRICH, W.C. - Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST10, October, 1973.
- 4    KUPFER, H.; HILSDORF, H. and RUSCH, H. - Behavior of Concrete Under Biaxial Stress - American Concrete Institute Journal, Vol. 66, No. 8, August, 1969.
- 5    KUPFER, H. and GERSTLE, K. - Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses - Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 99, No. EM4, August, 1973.
- 6    CONNOR, J. and SARNE, Y. - Lecture Notes on Finite Element Analysis of Physically Nonlinear Systems - Prepared for International Symposium on Discrete Methods in Engineering, CISE, Segrate, Milan, Italy, September, 1974.
- 7    ARGYRIS, J.H.; FAUST, G.; SZIMMAT, J.; WARNKE, E.P. and WILLAM, K.J. - Recent Developments in the Finite Element Analysis of Prestressed Concrete Reactor Vessels - Nuclear Engineering and Design 28, 42-75, 1974.
- 8    LAUNAY, P. and GACHON, H. - Strain and Ultimate Strength of Concrete Under Triaxial Stress - ACI Special Publication SP-34, Concrete for Nuclear Reactors, 1972.
- 9    WILLAM, K.J. and WARNKE, E.P. - Constitutive Model for the Triaxial Behaviour of Concrete - IABSE Seminar on Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses, Bergamo, 1974.
- 10   KHAN, M.H. and SAUGY, B. - Evaluation of Some Concrete Characteristics on Non-Linear Behaviour of a Prestressed

Concrete Reactor Vessel - ACI Special Publication SP34,  
Concrete for Nuclear Reactors, 1972.

- 11 MROZ, Z. - On Hypoelasticity and Plasticity . Approaches to Constitutive Modelling of Inelastic Behaviour of Soils - International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 4, 45-55, 1980.
- 12 ELWI, A.A. and Murray, D.W. - A 3D Hypoelastic Concrete Constitutive Relationship - Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 105, No. EM4, August, 1979 .
- 13 BATHE, K.J. and RAMASWAMY, S. - On Three-Dimensional Analysis of Concrete Structures - Nuclear Engineering and Design 52, 385-409, 1979.
- 14 LIU, T.C.Y.; NILSON, A.H. and SLATE, F.O. - Biaxial Stress-Strain Relations for Concrete - Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98, No. ST5, May, 1972.
- 15 DARWIN, D. and PECKNOLD, D.A. - Nonlinear Biaxial Stress-Strain Law for Concrete - Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 103-No. EM2, April, 1977.
- 16 ISEMBERG, J. and ADHAM, S. - Analysis of Orthotropic Reinforced Concrete Structures - Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 96, No. ST12, December, 1970.
- 17 SORENSES, S. - Non Linear Finite Element Analysis of Plane Reinforced Concrete Structures with Special Attention to Shear Failure - International Symposium on Offshore Structures, October 8-12, 1979, Rio de Janeiro, Brasil.
- 18 BELYAVEV, N.M. - Strength of Materials - Mirs Publishers. Moscow, 1979.
- 19 LEKHNITSKII, S.G. - Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body - Holden-Day, San Francisco, California, 1963.
- 20 COON, M.D. and EVANS, R.J. - Incremental Constitutive Laws and their Associated Failure Criteria with Application

to Plain Concrete - International Journal of Solids and Structures, Vol. 8, 1169-1183, 1969.

- 21 MALVERN, L.E. - Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium - Prentice-Hall Inc., 1969.
- 22 BATHE, K.J. and WILSON, E.L. - Numerical Methods in Finite Element Analysis - Prentice-Hall, 1976.
- 23 EBECKEN, N.F.F. - LORANE-NL - Uma Linguagem Orientada a Análise Estrutural Não-Linear - PTS 15-77, COPPE/UFRJ.
- 24 BATHE, K.J. and CIMENTO, A.P. - Some Practical Procedures for the Solution of Non Linear Finite Element Equations - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 22, 59-85, 1980.
- 25 HAILER, W.E. and STRICKLIN, J.A. - Displacement Incrementation in Nonlinear Structural Analysis by the Self-Correcting Method - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, 3-10, 1977.
- 26 BUYOLOZTURK, O. and CONNOR, J.J. - Nonlinear Dynamic Response of Reinforced Concrete Under Impulsive Loading: Research Status and Needs - Nuclear Engineering and Design 50, 83-92, 1978.
- 27 MIKKOLA, M.J. and SINISALO, H.S. - Finite Element Analysis of Transient Nonlinear Response of Reinforced Concrete Structures - U.S. - Europe Workshop - Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, July 28-31, 1980, Ruhr-University Bochum, West Germany.
- 28 BAZANT, Z.P. - Discussion of "A 3D Hypoelastic Concrete Constitutive Relationship" - Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 106, No EM2, April, 1980.
- 29 RASHID, Y.R. - Ultimate Strength Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels - Nuclear Engineering and Design 7, 334-344, 1968.
- 30 OBINO NETO, A. - Análise de Estruturas no Estado Plano de

Tensões e Deformações com Materiais Elásticos, Ortotropos e Não Lineares - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1975.

- 31 NILSON, A.H. - Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method - American Concrete Institute Journal, Vol. 65, No. 9, September, 1968.
- 32 CEDOLIN, L.; CRUTZEN, Y.R.J. and DEI POLI, S. - Triaxial Stress - Strain Relationship for Concrete - Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 103, No. EM3, JUNE, 1977.
- 33 ZIENKIEWICZ, O.C.; OWEN, D.R.J.; PHILLIPS, D.V. and NAYAK, G.C. - Finite Element Methods in the Analysis of Reactor Vessels - Nuclear Engineering and Design 20, 507-541, 1972.
- 34 TROINA, L.M.B. e EBECKEN, N.F.F. - Modelo Tridimensional para a Análise Não Linear de Estruturas de Concreto Armado - Anais dos II Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia e IV Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil, Curitiba, Paraná, Brasil, Dezembro, 1980.
- 35 TROINA, L.M.B. e EBECKEN, N.F.F. - Análise Não-Linear de Estruturas de Vasos de Pressão de Concreto Armado - I Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, Salvador, Brasil, Novembro, 1980.
- 36 SAENZ, I.P. - Discussion of "Equation for Stress-Strain Curve of Concrete" - American Concrete Institute Journal, Vol. 61, No. 9, September, 1964.
- 37 BAZANT, Z.P. and Bhat, P.D. - Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete - Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 102, No. EM4, June, 1972.
- 38 REGOTTO, M.R.P. - Análise Não Linear de Estruturas de Concreto Armado sob Estado Plano de Deformações - Tese de M.Sc., PUC/RJ, 1980.

- 39 TIMOSHENKO, S.P. and GOODIER, J.N. - Theory of Elasticity - Tokyo, Kogakusha Company, 3rd Edition, 1970.
- 40 FUNG, Y.L. - Foundations of Solid Mechanics - Prentice-Hall, New York, 1965.
- 41 ZIENKIEWICZ, O.C. - The Finite Element Method in Engineering Science - McGraw-Hill, New York, 1971.
- 42 KRAHL, M.W.; KHACHATURIAN, N. and SIESS, C.P. - Stability of Tensile Cracks in Concrete Beams - Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, No. ST1, February, 1967.
- 43 SOZEN, M.A. and PAUL, S.L. - Structural Behavior of Small-Scale Prestressed Concrete Reactor Vessel - Nuclear Engineering and Design 8, 403-414, 1968.
- 44 - TIZATTO, V. - Vigas Parede com Furo - Tese de M.Sc. em preparo na COPPE/UFRJ, 1981.