

VIBRAÇÕES DE SISTEMAS ELÁSTICOS

COM MASSA VARIÁVEL NO TEMPO

HANS INGO WEBER

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS PÓS-GRADUADOS DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

Abril de 1968

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Professor Luiz Bevilacqua que sugeriu e orientou este trabalho.

À COPPE, como instituição, pela sua mentalidade de estudo e trabalho.

Í N D I C E

SUMÁRIO

BIBLIOGRAFIA	iii
I. INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE COM VARIAÇÃO DE MASSA LINEAR COM O TEMPO	4
2.1 - Generalidades	4
2.2 - Variação de massa sem velocidade	6
2.3 - Variação de massa com velocidade	10
2.4 - Variação de massa em corpos que oscilam sob ação da gravidade	12
CAPÍTULO III- VARIAÇÃO DE MASSA NÃO LINEAR NO TEMPO EM SIS- TEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE	16
3.1 - Introdução	16
3.2 - Solução considerando o efeito de amorte_ cimento de variação de massa segundo mt^n	16
3.3 - Indicação para um caso geral	20
CAPÍTULO IV - VIBRAÇÃO LONGITUDINAL DE BARRAS COM VARIAÇÃO DE MASSA	21
4.1 - Apresentação do problema	21
4.2 - Massa varia com o tempo. Solução	24
4.3 - Massa varia com espaço e com tempo. So- lução aproximada proposta	26
 <u>SEGUNDA PARTE</u>	
CAPÍTULO V - VIBRAÇÃO DE VIGAS SOB A AÇÃO DA VARIAÇÃO DE MASSA	36
5.1 - Introdução	36

5.2 - Estudo da viga biapoiada com uma variação discreta na massa unitária	37
5.2.1-Modos próprios de vibração	37
5.2.2-Resposta à excitação externa.Formulação	43
5.2.3-Ortonormalização dos modos próprios ..	47
5.2.4-Resposta à excitação externa. Aplicação ao nosso caso	42
5.3 - Estudo da viga biapoiada com variação discreta na massa unitária deslocada da extremidade	52
5.3.1-Modos próprios de vibração	52

APÊNDICE

I. DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DA FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO E DOS MODOS PRÓPRIOS DE UMA VIGA COM UMA VARIAÇÃO DISCRETA NA MASSA UNITÁRIA E SEM VARIAÇÃO DE INÉRCIA	56
1. Frequência de vibração	56
Diagrama de Blocos	59a
2. Modos próprios	60
Resultados e gráficos	61a
II. TENTATIVAS DE APROXIMAÇÃO PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE RESPOSTA DE UMA VIGA BIAPOLADA A UMA CARGA PASSANTE QUE EM CADA INSTANTE EM CADA PONTO ASSUME A VELOCIDADE DE VIBRAÇÃO DA VIGA	62
Programa de computação	68a
NOMENCLATURA	69

REFERÊNCIAS

1. L. MEIROVITCH - Analytical Methods in Vibrations
MacMillan, 1967 - Capítulos 5 e 7
2. E. VOLTERRA - E. ZACHMANOGLU - Dynamics of Vibrations
Charles E. Merrill, 1965 - Capítulo 4
3. R. BISPLINGHOFF - H. ASHLEY - Principles of Aeroelasticity
J. Wiley, 1962 - Capítulo 10
4. H. GOLDSTEIN - Classical Mechanics
Addison-Wesley, 1950 - Capítulo 11
5. L. MEIROVITCH - D. WESLEY - On the Dynamic Characteristics of a
Variable Mass Slender Elastic Body under High
Accelerations
AIAA Journal, Aug. 1967
6. F. HILDEBRAND - Advanced Calculus for Applications
Prentice-Hall, 1965 - Capítulo 4

TABELAS CONSULTADAS

1. Tables of Integral Transforms, Vol. I, McGraw-Hill, 1954
2. Handbook of Mathematical Functions, Dover, 1965

BIBLIOGRAFIA

1. S. TIMOSHENKO - Vibration Problems in Engineering
D. van Nostrand - Capítulo 5
2. F. VENANCIO FILHO - Dynamic Influence Lines of Beams and Frames
Journal of Structural Division -Proc. ASCE, April 1966
3. J. VELLOZZI - Vibration of Suspension Bridges under Moving Loads
Journal of Structural Division -Proc. ASCE, Aug. 1967

S U M Á R I O

Estudo de sistemas de um grau de liberdade com variação de massa linear com o tempo, considerando que ela se dê ou não na velocidade do movimento. Indicação para caso mais geral. Estudo de vibrações longitudinais de barras com massa uniformemente variável, linear com o tempo e com uma variação "step" ao longo de seu eixo dependente do tempo; solução proposta. Estudo analítico de uma viga com massa variada num certo trecho sem alteração da inércia. Indicação da solução numérica. Discussão das dificuldades encontradas.

I. INTRODUÇÃO

Ao considerar o problema de massa variável em sistemas de um grau de liberdade intuimos um amortecimento para um aumento de massa. Este trabalho nasceu da tentativa de estudo do mesmo fenômeno em meios elásticos. Como não encontramos bibliografia que abordasse extensivamente o primeiro caso nós lhe dedicamos dois capítulos, no primeiro dos quais foi feito um estudo extensivo dos tipos de variação de massa, discreta ou contínua, inicialmente para um caso linear. Partimos de um corpo base que definimos como sendo o recipiente vazio no caso de acréscimo de massa ou o recipiente cheio para quando houver diminuição da massa e é estudada a variação de massa com ou sem variação da energia envolvida no processo. No segundo capítulo é feita ligeira generalização da lei de variação e indicação para casos mais complexos. Podemos já chamar a atenção sobre os bons recursos que o computador analógico fornece para a solução deste tipo de problema.

Para sistemas elásticos foi nossa intenção verificar a aplicabilidade das formulações de sistemas contínuos e daí não tentamos construir um modelo do tipo "lumped mass". Na bibliografia indicada (2) esse método é usado para uma carga passante de formato triangular (sem considerar variação de massa).

Cronologicamente o primeiro caso elástico considerado foi o da viga biapoiada, modelo simplificado de uma ponte, sujeita à passagem com velocidade v de uma carga distribuída, suave, constante e in finita. Essa carga no movimento vertical apresentará uma certa inércia e além disso ao se deslocar sobre a viga leva a velocidade que tem num ponto x_1 para um ponto $x_1 + \Delta x$ que, ao considerarmos a viga, têm velocida des $v(x_1)$ e $v(x_1 + \Delta x)$, seja $v(x_1 + \Delta x) > v(x_1)$; então a carga como que freia o movimento, ou seja, age como um amortecimento. Quisemos de início fazer um estudo totalmente numérico do caso e a fim de nos familiarizarmos com os novos termos que surgem na equação, levamos em conta de início

apenas a inércia da massa, sem considerar o efeito de amortecimento introduzido. Introduzimos então as equações e soluções para o caso (cap. V) e descrevemos de modo detalhado, em apêndice, a parte numérica feita. Como será posteriormente detalhado, a viga foi dividida em trechos, a carga aplicada de um modo constante e atuando durante um tempo equivalente ao deslocamento do trem de carga do início até o fim deste trecho. A condição da viga neste instante serve de condição inicial para o estudo do próximo trecho. Os resultados obtidos não fazem parte deste trabalho já que o processo não teve o êxito esperado e será comentado e criticado em apêndice. Podemos adiantar todavia, que uma das maiores dificuldades encontradas foi devido à falta de convergência das condições iniciais na série que dá a resposta da viga pelo método da análise modal.

É pois desta aproximação por trechos que tem origem a segunda parte deste trabalho, estudando os modos e a resposta de uma viga com variação de massa e sem variação de inércia. Não levamos avante o processo em parte devido à urgência de apresentação deste trabalho e da morosidade do serviço de computação envolvido ao se considerar séries com número sempre crescente de termos e se verificar a demora da convergência. Desaconselhamos o emprego deste método para a solução do problema, embora pensemos em futuro próximo, estudar novamente sua viabilidade.

Voltamos nossa atenção à solução teórica direta do caso mas para tratar de algo mais simples no que diz respeito à equação do movimento tomamos a vibração longitudinal de barras. Procuramos para ela trazer o problema da viga e daí decorre a idealização mais ou menos força da que é feita no capítulo IV (4.3). Nosso objetivo foi o de nos familiarizarmos com o manuseio das equações de movimento para casos de massa variável, trabalhando com algo mais simples do que a equação de 4.^a ordem da viga. Desta vez o nosso desenvolvimento foi puramente analítico, consideramos somente o amortecimento introduzido pelo acréscimo de massa e não sua inércia (suposto possível para pequenos valores de variação de massa face ao corpo base) e propomos uma solução por aproximações sucessivas, método semelhante ao das perturbações.

Limitamo-nos no entanto à apresentação de um caminho, que provavelmente será possível também quando existir o termo de inércia da variação de massa. A verificação da aproximação por método numérico e sua extrapolação para o caso de vigas poderá ser objeto de trabalho futuro.

Para introduzir a vibração longitudinal é citado um artigo de L. Meirovitch, ref. 5, no qual é estudado este problema em foguetes, acoplado com vibrações transversais, onde a variação de massa provém da queima do combustível. Todavia nêle é feita a simplificação da queima uniforme em todo o foguete segundo uma variação linear no tempo. Esta limitação talvez possa ser eliminada seguindo o processo proposto.

C A P Í T U L O I I

SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE COM VARIAÇÃO DE MASSA LINEAR COM O TEMPO

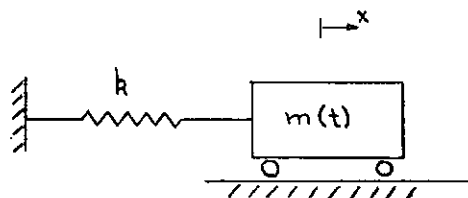
2.1 - GENERALIDADES

Representemos a variação de massa por:

$$m(t) = m_0 + \dot{m}t$$

onde m_0 é a massa do corpo base, ou seja, do corpo na situação $t = 0$, e \dot{m} pode ser positivo ou negativo.

Um modelo para o nosso estudo poderia ser



que todavia resulta incompleto pois não contém informação sobre como varia a massa, energeticamente falando.

Será útil aos nossos raciocínios posteriores o estudo da equação geral

$$m(t) \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad ; \quad x(0), \dot{x}(0)$$

se escrevermos $\omega_n = \frac{k}{m_0}$ frequência natural do corpo base,

$$a = \frac{\dot{m}}{m_0} \quad \text{e} \quad c' = \frac{c}{m_0}$$

então

$$(1+at) \frac{d^2 x}{dt^2} + c' \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = 0 \quad 2.1$$

onde chamaremos $\tau = 1+at$, obtendo

$$\tau^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{c'}{a} \tau \frac{dx}{d\tau} + \frac{\omega_n^2}{a^2} \tau x = 0$$

equação de Bessel cuja solução:

$$x = \sqrt{(1+at)^{1-c'/a}} \left[C_1 J_{1-\frac{c'}{a}} \left(\frac{2\omega_n}{a} \sqrt{1+at} \right) + C_2 Y_{1-\frac{c'}{a}} \left(\frac{2\omega_n}{a} \sqrt{1+at} \right) \right] \quad 2.2$$

onde C_1, C_2 são obtidos pelas condições iniciais de posição e velocidade. (Observe-se que o amortecimento função de velocidade influe apenas na ordem das funções de Bessel e no expoente do termo $(1+at)$ diminuindo-os para valores crescentes de c').

Esta equação tem dois valores interessantes de serem examinados.

Considerando $c' = a/2$, então

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[4]{1+at} \left[C_1 J_{1/2} \left(\frac{2\omega_n}{a} \sqrt{1+at} \right) + C_2 Y_{1/2} \left(\frac{2\omega_n}{a} \sqrt{1+at} \right) \right] \\ &= \sqrt[4]{1+at} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot \frac{2\omega_n}{a} \sqrt{1+at}}} \left[C_1 \sin \left(\frac{2\omega_n}{a} \sqrt{1+at} \right) - C_2 \cos \left(\frac{2\omega_n}{a} \sqrt{1+at} \right) \right] \right\} \\ &= C'_1 \cos \left(\frac{2\omega_n}{a} \sqrt{1+at} \right) + C'_2 \sin \left(\frac{2\omega_n}{a} \sqrt{1+at} \right) \quad 2.3 \end{aligned}$$

Solução harmônica de amplitude constante e frequência variável de ponto a ponto.

Se tomarmos pois um amortecimento menor, $c' = 0$, por exemplo, teremos oscilações de amplitude crescente para $a > 0$ (acrêscimo de massa).

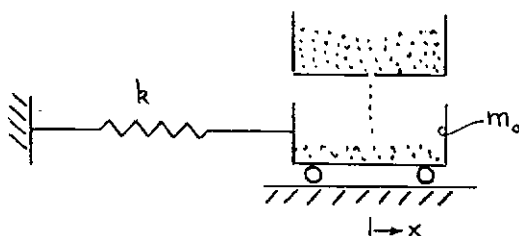
Outro amortecimento interessante é $c' = a$ em que a solução se torna Bessel puro:

$$x = C_1 J_0\left(\frac{2\omega_n}{\alpha}\sqrt{1+at}\right) + C_2 Y_0\left(\frac{2\omega_n}{\alpha}\sqrt{1+at}\right) \quad 2.4$$

2.2 - VARIAÇÃO DE MASSA SEM VELOCIDADE

Pode-se variar a massa do oscilador introduzindo ou retirando massa sem velocidade. Dois modelos podem ser imaginados:

consideremos uma bandeja oscilatória na qual é despejado um fluido (areia por exemplo)



ou uma bandeja na qual é queimado determinado combustível.

A equação que rege o movimento do sistema pode ser derivada de diversas maneiras, mas para que nos familiarizemos com o fenômeno vamos estudar certos casos especiais.

Suponhamos que a variação de massa se dê de modo instantâneo nos pon

tos de velocidade nula, ou seja, nas posições extremas de modo que a solução da equação do movimento passa de

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad \text{para} \quad x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m_1 + \Delta m}} t$$

o que para um $\Delta m > 0$ acarreta diminuição da frequência de vibração, mantendo-se a amplitude.

Nos pontos de velocidade máxima (mola sem energia acumulada): a solução da equação do movimento é

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

A massa varia e a velocidade \dot{x}_0 também: um sistema de massa m , a oscilar, ao receber um Δm nessa posição de velocidade máxima altera sua velocidade instantaneamente de modo a não modificar sua quantidade de movimento. Temos duas variações simultâneas do tipo "step" ou degrau.

A nova velocidade é $\dot{x}'_0 = \dot{x}(t) \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + \Delta m} \right)$ onde $\dot{x}(t)$ é a

velocidade no instante da variação de massa.

$$x = \frac{\dot{x}'_0}{\sqrt{\frac{k}{m_1 + \Delta m}}} \sin \sqrt{\frac{k}{m_1 + \Delta m}} t = \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + \Delta m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m_1 + \Delta m}} t$$

Há pois um decréscimo de amplitude para $\Delta m > 0$ e também um abaixamento da frequência.

Vamos agora derivar a equação do movimento para uma variação contí

nua de massa através da equação de Lagrange. Tomando o oscilador e o recipiente do fluido como um sistema, interessa-nos dêle a parcela de energia que influi no movimento horizontal:

Energia potencial armazenada na mola $V_x = \frac{kx^2}{2}$

Energia cinética $T_x = \frac{m(t) \cdot \dot{x}^2}{2}$

com $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$ obtemos

$$m(t) \ddot{x} + \frac{dm(t)}{dt} \dot{x} + kx = 0 \quad 2.5$$

ou $(m_0 + \dot{m}t) \ddot{x} + \dot{m} \dot{x} + kx = 0$

Podemos derivar a mesma equação simplesmente pelo conceito de quantidade de movimento de um sistema

$$\frac{dQ}{dt} = F$$

Q - quantidade de movimento

F - forças externas

então $\frac{d}{dt} [m(t) \cdot \dot{x}] = -kx$ ou $m(t) \ddot{x} + \frac{dm}{dt} \dot{x} + kx = 0$

Ora esta equação corresponde ao caso $c' = a$, ou seja, sua solução é 2.4, portanto amortecida ($\dot{m} > 0$) e de frequência variável.

Convém nesse ponto do trabalho discutir uma aproximação possível para valores de $(\dot{m} \cdot t)$ desprezíveis face a m_0 e que viria a ter maior interesse ao examinarmos sistemas contínuos de desenvolvimento mais complicado.

Desprezando $\dot{m} \cdot t$ no termo de inércia teremos:

$$m_0 \ddot{x} + \dot{m} \dot{x} + kx = 0 \quad 2.6$$

na convenção já adotada: $\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_n^2 x = 0$

e a solução

$$x = e^{-\frac{\alpha}{2}t} \left[C_1 \cos \sqrt{\left(\frac{2\omega_n}{\alpha}\right)^2 - 1} \frac{\alpha}{2} t + C_2 \sin \sqrt{\left(\frac{2\omega_n}{\alpha}\right)^2 - 1} \frac{\alpha}{2} t \right] \quad 2.7$$

com condições iniciais de deslocamento e velocidade para a determinação de C_1 e C_2 .

Temos pois uma variante ao nosso processo de solução de problemas de massa variável com introdução /retirada de massa sem velocidade.

Façamos uma comparação entre as soluções 2.4 e 2.7. É necessário que $\alpha \ll 1$ e seja $\Omega = \frac{2\omega_n}{\alpha}$

então 2.4

$$x(t) = C_1 \mathcal{Y}_0(\Omega \sqrt{1+\alpha t}) + C_2 \mathcal{Y}_0(\Omega \sqrt{1+\alpha t})$$

pode ser expandido assintoticamente para argumento muito grande

$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{1+\alpha t}} \left[C'_1 \cos(\Omega \sqrt{1+\alpha t} - \pi/4) + C'_2 \sin(\Omega \sqrt{1+\alpha t} - \pi/4) \right]$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{1+\alpha t}} \left[C''_1 \cos(\Omega \sqrt{1+\alpha t}) + C''_2 \sin(\Omega \sqrt{1+\alpha t}) \right]$$

como o tempo não assume valores muito grandes

$$\sqrt{1+\alpha t} \sim 1 + \frac{1}{2}(\alpha t)$$

e a expressão pode ser transformada em

$$x(t) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(at)} \left(C_1''' \cos \Omega \cdot \frac{a}{2} t + C_2''' \sin \Omega \cdot \frac{a}{2} t \right)$$

ou

$$x(t) = \frac{1}{1 + \frac{at}{4}} \left(C_1''' \cos \omega_n t + C_2''' \sin \omega_n t \right)$$

Em 2.7 pode se ter $\sqrt{\left(\frac{2\omega_n}{a}\right)^2 - 1} \approx \frac{2\omega_n}{a}$ e

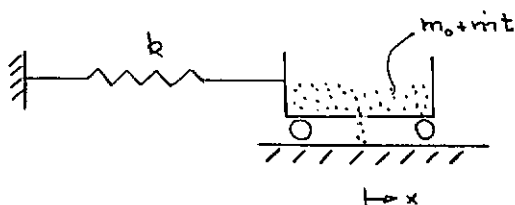
$$x(t) = e^{-\frac{a}{2}t} (C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t)$$

Como se pode verificar numericamente para valores pequenos de a ($a \sim 1\%$) temos uma diferença entre $\frac{1}{1 + \frac{at}{4}}$ e $e^{-\frac{a}{2}t}$ da or-

dem de 2%. . Todavia como era de esperar, os valores de amortecimento são extremamente pequenos e o caso se torna mais interessante para valores de a crescentes e do cálculo do desvio entre os resultados com vistas a uma possível aplicação em casos mais complicados de sistemas contínuos.

2.3 - VARIAÇÃO DE MASSA COM VELOCIDADE

Seja um sistema tal que a massa que lhe é acrescida/retirada o faz na velocidade do corpo naquele instante. Imaginemos como modelo uma bandeja que cheia de um fluido qualquer (areia p.ex.) o perde através de orifício inferior.



$$\dot{m} < 0$$

Consideremos todavia no raciocínio que se segue, conforme os casos anteriores, acréscimo de massa, bastando ao estudar o caso da figura, atribuir sinal conveniente onde necessário.

Vamos induzir a equação do movimento através de casos discretos onde em instantes de tempo bem definidos teremos acréscimo de certa porção de massa.

Num dado instante t_1 a equação que rege o fenômeno é

$$(m_0 + m_1) \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad , \text{ pelo equilíbrio das forças.}$$

Se após um instante Δt há introdução de massa Δm no sistema, a equação passa a ser

$$(m_0 + m_1 + \Delta m) \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad \text{válida a partir de } t_1 + \Delta t \text{ e com}$$

condições iniciais $x(t_1 + \Delta t)$, $\dot{x}(t_1 + \Delta t)$ da equação anterior.

Concluimos que a equação dêse movimento é

$$[m_0 + m(t)] \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad 2.8$$

com condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$.

Considerando $m(t) = mt$ podemos aplicar a solução anterior com $c=0$ ou seja, sem amortecimento, obtendo

$$x = \sqrt{1+at} \left[C_1 J_1 \left(\frac{2\omega_n}{a} \sqrt{1+at} \right) + C_2 Y_1 \left(\frac{2\omega_n}{a} \sqrt{1+at} \right) \right] \quad 2.9$$

que atribuídas condições iniciais pode ser escrita

para $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$ seja $\frac{\lambda \omega_n}{a} = \Omega$

$$x(t) = x_0 \cdot \sqrt{1+at} \cdot \frac{J_0(\Omega)Y_1(\Omega\sqrt{1+at}) - Y_0(\Omega)J_1(\Omega\sqrt{1+at})}{J_0(\Omega)Y_1(\Omega) - J_1(\Omega)Y_0(\Omega)} \quad 2.10$$

para $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = v_0$

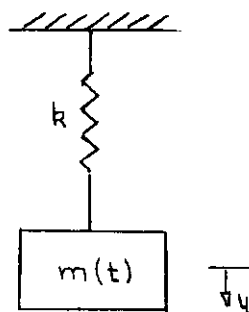
$$x(t) = v_0 \frac{\sqrt{1+at}}{\omega_n} \frac{Y_1(\Omega)J_1(\Omega\sqrt{1+at}) - J_1(\Omega)Y_1(\Omega\sqrt{1+at})}{J_0(\Omega)Y_1(\Omega) - J_1(\Omega)Y_0(\Omega)} \quad 2.11$$

Teremos pois um movimento que de acordo com nossos raciocínios anteriores é amortecido para $a < 0$; para $a > 0$ as oscilações têm amplitudes crescentes. Neste último caso, com um amortecimento conveniente ($c' = a/2$) podemos obter um movimento harmônico.

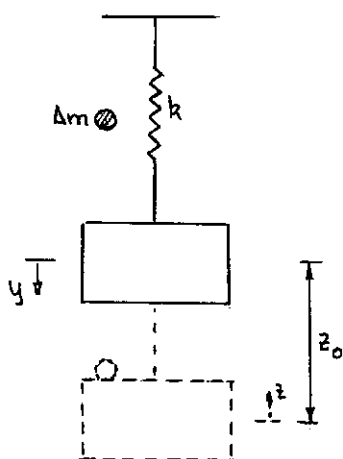
2.4 - VARIAÇÃO DE MASSA EM CORPOS QUE OSCILAM SOB AÇÃO DA GRAVIDADE

a) Massa Varia na Velocidade do Corpo:

Novamente vamos principiar o nosso estudo imaginando casos de variação discreta de massas.



Suponhamos um corpo de massa m_0 em repouso sobre o qual cai de uma altura h uma partícula de massa Δm . A equação do movimento pode ser determinada pela conservação da energia do sistema das duas massas e mola



$$(m_0 + \Delta m) \frac{d^2 z}{dt^2} + k z = \Delta m \cdot g \sqrt{1 + 2 \frac{k h}{\Delta m \cdot g}}$$

com condições iniciais:

$$z(0) = \frac{\Delta m \cdot g}{k} \left(1 + \sqrt{1 + 2 \frac{k h}{\Delta m \cdot g}} \right)$$

$$\dot{z}(0) = - \sqrt{\frac{2 \Delta m \cdot g \cdot h}{m_0 + \Delta m}}$$

onde z é a ordenada contada a partir da posição de deslocamento máximo (velocidade nula) do sistema após o choque e y é contada a partir da posição de equilíbrio do corpo base. Temos $y = z_0 - z$ e substituindo

$$(m_0 + \Delta m) \frac{d^2 y}{dt^2} + k y = \Delta m \cdot g$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \sqrt{\frac{2 \Delta m g h}{m_0 + \Delta m}}$$

Passemos a considerar o caso em que a partícula é colocada sobre a massa, ou seja, cai de altura $h = 0$, o que transforma as condições iniciais em

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{y}(0) = 0$$

A solução desta equação é

$$y(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m_0 + \Delta m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m_0 + \Delta m}} t + \frac{\Delta m \cdot g}{k}$$

$$y(t) = \frac{\Delta m \cdot g}{k} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m_0 + \Delta m}} t \right)$$

Uma vez pôsto o corpo base em movimento coloquemos nêle nova partícula, que também incide de uma altura $h = 0$, (mas durante o movimento), no instante t_1 com relação à origem de tempos da equação anterior. Esta passa a ser válida entre $0 \leq t \leq t_1$ e entre

$$t_1 \leq t \leq t_2 \quad \text{vale} \quad (m_0 + 2\Delta m) \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 2\Delta mg$$

onde a ordenada y é a mesma anterior e as condições iniciais desta equação são $y(t_1)$ e $\dot{y}(t_1)$ dadas pela equação anterior.

Seguindo êste raciocínio por indução podemos concluir que se a massa é variada com o tempo, colocada ou retirada na velocidade do corpo base, a equação do fenômeno é:

$$\left[m_0 + m(t) \right] \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = m(t) \cdot g \quad \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{array}$$

onde y é contado a partir do repouso do corpo base.

Como se vê, é necessária a variação simultânea de $m(t)$ no termo de i-

nércia e na excitação da equação. É uma condição indispensável para que o caso em estudo esteja representado. Na variação linear:

$$(m_0 + \dot{m}t) \ddot{y} + k y = \dot{m} g t$$

ou

$$(1 + at) \ddot{y} + \omega_n^2 y = agt$$

A solução da equação homogênea já está determinada em 2.9; a esta superpõe-se uma solução particular de determinação imediata: $\bar{y} = \frac{ag}{\omega_n^2} t$

e a solução geral

$$y = \sqrt{1+at} \left[C_1 J_1\left(\frac{2\omega_n}{a} \sqrt{1+at}\right) + C_2 Y_1\left(\frac{2\omega_n}{a} \sqrt{1+at}\right) \right] + \frac{ag}{\omega_n^2} t$$

Como a solução particular se anula em $t = 0$, as condições iniciais determinam constantes C_1 e C_2 idênticas às calculadas anteriormente em 2.10 e 2.11

b) Massa acrescida/retirada sem velocidade

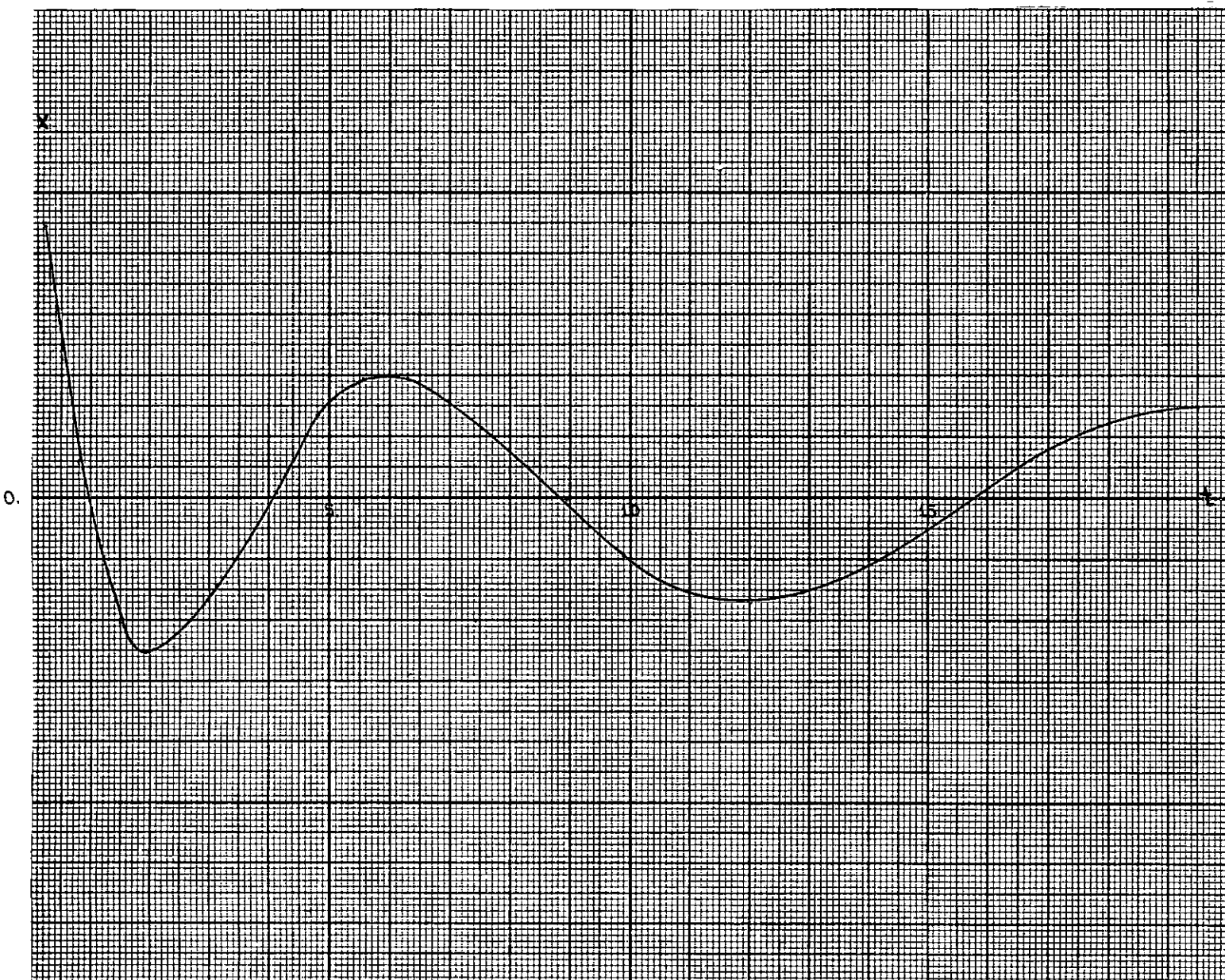
Podemos concluir imediatamente, com tudo o que foi visto, que a energia usada para acelerar a massa (ou perdida com a massa) equivale a um amortecimento e a equação do movimento pode ser deduzida por Lagrange ou induzida diretamente do caso anterior, valendo para a variação linear

$$(m_0 + \dot{m}t) \frac{d^2 y}{dt^2} + \dot{m} \frac{dy}{dt} + k y = \dot{m} g t \quad ; \quad y(0), \dot{y}(0)$$

cuja solução para a forma $(1+at) \ddot{y} + a \dot{y} + \omega_n^2 y = agt$

passa a ser:

$$y = C_1 J_0\left(\frac{2\omega_n}{a} \sqrt{1+at}\right) + C_2 Y_0\left(\frac{2\omega_n}{a} \sqrt{1+at}\right) + \frac{ag}{\omega_n^2} t - \frac{a^2 g}{\omega_n^4}$$



C A P Í T U L O I I I

VARIAÇÃO DE MASSA NÃO LINEAR NO TEMPO EM SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE

3.1 - INTRODUÇÃO

Vamos procurar nesta parte generalizar um pouco o problema já abordado, admitindo agora uma variação de massa do tipo

$$m(t) = m_0 + \dot{m} t^n$$

o que transforma nossa equação do movimento em

$$(m_0 + \dot{m} t^n) \frac{d^2 x}{dt^2} + n \dot{m} t^{n-1} \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Supondo a variação total de massa desprezível face à massa do corpo base podemos levar em consideração somente seu efeito de amortecimento, ou seja:

$$m_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + n \dot{m} t^{n-1} \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

que permite uma solução por série de potências do tipo Frobenius.

3.2 - SOLUÇÃO CONSIDERANDO O EFEITO DE AMORTECIMENTO DE VARIAÇÃO DE MASSA SEGUNDO mt^n

A equação obtida pode ser colocada na forma

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{ant^n}{t} \frac{dx}{dt} + \frac{\omega_n^2 t^2}{t^2} x = 0$$

e identificada com a forma geral

$$R(t) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{t} P(t) \frac{dx}{dt} + \frac{1}{t^2} Q(t) \cdot x = 0$$

conforme a referência de F. Hildebrand.

onde então $R(t) = 1$

$$P(t) = P_n \cdot t^n = a \cdot n \cdot t^n$$

$$Q(t) = Q_2 \cdot t^2 = \omega_n^2 \cdot t^2$$

A equação indicial para uma solução do tipo $x = t^s \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k$ é

$$f(s) = s^2 + (P_0 - 1)s + Q_0 = 0$$

$$f(s) = s(s-1) \quad \text{ou seja} \quad s = 0, \quad s = 1$$

que embora difiram por um número inteiro, dão margem a duas soluções normais já que o ponto $t = 0$ é ordinário.

$$\text{A fórmula de recorrência é} \quad f(s+k) A_k = - \sum_{n=1}^k g_n(s+k) A_{k-n}$$

onde da nossa equação todos $g_n(s)$ são nulos a menos de

$$g_2(s) = \omega_n^2 \quad \text{e} \quad g_n(s) = a \cdot n(s-n) + \omega_n^2$$

Estudando para $k = 1$ temos

$$(s+1) \cdot s \cdot A_1 = - g_1(s+1) A_0 = 0$$

Para $s = 1$ a igualdade acarreta $A_1 = 0$

Para $s = 0$, A_1 é indeterminado, podemos escolher um valor qualquer, por exemplo, $A_1 = 0$.

Vamos ter, inicialmente para $s = 1$:

Se tomarmos n ímpar

os elementos pares dão a fórmula geral $A_k = (-1)^{k/2} \cdot \omega_n^k \frac{s!}{(s+k)!} A_0$

para qualquer k

ou seja

$$A_k = \frac{(-1)^{k/2} \cdot \omega_n^k}{(k+1)!} A_0$$

os elementos ímpares começarão a existir a partir de $k = n$, como exemplo

$$A_n = - \frac{a \cdot n + \omega_n^2}{(n+1) \cdot n} A_0$$

$$A_{n+2} = \left[\frac{\omega_n^2 (a n + \omega_n^2)}{(n+3)(n+2)(n+1)n} + \frac{3a n + \omega_n^2}{(n+3)(n+2)} \frac{\omega_n^2}{6} \right] A_0$$

e assim por diante, pela fórmula de recorrência.

Se tomarmos n par, os elementos pares não se alteram até $k = n$, e a partir de então teremos por exemplo:

$$A_n = - \left[\frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \omega_n^n}{(n+1)!} + \frac{a n + \omega_n^2}{(n+1)n} \right] A_0$$

$$A_{n+1} = 0$$

$$A_{n+2} = - \frac{1}{(n+3)(n+2)} \left[\omega_n^2 A_n + (3a n + \omega_n^2) \frac{\omega_n^2}{6} \right] A_0$$

etc.

podemos pois construir a primeira solução, tomando $A_0 = 1$ por exemplo.

$$x_1(t) = t \left(1 - \frac{\omega_n^2}{6} t^2 + \frac{\omega_n^4}{120} t^4 - \frac{\omega_n^6}{3600} t^6 + \dots + A_n t^n + A_{n+1} t^{n+1} + \dots \right)$$

para $s = 0$ seguimos um raciocínio idêntico,

e para n ímpar os elementos pares são $A_k = \frac{(-1)^{k/2} \omega_n^k}{k!}$ e

os ímpares que começarão em n :

$$A_n = - \frac{\omega_n^2}{n(n-1)} A_0$$

$$A_{n+2} = \left[\frac{\omega_n^4}{(n+2)(n+1)n(n-1)} + \frac{2An + \omega_n^2}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{\omega_n^2}{2} \right] A_0$$

e etc.

para n par, a partir de $k = n$ teremos

$$A_n = - \left[\frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}} \omega_n^n}{n!} + \frac{\omega_n^2}{n(n-1)} \right] A_0$$

$$A_{n+1} = 0$$

e etc.

sendo a segunda solução, fazendo $A_0 = 1$

$$x_2(t) = \left(1 - \frac{\omega_n^2}{2} t^2 + \frac{\omega_n^4}{24} + \dots + A_n t^n + A_{n+1} t^{n+1} + \dots \right)$$

e a solução final passa a ser

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

onde C_1 e C_2 são as duas constantes a determinar pelas condições iniciais.

3.3 - INDICAÇÃO PARA UM CASO GERAL

Queremos apontar a referência de R. Bisplinghoff que no seu capítulo 10 estuda vários casos para a equação

$$a(t)\ddot{q} + b(t)\dot{q} + c(t)q = 0$$

resolvida por uma aproximação clássica do tipo

$$q = q_0 \exp \left\{ \int^t \left[\nu(\tau) - \frac{b(\tau)}{2a(\tau)} \right] d\tau \right\}$$

Para o assunto de estabilidade dinâmica em vãos, é detalhado extensivamente:

$$a(t) = 1, \quad b(t) = b_0(1 + \epsilon t)^{-1}, \quad c(t) = c_0(1 + \epsilon t)^{-2}$$

Não vamos levar avante o estudo analítico das equações que representam 1 grau de liberdade. Queremos todavia chamar a atenção da vantagem de uso do computador analógico na solução desses casos: a montagem dos circuitos é relativamente simples e poder-se-ia imediatamente estabelecer um critério da influência das diversas grandezas no resultado, além da determinação da faixa de validade para as simplificações feitas. Sugirimo-lo como parte de um trabalho futuro.

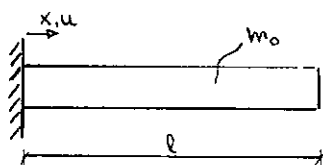
C A P Í T U L O I V

VIBRAÇÃO LONGITUDINAL DE BARRAS COM VARIAÇÃO DE MASSA

4.1 - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

A vibração longitudinal de barras é assunto bastante estudado e difundido. A parte teórica que necessitamos para encará-lo sob nosso ponto de vista pode ser encontrada nas referências de Volterra e Meirovitch.

Vamo-nos fixar em um problema específico, que escolhemos como sendo a barra engastada em uma extremidade e livre na outra:



Sendo u a coordenada que mede o deslocamento da seção x a equação que rege o movimento é

$$m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 4.1$$

com condições iniciais $u(x, 0)$, $\dot{u}(x, 0)$ onde $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$

e condições de contorno

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{l, t} = 0$$

desde que a seção seja de área constante: $A(x) = \text{cte.}$

Usando a separação de variáveis, temos um movimento harmônico e um problema de modos próprios dado por

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \beta^2 U = 0 \quad \text{onde} \quad U = U(x) \quad 4.2$$

$$\beta^2 = \omega^2 \cdot \frac{m_0}{EA} \quad (\omega^2 \text{ cte da separação})$$

cuja solução nos fornece as frequências naturais

$$\omega_r = (2r-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{m_0 l^2}}$$

e os modos próprios são dados por

$$U_r(x) = \sqrt{\frac{2}{m_0 l}} \sin(2r-1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{l}$$

onde a constante multiplicativa provém da ortonormalização dos modos e é de grande utilidade no processo da análise modal a ser estudado mais tarde.

Podemos então escrever a solução para $u(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sin(2r-1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{l} \left[A_r \cos(2r-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{m_0 l^2}} t + B_r \sin(2r-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{m_0 l^2}} t \right] \quad 4.3$$

as constantes A_r , B_r no processo da separação de variáveis são obtidas va lendo-se da ortogonalidade dos modos.

$$A_r = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,0) \sin(2r-1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{l} dx \quad 4.4$$

$$B_r = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{m_0 l^2}{EA}} \frac{2}{\pi} \frac{1}{2r-1} \int_0^l \dot{u}(x,0) \sin(2r-1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{l} dx \quad 4.5$$

Vamos estudar o problema de vibrações longitudinais levando em conta os possíveis tipos de variação de massa. Recomendamos para o assunto a re-

ferência de R. Bisplinghoff .

A equação geral lá indicada e que será posteriormente derivada para o nosso caso é

$$m\ddot{q} + \dot{m}\dot{q} - EA \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = f(x,t) \quad 4.6$$

que com uma massa $m(x,t)$, se permitir separação

$$m(x,t) = m(x) \cdot m(t)$$

admite um resultado $q(x,t) = q(x) \cdot q(t)$

podendo-se pois resolver a equação homogênea por separação de variáveis ou então, pela análise modal quando se considera a excitação.

A separação de variáveis levaria a duas equações :

$$\frac{d^2 q_x}{dx^2} + \omega^2 \frac{m(x)}{EA} q_x = 0 \quad 4.7$$

$$m(t)\ddot{q}_t + \dot{m}_t \dot{q}_t + \omega^2 q_t = 0 \quad 4.8$$

onde a parte que nos fornece os modos próprios já foi resolvida para $m(x) = \text{cte.}$ e a parte de q_t pode recair nos métodos usados com 1 grau de liberdade.

Não é nosso objetivo examinar o caso onde $m = m(x)$. Vale observar que haverá uma modificação conveniente no formato do modo, tal que seja obedecida a equação 4.7, em cuja solução reside toda a dificuldade do problema.

4.2 - MASSA VARIA COM TEMPO . SOLUÇÃO

Chamamos a atenção na solução do problema de massa que varia com o tempo ao artigo de L. Meirovitch publicado na revista AIAA, indicada na referência. Acharmos interessante neste ponto do trabalho apresentar uma síntese do processo aí empregado para a solução da equação do movimento, pois é um caso típico de encaminhamento pela análise modal.

$$m(t) \ddot{u} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad 4.9$$

com condições de contorno de barra livre em ambos os extremos (está sendo resolvido um problema de vibração de foguetes).

Considerando a resposta construída por uma base ortonormal, no caso os modos próprios, cada um desses elementos é multiplicado por uma coordenada generalizada dependente do tempo

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \cdot \phi_i(x) \quad 4.10$$

de modo que a condição de contorno se escreve $EA \frac{d\phi}{dx} = 0$ para $x = \pm \frac{l}{2}$

O problema no caso não tem restrição e portanto além de

$$\int_{-l/2}^{l/2} m_0 \phi_i \phi_j dx = \delta_{ij} \quad \text{temos} \quad \int_{-l/2}^{l/2} m_0 \phi_i dx = 0 \quad 4.11$$

conforme pode ser verificado na referência 1.

A variação de massa representa a queima de combustível no foguete e $m(t) = m_0 - \dot{m}t = m_0(1 - \beta t)$, m_0 massa do corpo base onde se considera a queima uniforme ao longo do corpo.

Substituindo 4.10 em 4.9 usando 4.11 obtemos

$$(1-\beta t) \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = U_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{onde} \quad U_i(t) = \int_{-e/2}^{e/2} f(x,t) \phi_i(x) dx$$

foi feita a consideração de $U_i(t) = \text{cte}$, ou melhor, uma "step function" em $t = 0$ e a solução da equação acima recai nos nossos casos de 1 grau de liberdade.

$$\text{As condições iniciais} \quad u_0(x) = u(x,0) \quad \text{e} \quad \dot{u}_0(x) = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x,0} = 0$$

levam a resultado

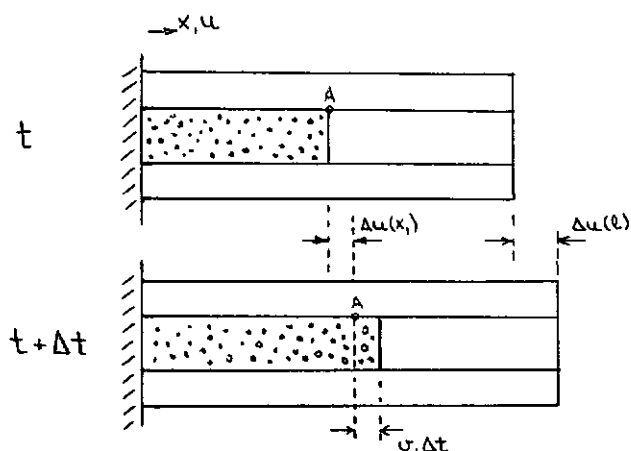
$$u(x,t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(u_{0i} - U_i/\omega_i^2) (1-\beta t)^{1/2}}{Y_1(\lambda_i) Y_0(\lambda_i) - Y_0(\lambda_i) Y_1(\lambda_i)} \left\{ Y_0(\lambda_i) Y_1[\lambda_i (1-\beta t)^{1/2}] - \right. \right. \\ \left. \left. - Y_0(\lambda_i) Y_1[\lambda_i (1-\beta t)^{1/2}] \right\} + \frac{U_i}{\omega_i^2} \right) \cdot \phi_i(x) \quad \text{onde} \quad \lambda_i = \frac{2\omega_i}{\beta}$$

$$\text{e} \quad u_{0i} = \int_{-e/2}^{e/2} m_0 u_0(x) \phi_i(x) dx$$

4.3 - MASSA VARIA COM ESPAÇO E COM TEMPO. SOLUÇÃO APROXIMADA PROPOSTA.

Tomemos para o estudo de um sistema onde a massa varia com espaço e com tempo, na vibração longitudinal de barra engastada em uma extremidade e livre na outra, um modelo constando de uma barra supostamente ôca e que é enchida numa velocidade v com uma substância idealizada como sendo tal que irá vibrar em "fase" com a barra, embora por hipótese não acumule energia elástica. Chamamos de vibração em fase, só possível para nossa substância ideal, uma situação em que as seções já cheias vibrem com a sec -

ção correspondente da barra como fôsem um só corpo (se não houvesse mais acréscimo de substância, a barra parcialmente cheia vibraria como um meio contínuo uniforme, fazendo-se a restrição de não se acumular energia elástica na substância).



Ponto A no repouso tem uma abscissa x_1

Poder-se-ia pensar também em uma substância com as características acima que aderisse externamente à uma barra cheia, de um modo uniforme na sua circunferência, e que progredisse com uma velocidade v ao longo dela.

Para o nosso sistema tudo se passa como se a massa fôsse acrescida sem velocidade, sendo a energia do sistema responsável em acelerar a massa que cai em cada instante a uma velocidade, quase aquela que o sistema estava. Podemos pois esperar um termo de amortecimento na nossa equação.

A variação de massa no nosso sistema pode ser escrita

$$m(x, t) = m_0 + m \cdot u(vt - x)$$

onde m_0 e m são por unidade de comprimento e vt representa o comprimento já cheio de massa acrescida com o que estamos retratando a situação num dado instante. A função $u(\zeta)$ é a função degrau ou "step".

Lembrando do raciocínio usado no caso de um grau de liberdade, não estamos introduzindo energia no sistema, apenas massa. Podemos então es-

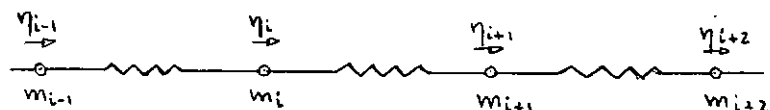
crever as energias totais :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(x,t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

e aplicar uma equação de Lagrange adaptada para meios contínuos. Para tal usamos a referência indicada de H. Goldstein, onde esta equação é obtida por uma passagem ao limite de um sistema discreto, aumentando o número de graus de liberdade, o que nos transforma n equações de movimento para coordenadas apenas dependentes do tempo em uma equação que engloba todas estas, pois a coordenada passa a ser $\eta(x,t)$.

Seguindo em paralelo ao autor no capítulo indicado, supondo agora $m_i(t)$ que no limite será $m(x,t)$, tomamos energia cinética como sendo um somatório entre as partículas, e a potencial como a acumulada por uma mola hipotética (elasticidade do meio) que uniria as partículas.



$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i(t) \cdot \dot{\eta}_i^2(t)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_i k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2$$

e após levar ao limite obtêm-se o Lagrangiano do sistema através do qual é possível identificar a densidade Lagrangiana (fórmulas 11-4, 11-6 e 11-9 na ref. indicada), a qual é dada por:

$$\mathcal{L} = m(x,t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

mas demonstra-se para sistemas contínuos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} + \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$$

e a equação do movimento será:

$$m(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial m(x,t)}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

que aplicada à nossa variação de massa

$$[m_0 + m u(vt-x)] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m v \delta(vt-x) \frac{\partial u}{\partial t} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 4.12$$

As condições geométricas de contorno e as condições iniciais não a apresentam maiores problemas, deve-se ter o início da contagem de tempo no instante do começo de enchimento.

Várias são as observações sobre a equação 4.12:

O amortecimento obtido é dado por uma função δ de Dirac, ou seja, é um a amortecimento "infinito" no ponto $x = vt$ que representa a seção da frente de massa, ou melhor, a seção na qual estamos num determinado instante acrescentando massa com velocidade nula. Há por outro lado uma coerência dimensional já que os termos são de dimensão $[F][L]^{-1}$ e a função δ de Dirac agindo na retratação feita do sistema (deriva do step de massa) nu ma dada abscissa, pela sua definição

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\zeta) f(\zeta) d\zeta = f(0)$$

assume no caso dimensão $[L]^{-1}$ o que leva $[m v \delta(vt-x) \frac{\partial u}{\partial t}]$ à situação acima.

Considerando-se todas as idealizações feitas no início do capítulo e

que da situação que restringimos estamos estudando um caso ideal no que diz respeito ao acréscimo de nova massa (desprezamos qualquer efeito que possa surgir devido ao fato da parte ôca da barra ter uma área finita) e outros fenômenos paralelos que podem surgir, de modo que realmente era de se esperar que obtivéssemos o amortecimento numa dada abcissa da barra .

Por outro lado a equação é tal que praticamente poderia ser induzi da a partir de sistema com um grau de liberdade.

A função step e a função Dirac tornam difícil o estudo da solução pelos métodos tradicionais, já que não conseguimos separar a massa em duas funções, uma de (x) outra de (t) que se multipliquem.

Vamos colocar mais uma restrição ao nosso problema: suponhamos $m \ll m_0$ e só levamos em conta o efeito de amortecimento no acréscimo de massa.

Temos

$$m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m v \delta(vt-x) \frac{\partial u}{\partial t} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 4.13$$

condições de contorno $u(0,t) = 0$ e $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{l,t} = 0$

condições iniciais $u(x,0)$ e $\dot{u}(x,0)$

Apliquemos a transformada de Laplace em relação ao tempo na equação acima.

$$\mathcal{L} \left\{ m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m v \delta(vt-x) \frac{\partial u}{\partial t} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = 0 \quad 4.14$$

sendo $\mathcal{L} \{ u(x,t) \} = \bar{u}(x,s)$

$$e \quad \mathcal{L} \left\{ m v \delta(vt-x) \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = m v \int_0^{\infty} \delta(vt-x) \frac{\partial u}{\partial t} e^{-st} dt$$

$$v \delta(vt-x) = \delta(t - x/v)$$

como a transformada é em relação ao tempo

$$= m \left[\frac{\partial u}{\partial t} e^{-st} \right]_{t=x/v}$$

Temos então uma incógnita que corresponde à velocidade da barra no instante $t = x/v$.

Para resolver o problema propomos um método aproximado, tal como se fôsse um processo de perturbação, pelo uso da solução da mesma equação não considerado o amortecimento (equação 4.1) dada por 4.3:

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sin(2r-1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{l} \left[A_r \cos(2r-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{m_0 l^2}} t + \right. \\ \left. + B_r \sin(2r-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{m_0 l^2}} t \right]$$

onde A_r e B_r provêm das condições iniciais e são dados por 4.4 e 4.5. Simplifiquemos os algebrismos considerando $\dot{u}(x,0) = 0$ com o que $B_r = 0$ e vamos reintroduzir

$$\omega_r = (2r-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{m_0 l^2}} \quad \text{e} \quad \beta_r = \omega_r \sqrt{\frac{m_0}{EA}} = (2r-1) \frac{\pi}{2l}$$

então

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{r=1}^{\infty} -\omega_r A_r \sin \beta_r x \sin \omega_r t$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} e^{-st} \right]_{t=x/v} = -e^{-sx/v} \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r A_r \sin \beta_r x \sin \omega_r \frac{x}{v}$$

Voltando a 4.14

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{m_0 s^2}{EA} \bar{u} = -\frac{m_0 s}{EA} u(x,0) - \frac{m}{EA} e^{-sx/v} \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r A_r \sin \beta_r x \sin \omega_r \frac{x}{v} \quad 4.15$$

A resposta da equação acima devido ao termos de perturbação considerado pode ser determinada por 4 parcelas internas ao somatório:

$$\begin{aligned}
 e^{-sx_0} \sin \beta_r x \sin \omega_r \frac{x}{\sigma} &= -\frac{1}{4} e^{-sx_0} (e^{i\beta_r x} - e^{-i\beta_r x}) (e^{i\omega_r x/\sigma} - e^{-i\omega_r x/\sigma}) = \\
 &= -\frac{1}{4} \left\{ \exp\left[\left(i\beta_r + \frac{i\omega_r - s}{\sigma}\right)x\right] - \exp\left[-\left(i\beta_r - \frac{i\omega_r - s}{\sigma}\right)x\right] - \right. \\
 &\quad \left. - \exp\left[\left(i\beta_r - \frac{i\omega_r + s}{\sigma}\right)x\right] + \exp\left[-\left(i\beta_r + \frac{i\omega_r + s}{\sigma}\right)x\right] \right\}
 \end{aligned}$$

e nos fornece a solução particular

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_p(x, s) &= \frac{m}{EA} \cdot \frac{1}{4} \sum \omega_r A_r \left\{ \frac{\exp\left[\left(i\beta_r + \frac{i\omega_r - s}{\sigma}\right)x\right]}{\left(i\beta_r + \frac{i\omega_r - s}{\sigma}\right)^2 - \frac{m_0}{EA} s^2} - \frac{\exp\left[-\left(i\beta_r - \frac{i\omega_r - s}{\sigma}\right)x\right]}{\left(i\beta_r - \frac{i\omega_r - s}{\sigma}\right)^2 - \frac{m_0}{EA} s^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\exp\left[\left(i\beta_r - \frac{i\omega_r + s}{\sigma}\right)x\right]}{\left(i\beta_r - \frac{i\omega_r + s}{\sigma}\right)^2 - \frac{m_0}{EA} s^2} + \frac{\exp\left[-\left(i\beta_r + \frac{i\omega_r + s}{\sigma}\right)x\right]}{\left(i\beta_r + \frac{i\omega_r + s}{\sigma}\right)^2 - \frac{m_0}{EA} s^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Lembremos que $\beta_r^2 = \omega_r^2 \frac{m_0}{EA}$, se chamarmos

$$b_1 = \frac{1}{\sigma} + \sqrt{\frac{m_0}{EA}}$$

$$a_1 = \beta_r + \frac{\omega_r}{\sigma} = \omega_r b_1$$

e

$$b_2 = \frac{1}{\sigma} - \sqrt{\frac{m_0}{EA}}$$

$$a_2 = \beta_r - \frac{\omega_r}{\sigma} = -\omega_r b_2$$

então

$$\begin{aligned} \bar{u}_p(x,s) = & \frac{m}{EA} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{EA}{m_0}} \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r A_r \left\{ \frac{e^{ia_1 x}}{2ia_1} \left[\frac{e^{-s^2/v}}{(s - ia_1/b_2)} - \frac{e^{-s^2/v}}{(s - ia_1/b_1)} \right] - \right. \\ & - \frac{e^{-ia_2 x}}{2ia_2} \left[\frac{e^{-s^2/v}}{(s + ia_2/b_1)} - \frac{e^{-s^2/v}}{(s + ia_2/b_2)} \right] - \frac{e^{ia_2 x}}{2ia_2} \left[\frac{e^{-s^2/v}}{(s - ia_2/b_2)} - \frac{e^{-s^2/v}}{(s - ia_2/b_1)} \right] + \\ & \left. + \frac{e^{-ia_1 x}}{2ia_1} \left[\frac{e^{-s^2/v}}{(s + ia_1/b_1)} - \frac{e^{-s^2/v}}{(s + ia_1/b_2)} \right] \right\} \end{aligned}$$

que pode ser antitransformado

para $t < x/v$ tem-se $u_p(x,t) = 0$

para $t > x/v$

$$\begin{aligned} u_p(x,t) = & \frac{1}{4} \frac{m}{m_0} \cdot \sqrt{\frac{m_0}{EA}} \sum_{r=1}^{\infty} A_r \left\{ \frac{e^{ia_1 x}}{2ib_1} \left[e^{i\frac{a_1}{b_2}(t - \frac{x}{v})} - e^{i\frac{a_1}{b_1}(t - \frac{x}{v})} \right] + \right. \\ & + \frac{e^{-ia_2 x}}{2ib_2} \left[e^{-i\frac{a_2}{b_1}(t - \frac{x}{v})} - e^{-i\frac{a_2}{b_2}(t - \frac{x}{v})} \right] + \frac{e^{ia_2 x}}{2ib_2} \left[e^{i\frac{a_2}{b_2}(t - \frac{x}{v})} - e^{i\frac{a_2}{b_1}(t - \frac{x}{v})} \right] + \\ & \left. + \frac{e^{-ia_1 x}}{2ib_1} \left[e^{-i\frac{a_1}{b_1}(t - \frac{x}{v})} - e^{-i\frac{a_1}{b_2}(t - \frac{x}{v})} \right] \right\} \end{aligned}$$

Agrupando convenientemente

$$\begin{aligned}
 u_p(x,t) = \frac{1}{4} \frac{m}{m_0} \cdot \sqrt{\frac{m_0}{EA}} \sum_{r=1}^{\infty} A_r \left\{ \frac{1}{b_1} \left[\sin \omega_r \frac{b_1}{b_2} \left(t - \sqrt{\frac{m_0}{EA}} x \right) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \sin \omega_r \left(t + \sqrt{\frac{m_0}{EA}} x \right) \right] + \frac{1}{b_2} \left[\sin \omega_r \frac{b_2}{b_1} \left(t + \sqrt{\frac{m_0}{EA}} x \right) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \sin \omega_r \left(t - \sqrt{\frac{m_0}{EA}} x \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Vamos comentar o resultado obtido para o termo de perturbação:

Vejamos o que significa o limite $t = x/v$: êle pode ser estudado de duas maneiras distintas; primeiramente encarando a haste como um todo, para um determinado instante de tempo t_i o termo só será levado em consideração no trecho da haste já cheio de substância (x variando de 0 a vt_i), ou seja onde o movimento já foi amortecido; por outro lado olhando para um ponto (seção) x_i , o termo passará a contar a partir de $t > x_i/v$, ou seja, quando a substância acrescida passa pelo ponto considerado.

Por outro lado, lembrando a conceituação que demos a êsse termo, as simulando-o a uma perturbação, vamos estudar sua influência nas condições iniciais da equação onde aparece (4.15). Consideremos para tanto os valores de tempo até o enchimento total bem menores que a expressão $\left(\sqrt{\frac{m_0}{EA}} x \right)$

para qualquer x ; portanto calculando $u_p(x,t)$ em $x = 0$ vamos supor possível a substituição do seno pelo seu argumento obtendo

$$u_p(0,t) = \frac{1}{4} \frac{m}{m_0} \cdot \sqrt{\frac{m_0}{EA}} \sum_{r=1}^{\infty} A_r \left\{ \frac{\omega_r t}{b_1} \left(\frac{b_1}{b_2} - 1 \right) + \frac{\omega_r t}{b_2} \left(\frac{b_2}{b_1} - 1 \right) \right\} = 0$$

Na extremidade $x = l$ a condição de contorno implica em $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$,

mas como vimos, o termo de perturbação influi só a partir de $t > x/v = l/v$, o que não é possível já que a nossa equação só vale até o tempo em que a haste está cheia.

Concluimos pois que êsse termo não influi na determinação das duas constantes da solução da parte homogênea da equação 4.15. Devido a êsse fato a parte restante da solução da equação 4.15 não precisa ser antitransformada diretamente, bastando lembrar que ela pode ser identificada com a transformada da equação original 4.1, e as soluções também são identificadas.

Pelas hipóteses feitas a solução final desta primeira aproximação a ser considerada nos instantes de tempo ou posição do ponto examinado, conforme descrito acima é :

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} A_r \cdot \sin \beta_r x \cdot \cos \omega_r t + \frac{1}{4} \frac{m}{m_0} \frac{1}{l} \sqrt{\frac{m_0 l^2}{EA}} \sum_{r=1}^{\infty} A_r \left\{ \frac{1}{b_1} \left[\sin \frac{b_1}{b_2} (\omega_r t - \beta_r x) - \sin (\omega_r t + \beta_r x) \right] + \frac{1}{b_2} \left[\sin \frac{b_2}{b_1} (\omega_r t + \beta_r x) - \sin (\omega_r t - \beta_r x) \right] \right\} \quad \text{para } t > x/v$$

onde
$$A_r = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,0) \sin \beta_r x \, dx$$

$$\beta_r = (2r-1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{l}$$

$$b_1 = \frac{1}{v} + \sqrt{\frac{m_0}{EA}}$$

$$\omega_r = (2r-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{m_0 l^2}}$$

$$b_2 = \frac{1}{v} - \sqrt{\frac{m_0}{EA}}$$

Propomos o encaminhamento que demos ao problema como método de solução de equações como a que foi estudada. Torna-se evidente a necessidade de verificação numérica da aproximação obtida, re-substituição de uma velocidade proveniente do resultado acima na equação 4.14 estudando a convergência do processo de "perturbações" adotado, assunto que será retomado num trabalho futuro.

Sugerimos também levar em consideração o termo de massa $m \cdot u(vt - x)$, que pelo processo adotado vai consistir em considerar mais um termo de perturbação proveniente da estimativa da aceleração no trecho que em cada instante já está cheio de substância.

SEGUNDA PARTE

CAPÍTULO V

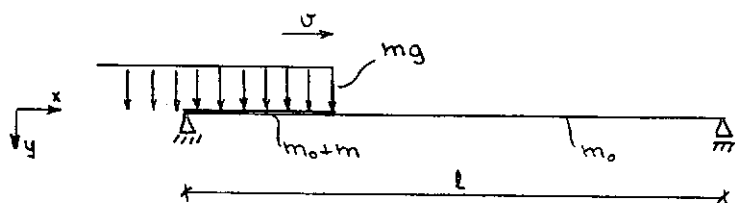
VIBRAÇÃO DE VIGAS SOB A AÇÃO DA VARIAÇÃO DE MASSA

5.1 - INTRODUÇÃO

Já foi mencionado na introdução geral o motivo da apresentação dê se estudo e que sua falta de pleno êxito nos levou a não considerá-lo mais como objetivo final do trabalho. Por êste motivo a parte numérica não tem o destaque que deveria em outras circunstâncias ter, sendo apresentada em apêndice, detalhada no processo mas sômente com um ou outro e xemplo de cálculo.

O problema da viga sob ação de um trem de carga passante cuja inércia queremos levar em consideração foi examinado por uma aproximação que julgávamos suficientemente poderosa. No nosso estágio de familiarizaçãõ com processos dêste tipo, resolvemos estudar de início o movimento sem considerar termos de amortecimento, apenas induzindo o caso a partir de sistemas de um grau de liberdade.

Teríamos



m, m_0 massas por unidade de comprimento

mg carga passante

v velocidade da carga

Para não levar em consideração o potencial da massa m_0 da viga to-

mos nossa origem de medida das deformações a linha elástica da viga sob ação do peso próprio.

A equação do movimento induzida

$$\left[m_0 + m \mu (vt - x) \right] \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = mg \mu (vt - x) \quad 5.1$$

com $y(x, 0)$ e $\dot{y}(x, 0)$ condições iniciais

condições de contorno
(flecha e momento nulos
nos apoios)

$$y(0, t) = y(l, t) = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{0, t} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{l, t} = 0$$

Também de modo intuitivo, o amortecimento, se considerado deve aparecer afetando o trecho da viga até a frente de carga.

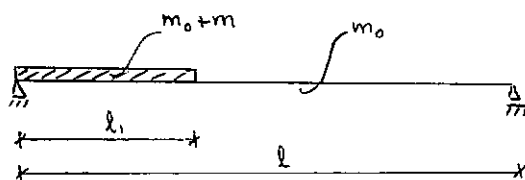
Foi feita neste capítulo V, pois, a preparação das equações que vêm do método da análise modal aplicado ao nosso caso, considerando uma aproximação discreta, ou melhor, carga atuando e massa variada até um trecho l_1 da viga sem que se altere sua inércia. Inicialmente foi estudada a vibração própria com determinação das frequências e dos modos próprios e a seguir a formulação geral para a resposta da viga nessas condições.

No apêndice são então apresentados os comentários sobre os resultados numéricos.

5.2 - ESTUDO DA VIGA BIAPOIADA COM UMA VARIAÇÃO DISCRETA NA MASSA UNITÁRIA

5.2.1 - Modos Próprios de Vibração

Podemos esquematizar o problema



m, m_0 : massa/comprimento ; $I = \text{cte}$

regido pela fórmula

$$[m_0 + m \mu(l_1 - x)] \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad 5.2$$

A solução será por separação de variáveis

$$y(x, t) = w(x) \cdot q(t)$$

e

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{\omega^2}{EI} [m_0 + m \mu(l_1 - x)] w = 0 \quad 5.3$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0$$

O problema dos modos próprios nos leva a procurar a solução da equação 5.3 . A fim de eliminar a dependência de x do coeficiente, separamos a equação em duas:

$$1. \quad \frac{d^4 w}{dx^4} - \alpha^4 w = 0 \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad \alpha^4 = 1 + \frac{m}{m_0}$$

onde

$$2. \quad \frac{d^4 w}{dx^4} - \beta^4 w = 0 \quad l_1 \leq x \leq l \quad \beta^4 = \omega^2 \frac{m_0}{EI}$$

Duas condições de contorno para cada equação provêm da condição de flecha e momento nulos nos apoios . As outras resultam da igualdade de flecha ,

ângulo, momento e cortante no ponto $x = l_1$.

Resumindo, temos a resolver:

$$1. \quad \frac{d^4 w}{dx^4} - \alpha^4 \beta^4 w = 0$$

$$0 \leq x \leq l_1$$

$$2. \quad \frac{d^4 w}{dx^4} - \beta^4 w = 0$$

$$l_1 \leq x \leq l$$

Condições de Contorno

$$a. \quad w(0) = 0$$

$$w(l) = 0$$

$$b. \quad \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=0} = 0$$

$$\left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=l} = 0$$

$$c. \quad \left\{ \begin{array}{l} w(l_1) = w(l_1) \\ \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l_1} = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l_1} \\ \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=l_1} = \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=l_1} \\ \left. \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=l_1} = \left. \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=l_1} \end{array} \right.$$

A solução geral de $\frac{d^4 w}{dx^4} - \lambda^4 w = 0$ é

$$w(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + C \sinh \lambda x + D \cosh \lambda x$$

onde A, B, C, D são constantes a determinar.

Aplicando as condições de contorno a e b obtemos para as equações:

$$1. \quad w(x) = A \sin \alpha \beta x + C \sinh \alpha \beta x \quad 0 \leq x \leq l_1$$

$$2. \quad w(x) = -A' \frac{\sin \beta(l-x)}{\cos \beta l} - C' \frac{\sinh \beta(l-x)}{\cosh \beta l} \quad l_1 \leq x \leq l$$

As condições restantes nos levam a um sistema de 4 equações a 4 incógnitas:

$$A \sin a \beta l_1 + C \sinh a \beta l_1 = -A' \frac{\sin \beta(l-l_1)}{\cos \beta l} - C' \frac{\sinh \beta(l-l_1)}{\cosh \beta l}$$

$$(A \cos a \beta l_1 + C \cosh a \beta l_1) a = A' \frac{\cos \beta(l-l_1)}{\cos \beta l} + C' \frac{\cosh \beta(l-l_1)}{\cosh \beta l}$$

$$(-A \sin a \beta l_1 + C \sinh a \beta l_1) a^2 = A' \frac{\sin \beta(l-l_1)}{\cos \beta l} - C' \frac{\sinh \beta(l-l_1)}{\cosh \beta l}$$

$$(-A \cos a \beta l_1 + C \cosh a \beta l_1) a^3 = -A' \frac{\cos \beta(l-l_1)}{\cos \beta l} + C' \frac{\cosh \beta(l-l_1)}{\cosh \beta l}$$

Agrupadas de um modo conveniente podemos separá-lo em 2 sistemas homogêneos de 2 incógnitas.

$$\begin{aligned} (a^2 - 1) \cos a \beta l_1 [tg a \beta l_1 + a tg h \beta(l-l_1)] A - (a^2 + 1) \cosh a \beta l_1 [tg h a \beta l_1 + a tg h \beta(l-l_1)] C &= 0 \\ - (a^2 + 1) \cos a \beta l_1 [tg a \beta l_1 + a tg \beta(l-l_1)] A + (a^2 - 1) \cosh a \beta l_1 [tg h a \beta l_1 + a tg \beta(l-l_1)] C &= 0 \end{aligned}$$

é um deles, sendo suficiente para nossas determinações.

A equação característica dos dois sistemas homogêneos é, logicamente a mesma

$$(\alpha^2 - 1)^2 [\operatorname{tg} \alpha \beta l_1 + a \operatorname{tg} \beta (l - l_1)] [\operatorname{tgh} \alpha \beta l_1 + a \operatorname{tgh} \beta (l - l_1)] -$$

5.4

$$- (\alpha^2 + 1)^2 [\operatorname{tg} \alpha \beta l_1 + a \operatorname{tg} \beta (l - l_1)] [\operatorname{tgh} \alpha \beta l_1 + a \operatorname{tgh} \beta (l - l_1)] = 0$$

equação que nos fornece as frequências de vibração.

Sua solução será obrigatoriamente numérica e será discutida em apêndice.

Vamos explicitar as nossas constantes em função de uma delas, por exemplo de A.

Então

$$C = \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{(\alpha^2 + 1)^2} \frac{\cos \alpha \beta l_1}{\cosh \alpha \beta l_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \beta l_1 + a \operatorname{tgh} \beta (l - l_1)}{\operatorname{tgh} \alpha \beta l_1 + a \operatorname{tgh} \beta (l - l_1)} \cdot A \quad 5.5$$

para simplificar seja

$$C = \frac{\cos \alpha \beta l_1}{\cosh \alpha \beta l_1} \cdot H_1 \cdot A$$

$$\text{ou } C = H \cdot A$$

onde

$$H_1 = \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{(\alpha^2 + 1)^2} \frac{\operatorname{tg} \alpha \beta l_1 + a \operatorname{tgh} \beta (l - l_1)}{\operatorname{tgh} \alpha \beta l_1 + a \operatorname{tgh} \beta (l - l_1)}$$

$$e \quad A' = \frac{\cos \beta l}{2 \operatorname{sen} \beta (l - l_1)} [-(\alpha^2 + 1) \operatorname{sen} \alpha \beta l_1 + (\alpha^2 - 1) \cdot H \cdot \operatorname{senh} \alpha \beta l_1] \cdot A$$

$$C' = \frac{\cosh \beta l}{2 \operatorname{senh} \beta (l - l_1)} [(\alpha^2 - 1) \operatorname{sen} \alpha \beta l_1 - (\alpha^2 + 1) \cdot H \cdot \operatorname{senh} \alpha \beta l_1] \cdot A$$

Onde o valor de A será determinado pela condição de ortogonalidade dos modos próprios de vibração.

A solução das duas equações pode ser escrita de uma forma compacta como:

$$w(x) = A \left\{ \left[\sin \alpha \beta x + H \sinh \alpha \beta x \right] \mu(l, -x) + \frac{1}{2} \left[\left((\alpha^2 + 1) \sin \alpha \beta l, - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - (\alpha^2 - 1) H \sinh \alpha \beta l, \right) \frac{\sin \beta(l-x)}{\sin \beta(l-l,)} - \left((\alpha^2 - 1) \sin \alpha \beta l, - \right. \right. \\ \left. \left. - (\alpha^2 + 1) H \sinh \alpha \beta l, \right) \frac{\sinh \beta(l-x)}{\sinh \beta(l-l,)} \right] \mu(x-l,) \right\}$$

nessa expressão vamos definir os grupos

$$SS = \sin \alpha \beta l, + H \sinh \alpha \beta l,$$

$$SD = \sin \alpha \beta l, - H \sinh \alpha \beta l,$$

com o que

$$w(x) = A \left\{ \left(\sin \alpha \beta x + H \sinh \alpha \beta x \right) \mu(l, -x) + \frac{1}{2} \left[(SS + \alpha^2 SD) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\sin \beta(l-x)}{\sin \beta(l-l,)} + (SS - \alpha^2 SD) \frac{\sinh \beta(l-x)}{\sinh \beta(l-l,)} \right] \mu(x-l,) \right\} \quad 5.6$$

será a expressão do modo de vibração.

Já que da equação 5.4 iremos obter infinitos valores de β , correspondentes às diversas frequências de vibração, as constantes acima apresentam valores diversos para diferentes frequências e a equação 5.6 fornecerá o modo da frequência usada.

Será exemplificado este trabalho em apêndice.

5.2.2 - Resposta à excitação externa. Formulação

O nosso problema será resolvido pela análise modal (vide ref. 1), que consiste em supor a resposta da viga como uma superposição dos modos próprios multiplicados por coordenadas generalizadas dependentes do tempo $\eta_r(t)$, ou seja

$$y(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} w_r(x) \cdot \eta_r(t)$$

Para isto os modos de vibração devem ser ortonormalizados.

A equação que fornece o $w(x)$:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{\omega^2 m_0}{EI} \left[1 + \frac{m}{m_0} \mu(l, -x) \right] w = 0$$

pode ser assimilada à forma geral apresentada por L. Meirovitch na referência indicada: $L[w] = \lambda M[w]$ onde L e M são operadores, w_r e w_s duas soluções distintas.

$$L[w_r] = \lambda_r M[w_r]$$

$$L[w_s] = \lambda_s M[w_s]$$

$$\int_0^l (w_s L[w_r] - w_r L[w_s]) dx = \int_0^l (\lambda_r w_s M[w_r] - \lambda_s w_r M[w_s]) dx$$

Os operadores sendo auto-adjuntos $(\lambda_r - \lambda_s) \int_0^l w_s M[w_r] dx = 0$

$$\lambda_r \neq \lambda_s \quad \int_0^l w_s M[w_r] dx = 0 \quad r \neq s$$

que vem a ser a condição de ortogonalidade. Para o nosso caso não temos ne-

cessidade de abordar o problema de autovalores repetidos.

A ortonormalização a que nos referimos acima corresponde a se ter

$$\int_0^l w_r M[w_s] dx = \delta_{rs}$$

onde δ_{rs} é o delta de Kronecker.

Observe-se que o operador M age como se fôsse uma função peso em relação à qual é determinada a ortogonalidade.

Temos $M \equiv m(x) = m_0 + m_1(\ell_1 - x)$ evidentemente auto-adjunto.

Vamos provar que $L \equiv EI \frac{d^4}{dx^4}$ também o é:

Pela integração por partes, valendo-nos da condição de contorno de momento e deflexão nulos nos apoios:

$$\begin{aligned} \int_0^l w_s EI \frac{d^4}{dx^4} w_r dx &= w_s EI \frac{d^3 w_r}{dx^3} \Big|_0^l - EI \int_0^l \frac{dw_s}{dx} \frac{d^3 w_r}{dx^3} dx = \\ &= -EI \frac{dw_s}{dx} \frac{d^2 w_r}{dx^2} \Big|_0^l + EI \int_0^l \frac{d^2 w_s}{dx^2} \frac{d^2 w_r}{dx^2} dx = EI \int_0^l \frac{d^2 w_s}{dx^2} \frac{d^2 w_r}{dx^2} dx = \\ &= \int_0^l w_r EI \frac{d^4}{dx^4} w_s dx \end{aligned}$$

e L é auto-adjunto, o que prova a ortogonalidade, e se

$$\int_0^l w_s M w_r dx = \delta_{rs} \quad \text{então} \quad \int_0^l w_s L w_r dx = \lambda_r \delta_{rs} = \omega^2 \delta_{rs}$$

A equação geral para o caso em estudo é:

$$[m_0 + m\mu(l, -x)] \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = f(x, t)$$

onde $f(x, t)$ representa a força externa aplicada.

Substituindo $y(x, t) = \sum_1^{\infty} w_r(x) \cdot \eta_r(t)$

numa equação

$$M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + L y = f(x, t)$$

teremos:

$$M \cdot \sum_r w_r(x) \ddot{\eta}_r(t) + L \sum_r w_r(x) \cdot \eta_r(t) = f(x, t)$$

$$\sum_r w_s \cdot M w_r \cdot \ddot{\eta}_r + \sum_r w_s L w_r \cdot \eta_r = w_s f(x, t)$$

$$\sum_r \ddot{\eta}_r \int_0^l w_s M w_r dx + \sum_r \eta_r \int_0^l w_s L w_r dx = \int_0^l w_s f(x, t) dx$$

Aplicando as propriedades deduzidas

$$\ddot{\eta}_r + \omega^2 \eta_r = \int_0^l w_r f(x, t) dx$$

chamando

$$\int_0^l w_r f(x, t) dx = N_r(t)$$

então

$$\ddot{\eta}_r + \omega^2 \eta_r = N_r(t)$$

constitui um sistema de infinitas equações desacopladas.

Aplicando a transformada de Laplace:

$$s^2 \bar{\eta}_r(s) - s\eta_r(0) - \dot{\eta}_r(0) + \omega_r^2 \bar{\eta}_r(s) = \bar{N}_r(s)$$

$$\bar{\eta}_r(s) = \frac{\bar{N}_r(s)}{s^2 + \omega_r^2} + \frac{s}{s^2 + \omega_r^2} \eta_r(0) + \frac{1}{s^2 + \omega_r^2} \dot{\eta}_r(0)$$

$$\text{ou } \eta_r(t) = \frac{1}{\omega_r} \int_0^t N_r(\tau) \sin \omega_r(t-\tau) d\tau + \eta_r(0) \cos \omega_r t + \dot{\eta}_r(0) \frac{\sin \omega_r t}{\omega_r}$$

Temos por solução para a deflexão

$$y(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} w_r(x) \cdot \eta_r(t)$$

que pode ser transformada em

$$\int_0^l M w_s y(x,t) dx = \sum_r \eta_r(t) \int_0^l w_s M w_r dx$$

no instante $t = 0$

$$\eta_r(0) = \int_0^l M \cdot w_r(x) y(x,0) dx$$

$$\dot{\eta}_r(0) = \int_0^l M \cdot w_r(x) \cdot \dot{y}(x,0) dx$$

onde $\dot{y} \equiv \frac{\partial y}{\partial t}$. Representam as condições iniciais para a equação acima.

Definimos pois a solução dada por

$$y(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} w_r(x) \cdot \eta_r(t)$$

5.2.3 - Ortonormalização dos modos próprios.

Sabemos que
$$\int_0^l M \cdot w_r^2 dx = 1$$

onde $M = m_0 + \mu(l_1 - x)$

w_r é a expressão dada por 5.6, atribuindo o índice r aos termos que variam com o modo.

Substituindo essa expressão na integral acima (deixando implícito o índice):

$$A^2 m_0 \left\{ \alpha^4 \int_0^{l_1} [\operatorname{sen} \alpha \beta x + H \operatorname{senh} \alpha \beta x]^2 dx + \frac{1}{4} \int_{l_1}^l \left[(SS + \alpha^2 SD) \frac{\operatorname{sen} \beta(l-x)}{\operatorname{sen} \beta(l-l_1)} + (SS - \alpha^2 SD) \frac{\operatorname{senh} \beta(l-x)}{\operatorname{senh} \beta(l-l_1)} \right]^2 dx \right\} = 0$$

Podemos desenvolver e agrupar de um modo conveniente obtendo:

$$A_r = \sqrt{\frac{2\beta_r}{m_0} \cdot \frac{1}{C1_r}}$$

onde

$$C1 = \alpha^3 \left\{ (1-H^2) \alpha \beta l_1 - \cos^2 \alpha \beta l_1 [(1-2H1) \operatorname{tg} \alpha \beta l_1 + (2+H1) \operatorname{tg} h \alpha \beta l_1] \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \left[\left(\frac{SS + \alpha^2 SD}{\operatorname{sen} \beta(l-l_1)} \right)^2 - \left(\frac{SS - \alpha^2 SD}{\operatorname{senh} \beta(l-l_1)} \right)^2 \right] (l-l_1) \beta - \frac{(SS + \alpha^2 SD)(3SS - \alpha^2 SD)}{\operatorname{tg} \beta(l-l_1)} + \frac{(SS - \alpha^2 SD)(3SS + \alpha^2 SD)}{\operatorname{tg} h \beta(l-l_1)} \right\} \quad 5.7$$

O modo de vibração ortonormalizado da viga sem variação da massa é:

$$w_r(x) = \sqrt{\frac{2}{m_0 l}} \sin \beta_r x$$

onde $\beta_r = \frac{r \cdot \pi}{l}$ ou $\beta'_r = \beta_r \cdot l = r \cdot \pi$

nosso caso também pode ser escrito como

$$w_r(x) = A_r \cdot w_{1r}(x) \quad \text{onde } w_{1r}(x) \text{ é obtido por inspeção de 5.6}$$

e $A_r = \sqrt{\frac{2}{m_0 l}} \sqrt{\frac{\beta'_r}{c_1}}$ cuja primeira parte é a constante do caso sem variação de massa.

$w_{1r}(x)$ passa de uma expressão de seno simples a uma que contém seno e seno hiperbólico diferentes em cada um dos dois trechos estudados.

Chamando $x = \frac{x}{l}$ e $\rho = \frac{\rho_1}{l}$ podemos escrever a expressão do modo próprio como

$$w(x) = \sqrt{\frac{2}{m_0 l}} \sqrt{\frac{\beta'_r}{c_1}} \left\{ (\sin \alpha \beta'_r x + H \sinh \alpha \beta'_r x) \mu(\frac{\rho_1}{l} - x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[(SS + \alpha^2 SD) \frac{\sin \beta'_r (1-x)}{\sin \beta'_r (1-\rho)} + (SS - \alpha^2 SD) \frac{\sinh \beta'_r (1-x)}{\sinh \beta'_r (1-\rho)} \right] \mu(x - \frac{\rho_1}{l}) \right\} \quad 5.8$$

Vale observar que C_1 , H , SS , SD dependem do modo já que nêles funções de β'_r estão implícitas.

5.2.4. - Resposta à excitação externa. Aplicação ao nosso caso.

$$y(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} w_r(x) \cdot \eta_r(t)$$

$$\eta_r(t) = \eta_r^*(t) + \eta_r(0) \cos \omega_r t + \dot{\eta}_r(0) \frac{\sin \omega_r t}{\omega_r}$$

é a solução da equação $\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = \int_0^l w_r(x) f(x,t) dx$

Tomemos a força externa como $f(x,t) = mg\phi(x,t)$, de uma forma geral

$$N_r(t) = \int_0^l w_r(x) \cdot f(x,t) dx = mg \sqrt{\frac{2\beta}{m_0 c l}} \int_0^l w_{1r}(x) \phi(x,t) dx$$

temos $\eta_r^*(t) = \frac{1}{\omega_r} \int_0^t N_r(\tau) \sin \omega_r(t-\tau) d\tau$

e sabemos que $\beta^4 = \frac{\omega^2 m_0}{EI}$ daí $\omega^2 = \frac{EI}{m_0 l^4} \beta^4$

Vamos chamar $\alpha = \frac{m_0 l^4}{EI}$ cuja unidade é $[T]^2$ (tempo) então

$\omega^2 = \beta^4 / \alpha$ fazendo um artifício e deixando implícito o índice:

$$\eta^*(t) = \frac{\alpha}{\beta^4} \cdot \omega \int_0^t N(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

ou $\eta^*(t) = mg \sqrt{\frac{2}{m_0 l} \frac{\beta^4}{c l}} \frac{\alpha l}{\beta^4} \left[\frac{\omega}{l} \int_0^t \sin \omega(t-\tau) \int_0^l w_{1r}(x) \phi(x,\tau) dx d\tau \right]$

Se $y(x,0) = \dot{y}(x,0) = 0$ então

chamando $\eta_{1r}^*(t) = \frac{\omega}{l} \int_0^t \sin \omega(t-\tau) \int_0^l w_{1r}(x) \phi(x,\tau) dx d\tau$

5.9

então $y(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{m_0 l} \frac{\beta_r^4}{c l_r}} w_{1r}(x) \cdot mg \sqrt{\frac{2}{m_0 l} \frac{\beta_r^4}{c l_r}} \frac{\alpha l}{\beta_r^4} \cdot \eta_{1r}^*(t)$

$$y(x,t) = 2 \frac{m}{m_0} g \alpha \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_r^3 \cdot C1_r} w_{1r}(x) \cdot \eta_{1r}^*(t)$$

Conhecemos $a^4 = 1 + m/m_0$ escrevemos $a_1 = a^4 - 1$

$$\text{e } y(x,t) = 2 a_1 \alpha g \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_r^3 \cdot C1_r} w_{1r}(x) \eta_{1r}^*(t)$$

onde escrevemos $y(x,t) = 2 a_1 \alpha g y_1(x,t)$

Como a parte constante tem $[L]$ por unidade, o somatório é adimensional.

Levando em consideração as condições iniciais, temos

$$\begin{aligned} \eta(0) &= \int_0^l M \cdot w(x) \cdot y(x,0) dx = l \int_0^1 M w(x) y(x,0) dx = \\ &= \sqrt{\frac{2}{m_0 l} \frac{\beta^1}{C1}} m_0 l 2 a_1 \alpha g \left[\int_0^{l/2} a^4 \cdot w_1(x) \cdot y_1(x,0) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{l/2}^1 w_1(x) y_1(x,0) dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(0) &= \int_0^l M \cdot w(x) \cdot \dot{y}(x,0) dx = l \int_0^1 M \cdot w(x) \dot{y}(x,0) dx = \\ &= \sqrt{\frac{2}{m_0 l} \frac{\beta^1}{C1}} m_0 l 2 a_1 \alpha g \left[\int_0^{l/2} a^4 \cdot w_1(x) \dot{y}_1(x,0) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{l/2}^1 w_1(x) \dot{y}_1(x,0) dx \right] \end{aligned}$$

Onde, como $y(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} w_r(x) \cdot \eta_r(t)$ substituindo a expressão
de $\eta(t)$ e

$$y(x,t) = 2a_1 \alpha g y_1(x,t) + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{m_0 l} \frac{\beta_r'}{Cl_r}} w_{1r}(x) \right) \left[\sqrt{\frac{2}{m_0 l} \frac{\beta_r'}{Cl_r}} \cdot m_0 l \cdot 2a_1 \alpha g \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(\eta_{1r}(0) \cos \omega_r t + \dot{\eta}_{1r}(0) \frac{\sin \omega_r t}{\omega_r} \right) \right]$$

$$y(x,t) = 2a_1 \alpha g \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_r'^3 \cdot Cl_r} w_{1r}(x) \eta_{1r}^*(t) + 2 \frac{\beta_r'}{Cl_r} w_{1r}(x) \cdot \\ \cdot \left(\eta_{1r}(0) \cos \omega_r t + \dot{\eta}_{1r}(0) \frac{\sin \omega_r t}{\omega_r} \right)$$

Decorre a fórmula final:

$$y(x,t) = 2a_1 \alpha g \sum_{r=1}^{\infty} \frac{w_{1r}(x)}{Cl_r} \left[\frac{\eta_{1r}^*(t)}{\beta_r'^3} + 2\beta_r' \cos \omega_r t \eta_{1r}(0) + 2\beta_r' \sin \omega_r t \frac{\dot{\eta}_{1r}(0)}{\omega_r} \right]$$

5.10

onde $\omega_r = \beta_r'^2 / l \alpha$

$\eta_{1r}^*(t)$ dado pela fórmula 5.9

$w_{1r}(x)$ dado pela fórmula 5.8

Cl_r dado pela fórmula 5.7

$$\eta_{1r}(0) = \int_0^{l/2} \alpha^4 w_1(x) y_1(x,0) dx + \int_{l/2}^l w_1(x) y_1(x,0) dx$$

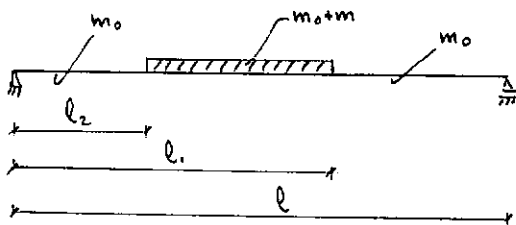
$$\frac{\dot{\eta}_{1r}(0)}{\omega_r} = \frac{1}{\omega_r} \left[\int_0^{l/2} \alpha^4 w_1(x) \dot{y}_1(x,0) dx + \int_{l/2}^l w_1(x) \dot{y}_1(x,0) dx \right]$$

Apresentaremos no apêndice a tentativa feita para o estudo numérico.

5.3 - ESTUDO DA VIGA BIPOIADA COM VARIAÇÃO DISCRETA NA MASSA UNITÁRIA DESLOCADA DA EXTREMIDADE.

5.3.1 - Modos Próprios de Vibração

Podemos esquematizar o problema



m, m_0 - massas unitárias ; I é constante para a viga

regido pela fórmula:

$$[m_0 + m \mu(l_1 - x) \mu(x - l_2)] \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

Separando as variáveis $y(x, t) = w(x) \cdot q(t)$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{\omega^2}{EI} [m_0 + m \mu(l_1 - x) \mu(x - l_2)] w = 0$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0$$

A equação dos modos será separada em três partes:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \beta^4 w = 0 \quad 0 \leq x \leq l_2 \quad (1)$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \alpha^4 \beta^4 w = 0 \quad l_2 \leq x \leq l_1 \quad (2)$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \beta^4 w = 0 \quad l_1 \leq x \leq l \quad (3)$$

A primeira e a terceira se valem das duas condições de contorno nas extremidades de flecha e momento nulo. As outras duas saem de sistemas de equações que podem ser escritos em $x = l_2$ e em $x = l_1$ igualando flecha, ângulo, momento e cortante. Esses dois sistemas determinam as constantes da segunda equação, como passamos a mostrar.

Já sabemos que a solução geral da equação é:

$$w(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + C \sinh \lambda x + D \cosh \lambda x$$

A equação (1) tem solução através de

$$w(x) = A \sin \beta x + C \sinh \beta x \quad \text{já que} \quad w(0) = 0$$

$$0 \leq x \leq l_2 \quad \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=0} = 0$$

A solução da equação (2) se escreve

$$w(x) = A' \sin a \beta x + B' \cos a \beta x + C' \sinh a \beta x + D' \cosh a \beta x$$

$$l_2 \leq x \leq l_1$$

A solução da equação (3) fica

$$w(x) = -A'' \frac{\sin \beta(l-x)}{\cos \beta l} - C'' \frac{\sinh \beta(l-x)}{\cosh \beta l} \quad l_1 \leq x \leq l$$

A igualdade das condições em $x = l_2$ nos leva a escrever

$$A \sin \beta l_2 + C \sinh \beta l_2 = A' \sin a \beta l_2 + B' \cos a \beta l_2 + C' \sinh a \beta l_2 + D' \cosh a \beta l_2$$

$$A \cos \beta l_2 + C \cosh \beta l_2 = a(A' \cos a \beta l_2 - B' \sin a \beta l_2 + C' \cosh a \beta l_2 + D' \sinh a \beta l_2)$$

$$-A \sin \beta l_2 + C \sinh \beta l_2 = a^2(-A' \sin a \beta l_2 - B' \cos a \beta l_2 + C' \sinh a \beta l_2 + D' \cosh a \beta l_2)$$

$$-A \cos \beta l_2 + C \cosh \beta l_2 = a^3(-A' \cos a \beta l_2 + B' \sin a \beta l_2 + C' \cosh a \beta l_2 + D' \sinh a \beta l_2)$$

O mesmo processamento no ponto $x = l_1$

$$-A'' \frac{\sin \beta(l-l_1)}{\cos \beta l} - C'' \frac{\sinh \beta(l-l_1)}{\cosh \beta l} = A' \sin \alpha \beta l_1 + B' \cos \alpha \beta l_1 + C' \sinh \alpha \beta l_1 + D' \cosh \alpha \beta l_1$$

$$+ A'' \frac{\cos \beta(l-l_1)}{\cos \beta l} + C'' \frac{\cosh \beta(l-l_1)}{\cosh \beta l} = \alpha (A' \cos \alpha \beta l_1 - B' \sin \alpha \beta l_1 + C' \cosh \alpha \beta l_1 + D' \sinh \alpha \beta l_1)$$

$$+ A'' \frac{\sin \beta(l-l_1)}{\cos \beta l} - C'' \frac{\sinh \beta(l-l_1)}{\cosh \beta l} = \alpha^2 (-A' \sin \alpha \beta l_1 - B' \cos \alpha \beta l_1 + C' \sinh \alpha \beta l_1 + D' \cosh \alpha \beta l_1)$$

$$-A'' \frac{\cos \beta(l-l_1)}{\cos \beta l} + C'' \frac{\cosh \beta(l-l_1)}{\cosh \beta l} = \alpha^2 (-A' \cos \alpha \beta l_1 + B' \sin \alpha \beta l_1 + C' \cosh \alpha \beta l_1 + D' \sinh \alpha \beta l_1)$$

Vamos escolher A' , B' , C' , D' como as constantes que vão formar o sistema de compatibilidade, do qual vai sair a equação característica.

Obteremos das oito equações acima:

$$(\alpha^2 + 1) \cos \alpha \beta l_2 [(\operatorname{tg} \alpha \beta l_2 - \alpha \operatorname{tg} \beta l_2) A' + (1 + \alpha \operatorname{tg} \alpha \beta l_2 \operatorname{tg} \beta l_2) B'] -$$

$$- (\alpha^2 - 1) \cosh \alpha \beta l_2 [(\operatorname{tgh} \alpha \beta l_2 - \alpha \operatorname{tgh} \beta l_2) C' + (1 - \alpha \operatorname{tgh} \alpha \beta l_2 \operatorname{tgh} \beta l_2) D'] = 0$$

$$(\alpha^2 - 1) \cos \alpha \beta l_2 [(\operatorname{tg} \alpha \beta l_2 - \alpha \operatorname{tgh} \alpha \beta l_2) A' + (1 + \alpha \operatorname{tg} \alpha \beta l_2 \operatorname{tgh} \beta l_2) B'] -$$

$$- (\alpha^2 + 1) \cosh \alpha \beta l_2 [(\operatorname{tgh} \alpha \beta l_2 - \alpha \operatorname{tgh} \beta l_2) C' + (1 - \alpha \operatorname{tgh} \alpha \beta l_2 \operatorname{tgh} \beta l_2) D'] = 0$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha^2 + 1) \cos \alpha \beta l, [(tg \alpha \beta l, + atg \beta (l-l_1)) A' + (1 - atg \alpha \beta l, tg \beta (l-l_1)) B'] - \\
& - (\alpha^2 - 1) \cosh \alpha \beta l, [(tgh \alpha \beta l, + atg \beta (l-l_1)) C' + (1 + atg \alpha \beta l, tg \beta (l-l_1)) D'] = 0 \\
& (\alpha^2 - 1) \cos \alpha \beta l, [(tg \alpha \beta l, + atgh \beta (l-l_1)) A' + (1 - atg \alpha \beta l, tgh \beta (l-l_1)) B'] - \\
& - (\alpha^2 + 1) \cosh \alpha \beta l, [(tgh \alpha \beta l, + atgh \beta (l-l_1)) C' + (1 + atgh \alpha \beta l, tgh \beta (l-l_1)) D'] = 0
\end{aligned}$$

A equação característica deste sistema resolve o nosso problema de autovalor; B' , C' , D' podem ser determinadas em função de A' do sistema acima. Também A , C , A'' , C'' podem ser determinadas dos sistemas anteriores em função de A' que por sua vez será obtida na ortonormalização dos modos.

Dada a complexidade do caso, o cálculo terá de ser totalmente numérico. Determinado β pela solução da equação característica, a matriz acima nos fornecerá os valores das constantes.

Finalmente determinados todos os valores, o modo próprio poderá ser escrito

$$\begin{aligned}
w_i(x) = & A'_i \left[\left(\frac{A_i}{A'_i} \sin \beta_i x + \frac{C_i}{A'_i} \sinh \beta_i x \right) \mu(l_2 - x) + \left(\sin \alpha \beta_i x + \frac{B'_i}{A'_i} \cos \alpha \beta_i x + \right. \right. \\
& + \frac{C'_i}{A'_i} \sinh \alpha \beta_i x + \frac{D'_i}{A'_i} \cosh \alpha \beta_i x \left. \right) \mu(x - l_2)(l_1 - x) - \\
& - \left(\frac{A''_i}{A'_i} \frac{\sin \beta_i (l - x)}{\cos \beta_i l} + \frac{C''_i}{A'_i} \frac{\sinh \beta_i (l - x)}{\cosh \beta_i l} \right) \mu(x - l_1) \left. \right]
\end{aligned}$$

e a constante será obtida de $\int_0^l [m_0 + m \mu(l_1 - x)(x - l_2)] w_i^2(x) dx = 1$

A P Ê N D I C E

I. DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DA FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO E DOS MODOS PRÓPRIOS DE UMA VIGA COM UMA VARIAÇÃO DISCRETA NA MASSA UNITÁRIA E SEM VARIAÇÃO DE INÉRCIA.

1. FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO

Referimo-nos à segunda parte, parágrafo 5.2.1., onde desejamos o cálculo numérico do autovalor (frequência de vibração) da equação diferencial que dá os modos próprios de vibração.

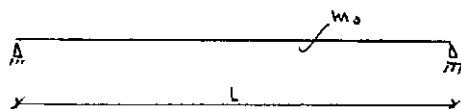
Isto é feito pela equação característica 5.4

$$(\alpha^2 - 1)^2 [tg \alpha \beta l_1 + \alpha tg \beta (l - l_1)] [tgh \alpha \beta l_1 + \alpha tgh \beta (l - l_1)] =$$

$$(\alpha^2 + 1)^2 [tg \alpha \beta l_1 + \alpha tg \beta (l - l_1)] [tgh \alpha \beta l_1 + \alpha tgh \beta (l - l_1)]$$

ou seja, a determinação de β leva-nos a procurar as raízes da equação acima. O trabalho é menos simples do que parece e para êle adaptamos o método da partição de intervalos.

Como há acréscimo de massa, podemos esperar uma diminuição da frequência de vibração. A referência que possuímos é a solução da viga biapoiada de inércia I e massa m_0 por unidade de comprimento.



cuja frequência é obtida de $\sin \beta L = 0$ (vide refer. 2, pg. 313)

ou seja $\beta L = \beta' = n \pi$

Vamos então pesquisar raízes num intervalo entre $(n.3)$ e $(n.\pi)$ deixando alternativa para quando β' for menor que o extremo inferior, de aumentar o intervalo nesta direção. Devemos nos cuidar entretanto, das tangentes na equação acima e que vão a infinito nos múltiplos ímpares de $(\pi/2)$ devendo portanto estes serem excluídos do intervalo de pesquisa.

Tentamos várias modificações na equação a fim de eliminar este problema, mas não houve sucesso numericamente falando, pois a nova expressão é fracionária e não se remove o problema principal, que é de grandes oscilações de valor para pequenas variações do argumento das funções trigonométricas.

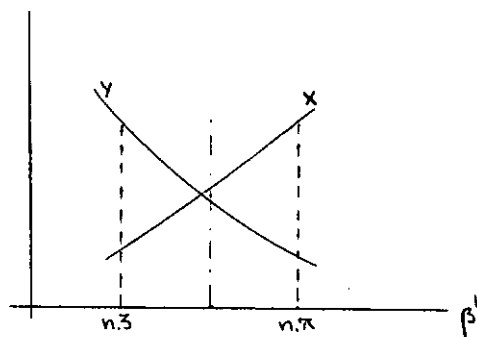
O processo de procura de raiz consiste basicamente em, chamando

$$X = (\alpha^2 - 1)^2 [\operatorname{tg} \alpha \beta l_1 + \operatorname{atgh} \beta(l-l_1)] [\operatorname{tgh} \alpha \beta l_1 + \operatorname{atg} \beta(l-l_1)]$$

$$Y = (\alpha^2 + 1)^2 [\operatorname{tg} \alpha \beta l_1 + \operatorname{atg} \beta(l-l_1)] [\operatorname{tgh} \alpha \beta l_1 + \operatorname{atgh} \beta(l-l_1)]$$

tentar anular $(Y - X)$ para diversas tentativas ao valor de .

Inicialmente calculamos a diferença para os dois valores extremos:



Uma vez que as duas diferenças $(Y - X)$ forem de sinal oposto, garante-se a existência da raiz. Partindo o intervalo pela metade, determinamos qual das duas partes contém a raiz através do estudo do sinal e seguimos o

processo avante.

A tangente, todavia, pode obrigar uma curva a ir a $(+\infty)$ e voltar de $(-\infty)$. Devem pois ser eliminados os pontos onde isto ocorre; como temos tangentes de dois argumentos diferentes definimos dois intervalos para os argumentos:

$$\text{ARG1} = \alpha\beta\theta.$$

$$\begin{array}{c} \text{ARG1} \\ \hline \alpha(n.3)R \qquad \qquad \qquad \alpha(n.\pi)R \end{array}$$

$$R = \theta/\theta$$

$$\text{ARG2} = \beta(\theta - \theta_1)$$

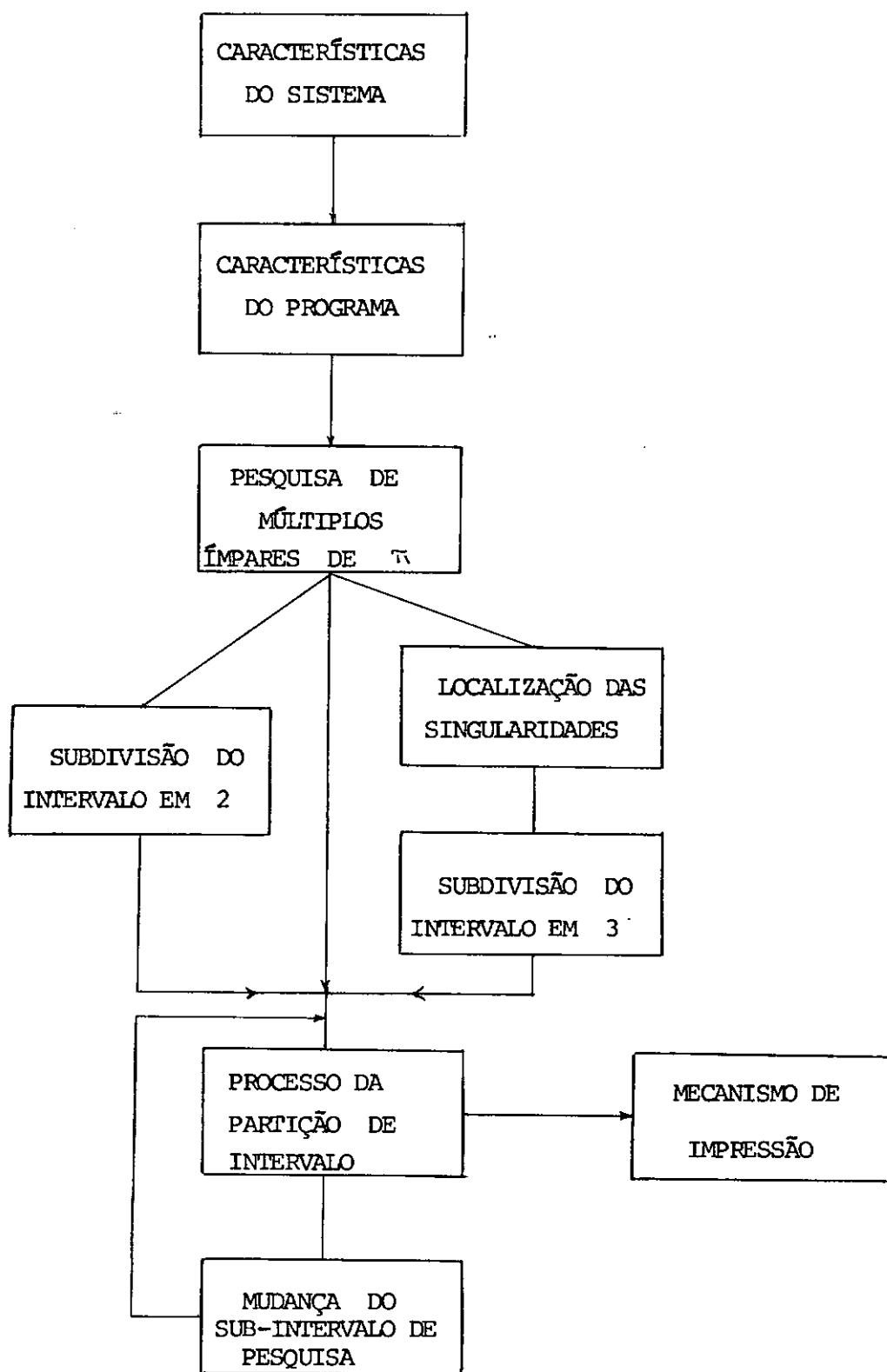
$$\begin{array}{c} \text{ARG2} \\ \hline (n.3)(1-R) \qquad \qquad \qquad (n.\pi)(1-R) \end{array}$$

Estudamos os seguintes casos:

1. Não há múltiplos ímpares de $\pi/2$ no intervalo: tudo se passa como descrito acima.
2. Há um $n.\pi/2$ (n ímpar) em um dos intervalos. Elimina-se este valor de β' e estabelecido um ϵ à direita e à esquerda do mesmo, construímos com os mesmos limites extremos dois intervalos distintos nos quais é procurada a raiz.
3. Há um $n.\pi/2$ (n ímpar) em cada um dos intervalos, sejam β_1 e β_2 os valores que levam $\text{tg}(\text{ARG1})$ e $\text{tg}(\text{ARG2})$ a infinito respectivamente. Precisamos conhecer a posição relativa entre β_1 e β_2 e dividindo o trecho em três partes fazemos a pesquisa da raiz.

Numéricamente foi constatada mais uma dificuldade: às vezes as curvas correspondentes às expressões de Y e X caminham quase paralelo nas proximidades de uma raiz, de modo geral muito inclinadas (mas em raros casos também podem ser quase horizontais) acarretando que na aproximação da sex

ta ou sétima casa decimal do valor de β' , ou seja, num intervalo de pesquisa, por exemplo de 0.1×10^{-6} a 0.2×10^{-6} ainda existam lugares onde $(Y - X)/Y$ não atingiu a aproximação desejada, assumindo valores por vezes incrivelmente grandes, retratando a verticalidade do traçado das duas curvas. Para superar esta dificuldade cortamos o processo da pesquisa de raiz quando esta atingir uma aproximação para nós razoável. Os casos de curvas horizontais, por serem relativamente raros e para frequências mais altas, não foram detalhados mais a fundo.

DIAGRAMA DE BLOCOS PARA DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DA FREQUÊNCIA NATURAL

CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA:

Valor de m/m_0

$R = \text{Trecho da viga ocupado por } m = \ell_1/\ell$

$R1 = A * R$

$R2 = 1 - R$

CARACTERÍSTICAS DO PROGRAMA:

Definição de ξ , ξ_1 , π

Loop até o fim do programa para o cálculo de uma frequência natural por vez (J é o índice que indica o número do modo cuja frequência se está a calcular)

Determinação dos limites $B(1) = \pi * J$

$B(2) = 3.0 * J$

Definição dos argumentos $ARG1 = B(J) * R1$

$ARG2 = B(J) * R2$

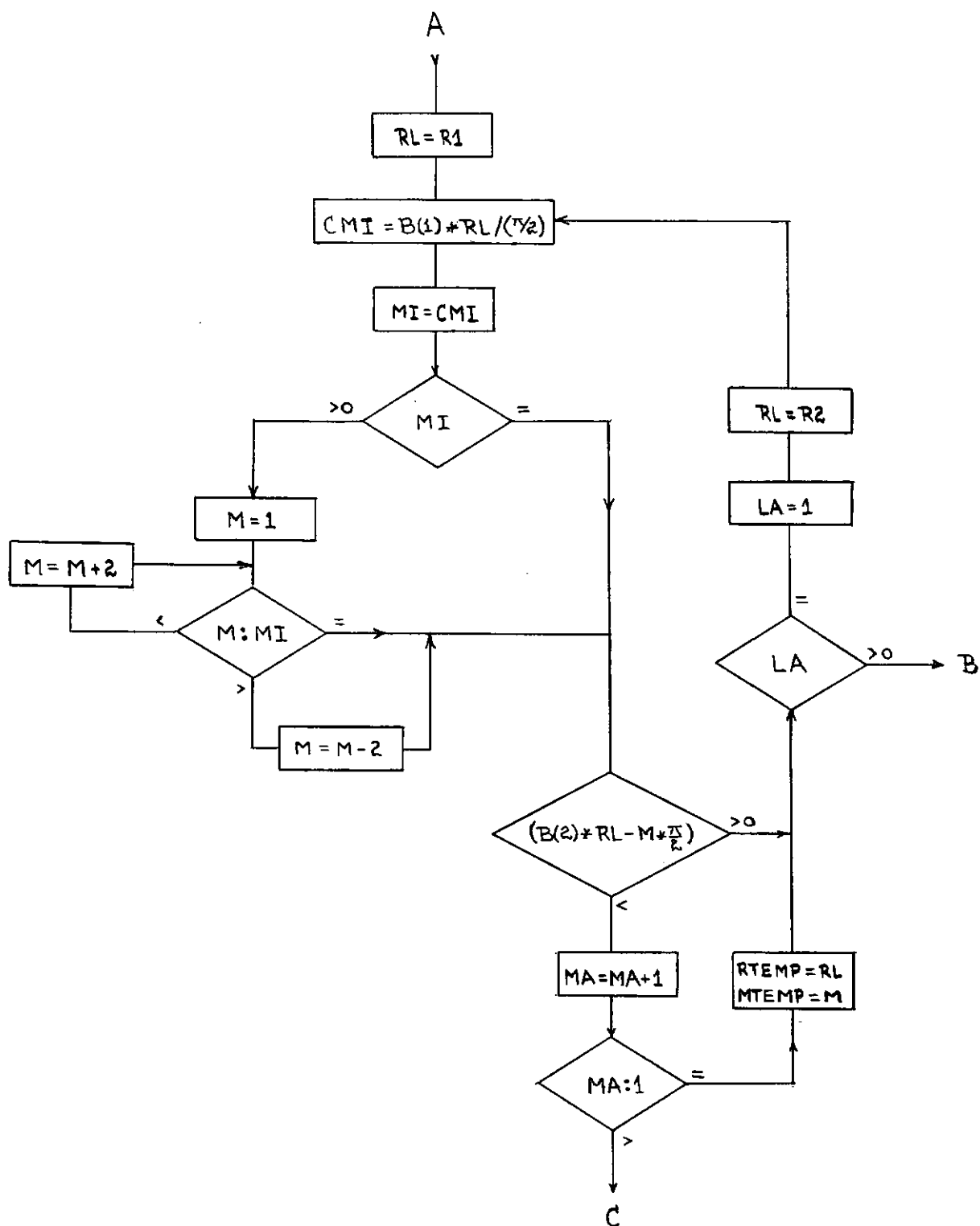
Definição das chaves $LA, MA, MAD1, MAD2, MUD = 0$

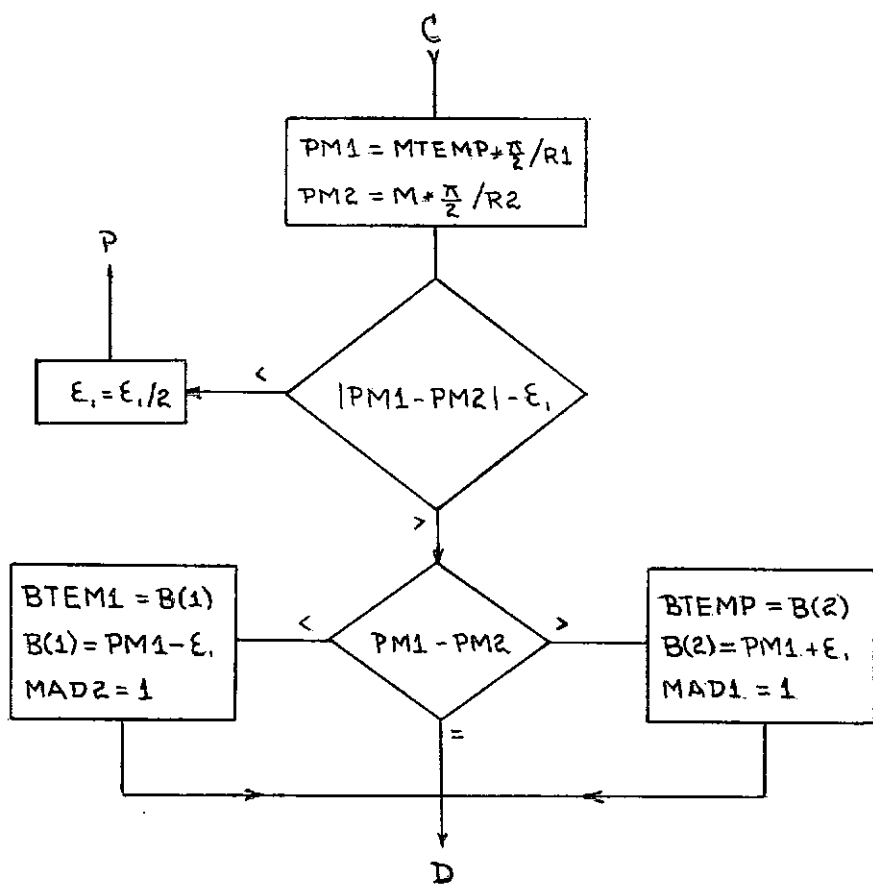
Valor inicial $F1 = 0$

SEGUE PARA A

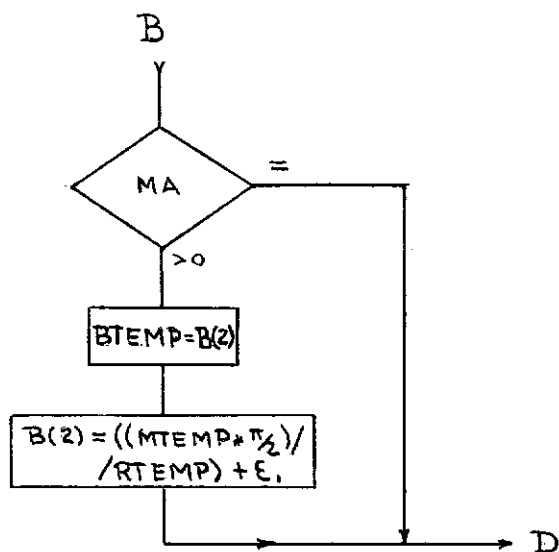
- Volta de P para o bloco características do programa.

- Volta de W para mecanismo de impressão ou para o programa principal quando o processo acima fôr subrotina.

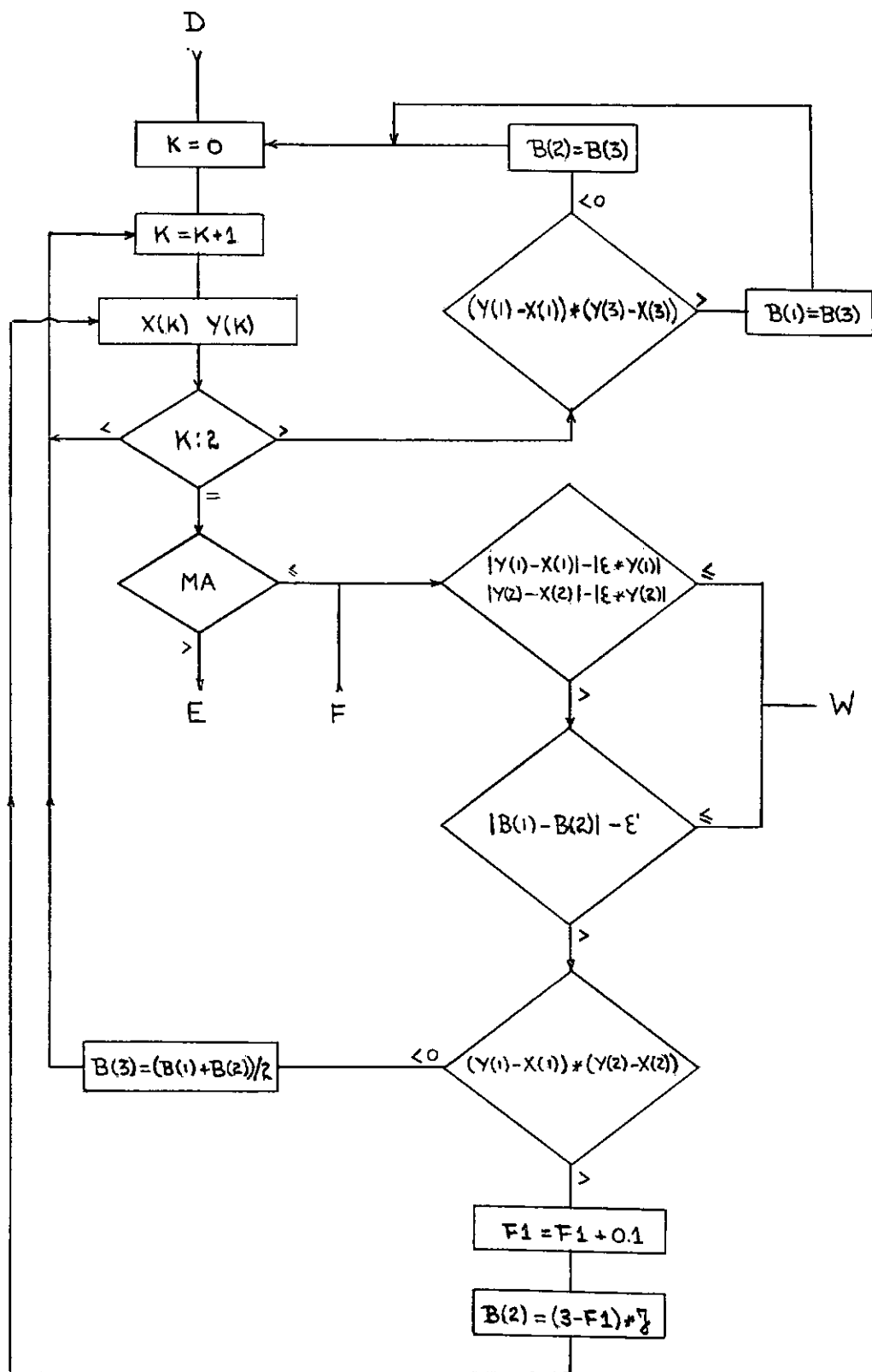


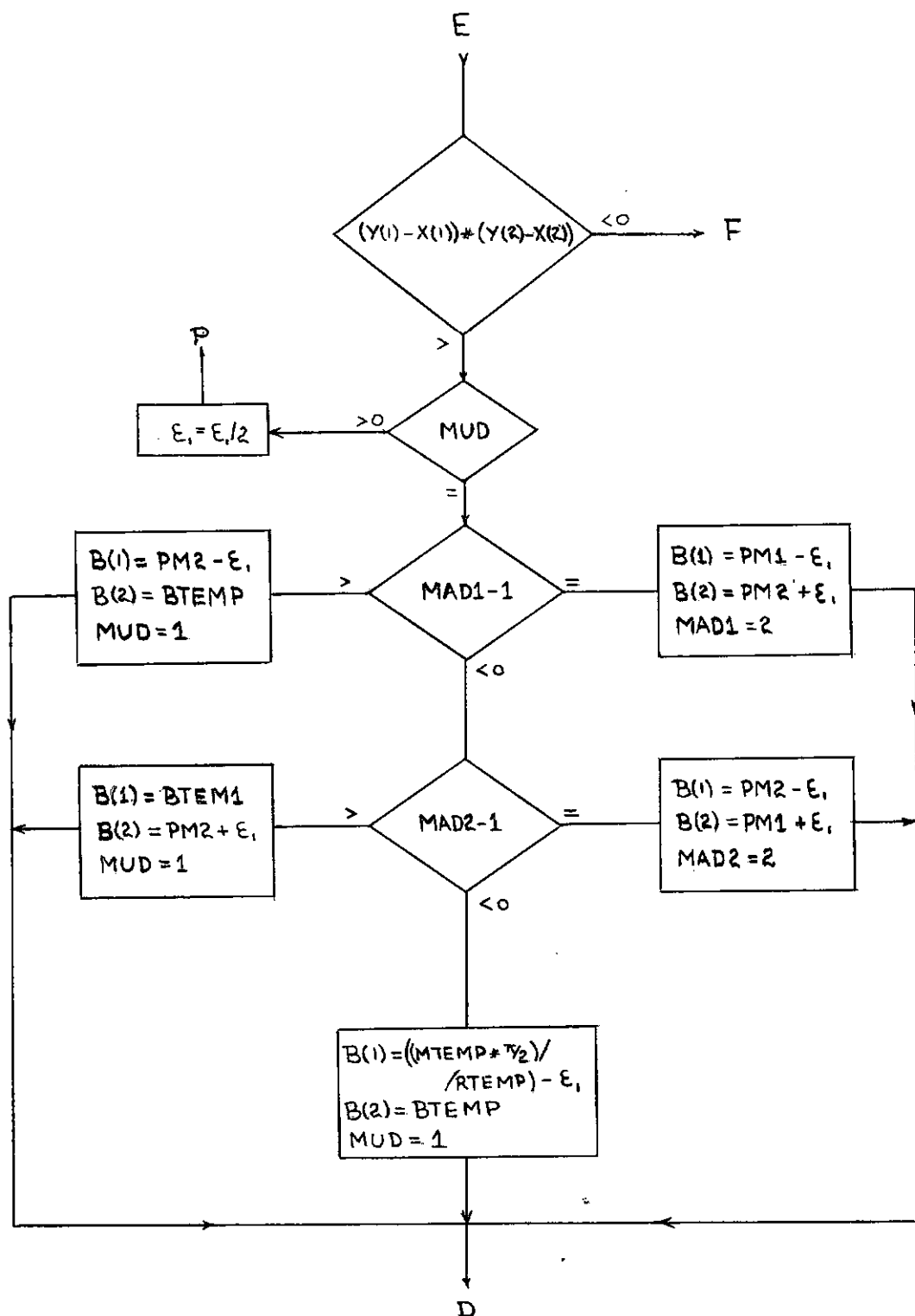


LOCALIZAÇÃO DAS SINGULARIDADES - SUBDIVISÃO DO INTERVALO EM 3



SUBDIVISÃO DO INTERVALO EM 2





2. MODOS PRÓPRIOS

Sua determinação se resume no estudo numérico da expressão 5.6.

$$w(x) = A \left\{ (\text{sen } \alpha \beta x + H \text{senh } \alpha \beta x) \mu(l_1 - x) + \frac{1}{2} [(SS + \alpha^2 SD) \frac{\text{sen } \beta(l-x)}{\text{sen } \beta(l-l_1)} + (SS - \alpha^2 SD) \frac{\text{senh } \beta(l-x)}{\text{senh } \beta(l-l_1)}] \mu(x - l_1) \right\}$$

onde está implícito o índice que afeta β (já que são infinitos os valores) e conseqüentemente H , SS , SD , A .

O valor de A provém de $A = \sqrt{\frac{2}{m_0 l} \frac{\beta'}{c l}}$ onde $\beta' = \beta \cdot l$

$C1$ é obtido da expressão 5.7.

$$SS = \text{sen } \alpha \beta l_1 + H \text{senh } \alpha \beta l_1$$

$$SD = \text{sen } \alpha \beta l_1 - H \text{senh } \alpha \beta l_1$$

e H é dado por 5.5.

O cálculo numérico é simples, de substituição direta e será apresentado o resultado de um exemplo, que considerando um acréscimo m/m_0 o estuda em $1/3$ e depois em $2/3$ da viga. Observe-se que os modos estão ortonormalizados e que nessa ortonormalização influi o acréscimo de massa

$$\int_0^l m(x) w_r(x) w_s(x) dx = \delta_{rs}$$

Serão comparados com os modos da viga sem variação de massa dados por

$$w(x) = \sqrt{\frac{2}{m_0 l}} \text{sen } \beta x \quad \text{onde } \beta' = n\pi$$

Se o estudo fôsse extrapolado para quando a viga inteira está com sua massa alterada, teríamos se

$$\left(1 + \frac{m}{m_0}\right) = \alpha^4$$

os modos dados por

$$w(x) = \sqrt{\frac{2}{m_0 l}} \frac{\sin \beta x}{\alpha^2} \quad \text{onde} \quad \beta' = \frac{n\pi}{a}$$

$$(\beta' = \beta \cdot l)$$

VARIACAO DE MASSA NO 1º TERCO DA VIGA
AS TRES PRIMEIRAS FREQUENCIAS NATURAIS LEVANDO EM CONSIDERACAO A VARIACAO DE MASSA

3.11144
6.16587
9.28576

COMPARACAO ENTRE OS TRES PRIMEIROS MODOS CONSIDERADA OU NAO A VARIACAO DE MASSA

	PRIMEIRO MODO		SEGUNDO MODO		TERCEIRO MODO	
PONTO						
1	0.12910E 00	0.13052E 00	0.24778E 00	0.25881E 00	0.35904E 00	0.38268E 00
2	0.25593E 00	0.25881E 00	0.47781E 00	0.50000E 00	0.65976E 00	0.70710E 00
3	0.37825E 00	0.38268E 00	0.67360E 00	0.70710E 00	0.85322E 00	0.92387E 00
4	0.49392E 00	0.50000E 00	0.82114E 00	0.86602E 00	0.90775E 00	0.10000E 01
5	0.60091E 00	0.60876E 00	0.90991E 00	0.96592E 00	0.81401E 00	0.92387E 00
6	0.69738E 00	0.70710E 00	0.93361E 00	0.10000E 01	0.58637E 00	0.70710E 00
7	0.78167E 00	0.79335E 00	0.89065E 00	0.96592E 00	0.26054E 00	0.38268E 00
8	0.85238E 00	0.86602E 00	0.78427E 00	0.86602E 00	-0.11248E 00	0.00000E 00
9	0.90835E 00	0.92387E 00	0.62228E 00	0.70710E 00	-0.47487E 00	-0.38268E 00
10	0.94870E 00	0.96592E 00	0.41622E 00	0.49999E 00	-0.77110E 00	-0.70710E 00
11	0.97280E 00	0.99144E 00	0.18035E 00	0.25881E 00	-0.95610E 00	-0.92387E 00
12	0.98028E 00	0.10000E 01	-0.69284E -01	0.00000E 00	-0.10016E 01	-0.10000E 01
13	0.97106E 00	0.99144E 00	-0.31585E 00	-0.25881E 00	-0.90033E 00	-0.92387E 00
14	0.94533E 00	0.96592E 00	-0.54284E 00	-0.50000E 00	-0.66680E 00	-0.70710E 00
15	0.90354E 00	0.92387E 00	-0.73509E 00	-0.70710E 00	-0.33528E 00	-0.38268E 00
16	0.84642E 00	0.86602E 00	-0.87976E 00	-0.86602E 00	0.45410E -01	0.00000E 00
17	0.77497E 00	0.79335E 00	-0.96721E 00	-0.96592E 00	0.41911E 00	0.38268E 00
18	0.69039E 00	0.70710E 00	-0.99157E 00	-0.10000E 01	0.73068E 00	0.70710E 00
19	0.59413E 00	0.60876E 00	-0.95115E 00	-0.96592E 00	0.93409E 00	0.92387E 00
20	0.48782E 00	0.49999E 00	-0.84852E 00	-0.86602E 00	0.99933E 00	0.10000E 01
21	0.37327E 00	0.38268E 00	-0.69036E 00	-0.70710E 00	0.91677E 00	0.92387E 00
22	0.25240E 00	0.25881E 00	-0.48700E 00	-0.49999E 00	0.69865E 00	0.70710E 00
23	0.12728E 00	0.13052E 00	-0.25174E 00	-0.25881E 00	0.37721E 00	0.38268E 00

TABELA PARA $m/m_0 = 0.2$

VARIACAO DE MASSA NO 2º TERCO DA VIGA
AS TRES PRIMEIRAS FREQUENCIAS NATURAIS LEVANDO EM CONSIDERACAO A VARIACAO DE MASSA

3.02644
6.11060
9.14578

COMPARACAO ENTRE OS TRES PRIMEIROS MODOS CONSIDERADA OU NAO A VARIACAO DE MASSA

	PRIMEIRO MODO		SEGUNDO MODO		TERCEIRO MODO	
PONTO						
1	0.12174E 00	0.13052E 00	0.24313E 00	0.25881E 00	0.35462E 00	0.38268E 00
2	0.24138E 00	0.25881E 00	0.46907E 00	0.50000E 00	0.65359E 00	0.70710E 00
3	0.35684E 00	0.38268E 00	0.66183E 00	0.70710E 00	0.84997E 00	0.92387E 00
4	0.46614E 00	0.50000E 00	0.80777E 00	0.86602E 00	0.91297E 00	0.10000E 01
5	0.56737E 00	0.60876E 00	0.89654E 00	0.96592E 00	0.83270E 00	0.92387E 00
6	0.65880E 00	0.70710E 00	0.92183E 00	0.10000E 01	0.62181E 00	0.70710E 00
7	0.73884E 00	0.79335E 00	0.88178E 00	0.96592E 00	0.31344E 00	0.38268E 00
8	0.80612E 00	0.86602E 00	0.77912E 00	0.86602E 00	-0.43930E-01	0.00000E 00
9	0.85950E 00	0.92387E 00	0.62100E 00	0.70710E 00	-0.39410E 00	-0.38268E 00
10	0.89805E 00	0.96592E 00	0.41842E 00	0.49999E 00	-0.68196E 00	-0.70710E 00
11	0.92114E 00	0.99144E 00	0.18551E 00	0.25881E 00	-0.86209E 00	-0.92387E 00
12	0.92838E 00	0.10000E 01	-0.61540E-01	0.00000E 00	-0.90589E 00	-0.10000E 01
13	0.91967E 00	0.99144E 00	-0.30562E 00	-0.25881E 00	-0.80599E 00	-0.92387E 00
14	0.89521E 00	0.96592E 00	-0.52991E 00	-0.50000E 00	-0.57734E 00	-0.70710E 00
15	0.85544E 00	0.92387E 00	-0.71913E 00	-0.70710E 00	-0.25475E 00	-0.38268E 00
16	0.80111E 00	0.86602E 00	-0.86063E 00	-0.86602E 00	0.11276E 00	0.00000E 00
17	0.73320E 00	0.79335E 00	-0.94533E 00	-0.96592E 00	0.46991E 00	0.38268E 00
18	0.65291E 00	0.70710E 00	-0.96805E 00	-0.10000E 01	0.76358E 00	0.70710E 00
19	0.56166E 00	0.60876E 00	-0.92757E 00	-0.96592E 00	0.95038E 00	0.92387E 00
20	0.46101E 00	0.49999E 00	-0.82669E 00	-0.86602E 00	0.10026E 01	0.10000E 01
21	0.35265E 00	0.38268E 00	-0.67208E 00	-0.70710E 00	0.91226E 00	0.92387E 00
22	0.23841E 00	0.25881E 00	-0.47384E 00	-0.49999E 00	0.69177E 00	0.70710E 00
23	0.12020E 00	0.13052E 00	-0.24486E 00	-0.25881E 00	0.37250E 00	0.38268E 00

TABELA PARA $m/m_0 = 0.2$

VARIACAO DE MASSA NO 1º TERCO DA VIGA
AS TRES PRIMEIRAS FREQUENCIAS NATURAIS LEVANDO EM CONSIDERACAO A VARIACAO DE MASSA

3.11144
6.16587
9.28576

COMPARACAO ENTRE OS TRES PRIMEIROS MODOS CONSIDERADA OU NAO A VARIACAO DE MASSA

	PRIMEIRO MODO		SEGUNDO MODO		TERCEIRO MODO	
PONTO						
1	0.12136E 00	0.13052E 00	0.26231E 00	0.25881E 00	0.82489E-01	0.38268E 00
2	0.24018E 00	0.25881E 00	0.50015E 00	0.50000E 00	0.14759E 00	0.70710E 00
3	0.35398E 00	0.38268E 00	0.69127E 00	0.70710E 00	0.18149E 00	0.92387E 00
4	0.46042E 00	0.50000E 00	0.81774E 00	0.86602E 00	0.17674E 00	0.10000E 01
5	0.55736E 00	0.60876E 00	0.86754E 00	0.96592E 00	0.13376E 00	0.92387E 00
6	0.64292E 00	0.70710E 00	0.83569E 00	0.10000E 01	0.60595E-01	0.70710E 00
7	0.71553E 00	0.79335E 00	0.72461E 00	0.96592E 00	-0.28957E-01	0.38268E 00
8	0.77397E 00	0.86602E 00	0.54392E 00	0.86602E 00	-0.11848E 00	0.00000E 00
9	0.83375E 00	0.92387E 00	0.43383E 00	0.70710E 00	-0.55961E 00	-0.38268E 00
10	0.87780E 00	0.96592E 00	0.28112E 00	0.49999E 00	-0.91948E 00	-0.70710E 00
11	0.90559E 00	0.99144E 00	0.99034E-01	0.25881E 00	-0.11444E 01	-0.92387E 00
12	0.91686E 00	0.10000E 01	-0.98011E-01	0.00000E 00	-0.12008E 01	-0.10000E 01
13	0.91160E 00	0.99144E 00	-0.29515E 00	-0.25881E 00	-0.10801E 01	-0.92387E 00
14	0.89004E 00	0.96592E 00	-0.47796E 00	-0.50000E 00	-0.80015E 00	-0.70710E 00
15	0.85268E 00	0.92387E 00	-0.63330E 00	-0.70710E 00	-0.40204E 00	-0.38268E 00
16	0.80028E 00	0.86602E 00	-0.75006E 00	-0.86602E 00	0.55362E-01	0.00000E 00
17	0.73382E 00	0.79335E 00	-0.81989E 00	-0.96592E 00	0.50448E 00	0.38268E 00
18	0.65451E 00	0.70710E 00	-0.83766E 00	-0.10000E 01	0.87896E 00	0.70710E 00
19	0.56378E 00	0.60876E 00	-0.80178E 00	-0.96592E 00	0.11234E 01	0.92387E 00
20	0.46324E 00	0.49999E 00	-0.71428E 00	-0.86602E 00	0.12018E 01	0.10000E 01
21	0.35465E 00	0.38268E 00	-0.58062E 00	-0.70710E 00	0.11024E 01	0.92387E 00
22	0.23990E 00	0.25881E 00	-0.40935E 00	-0.49999E 00	0.84015E 00	0.70710E 00
23	0.12100E 00	0.13052E 00	-0.21154E 00	-0.25881E 00	0.45361E 00	0.38268E 00

TABELA PARA $m/m_0 = 1.0$

VARIACAO DE MASSA NO 2º TERCO DA VIGA
AS TRES PRIMEIRAS FREQUENCIAS NATURAIS LEVANDO EM CONSIDERACAO A VARIACAO DE MASSA

3.02644
6.11060
9.14578

COMPARACAO ENTRE OS TRES PRIMEIROS MODOS CONSIDERADA OU NAO A VARIACAO DE MASSA

	PRIMEIRO MODO		SEGUNDO MODO		TERCEIRO MODO	
PONTO						
1	0.11342E 00	0.13052E 00	0.20856E 00	0.25881E 00	0.70442E-01	0.38268E 00
2	0.22431E 00	0.25881E 00	0.39810E 00	0.50000E 00	0.12667E 00	0.70710E 00
3	0.33015E 00	0.38268E 00	0.55134E 00	0.70710E 00	0.15733E 00	0.92387E 00
4	0.42859E 00	0.50000E 00	0.65427E 00	0.86602E 00	0.15626E 00	0.10000E 01
5	0.51741E 00	0.60876E 00	0.69748E 00	0.96592E 00	0.12367E 00	0.92387E 00
6	0.59462E 00	0.70710E 00	0.67693E 00	0.10000E 01	0.66169E-01	0.70710E 00
7	0.65849E 00	0.79335E 00	0.59439E 00	0.96592E 00	-0.46088E-02	0.38268E 00
8	0.70757E 00	0.86602E 00	0.45722E 00	0.86602E 00	-0.74325E-01	0.00000E 00
9	0.74078E 00	0.92387E 00	0.27769E 00	0.70710E 00	-0.12883E 00	-0.38268E 00
10	0.75737E 00	0.96592E 00	0.71877E-01	0.49999E 00	-0.15700E 00	-0.70710E 00
11	0.75696E 00	0.99144E 00	-0.14187E 00	0.25881E 00	-0.15296E 00	-0.92387E 00
12	0.73957E 00	0.10000E 01	-0.34462E 00	0.00000E 00	-0.11724E 00	-0.10000E 01
13	0.70559E 00	0.99144E 00	-0.51856E 00	-0.25881E 00	-0.56588E-01	-0.92387E 00
14	0.65577E 00	0.96592E 00	-0.64880E 00	-0.50000E 00	0.17485E-01	-0.70710E 00
15	0.59126E 00	0.92387E 00	-0.72471E 00	-0.70710E 00	0.91165E-01	-0.38268E 00
16	0.51348E 00	0.86602E 00	-0.74104E 00	-0.86602E 00	0.15137E 00	0.00000E 00
17	0.47616E 00	0.79335E 00	-0.83962E 00	-0.96592E 00	0.76374E 00	0.38268E 00
18	0.42844E 00	0.70710E 00	-0.87541E 00	-0.10000E 01	0.12656E 01	0.70710E 00
19	0.37156E 00	0.60876E 00	-0.84818E 00	-0.96592E 00	0.15853E 01	0.92387E 00
20	0.30687E 00	0.49999E 00	-0.76133E 00	-0.86602E 00	0.16771E 01	0.10000E 01
21	0.23583E 00	0.38268E 00	-0.62178E 00	-0.70710E 00	0.15280E 01	0.92387E 00
22	0.15994E 00	0.25881E 00	-0.43963E 00	-0.49999E 00	0.11595E 01	0.70710E 00
23	0.80791E-01	0.13052E 00	-0.22753E 00	-0.25881E 00	0.62461E 00	0.38268E 00

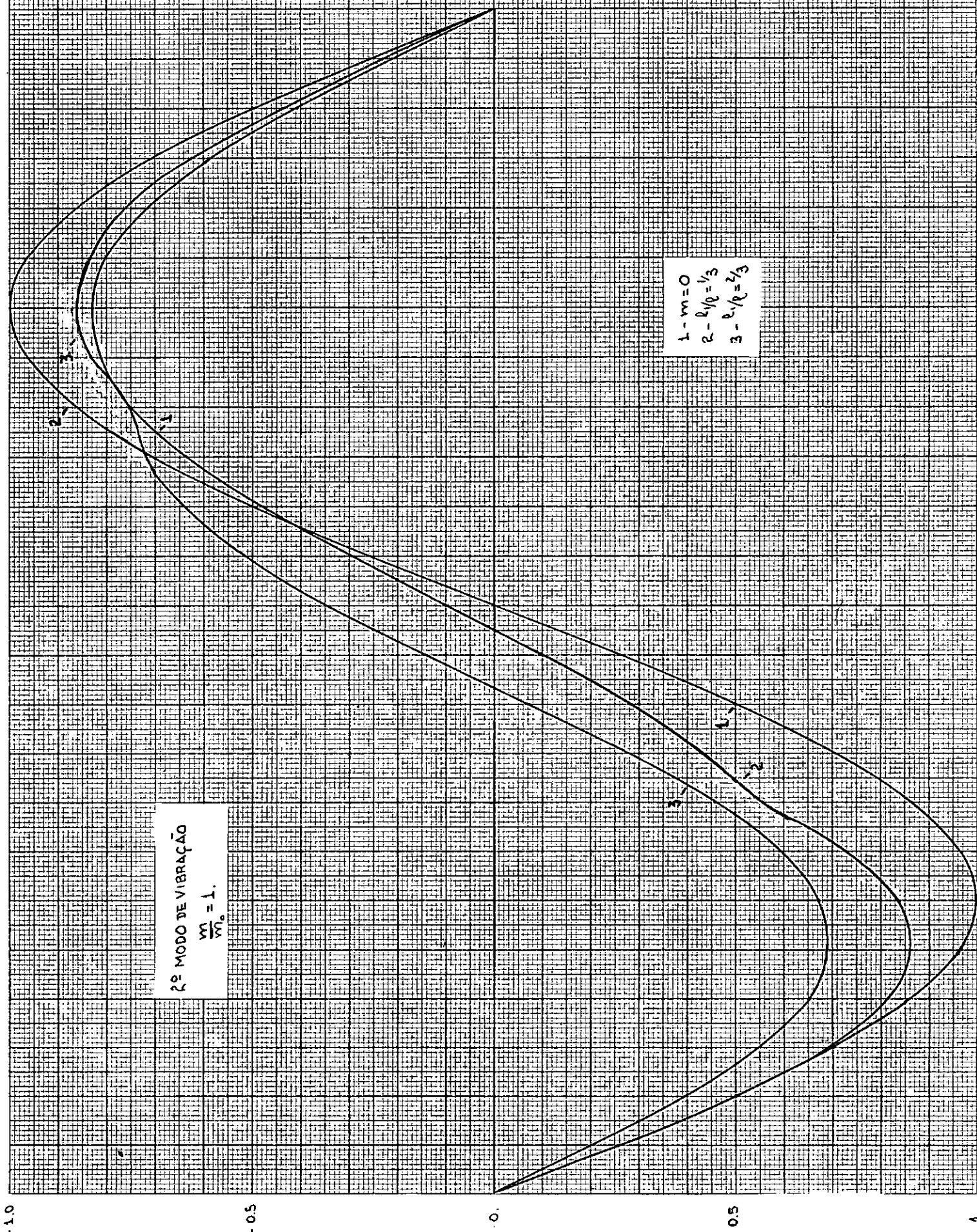
TABELA PARA $m/m_0 = 1.0$

1º MODO DE VIBRAÇÃO

$$\frac{m}{m_0} = 1$$

- 1 - $m = 0$
- 2 - $\frac{m}{m_0} = \frac{4}{3}$
- 3 - $\frac{m}{m_0} = \frac{2}{3}$

612



3º MODO
DE VIBRAÇÃO
 $\frac{m}{m_0} = 1.$

1. $m = 0$
2. $\frac{q}{q_0} = \frac{1}{3}$

1. $m = 0$
2. $\frac{q}{q_0} = \frac{2}{3}$

II. TENTATIVAS DE APROXIMAÇÃO PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE RESPOSTA DE UMA VIGA BIAPOIADA A UMA CARGA PASSANTE QUE EM CADA INSTANTE EM CADA PONTO ASSUME A VELOCIDADE DE VIBRAÇÃO DA VIGA.

Vamos descrever sucintamente como foi tentada a solução da equação a apresentada na introdução do capítulo 5,

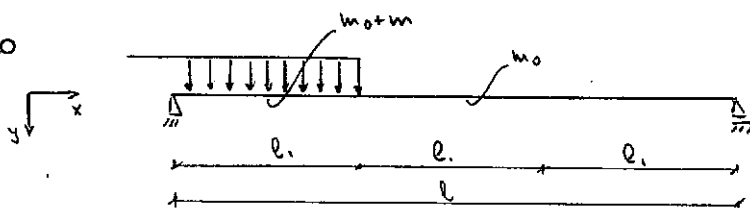
$$\left[m_0 + m \mu (vt - x) \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = mg \mu (vt - x)$$

pois embora não houvesse êxito expressivo na aplicação dos processos imaginados, os problemas encontrados poderão talvez orientar futuros trabalhos neste sentido.

A base do método imaginado consistiu em, num determinado instante, fixarmos a situação da viga e calcular o movimento até um intervalo de tempo posterior como se a carga estivesse parada. Neste instante encararíamos novamente a viga e repetiríamos o processo. A aproximação feita foi em considerar a situação final de um caso como inicial do próximo.

Exemplifiquemos para uma viga dividida em três trechos, e seja t_t o tempo de travessia da carga.

1.^a situação

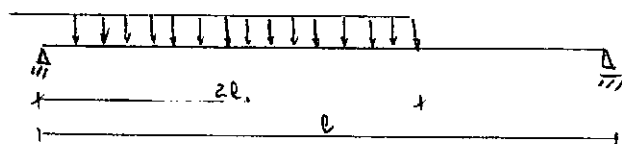


aproximada pela equação

$$\left[m_0 + m \mu (l_1 - x) \right] \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = mg \mu (l_1 - x)$$

e válida entre $0 \leq t \leq t_t/3$

A condição da viga neste instante serve de condição inicial para o estudo do 2º trecho.



cuja equação de movimento é semelhante e válida entre

$$\frac{t_t}{3} \leq t \leq \frac{2t_t}{3}$$

repete-se o processo seguidamente.

Supuzemos que dividindo a viga num número suficientemente grande de trechos, conseguiríamos uma aproximação razoável do resultado pretendido para um trem de carga que se desloca continuamente.

Foi elaborado pois um programa de computação, razoavelmente complicado, que automatizaria este método. Um dos grandes problemas encontrados foi tempo (o programa é excessivamente demorado) e para suplantá-lo tivemos que sacrificar um pouco a aproximação numérica desejada.

Dividimos a viga em 24 trechos e impusemos um tempo de travessia de 24 unidades. O cálculo das frequências de vibração é feito pelo programa do apêndice I, como subrotina. A seguir são computados os deslocamentos pela aplicação da equação 5.10 especializada para esse caso, considerando nulas as condições iniciais, para a carga no 1º trecho ($1/24$ da viga) na primeira unidade de tempo das 24, armazenados na memória do computador e impressos para os 23 pontos calculados. Desses pontos, nas condições acima também determinamos e armazenamos a velocidade e é impressa a da abscissa que dá a frente de carga. Isto porque pensamos em estimar a energia introduzida devido ao desprezo do amortecimento e pelo acréscimo súbito de carga nesta tentativa de solução por um limite superior.

De acôrdo com a equação 5.10 ao passarmos para o segundo trecho e de terminarmos a situação no instante 2/24 precisamos das condições iniciais de deslocamento e velocidade no instante 1/24 que passa a ser o novo instante zero, já que em cada pedaço recomeça a contagem de tempo. Calcula-se as novas frequências naturais pela subrotina correspondente e determina-se os modos para êste caso através dos 23 pontos em estudo. Êstes são multiplicados pelo deslocamento do caso anterior, ainda armazenados e integrados pela regra de Simpson ao longo da viga (dados os 23 pontos) obtendo a condição inicial $\eta_1(x,0)$. Anãlogamente é feito para a velocidade com determinação de $\dot{\eta}_1(x,0)$. Podemos passar então aos deslocamentos no instante 2/24 (absoluto), e repete-se o processo até a carga passar pela viga.

O primeiro fator de demora é no cálculo das frequências naturais que no caso feito repete-se 24 vêzes; limitamo-nos então ao estudo dos 10 primeiros valores, ou seja, nossas séries são de 10 termos. O segundo fator de demora se dá ao perfazer as integrações para as condições iniciais. Inicialmente o nosso programa era dividido em diversas subrotinas que permitiram o cálculo de deslocamento e velocidade ao longo da viga e uma outra subrotina que processava o método de integração de Simpson, se valia delas para obter um resultado que estivesse na precisão dos outros valores. Ora, considerando que lidamos com 10 modos e isto deveria ser feito ao longo da viga, o tempo gasto era excessivo. Foi então tudo centralizado em 1 programa principal com diversas chaves internas e a integração feita pela fórmula de Simpson para 23 pontos.

Nestas condições o programa pode ser rodado em duas horas num computador IBM 1130.

Passaremos a comentar os resultados obtidos:

Como era de se esperar, os valores de deflexão obtidos são maiores que os de uma viga sem variação de massa sujeita à passagem de um trem de carga (problema simples de resolver, seja pela análise modal como fizemos,

seja por série de Fourier segundo ref. 2). A diferença contudo é relativamente pequena, obrigando-nos a encarar o problema mais de perto, com uma aproximação coerente. O cálculo das velocidades infelizmente veio nos mostrar a partir de determinado trecho, ligeiras oscilações nos valores, que examinadas mais de perto, trouxeram à tona o que viria a ser nossa crítica mais forte à análise modal: a falta de convergência nas séries que nos fornecem as condições iniciais. Descreveremos posteriormente um exemplo mais grave deste problema. Por ora ^{perdemos} de certo modo a confiança no método e paramos nossas investigações nessa altura sem seguir o caminho lógico que seria aumentar por exemplo para 20 o número de termos da série, fazer ainda assim uma extrapolação desse número para garantir a convergência.

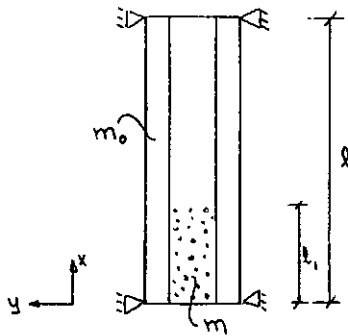
Como vemos pela equação 5.10 há dois termos distintos na solução: um proveniente da equação homogênea (não amortecida neste estudo) retratando as condições iniciais $[\eta_1(x,0), \dot{\eta}_1(x,0)]$ e outro devido à excitação externa $\eta_1^*(x,t)$. Caso as condições iniciais sejam nulas, o estudo da convergência vai se resumir na parte da excitação, que aparece dividida por uma potência (4) de β . Todavia se os termos da série forem encarados isoladamente notaremos uma oscilação bem forte: se o termo correspondente ao primeiro modo for da ordem de 10^{-3} , o do terceiro 10^{-8} pode o quarto ser novamente 10^{-3} e isto vai se repetindo. Se estudarmos a soma parcial da série, o resultado parece mais coerente, as oscilações são bem pequenas, e um determinado algarismo numa certa casa decimal, uma vez estabilizado, permanece, com o que poderemos até ali garantir o resultado.

Foram feitos um sem número de experiências, inclusive com a solução da resposta de uma viga sujeita à ação de uma carga concentrada passante, apresentada na ref. 1, na qual concluímos poder garantir cinco casas decimais do resultado se levamos em consideração 14 termos da série (este número oscila de 1 ou 2 unidades conforme a abscissa x).

Ora, as expressões de condição inicial não têm um denominador forte

que force a convergência. Logo esta tem que se dar nas próprias integrais e isto nem sempre ocorre nos 10 primeiros termos (para o que tínhamos reduzido nossa aproximação a 3 algarismos decimais). A partir de um determinado trecho da viga em que esta parte da solução começa a pesar face à excitação, não podemos mais confiar nos resultados.

Resolvemos então estudar um problema que fôsse somente de condição inicial para o que construímos o seguinte modelo:



Uma haste vertical ôca, cheia até $1/3$ da altura de alguma substância ideal que não acumule energia elástica na vibração transversal.

Com isso desaparece o termo de excitação e a equação do movimento passa a ser

$$[m_0 + m u(l_1 - x)] \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

homogênea, com o que precisamos de uma condição inicial não nula. Tomamos um deslocamento inicial de formato senoidal. A equação 5.10 continua válida, mas reduzida ao termo $\eta_1(x, 0)$ que pode ser determinado analiticamente.

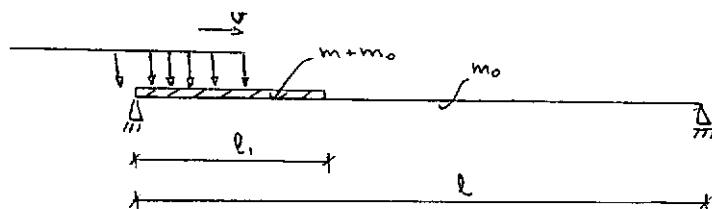
O estudo numérico do resultado nos levou a considerar 35 termos do desenvolvimento em série e ainda nessa altura não tinha a convergência qualquer significado pois embora houvesse termos da ordem de 10^{-10} , se intercalavam outros de 10^{-3} não atingindo a equação 5.10 no instante zero

as condições iniciais estipuladas.

Tivemos por bem neste ponto do trabalho abandoná-lo sem mesmo verificar a influência do amortecimento devido ao acréscimo de massa para retomar teoricamente um caso mais simples que deu origem ao capítulo IV, e sugerir para apresentação futura um estudo mais profundo desta parte numérica.

Queremos, para finalizar êste apêndice, chamar a atenção sôbre duas outras aproximações que podem ser imaginadas.

Da viga dividida em partes



consideramos que o trecho l_1 já esteja com a massa acrescida, enquanto que a carga agora tomada sô como excitação externa se desloca com velocidade v ; quando ela atingir o fim do primeiro trecho o acréscimo de massa passaria instantâneamente a ocupar o primeiro e segundo.

A equação do movimento é

$$\left[m_0 + m u(l_1 - x) \right] \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = mg u(vt - x)$$

onde também é aplicável a solução de 5.10. Todavia, relembrando nossas conclusões de acréscimo de massa em sistema de um grau de liberdade sujeito à ação da gravidade, não variar conjuntamente o acréscimo de massa $u(l_1 - x)$ e a carga $u(vt - x)$ significaria não tomar como origem de medida dos deslocamentos y a linha elástica da viga descarregada. Será que é possível estabelecer um critério que nos dê o êrro cometido?

Também o contrário seria imaginável ou seja, a carga que se desloca com velocidade v e ao chegar ao final de um trecho acrescentar de súbito a variação de massa. O êrro é da mesma natureza do acima mencionado.


```

// JOB T
// FOR
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
* IOCS(CARD,1132PRINTER)
C     COPPE HANS INGO WEBER
C     RESPOSTA DE UMA VIGA BIAPOIADA A PULSOS DE CARGA UNIFORMES
C     DISCRETOS ITERADOS DE TRECHO A TRECHO COM BASE NOS DEZ PRIMEIROS
C     MODOS DE VIBRACAO
C     DIMENSION EI1(10),EI2(10),DEF(24),VEL(23),FIN(10,23),RESUL(8)
C     COMMON B(10),I
C *** CARACTERISTICAS DO SISTEMA
C     A=1.2*0.25
C     ETA=5.
C     PARTT=24.
C     PARTX=24.
C     PARTV=24.
C     IPART=PARTV
C     RT=1./24.
C * SITUACAO NUMERICA INICIAL
C     CONDICoes INICIAIS ZERADAS
C     DO 599 L=1,10
C     EI1(L)=0.
599 EI2(L)=0.
C     DETERMINACAO DAS FREQUENCIAS NATURAIS NO PRIMEIRO TRECHO
C     I=1
C     CALL AUTOL
C     CHAVES DO PROGRAMA
C     MIT= INDICA QUANDO A CARGA ENCHE A VIGA MUDANDO O CALCULO
C     MIT=1
C     MED= SE 1 INDICA CALCULO DEFLEXAO SE 2 VELOCIDADE
594 MED=1
C     MDO= SE 1 RESULTADOS PARA IMPRESSAO SE 2 NAO
C     MDO=1
C     MDV= SE 1 RESULTADO ARMAZENA EM DEFLEXAO SE 2 EM VELOCIDADE
C     MDV=1
C     DESVIO PARA IMPRESSAO DAS CONDICoes INICIAIS
C     CALL DATSW(0,JJ)
C     GOTO(603,595),JJ
603 WRITE(3,604)I,(EI1(J),EI2(J),J=1,10)
604 FORMAT (I5,2E18.10/ 9(5X,2E18.10/))
C *** CALCULO DA DEFLEXAO E VELOCIDADE (ATE 501)
C     MSMP= SE 1 NORMAL SE 2 ESTAO SENDO CALCULADOS OS MODOS DO PROXIMO
C     CASO PARA INTEGRACAO NAS CONDICoes INICIAIS
595 MSMP=1
C     GOTO(571,572),MDO
572 DO 502 IX=1,23
C     GOTO 580
571 I1=0
312 I1=I1&1
C     I2=I1*8
C     I3=I2-7
C     MWR=0
C     DO 310 IX=I3,I2
C     MWR=MWR&1
580 TRX=IX
C     X=TRX/PARTX
551 RX=X
C     RX1=A*RX
C     RX2=1.-RX

```

```

C      YXTS=0.
      SOMATORIO DOS DEZ PRIMEIROS TERMOS
      DO 501 J=1,10
      OMEGT=B(J)**2*ETA*RT
      ARGX1=B(J)*RX1
C      DESVIO PARA QUANDO A CARGA ENCHE A VIGA
      IF(I-IPART)612,630,630
630   GOTO(613,631),MSMP
631   E1= SIN(ARGX1)
      GOTO 573
613   IF(MED-1)211,211,212
211   YXTJ=SIN(ARGX1)*((1.-(-1.)**J)*(1.-COS(OMEGT))/B(J)**5&2.*EI1(J)*C
      IOS(OMEGT)&2.*EI2(J)*SIN(OMEGT))/A**4
      GOTO 500
212   YXTJ=SIN(ARGX1)*((1.-(-1.)**J)*SIN(OMEGT)/(B(J)**5)-2.*EI1(J)*SIN(
      IOMEGT)&2.*EI2(J)*COS(OMEGT))/A**4
      MIT=2
      GOTO 500
612   TSI=1./(B(J)*ETA)
      TR=I
      R=TR/PARTV
      R1=A*R
      R2=1.-R
      ARG1=B(J)*R1
      ARG2=B(J)*R2
      T1=SIN(ARG1)/COS(ARG1)
      T2=SIN(ARG2)/COS(ARG2)
      TH1=TANH(ARG1)
      TH2=TANH(ARG2)
      S2=SIN(ARG2)
      SH1=(EXP(ARG1)-EXP(-ARG1))/2.
      SH2=(EXP(ARG2)-EXP(-ARG2))/2.
      CH1=SH1/TH1
      H1=((A**2-1.)*(T1&A*TH2))/((A**2&1.)*(TH1&A*TH2))
      H=H1*COS(ARG1)/CH1
      SS=SIN(ARG1)&H*SH1
      SD=SIN(ARG1)-H*SH1
      C1=A**3*((1.-H**2)*ARG1-(COS(ARG1)**2)*((1.-2*H1)*T1&H1*TH1*(2.-H1
      1))&(((SS&A**2*SD)/S2)**2-((SS-A**2*SD)/SH2)**2)*ARG2-(SS&A**2*SD
      1)*(3.*SS-A**2*SD)/T2&(SS-A**2*SD)*(3.*SS&A**2*SD)/TH2)/4.
      ARGX2=B(J)*RX2
      SHX1=(EXP(ARGX1)-EXP(-ARGX1))/2.
      SHX2=(EXP(ARGX2)-EXP(-ARGX2))/2.
C      DESVIO DA VARIACAO DE MASSA
      IDESV=(PARTX/PARTV)*I
      IF(IX-IDESV)545,545,546
545   E1 =SIN(ARGX1)&H*SHX1
      GOTO(547,573),MSMP
573   FIN(J,IX)=A**4*E1*DEF(IX)
      GOTO 501
546   E1 =((SS&A**2*SD)*SIN(ARGX2)/S2&(SS-A**2*SD)*SHX2/SH2)/2.
      GOTO(547,574),MSMP
574   FIN(J,IX)=E1*DEF(IX)
      GOTO501
547   E2A=((1.-H)-(1.-H1)*COS(ARG1))/A
      IF(MED-1)548,548,549
548   E2=E2A*(1-COS(OMEGT))
      YXTJ=E1*(E2/B(J)**4&(2.*EI1(J)*COS(OMEGT)&2.*EI2(J)*SIN(OMEGT))*B(
      1J))/C1
      GO TO 500

```

```

549 E2=E2A*SIN(OMEGT)
    YXTJ=E1*(E2/B(J)**4&(-2.*E11(J)*SIN(OMEGT)&2.*E12(J)*COS(OMEGT))*B
    1(J))/C1
500 YXTS=YXTS&YXTJ
501 ZMU=0.
    GOTO(575,502),MSMP
575 YXT=YXTS
    GOTO(581,582),MDV
C   ARMAZENAGEM E IMPRESSAO DOS RESULTADOS DE DEFELEXAO
581 DEF(IX)=YXT
310 RESUL(MWR)=YXT
    GOTO(5,6,7),I1
    5 WRITE(3,705)
705 FORMAT(/12X,'1',13X,'2',13X,'3',13X,'4',13X,'5',13X,'6',13X,'7',1
    13X,'8')
    GOTO 9
    6 WRITE(3,706)
706 FORMAT (12X,'9',12X,'10',12X,'11',12X,'12',12X,'13',12X,'14',12X,
    1'15',12X,'16')
    GOTO 9
    7 WRITE(3,707)
707 FORMAT (11X,'17',12X,'18',12X,'19',12X,'20',12X,'21',12X,'22',12X
    1,'23',12X,'24')
    9 GOTO (19,29),MIT
29  ILT=I&IT
    WRITE(3,709)ILT,(RESUL(MWR),MWR=1,8)
    GOTO 640
    19 WRITE(3,709)I,(RESUL(MWR),MWR=1,8)
709  FORMAT(I4,8E14.4)
640  GOTO(312,312,345),I1
C   DESVIO DE FIM DE LOOP QUANDO A CARGA ENCHE A VIGA
345  GOTO(625,620),MIT
625  MED=2
    MDO=2
    MDV=2
C   MRE= SE 1 NORMAL SE 2 DESVIA PARA O CALCULO DA INTEGRACAO POR SIMPSON
    MRE=1
    GOTO 595
C   ARMAZENAGEM DOS RESULTADOS DE VELOCIDADE
582  VEL(IX)=YXT
502  ZMO=0.
    GOTO(583,584),MRE
583  WRITE(3,20)IDESV,VEL(IDESV)
    20 FORMAT(/30X,'VELOCIDADE DO PONTO',I3,' =',E12.4)
C   MUDANCA DE TRECHO NA VIGA
    I=I&1
    IF(I-IPART&1)598,598,610
598  CALL AUTOL
    MSMP=2
    MRE=2
    MED=0
    GOTO 572
610  DO 611 J=1,10
611  B(J)=(3.1415926*J)/A
    MSMP=2
    MRE=2
    MED=0
    GOTO 572
C   *** CALCULO DAS CONDICÕES INICIAIS PELA INTEGRACAO DE SIMPSON
584  MED=MED&1

```

```

DO 503 J=1,10
IX=0
FINA=0.
C MINT= CHAVE QUE DIZ SE O TERMO E PAR OU IMPAR
MINT=1
590 IX=IX&1
IF (IX-23) 591,591,592
591 GOTO(585,586),MINT
585 FINA=FINA&4*FIN(J,IX)
MINT=2
GOTO 590
586 FINA=FINA&2*FIN(J,IX)
MINT=1
GOTO 590
592 GOTO(587,588),MED
587 EI1(J)=FINA/72.
GOTO 503
588 EI2(J)=FINA/72.
503 ZMI=0.
GOTO (593,632),MED
632 GOTO(594,633),MIT
593 DO 600 L=1,23
600 DEF(L)=VEL(L)
GOTO 572
633 MSMP=1
MDV=1
C *** CALCULO DAS DEFLEXOES PARA VIGA TOTALMENTE TOMADA PELA CARGA
C (INICIO DE LOOP)
DO 620 IT=1,10
TRT=IT
RT=TRT/PARTT
GOTO 571
620 ZMA=0.
GOTO 335
335 STOP
END

```

N O M E N C L A T U R A

- a - relação entre massas (m/m_0 ou $(1 + m/m_0)^{1/4}$)
 c - constante de amortecimento
 c' - c/m_0
 E - módulo de elasticidade
 I - inércia da seção
 k - coeficiente de mola
 \mathcal{L} - densidade Lagrangiana
 m_0 - massa do corpo base (pura ou por unidade de comprimento)
 \dot{m} - massa acrescida
 m - massa acrescida por unidade de comprimento
 Q - quantidade de movimento
 q - coordenada generalizada do tempo
 T - energia cinética
 u - função step
 u - coordenada que mede deformação longitudinal
 V - energia potencial
 v - velocidade
 w - modo de vibração
 x - coordenada de espaço na horizontal
 y, z - coordenadas de espaço na vertical
 β - relacionado com ω ($\beta^2 = \omega^2 \frac{m_0}{EA} \rightarrow$ barra $\beta^4 = \omega^2 \frac{m_0}{EI} \rightarrow$ viga)
 δ - função de Dirac
 δ_{rs} - delta de Kronecker
 Ω - $2\omega_n/a$
 ω_n - frequência natural de vibração do corpo base
 η - coordenada de espaço ou tempo