

VARIÇÃO PERIÓDICA DE TEMPERATURA EM ESCOAMENTO ENTRE PLACAS PLANAS

FRANCISCO NILO DE FARIAS

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS PÓS-GRADUADOS DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA - (M.Sc.)

Aprovada por:

Ephraim m. Spanou

M. A. Coimbra

Agostinho

Dezembro de 1966

Biblioteca da
COPPE

N.º ~~113~~ 13/2/1968
3384

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. E. M. Sparrow, por sua orientação e dedicação. Aos Professores A. H. Brito e A. L. Coimbra, pelo apôio e incentivo. Ao Laboratório de Processamento de Dados do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, pela utilização do computador, e a Rosalina pela datilografia.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	ii
ÍNDICE	iii
LISTA DE FIGURAS	v
SUMÁRIO	vi

Capítulos

I. INTRODUÇÃO	1
II. ANÁLISE DO PROBLEMA	3
1. Modelo Físico e Equação Básica	3
2. Solução da Equação	5
3. Aplicações da Solução	9
3.1 - Temperatura da parede	9
3.2 - Temperatura global	10
3.3 - Número de Nusselt	11
3.4 - Relação entre E_x e E_1	12
III. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	15
1. Temperatura da parede	15
2. Temperatura global	18
3. Número de Nusselt	21
4. Relação E_x/E_1	24
IV. SUMÁRIO DOS RESULTADOS E SUGESTÕES	27
BIBLIOGRAFIA	29
APÊNDICES	
A - Valores Característicos:	
Método de Cálculo	31

Tabela de Valores Numéricos	33
B - Conjunto das funções características	34
C - Ortogonalidade das funções características	37
Sinal dos valores característicos	38
D - Troca de calor por convecção forçada, em regime permanente.	
1. Fluxo de calor constante	41
2. Temperatura da parede constante	45
E - Troca de calor em regime não permanente, com coeficiente de trans_	
missão de calor constante	46
NOMENCLATURA	48

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 : Esquema do Sistema Físico	3
Figura 2 : Esquema para caracterização de E_x e E_1	13
Figura 3 : Temperatura da parede, $b^* = 1$ e 2	16
Figura 4 : Temperatura da parede, $b^* = 10$ e 100	17
Figura 5 : Temperatura global, $b^* = 1$ e 2	19
Figura 6 : Temperatura global, $b^* = 10$ e 100	20
Figura 7 : Número de Nusselt, $b^* = 1$ e 2	22
Figura 8 : Número de Nusselt, $b^* = 10$ e 100	23
Figura 9 : Relação E_x/E_1	26
Figura 10: Modelo Físico do Problema de Troca de Calor em Regime Per manente com Fluxo de Calor Constante	41

SUMÁRIO

Analisou-se o problema de troca de calor, por convecção forçada, regime não permanente, entre um fluido e placas planas paralelas. O fluido se escoa entre as placas em regime laminar. Admitiu-se variação senoidal da temperatura do fluido na seção de entrada do canal. Não foi utilizada a hipótese clássica de tomar o coeficiente de transmissão de calor constante, isto é, rejeitou-se a aproximação da quase-permanência em favor de uma solução da equação da energia dependente do espaço e tempo. Obtiveram-se resultados locais, como temperatura da parede, temperatura global e número de Nusselt, como função do tempo e distância axial. Os resultados correspondentes ao número de Nusselt sugerem que, para determinadas condições, a aplicação de coeficientes locais de transmissão de calor constantes é razoável. O desempenho global do sistema foi analisado através de uma relação que caracteriza a variação do nível de energia de que uma mesma massa de fluido dispõe em cada seção do canal.

I - INTRODUÇÃO

O regime não permanente de troca de calor por convecção forçada vem sendo estudado há vários anos, tendo em vista sua aplicação a permutadores. Sua importância se evidencia nos fenômenos transitórios acidentais e do início de o peração, onde a transiência resulta geralmente de variações bruscas de temperatura ou de fluxo de calor, bem como nos fenômenos caracterizados por variação cíclica, como ocorre nos regeneradores. Autores consagrados no campo de transferência de calor, como Kays e London (1) e Jakob (2) tratam do problema.

Na maior parte dos casos, entretanto, tem-se usado a aproximação de utilizar o coeficiente de troca de calor de regime permanente, aplicado em cada instante ao processo transitório; em outras palavras, tem-se adotado a hipótese do regime quase-permanente. A turbulência de um escoamento conduz espontaneamente à aceitação dessa hipótese; entretanto, no caso laminar, o uso dessa simplificação não é tão evidente.

O presente trabalho examina um problema periódico de transferência de calor que inclui muitas das características de trocador regenerativo operando sob regime laminar. A hipótese de quase-permanência mencionada acima é rejeitada em favor de solução dependente do espaço e tempo para a equação da energia. Especificamente, considera-se um conjunto de placas planas e paralelas entre as quais escoo um fluido cuja temperatura na entrada está sujeita a uma variação senoidal com o tempo. A velocidade do escoamento é constante. A equação da energia é aplicada em cada ponto do fluido em escoamento, e envolve convecção, condução e armazenamento de energia. As paredes do canal trocam calor com o fluido. As paredes são consideradas finas e razões de simetria permitem considerá-las isoladas em sua meia espessura. Inicialmente fêz-se a análise de

um modo geral, e em seguida os cálculos numéricos para certos valores de parâmetros característicos. Os resultados obtidos permitem a conclusão de certas idéias básicas sobre o desempenho global do sistema.

É oportuno observar que já existem regeneradores que operam sob regime laminar (3).

Uma busca na literatura existente mostra que tem havido nos últimos anos um interesse considerável no estudo analítico de escoamento laminar transiente em dutos, a maior parte do qual motivado por aplicações em trocadores de calor. Essas investigações são, principalmente, referentes a casos onde as condições nas paredes são impostas através de funções conhecidas de variação de temperatura, fluxo de calor ou geração interna de energia (4, 5, 6, 7). Além disso, as condições térmicas do fluido na entrada do canal são tomadas constantes. É, pois, evidente que o trabalho aqui exposto pertence a uma categoria diferente da dos problemas de troca de calor em regime não permanente de escoamento laminar tratados anteriormente.

O estudo que mais se aproxima do presente é o de Kardas (8). Considerou-se o caso em que a temperatura de fluido varia senoidalmente na entrada do duto, sendo a temperatura da parede afetada pela ação combinada da troca de calor entre fluido e parede, e capacidade térmica desta última. Contudo, nessa investigação, foi adotado um coeficiente de troca de calor constante, conhecido a priori. Isto a torna basicamente diferente da aqui desenvolvida, pois essa hipótese põe de lado qualquer consideração sobre os processos reais de transferência de energia, sendo o estado térmico do fluido representado por uma simples temperatura global ("bulk temperature") em cada seção, e a equação da energia tratada unidimensionalmente.

II - ANÁLISE DO PROBLEMA

1. Modelo Físico e Equação Básica

O modelo físico considerado é constituído por um conjunto de placas planas paralelas, cada uma com espessura $2e$, distantes entre si de uma distância $2d$, como mostra a figura abaixo

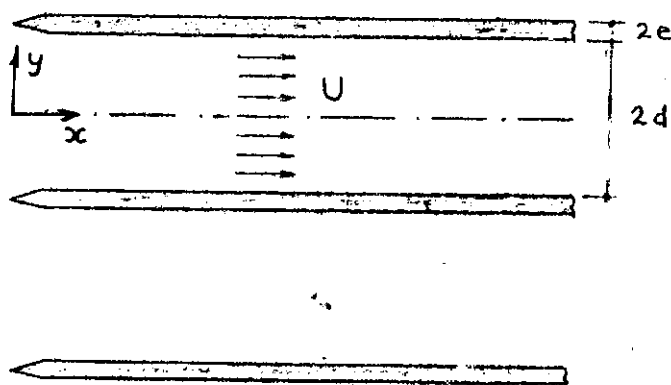


Fig. 1 - Esquema do Sistema Físico

Entre as placas escoo em regime laminar com velocidade constante U , um fluido com propriedades arbitrárias, constantes com a temperatura. Visando à simplificação da análise, considerou-se escoamento empistonado ("slug flow"). Essa aproximação não afeta basicamente o comportamento físico do sistema, como o têm mostrado trabalhos anteriores (9.10).

Razões de simetria possibilitam a análise de somente metade da altura do canal, isto é, desde $y = 0$, na linha de centro do canal, até $y = d$, na superfície da placa. Na direção axial, a análise é feita desde $x = 0$, na entrada,

até qualquer distância desejada na direção positiva do eixo dos x . A simetria também permite que se considere como isolada termicamente a placa no plano de sua meia espessura. Tomou-se ainda, na placa, condução térmica nula segundo x e infinita segundo y .

Desprezando-se a dissipação viscosa, trabalho de compressão, e condução térmica segundo x , teremos, por um balanço de energia realizado no fluido

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1)$$

A definição completa do problema exige o estabelecimento das condições de contorno.

A simetria dá

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad , \quad \text{em } y = 0 \quad (2)$$

Na parede, a energia transmitida pelo fluido se acumula na placa, ou

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=d} = \rho_w C_w e \frac{\partial T_w}{\partial t} \quad (3)$$

A continuidade da temperatura porém exige que

$$T(x, d, t) = T_w(x, t) \quad (4)$$

Tendo em vista (4), podemos escrever (3) sob a forma

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = a_w \frac{\partial T}{\partial t} \quad , \quad \text{em } y = d \quad (3a)$$

onde $a_w = \rho_w C_w e$ (5)

Na seção de entrada, admitiremos uma variação de temperatura da forma

$$T = T_0 + A e^{i\omega t}, \quad \text{em } x = 0 \quad (6)$$

Na expressão (6), T_0 é uma temperatura de referência, A é a amplitude da oscilação e ω sua frequência.

Não se levará em conta qualquer condição inicial, tendo em vista que se procura apenas a solução cíclica, sem se cogitar do início da operação.

2. Solução da equação

Propõe-se uma solução separada, periódica no tempo, da forma

$$\theta = e^{i\omega t} X(x) Y(\eta) \quad (7)$$

onde

$$\theta = T - T_0; \quad \eta = y/d; \quad x = \frac{x/d}{Pe} \quad \text{sendo } Pe = \frac{Ud}{\alpha} \quad (7a)$$

Levando-se (7) em (1) e aplicando-se a condição (2), virá

$$\theta = B e^{i\omega t} e^{-\lambda^2 x} e^{-(d^2/\alpha) i\omega x} \cos \lambda \eta \quad (8)$$

Aplicando em (8) a condição de contorno (3a) e desenvolvendo, chega-se a

$$\lambda \tan \lambda = i b^* \quad (9)$$

onde

$$b^* = \frac{a_w \omega d}{k} \quad (9a)$$

Observe-se que a equação (9) envolve coeficientes complexos, o que não é usual em problemas de valores característicos (eigenvalues). Em vista disso, λ deve, de um modo geral, ser um complexo, e podemos escrevê-lo sob a forma

$$\lambda = \gamma + i \delta \quad (10)$$

Ainda em (9) nota-se que surge um parâmetro adimensional, b^* , definido em (9a), e caracterizado, num dado modelo, pela frequência da oscilação da temperatura.

Substituindo-se em (9) λ por sua forma definida em (10), desenvolvendo e igualando na equação resultante os coeficientes reais e imaginários de cada lado da equação, obtêm-se

$$\frac{\gamma}{\tanh \delta} - \frac{\delta}{\tan \gamma} = b^* \quad (11)$$

$$\gamma \tanh \delta + \delta \tan \gamma = b^* \quad (12)$$

O sistema constituído pelas equações (11) e (12) permite calcular, para um dado valor do parâmetro b^* , as componentes real (γ_n) e imaginária (δ_n) dos valores característicos λ_n . Como se trata de equações transcendentais, houve necessidade de utilização de um método iterativo para essa determinação. A descrição desse método, bem como os resultados, se encontram no apêndice A.

O surgimento de valores característicos, obriga a se ter a solução geral em forma de somatório, e de (9) passa-se a

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{i\omega t} e^{-(d^2/a) i\omega x} e^{-\lambda_n^2 x} \cos \lambda_n \eta \quad (13)$$

Resta ainda a determinação da constante B_n . Para isso, aplicamos a (13) a condição (6). Resultará

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \lambda_n \eta \quad (14)$$

A validade da expansão definida em (14) exige que $\cos \lambda_n \eta$ constitua um conjunto completo ("complete set"). No apêndice B mostra-se que essa condição é satisfeita.

Tendo em vista (14) e a ortogonalidade das funções características - (ver apêndice C), o coeficiente B_n será dado por

$$B_n = \frac{\int_0^1 A \cos \lambda_n \eta \, d\eta}{\int_0^1 \cos^2 \lambda_n \eta \, d\eta} = \frac{4 A \operatorname{sen} \lambda_n}{2 \lambda_n + \operatorname{sen} 2 \lambda_n} \quad (15)$$

Substituindo, em (13), B_n por seu valor dado em (15), vem

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 A \operatorname{sen} \lambda_n}{2 \lambda_n + \operatorname{sen} 2 \lambda_n} e^{i \omega t} e^{-(d^2/a) i \omega x} e^{-\lambda_n^2 x} \cos \lambda_n \eta \quad (16)$$

A solução dada por (16) está em forma complexa, e corresponde à condição

$$\theta = A e^{i \omega t} \quad (6)$$

imposta em $x = 0$. Se agora substituirmos a condição acima por

$$\theta = A \operatorname{sen} \omega t \quad (6a)$$

teremos como solução apenas o coeficiente da parte imaginária da equação (16). Adotando esse procedimento, isto é, desenvolvendo (16) e tomando somente o coeficiente da parte imaginária, teremos, após longo trabalho algébrico, o seguinte

$$\theta = 4 A \int_{n=0}^{\infty} e^{-(\gamma_n^2 - \delta_n^2)x} \left\{ (\varepsilon_n N_n - t_n M_n) \cos \omega t + (\varepsilon_n M_n + \phi_n N_n) \sin \omega t \right\} \quad (17)$$

onde

$$\varepsilon_n = \cos (\gamma_n n) \cosh (\delta_n n) \quad (18a)$$

$$\phi = \sin (\gamma_n n) \sinh (\delta_n n) \quad (18b)$$

$$M_n = F_n \cos (Q_n x) + G_n \sin (Q_n x) \quad (19a)$$

$$N_n = G_n \cos (Q_n x) - F_n \sin (Q_n x) \quad (19b)$$

em que

$$F_n = \frac{s_n q_n + t_n r_n}{q_n^2 + r_n^2} \quad (20a)$$

$$G_n = \frac{t_n q_n - s_n r_n}{q_n^2 + r_n^2} \quad (20b)$$

$$Q_n = a^* b^* + \psi_n \quad (21)$$

sendo

$$s_n = \sin \gamma_n \cosh \delta_n \quad (22a)$$

$$t_n = \cos \gamma_n \sinh \delta_n \quad (22b)$$

$$q_n = 2 \gamma_n + \sin 2 \gamma_n \cosh 2 \delta_n \quad (22c)$$

$$r_n = 2 \delta_n + \cos 2 \gamma_n \sinh 2 \delta_n \quad (22d)$$

$$\psi_n = 2 \gamma_n \delta_n \quad (23)$$

$$a^* = \frac{\rho C_p d}{\rho_w C_w e} \quad (24)$$

A equação (17) nos dá a temperatura do fluido em qualquer ponto e instante. Através dela podem-se obter os resultados para os problemas físicos mais importantes envolvidos no sistema. Observa-se que envolve dois parâmetros adimensionais independentes: a^* e b^* . Num dado modelo, b^* é caracterizado basicamente pela frequência, enquanto que a^* leva em conta a relação entre capacidades térmicas do fluido e parede.

3. Aplicações da solução

De posse da expressão que nos dá a temperatura em qualquer ponto e instante, podemos determinar resultados locais e globais que apresentem interesse para a Engenharia. Assim é que selecionamos a temperatura da parede, a temperatura global ("bulk temperature"), e o número de Nusselt como características locais mais interessantes; sob o ponto de vista global, analisamos a relação entre a energia com que uma determinada massa de fluido entra no sistema e a energia de que ela dispõe em diversas seções ao longo do escoamento. Vejamos então a análise de cada um dos problemas.

3.1. Temperatura da parede

Ao se estabelecer o modelo, fez-se a hipótese de "parede fina", isto é, considerou-se infinita a condutância térmica segundo a direção y . Dessa maneira, a temperatura da parede é função apenas da distância axial e do tempo.

A continuidade da temperatura exige que

$$\theta_w(x, t) = \theta(x, l, t) \quad (4a)$$

Da equação (17) virá, portanto

$$\frac{\theta_w}{A} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\gamma_n^2 - \delta_n^2)x} \{ (\epsilon_n^* N_n - \phi_n^* M_n) \cos \omega t + (\epsilon_n^* M_n + \phi_n^* N_n) \sin \omega t \}. \quad (25)$$

onde

$$\epsilon_n^* = \cos \gamma_n \cosh \delta_n \quad (25a)$$

$$\phi_n^* = \sin \gamma_n \sinh \delta_n \quad (25b)$$

Posteriormente serão apresentados e discutidos resultados numéricos obtidos com essa equação.

3.2. Temperatura global ("bulk temperature")

Define-se "bulk temperature" como

$$\theta_b = \frac{\int_0^1 U \theta \, d\eta}{\int_0^1 U \, d\eta} \quad (26)$$

No caso de U constante ao longo da seção, a equação (26) transforma-se em

$$\theta_b = \int_0^1 \theta \, d\eta \quad (26a)$$

Substituindo-se em (26a) a expressão de θ dada por (17), e realizando a integração, teremos

$$\frac{\theta_b}{A} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\gamma_n^2 - \delta_n^2)x} \{ (g_n N_n - f_n M_n) \cos \omega t + (g_n M_n + f_n N_n) \sin \omega t \}. \quad (27)$$

onde

$$g_n = \frac{\gamma_n s_n + \delta_n t_n}{\gamma_n^2 + \delta_n^2} \quad (27a)$$

$$f_n = \frac{\delta_n s_n - \gamma_n t_n}{\gamma_n^2 + \delta_n^2} \quad (27b)$$

Resultados numéricos serão analisados no próximo capítulo.

3.3 Número de Nusselt

A definição convencional do número de Nusselt é

$$Nu = \frac{h d}{k} \quad (28)$$

Num problema transiente, não existe definição clara para o coeficiente de transmissão de calor (h). Nas análises feitas sob a hipótese da quase-permanência, essa definição se baseia na diferença entre os valores instantâneos da temperatura global ("bulk") e da temperatura da parede, isto é

$$h = \frac{q}{\theta_b - \theta_w} \quad (29)$$

Como um dos propósitos do presente trabalho é examinar a referida hipótese, manteremos a mesma definição de h .

Levando-se (29) em (28), obtém-se

$$Nu = \frac{\alpha d}{k (\theta_b - \theta_w)} \quad (30)$$

A lei de Fourier exprime o fluxo de calor por unidade de área, q , como

$$q = - \left. \frac{k \partial \theta}{d \partial \eta} \right|_{\eta=1} \quad (31)$$

A utilização das equações (17), (31), (25) e (27) permite que se obtenha a

expressão que dá o número de Nusselt como função de χ e t . Assim é que, após algum trabalho algébrico, chega-se a

$$Nu = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\gamma_n^2 - \delta_n^2)\chi} \{ (g_n^* N_n + f_n^* M_n) \cos \omega t + (g_n^* M_n - f_n^* N_n) \sin \omega t \}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\gamma_n^2 - \delta_n^2)\chi} \{ (G_n^* N_n - F_n^* M_n) \cos \omega t + (G_n^* M_n + F_n^* N_n) \sin \omega t \}} \quad (32)$$

onde

$$g_n^* = \gamma_n s_n - \delta_n t_n \quad (32a)$$

$$f_n^* = \gamma_n t_n + \delta_n s_n \quad (32b)$$

$$G_n^* = \frac{\gamma_n s_n + \delta_n t_n}{\gamma_n^2 + \delta_n^2} - \cos \gamma_n \cosh \delta_n \quad (32c)$$

$$F_n^* = \frac{\delta_n s_n - \gamma_n t_n}{\gamma_n^2 + \delta_n^2} - \sin \gamma_n \sinh \delta_n \quad (32d)$$

Os resultados apresentados no capítulo III servirão de base para a análise da hipótese da quase-permanência.

3.4. Relação entre E_x e E_i

As variações analisadas nos itens anteriores são todas locais. À engenharia, interessam principalmente resultados globais. Dessa maneira, propõe-se a análise da relação E_x/E_i . Nessa relação, E_i representa a energia, integrada num semi-período, com que uma determinada massa de fluido entra no canal. Isso representaria, por exemplo, a energia trazida pelo fluido quente num ciclo, em um regenerador. Por outro lado, E_x representa a energia levada pela mesma massa de

fluido através de uma seção transversal distante x da seção de entrada. A figura 2 esquematiza a idéia



- 1) Massa de fluido no instante $t_0 = \frac{2n\pi}{\omega}$
- 2) Massa de fluido no instante $t'_0 = t_0 + \frac{\pi}{\omega}$
- 3) Massa de fluido no instante $t = t_0 + \frac{x}{U}$
- 4) Massa de fluido no instante $t' = t + \frac{\pi}{\omega}$

Fig. 2. - Esquema para caracterização de E_i e E_x

Tendo em visto o exposto acima, podemos escrever

$$E_x = \int_{\frac{x}{U}}^{\frac{x}{U} + \frac{\pi}{\omega}} \int_0^1 (\rho C_p d) \theta U \, dn \, dt \quad (33)$$

A equação acima, pode, entretanto, ser escrita sob a forma

$$E_x = \frac{d}{\omega} \int_{\frac{x}{U}\omega}^{\frac{x}{U}\omega + \pi} \int_0^1 \rho C_p \theta U \, dn \, d(\omega t) \quad (33a)$$

Há entretanto que colocar os limites de integração em termos da variável adi-
mensional χ ; têm-se

$$\frac{x}{U} = \frac{\chi d^2}{\alpha} \omega = \frac{\rho C_p d}{a_w} \cdot \frac{a_w \omega d}{k} \chi = a^* b^* \chi \quad (34)$$

Então

$$E_x = \frac{\rho C_p U d}{\omega} \int_{a^* b^* \chi}^{a^* b^* \chi + \pi} a_b d(\omega t) \quad (35)$$

No caso de E_1 , teremos

$$E_1 = \frac{\rho C_p U d}{\omega} \int_0^{\pi} A \sin \omega t d(\omega t) \quad (36)$$

A utilização das equações (27), (35) e (36), após longo trabalho al-
gêbrico, nos conduz a

$$\frac{E_x}{E_1} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{-(\gamma_n^2 - \delta_n^2) \chi}{2}} \{ (\bar{i}_n g_n + G_n f_n) \cos \psi_n \chi + (G_n g_n - \bar{i}_n f_n) \sin \psi_n \chi \} \quad (37)$$

onde os diversos símbolos foram previamente definidos.

É oportuno observar que a equação (37) não envolve o parâmetro a^* , que
relaciona as capacidades térmicas do fluido e parede.

Os resultados numéricos obtidos, mostrados no próximo capítulo, permi-
tem algumas conclusões sôbre o desempenho global do sistema.

III - APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Passaremos a seguir à apresentação e discussão dos resultados. Os cálculos numéricos foram efetuados no computador digital IBM-1620, do Instituto Tecnológico de Aeronáutica. As diversas séries foram truncadas de tal maneira que o último termo fôsse menos de 10^{-4} da soma parcial. Nos resultados locais, os cálculos foram feitos para os valores 1., 2., 10. e 100. do parâmetro b^* , bem como 0.001 e 0.010 do parâmetro a^* . Essa gama cobre, razoavelmente, os valores encontrados na prática. Por exemplo, tomando-se por base os valores numéricos indicados na referência (3), teremos b^* variando entre 10 e 20, aproximadamente.

1. Temperatura da parede

Nas figuras 3 e 4 são apresentadas as curvas que representam a variação da temperatura da parede com o tempo e distância axial. Em todos os casos, têm-se como abcissa o tempo, representado por $\frac{\omega t}{2\pi}$, variando de 0 a 1,0 que cobre um ciclo completo.

O gráfico superior da figura 3 apresenta curvas que dão a variação de θ_w/A com o tempo nas seções correspondentes a $\chi = 0.02, 0.10, 0.50, 1.00$ e 1.50 , para $b^* = 1$. Todas as curvas são válidas tanto para $a^* = 0.001$ como para $a^* = 0.010$, já que se superpõem dentro da escala da figura. No gráfico inferior da mesma figura, têm-se conjunto análogo de curvas, correspondentes porém a $b^* = 2$.

Curvas para $\chi = 0.002, 0.10$ e 0.50 , referentes a $b^* = 10$, são apresentadas na parte superior da figura 4. Para $b^* = 100$, têm-se, no gráfico inferior, apenas a curva correspondente a $\chi = 0.02$. Resultados para valores mais altos de χ não podem ser mostrados devido à pequena amplitude de θ_w/A . Para e-

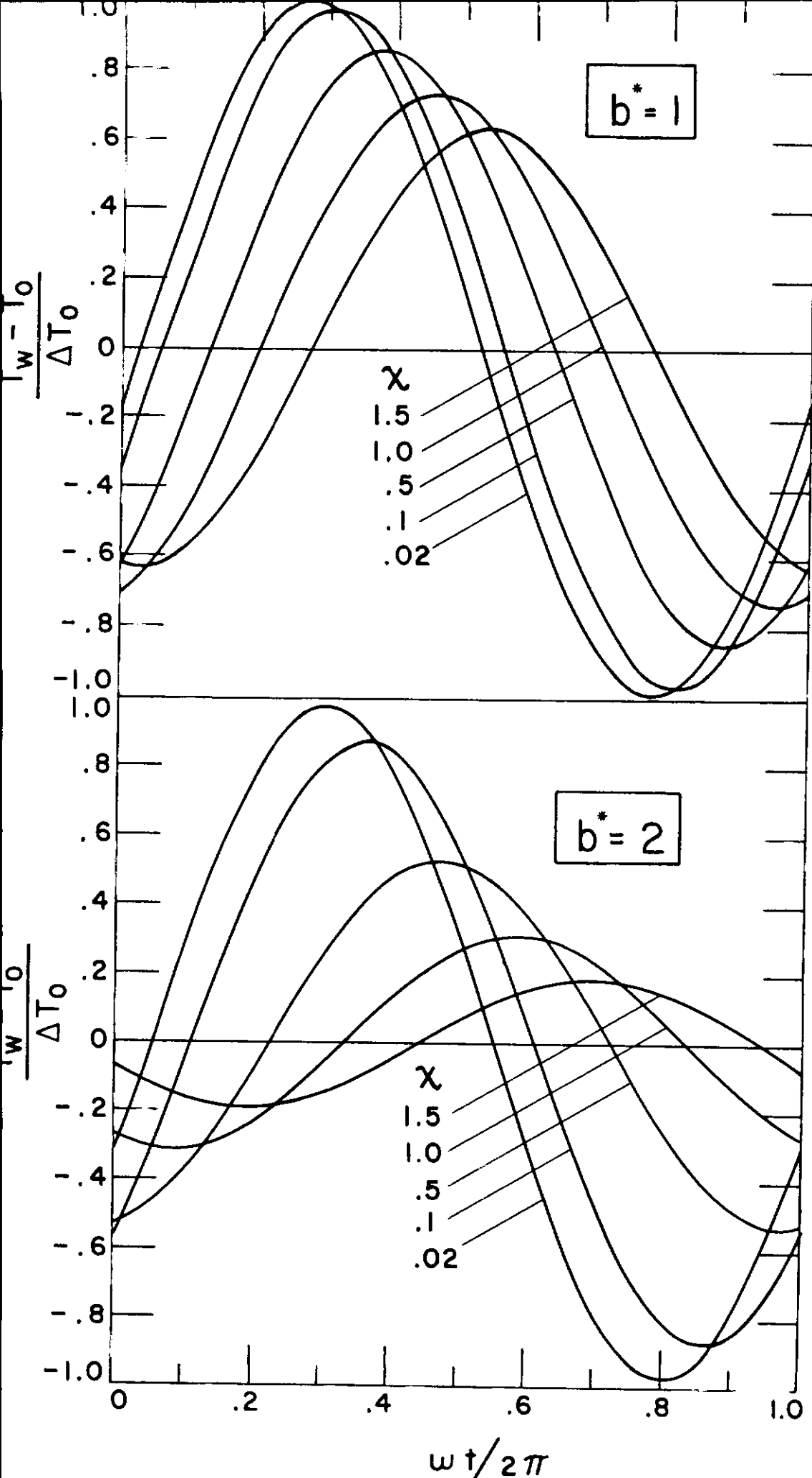


Fig. 3 - TEMPERATURA DA PAREDE

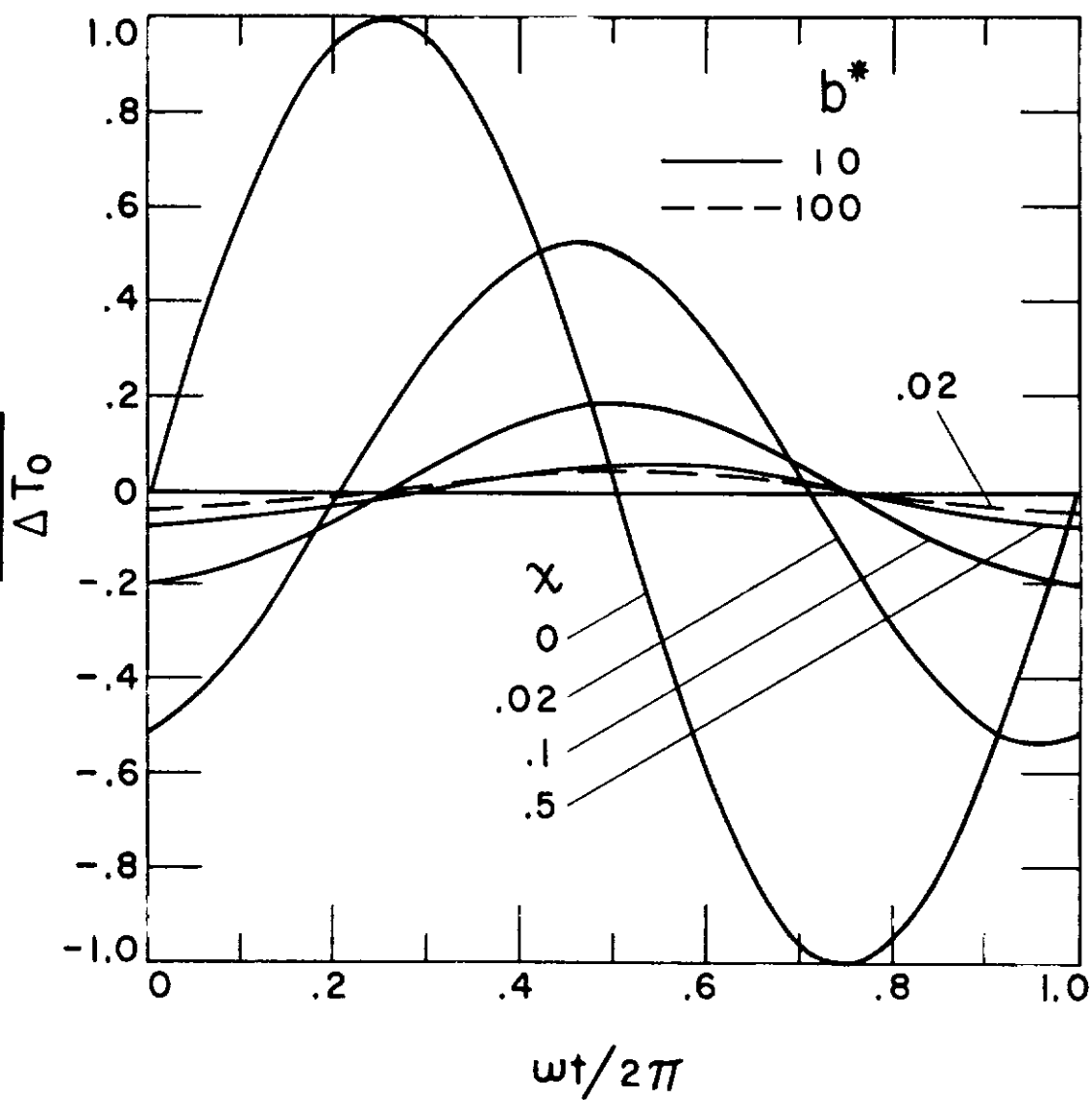


Fig. 4 - TEMPERATURA DA PAREDE

feito de visualização da defasagem das curvas, traçou-se também, no gráfico superior da figura 4, a variação de θ_w/A em $\chi = 0$.

De uma observação global dos gráficos, verifica-se imediatamente a ocorrência de fenômenos de amortecimento e de atraso na variação da temperatura da parede com o aumento de χ . A diminuição da amplitude da oscilação com o crescimento de χ resulta do decréscimo progressivo da diferença entre as temperaturas do fluido e parede. A defasagem crescente com χ é causada pela capacidade térmica da parede. É interessante observar também que esse atraso aumenta também com b^* , o que é explicável pelo fato de que o aumento de b^* pode ser caracterizado por um aumento na capacidade térmica da parede, mantendo-se ω , d e k constantes. Além disso, com o aumento da capacidade térmica da parede, isto é, de b^* , a amplitude da variação de θ_w/A diminui. Dessa forma, para $b^* = 100$, tem-se a temperatura da parede aproximadamente constante com o tempo.

2. Temperatura global

As figuras 5 e 6 apresentam a variação da temperatura global com o tempo, em diversas seções. Na figura 5 são mostradas curvas de θ_p/A como função do tempo e para os mesmos valores de χ indicados na figura 3. Os gráficos correspondem, respectivamente, a $b^* = 1$ e $b^* = 2$. Para $b^* = 10$, têm-se curvas para $\chi = 0.02, 0.10, 0.50$ e 1.00 , apresentadas na parte superior da figura 6. Em todos os casos acima, tem-se coincidência, dentro da escala escolhida, das curvas calculadas para $a^* = 0.001$ e 0.010 . No gráfico inferior, onde se apresentam as curvas correspondentes a $b^* = 100$, já se torna significativa a diferença causada pela variação do parâmetro a^* , como se pode observar.

Os diversos gráficos nos mostram os mesmos fenômenos de amortecimen

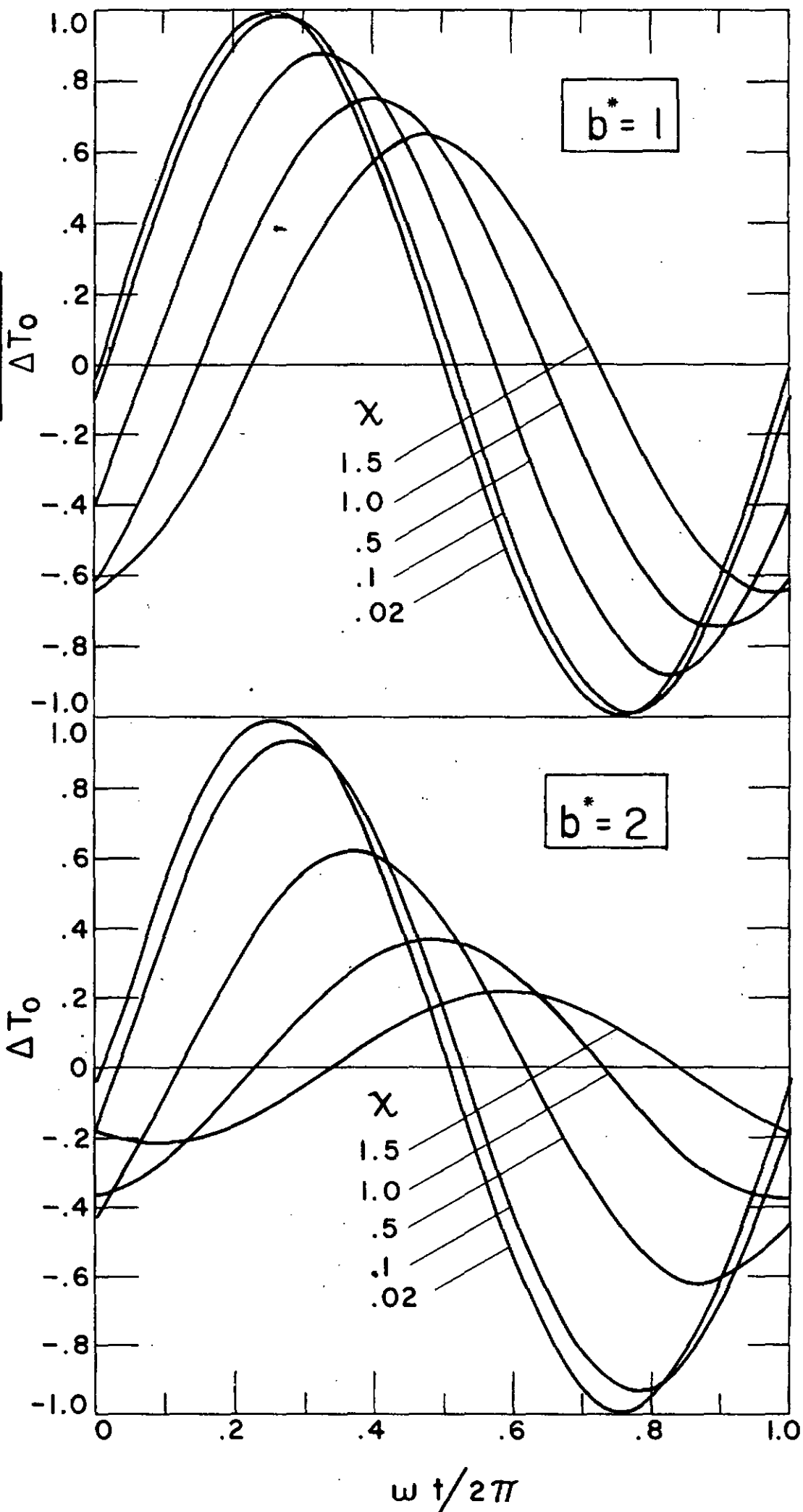


Fig. 5 - TEMPERATURA GLOBAL

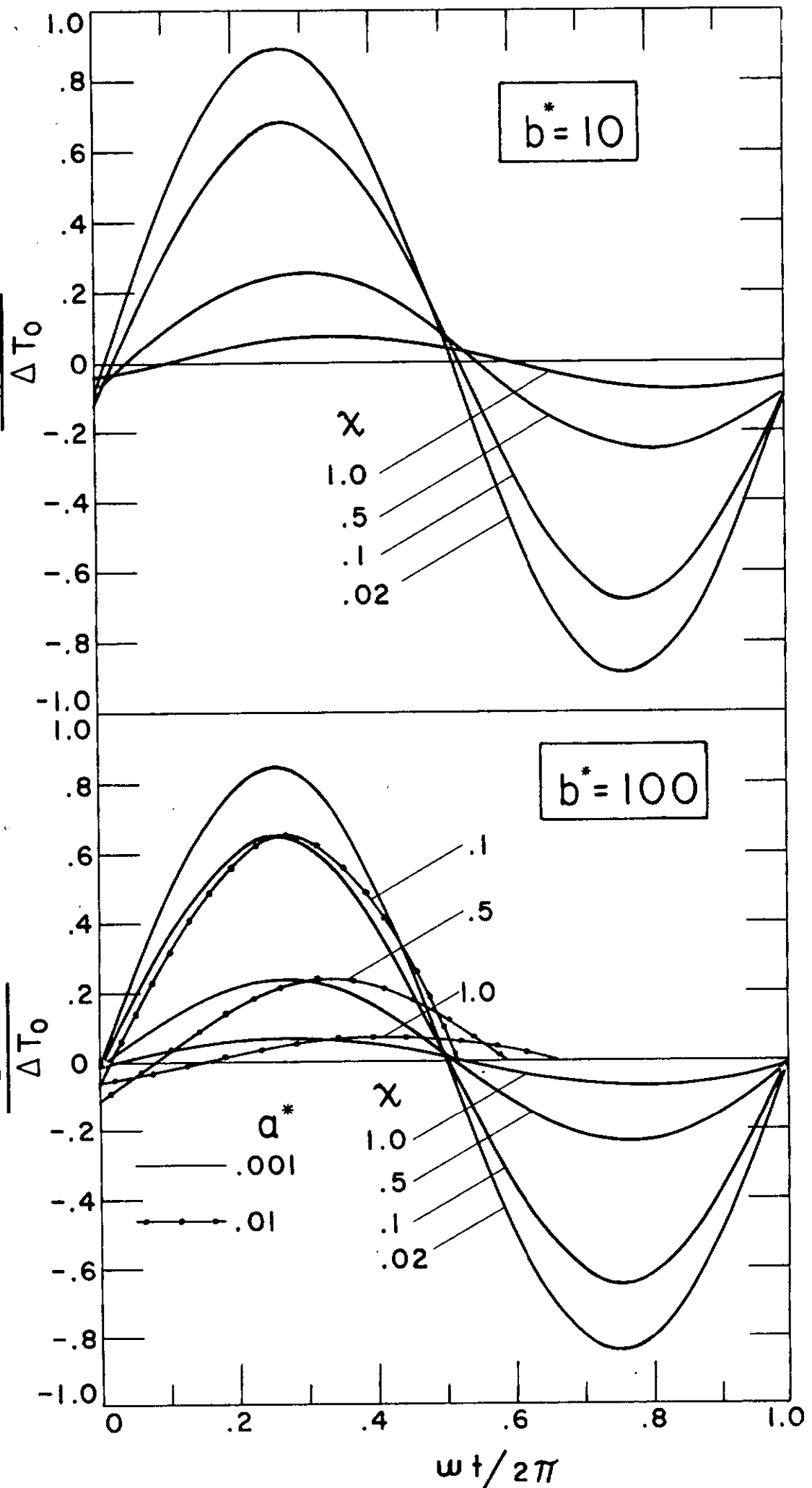


Fig. 6 - TEMPERATURA GLOBAL

para θ_p é bem diferente da do correspondente a θ_w . Assim, a defasagem para pequenos valores de b^* é muito mais pronunciada do que para valores altos. Como explicação para isso, notamos que a defasagem na oscilação da temperatura do fluido é devida a

1º) sua própria capacidade térmica

2º) ação da parede.

Para valores altos de b^* , como 100, a primeira razão é a dominante, não existindo, praticamente, influência da parede. Além disso, para um dado a^* , valores altos de b^* correspondem a alta capacidade térmica da parede, como já observamos. Para pequenos b^* , a ação da parede é pronunciada, e podemos dizer que a capacidade térmica do fluido é pequena (b^* baixo significa capacidade térmica da parede pequena, o que implica em, para um dado a^* , pequena capacidade térmica do fluido). Dessa maneira, observa-se que as curvas de θ_p/A correspondentes a $b^*=1$ seguem aproximadamente as curvas de θ_w/A para o mesmo valor do parâmetro. Entre êsses dois casos extremos, temos situações de transição, como apresentadas nas curvas de $b^* = 2$ e $b^* = 10$.

3. Número de Nusselt

As figuras 7 e 8 apresentam a variação do número de Nusselt, como definido na equação (30), com o tempo. As curvas foram levantadas apenas para $\chi = 0.10$ e $\chi = 1.00$, omitindo-se outros valores de χ para não prejudicar a clareza das figuras. A figura 7, parte superior, corresponde a $b^* = 1$, enquanto que a inferior se refere a $b^* = 2$, enquanto que na figura 8 têm-se as curvas referentes a $b^* = 10$ e $b^* = 100$, nas partes superior e inferior, respectivamente.

Observa-se, em tôdas as curvas, uma descontinuidade. Isto ocorre no instante em que se torna zero a diferença da temperatura e, por outro lado,

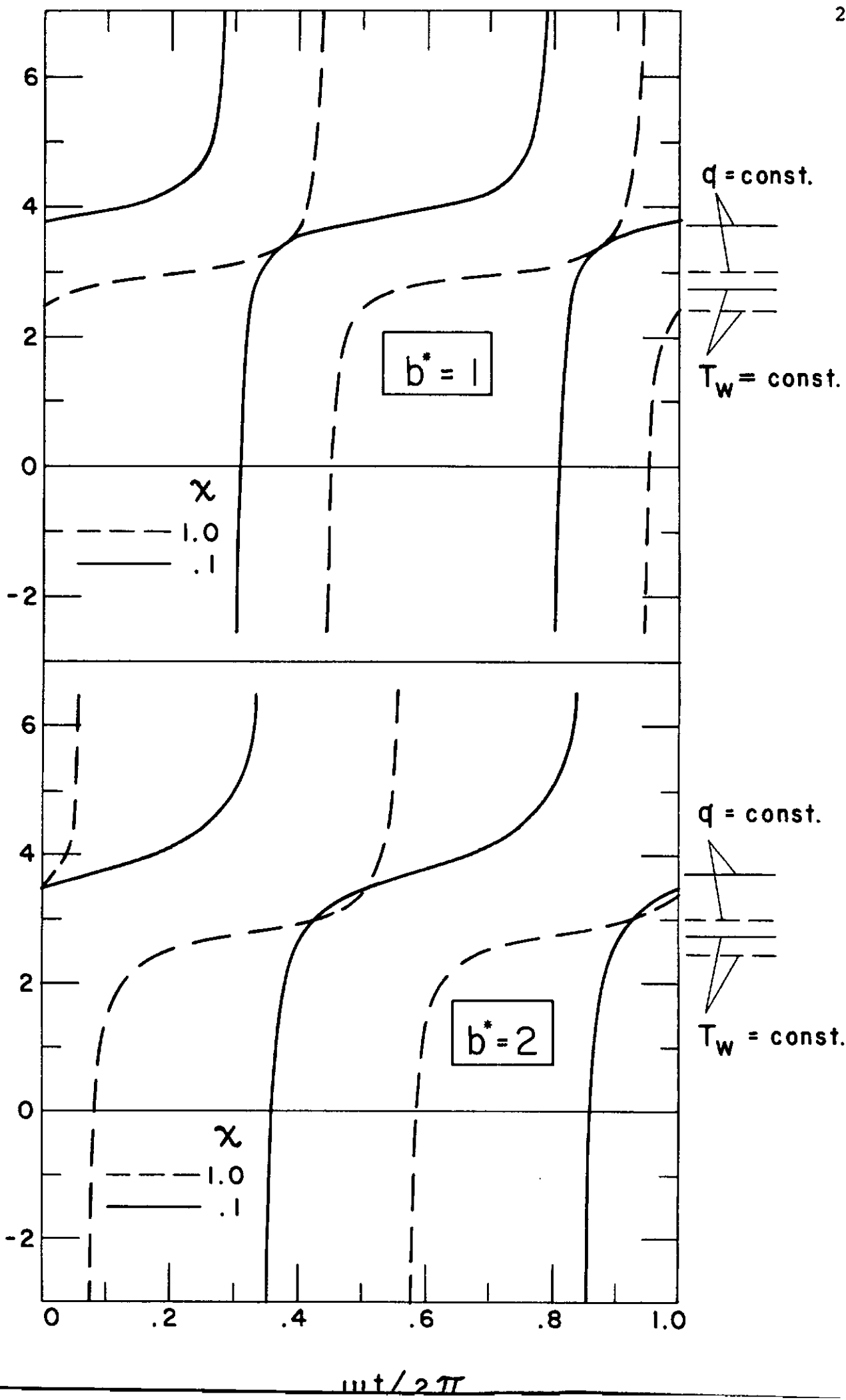


Fig. 7 - NÚMERO DE NUSSLEIT

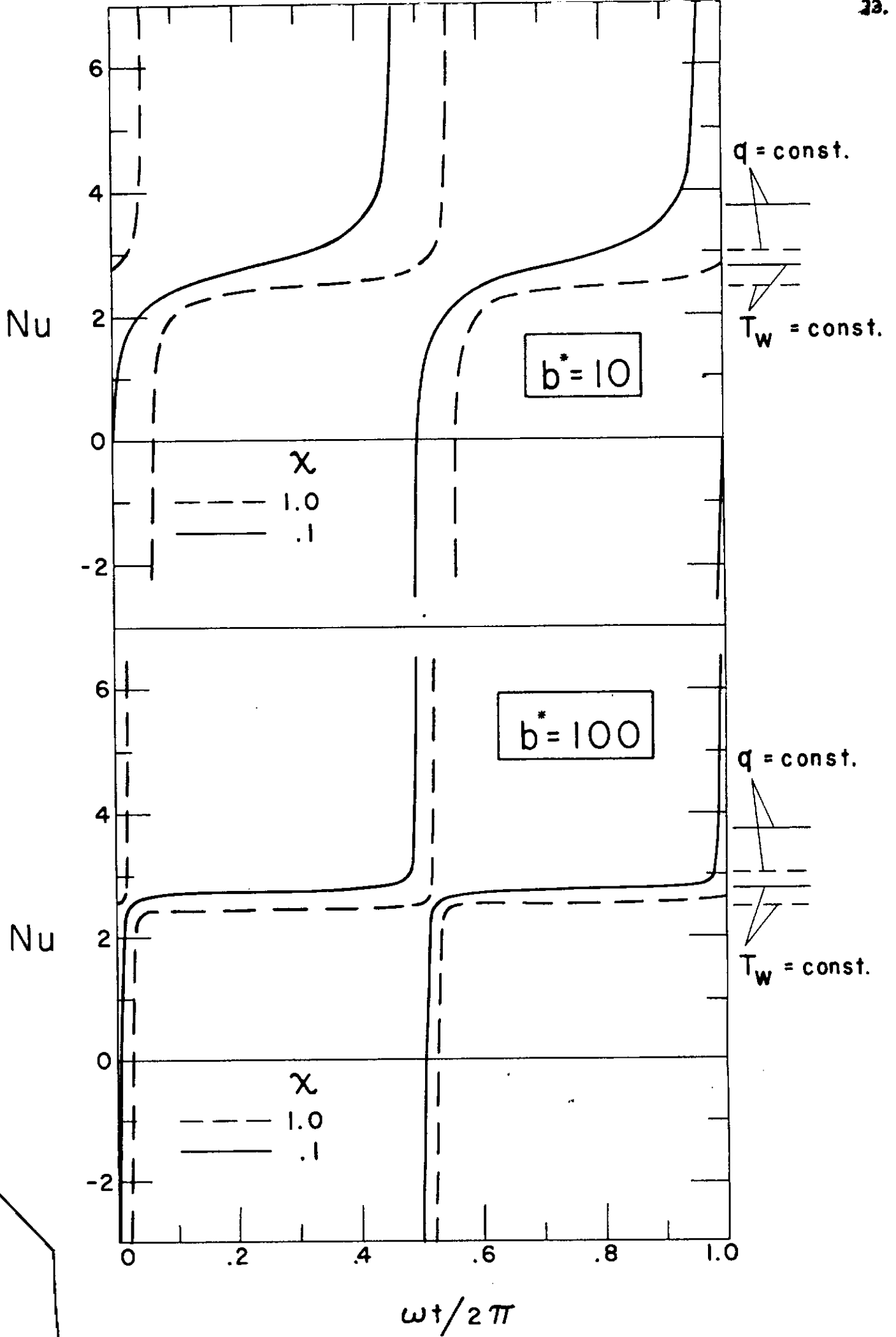


Fig. 8 - NÚMERO DE NUSSOLT

q não se anula. Isto indica que a definição de Nu com $(\theta_b - \theta_w)$ como força térmica propulsora não é adequada no caso em estudo. Em todos os gráficos estão as sinalados, para $\chi = 0.10$ e 1.00 , os valores locais de Nu nos dois casos clássicos de transferência de calor em regime permanente: fluxo de calor constante e temperatura da parede constante.

As curvas mostram, com o aumento de b^* , uma tendência à aproximação dos valores correspondentes ao caso de temperatura de parede constante, exceto nas vizinhanças da descontinuidade. No caso de $b^* = 100$, por exemplo (parte inferior da figura 8), já se pode considerar, em praticamente todo o ciclo, a constância do número de Nusselt, com valor igual ao do referido caso. Esse fato mostra que a utilização da hipótese da quase-permanência é razoavelmente aceitável para altos valores de b^* , desde que se usem valores locais Nu . Tais valores altos de b^* são, aliás, os mais comumente encontrados na prática.

4. Relação $\frac{E_x}{E_i}$

A figura 9 apresenta as curvas de E_x/E_i em função de χ , para valores de b^* iguais a 1., 2., 5., 10. e 100. Na mesma figura são traçadas também curvas calculadas sob a hipótese de Nu constante e igual a 2.47, que corresponde ao regime permanente, região completamente desenvolvida, temperatura de parede constante. Como já mencionado no capítulo anterior, E_x/E_i independe do parâmetro a^* .

Como se pode observar na figura, os níveis de energia caem com o aumento da distância axial. Para pequenos valores de χ , essa queda é tanto mais rápida quanto maior o valor de b^* , isto é, os modelos com maior b^* são mais eficientes termicamente.

Façamos uma apreciação de cada caso em separado. Para $b^* = 1$, a relação E_x/E_i varia lenta mas uniformemente. Neste caso, a utilização de Nu constante e igual a 2.47 nos dá uma aproximação razoável. Isto ocorreu por acaso, acreditamos, já que, a rigor, o valor de Nu escolhido seja válido apenas a partir de $\chi = 1.0$. Em $b^* = 2$, a variação é mais acentuada, e logo se atinge o valor zero para E_x/E_i , entrando-se em seguida na região correspondente a valores negativos de E_x , que caracteriza temperaturas abaixo da de referência.

Os casos seguintes, correspondentes a $b^* = 5, 10$ e 100 se assemelham: variação muito acentuada no início do canal, e pouco sensível para grandes distâncias axiais. Observa-se que, para efeito do comportamento global do sistema, caracterizado pela relação E_x/E_i , os modelos com b^* entre 10 e 100 se equivalem. É importante notar também que, para essa mesma gama de valores de b^* , o uso de Nu constante e igual a 2.47 nos dá apenas uma aproximação sofrível dos resultados verdadeiros.

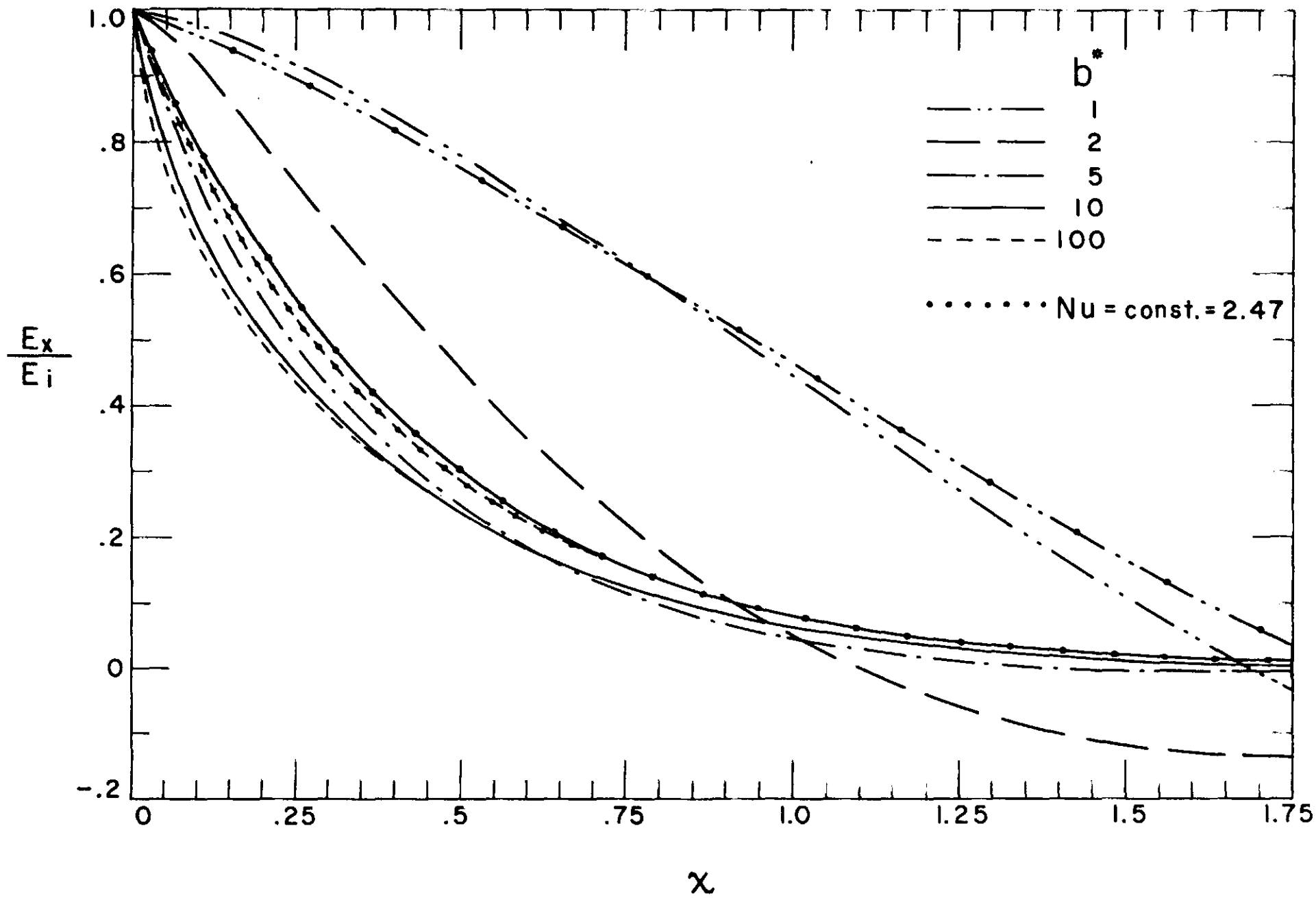


Fig. 9 - RELAÇÃO E_x/E_i

IV - SUMÁRIO DOS RESULTADOS E SUGESTÕES

A revisão dos resultados nos mostrou vários pontos a que se deve dar destaque. Em primeiro lugar, verificou-se que o parâmetro b^* , que envolve a frequência da oscilação da temperatura e a capacidade térmica da parede, é o único cuja influência sobre os resultados se faz sentir. O outro parâmetro nascido da análise, a^* , que relaciona as capacidades térmicas do fluido e parede, pouco afeta os valores numéricos finais, dentro da precisão escolhida para os gráficos. Constatou-se também que na temperatura da parede, tem-se a amplitude de sua oscilação muito reduzida com o aumento de b^* , chegando-se, no caso de $b^* = 100$, a poder praticamente considerá-la constante. Quanto à variação da temperatura global, verificou-se ser ela afetada, para baixos valores de b^* , principalmente pela ação da parede, enquanto que, em altos b^* , é dominante o efeito causado pela capacidade térmica do fluido.

Com relação ao número de Nusselt, observa-se a existência de uma descontinuidade em sua variação com o tempo quando se o define como:

$$Nu = \frac{q d}{k(T_b - T_w)}$$

já que o fluxo de calor não se anula quando $(T_b - T_w)$ se torna zero. Verifica-se também que, para altos valores de b^* , o valor de Nu praticamente se iguala ao valor local correspondente ao caso de regime permanente, temperatura de parede constante, exceto, evidentemente, nas descontinuidades.

A análise da relação E_x/E_1 , que de uma certa forma caracteriza o desempenho global do sistema, evidencia o comportamento semelhante de casos com b^* entre 10 e 100. Desde que os trocadores de calor reais operam com altos valores de b^* , seu desempenho pode ser previsto com o uso de uma curva universal. As cur

vas de E_x/E_i foram comparadas com um conjunto de curvas computadas usando-se número de Nusselt completamente desenvolvido, regime permanente, em tôdas as posições axiais ao longo do duto. A comparação mostrou apenas concordâncias sofríveis.

Como sugestão para continuação do estudo do problema, cremos ser interessante analisar dois casos:

- 19) Considerar o perfil parabólico de velocidades, que corresponde ao caso real
- 29) Tomar condutividade finita na parede, o que aproximaria o modelo de regeneradores com paredes de tijolos.

BIBLIOGRAFIA

1. W.M. Kays e A.L. London, Compact Heat Exchangers, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1964.
2. M. Jakob, Heat Transfer, vol. II, John Wiley & Sons, New York, N.Y., 1957.
3. A.J. Gram e G.W. Kessler, "New Regenerative Air Heater," Mechanical Engineering, vol. 88, 1966, p. 45.
4. J.L. Hudson e S.G. Bankoff, "Asymptotic Solutions for the Unsteady Graetz Problem", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 7, 1964, p.1303.
5. R. Siegel, "Forced Convection in a Channel with Wall Heat Capacity and with Wall Heating Variable with Axial Position and Time," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol 6, 1963, p. 607.
6. R. Siegel e M. Permutter, "Laminar Heat Transfer in a Channel with Unsteady Flow and Heating Varying with Position and Time", Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, Série C, vol. 85, 1963, p. 358.
7. R. Siegel e M. Perlmutter, "Unsteady Laminar Flow in a Duct with Unsteady Heat Addition", Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, Série C, vol. 81, 1961, p. 432.
8. A. Kardas, "On a Problem in the Theory of the Unidirectional Regenerator", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 9, 1966, p. 567
9. R. Siegel, "Transient Heat Transfer for Laminar Forced Convection in the Thermal Entrance Region of Flat Ducts", Journal of Applied Mechanics, Série E, vol. 81, 1959, p. 29.
10. R. Siegel, "Heat Transfer for Laminar Flow in Ducts with Arbitrary Time Variations in Wall Temperature", Journal of Applied Mechanics, Série E, vol.82, 1960, p. 241.
11. E. A. Coddington e N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1955.
12. H. Weinberger, comunicação pessoal, 10 de maio de 1966.
13. B. Friedman, Principles and Techniques of Applied Mathematics, John Wiley & Sons, New York, N.Y., 1962.

14. J. W. Dettman, Mathematical Methods in Physics and Engineerings. McGraw-Hill, New York, N.Y., 1962

APÊNDICE AValores característicos (eigenvalues): método de cálculo e tabela de valores numéricos.

Como exposto no texto, a determinação dos valores característicos com plexos é feita a partir das equações abaixo

$$\frac{\gamma}{\tanh \delta} - \frac{\delta}{\tan \gamma} = b^* \quad (A-1)$$

$$\gamma \tanh \delta + \delta \tan \gamma = b^* \quad (A-2)$$

onde γ e δ são os coeficientes das partes real e imaginária de λ .

Tendo em vista que as equações acima são transcendentais, utilizou-se um método de tentativas para a determinação do conjunto de valores de λ para cada b^* . Passamos a descrever o método. De (A-1) e (A-2), têm-se

$$\frac{\gamma}{\tanh \delta} - \frac{\delta}{\tan \gamma} = \gamma \tanh \delta + \delta \tan \gamma \quad (A-3)$$

O desenvolvimento de (A-3) nos conduz a

$$\gamma^* \operatorname{sen} \gamma^* = \delta^* \operatorname{senh} \delta^* \quad (A-4)$$

onde

$$\gamma^* = 2\gamma \quad ; \quad \delta^* = 2\delta$$

O cálculo é feito arbitrando-se γ^* , a partir do que determina-se, por tentativa, o valor de δ^* , com a utilização da equação (A-4). A verificação é feita pela equação (A-2), na qual se tem o parâmetro b^* previamente especificado.

Resta o problema de como estimar γ^* . Esse problema é facilitado pelo

fato de que γ e δ têm sempre o mesmo sinal, como demonstrado no apêndice C. Além disso, basta considerar o sinal positivo, como também o mostra o referido apêndice. As aproximações iniciais podem ser obtidas grãficamente, por meio de curvas construídas da seguinte maneira: arbitra-se γ e por meio de (A-4) calcula-se δ ; leva-se então os valores de γ e δ a (A-2) e obtém-se b^* . Pode-se então traçar as curvas de γ versus δ e de γ versus b^* e ter-se-ã, para o b^* desejado, os valores de γ e δ correspondentes. O procedimento para determinação das aproximações iniciais acima descrito foi utilizado apenas no cálculo do primeiro valor característico correspondente a cada b^* . Para os valores seguintes as aproximações foram tomadas intuitivamente. Isto é grandemente facilitado pelo fato de que os valores de γ vão tendendo a múltiplos de π e δ pode então ser calculado, em primeira aproximação, por

$$\delta = \tanh^{-1} \frac{b^*}{(n-1)\pi} \quad (\text{A-2-a})$$

Essa equação resulta de (A-2), em que se faz $\tan \gamma$ tender a zero.

Nela, n é o número de ordem do valor característico.

A título de verificação dos valores dos "eigenvalues", calculou-se a relação E_x/E_1 , expressa pela equação (37) (ver capítulo II), em $x = 0$, chegando-se ao resultado esperado, isto é, $E_x/E_1 = 1.000$ (erro menor que 10^{-3}).

Os valores de γ e δ obtidos estão relacionados abaixo, na tabela 1.

Partes real e imaginária dos valores característicos

$b^* = 1$		$b^* = 2$		$b^* = 5$		$b^* = 10$		$b^* = 50$		$b^* = 100$	
γ	δ	γ	δ	γ	δ	γ	δ	γ	δ	γ	δ
0,8000	0,5709	1,1736	0,5809	1,5024	0,3104	1,5547	0,1569	1,57016	0,0316	1,570641	0,0156
3,1764	0,3228	3,3106	0,6485	4,2112	0,9928	4,6491	0,4981	4,71047	0,0950	4,711904	0,0483
6,2873	0,1581	6,3005	0,3192	6,3893	0,7026	7,6349	0,9625	7,85072	0,1590	7,853190	0,0786
9,4260	0,1072	9,4299	0,2158	9,4696	0,5828	10,1288	1,3513	10,99088	0,2233	10,994458	0,1101
12,5668	0,0814	12,5680	0,1605	12,5822	0,4193	12,7244	1,0284	14,13088	0,2894	14,135718	0,1418
15,7080	0,0623	15,7087	0,1280	15,7154	0,3296	15,7578	0,7449	17,27059	0,3595	17,276959	0,1744
18,8496	0,0531	18,8501	0,1065	18,8536	0,2709	18,8725	0,5887	20,40997	0,4326	20,418188	0,2071
21,9912	0,0455	21,9914	0,0912	21,9937	0,2314	22,0039	0,4898	23,54882	0,5111	23,559438	0,2399
25,1328	0,0398	25,1329	0,0798	25,1344	0,2016	25,1407	0,4207	26,68690	0,5950	26,700592	0,2731
		28,2744	0,0709	28,2755	0,1768	28,2797	0,3682	29,82380	0,6872	29,841750	0,3075
				31,4160	0,1608	31,4197	0,3294	32,95879	0,7900	32,982874	0,3426
				34,5576	0,1447	34,5603	0,2979	36,09032	0,9107	36,123959	0,3782
						37,7014	0,2782	39,21532	1,0536	39,264996	0,4149
						40,9421	0,2516	42,32487	1,2374	42,405975	0,4526
								45,38896	1,4902	45,546871	0,4922
								48,27723	1,8327	48,687704	0,5319
								50,83724	1,9341	51,828420	0,5740
								53,61037	1,6302	54,969012	0,6178
								56,64442	1,3774	58,109418	0,6642
								59,74631	1,2068	61,249436	0,7129
								62,86906	1,0839	64,389560	0,7653
								66,00010	0,9898	67,529149	0,8202
										70,668257	0,8798
										73,806643	0,9459
										76,944054	1,0185

APÊNDICE BConjunto completo ("completeness") das funções características

Mostraremos a seguir que as funções características de nosso problema, $\cos \lambda \eta$, sendo λ um complexo, constituem um conjunto completo. Para isso, basta que demonstremos que uma função $f(\eta)$ pode ser desenvolvida em termos apenas de $\cos \lambda \eta$.

O problema é discutido por Coddington e Levinson (11). Weinberger (12) esquematizou a solução que apresentamos a seguir.

Consideremos a equação

$$Y'' + mY = -f(\eta) \quad (B-1)$$

onde Y é função de η e $m = \lambda^2$.

Sejam

$$Y'(0) = 0 \quad (B-2)$$

$$Y'(1) + ib^* Y(1) = 0 \quad (B-3)$$

as condições de contorno. De acordo com Friedman (13), tem-se

$$f(\eta) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|m|=R} Y_m(\eta) dm \quad (B-4)$$

Por outro lado, sabe-se (13) que

$$Y_m(\eta) = \int_0^1 G(\eta, \xi, m) f(\xi) d\xi \quad (B-5)$$

onde G é a função de Green.

Nosso procedimento se resume então em determinar a função de Green e, com o auxílio de (B-5), calcular $Y_m(\eta)$. Em seguida, avalia-se a integral

$$\oint_{|m|=R} Y_m(\eta) dm \quad (B-4-a)$$

pelo teorema dos resíduos. Caso os valores característicos constituam um conjunto completo, a equação (B-4) nos dará a expansão procurada.

A determinação da função de Green foi feita a partir de suas propriedades, como exposto em (14). Após longo desenvolvimento algébrico, obteve-se

$$G(\eta, \xi, m) = \begin{cases} \frac{\sqrt{m} \cos(\sqrt{m}(1-\eta)) + ib^* \operatorname{sen}(\sqrt{m}(1-\eta))}{-m \operatorname{sen} \sqrt{m} + ib^* \sqrt{m} \cos \sqrt{m}} \cos(\sqrt{m} \xi) \dots 0 \leq \xi \leq \eta & (B-6-a) \\ \frac{\sqrt{m} \cos(\sqrt{m}(1-\xi)) + ib^* \operatorname{sen}(\sqrt{m}(1-\xi))}{-m \operatorname{sen} \sqrt{m} + ib^* \sqrt{m} \cos \sqrt{m}} \cos(\sqrt{m} \eta) \dots \eta \leq \xi \leq 1 & (B-6-b) \end{cases}$$

Pode-se agora, com o auxílio da equação (B-5), obter $Y_m(\eta)$. Para

fins de simplificação, pode-se escolher $f(\eta)$, que deve somente obedecer à condição de ter seu quadrado integrável (square integrable function). Então seja

$$f(\eta) = 1 \quad \dots \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (B-7)$$

Levando-se agora as equações (B-6-a), (B-6-b) e (B-7) em (B-5), obtém-se

$$Y_m(\eta) = -\frac{1}{m} - ib^* \frac{\cos(m^{1/2}\eta)}{m^{3/2} \operatorname{sen} m^{1/2} - ib^* m \cos m^{1/2}} \quad (B-8)$$

Usando-se o teorema dos resíduos, avaliou-se a integral definida em (B-4-a), obtendo-se

$$\oint_{|m|=R} Y_m(\eta) dm = 4\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ib^* \sec \lambda_n}{b^{*2} - \lambda_n^2 - ib^*} \cos(\lambda_n \eta) \quad (B-9)$$

Finalmente, efetuando-se o indicado em (B-4), tem-se

$$1 = 2 \operatorname{ib} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sec \lambda_n}{b^2 - \lambda_n^2 - \operatorname{ib}} \cos (\lambda_n \eta) \quad (\text{B-10})$$

o que demonstra nossa tese.

APÊNDICE COrtogonalidade das funções características e sinal dos valores característicos.1. Ortogonalidade das funções características

O aparecimento de valores característicos complexos impossibilita enquadrarmos o caso em estudo no problema clássico de Sturm-Liouville. Dessa maneira, há necessidade de se mostrar que as funções características são ortogonais. É o que mostra a análise que se segue. Consideremos a equação que deu origem às funções e valores característicos.

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0 \quad (C-1)$$

com

$$Y'(0) = 0 \quad (C-2)$$

$$Y'(1) + ib^* Y(1) = 0 \quad (C-3)$$

A partir de (C-1), seguindo-se o procedimento clássico para demonstração de ortogonalidade, têm-se

$$(Y'_m)' + \lambda_m^2 Y_m = 0 \quad (C-4-a)$$

e

$$(Y'_k)' + \lambda_k^2 Y_k = 0 \quad (C-4-b)$$

Multiplicando-se (C-4-a) por Y_k , (C-4-b) por Y_m , subtraindo-se membro a membro as equações resultantes, e agrupando-se, vem

$$(\lambda_m^2 - \lambda_k^2) Y_m Y_k = (Y'_m Y_k)' - (Y'_k Y_m)' \quad (C-5)$$

Integrando (C-5) no intervalo $\eta = 0$ a $\eta = 1$, virá

$$(\lambda_m^2 - \lambda_k^2) \int_0^1 Y_m Y_k \, d\eta = [Y'_m Y_k - Y'_k Y_m] \Big|_0^1 \quad (C-6)$$

A condição (C-2) porém nos dá

$$Y'_k(0) = Y'_m(0) = 0 \quad (C-2-a)$$

E a condição (C-3) conduz a

$$Y'_m(1) Y_k(1) = Y'_k(1) Y_m(1) \quad (C-3-a)$$

Tendo em vista (C-2-a) e (C-3-a), a equação (C-6) se transforma em

$$(\lambda_m^2 - \lambda_k^2) \int_0^1 Y_m Y_k \, d\eta = 0 \quad (C-7)$$

e para $\lambda_m \neq \lambda_k$, ter-se-á

$$\int_0^1 Y_m Y_k \, d\eta = 0 \quad (C-8)$$

A equação (C-8) demonstrou a ortogonalidade das funções características.

2. Sinal dos valores característicos

Sejam os valores característicos

$$\lambda_n = \gamma_n + i\delta_n \quad (C-9)$$

Suponhamos agora que

$$Y_n = u_n + iv_n \quad (C-10)$$

sejam as funções características.

Levando-se (C-9) e (C-10) em (C-1) e desenvolvendo-se, obtêm-se

$$(u'_n + i v'_n)' + (\alpha_n + i\beta_n) (u_n + i v_n) = 0 \quad (\text{C-11})$$

onde

$$\alpha_n = \gamma_n^2 - \delta_n^2 \quad (\text{C-11-a})$$

$$\beta_n = 2 \gamma_n \delta_n \quad (\text{C-11-b})$$

De (C-11) resulta o seguinte par de equações

$$(u'_n)' + \alpha_n u_n - \beta_n v_n = 0 \quad (\text{C-12-a})$$

$$(v'_n)' + \alpha_n v_n + \beta_n u_n = 0 \quad (\text{C-12-b})$$

Multiplicando-se (C-12-a) por v_n , (C-12-b) por u_n , subtraindo membro a membro as equações resultantes, agrupando e integrando entre $n=0$ e $n=1$, vem

$$-\beta_n \int_0^1 (u_n^2 + v_n^2) dn = \left| v_n' u_n - u_n' v_n \right|_0^1 \quad (\text{C-13})$$

Vejamos agora as condições de contorno. De (C-2) têm-se

$$u'_n(0) + i v'_n(0) = 0 \quad (\text{C-14})$$

ou

$$u'_n(0) = 0 \quad (\text{C-14-a})$$

$$v'_n(0) = 0 \quad (\text{C-14-b})$$

De (C-3) vem

$$(u'_n(1) + i v'_n(1)) + i b^* (u_n(1) + i v_n(1)) = 0 \quad (\text{C-15})$$

ou

$$u'_n(1) = b^* v_n(1) \quad (\text{C-15-a})$$

$$v'_n(1) = -b^* u_n(1) \quad (\text{C-15-b})$$

Levando-se esses resultados em (C-13), ter-se-á

$$-\beta_n \int_0^1 (u_n^2 + v_n^2) dn = -b^* (u_n^2(1) + v_n^2(1)) \quad (\text{C-16})$$

e finalmente

$$\beta_n = b^* \frac{u_n^2(1) + v_n^2(1)}{\int_0^1 (u_n^2 + v_n^2) dn} \quad (\text{C-16-a})$$

Como b^* é um parâmetro essencialmente positivo, pode-se concluir que β_n é positivo, logo γ_n e δ_n terão sempre o mesmo sinal. Além disso, existe a simetria de λ , isto é, se λ_n é um valor característico, $-\lambda_n$ também o será. Esse fato é facilmente verificável pela equação que define os valores característicos, isto é

$$\lambda \tan \lambda = ib^* \quad (\text{C-17})$$

pois $(-\lambda) \tan(-\lambda) = (-\lambda)(-\tan \lambda) = \lambda \tan \lambda$

Dessa maneira, basta-nos considerar os valores característicos λ_n situados no 1º quadrante, isto é, teremos sempre γ e δ positivos.

Observe-se que o fato acima exposto serve de complementação à demonstração da ortogonalidade das funções características, pois exclui da análise o caso em que se tivesse $\lambda_m = -\lambda_k$, o que impossibilitaria a conclusão de (C-8) a partir de (C-7), já que nesse caso se teria $\lambda_m^2 - \lambda_k^2 = 0$.

APÊNDICE DTroca de calor por convecção forçada, em regime permanente

Consideraremos agora, para efeito de comparação com os resultados obtidos com nosso modelo, os dois casos clássicos de troca de calor por convecção forçada, em regime permanente: fluxo de calor constante e temperatura da parede constante. Em ambos os casos trataremos de escoamento empistonado entre placas planas paralelas.

1. Fluxo de calor constante

Seja $2d$ a distância entre as placas e q o fluxo de calor por unidade de área, constante, recebido pelo fluido através da parede. A velocidade do escoamento, considerado empistonado, é U . Sejam x e y as coordenadas, contadas a partir da seção de entrada e do centro do canal, respectivamente. A figura abaixo resume as considerações acima

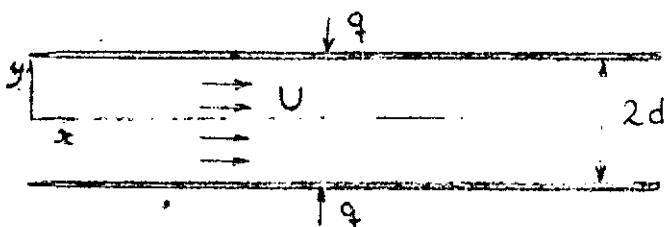


Fig. 10 - Modelo físico

A conservação da energia nos dá:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

em que

$$\eta = \frac{y}{d} \quad \text{e} \quad \chi = \frac{x/d}{\text{Pe}}$$

Resolver-se-á o problema em duas partes, a primeira das quais considera a região completamente desenvolvida, correspondendo a segunda à região de entrada. Assim, têm-se, na região desenvolvida, as seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial T_{fd}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em } \eta = 0 \quad (\text{D-2})$$

e

$$\frac{\partial T_{fd}}{\partial \chi} = \frac{\partial T_b}{\partial x} = \frac{q}{\rho U d C_p} = \text{constante}, \quad (\text{D-3})$$

para qualquer χ na região em estudo.

Nas equações (D-2) e (D-3), T_{fd} representa a temperatura na região completamente desenvolvida, e T_b a temperatura global. De (D-3) tem-se

$$T_{fd} = \frac{q d}{\rho U d C_p} \frac{x k}{\rho U d^2 C_p} + f(\eta) \quad (\text{D-4})$$

ou

$$\theta_{fd} = \chi + g(\eta) \quad (\text{D-4-a})$$

em que

$$\theta_{fd} = \frac{T_{fd} - T_i}{q d / k} \quad (\text{D-5})$$

sendo T_i a temperatura do fluido em $\chi = 0$.

Resta-nos a determinação de $g(\eta)$. Para isto, desde que temos

$$\frac{\partial \theta_{fd}}{\partial \chi} = \frac{\partial^2 \theta_{fd}}{\partial \eta^2} \quad (\text{D-1-a})$$

e tendo em vista (D-4-a), pode-se escrever:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} = 1 \quad (D-6)$$

Tendo em vista a simetria de $g(\eta)$ em $\eta = 0$, a solução de (D-6) dá:

$$g = \frac{\eta^2}{2} + C \quad (D-7)$$

Por outro lado, temos

$$\theta_b = \int_0^1 \theta_{fd} \, d\eta = \int_0^1 \left(X + \frac{\eta^2}{2} + C \right) d\eta \quad (D-8)$$

ou

$$\theta_b = X + 1/6 + C$$

Mas $\theta_b = 0$ em $X = 0$, o que nos dá $C = -1/6$

Dessa maneira, teremos, da (D-4-a), o seguinte

$$\theta_{fd} = X + \frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{6} \quad (D-9)$$

Vejam agora a parte da solução correspondente à região de entrada.

Seja

$$T^*(X, \eta) = T(X, \eta) - T_{fd}(X, \eta) \quad (D-10)$$

Teremos

$$\frac{\partial T^*}{\partial X} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} \quad (D-1-b)$$

Vejam as condições de contorno:

- No centro do canal, devido à simetria, tem-se:

$$\frac{\partial T^*}{\partial \eta} = 0 \quad , \quad n = 0 \quad (D-11)$$

- Junto à parede, já que q é constante, virá:

$$\frac{\partial T^*}{\partial \eta} = 0 \quad , \quad n = 1 \quad (D-12)$$

- Na seção de entrada, tendo em vista (D-9) e (D-10), temos:

$$T^* = T_i - \frac{qd}{k} \left| \frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{6} \right| - T_i \quad , \quad x = 0 \quad (D-13)$$

Resolvendo-se a equação (D-1-b) por separação de variáveis, tem-se:

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n^2 \pi^2} e^{-n^2 \pi^2 x} \cos n\pi \eta \quad (D-14)$$

onde

$$\theta^* = T^*/(qd/k) \quad (D-15)$$

Levando-se (D-14) e (D-9) em (D-10), obtêm-se a expressão final de $T(x, \eta)$ que é a seguinte:

$$\frac{T-T_i}{qd/k} = x + \left| \frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{6} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n^2 \pi^2} e^{-n^2 \pi^2 x} \cos n\pi \eta \quad (D-16)$$

Pode-se agora obter a expressão do número de Nusselt. Definindo-se

$$h = \frac{q}{T_w - T_b} \quad (D-16)$$

$$Nu = \frac{hd}{k} \quad (D-17)$$

obtem-se, após algum desenvolvimento:

$$\text{Nu} = \frac{3}{1 + 6 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{e^{-n^2 \pi^2 x}}{n^2 \pi^2}} \quad (\text{D-18})$$

2. Temperatura da parede constante

Nesse caso temos:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial \eta^2} \quad (\text{D-19})$$

onde

$$\tau = T_w - T \quad (\text{D-20})$$

As condições de contorno serão

$$\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0 \quad (\text{D-21})$$

$$\tau = 0, \quad \eta = 1 \quad (\text{D-22})$$

$$\tau = \tau_i = \text{constante}, \quad x = 0 \quad (\text{D-23})$$

A solução da equação (D-19), por separação de variáveis, e é da forma

$$\frac{\tau}{\tau_i} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\lambda_n^2 x}}{\lambda_n} \cos \lambda_n \eta \quad (\text{D-24})$$

onde

$$\lambda_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad (\text{D-25})$$

O número de Nusselt, definido como em (D-17), será dado por

$$\text{Nu} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 x}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 x}}{\lambda_n^2}} \quad (\text{D-26})$$

APÊNDICE E

Troca de calor em regime não permanente, com coeficiente
de transmissão de calor constante

Determinaremos agora a expressão que nos dá a variação da temperatura do fluido em função da distância axial e do tempo no caso em que se toma o coeficiente h constante. Usamos o mesmo modelo utilizado no problema desenvolvido no capítulo II.

Um balanço de energia num elemento de parede nos dá:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} = \frac{h}{a_w} (\theta - \theta_w) \quad (E-1)$$

onde todos os símbolos têm o mesmo significado que na análise exposta no segundo capítulo. No fluido, ter-se-á:

$$U \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{h}{a} (\theta - \theta_w) \quad (E-2)$$

Com a utilização de (E-2) e (E-1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + U \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} + h \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a_w} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{h}{a_w} U \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (E-3)$$

A única condição de contorno necessária é a correspondente a $x = 0$, pois está se procurando a solução cíclica. Então, análogamente ao que já foi visto, seja

$$\theta = A e^{i\omega t} \quad , \quad x = 0 \quad (E-4)$$

Propõe-se uma solução periódica da forma

Levando-se (E-5) em (E-3), obtêm-se, com a aplicação de (E-4), uma expressão em forma de complexo. Escolhendo-se o coeficiente da parte imaginária, chega-se, após longo trabalho algébrico, a:

$$\frac{\theta}{A} = e^{-b^* \mu \chi} \operatorname{sen} |\omega t - \Delta \chi| \quad (\text{E-6})$$

onde

$$\mu = \frac{b^* \operatorname{Nu}}{\operatorname{Nu}^2 + b^{*2}} \quad (\text{E-7})$$

$$\Delta = a^* b^* + \mu \operatorname{Nu} \quad (\text{E-8})$$

$$\chi = \frac{x/d}{\operatorname{Pe}} \quad (\text{E-9})$$

Os demais símbolos foram definidos previamente.

Para efeito de comparação, apresentaremos agora a expressão de E_x/E_i para este caso. Análogamente ao exposto no capítulo II, temos:

$$E_x = \frac{\rho C_p U d}{\omega} \int_{a^* b^* \chi}^{a^* b^* \chi + \pi} \theta d(\omega t) \quad (\text{E-10})$$

Levando (E-6) em (E-10) e desenvolvendo-se, chega-se a

$$\frac{E_x}{E_i} = e^{-b^* \mu \chi} \cos(\mu \operatorname{Nu} \chi) \quad (\text{E-11})$$

NOMENCLATURA

- A - amplitude da oscilação da temperatura
- a - grupo da capacidade térmica do fluido, $\rho C_p d$
- a_w - grupo da capacidade térmica da parede, $\rho_w C_w e$
- a^* - relação entre os grupos de capacidade térmica, a/a_w
- B_n - constante, eq. (15)
- b^* - grupo da frequência da oscilação da temperatura, $a_w \omega d/k$
- C_p - calor específico do fluido
- C_w - calor específico da parede
- d - meia distância entre duas paredes
- E_i - energia que atravessa a seção de entrada num meio período
- E_x - energia que atravessa a seção x num meio período
- e - ,meia espessura da parede
- F_n - grupo auxiliar, eq. (20-a)
- F_n^* - grupo auxiliar, eq. (32-d)
- f_n - grupo auxiliar, eq. (27-b)
- f_n^* - grupo auxiliar, eq. (32-b)
- G - função de Green
- G_n - grupo auxiliar, eq. (20-b)
- G_n^* - grupo auxiliar, eq. (32-c)
- g - função de η , eq. (D-7)
- g_n - grupo auxiliar, eq. (27-a)
- g_n^* - grupo auxiliar, eq. (32-a)
- h - coeficiente de transmissão de calor, $q/(T_b - T_w)$
- k - coeficiente de condutividade térmica do fluido
- M_n - grupo auxiliar, eq. (19-a)

- N_n - grupo auxiliar, eq. (19-b)
 Nu - número de Nusselt, hd/k
 Pe - número de Peclet, Ud/α
 Q_n - grupo auxiliar, eq. (21)
 q - fluxo de calor na parede, por unidade de área
 q_n - grupo auxiliar, eq. (22-c)
 r_n - grupo auxiliar, eq. (22-d)
 s_n - grupo auxiliar, eq. (22-a)
 T - temperatura do fluido
 T_0 - temperatura média do fluido em $x = 0$
 T_b - temperatura global
 T_i - temperatura na seção de entrada, na solução para regime permanente
 T_w - temperatura da parede
 t - tempo
 t_n - grupo auxiliar, eq. (22-b)
 U - velocidade do escoamento
 x - coordenada axial
 y - coordenada normal

Letras gregas

- α - difusividade térmica do fluido
 γ_n - parte real dos valores característicos
 δ_n - parte imaginária dos valores característicos
 Δ - grupo auxiliar, eq. (E-8)
 ϵ_n - grupo auxiliar, eq. (18-a)
 ϵ_n^* - grupo auxiliar, eq. (25-a)
 ϕ_n - grupo auxiliar, eq. (18-b)

- ϕ_n^* - grupo auxiliar, eq. (25-b)
- ρ - massa específica do fluido
- ρ_w - massa específica da parede
- μ - grupo auxiliar, eq. (E-7)
- λ_n - valor característico
- ψ_n - grupo auxiliar, eq. (23)
- χ - coordenada axial adimensional, $(x/d)/Pe$
- η - coordenada normal adimensional, y/d
- ω - frequência da oscilação da temperatura
- θ - diferença de temperaturas, $T - T_0$
- θ_b - valor de θ correspondente a T_b , $T_b - T_0$
- θ_w - valor de θ correspondente a T_w , $T_w - T_0$
- θ_{fd} - temperatura completamente desenvolvida, eq. (D-5)
- θ^* - temperatura na região de entrada, eq. (D-15)
- τ - diferença de temperaturas, $T_w - T$