

ANÁLISE ESTÁTICA DE ESTRUTURAS COM  
NÃO-LINEARIDADE FÍSICA LOCALIZADA

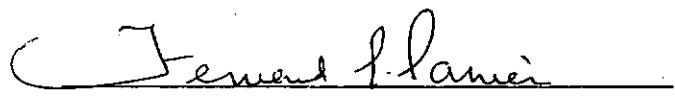
Maria de Lourdes Teixeira Moreira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS  
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO  
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTEN-  
ÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.).

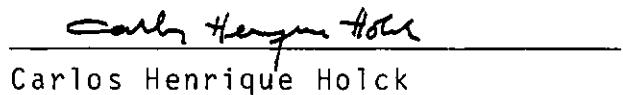
Aprovada por:



Edison Castro Prates de Lima  
(Presidente)



Fernando L. Lobo B. Carneiro



Carlos Henrique Holck



Nelson Francisco Favilla Ebecken

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
MARÇO DE 1981

MOREIRA, MARIA DE LOURDES TEIXEIRA

Análise Estática de Estruturas com Não-Linearidade Física  
Localizada |Rio de Janeiro| 1981.

VIII, 91 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M. Sc., Engenharia Ci-  
vil, 1981)

Tese - Univ. Fed. do Rio de Janeiro

I. Elementos Finitos      I. COPPE/UFRJ      II. Título (Série)



AGRADECIMENTOS

Ao Professor Edison Castro Prates de Lima pela orientação e apoio prestados em todas as etapas deste trabalho..

Aos professores, colegas e funcionários da COPPE.

A Fundação Universidade Federal do Piauí e a CAPES, através do PICD, pelo apoio financeiro recebido.

A Daisy Pierucci pela eficiência com que datilografou este trabalho.

## SUMÁRIO

Neste trabalho são apresentados algoritmos para análise estática de sistemas estruturais que possuam não linearidade física localizada, situação bastante frequente em problemas de interação solo-estrutura.

Associam-se métodos incrementais, iterativos e mistos a técnicas para a solução dos sistemas de equações que levam em consideração o caráter localizado da não linearidade através da decomposição das sucessivas matrizes de rigidez, tangentes de forma seletiva, permitindo o reaproveitamento das partes que permanecem inalteradas.

A eficiência dos algoritmos é examinada na análise de alguns problemas de interação solo-estrutura.

ABSTRACT

In this work algorithms are presented for the static analysis of structural systems with localized physical nonlinearity. In many types of structures that exhibit significant nonlinearity during static analysis, the nonlinear stiffness property is confined to a few predetermined localities. This physical characteristic may be exploited by making use of substructure concepts and selective reduction. In the former, the elastic components may be represented by small matrix of stiffness coefficients coupling then to the nonlinear elements. In the last a substantial part of the previously reduced coefficient matrix is re-used.

The reduced system of nonlinear equations is solved by incremental, iterative or mixed methods.

The efficiency of these algorithms is examined through the solution of some soil-structures interaction problems.

ÍNDICEPág.

| <u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO</u> .....                                      | 1  |
|---|----|
| <u>CAPÍTULO II - MÉTODOS NUMÉRICOS</u> .....                              | 3  |
| 2.1 - Solução Iterativa tipo Newton-Raphson.....                          | 5  |
| 2.1.1 - Método de Newton-Raphson.....                                     | 8  |
| 2.1.2 - Método de Newton-Raphson Modificado.....                          | 10 |
| 2.2 - Método Incremental.....   | 12 |
| 2.3 - Métodos Incrementais - Iterativos ou Mistos.....                    | 15 |
| <u>CAPÍTULO III - MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES</u> ..... | 20 |
| 3.1 - Decomposição Parcial da Matriz Tangente.....                        | 22 |
| 3.1.1 - Algoritmos Básicos.....   | 24 |
| 3.1.1.1 - Método de Crout.....  | 25 |
| 3.1.1.2 - Método de Cholesky.....   | 28 |
| 3.2 - Subestruturas e Condensação.....                                    | 30 |
| <u>CAPÍTULO IV - ELEMENTOS NÃO-LINEARES IMPLEMENTADOS</u> .....           | 36 |
| 4.1 - Elemento de Mola Não-Linear.....                                    | 36 |
| 4.2 - Elemento de Junta.....  | 39 |

|   |    |
|---|----|
| <u>CAPÍTULO V - ASPECTOS GERAIS DA PROGRAMAÇÃO.....</u>   | 47 |
| 5.1 - Método da Decomposição Parcial.....   | 47 |
| 5.2 - Método das Subestruturas e Condensação.....   | 50 |
| 5.3 - Implementação de Alguns Métodos de Resolução de<br>Sistemas de Equações Não-Lineares..... | 55 |
| 5.3.1 - Métodos Iterativos.....   | 55 |
| 5.3.1.1 - Método de Newton-Raphson.....   | 55 |
| 5.3.1.2 - Método de Newton-Raphson Modificado.....  | 59 |
| 5.3.2 - Método Incremental.....   | 63 |
| 5.3.3 - Métodos Mistos.....   | 66 |
| 5.3.3.1 - Método Incremental - Iterativo com Newton-<br>Raphson.....                            | 66 |
| 5.3.3.2 - Método Incremental - Iterativo com Newton-<br>Raphson Modificado.....                 | 70 |
| <u>CAPÍTULO VI - RESULTADOS DE ANÁLISE.....</u>   | 74 |
| 6.1 - Plataformas Offshore.....   | 74 |
| 6.1.1 - Plataforma 1.....   | 74 |
| 6.1.2 - Plataforma 2.....   | 79 |
| 6.2 - Barragens.....  | 81 |
| <u>CONCLUSÕES.....</u>  | 85 |
| <u>BIBLIOGRAFIA.....</u>  | 88 |
| <u>SÍMBOLOGIA.....</u>  | 91 |

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

A análise de sistemas estruturais que apresentam comportamento não-linear físico localizado aparece com frequência em problemas de interação solo-estrutura. Devido à quase inexistência de métodos específicos para este tipo de análise as soluções para estes problemas normalmente são obtidas pelos mesmos procedimentos numéricos e computacionais utilizados no tratamento de casos mais gerais em que a não-linearidade afeta todo o sistema estrutural. Estes procedimentos produzem soluções desnecessariamente dispendiosas e muitas vezes economicamente inviáveis para a maioria das estruturas que ocorrem na prática.

Neste trabalho analisa-se alguns algoritmos que procuram dar um tratamento seletivo às partes do sistema estrutural sujeitas à não-linearidade. Tais algoritmos são de dois tipos: os que efetuam a decomposição parcial das sucessivas matrizes de rigidez tangentes e os que utilizam as técnicas de dividir o domínio do problema em regiões, denominadas "subestruturas", com a posterior condensação dos graus de liberdade das subestruturas de comportamento linear.

Os dois algoritmos foram implementados em um programa de computador em linguagem FORTRAN, utilizando o computador Burroughs B-6700 do NCE/UFRJ.

Na solução do sistema de equações não-lineares foram utilizados métodos incrementais, iterativos e mistos.

A apresentação do trabalho é feita ao longo de cinco capítulos. No Capítulo II são discutidos os métodos numéricos de análise não-linear com enfoque para a não-linearidade física. No Capítulo III são abordados os processos numéricos pelos quais se pretende analisar sistemas com comportamento não linear físico localizado através de um tratamento seletivo à região do sistema submetida à não-linearidade. No Capítulo seguinte apresenta-se alguns elementos não-lineares utilizados, enquanto no Capítulo V são discutidos aspectos gerais da programação dos diversos métodos. Os exemplos analisados são apresentados no último Capítulo.

## CAPÍTULO II

### MÉTODOS NUMÉRICOS

De uma forma geral, todos os problemas da mecânica dos sólidos são não lineares. Entretanto, em um grande número de aplicações é possível admitir uma formulação linear que conduza a soluções aceitáveis na prática. Há, no entanto, várias situações nas quais é necessária uma análise não linear para que se obtenha resultados corretos. Entre alguns exemplos que se enquadram nesta última categoria podem ser citados o comportamento pós-crítico de vigas, placas e cascas, a análise de estruturas submetidas a grandes deslocamentos e, a priori, todos os problemas da mecânica dos solos e das rochas.

A não-linearidade pode ocorrer de duas maneiras: a não-linearidade física, resultante de leis constitutivas não lineares e a não-linearidade geométrica proveniente de mudanças apreciáveis na geometria dos corpos deformados. No presente trabalho são abordados problemas envolvendo apenas não-linearidade física, que compreende as situações nas quais as tensões não são linearmente relacionadas às deformações, mantendo-se, porém, a linearidade geométrica, através da consideração de pequenos deslocamentos e deformações |<sup>14</sup>|.

Os métodos de solução para resolver sistemas de equações algébricas não lineares partem de uma estimativa ini-

cial da solução e, através da utilização de algum processo, determinam uma sequência de soluções, devendo convergir para a solução exata |<sup>1</sup>|.

Tais métodos podem ser não sequenciais e sequenciais. Nos métodos não sequenciais os pontos são escolhidos ao acaso. Desse modo, os métodos sequenciais, que determinam sequências de soluções aproximadas a partir de um conjunto pré-determinado de operações, são os que mais se adaptam à aplicação no presente caso, tendo em vista a facilidade de implementação dos algoritmos.

De uma maneira geral, nos métodos sequenciais a estimativa inicial da solução é feita arbitrariamente e um valor corrigido é obtido por fórmulas de recorrência do tipo:

$$x^{n+1} = x^n + \lambda^n \cdot D^n \quad (\text{II.1})$$

Onde  $x^n$  é a estimativa da solução na enésima etapa do processo e  $\lambda^n \cdot D^n$  sua correção, sendo  $D^n$  um vetor de dimensão igual à do vetor  $x^n$  que determina a direção da correção e  $\lambda^n$  um escalar que define sua intensidade. Fórmulas de recorrência desse tipo conduzem a que a variação de uma etapa à outra seja sempre linear, porém se pode obter fórmulas de recorrência baseadas em extrapolações quadráticas, cúbicas, etc. pela inclusão de termos contendo  $x^{n-1}$ ,  $x^{n-2}$ , etc.

A solução dos problemas não-lineares através do método dos elementos finitos é feita usualmente por uma das três técnicas básicas: processos incrementais, processos iterativos e processos incrementais-iterativos ou mistos.

O problema não-linear após a discretização do contínuo pode ser representado por um sistema de equações em uma das seguintes formas, em função do tipo de problema em questão e do método de discretização |<sup>2</sup>|.

$$\underline{\psi}(\underline{U}) = \underline{Q}(\underline{U}) - \underline{P} = \underline{K}(\underline{U}) \cdot \underline{U} - \underline{P} = 0 \quad (\text{II.2})$$

Onde os parâmetros  $\underline{U}$  representam a aproximação da função ou funções incógnitas.

A não-linearidade ocorre na matriz de rigidez  $\underline{K}$  que é uma função das propriedades não lineares do material.

## 2.1 - SOLUÇÃO ITERATIVA TIPO NEWTON-RAPHSON

Os métodos iterativos, utilizados na solução de equações algébricas ou transcendentais da forma  $f(x) = 0$ , geram uma sequência de aproximações sucessivas de uma solução exata.

O método de Newton-Raphson principia com uma aproximação  $x_i$  de uma raiz da equação  $f(x) = 0$  e utiliza a expansão em série de Taylor da função  $f(x)$  para obter uma nova e melhor aproximação dessa raiz |<sup>14</sup>|.

O desenvolvimento em série de Taylor de  $f(x)$  nas vizinhanças do ponto  $x_i$  tem a forma:

$$f(x) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) \quad (\text{II.3})$$

(indicando apenas os dois primeiros termos do desenvolvimento).

Observa-se que (II.3) corresponde à equação da reta tangente à função  $f(x)$  traçada no ponto  $x_i$  (Figura II.1).

Seja  $(x_{i+1}, 0)$  o ponto de intersecção da tangente com o eixo x. Este ponto é determinado igualando-se  $f(x)$  a zero em (II.3), quando  $x = x_{i+1}$ :

$$f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0 \quad (\text{II.4})$$

Explicitando  $x_{i+1}$  em (II.4) e adotando esse valor como uma nova aproximação para a raiz da equação, obtém-se a fórmula de recorrência do método de Newton-Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (\text{II.5})$$

Podemos então utilizar a equação (II.5) para alcançar uma boa aproximação para a raiz da equação. Observa-se, entretanto, que o método não converge em todos os casos. É possível demonstrar [4] que a convergência só é garantida quando

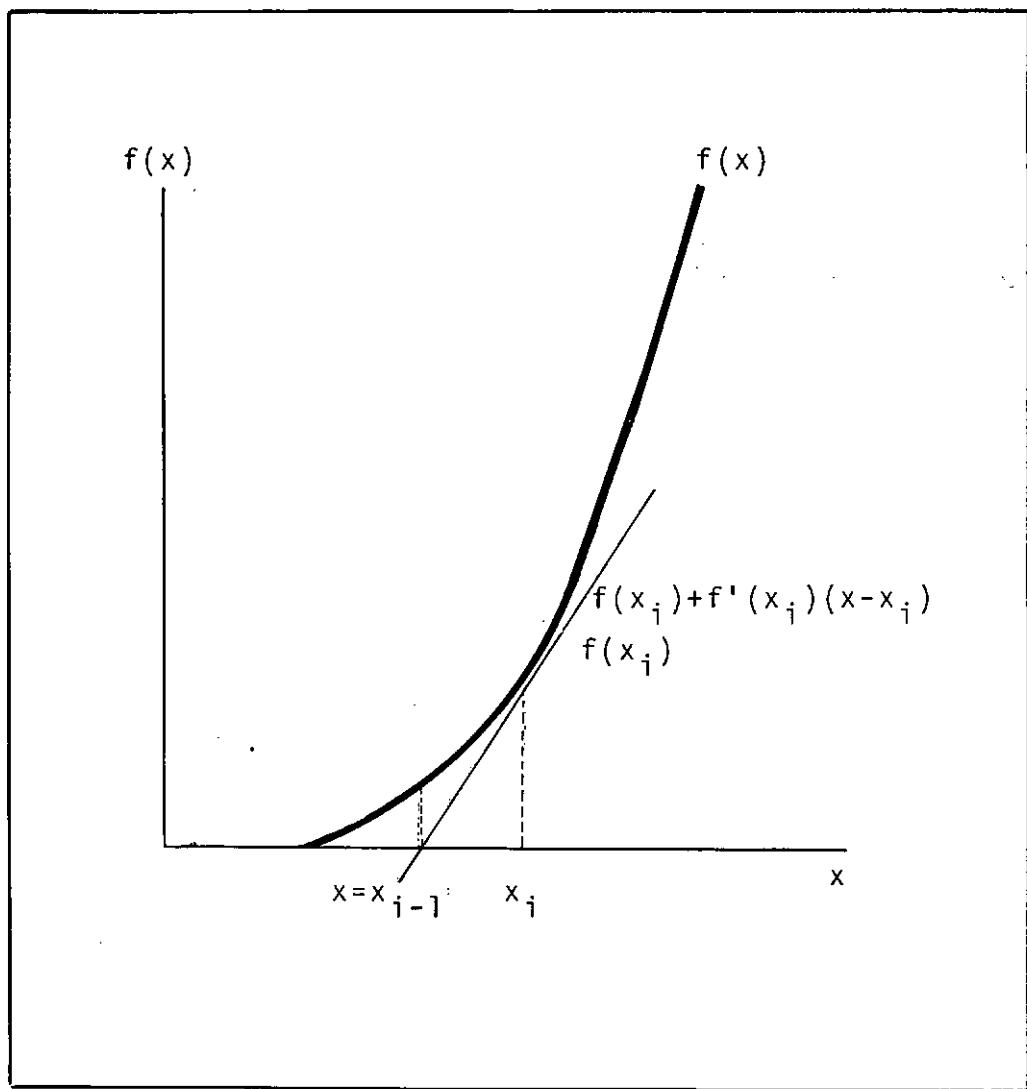


Figura II.1 - Significado geométrico do método de Newton-Raphson

o maior valor da derivada da função  $F(x)$  definida por:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \therefore \quad F'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{|f'(x)|^2} \quad (II.6)$$

for menor do que a unidade no intervalo  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , a onde  $\alpha$  é uma raiz da equação  $f(x) = 0$ .

### 2.1.1 - Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson pode ser aplicado na solução do sistema de equações algébricas não-lineares descrito em (II.2).

Partindo de uma solução aproximada para a equação (II.2)  $\underline{U} = \underline{U}^n$  obtém-se uma melhor aproximação através da aplicação da série de Taylor limitada a dois termos:

$$\underline{\psi}(\underline{U}^{n+1}) = \underline{\psi}(\underline{U}^n) + \left(\frac{d\underline{\psi}}{d\underline{U}}\right)_{\underline{U}^n} \Delta \underline{U}^n = 0 \quad (II.7)$$

Com

$$\underline{U}^{n+1} = \underline{U}^n + \Delta \underline{U}^n \quad (II.8)$$

Onde

$$\frac{d\psi}{d\bar{U}} = \frac{dQ}{d\bar{U}} = \underline{K}_T(\bar{U}) \quad (II.9)$$

representa a matriz tangente.

O método de Newton-Raphson constará de uma sequência de cálculos nos quais a estrutura é inteiramente carregada a cada iteração. Note-se em (II.5) e (II.7) que a cada iteração é usado um valor diferente de rigidez e o equilíbrio não é necessariamente satisfeito. Assim, após cada iteração a parcela do carregamento total que não é equilibrada deverá ser calculada e utilizada na próxima iteração para calcular um incremento adicional nos deslocamentos.

Podemos obter o valor de  $\Delta\bar{U}^n$  resolvendo o sistema de equações lineares:

$$\underline{K}_T(\bar{U}^n) \Delta\bar{U}^n = \bar{P} - \underline{Q}(\bar{U}^n) \quad (II.10)$$

Onde  $\bar{P}$  é a carga total aplicada e  $\underline{Q}(\bar{U}^n)$  é a carga equilibrada na etapa anterior.

Obtido desta forma o valor de  $\Delta\bar{U}^n$ , através de sua substituição na equação (II.8) obteremos o valor melhorado  $\bar{U}^{n+1}$ .

O processo deverá ser repetido até que seja atingido o equilíbrio dentro da tolerância previamente escolhida. Essencialmente pois, o processo consiste de correções sucessivas.

vas a uma solução até que o equilíbrio sob a carga total seja atingido (Figura II.2a).

### 2.1.2 - Método de Newton-Raphson Modificado

Procurando reduzir o esforço computacional a que somos conduzidos pela necessidade de calcular uma nova matriz de rigidez tangente e resolver um sistema de equações completamente novo a cada iteração, é frequente adotar uma aproximação escrevendo [2]:

$$\underline{\underline{K}}_T^n = \underline{\underline{K}}_T^0 \quad (II.11)$$

Desta forma alteramos o algoritmo da expressão (II.10) obtendo:

$$\underline{\underline{K}}_T^0 \Delta \underline{u}^n = \underline{P} - \underline{Q}(\underline{u}^n) \quad (II.12)$$

Que nos permite efetuar uma única vez a triangulação de  $\underline{\underline{K}}_T^0$ , conduzindo, por este lado a uma grande economia de esforço computacional em cada iteração. Por outro lado, o processo modificado necessitará de um maior número de iterações resultante da falta de atualização da matriz de rigidez tangente, podendo, em muitos casos, neutralizar a economia obtida (Figura II.2b).

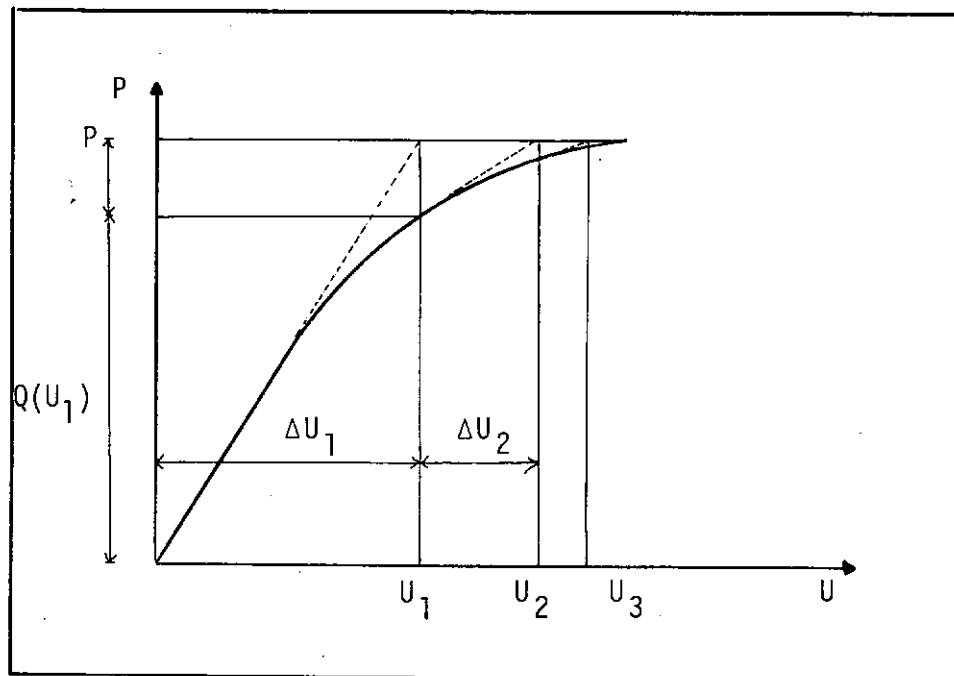


Figura II.2a - Método de Newton-Raphson

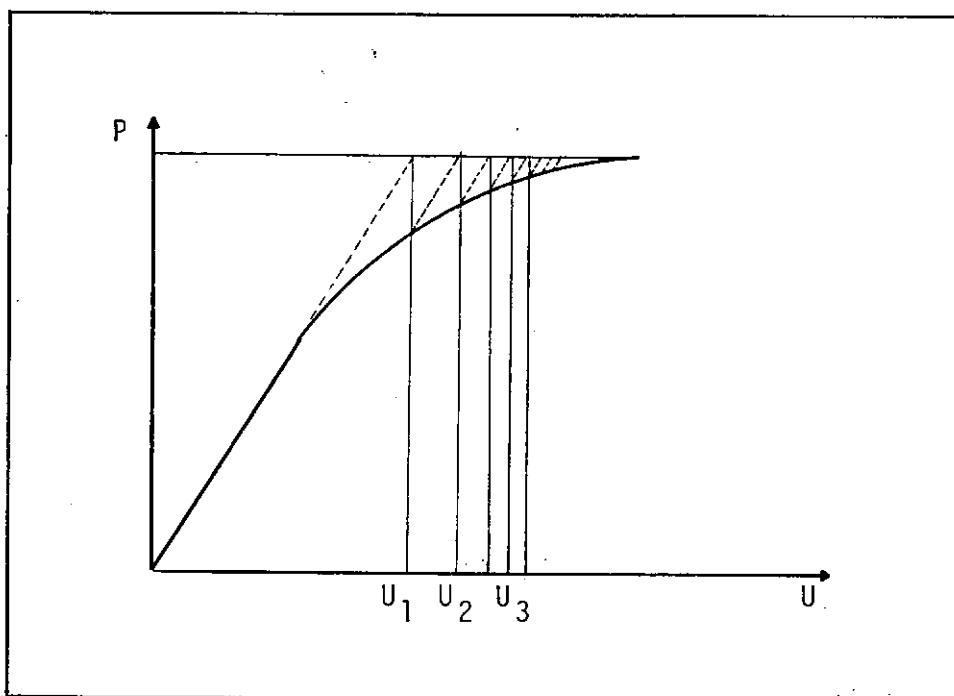


Figura II.2b - Método de Newton-Raphson Modificado

## 2.2 - MÉTODO INCREMENTAL

A base do processo incremental é a subdivisão do carregamento em cargas parciais ou incrementos de carga que comumente podem ter a mesma magnitude. Para cada incremento de carga as equações de equilíbrio são supostas lineares, assumindo-se um valor constante de  $K$  em (II.2) que poderá, entretanto, variar de incremento para incremento. A solução para cada incremento de carga consiste numa parcela de deslocamentos  $\underline{U}$ , cuja acumulação dará o deslocamento total para um dado carregamento. O processo incremental é repetido até que o carregamento total tenha sido atingido.

Essencialmente o processo incremental aproxima o problema não-linear como uma série de problemas lineares.

Para a aplicação do processo incremental precisamos partir de uma configuração carga-deslocamento conhecida, a qual servirá como estado inicial ou de referência para o problema em estudo. De um modo geral partimos do estado indeformado fazendo uso do fato de que o vetor de incógnitas  $\underline{U}$  é conhecido quando o termo  $\underline{P}$  da equação é nulo. Estuda-se, portanto, o comportamento de  $\underline{U}$  ao incrementar o vetor  $\underline{P}$ .

A carga total é dividida em  $m$  incrementos:

$$\underline{P} = \sum_{j=1}^m \Delta \underline{P} \quad (\text{II.13})$$

Depois da aplicação do  $i$ -ésimo incremento a carga é dada por

$$\tilde{P}_i = \sum_{j=1}^i \Delta \tilde{P}_j \quad (II.14)$$

A equação (II.2) pode ser escrita sob a forma:

$$\tilde{Q}(\tilde{U}) - \lambda \tilde{P}_0 = 0 \quad (II.15)$$

Diferenciando (II.15) em relação ao parâmetro  $\lambda$ , obtem-se:

$$\frac{d\tilde{Q}(\tilde{U})}{d\tilde{U}} \cdot \frac{d\tilde{U}}{d\lambda} - \tilde{P}_0 = 0 \quad (II.16)$$

Considerando pequenos incrementos do parâmetro  $\lambda$ :

$$\tilde{K}_T(\tilde{U}) \frac{\Delta \tilde{U}}{\Delta \lambda} = \tilde{P}_0 \quad (II.17)$$

Onde  $\tilde{K}_T$  é a matriz tangente descrita anteriormente.

Na etapa m: teremos:

$$\tilde{K}_T(\tilde{U}_m) \Delta \tilde{U}_m = \Delta \lambda \tilde{P}_0 \quad (II.18)$$

$$\tilde{K}_T(\tilde{U}_m) \Delta \tilde{U}_m = \Delta \tilde{P}_m \quad (II.19)$$

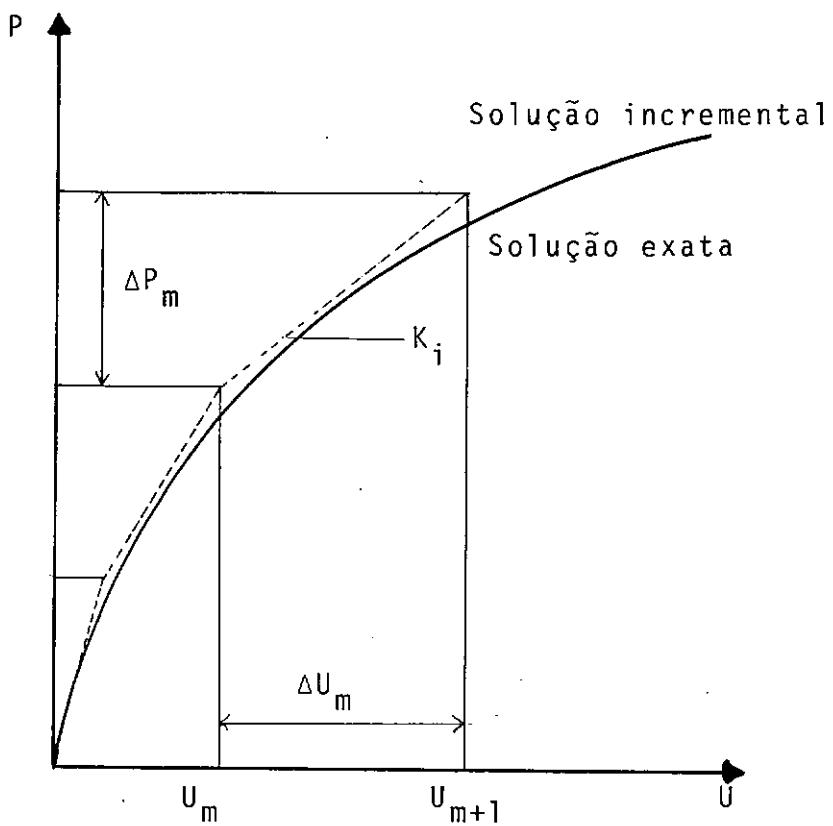


Figura II.3. - Método Incremental

Teremos então:

$$\tilde{U}_{m+1} = \tilde{U}_m + \Delta \tilde{U}_m \quad (\text{II.20})$$

$$\tilde{P}_{m+1} = \tilde{P}_m + \Delta \tilde{P}_m \quad (\text{II.21})$$

O processo incremental é esquematicamente indicado na Figura II.3. Esse método é análogo aos métodos numéricos usados para a integração de sistemas de equações diferenciais lineares ou não lineares, tais como o método de Euler e as técnicas de Runge-Kutta.

A precisão do processo incremental pode ser melhorada através da diminuição do incremento de carga, por exemplo através de sua redução à metade. Contudo, como precisaremos computar para cada etapa do processo uma nova matriz de rigidez, o crescimento da precisão é obtido às expensas de um aumento sensível no esforço computacional.

### 2.3 - MÉTODOS INCREMENTAIS-ITERATIVOS OU MISTOS

Trata-se neste caso de uma associação entre os dois métodos citados anteriormente, sendo considerado por alguns autores como um refinamento do processo incremental |<sup>1</sup>|.

Se na equação (II.19) toma-se para o incremento de carga um valor suficientemente pequeno, é de se esperar que os vetores  $\tilde{U}_m$  gerados por (II.19) representem aproximações ra-

zôaveis de (II.15). Considerando-se, porém, o caráter não linear do sistema, erros inevitáveis irão se acumulando a cada etapa do processo. Um modo de reduzir estes erros é utilizar cada  $\tilde{U}_m$  gerado por (II.19) e (II.20) como uma estimativa inicial para o desenvolvimento de um processo iterativo.

A equação (II.2) pode ser reescrita como:

$$\tilde{Q}(\tilde{U}_{m+1}^{n+1}) - \lambda_{m+1} \tilde{P}_0 = \tilde{Q}(\tilde{U}_{m+1}^n) - \lambda_{m+1} \tilde{P}_0 + \tilde{K}_T(\tilde{U}_{m+1}^n) \Delta \tilde{U}_{m+1} = 0 \quad (II.22)$$

Onde  $m$  é o índice que controla o número de incrementos e  $n$  o controle do número de iterações a cada incremento.

$$\tilde{K}_T(\tilde{U}_{m+1}^n) \Delta \tilde{U}_{m+1}^n = \lambda_{m+1} \tilde{P}_0 - \tilde{Q}(\tilde{U}_{m+1}^n) \quad (II.23)$$

Assim, o vetor correspondente a uma aproximação encontrada na etapa  $m+1$  de carregamento será:

$$U_{m+1}^{n+1} = U_{m+1}^n + \Delta U_{m+1}^n \quad (II.24)$$

A partir da primeira aproximação para os deslocamentos, que é calculada por processos puramente incrementais pela equação (II.19), calculamos as forças residuais e damos início ao processo iterativo, o que será feito com a utilização da equação (II.23) e que nos conduzirá à possibilidade de dois procedimentos:

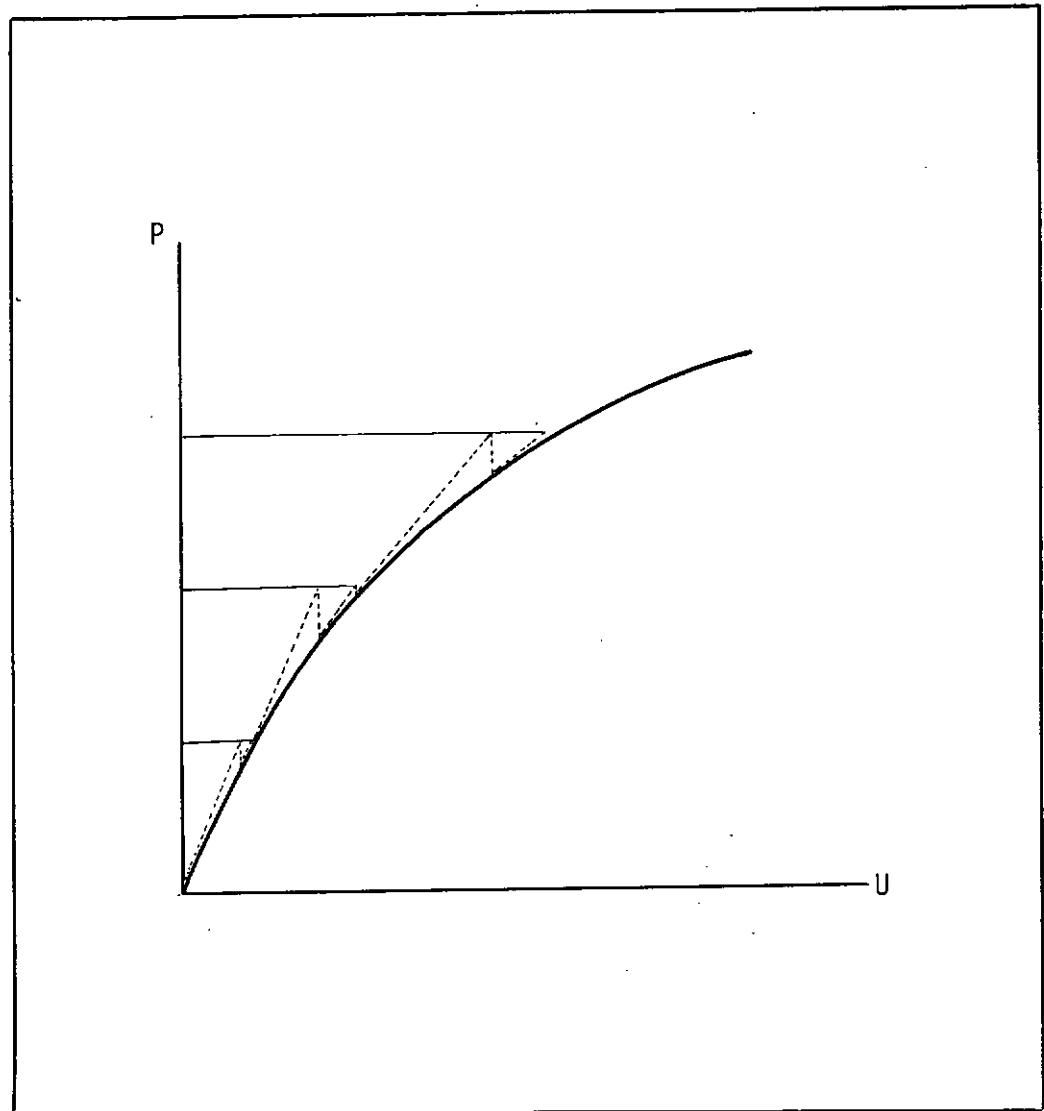


Figura II.4 :- Método incremental-iterativo com Newton-Raphson

- atualizar continuamente a matriz  $K_T$  realizando, desta maneira, as iterações pelo método de Newton-Raphson (ver Figura (II.4));
- manter a matriz de rigidez constante para todas as iterações realizadas em um dado incremento e de valor igual ao inicial ou recalculado para a primeira iteração, em ambas as situações, configurando a modalidade modificada do método de Newton-Raphson.

Dentre as diversas possibilidades de procedimentos para a solução de equações algébricas não-lineares não há pré-definição de qual a melhor. O procedimento a ser usado deve râ sempre ser escolhido em função do tipo de problema a ser resolvido, do grau de não-linearidade envolvido, da precisão exigida, da facilidade de aplicação, do número de equações e do esforço computacional requerido |<sup>3</sup>|.

A principal vantagem do processo incremental é sua completa generalidade, sendo aplicável a quase todos os comportamentos não-lineares. Além disso, esse processo fornece uma descrição relativamente completa do comportamento carga-de formação. Entre suas desvantagens se encontra o maior consumo de tempo computacional em comparação com os métodos iterativos e a dificuldade de estimar antecipadamente o incremento de carga a ser utilizado de forma a obter uma boa aproximação da solução exata. Dessa forma, a menos que se tenha uma solução exata ou experimental é extremamente difícil julgar uma determinada

solução incremental obtida |<sup>14</sup>|.

Quanto aos métodos iterativos são mais fáceis de programar que o método incremental, além de serem também bastante rápidos. Sua desvantagem entretanto é que eles não possuem assegurada a sua convergência em casos em que a solução não-linear difira muito da linear. Uma outra limitação é que os deslocamentos, tensões e deformações são determinados unicamente para a carga total nada se conhecendo sobre os estágios intermediários de carga.

No caso específico da não-linearidade física os métodos incrementais são bastante utilizados para a obtenção de uma primeira estimativa ou mesmo podem ser bastante eficientes na obtenção de uma solução a depender da aproximação exigida. Vale notar que a acumulação sucessiva de erros residuais pode levar a aproximações grosseiras no caso de problemas acentuadamente não-lineares. Isso pode ser contornado pela redução do incremento o que, por outro lado, conduzirá a maior esforço computacional.

Desta forma, o algoritmo mais indicado no caso de problemas altamente não-lineares é o do tipo misto, que combina as vantagens dos métodos incremental e iterativo e tende a minimizar-lhes as desvantagens produzindo soluções de convergência garantida e precisão aceitável. O esforço computacional adicional é justificado pelo fato de que as iterações permitem uma avaliação da qualidade do equilíbrio aproximado em cada etapa.

CAPÍTULO IIIMÉTODOS DE RESOLUÇÃO DOS  
SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Os métodos de análise de estruturas não-lineares consistem geralmente da solução de uma série de problemas linearizados em intervalos discretos de tempo ou carga onde cada etapa requer a solução de um sistema de equações lineares do tipo:

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{P} \quad (\text{III.1})$$

Onde  $\underline{A}$  é uma matriz simétrica e esparsa,  $\underline{X}$  o vetor das incógnitas e  $\underline{P}$  o vetor dos termos independentes.

Para sistemas com grande número de incógnitas, a solução das equações constitui a maior parcela do tempo de processamento gasto. Quando a solução é repetida muitas vezes o esforço computacional pode tornar-se exagerado.

Ao analisarmos estruturas apresentando não-linearidade física localizada através dos mesmos procedimentos numéricos e computacionais utilizados nos casos mais gerais em que a não-linearidade atinge todo o sistema seremos conduzidos a soluções desnecessariamente dispendiosas e muitas vezes economicamente inviáveis. Isto porque, se temos em mãos um sistema em que a não-linearidade afeta apenas um número reduzido de graus de liberdade e a ele aplicamos processos gerais, estaremos, por

tanto, desperdiçando esforço computacional, visto que ao negligenciarmos o caráter localizado da não-linearidade, negligenciamos também as simplificações a que sua consideração nos levaria e com isso somos conduzidos a realizar grande número de operações desnecessárias, tais como, voltar a decompor a cada etapa grande parcela da matriz  $\tilde{A}$  que não sofre alteração, visto ter ela comportamento linear na maioria dos seus graus de liberdade.

Levando esse fato em consideração foram conduzidos numerosos estudos visando desenvolver algoritmos que dessem tratamento seletivo às partes do sistema estrutural sujeitas à não-linearidade [5, 6, 8].

Dentre os algoritmos desenvolvidos destacam-se dois tipos:

- Tipo decomposição parcial - efetuam a decomposição parcial das sucessivas matrizes de rigidez tangentes.
- Tipo subestruturas - utilizam as técnicas de dividir o domínio do problema em regiões, denominadas subestruturas, com a posterior condensação dos graus de liberdade das subestruturas de comportamento linear.

### 3.1 - DECOMPOSIÇÃO PARCIAL DA MATRIZ TANGENTE

Os métodos diretos mais utilizados para a solução de (III.1) baseiam-se no método de eliminação de Gauss. Há, no entanto, grande número de procedimentos que levam em consideração o caráter esparso da matriz  $\tilde{A}$ . Recentemente parece haver uma crescente concordância entre os diversos autores sobre a superioridade dos métodos que adotam o esquema de armazenamento dos elementos de  $\tilde{A}$  em colunas ativas [4, 5, 6, 8, 9, 10, 11] e dos chamados métodos de solução frontal [12] para análise estática linear. Na análise dinâmica e na análise não-linear a maior preferência tem sido dada ao esquema de colunas ativas.

Assim, para a solução de (III.1) adotou-se no presente trabalho o esquema de armazenamento do tipo colunas ativas (tal como pode ser visto na Figura III.1), juntamente com as variantes de Crout e Cholesky [5, 9, 10]. Vale observar que a melhor "performance" dos dois métodos é alcançada estabelecendo-se uma relação ótima entre o número mínimo de operações efetuadas com elementos nulos e a quantidade de testes adicionais requeridos para evitar estas operações [9].

No caso de estruturas que apresentam não-linearidade física localizada observa-se que é relativamente pequeno o número de graus de liberdade afetados por este caráter não-linear e é possível em um grande número de casos numerar inicialmente os graus de liberdade correspondentes às partes lineares da estrutura e posteriormente os graus de liberdade associados

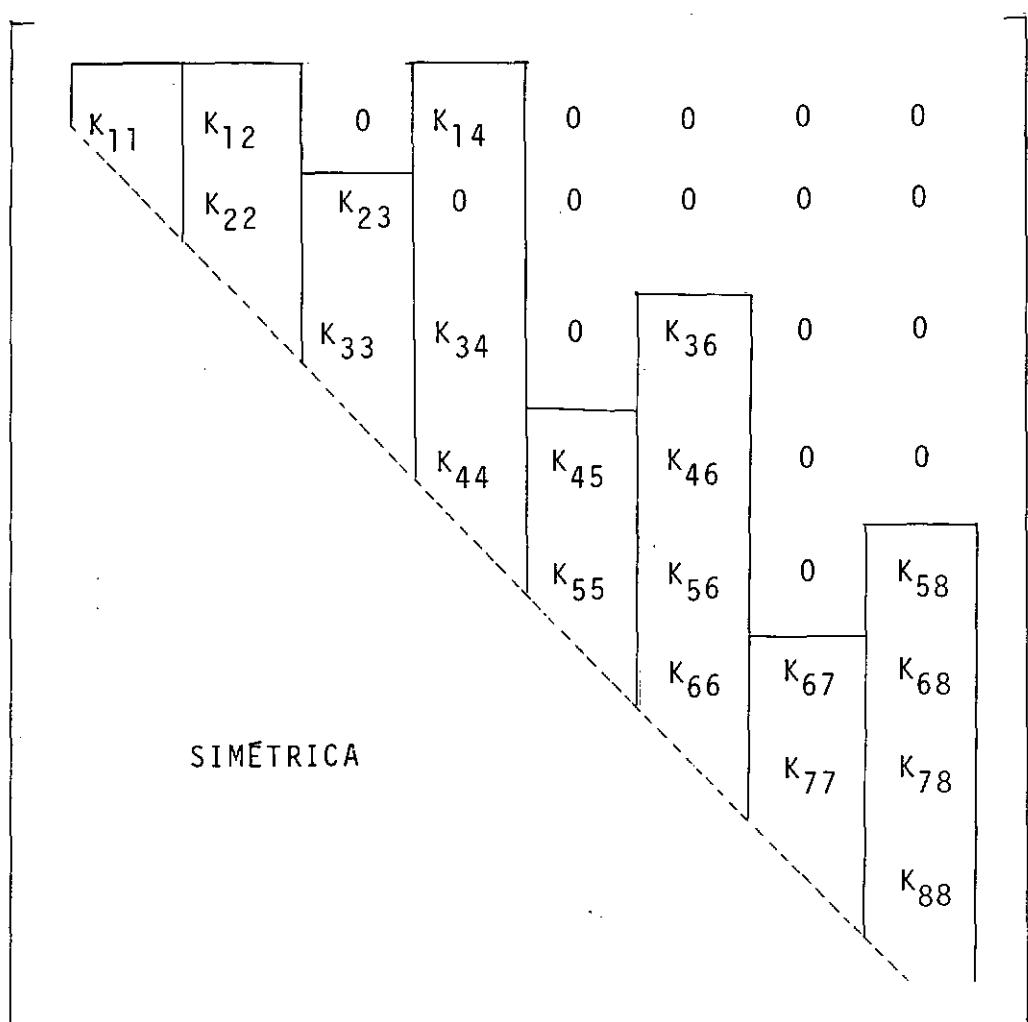


Figura III.1 - Armazenamento por colunas ativas

ao comportamento não-linear, sem comprometer em demasia o caráter esparso da matriz de rigidez tangente. Assim, só se farão necessárias novas reduções para as equações correspondentes à parte não-linear da estrutura, que estarão situadas a partir da equação de número  $p$  no sistema de  $n$  equações.

### 3.1.1 - Algoritmos Básicos

A maioria dos algoritmos existentes, procurando minimizar o esforço na resolução de sistemas de equações, obtém soluções após realizar as seguintes etapas:

Etapa 1 - Sendo dada a equação (III.1):

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{P} \quad (\text{III.1})$$

Onde  $\underline{A}$  é uma matriz de dimensão  $n \times n$ , simétrica e não singular,  $\underline{X}$  e  $\underline{P}$  vetores de dimensão  $n \times 1$ , respectivamente vetor de incógnitas e de cargas aplicadas.

Etapa 2 - É feita a redução de  $\underline{A}$ :

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{U} \quad (\text{III.2})$$

Onde  $\underline{L}$  é uma matriz triangular inferior e  $\underline{U}$  uma matriz triangular superior, ambas de dimensão  $n \times n$ .

Etapa 3 - É feita a redução do vetor  $\underline{P}$

$$\underline{L} \underline{Y} = \underline{P} \quad (\text{III.3})$$

Sendo  $\underline{Y}$  vetor de incógnitas de dimensão  $n \times 1$ .

Etapa 4 - E finalmente é feita a retrosubstituição:

$$\underline{U} \underline{X} = \underline{Y} \quad (\text{III.4})$$

sendo obtidos os valores das incógnitas  $\underline{X}$ .

### 3.1.1.1 - Método de Crout

No método de Crout a matriz  $\underline{A}$  de (III.1) de dimensão  $n \times n$  é decomposta no produto:

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{D} \underline{L}^T \quad (\text{III.5})$$

Onde  $\underline{L}$  é uma matriz triangular inferior de dimensão  $n \times n$  e elementos unitários na diagonal e  $\underline{D}$  é uma matriz diagonal de mesma dimensão.

O algoritmo para cálculo dos elementos  $L_{ij}$  e  $D_{jj}$  da coluna  $j$  é dada por:

$$G_{ij} = A_{ij} - \sum_{r=m_0}^{i-1} L_{ri} G_{rj} \quad (III.7)$$

$m_0 = \max(m_i, m_j)$

$$L_{ij} = G_{ij}/D_{ii} \quad i = m_j, \dots, j-1 \quad (III.8)$$

$$D_{jj} = A_{jj} - \sum_{i=m_j}^{j-1} L_{ij} G_{ij} \quad (III.9)$$

sendo  $m_i$  o número da linha do primeiro elemento não nulo da coluna  $i$ .

Nota-se, a partir de observações de (III.7) a (III.9), que a redução de um elemento  $A_{ij}$  é afetada apenas pelos elementos anteriormente reduzidos  $G_{rj}$  e  $L_{ri}$  ( $r \leq i$ ).

Desta forma, se as modificações efetuadas em  $A$  foram feitas apenas a partir da linha  $p$ , permanecerão inalterados os elementos das matrizes  $L$  e  $D$  acima da linha  $p$ . Somente será necessária nova redução para os elementos de  $A$  situados a partir da linha  $p$ , ou seja:

$$G_{ij} = A_{ij} - \sum_{r=m_0}^{p-1} L_{ri} L_{rj} D_{rr} - \sum_{r=p}^{i-1} L_{ri} G_{rj} \quad (III.10)$$

$$j = p, \dots, n; i = \max(p, m_j + 1), \dots, j-1$$

$$D_{jj} = A_{jj} - \sum_{r=m_j}^{p-1} L_{rj} L_{rj} D_{rr} - \sum_{r=p}^{i-1} L_{rj} G_{rj} \quad (III.11)$$

$$j = p, \dots, n$$

$$L_{ri} = G_{ri}/D_{rr} \quad r \geq p \quad (III.12)$$

Para as etapas 3 e 4 da solução, a redução do vetor  $\underline{P}$  e a retrosubstituição, não há alteração dos algoritmos, visto que em ambos os casos elas devem ser realizadas integralmente utilizando as seguintes equações:

Redução de  $\underline{P}$ :

$$P_i = P_i - \sum_{r=m_0}^{i-1} L_{ri} P_r \quad i = m_p + 1, \dots, n \quad (III.13)$$

$$P_i = P_i / D_{ii} \quad i = m_p, \dots, n \quad (III.14)$$

onde  $m_p$  é o número da linha do primeiro elemento não nulo de  $\underline{P}$ .

Retrosubstituição:

$$X_r = P_r \quad r = 1, \dots, n \quad (III.15)$$

$$X_r = X_r - L_{ri} X_i \quad (III.16)$$

$$i = n, n-1, \dots, 2$$

$$r = m_i, m_i+1, \dots, i-1$$

### 3.1.1.2 - Método de Cholesky

No método de Cholesky a redução da matriz  $\tilde{A}$  de (III.1) é realizada através da sua decomposição no produto:

$$\tilde{A} = \tilde{L} \tilde{L}^T \quad (\text{III.17})$$

onde  $\tilde{L}$  é uma matriz triangular inferior.

O algoritmo usado para calcular os elementos  $L_{ij}$  correspondentes à coluna  $j$  é dado por:

$$L_{jj} = \sqrt{A_{jj} - \sum_{r=m_j}^{j-1} L_{rj}^2} \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{III.18})$$

e

$$L_{ij} = (A_{ij} - \sum_{r=m_0}^{i-1} L_{ri} L_{rj}) / L_{ii} \quad (\text{III.19})$$

$$j = 1, \dots, n; i = m_j, \dots, j-1$$

sendo a definição de  $m_j$  e  $m_0$  idêntica à do método de Crout.

De maneira análoga ao método anterior, verifica-se que, também aqui, a redução de um elemento  $A_{ij}$  só é afetada pelos elementos anteriormente reduzidos  $L_{ij}$ ,  $L_{rj}$  ( $r \leq i$ ). Deste modo, se os elementos de  $\tilde{A}$  acima da linha  $p$  não sofrem alteração, os elementos de  $\tilde{L}$  correspondentes também permanecem inalterados.

rados. Para os elementos situados abaixo da linha p nova redução se fará necessária e deverá ser feita utilizando:

$$L_{jj} = \sqrt{A_{jj} - \sum_{r=m_j}^{j-1} L_{rj}^2} \quad j = p, \dots, n \quad (\text{III.20})$$

$$L_{ij} = (A_{ij} - \sum_{r=m_0}^{i-1} L_{ri} L_{rj}) / L_{ii} \quad (\text{III.21})$$

$$i = \max(p, m_j), \dots, j-1$$

Da mesma forma que no caso anterior, não há modificação no que diz respeito à redução de  $\underline{P}$  e à retrosubstituição, tendo em vista que ambas devem ser feitas integralmente nas duas situações, utilizando os seguintes algoritmos:

Redução de  $\underline{P}$ :

$$P_i = (P_i - \sum_{r=m_0}^{i-1} L_{ri} P_r) / L_{ii} \quad (\text{III.22})$$

$$i = m_p, \dots, n$$

Retrosubstituição:

$$X_r = P_r \quad r = 1, \dots, n \quad (\text{III.23})$$

$$X_i = X_i / L_{ii} \quad i = n, n-1, \dots, 1 \quad (\text{III.24})$$

Observando-se as fórmulas de redução dos métodos de Crout e Cholesky podemos verificar a maior eficiência do método de Crout para o caso de uma única redução da matriz  $\underline{A}$ , tendo em vista que neste caso o método de Cholesky requer um acréscimo de  $n$  raízes quadradas e  $n$  divisões. Porém, no caso das reduções parciais, o método de Cholesky mostra-se mais eficiente uma vez que os somatórios das equações (III.10) e (III.11) do método de Crout incluem duplas multiplicações se  $m_0$  é menor que  $p$ , enquanto que no método de Cholesky esses produtos internos permanecem essencialmente os mesmos, como pode ser observado por comparação entre as equações (III.18) e (III.20) e (III.19) e (III.21).

Tendo em vista estas observações adotou-se o método de Cholesky para efetuar as reduções parciais dos sistemas estruturais com não-linearidade localizada a partir do grau de liberdade  $p$ .

### 3.2 - SUBESTRUTURAS E CONDENSAÇÃO

A análise por subestruturas é uma técnica bastante conhecida e estudada [4, 6], cujos princípios básicos são os seguintes: Sejam duas subestruturas quaisquer, denominadas de 1 e 2. No caso mais geral haverá três tipos de nós: aqueles pertencentes à subestrutura 1, somente, aqueles comuns a ambas as subestruturas e, finalmente, aqueles pertencentes somente à subestrutura 2. Os graus de liberdade correspondentes a estes nós serão reunidos nos subvetores  $\underline{x}_1$ ,  $\underline{x}_2$  e  $\underline{x}_3$  respectivamente.

Deste modo o sistema de equação (III.1) poderá ser escrito em forma de submatrizes:

$$\begin{vmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \\ \tilde{A}_{12}^T & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} \\ \tilde{A}_{23}^T & \tilde{A}_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \\ \tilde{P}_3 \end{vmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Onde podemos obter a equação:

$$\tilde{A}_{11} \tilde{x}_1 + \tilde{A}_{12} \tilde{x}_2 = \tilde{P}_1 \quad (\text{III.27})$$

Fazendo a redução pelo método de Cholesky temos que:

$$\tilde{A}_{11} = \tilde{L}_{11} \tilde{L}_{11}^T \quad (\text{III.28})$$

Dessa forma, em (III.27) ficamos com:

$$\tilde{L}_{11} \tilde{L}_{11}^T \tilde{x}_1 + \tilde{A}_{12} \tilde{x}_2 = \tilde{P}_1 \quad (\text{III.29})$$

Ao pré-multiplicarmos por  $\tilde{L}_{11}^{-1}$ :

$$\tilde{L}_{11}^T \tilde{x}_1 + \tilde{L}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12} \tilde{x}_2 = \tilde{L}_{11}^{-1} \tilde{P}_1 \quad (\text{III.30})$$

$$\underline{L}_{21}^t = \underline{L}_{11}^{-1} \underline{A}_{12} \quad (\text{III.31})$$

$$\underline{R}_1 = \underline{L}_{11}^{-1} \underline{P}_1 \quad (\text{III.32})$$

representam as reduções das matrizes  $\underline{A}_{12}$  e  $\underline{P}_1$ . Com isso obtemos:

$$\left| \begin{array}{ccc|c|c} \underline{L}_{11}^T & \underline{L}_{21}^T & & \underline{x}_1 & \underline{R}_1 \\ \underline{A}_{12}^T & \underline{A}_{22} & \underline{A}_{23} & \underline{x}_2 & \underline{P}_2 \\ & & & \underline{x}_3 & \underline{P}_3 \end{array} \right| = \quad (\text{III.33})$$

Pré-multiplicando-se a primeira equação de (III.33) por  $\underline{L}_{21}^t$  e subtraindo-se da segunda obtem-se:

$$\underline{L}_{21} \underline{L}_{11}^t \underline{x}_1 + \underline{L}_{21} \underline{L}_{21}^t \underline{x}_2 = \underline{L}_{21} \underline{R}_1 \quad (\text{III.34})$$

$$\underline{A}_{12}^t \underline{x}_1 + \underline{A}_{22} \underline{x}_2 + \underline{A}_{23} \underline{x}_3 = \underline{P}_2 \quad (\text{III.35})$$

$$(\underline{A}_{22} - \underline{L}_{21} \underline{L}_{21}^t) \underline{x}_2 + \underline{A}_{23} \underline{x}_3 = \underline{P}_2 - \underline{L}_{21} \underline{R}_1 \quad (\text{III.36})$$

Onde:

$$\underline{A}_{22}^* = \underline{A}_{22} - \underline{L}_{21} \underline{L}_{21}^t \quad (\text{III.37})$$

$$\underline{P}_2^* = \underline{P}_2 - \underline{L}_{21} \underline{R}_1 \quad (\text{III.38})$$

Ficamos portanto com:

$$\left| \begin{array}{cc|c|c} L_{11}^t & L_{21}^t & \tilde{x}_1 & R_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & A_{22}^* & \tilde{x}_2 & P_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & A_{23}^t & \tilde{x}_3 & P_3 \\ \vdots & A_{33}^t & \tilde{x}_3 & P_3 \end{array} \right| \quad (III.39)$$

O vetor  $\tilde{x}_1$  das incógnitas poderá ser obtido por retro-substituição na primeira equação de (III.39) a partir dos valores de  $\tilde{x}_2$ .

Supondo que seja  $p$  o número de equações a serem eliminadas, a redução parcial dessas equações pelo método de Cholesky será efetuada através de:

$$L_{jj} = \sqrt{A_{jj} - \sum_{r=m_j}^{j-1} L_{rj}^2} \quad j=1, 2, \dots, p \quad (III.40)$$

$$L_{ij} = (A_{ij} - \sum_{r=m_0}^{i-1} L_{ri} L_{rj}) / L_{ii} \quad (III.41)$$

$$j = 2, \dots, n$$

$$i = m_j, \dots, \min(p, j-1)$$

A redução parcial do vetor  $\tilde{P}$  ficará:

$$R_i = (P_i - \sum_{r=m_a}^{i-1} L_{ri} R_r) / L_{ii} \quad i = m_p, \dots, p \quad (III.42)$$

Onde  $m_p$  é o número da linha do primeiro elemento não nulo do vetor  $P$  e  $m_a = \max(m_i, m_p)$ .

Através do desenvolvimento dessa técnica foi obtido um modo de reduzir o número de graus de liberdade e correspondentemente, o número de incógnitas que devem ser mantidas na memória do computador em um dado tempo durante o processo de solução. A motivação inicial para esse desenvolvimento foi visando conseguir resolver sistemas estruturais muito grandes com relativamente pouca ocupação da memória do computador.

Reportando-nos ao caso em estudo, "não-linearidade física localizada", onde o primeiro grau de liberdade de comportamento não linear é o de número  $p$ , podemos verificar a aplicabilidade ao caso da técnica da subestruturação, tendo em vista que o sistema pode ser dividido em duas partes:

- a primeira parte, parte inicial, que vai até a coluna  $p-1$  e que se comporta linearmente, apresentando coeficientes da matriz de rigidez que não variam ao longo do processo.
- a segunda parte que se estende da coluna  $p$  à coluna  $n$  e na qual se encontram todos os graus de liberdade correspondentes a comportamento não-linear.

Tendo em vista a linearidade da parte 1 da matriz e a ocorrência de modificações apenas na parte 2, corresponderá a um grande aumento da eficiência computacional se condensarmos

a parte 1 de  $\underline{A}$  e passarmos a trabalhar apenas com a parte 2 de modo a obtermos os deslocamentos correspondentes e só após atingirmos a convergência exigida para  $\underline{x}_2$ , partirmos para a determinação dos valores de  $\underline{x}_1$ .

Com isso, ao invés de precisarmos resolver um sistema  $n \times n$ , passamos a trabalhar sob considerações de não-linearidade com um sistema bem menor de dimensão  $(n-p+1) \times (n-p+1)$ .

## CAPÍTULO IV

### ELEMENTOS NÃO-LINEARES IMPLEMENTADOS

Em grande número de aplicações podem ser vantajosas as técnicas aqui descritas para a análise de estruturas apresentando não-linearidade física localizada. Com o objetivo de demonstrar as inúmeras vantagens que advém da aplicação destas técnicas específicas foram desenvolvidos e implementados dois tipos de elementos não-lineares: elemento tipo mola não-linear aplicado a um único grau de liberdade e elemento de junta.

Com estes dois elementos, apresentados a seguir, foram processados vários exemplos que permitem demonstrar a maior eficiência das técnicas apresentadas para considerar o caráter localizado da não-linearidade em comparação com uma análise do tipo geral.

#### 4.1 - ELEMENTO DE MOLA NÃO-LINEAR

Programou-se um elemento de mola não linear aplicado a um único grau de liberdade, cuja rigidez é determinada a partir da curva força-deslocamento da mola não-linear, fornecida por pontos. Como o elemento de mola não-linear está aplicado a um único grau de liberdade, sua matriz de rigidez fica reduzida somente ao termo da diagonal.

A curva força-deslocamento para uma mola não-linear pode ter o aspecto apresentado na Figura IV.1:

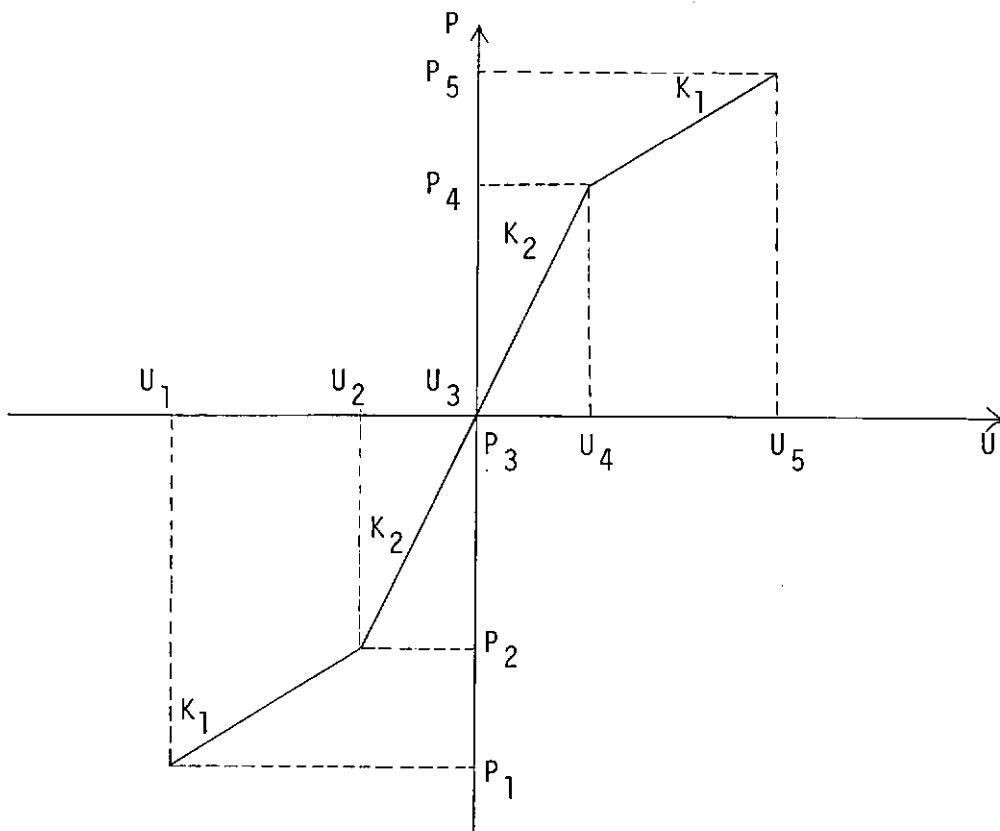


Figura IV.1

A rigidez da mola não linear é função do seu deslocamento, sendo definida através da curva força-deslocamento, de modo que:

- a) Se o deslocamento da mola se encontra em um intervalo  $(u_n, u_{n+1})$  no qual sua rigidez é constante, ela será determinada a partir de:

$$K = \frac{P_{n+1} - P_n}{u_{n+1} - u_n} \quad (IV.1)$$

- b) Se o deslocamento coincide com um ponto  $u_n$  de inflexão da curva, a rigidez será determinada como sendo a média aritmética entre os valores de rigidez dos intervalos à esquerda e à direita do ponto de inflexão:

$$K_1 = \frac{P_n - P_{n-1}}{u_n - u_{n-1}} \quad (IV.2)$$

$$K_2 = \frac{P_{n+1} - P_n}{u_{n+1} - u_n} \quad (IV.3)$$

$$K = \frac{K_1 + K_2}{2} \quad (IV.4)$$

A força equilibrada pela mola é determinada diretamente a partir da curva força-deslocamento, observando:

- a) Se o deslocamento  $u$  se encontra em um intervalo  $(u_n, u_{n+1})$  de rigidez  $K$ , a força será determinada por:

$$P(u) = P(u_n) + K \cdot (u - u_n) \quad (IV.5)$$

- b) Se o deslocamento coincide com um ponto  $u_n$  de inflexão da curva, a força poderá ser retirada diretamente:

$$P(u) = P(u_n) \quad (IV.6)$$

4.2 - ELEMENTO DE JUNTA

Os elementos de junta são utilizados para representar falhas e descontinuidades em um meio contínuo. De um modo geral, as juntas apresentam as seguintes características:

- a) Não possuem espessura, assemelhando-se a uma linha irregular em uma representação bidimensional.
- b) Não resistem a esforços de tração na direção normal.
- c) Oferecem alta resistência à compressão na direção normal.
- d) Quando sob compressão podem transmitir tensões cisalhantes paralelas à sua direção produzindo tendência para um bloco deslocar-se nas asperezas do outro. A resistência ao cisalhamento é friccional mas em caso de ruína por cisalhamento ao longo das juntas há contribuição friccional e de coesão na resistência ao cisalhamento.

Neste trabalho foi implementado o elemento de junta com quatro pontos nodais desenvolvidos por Goodman et al. [16, 17]. Este elemento tem comprimento L e espessura zero de modo que, inicialmente os pares de pontos nodais (1, 4) e (2,3) tem coordenadas idênticas.

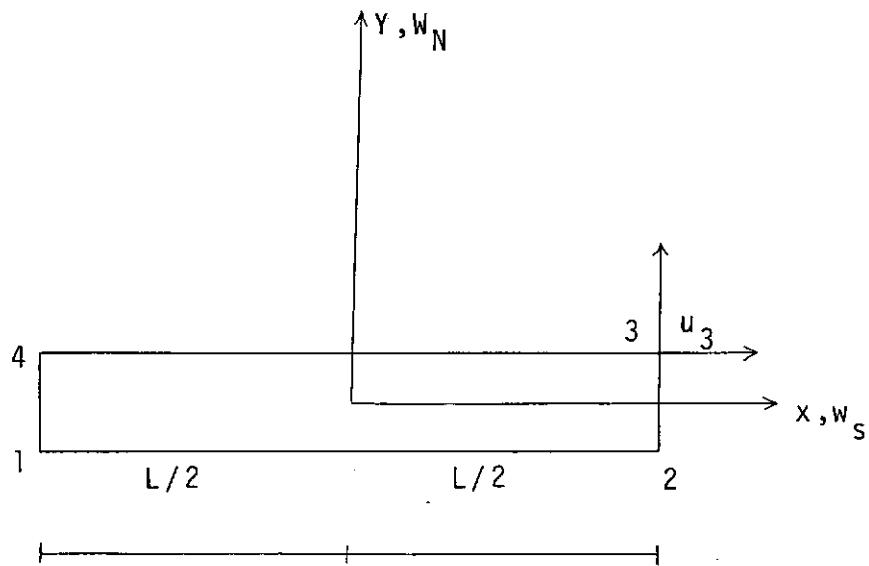


Figura IV.2 - Elemento de junta

A energia total do elemento será igual à soma dos trabalhos das forças por unidade de comprimento para os deslocamentos correspondentes.

Assim, temos:

$$\phi = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{P}} \, dx \quad (IV.7)$$

Onde  $\underline{\underline{W}}$  é o vetor dos deslocamentos relativos e é dado por:

$$\underline{\underline{w}} = \begin{vmatrix} w_s \\ w_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_s^{\text{topo}} & -w_s^{\text{base}} \\ w_n^{\text{topo}} & -w_n^{\text{base}} \end{vmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

O vetor das tensões ou forças por unidade de comprimento é relacionado com as deformações através da matriz de elasticidade ou matriz de transformação:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \quad (\text{IV.9})$$

No caso do elemento de junta esse vetor será expresso como o produto da rigidez unitária pelo deslocamento:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{vmatrix} P_s \\ P_n \end{vmatrix} = \underline{\underline{k}} \underline{\underline{w}} \quad (\text{IV.10})$$

onde  $\underline{\underline{k}}$  é uma matriz diagonal de propriedades do material, expressando a rigidez por unidade de comprimento da junta nas direções normal e tangencial.

$$\underline{\underline{k}} = \begin{vmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{vmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

Levando (IV.10) em (IV.7)

$$\phi = 1/2 \int_{-L/2}^{L/2} \underline{W}^T \underline{k} \underline{W} dx \quad (IV.12)$$

Aplicando-se uma fórmula de interpolação linear, os deslocamentos  $\underline{W}$  em função dos deslocamentos nodais serão:

$$\begin{vmatrix} w_s^{\text{topo}} \\ w_n^{\text{topo}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 + \frac{2x}{L} & 0 & 1 - \frac{2x}{L} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{2x}{L} & 0 & 1 - \frac{2x}{L} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{vmatrix} \quad (IV.13)$$

$$\begin{vmatrix} w_s^{\text{base}} \\ w_n^{\text{base}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 - \frac{2x}{L} & 0 & 1 + \frac{2x}{L} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2x}{L} & 0 & 1 + \frac{2x}{L} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{vmatrix} \quad (IV.14)$$

O deslocamento relativo do elemento de junta se râ, portanto:

$$\underline{w} = \begin{vmatrix} w_s^{\text{topo}} - w_s^{\text{base}} \\ w_n^{\text{topo}} - w_n^{\text{base}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -A & 0 & -B & 0 & B & 0 & A & 0 \\ 0 & -A & 0 & -B & 0 & B & 0 & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \underline{D} \underline{u} \quad (IV.15)$$

Onde:

$$A = 1 - \frac{2x}{L}; \quad B = 1 + \frac{2x}{L}.$$

Substituindo-se a equação (IV.15) na equação (IV.12) obtemos:

$$\phi = \frac{1}{2} \underline{U}^T \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4} \underline{D}^T \underline{k} \underline{D} dx \underline{U} \quad (IV.16)$$

Onde:

$$\underline{D}^T \underline{k} \underline{D} = \begin{vmatrix} A^2 k_s & 0 & AB k_s & 0 & -AB k_s & 0 & -A^2 k_s & 0 \\ A^2 k_n & 0 & AB k_n & 0 & -AB k_n & 0 & -A^2 k_n & 0 \\ B^2 k_s & 0 & -B^2 k_s & 0 & -AB k_s & 0 & 0 & 0 \\ B^2 k_n & 0 & -B^2 k_n & 0 & 0 & 0 & -AB k_n & 0 \\ B^2 k_s & 0 & AB k_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B^2 k_n & 0 & AB k_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Simétrica} & & & & A^2 k_s & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & A^2 k_n & 0 \end{vmatrix}$$

Efetuando a integração indicada em (IV.16) obtém-se a matriz de rigidez do elemento:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 2k_s & 0 & k_s & 0 & -k_s & 0 & -2k_s & 0 & \\
 2k_n & 0 & k_n & 0 & -k_n & 0 & -2k_n & & \\
 2k_s & 0 & -2k_s & 0 & -k_s & 0 & & & \\
 2k_n & 0 & -2k_n & 0 & 0 & -k_n & & \frac{L}{6} & (IV.18) \\
 2k_s & 0 & k_s & 0 & & & & & \\
 2k_n & 0 & k_n & & & & & & \\
 2k_s & & & & & & & & \\
 2k_n & & & & & & & & \\
 \text{Simétrica} & & & & & & & & 
 \end{array}$$

Depois de calculados os deslocamentos, são determinados os esforços nos elementos de junta, sendo o cisalhamento relacionado com a tensão normal por meio da fórmula de Coulomb.

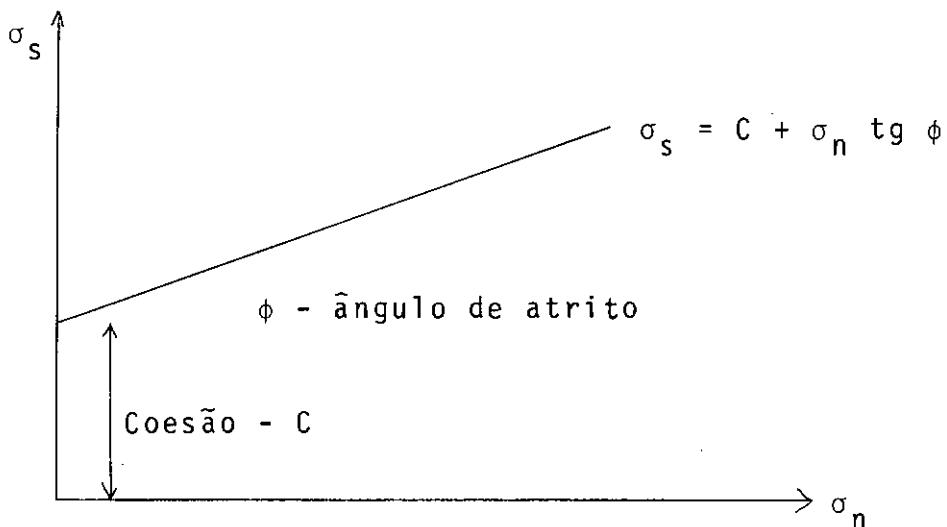


Figura IV.3

A matriz de rigidez do elemento de junta é modificada de iteração para iteração em função das tensões atuantes no elemento:

- Se a tensão normal for de tração para algum elemento tanto  $k_s$  como  $k_n$  são feitos iguais a zero para este elemento e em consequência ele não mais contribuirá para a rigidez global da estrutura.
- Em caso de compressão, se a resistência da junta ao cisalhamento é ultrapassada, é definido um novo  $k_s$  ( $k_s$  residual), função da resistência ao deslizamento:

c) Em caso de compressão, se a resistência da junta ao cisalhamento não é ultrapassada,  $k_s$  e  $k_n$  são mantidos inalterados.

## CAPÍTULO V

### ASPECTOS GERAIS DA PROGRAMAÇÃO

Neste capítulo analisaremos o modo como se procurou implementar em um programa computacional tanto o método da Decomposição Parcial quanto o das Subestruturas, vistos ambos no Capítulo III e, dentro dos dois, a implementação dos diversos modos de solução para estruturas não lineares apresentados no Capítulo II.

#### 5.1 - MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO PARCIAL

Como vimos antes no Capítulo III, neste método procura-se reduzir o tempo computacional fazendo com que nas decomposições sucessivas a que os métodos de solução de estruturas não-lineares conduzem, após feita a primeira decomposição que é total, nas seguintes esta só seja realizada a partir da coluna  $p$ , na qual se encontra o elemento correspondente ao menor número de grau de liberdade que apresenta comportamento não linear.

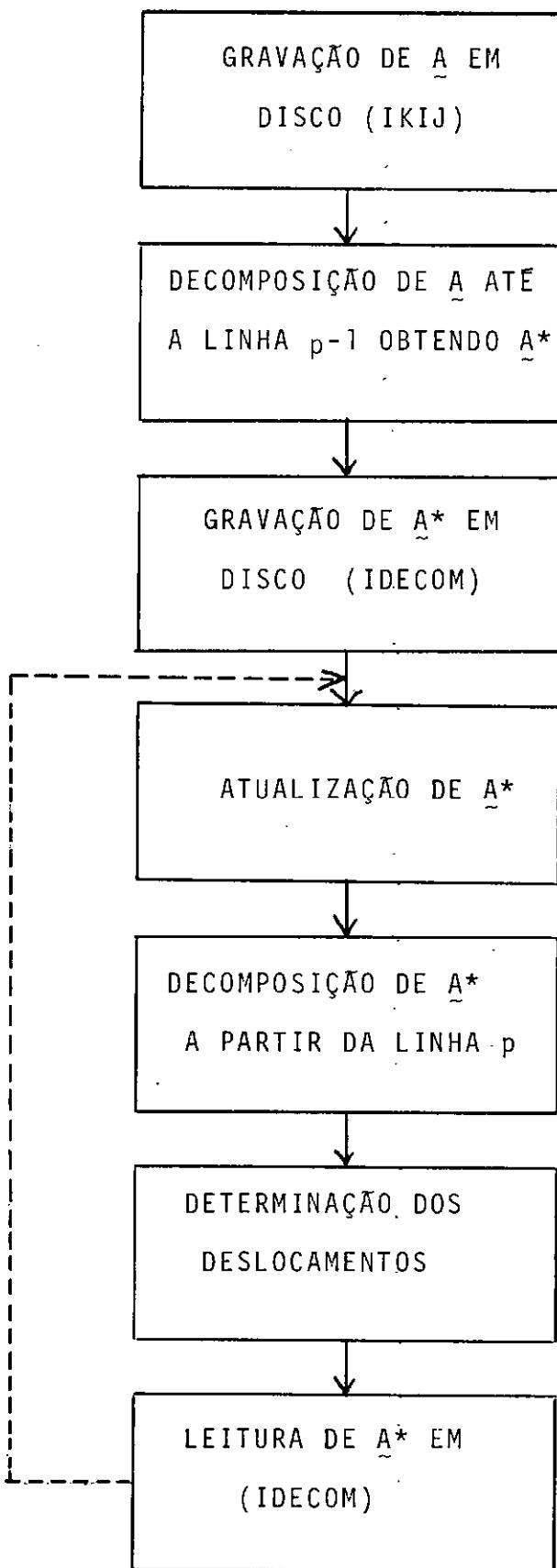
Com tal objetivo implementou-se em uma subrotina, aqui denominada CHOLES, o método de Cholesky de tal forma a realizar a decomposição da matriz  $A$  em duas situações:

- decomposição de  $\tilde{A}$  da linha  $\tilde{p}$  até a linha  $n$ .

A subrotina processa normalmente tanto a decomposição do vetor  $\tilde{P}$  como a retrosubstituição, considerando todos os graus de liberdade.

Já com vistas à implementação dos diferentes esquemas iterativos e incrementais foram criados dois arquivos. Um no qual se gravou a matriz linear, sem a inclusão dos elementos não-lineares e outro no qual se gravou a matriz  $\tilde{A}$  decomposta até a linha  $(p-1)$  e a partir da linha  $p$  apresentando ainda seus coeficientes inalterados e lineares.

O procedimento geral pode ser expresso pelo seguinte esquema:



## 5.2 - MÉTODO DAS SUBESTRUTURAS E CONDENSAÇÃO

Para a implementação deste método se precisou desenvolver várias subrotinas de modo a realizar a condensação dos primeiros ( $p-1$ ) graus de liberdade que constituem a parte da estrutura a apresentar comportamento linear.

Tendo em vista a teoria de subestruturas e condensação exposta no Capítulo III vemos que, se temos:

$$p + \begin{vmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21}^T \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{vmatrix} \quad (V.1)$$

e decomponermos a primeira subestrutura ficamos com:

$$p + \begin{vmatrix} \tilde{L}_{11} & \tilde{L}_{21}^T \\ \hline \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{R}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{vmatrix} \quad (V.2)$$

Levando a efeito a condensação obteremos:

$$\tilde{A}_{22}^* \cdot \tilde{x}_2 = \tilde{p}_2^* \quad (V.3)$$

Onde:

$$\underline{A}_{22}^* = \underline{A}_{22} - \underline{L}_{21} \cdot \underline{L}_{21}^t \quad (V.4)$$

e

$$\underline{P}_2^* = \underline{P}_2 - \underline{L}_{21} \cdot \underline{R}_1 \quad (V.5)$$

Depois de solucionada a equação (V.3) e determinado o vetor  $\underline{x}_2$ ,  $\underline{x}_1$  será determinado a partir de:

$$\underline{L}_{11}^T \cdot \underline{x}_1 = \underline{R}_1 - \underline{L}_{21}^t \cdot \underline{x}_2 \quad (V.6)$$

Desta forma, foram desenvolvidas as seguintes subrotinas:

- LXLT: subrotina que calcula o produto  $\underline{L}_{21} \cdot \underline{L}_{21}^T$  expresso na equação (V.4) e o guarda no vetor  $\underline{B}$ , armazenado por altura efetiva de coluna.
- AEB: calcula a matriz  $\underline{A}_{22}^*$  expressa pela equação (V.4) sendo que os valores ocupam a mesma área antes ocupada pela parcela  $\underline{A}_{22}$  dentro da matriz total  $\underline{A}$ , armazenada por altura efetiva de coluna.
- VEZES: calcula o novo valor para  $\underline{P}_2$  expresso na equação (V.5) sendo que  $\underline{P}_2^*$  ocupa a mesma área de armazenamento antes ocupada por  $\underline{P}_2$ .

- REPOR: subrotina que faz  $\tilde{B}$  igual a  $\tilde{A}_{22}^*$ , ou seja, a matriz  $\tilde{A}_{22}^*$  é mantida inalterada e ocupando o mesmo lugar dentro da matriz  $\tilde{A}$  e, além disso, copia-se os valores de  $\tilde{A}_{22}^*$  para a matriz  $\tilde{B}$  de modo a que se passe a trabalhar com  $\tilde{B}$ .
- CHOLES: subrotina para implementação do método de Cholesky e que foi desenvolvida de modo a:
  - promover a decomposição da matriz  $\tilde{A}$  da primeira coluna até a coluna  $(p-1)$ , determinando dessa forma  $\tilde{L}_{11}$  e  $\tilde{L}_{21}^T$  a partir de  $\tilde{A}_{11}$  e  $\tilde{A}_{21}^T$ .
  - decompor o vetor  $\tilde{P}$  da primeira linha até a linha  $(p-1)$ , dando origem ao vetor  $\tilde{R}_1$ .
  - realizar a decomposição de  $\tilde{B}$  e  $\tilde{P}_2^*$  completos, bem como a retrosubstituição de modo a determinar o vetor de incógnitas  $\tilde{x}_2$ .
  - levar a efeito a retrosubstituição a partir da linha  $(p-1)$  de modo a determinar o vetor de incógnitas  $\tilde{x}_1$  através da resolução da equação (V.6).

Além dessas, foi criada a subrotina CONTRL que funciona no controle do processo de condensação dos primeiros  $(p-1)$  graus de liberdade e que depois controla a determinação dos deslocamentos  $\tilde{x}_1$  a partir dos deslocamentos  $\tilde{x}_2$  determinados pelos métodos usuais de resolução de sistemas que apresentem comportamento não linear.

ESQUEMA DO PROCESSO DE CONDENSAÇÃO

(Subrotina CONTRL)

DECOMPOSIÇÃO DE  $\tilde{A}$  ATÉ O GRAU  
DE LIBERDADE ( $p-1$ ) (SUBROTINA  
CHOLES)

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} \tilde{L}_{11} & \tilde{L}_{21}^t \\ \hline \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{vmatrix} \leftarrow (p-1)$$

CÁLCULO DE  $\tilde{B} = \tilde{L}_{21} \tilde{L}_{21}^t$

(SUBROTINA LXLT)

CÁLCULO DE  $\tilde{A}_{22}^* = \tilde{A}_{22} - \tilde{B}$   
(SUBROTINA AEB) RESULTANDO:

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} \tilde{L}_{11} & \tilde{L}_{21}^t \\ \hline & \tilde{A}_{22}^* \end{vmatrix} \leftarrow (p-1)$$

DECOMPOSIÇÃO DE  $P$  ATÉ A LINHA  
( $p-1$ ) (SUBROTINA CHOLES) RE-  
SULTANDO.

$$\tilde{P} = \begin{vmatrix} \tilde{R}_1 \\ \hline \dots \\ \tilde{P}_2 \end{vmatrix} \leftarrow (p-1)$$

1

CÁLCULO DE  $\tilde{P}_2^* = \tilde{P}_2 - \tilde{L}_{21} \tilde{R}_1$   
 (SUBROTINA VEZES):

$$\tilde{P} = \begin{vmatrix} \tilde{R}_1 \\ \cdots \\ \tilde{P}_2^* \end{vmatrix} \quad (p-1)$$

RESOLUÇÃO DE:

$$\tilde{A}_{22}^* \tilde{x}_2 = \tilde{P}_2^*$$

RESOLUÇÃO DE:

$$\tilde{L}_{11}^T \tilde{x}_1 = \tilde{R}_1 - \tilde{L}_{21}^T \tilde{x}_2$$

(SUBROTINA CHOLE)

5.3 - IMPLEMENTAÇÃO DE ALGUNS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

Com vistas à programação elaborou-se uma única subrotina capaz de, em função de determinados parâmetros a serem lidos, resolver o sistema de equações não-lineares por um dos seguintes métodos: incremental, iterativo Newton-Raphson e Newton-Raphson modificado, incremental-iterativo com Newton-Raphson ou ainda incremental-iterativo com Newton-Raphson modificado.

Na presente exposição, entretanto, para maior clareza analisaremos a implementação de cada método isoladamente.

5.3.1 - Métodos Iterativos

5.3.1.1 - Método de Newton-Raphson

Consiste, basicamente, da implementação da seguinte equação:

$$\underline{K}_T(\underline{U}^n) \cdot \Delta \underline{U}^n = \underline{P} - \underline{Q}(\underline{U}^n) \quad (V.7)$$

Esta equação já havia sido vista no Capítulo II. Preocupam-nos atualmente apenas os aspectos da sua implementação que foi desenvolvida sob os seguintes aspectos:

a) considerou-se a matriz de rigidez tangente como sendo constituída de duas parcelas, uma parcela linear ( $\underline{K}_L$ ) e outra não-linear ( $\underline{K}_{NL}$ ). Com vistas ao desenvolvimento da programação registrou-se em disco a parcela linear de forma a poder ser recuperada periodicamente. A parcela não linear é calculada a cada etapa e adicionada à matriz  $\underline{K}_L$ , obtendo-se desta forma a matriz de rigidez tangente atualizada.

b) a parcela de força equilibrada  $\underline{Q}(\underline{U}^n)$  foi calculada como:

$$\underline{Q}(\underline{U}^n) = \underline{K}_L \cdot \underline{U}^n + \underline{C}(\underline{U}^n) \quad (V.8)$$

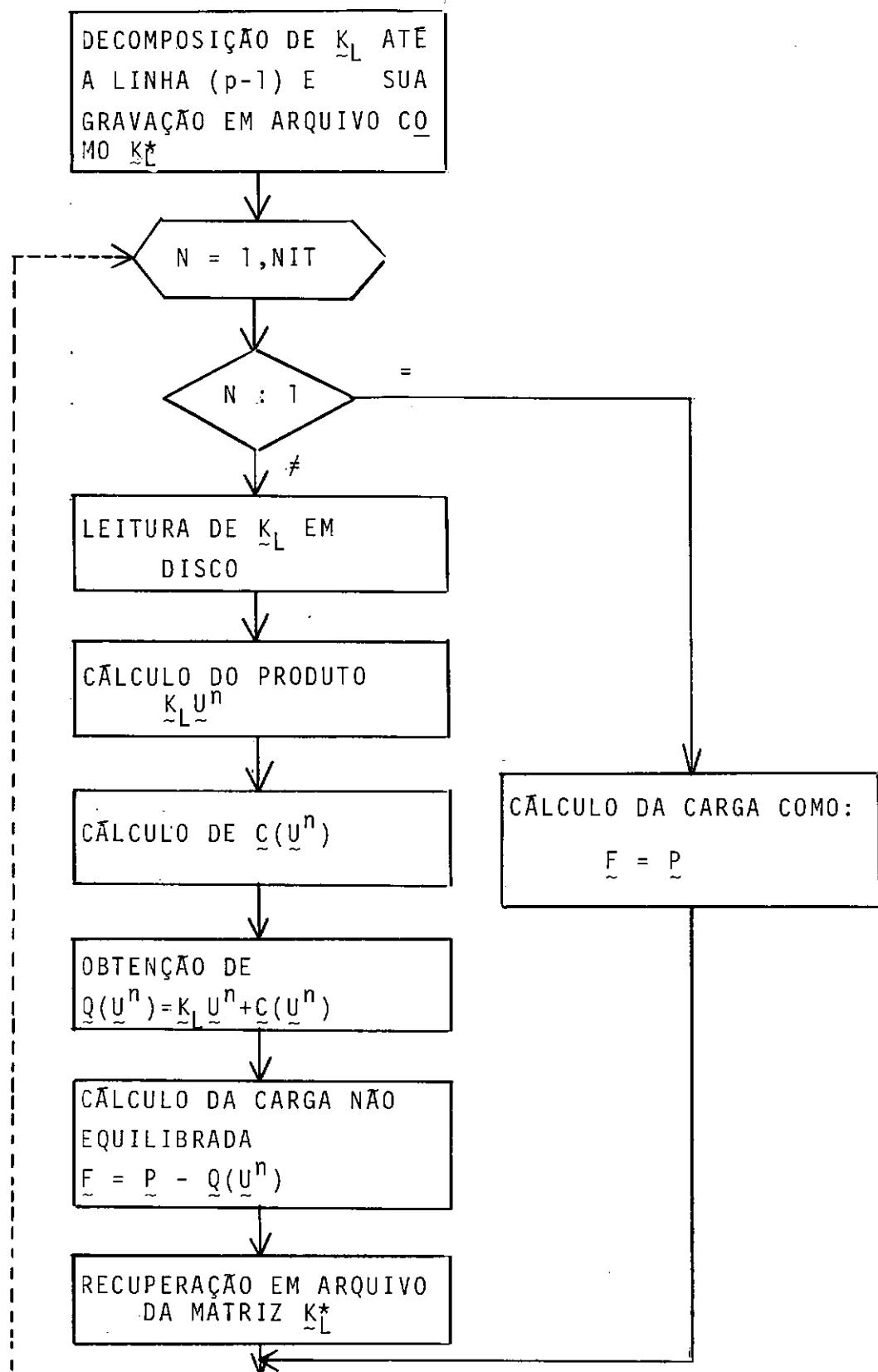
Onde  $\underline{C}(\underline{U}^n)$  é um vetor que contém as forças atuantes, correspondentes aos graus de liberdade não lineares.

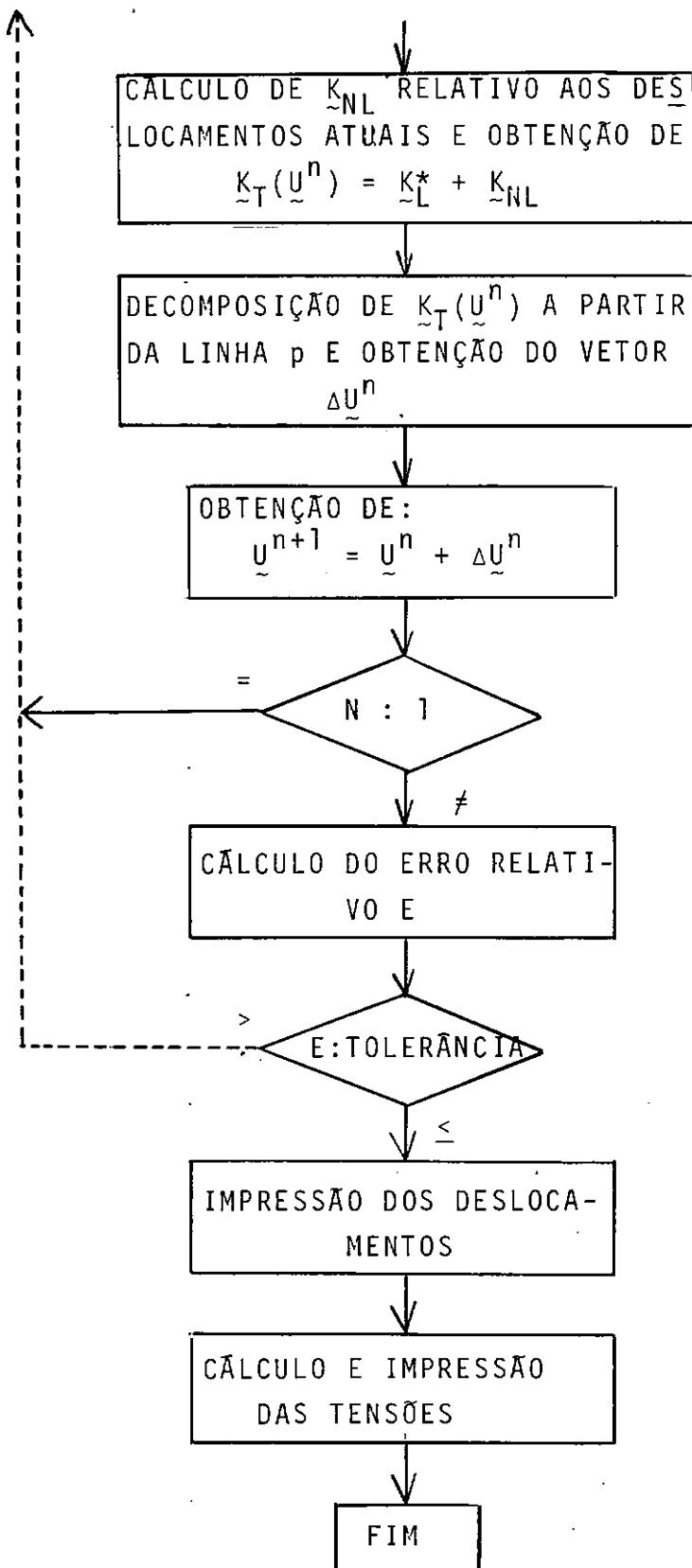
c) a cada nova iteração será calculado o erro relativo entre os vetores  $\underline{U}^{n+1}$  e  $\underline{U}^n$ , utilizando uma norma euclidiana. O valor encontrado ( $E$ ) é comparado a uma tolerância fixada antecipadamente. O processo iterativo continua até haver sido atingida a convergência desejada ou o número máximo de iterações pré-fixado (NIT).

Note-se que as considerações dos ítems a e b são válidas para a implementação dos demais métodos e as do ítem c são válidas também para os demais métodos que envolvam iterações.

Com isso, basicamente, a implementação do método de Newton-Raphson consistiu das seguintes etapas:

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON





### 5.3.1.2 - Método de Newton-Raphson Modificado

Como já vimos no Capítulo II esse método parte da mesma equação que o caso anterior, apenas, neste caso, como não há atualizações sucessivas da matriz de rigidez tangente a equação toma a seguinte forma:

$$\underline{K}_0 \cdot \Delta \underline{U}^n = \underline{P} - \underline{Q}(\underline{U}^n) \quad (V.9)$$

sendo a força equilibrada  $\underline{Q}(\underline{U}^n)$  definida agora como:

$$\underline{Q}(\underline{U}^n) = \underline{K}_0 \cdot \underline{U}^n + \underline{G}(\underline{U}^n) \quad (V.10)$$

Onde  $\underline{G}(\underline{U}^n)$  é um vetor que contém a diferença entre as forças atuantes correspondentes aos graus de liberdade não-lineares entre duas etapas consecutivas.

Da equação (V.10) para um etapa  $n-1$  obtemos:

$$\underline{Q}(\underline{U}^{n-1}) = \underline{K}_0 \underline{U}^{n-1} + \underline{G}(\underline{U}^{n-1}) \quad (V.11)$$

Através da substituição de (V.10) em (V.9) obtemos:

$$\underline{K}_0 \cdot \Delta \underline{U}^n = \underline{P} - \underline{K}_0 \cdot \underline{U}^n - \underline{G}(\underline{U}^n) \quad (V.12)$$

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n + \Delta \underline{u}^n \quad (V.13)$$

Então:

$$\underline{k}_0 \cdot \Delta \underline{u}^n = \underline{p} - \underline{k}_0 (\underline{u}^{n-1} + \Delta \underline{u}^{n-1}) - \underline{g}(\underline{u}^n) \quad (V.14)$$

$$\underline{k}_0 \cdot \Delta \underline{u}^n = \underline{p} - \underline{k}_0 \cdot \underline{u}^{n-1} - \underline{k}_0 \cdot \Delta \underline{u}^{n-1} - \underline{g}(\underline{u}^n) \quad (V.15)$$

De (V.11) temos que:

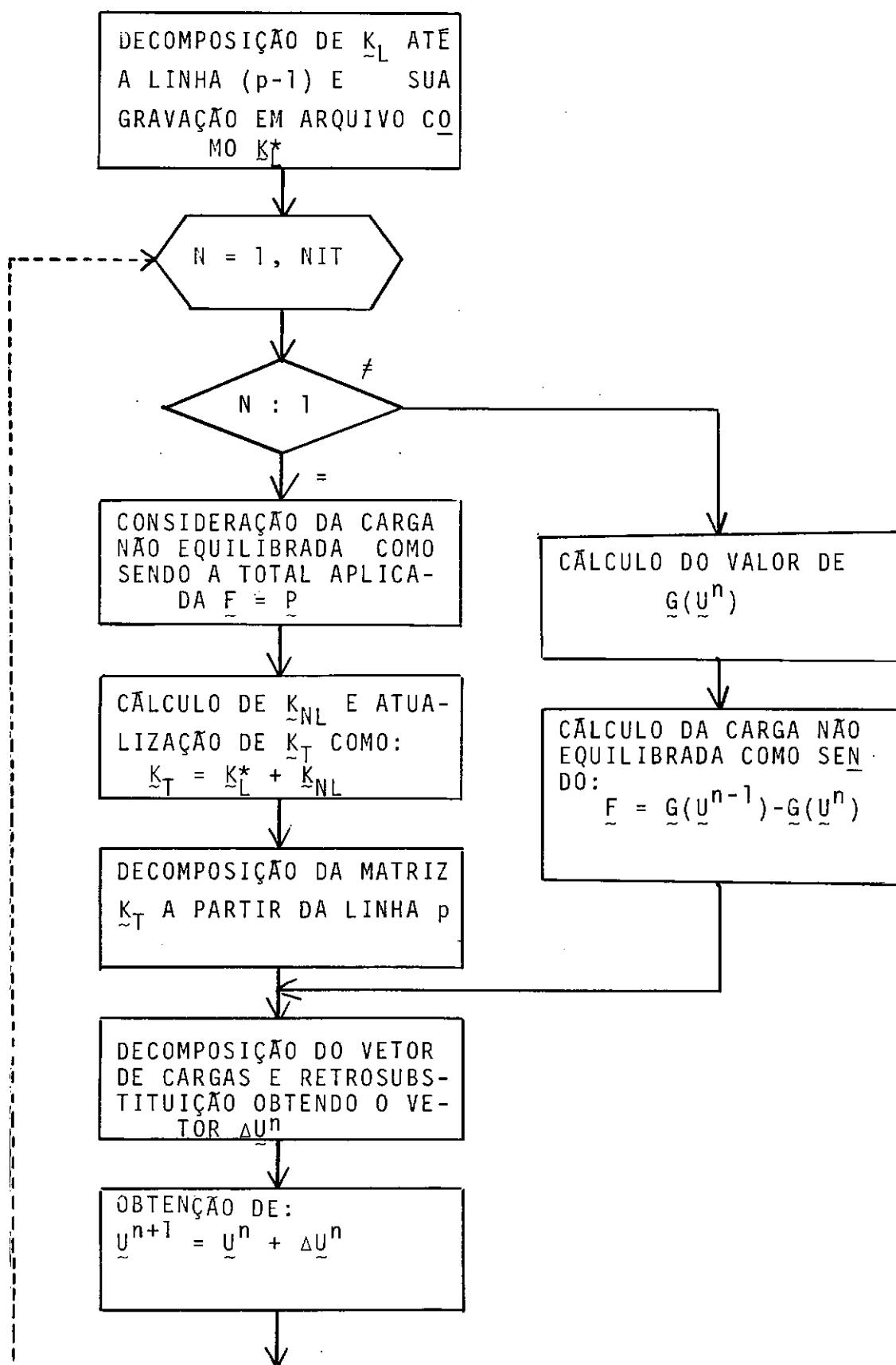
$$\underline{k}_0 \cdot \underline{u}^{n-1} = \underline{q}(\underline{u}^{n-1}) - \underline{g}(\underline{u}^{n-1}) \quad (V.16)$$

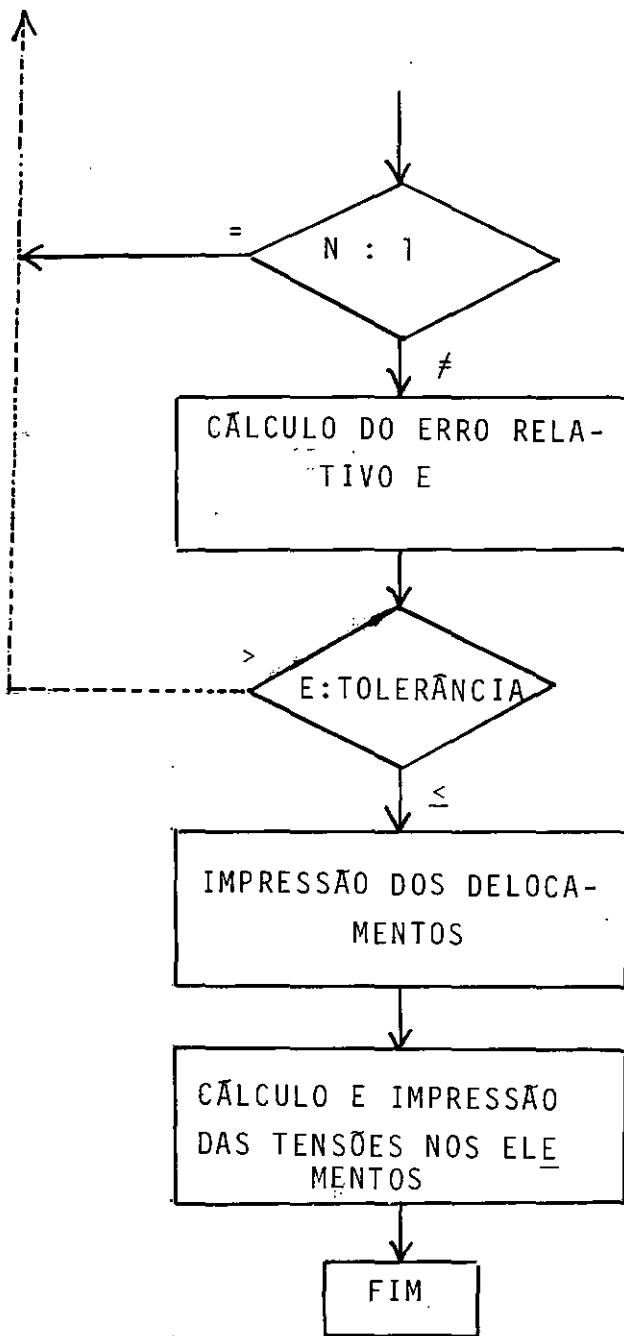
$$\underline{k}_0 \cdot \Delta \underline{u}^n = \underline{p} - \underline{q}(\underline{u}^{n-1}) + \underline{g}(\underline{u}^{n-1}) - \underline{p} + \underline{q}(\underline{u}^{n-1}) - \underline{g}(\underline{u}^n) \quad (V.17)$$

$$\underline{k}_0 \cdot \Delta \underline{u}^n = \underline{g}(\underline{u}^{n-1}) - \underline{g}(\underline{u}^n) \quad (V.18)$$

Tendo em vista esta simplificação a implementação constou das seguintes etapas:

### MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO



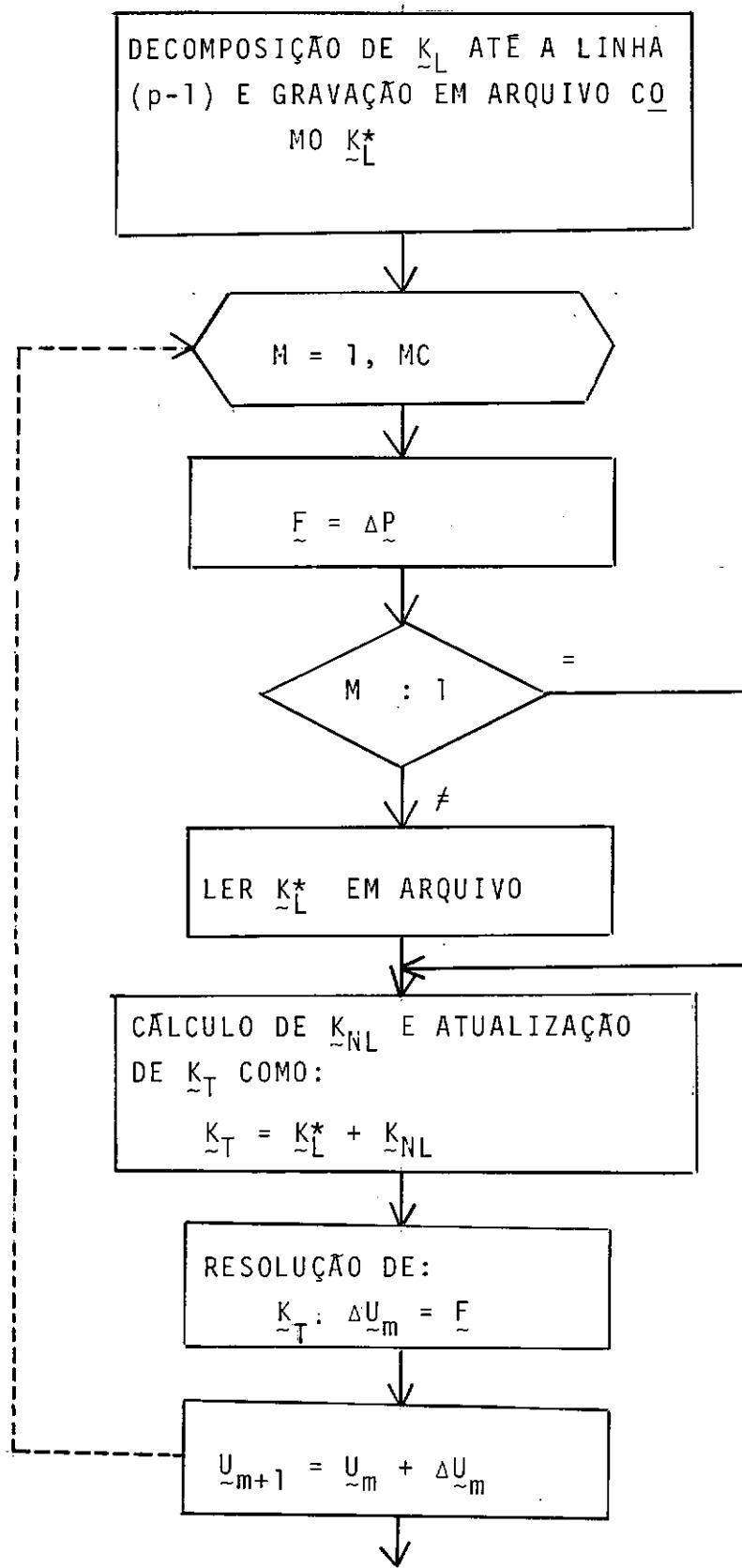


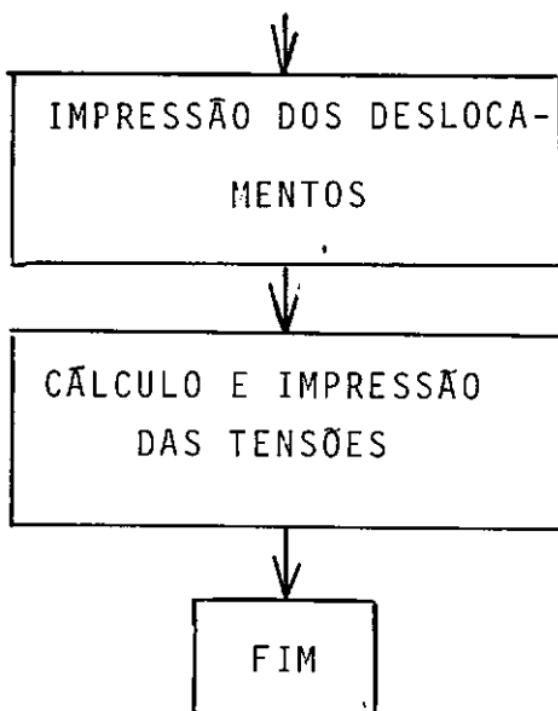
### 5.3.2 - Método Incremental

A implementação deste método foi feita através do desenvolvimento da seguinte equação:

$$K_T(\bar{U}_m) \cdot \Delta \bar{U}_m = \Delta \bar{P}_m \quad (V.19)$$

Admitiu-se a divisão da carga em MC : incrementos iguais e, levando-se em conta para a matriz de rigidez os mesmos aspectos já referidos ao se tratar do método iterativo de Newton-Raphson, desenvolveu-se o método incremental segundo o seguinte esquema:

MÉTODO INCREMENTAL



### 5.3.3 - Métodos Mistas

Estes métodos, como são resultado de combinações entre métodos incrementais e métodos iterativos, admitem no seu desenvolvimento as mesmas convenções admitidas para os métodos que os compõem.

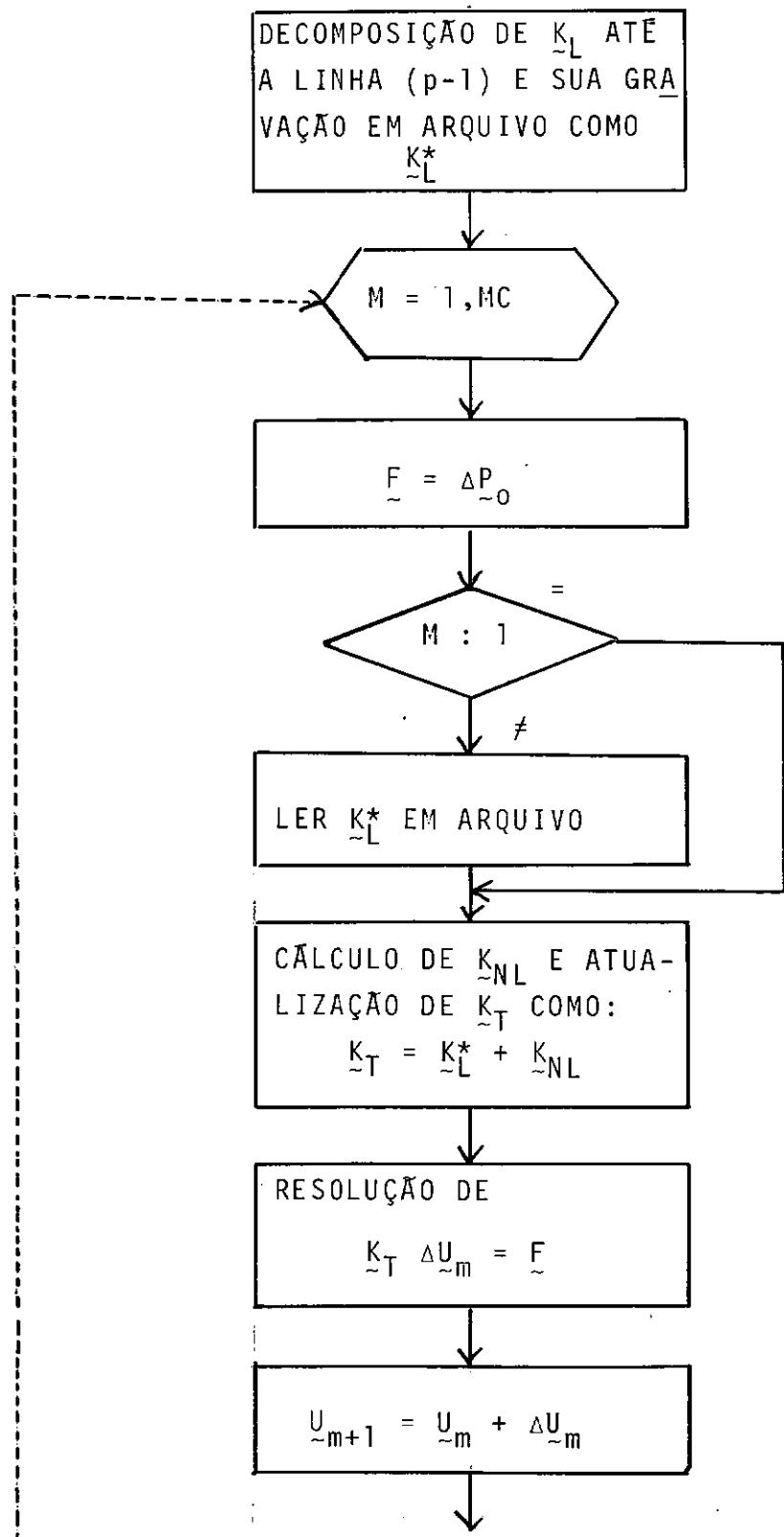
#### 5.3.3.1 - Método Incremental-Iterativo com Newton-Raphson

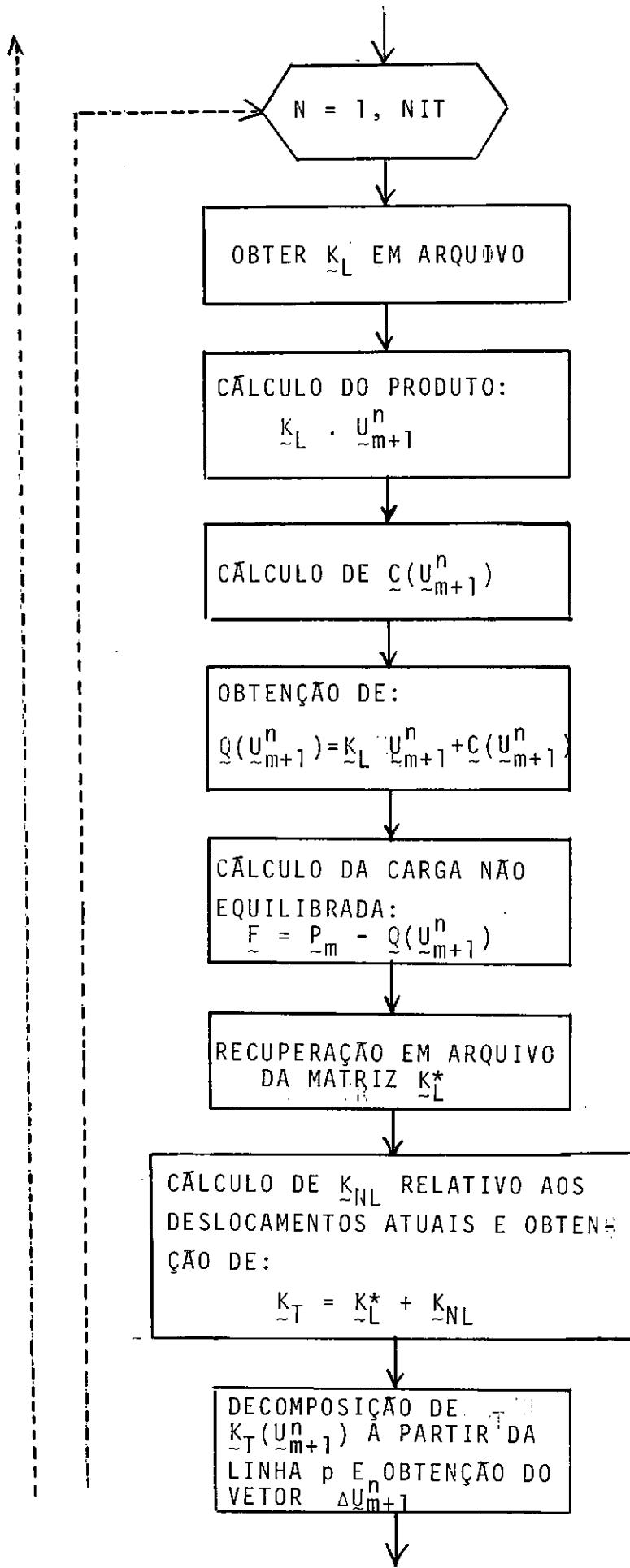
Tem como equação básica para seu desenvolvimento:

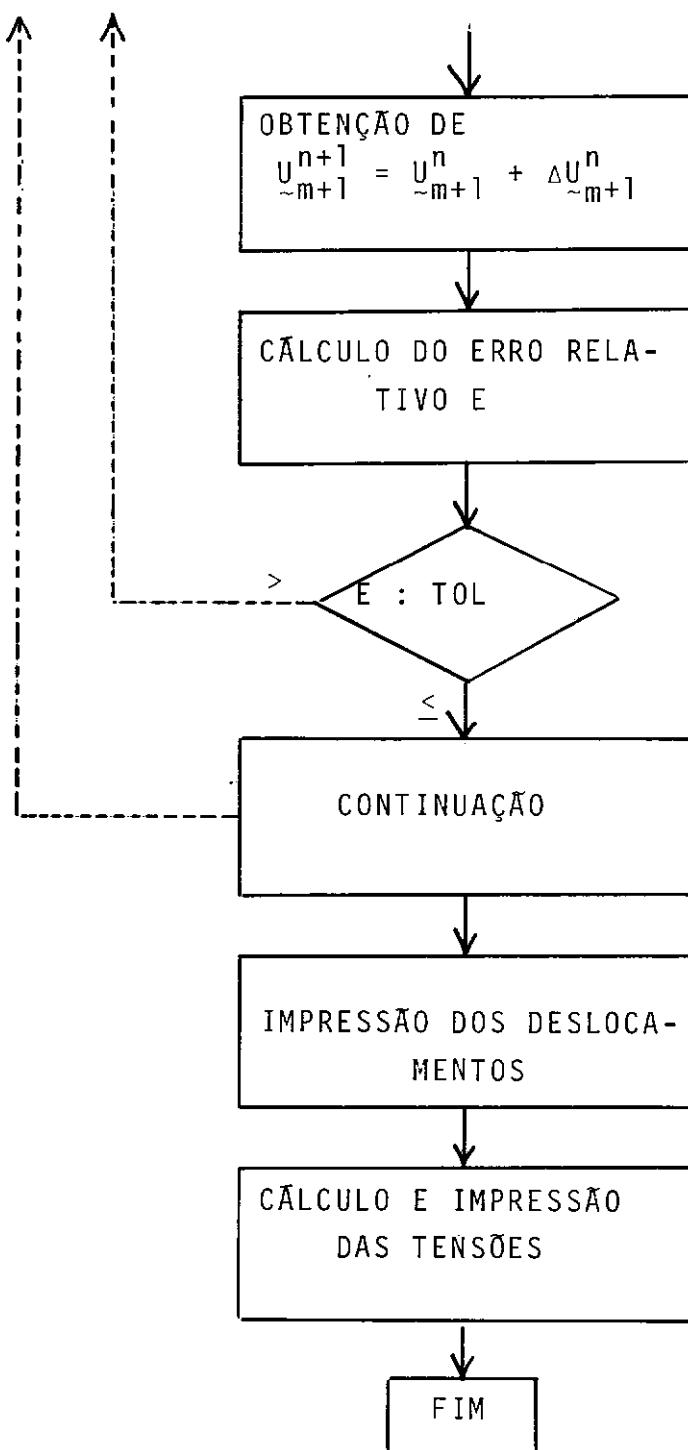
$$K_T(\mathbf{U}_{m+1}^n) \cdot \Delta \mathbf{U}_{m+1}^n = \lambda_{m+1} \cdot \mathbf{P}_0 - \mathbf{Q}(\mathbf{U}_{m+1}^n) \quad (V.20)$$

A implementação seguiu o seguinte esquema:

MÉTODO INCREMENTAL ITERATIVO COM NEWTON-RAPHSON





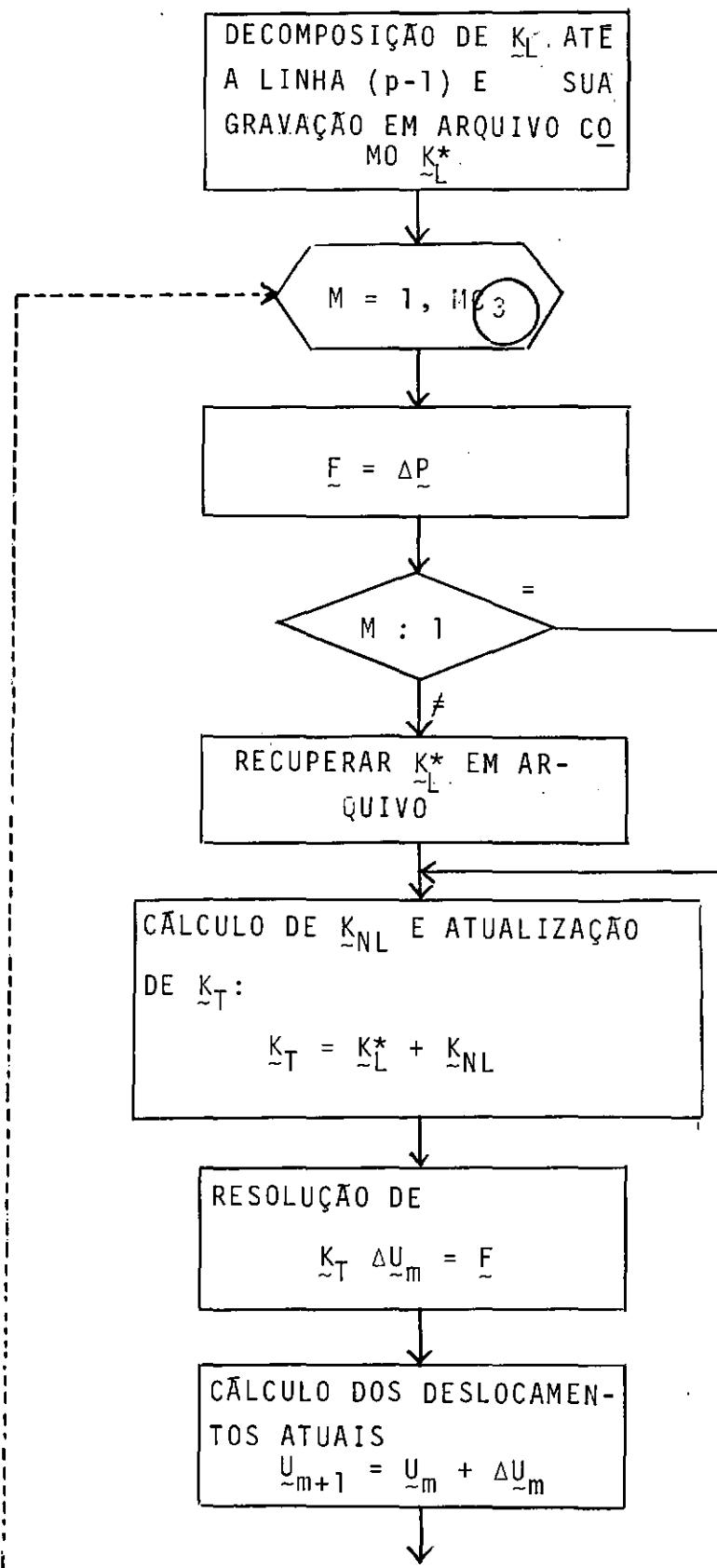


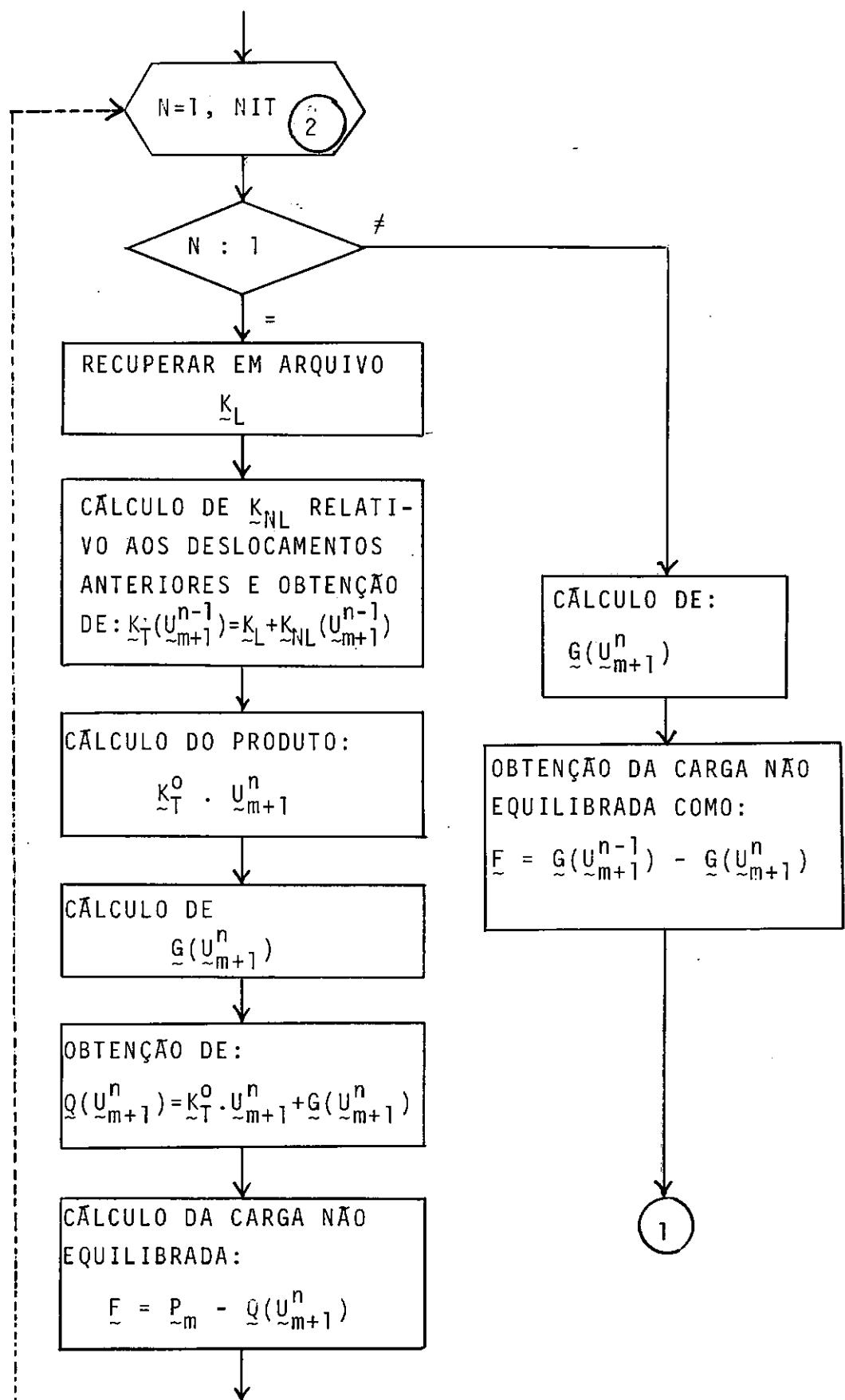
### 5.3.3.2 - Método Incremental-Iterativo com Newton-Raphson Modificado

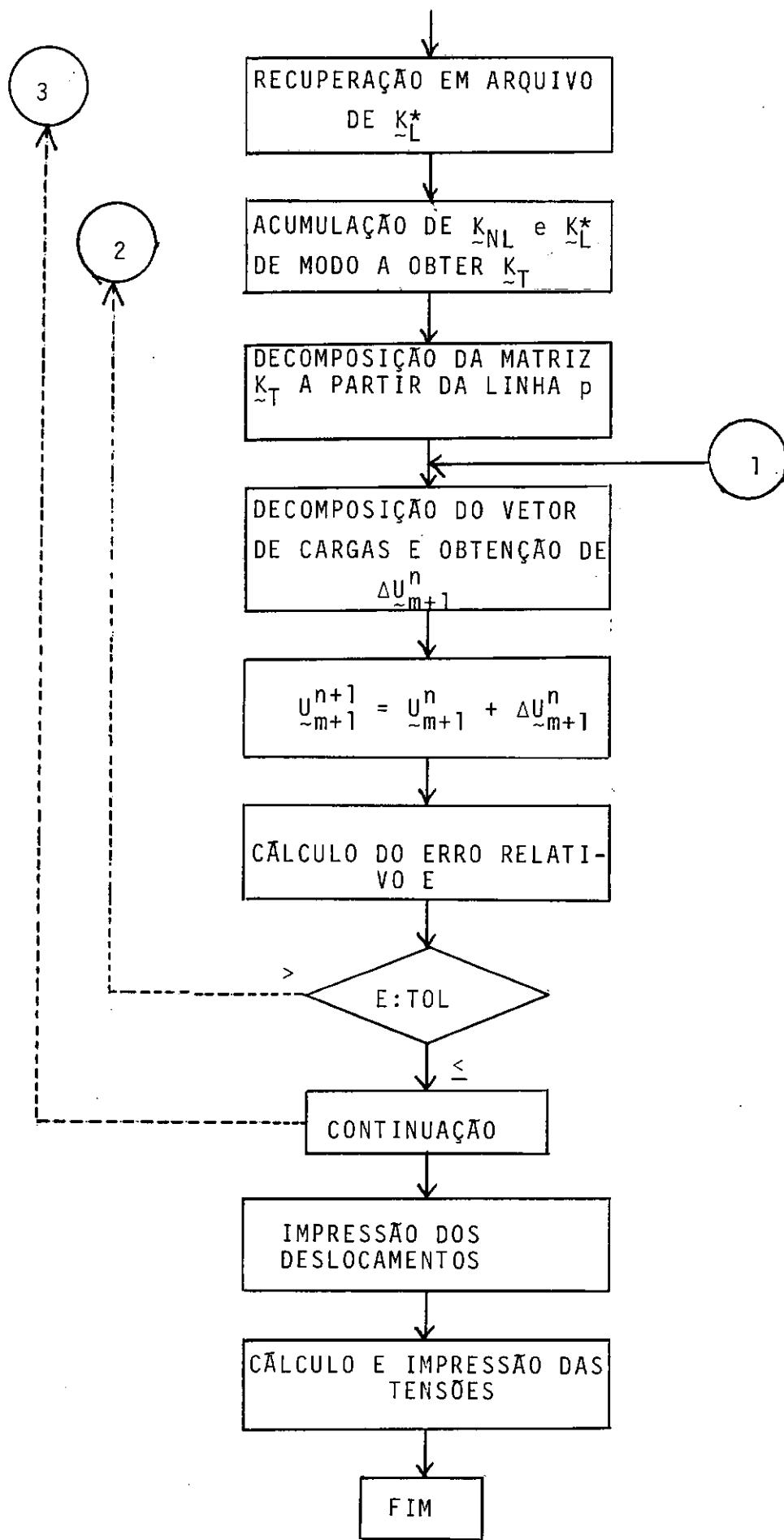
Neste caso, tendo em vista que não atualizamos a matriz de rigidez tangente a cada iteração, a equação (IV.20) fica sob a forma:

$$K_T^0 \cdot \Delta \tilde{u}_{m+1}^n = \lambda_{m+1} \cdot \tilde{p}_0 - Q(u_{m+1}^n) \quad (V.21)$$

e tem desenvolvimento segundo o esquema que se segue:







CAPÍTULO VIRESULTADOS DE ANÁLISE

Neste capítulo são apresentados alguns problemas cujas soluções foram obtidas através dos diversos procedimentos discutidos anteriormente, de forma a permitir uma análise comparativa.

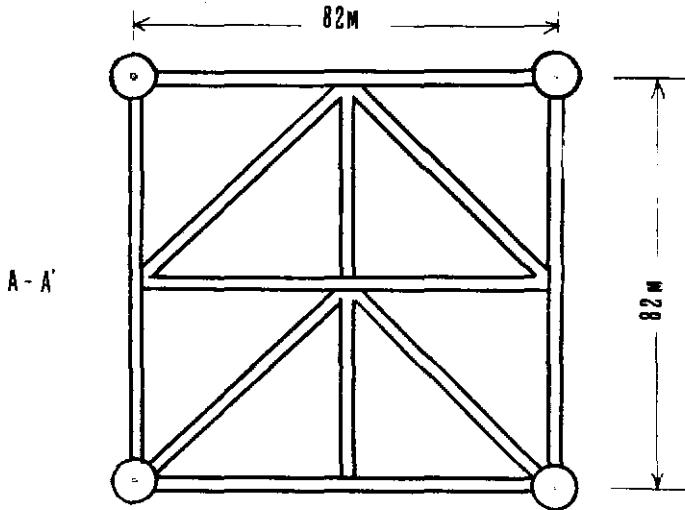
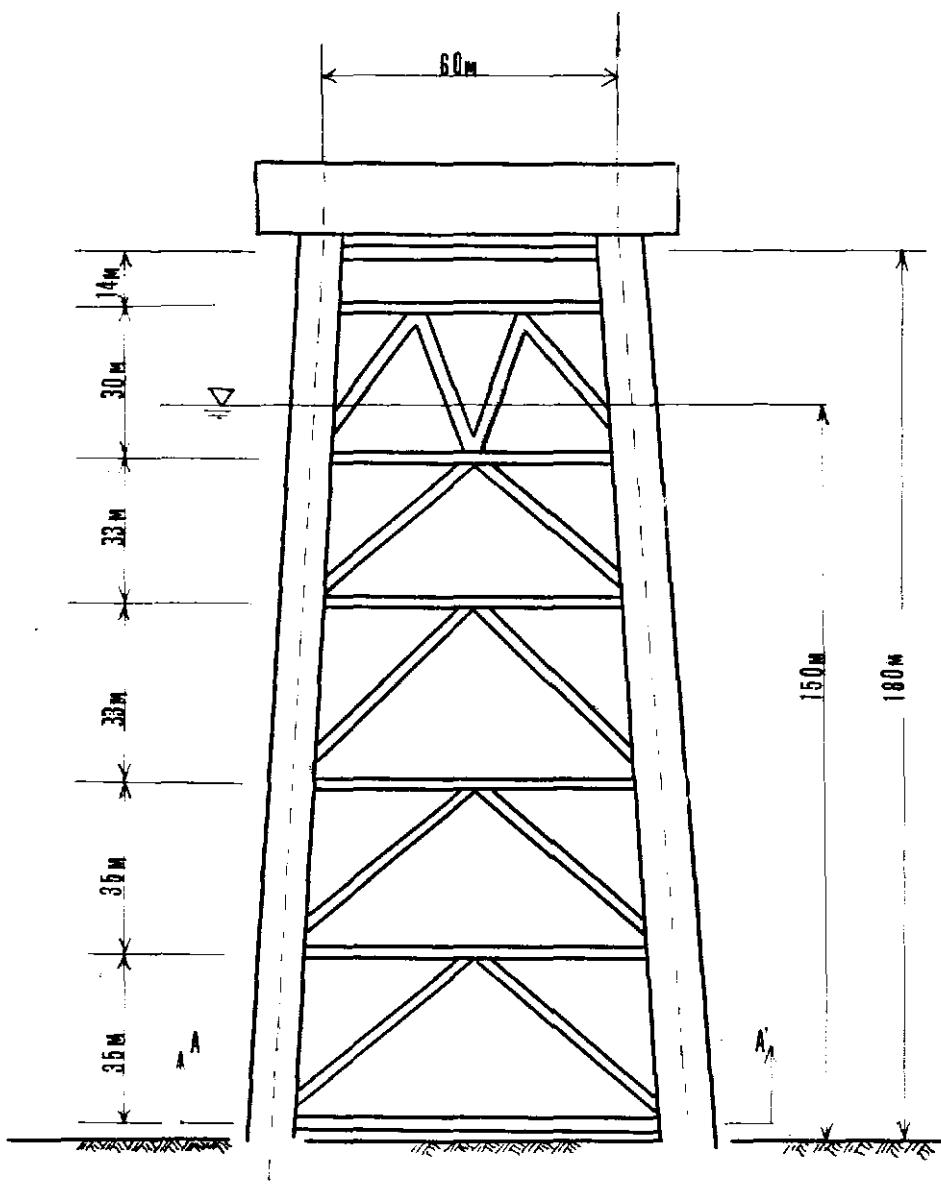
6.1 - PLATAFORMAS OFFSHORE

Na análise de plataforma offshore foram adotadas para as fundações as recomendações da norma do American Petroleum Institute |<sup>18</sup>|. Segundo a API as estacas devem ser projetadas para suportar cargas laterais, estáticas ou cíclicas. Desta forma, torna-se necessário relacionar a deformação solo-estaca à resistência do solo através da construção das curvas  $p-y$ , a partir de dados de tensão-deformação obtidos em laboratório com amostras do solo. A ordenada dessas curvas é a resistência lateral do solo,  $p$  e a abscissa seu deslocamento,  $y$ .

No nosso estudo utilizamos o conceito das curvas  $p-y$  |<sup>19</sup>| e fizemos representar o solo por molas não-lineares.

6.1.1 - Plataforma 1

A primeira estrutura analisada é uma plataforma Offshore de aço |<sup>20</sup>| representada na Figura (VI.1). A altura



total em relação ao fundo do mar é de 180 metros.

As estacas foram consideradas até uma profundidade de 80 metros. O modelo estrutural da plataforma está indicado na Figura (VI.2) que representa uma estrutura do tipo portíco espacial com 145 nós e 271 elementos, dando origem a um sistema de equações de 866 graus de liberdade. A influência do solo nas estacas foi considerada através de 144 molas não-lineares obtidas de curvas análogas às curvas p-y da norma do American Petroleum Institute.

A plataforma foi analisada para uma carga de onda com um período de 13 segundos, uma altura de 20 metros e para um nível de água correspondente a uma profundidade de 150 metros.

A tabela (VI.1) mostra o estudo comparativo dos tempos de processamento em minutos obtidos em um computador Burroughs B6700. Para os métodos de Newton-Raphson, incremental-iterativo com Newton-Raphson e com Newton-Raphson modificado foram efetuadas comparações entre as técnicas de decomposição total com o método de Crout, decomposição parcial e utilização de subestruturas com condensação. Observa-se que o grau de liberdade correspondente à primeira mola não-linear foi o de número 407, resultando num total de 460 graus de liberdade afetados, direta ou indiretamente, pela não-linearidade do problema, ou seja, cerca de 53% do total das equações.

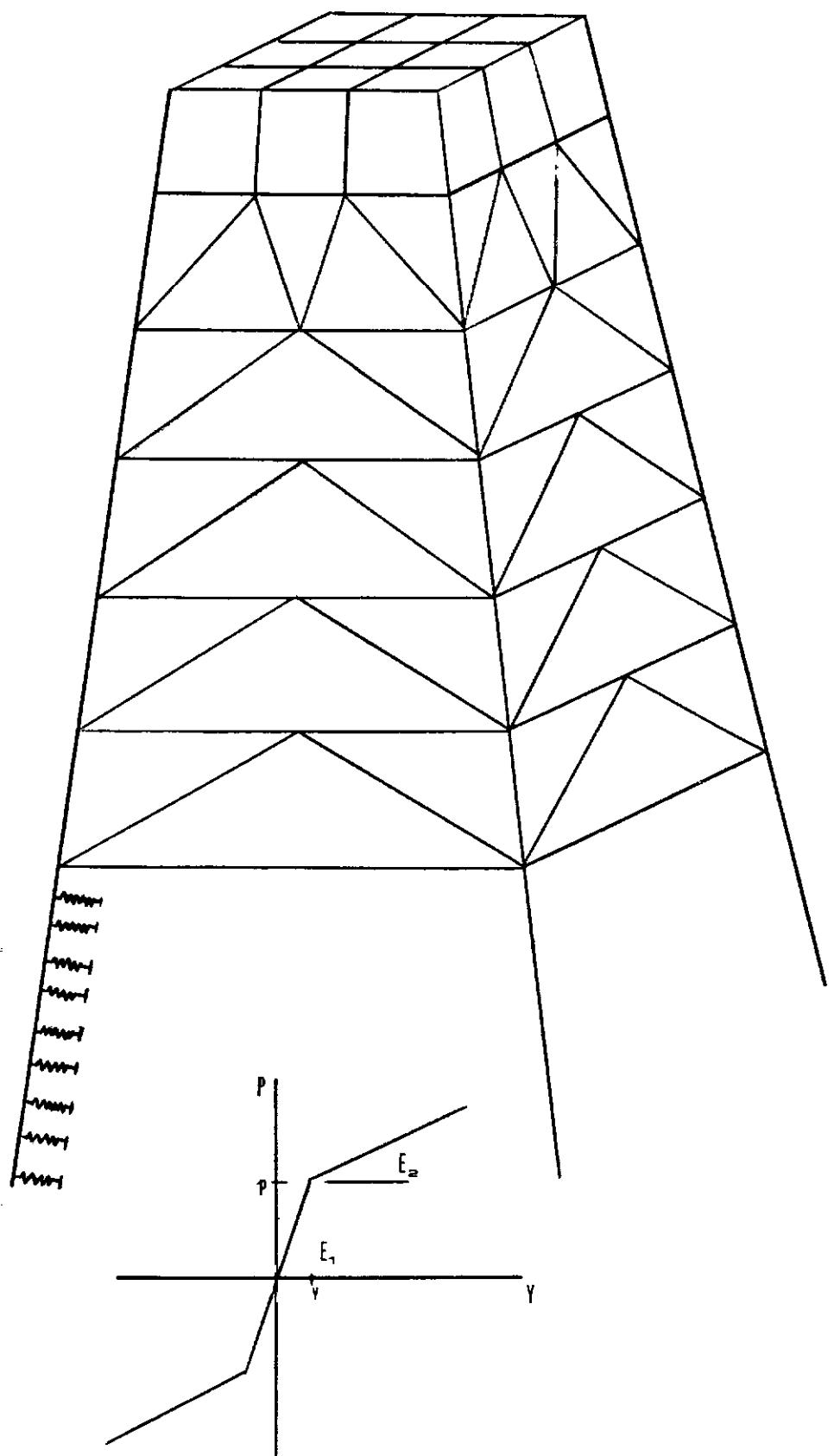


FIGURA VI-2

| MÉTODO   | PROCEDIMENTO         | TEMPO DE PROCESSAMENTO (MINUTOS) | % DE REDUÇÃO |
|--|----------------------|----------------------------------|--------------|
| INCREMENTAL-<br>ITERATIVO<br>(NEWTON-RAPH-<br>SON)                 | DECOMPOSIÇÃO TOTAL   | 20,62                            | -            |
|  | DECOMPOSIÇÃO PARCIAL | 10,38                            | 50%          |
|  | SUBESTRUTURAS        | 8,02                             | 61%          |
| INCREMENTAL-<br>ITERATIVO<br>(NEWTON-RAPH-<br>SON MODIFICA-<br>DO) | DECOMPOSIÇÃO TOTAL   | 14,42                            | -            |
|  | DECOMPOSIÇÃO PARCIAL | 8,25                             | 43%          |
|  | SUBESTRUTURAS        | 6,03                             | 58%          |
| NEWTON-RAPHSON   | DECOMPOSIÇÃO TOTAL   | 9,37                             | -            |
|  | DECOMPOSIÇÃO PARCIAL | 6,28                             | 33%          |
|  | SUBESTRUTURAS        | 5,27                             | 44%          |

Tabela VI.1

Em todas as análises foi adotada uma tolerância para os deslocamentos  $\epsilon = 0,0001$  e três incrementos de carga para os métodos incrementais.

#### 6.1.2 - Plataforma 2

Como segundo exemplo analisamos a mesma plataforma Offshore de aço descrita no exemplo anterior e representada na Figura (VI.1). Neste caso, entretanto, as estacas foram consideradas como atingindo apenas uma profundidade de 51 metros. O modelo estrutural, como no caso anterior, está indicado na Figura (VI.2). Teremos, entretanto, no caso, uma estrutura tipo pôrtico espacial com 247 elementos e nós, dando origem a um sistema de 722 equações. A influência do solo nas estacas foi considerada através de 96 molas não-lineares.

A plataforma foi analisada para a mesma carga de onda já descrita no exemplo anterior.

A tabela (VI.2) mostra o estudo comparativo dos tempos de processamento em minutos obtidos em um computador Burroughs B6700. As comparações foram feitas entre os mesmos métodos e técnicas para os quais se testou o caso anterior. Observa-se que o grau de liberdade correspondente à primeira mola não-linear foi o de número 407, resultando num total de 316 graus de liberdade afetados pela não-linearidade do problema, ou seja, cerca de 44% do total das equações.

| MÉTODO   | PROCEDIMENTO         | TEMPO DE PROCEDIMENTO (MINUTOS) | % DE REDUÇÃO |
|--|----------------------|---------------------------------|--------------|
| INCREMENTAL-ITERATIVO<br>(NEWTON-RAPHSON)            | DECOMPOSIÇÃO TOTAL   | 16,55                           | -            |
|  | DECOMPOSIÇÃO PARCIAL | 7,97                            | 52%          |
|  | SUBESTRUTURAS        | 6,22                            | 62%          |
| INCREMENTAL-ITERATIVO<br>(NEWTON-RAPHSON MODIFICADO) | DECOMPOSIÇÃO TOTAL   | 13,18                           | -            |
|  | DECOMPOSIÇÃO PARCIAL | 7,73                            | 41%          |
|  | SUBESTRUTURAS        | 4,92                            | 63%          |
| NEWTON-RAPHSON                                       | DECOMPOSIÇÃO TOTAL   | 9,13                            | -            |
|  | DECOMPOSIÇÃO PARCIAL | 5,88                            | 36%          |
|  | SUBESTRUTURAS        | 4,45                            | 51%          |

Tabela VI.2

A tolerância adotada, bem como o número de incrementos de carga para os métodos incrementais foram idênticos ao do caso anterior.

## 6.2 - BARRAGENS

A terceira estrutura analisada é uma barragem cuja discretização vemos na Figura (VI.3). A barragem foi projetada em concreto e sua altura total em relação ao fundo do rio é de 65 metros. Está assentada sobre uma camada de metasedimentos. A 15 metros de profundidade em relação ao fundo do rio encontra-se a camada rochosa. Além disso foi feita uma escavação de 35 metros de profundidade a jusante de barragem.

A descontinuidade existente entre as duas camadas do solo foi considerada através de 121 elementos de junta desenvolvidos segundo estudos de Goodman and al [16, 17]. O modelo estrutural como vimos antes está representado na Figura (VI.3) que representa um corte transversal da barragem constituindo-se em uma situação de estado plano de deformações. Essa região plana foi dividida em 96 elementos isoparamétricos de quatro nós e 13 elementos de junta, apresentando 136 nós que dão origem a um sistema de 236 graus de liberdade.

A barragem foi analisada para um nível de água de 65 metros.

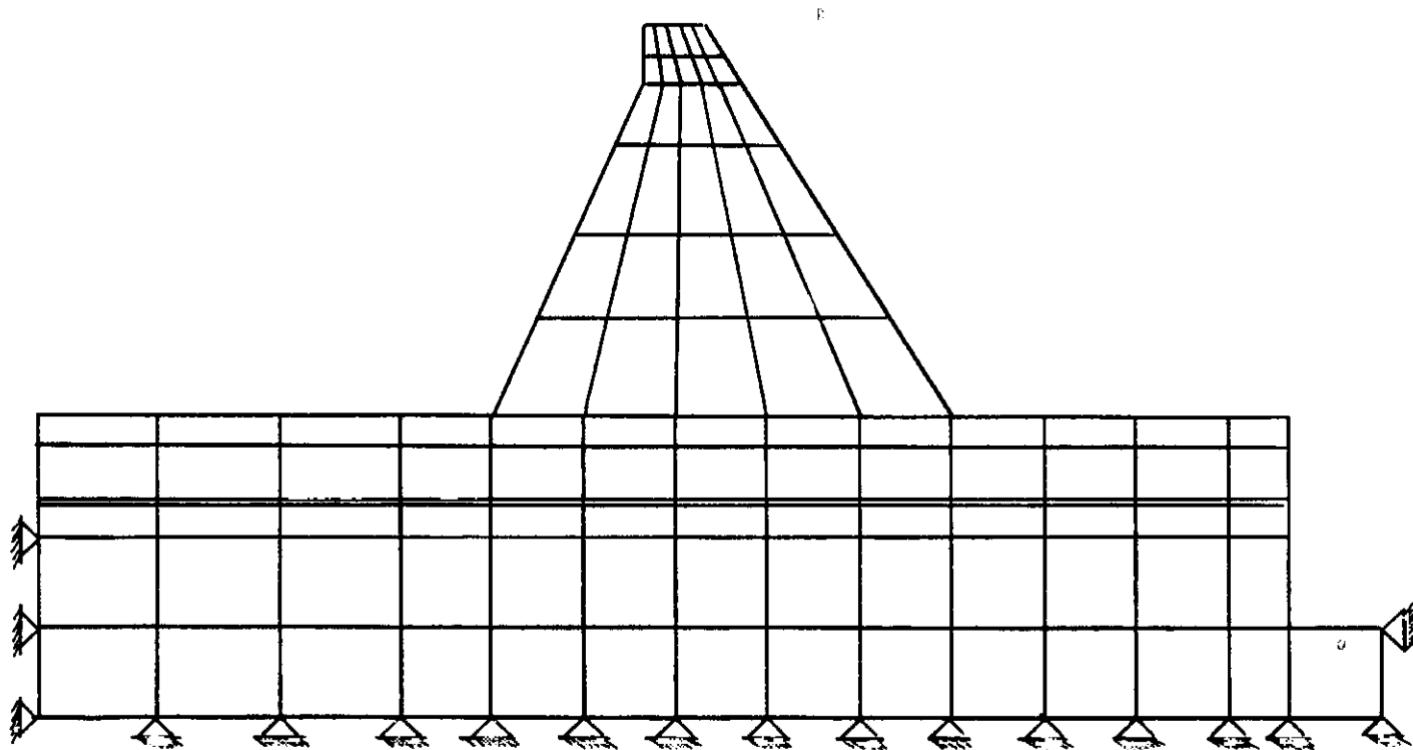


FIGURA VI-3

A tabela (VI.3) mostra o estudo comparativo dos tempos de processamento em minutos obtidos em um computador Burroughs B6700. Foram efetuadas comparações entre as técnicas de decomposição parcial e utilização de subestruturas com condensação com técnica para análise de grandes deformações e plasticidade por meio de elementos finitos isoparamétricos [3]. Essas comparações foram feitas para os métodos incrementais-iterativos com Newton-Raphson e com Newton-Raphson modificado.

O grau de liberdade de menor número a ser atingido pela não-linearidade é o de número 129 e com isso ficamos com um total de 108 graus de liberdade afetados pela não-linearidade, ou seja, cerca de 46% do total.

Para todas as análises foi adotada uma tolerância  $\epsilon = 0,001$  para os deslocamentos e três incrementos de carga para os métodos incrementais.

| MÉTODO   | PROCEDIMENTO         | TEMPO DE PROCESSAMENTO (MINUTOS) | % DE REDUÇÃO |
|--|----------------------|----------------------------------|--------------|
| INCREMENTAL-<br>ITERATIVO<br>(NEWTON-RAPH-<br>SON)                 | DECOMPOSIÇÃO TOTAL   | 7,27                             | -            |
|  | DECOMPOSIÇÃO PARCIAL | 1,97                             | 73%          |
|  | SUBESTRUTURAS        | 1,68                             | 77%          |
| INCREMENTAL-<br>ITERATIVO<br>(NEWTON-RAPH-<br>SON MODIFICA-<br>DO) | DECOMPOSIÇÃO TOTAL   | 7,17                             | -            |
|  | DECOMPOSIÇÃO PARCIAL | 2,12                             | 70%          |
|  | SUBESTRUTURAS        | 1,40                             | 80%          |

Tabela VI.3

## CONCLUSÕES

A partir da análise dos resultados apresentados no Capítulo VI, em particular as tabelas VI.1, VI.2 e VI.3 evidencia-se claramente a utilidade dos procedimentos que consideram o caráter local da não-linearidade. Como poderia ser previsto, o método das subestruturas permite obter maiores reduções de tempo de processamento em relação às análises do tipo geral que o método da decomposição parcial. Isto se deve ao fato de que no método das subestruturas o sistema de equações fica reduzido, através da condensação, apenas aos graus de liberdade associados às regiões que apresentam não-linearidade, permitindo a economia de operações nas três etapas da solução do sistema de equações enquanto que no método da decomposição parcial economiza-se operações somente na etapa da decomposição da matriz efetuando por sua vez as etapas de redução do vetor de cargas e retro-substituição para todos os graus de liberdade do problema.

Apesar do método das subestruturas apresentar maior economia de tempo de processamento que o método da decomposição parcial, este também conduz a uma economia significativa e apresenta como vantagem sobre o método das subestruturas sua facilidade de implementação em programas de análise não linear já existentes visto que, praticamente não introduz alterações na lógica dos programas. O mesmo não ocorre com o método das subestruturas que produz um aumento sensível na complexidade da lógica dos programas acarretando um maior custo para

sua implementação. Porém uma vez implantado, ele coloca à disposição do analista estrutural uma das ferramentas mais potentes e versáteis para a solução dos problemas que ocorrem na prática.

Quanto aos diversos métodos para resolução de sistemas não-lineares discutidos, vale notar que aqueles em que não há atualização da matriz de rigidez a cada iteração, embora apresentem tempos computacionais menores que aqueles métodos nos quais a atualização é feita constantemente, apresentam reduções percentuais menores que os métodos que atualizam a matriz de rigidez em cada ciclo iterativo.

Outro fato a observar é que, quanto menor a parcela associada ao comportamento não-linear da estrutura em relação ao número total de graus de liberdade do sistema, a maiores reduções de tempo computacional somos conduzidos, quer no método da decomposição parcial, quer no das subestruturas. Devido a isso, devemos sempre que possível, procurar numerar inicialmente os graus de liberdade correspondentes às partes lineares da estrutura e posteriormente os graus de liberdade associados ao comportamento não linear.

Sugere-se para desenvolvimentos futuros a implementação de um programa geral que permita a definição de super elementos e da utilização de vários níveis de subestruturas. Finalmente, é interessante observar que os procedimentos que permitem considerar o caráter local da não-linearidade física

podem também ser utilizados no tratamento de vários casos de não-linearidade geométrica.

BIBLIOGRAFIA

1. ODEN, J. T. - "Finite Elements of Nonlinear Continua", McGraw-Hill, 1972.
2. ZIENKIEWICZ, O. C. - "The Finite Element Method", McGraw-Hill, 1977.
3. LANDAU, L. - "Análise de Grandes Deformações e Plasticidade por meio de Elementos Finitos Isoparamétricos", Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, 1976.
4. JENNINGS, A. - "Matrix Computation for Engineers and Scientists", Wiley, 1978.
5. ROW, D. G. and POWELL, G. H. - "Solution of Progressively Changing Equilibrium Equations for Nonlinear Structures", Computers & Structures, Vol. 7, 1977.
6. DODDS, JR., R. H. and LOPEZ, L. A. - "Substructuring in Linear and Nonlinear Analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, 1980.
7. MOREIRA, M. L. T. e LIMA, E. C. P. - "Análise Estática de Estruturas com Não Linearidade Física Localizada", II Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Curitiba, 1980.

8. ANAND, S. C. and SHAW, R. H. - "Mesh-Refinement and Sub-structuring Technique in Elastic-Plastic Finite Element Analysis", *Computers & Structures*, Vol. 11, 1980.
9. MONDKAR, D. P. and POWELL, G. H. - "Toward Optimal Incore Equation Solving", *Computers & Structures*, Vol. 4, 1974.
10. FELIPPA, C. A. - "Solution of Linear Equations with Skyline-Stored Symmetric Matrix", *Computers & Structures*, Vol. 5, 1975.
11. BATHE, K. J. and WILSON, E. - "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, Inc., 1976.
12. IRONS, B. M. - "Frontal Solution Program for Finite Element Analysis", *Int. Journal Num. Meth. Eng.*, Vol. 2, 1970.
13. SEN, H. K. and GADRE, S. H. - "Analysis of Non-Linear Structures by Newton's Method", *Variational Methods in Engineering*, Edited by Department of Civil Engineering, University of Southampton, 1972.
14. DESAI, C. S. and ABEL, J. F. - "Introduction to the Finite Element Method - A Numerical Method for Engineering Analysis", Van Nostrand Reinhold Company, 1972.

15. PACITTI, T. - "Programação e Métodos Computacionais", Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1977.
16. GOODMAN, R. E., TAYLOR, R. L. and BREKKE, T. L. - "A Model for the Mechanics of Jointed Rock", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 94, 1968.
17. GOODMAN, R. E. and ST. JOHN, C. - "Finite Element Analysis for Discontinuous Rocks", Numerical Methods in Geotechnical Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1977.
18. API-RP-2A - "Planning, Designining and Constructing Fixed Offshore Platforms"- American Petroleum Institute, Eleventh Edition, 1980.
19. MATLOCK, H. and REESE, L. C. - "Foundation Analysis of Offshore Pile Supported Structures", Proc. 5th Int. Conf. Int. Soc. Soil Mech. Found. Eng., Paris, 1961.
20. LIOU, D. and PENZIEN, J. - "Seismic Analysis of an Off shore Structure Supported on Pile Foundations", Report n° UCB/EERC-77/25, Univ. of California at Berkeley, November, 1979.

SIMBOLOGIA

$\underline{K}_T$  - matriz de rigidez tangente

$\underline{P}$  - vetor de cargas

$\underline{U}$  - vetor de deslocamentos

$\underline{Q}(\underline{U}^n)$  - carga equilibrada na enésima iteração

$\underline{L}$  - matriz triangular inferior

$\underline{w}$  - vetor de deslocamentos relativos

$k$  - matriz diagonal de propriedades do material