

TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM ESCOAMENTO TURBULENTO

JOSÉ AUGUSTO FERREIRA DE GOUVÊA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTEN
ÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

Altair Lima Telles
Presidente

Luiz Gonzaga

Carlos Augusto Herlinguer

RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

FEVEREIRO DE 1969

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Affonso da Silva Telles, pela orientação paciente e segura, pelos inúmeros conhecimentos e experiência a nós transmitidos e, principalmente, por sua enorme influência em nossa formação científica, somos devedores da maior gratidão. De nossos futuros estudos ou pesquisas a êle caberá grande parcela de mérito.

Ao corpo docente e administrativo da COPPE.

Ao D.C.C. pela utilização do computador IBM-1130.

À CAPES, Escola de Engenharia da UFMG, Instituto Politécnico da UCMG, por nos haverem possibilitado a realização desta pesquisa.

Aos colegas e amigos, pelo estímulo e apoio durante a realização do curso.

À Vera pelo excelente serviço de datilografia.

S U M Á R I O

A aplicação do método da transformação de similaridade à análise do problema de transferência de calor em escoamento turbulento e exige essencialmente que:

- Nas equações diferenciais da camada limite térmica e hidrodinâmica, transformadas com a utilização das variáveis de similaridade ξ e η (propostas por Meksyn), sejam considerados desprezíveis os termos contendo derivadas com relação a ξ .
- Seja especificada, como dado empírico, uma expressão para a viscosidade adimensional efetiva.

Considerada a primeira hipótese e indicada para ϵ^+ a expressão de Spalding, a solução do problema torna-se possível por métodos numéricos.

A comparação de valores calculados, para a placa plana, de $C_f(x)$ e $u^+ = u^+(y^+)$ com os de outras análises teóricas e dados experimentais, mostrou ser conveniente a adoção de um novo valor para a constante A da expressão de ϵ^+ .

Foi desta forma possível a determinação direta dos perfis de velocidade e temperatura, do coeficiente de atrito e do número de Stanton, no caso de gradiente de pressão nulo.

A extensão do método à análise dos escoamentos com gradi-

ente de pressão não nulo, não foi, todavia, possível, pois a expressão adotada para ϵ^+ torna desprezível a influência da geometria do escoamento, visto serem superestimados os efeitos da turbulência.

Í N D I C E

SUMÁRIO	iv
INTRODUÇÃO	
1) Considerações gerais	1
2) Método da transformação de similaridade	2
3) Método Integral	4
4) Método de Spalding	5
5) Vantagens do método da transformação de similaridade	8
I - TEORIA GERAL DO ESCOAMENTO TURBULENTO	
1) Equações fundamentais	10
2) Lei da parede	12
3) Perfil de difusividade turbilhonar para transferência de quantidade de movimento	14
4) Perfil de difusividade turbilhonar para transferência de calor	16
5) Método da transformação de similaridade	19
5a) Camada limite laminar	21
5b) Camada limite turbulenta	23
II - APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	
1) Tensão de cisalhamento junto à parede	26
2) Perfís de velocidade	32
3) Resultados referentes à transferência de calor	34
4) Perfís de temperatura	37
5) Resumo dos resultados numéricos obtidos	42

III - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	44
BIBLIOGRAFIA	47
APÊNDICE	
Métodos numéricos	49
NOTAÇÕES	59

ÍNDICE DE FIGURAS

<u>Figura</u>	<u>Página</u>	
I.1	11	Campo de escoamento
I.2	17	Perfil de difusividade ϵ_M/ν
I.3	18	Influência de Pr sobre ϵ_H/ϵ_M
I.4	22	Escoamentos potenciais satisfazendo a condição $\lambda'' = \text{cte}$
II.1	28	Comparação dos valores de $C_f(x)$ correspondentes a $A = 0,1108$ com os de outras análises teóricas
II.2	31	Coefficientes de atrito $C_f(x)$ - $A = 0.1$
II.3	33	Perfis adimensionais de velocidade
II.4	36	Variação de $St(x)$ com Re_x - $Pr = 0.1, 1, 10$
II.5	38	Comparação entre os valores calculados de $St.Pr^{2/3}$ com dados experimentais
II.6	39	Perfis adimensionais de temperatura ($Pr = 0.1$)
II.7	40	Perfis adimensionais de temperatura ($Pr = 1$)
II.8	41	Perfis adimensionais de temperatura ($Pr = 10$)

ÍNDICE DE TABELAS

<u>Tabela</u>	<u>Página</u>	
I.1	12	Formas da lei da parede
II.1	29	Influência da variação de A sobre $C_f(x)$
II.2	32	Influência da variação de λ sobre $f''(0)$
II.3	43	Principais resultados numéricos determina dos

INTRODUÇÃO

1) - Considerações gerais

O escoamento de um fluido, sujeito à ação de um campo de forças exterior, é governado por duas leis físicas, a saber:

- lei da conservação da massa
- lei da conservação da quantidade de movimento (2.^a lei de Newton)

Na descrição lagrangeana do escoamento, sendo as propriedades do fluido consideradas constantes, estas leis são expressas matematicamente sob a forma da equação da continuidade e das equações de Navier-Stokes, respectivamente.

Um número muito reduzido de soluções exatas é apresentado na literatura, para este sistema de equações diferenciais extremamente complexo [6, 7].

No 39 Congresso Internacional de Matemática, Heidelberg, 1904, foi, entretanto, apresentada por Prandtl, a Teoria da Camada Limite, estabelecendo suposições que permitem uma grande simplificação nas equações de Navier-Stokes.

À luz da teoria da camada limite a solução de uma grande variedade de problemas tornou-se possível.

A extensão da análise de Prandtl à equação da energia originou a equação da camada limite térmica, permitindo, assim, seja fei-

ta a análise termodinâmica do escoamento.

Indicamos, a seguir, sucintamente, alguns dos métodos utilizados nas soluções dos problemas mecânico e térmico de escoamentos, considerada a hipótese de camada limite.

2) - Método da transformação de similaridade

No estudo do escoamento laminar em torno de uma placa plana, Blasius (1908) solucionou a equação da camada limite hidrodinâmica de Prandtl, empregando, pela primeira vez, o método da transformação de similaridade [7].

Este método, a ser descrito com maiores detalhes no primeiro capítulo deste trabalho, consiste em uma transformação de coordenadas, que permite escrever a equação de Prandtl sob a forma de uma equação diferencial ordinária.

Convém, entretanto, que a notável análise de Blasius, que tão grandemente influenciou no desenvolvimento da mecânica dos fluidos e transferência de calor, seja, agora, esboçada.

Com a introdução da coordenada adimensional

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \quad (1)$$

e da função fluxo

$$\psi = \sqrt{\nu x U_0} f(\eta) \quad (2)$$

nas equações da camada limite hidrodinâmica, Blasius conseguiu satisfazer automaticamente a equação da continuidade e reduzir a equação da quantidade de movimento à forma

$$f f'' + 2 f''' = 0 \quad (3)$$

no caso do gradiente de pressão nulo.

A equação diferencial ordinária, não linear (3), foi resolvida com a utilização do desenvolvimento em série de $f(\eta)$.

A análise, de grande elegância matemática, torna-se da maior importância observada a forma simples da equação resultante.

Modernamente, a utilização do cálculo eletrônico, facilita, em extremo, a integração da equação (3).

Uma extensão das soluções de similaridade, permitindo a análise dos escoamentos com gradiente de pressão não nulo, foi apresentada por Falkner e Skan [3, 6]. A equação obtida, denominada equação de Falkner-Skan, foi posteriormente estudada por Hartree e Falkner, tendo este último apresentado soluções mais precisas [3, 6].

Soluções numéricas da equação de Falkner-Skan, bem como da equação da camada limite térmica, para uma grande faixa de variação do gradiente de pressão, são apresentadas por Evans [3]; um estudo analítico, utilizando desenvolvimentos em série, é indicado por Meksyn [6].

O emprego da solução de similaridade para a camada limite

térmica, em escoamentos laminares, foi feito inicialmente por Polhausen [6, 11], para altos números de Prandtl.

A extensão do método da transformação de similaridade ao escoamento turbulento por Telles [11], utilizando a expressão da difusividade turbilhonar proposta por Gill e Scher, mostrou-se bastante fecunda, permitindo a determinação direta dos perfis de velocidade e temperatura no caso de gradiente nulo de pressão.

3) Método integral

O problema geral do escoamento de um fluido em torno de um perfil de formato arbitrário, é uma tarefa bastante árdua se for feita por meio de métodos analíticos.

Um método de solução aproximado, válido para escoamentos laminares e turbulentos, foi sugerido por von Karman e Pohlhausen, visando obter soluções com menor trabalho, embora, evidentemente, menos precisas.

Este método, denominado Método Integral, consiste na análise do comportamento médio das partículas fluidas ao longo da camada limite, em contraposição com o de partículas consideradas individualmente, o que é feito em uma descrição lagrangeana.

Este objetivo é alcançado por um balanço de quantidade de movimento e energia, para um volume de controle incluindo a camada limite.

Um aperfeiçoamento no método de von Karman e Pohlhausen foi posteriormente introduzido por Holstein e Bohlen, e é descrito detalhadamente por Schlichting [7].

As equações integrais resultantes são transformadas em equações diferenciais ordinárias, através da especificação de perfis de velocidade e temperatura.

A análise da camada limite hidrodinâmica turbulenta, utilizando o método integral, foi feita, entre outros pesquisadores, por Prandtl [7], utilizando o perfil de velocidades de Blasius (lei da potência $1/7$), Prandtl e Schlichting [7], com o emprego do perfil logaritmico de velocidades, e Schultz e Grunov [7], a partir de perfis empíricos satisfazendo a dados experimentais.

O problema de convecção forçada foi estudado por Hanna e Myers [11], através de uma analogia, usando a equação integral da camada limite hidrodinâmica.

4) Método de Spalding

A circunstância de que a equação da energia sob a forma de von Mises pode ser integrada diretamente, sem a prévia solução da equação do movimento, se fôr feita utilização da "lei da parede", foi observada inicialmente por Spalding.

Da análise de Spalding resulta a equação

$$\frac{\partial \theta}{\partial x^+} = \frac{1}{\epsilon^+ u^+} \frac{\partial}{\partial u^+} \left(\frac{1}{Pr_e} \frac{\partial \theta}{\partial u^+} \right) \quad (4)$$

onde

$$x^+ = \int_{x_0}^x \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\tau_W(x)}{\rho}} dx \quad (5a)$$

$$\theta = \frac{T_W - T}{T_W - T_\infty} \quad (5b)$$

As condições de contorno mais indicadas na integração da equação (4), são |5|.

$$\theta = 1 \quad \text{para} \quad x^+ = 0 \quad \text{e} \quad u^+ > 0 \quad (6a)$$

$$\theta = 1 \quad \text{para} \quad u^+ \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad x^+ > 0 \quad (6b)$$

$$\theta = 0 \quad \text{para} \quad u^+ = 0 \quad x^+ > 0 \quad (6c)$$

A equação (4) pode ser integrada numericamente, se suposições apropriadas são feitas sobre o número de Prandtl efetivo e a relação funcional entre ϵ^+ e u^+ , definindo uma função universal.

$$\theta = \theta(x^+, \bar{u}^+, Pr) \quad (7)$$

O principal objetivo da análise é a determinação da função de Spalding.

$$Sp(x^+, Pr) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial u^+} \right)_{u^+=0} \quad (8)$$

relacionada ao número de Stanton pela expressão

$$St = Sp \left(\frac{1}{2} C_f \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Conhecido o coeficiente de atrito C_f , a expressão (9) serve como base para a solução dos problemas de transferência de calor.

Podem ser feitas restrições a, pelo menos, dois pontos da análise de Spalding. Em primeiro lugar, a expressão de ϵ^+ calculada a partir da "lei da parede", por meio de

$$\epsilon^+ = \frac{du^+}{dy^+} \quad (10)$$

implica em que a tensão tangencial seja praticamente constante na direção normal à parede; o que não é verificado sequer no caso de uma geometria simples, como a da placa plana. O segundo ponto criticável é apresentado pela análise da condição de contorno (6.b). Considerada como válida a expressão da "lei da parede" de Spalding, resulta que

$$u^+ \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad y \rightarrow \infty \quad (11)$$

(visto ser finito o valor de $\tau_w(x)$).

Por outro lado, para um escoamento do tipo camada limite, podemos escrever

$$u^+ \rightarrow \frac{u_1(x)}{u_*} \quad \text{quando} \quad y \rightarrow \infty \quad (12)$$

A contradição exposta por (11) e (12) mostra a incompatibilidade da adoção da "lei da parede" com a hipótese de camada limite.

Fisicamente, a condição de u^+ tender a infinito não é verificada na região de escoamento, exceção feita ao escoamento com separação.

5) - Vantagens do método da transformação de similaridade

Consideramos desnecessária uma comparação entre o Método da transformação de similaridade e o método integral, pois, conforme mencionado, o segundo é um processo de solução aproximado.

Suposta conhecida, como dado empírico, a expressão da viscosidade adimensional efetiva, apresentamos, como resultado de um estudo comparativo com o método de Spalding, as observações:

- a - A hipótese $\tau \approx \tau_w$, que permite, na análise de Spalding, a determinação de ϵ^+ , torna-se desnecessária. Uma melhor concordância da teoria com a análise física do escoamento é, conseqüentemente, obtida.
- b - Sendo desnecessária a adoção de qualquer expressão para a "lei da parede", é evitada a incompatibilidade, indicada no 4, com a hipótese de camada limite. A teoria desenvolvida torna-se, portanto, coerente e envolve menor número de suposições heurísticas.
- c - As equações resultantes, feita uma suposição apropriada, conterão unicamente derivadas com relação a uma das variáveis de similaridade, podendo ser integradas como equações diferenciais ordinárias. Tal fato reduz enormemente o volume e dificuldade apresentados para a solução numérica dos problemas.

- d - Os perfis de velocidade, temperatura, tensão tangencial e fluxo de calor, são obtidos de forma direta.
- e - A determinação dos adimensionais $St(x)$ e $C_f(x)$ é independente, não sendo necessária a utilização de uma analogia como a representada por (9).

É ainda importante mencionar-se que a aplicabilidade do método da transformação de similaridade independe de qualquer suposição concernente à relação entre ϵ_H e ϵ_M , e que sua validade se verifica para quaisquer valores dos parâmetros característicos.

Estas observações, cremos, justificam a utilização, nesta análise, do método de transformação de similaridade.

I - TEORIA GERAL DO ESCOAMENTO TURBULENTO

1) - Equações fundamentais

A formulação matemática do problema bi-dimensional de transferência de calor em escoamento turbulento leva, sob as hipóteses de camada limite, propriedades físicas constantes, escoamento não dissipativo, às equações:

Equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.1})$$

Equação da camada limite hidrodinâmica

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_M \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \quad (\text{I.2})$$

Equação da camada limite térmica

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_H \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{I.3})$$

Estas equações são a representação analítica das leis de conservação de massa, quantidade de movimento e energia, respectivamente.

As variáveis u , v , T e P são os valores médios temporais das componentes da velocidade, temperatura e pressão. O termo $\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}$, que mede o gradiente de pressão na direção tangencial à parede, pode ser calculado, se conhecido o escoamento potencial correspondente. Utilizando o teorema de Bernoulli, podemos escrever:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = u_1(x) \frac{d}{dx} [u_1(x)] \quad (\text{I.4})$$

onde $u_1(x)$ é o valor da velocidade potencial na fronteira da camada limite. Os perfis de difusividade turbilhonar para transferência de quantidade de movimento e de calor são representados por ϵ_M e ϵ_H . Expressões semi-empíricas para ϵ_M são obtidas da chamada "lei da parede", através de hipóteses complementares. O valor de ϵ_H é obtido determinada sua relação com ϵ_M , para o que se utiliza um modelo do mecanismo de transferência de calor e de quantidade de movimento.

Os eixos coordenados são tomados segundo as direções normal e tangencial à parede, e a formulação se completa com a indicação das condições de contorno, resultantes da consideração de camada limite.

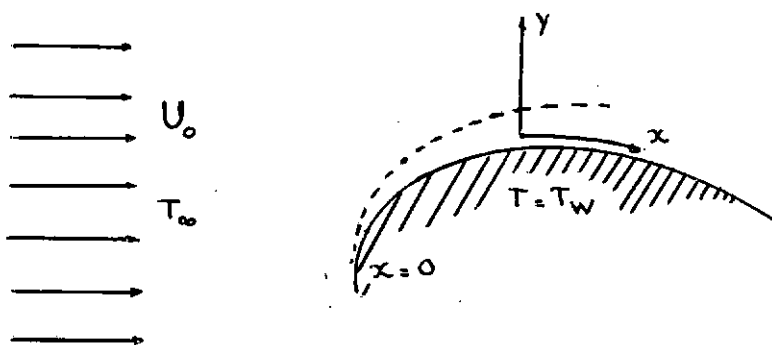


Fig. I.1

$$\bar{y} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \\ T = T_W \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{I.5a}) \\ (\text{I.5b}) \\ (\text{I.5c}) \end{array}$$

$$\bar{y} \rightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} u \rightarrow u_1(x) \\ T \rightarrow T_\infty \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{I.6a}) \\ (\text{I.6b}) \end{array}$$

2) - Lei da parede

Definamos, inicialmente, as grandezas adimensionais

u^+ e y^+ pelas expressões:

$$u^+ = u \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} \quad (\text{I.7a})$$

$$y^+ = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (\text{I.7b})$$

onde ν e ρ são a viscosidade cinemática e a densidade do fluido, e τ_w a tensão de cisalhamento junto à parede.

Segundo postulado por Prandtl e confirmado experimentalmente por Nikuradse e outros pesquisadores, deve ser verificada pela velocidade a expressão:

$$u^+ = u^+(y^+) \quad (\text{I.8})$$

denominada por Coles "lei da parede".

Formas da lei da parede têm sido propostas por diversos autores, consistindo-se em expressões semi-empíricas, verificando os dados experimentais. Na tabela 1 são apresentadas diversas fórmulas para a "lei da parede".

TABELA I.1

| 4, 5, 9 |

Prandtl-Taylor:

$$u^+ = y^+ \quad 0 \leq y^+ < 11,5$$

$$u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5 \quad 11,5 \leq y^+$$

von Karman:

$$u^+ = y^+ \quad 0 \leq y^+ < 5$$

$$u^+ = 5 \ln y^+ - 3,05 \quad 5 \leq y^+ < 30$$

$$u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5 \quad 30 \leq y^+$$

Reichardt:

$$u^+ = 2,5 \ln (1 + 0,4y^+) + 7,8 \left\{ 1 - e^{-y^+/11} - \frac{y^+}{11} e^{-0,33y^+} \right\} \quad 0 \leq y^+$$

Deissler:

$$u^+ = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{1 + n^2 u^+ y^+ \left[1 - \exp(-n^2 u^+ y^+) \right]} \quad 0 \leq y^+ < 26$$

$n = 0,124$

$$u^+ = 2,78 \ln y^+ + 3,8 \quad 26 \leq y^+$$

van Driest:

$$u^+ = \int_0^{y^+} \frac{2dy^+}{1 + \{1 + 0,64 y^{+2} [1 - \exp(-y^+/26)]^2\}^{\frac{1}{2}}} \quad y^+ \geq 0$$

Rannie:

$$u^+ = 14,54 \tanh(0,0688 y^+) \quad 0 \leq y^+ < 27,5$$

$$u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5 \quad y^+ \geq 27,5$$

Spalding:

$$y^+ = u^+ + A \left\{ e^{Bu^+} - 1 - Bu^+ - \frac{(Bu^+)^2}{2!} - \frac{(Bu^+)^3}{3!} - \frac{(Bu^+)^4}{4!} \right\} \quad y^+ \geq 0$$

$$A = 0,1108$$

$$B = 0,4$$

Entre estas expressões, as propostas por Reichardt, van Driest e Spalding apresentam a vantagem de serem válidas para todo o domínio de y^+ , resultando contínuo o perfil de velocidades correspondente.

3) - Perfil de difusividade turbilhonar para transferência de quantidade de movimento

A tensão tangencial é calculada por

$$\tau = \rho (v + \epsilon_M) \frac{\partial u}{\partial y} \quad (I.9)$$

Considerando (I.7a) e (I.7b), teremos

$$\epsilon^+ = 1 + \frac{\epsilon_M}{v} = \frac{\tau}{\tau_W} \frac{dy^+}{du^+} \quad (I.10)$$

Supondo a tensão de cisalhamento independente da distância à parede

($\tau \approx \tau_W$) resulta finalmente:

$$\epsilon^+ = 1 + \frac{\epsilon_M}{v} = \frac{dy^+}{du^+} \quad (I.11)$$

Uma outra forma de se obter a expressão (I.10), indicada por Telles e Dukler [12], consiste na aplicação do método das pequenas perturbações à equação da camada limite hidrodinâmica.

A expressão (I.10) equivale, neste caso, à perturbação de ordem zero.

Conhecida a "lei da parede", $u^+ = u^+(y^+)$, podemos, por intermédio de (I.10), determinar ϵ_M .

Para a fórmula de Spalding [9], a viscosidade adimensional efetiva resulta expressa por

$$\epsilon^+ = 1 + \frac{\epsilon_M}{v} = 1 + AB \left\{ e^{Bu^+} - 1 - Bu^+ - \frac{(Bu^+)^2}{2} - \frac{(Bu^+)^3}{6} \right\} \quad (I.12)$$

Neste ponto é importante observar-se que duas bases distintas podem ser empregadas na formulação de uma teoria da transferência de calor.

Se fôr feita a suposição de que a lei da parede é exata, a adoção de ϵ^+ calculado por (I.10) implica em que τ seja aproximadamente igual a τ_W . Uma teoria que se fundamente nesta primeira hipótese segundo indicado por Kestin e Richardson [5] leva a resultados satisfatórios quando $\frac{\tau}{\dot{q}} \approx \frac{\tau_W}{\dot{q}_W}$, sendo êste o caso verificado para tubos e canais. Como exemplo de aplicação citaremos Sparrow e Siegel [8, 10].

Como segunda hipótese, o ponto de partida da teoria pode ser a expressão de ϵ^+ como função de u^+ ou y^+ , admitida neste caso como empírica, passando a lei da parede a ser simplesmente uma expressão compatível com os dados experimentais.

No presente trabalho, consideraremos a segunda hipótese in

dicada, sendo a expressão de ϵ^+ , dada por (I.12), considerada como empírica.

Das considerações anteriores, concluímos ser da mais alta importância a especificação correta de um perfil de difusividade turbilhonar.

A adoção da expressão de ϵ^+ de Spalding foi feita principalmente pelas razões:

- A continuidade do perfil $\frac{\epsilon_M}{\nu} = f(u^+)$
- A tendência assintótica de $\frac{\epsilon_M}{\nu}$ quando $y^+ \rightarrow \infty$ o que pode ser verificado no diagrama I-2.

4) - Perfil de difusividade turbilhonar para a transferência de calor

A partir da análise de um modelo simples do mecanismo de transferência de calor e massa em escoamento turbulento, Reynolds [4] propôs fossem considerados iguais os valores de ϵ_M e ϵ_H .

Tal hipótese, verificada experimentalmente para números de Prandtl próximos à unidade, tem uso largamente difundido nas soluções de problemas de transferência de calor [4, 5]. Em realidade, existe uma forte dependência entre a exatidão do modelo estudado por Reynolds e o número de Prandtl. Um aperfeiçoamento do modelo de Reynolds, levou Jenkins aos resultados apresentados na figura I-3 [4].

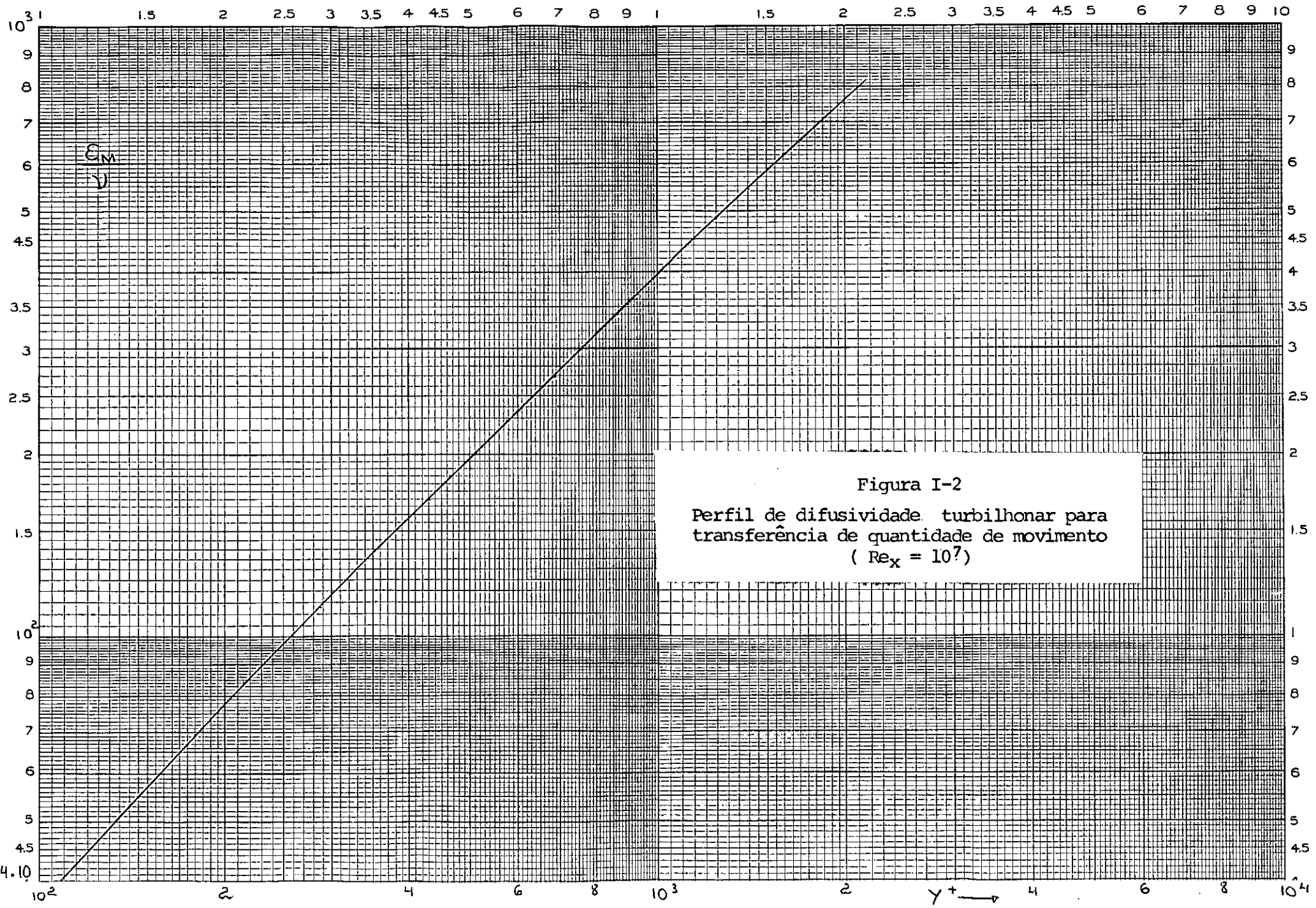


Figura I-2
Perfil de difusividade turbilhonar para
transferência de quantidade de movimento
($Re_x = 10^7$)

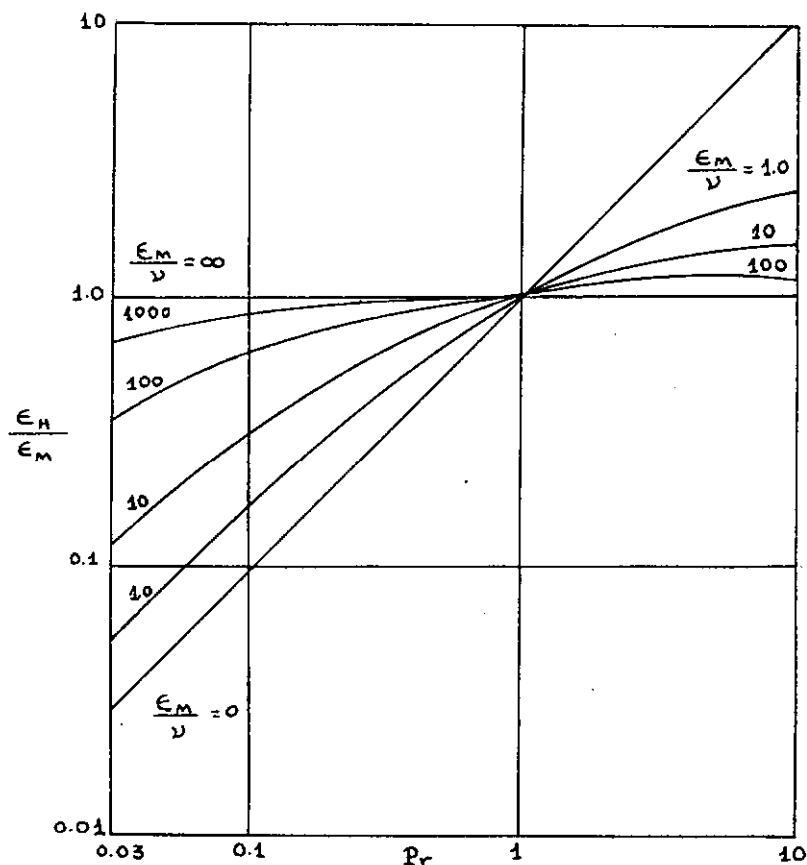


Fig. I.3

Entre os poucos dados experimentais existentes citamos os devidos a Beckwith e Fahien [1] para transferência de calor em tubos cilíndricos.

Por falta de uma relação analítica entre os valores de ϵ_H e ϵ_M , consideraremos

$$\epsilon_H = \epsilon_M$$

o que, segundo Sparrow [8], leva a excelentes previsões de transferência de calor para $0,7 < Pr < 100$.

Convém observar que a suposição adotada $\epsilon_H = \epsilon_M$ não restringe em absoluto a aplicação do método que utilizaremos.

5) - Método da transformação de similaridade

Empregado pela primeira vez por Blasius [3, 6, 7], no estudo da camada limite laminar em torno de uma placa plana, o método da transformação similar consiste essencialmente em uma transformação de coordenadas que reduz a equação (I.2) a uma equação diferencial ordinária. Apresentamos, a seguir, a teoria geral de transformação, apontando posteriormente os casos em que a solução de similaridade se faz possível, para escoamentos laminares.

Com a introdução da função fluxo ψ , verificando a

$$\bar{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\text{I.13a})$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{I.13b})$$

a equação da continuidade resulta automaticamente satisfeita.

Consideraremos as novas variáveis ξ e η definidas por

$$\xi = \int_0^x \frac{u_1(x)}{U_0} dx \quad (\text{I.14a})$$

$$\eta = \left(\frac{1}{2 \nu U_0 \xi} \right)^{\frac{1}{2}} u_1(x) y \quad (\text{I.14b})$$

Escrevendo ψ sob a forma

$$\psi = (2 \nu U_0 \xi)^{\frac{1}{2}} f(\xi, \eta) \quad (\text{I.15})$$

as componentes da velocidade terão como expressão

$$u = u_1(x) \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (\text{I.16a})$$

$$v = -u_1(x) \left(\frac{v}{2 U_o \xi} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ f + 2 \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - (\lambda + 1) \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \right\} \quad (\text{I.16b})$$

A substituição dos termos da equação (I.2) como função das novas variáveis, conduz a:

$$\begin{aligned} \lambda \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] + 2 \xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ = f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(1 + \frac{\epsilon M}{v} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

sendo

$$\lambda = - \xi \frac{d \ln u_1^2(x)}{d \xi} \quad (\text{I.18})$$

Da observação de (I.17) conclui-se que o único termo dependente do escoamento potencial é λ . O valor de λ representa, portanto, a influência da geometria do escoamento.

Definindo-se uma temperatura adimensional por

$$\theta(\xi, \eta) = \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty} \quad (\text{I.19})$$

a equação da camada limite térmica (I.3) se escreverá

$$\begin{aligned}
2 \xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) - f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \\
= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\epsilon_M}{\nu} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)
\end{aligned} \quad (I.20)$$

As condições de contorno (I.5) e (I.6) serão agora escritas:

$$\eta = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \eta} f(\xi, 0) = 0 \quad (I.21a)$$

$$f(\xi, 0) + 2 \xi \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, 0) = 0 \quad (I.21b)$$

$$\theta(\xi, 0) = 1 \quad (I.21c)$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad (I.22a)$$

$$\theta \rightarrow 0 \quad (I.22b)$$

O sistema de equações (I.17) e (I.20) com as condições de contorno (I.21) e (I.22) apresenta tão grande dificuldade que impediu fôse apresentada qualquer solução direta.

5a) - Camada limite laminar

Para os escoamentos laminares $\epsilon_M = \epsilon_H = 0$, as equações (I.17) e (I.20) se escrevem

$$\begin{aligned}
\lambda \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] + 2 \xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
= f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}
\end{aligned} \quad (I.23)$$

$$2\xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) - f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (\text{I.24})$$

A análise de (I.23) e (I.24) permite concluir que, se f e θ forem consideradas unicamente função de η , para as geometrias de escoamento satisfazendo a condição de ser λ constante, estas equações se reduzem a equações diferenciais ordinárias

$$f f'' + f''' = \lambda \left[1 - (f')^2 \right] \quad (\text{I.25})$$

e

$$\theta'' + Pr f \theta' = 0 \quad (\text{I.26})$$

com as condições de contorno

$$\eta = 0 \quad f = 0 \quad (\text{I.27a})$$

$$f' = 0 \quad (\text{I.27b})$$

$$\theta = 1 \quad (\text{I.27c})$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad f' \rightarrow 1 \quad (\text{I.28a})$$

$$\theta \rightarrow 0 \quad (\text{I.28b})$$

Os escoamentos para os quais $\lambda = \text{cte}$, sendo, portanto, possíveis soluções de similaridade, estão representados na figura I-4 [3].

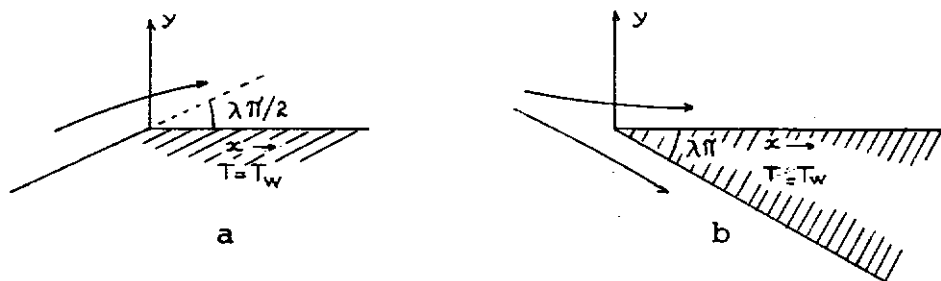


Fig. I.4

Para os escoamentos correspondentes à figura I-4a, soluções satisfazendo às condições de contorno (I.27) e (I.28) são encontradas na faixa $0 < \lambda \leq 0,199$ [3]; ao valor extremo $\lambda = 0,199$ corresponde a camada limite com ponto de separação, caracterizado por $f''(\theta) = 0$, ao longo da superfície $x = 0$. Para valores de λ superiores a 0,199 não existem soluções do tipo camada limite.

À configuração I-4b correspondem soluções, verificando (I.27) e (I.28) para $-1 \leq \lambda \leq 0$.

O caso $\lambda = 0$, placa plana com gradiente de pressão nulo, foi solucionado por Blasius, originando o método de transformação de similaridade.

5b) Camada limite turbulenta

Uma argumentação simples, apresentada por Telles [11] e aqui reproduzida, demonstra a não aplicabilidade do conceito de camada limite similar ao escoamento turbulento.

A expressão da tensão tangencial junto à parede para escoamentos laminares ou turbulentos é

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (I.29)$$

Indicando pelos sub-escritos ℓ e t , regimes laminar e turbulento, respectivamente, e considerado um mesmo escoamento potencial, resulta em virtude de (I.13) e (I.16a)

$$(\tau_W)_\ell = u_1(x) f''_\ell(0) \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{I.30a})$$

$$(\tau_W)_t = u_1(x) f''_t(0) \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{I.30b})$$

supondo que para o escoamento turbulento ainda se verifique $f_t = f_t(\eta)$.

De (I.30) obtém-se

$$\frac{(\tau_W)_\ell}{(\tau_W)_t} = \frac{f''_\ell(0)}{f''_t(0)} = \text{constante} \quad (\text{I.31})$$

A expressão (I.31) implica, portanto, para todo x , em proporcionalidade entre as tensões $(\tau_W)_\ell$ e $(\tau_W)_t$, o que está em franco desacôrdo com os resultados experimentais.

Evidenciada, desta forma, a não redutibilidade de (I.23) a uma equação diferencial ordinária, propõem-se uma solução quase-similar baseada na ordem de grandeza de seus termos.

Suporemos que os termos, envolvendo derivadas com relação a ξ sejam desprezíveis.

As equações assim obtidas, embora a derivadas parciais, só contém derivadas com relação à variável η , o que reduz grandemente as dificuldades de integração. A ordem de grandeza dos termos não considerados poderá ser posteriormente avaliada e correções indicadas se assim se tornar necessário. Feitas estas suposições, as equações a se integrar na presente solução têm a forma

$$\lambda \left[1 - (f')^2 \right] = \left(f + \frac{\epsilon'_M}{v} \right) f'' + \left(1 + \frac{\epsilon_M}{v} \right) f''' \quad (\text{I.32})$$

$$\left(\frac{1}{Pr} + \frac{\epsilon_H}{v} \right) \theta'' = - \left(f + \frac{\epsilon'_H}{v} \right) \theta' \quad (\text{I.33})$$

com as condições de contorno

$$\eta = 0 \quad f = 0 \quad (\text{I.34a})$$

$$f' = 0 \quad (\text{I.34b})$$

$$\theta = 1 \quad (\text{I.34c})$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad f' \rightarrow 1 \quad (\text{I.35a})$$

$$\theta \rightarrow 0 \quad (\text{I.35b})$$

A integração destas equações, utilizando o método Runge-Kutta, foi realizada nos computadores IBM-1130, do Departamento de Cálculo Científico da COPPE e da Escola de Engenharia da UFMG. Detalhes do método numérico são apresentados no Apêndice .

II - APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

1) - Tensão de cisalhamento junto à parede

A tensão tangencial τ_W é calculada com o emprego da lei da viscosidade de Newton, pela expressão:

$$\tau_W = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{II.1})$$

Considerada a definição (I.14b) da variável de similaridade

η , teremos:

$$\tau_W = \mu u_1^2 f''(0) \left(\frac{1}{2 \nu U_o \xi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.2})$$

Definindo Re_ξ pela expressão

$$Re_\xi = \frac{U_o \xi}{\nu} \quad (\text{II.3})$$

e considerada a definição do coeficiente de atrito

$$C_f = \frac{\tau_W}{\frac{1}{2} \rho U_o^2} \quad (\text{II.4})$$

resulta:

$$C_f = \left(\frac{u_1}{U_o} \right)^2 \sqrt{\frac{2}{Re_\xi}} f''(0) \quad (\text{II.5})$$

No caso de placa plana, $u_1(x) = U_o$ e $\xi = x$, e

$$C_f(x) = \sqrt{\frac{2}{Re_x}} f''(0) \quad (\text{II.6})$$

Para o regime laminar $f''(0)$ é constante e igual a 0.322 enquanto para o regime turbulento verifica-se ser o valor de $f''(0)$ função de Re_ξ .

Adotada para ϵ^+ a expressão proposta por Spalding [9], sendo $A = 0,1108$ e $B = 0,4$, foram determinados os valores de $C_f(x)$ para a placa plana.

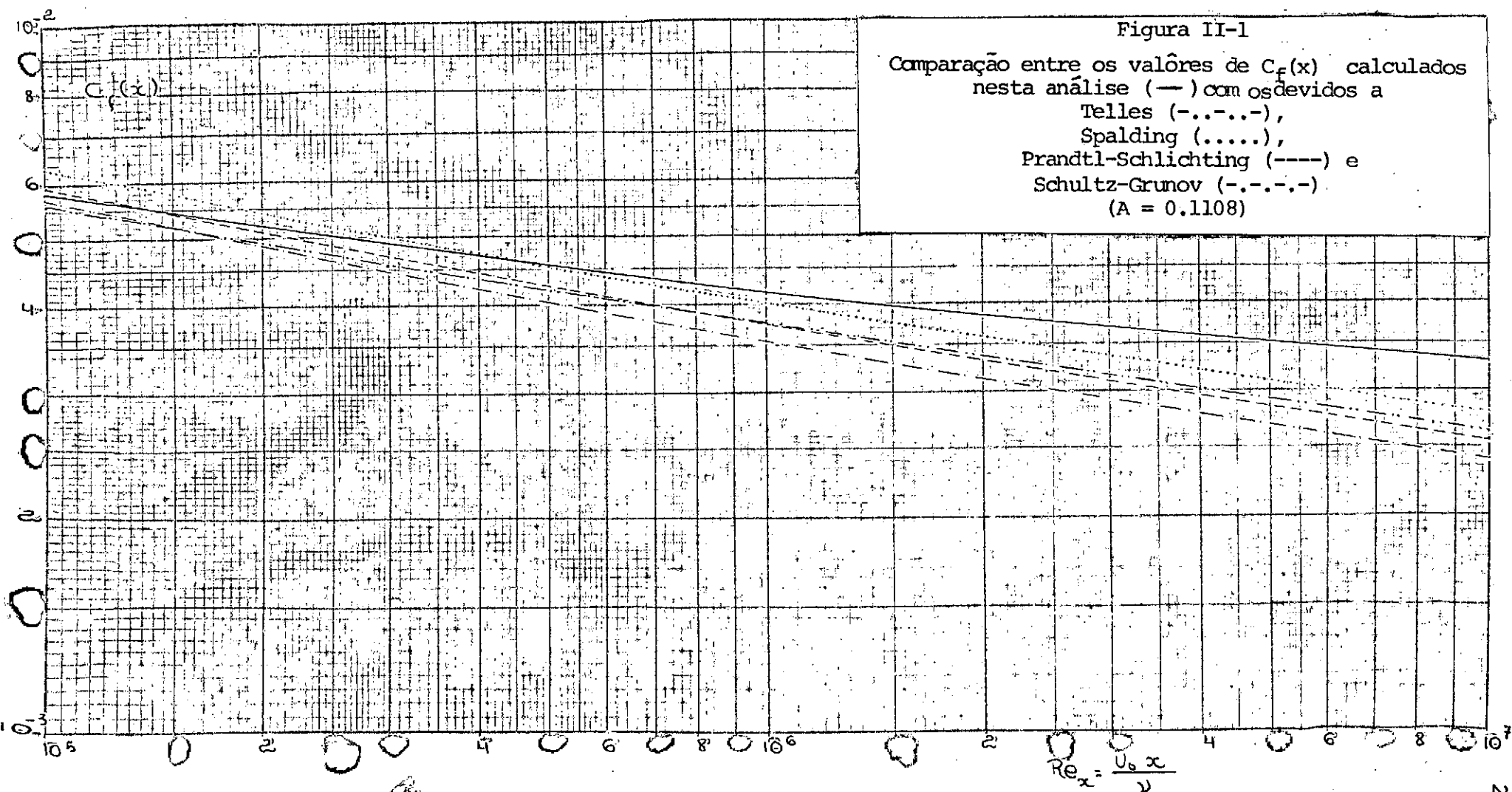
A não disponibilidade de dados experimentais forçou-nos a comparar os resultados calculados unicamente com os de outras análises teóricas encontradas na literatura.

Na figura II.1 estão plotados os resultados calculados neste trabalho e os indicados por Telles [11], Spalding [11], Prandtl-Schlichting [7] e Schultz-Grunov [7].

A análise de Telles [11] consiste na aplicação do método de transformação similar, tendo sido utilizada para a difusividade turbilhonar o perfil de Gill e Scher [11], enquanto a de Spalding [5] é feita por meio da integração da equação da camada limite térmica, sob a forma deduzida por von Mises, considerada a expressão do mesmo autor para a "lei da parede".

Os valores calculados de $C_f(x)$ correspondem a Re_x igual a 10^5 , 3×10^5 , 10^6 , 3×10^6 e 10^7 .

Conforme pode ser verificado, existe uma tendência à determinação de valores para $C_f(x)$ superiores aos dos trabalhos anteriores,



a discrepância tornando-se tanto mais acentuada quanto mais elevados os valores de Re_x . Físicamente tal fato indica que os efeitos da turbulência foram superestimados nos cálculos efetuados. Uma pesquisa sobre a influência do coeficiente A do perfil de Spalding sobre os valores de $C_f(x)$ levou aos resultados apresentados na Tabela II.1.

A	Re_x	$f''(0)$	$C_f(x)$	$C_f(x) - \text{Spalding}$
0.1108	10^5	1.295	5.80×10^{-3}	6.20×10^{-3}
	10^7	7.390	3.30×10^{-3}	2.85×10^{-3}
0.1	10^5	1.270	5.68×10^{-3}	-
	10^7	7.240	3.24×10^{-3}	-
0.08	10^5	1.218	5.45×10^{-3}	-
	10^7	6.970	3.12×10^{-3}	-
0.06	10^5	1.155	5.15×10^{-3}	-
	10^7	6.630	2.96×10^{-3}	-

Tabela II.1

Considerando que uma alteração no perfil de difusividade turbilhonar afeta o campo de velocidades, realizamos, simultaneamente, uma comparação entre os perfis adimensionais $u^+ = u^+(y^+)$ resultantes, com os calculados a partir da expressão de Prandtl para a "lei da parede":

Dêste estudo conjunto da influência de A sobre $C_f(x)$ e $u^+ = u^+(y^+)$, concluímos ser indicada a redução no valor de A para 0.1.

Novos cálculos permitiram determinar a variação de $C_f(x)$ com Re_x indicada na figura II.2.

Uma segunda conclusão, apresentada a seguir, mostra ser pouco indicada a utilização da expressão de ϵ^+ devida a Spalding.

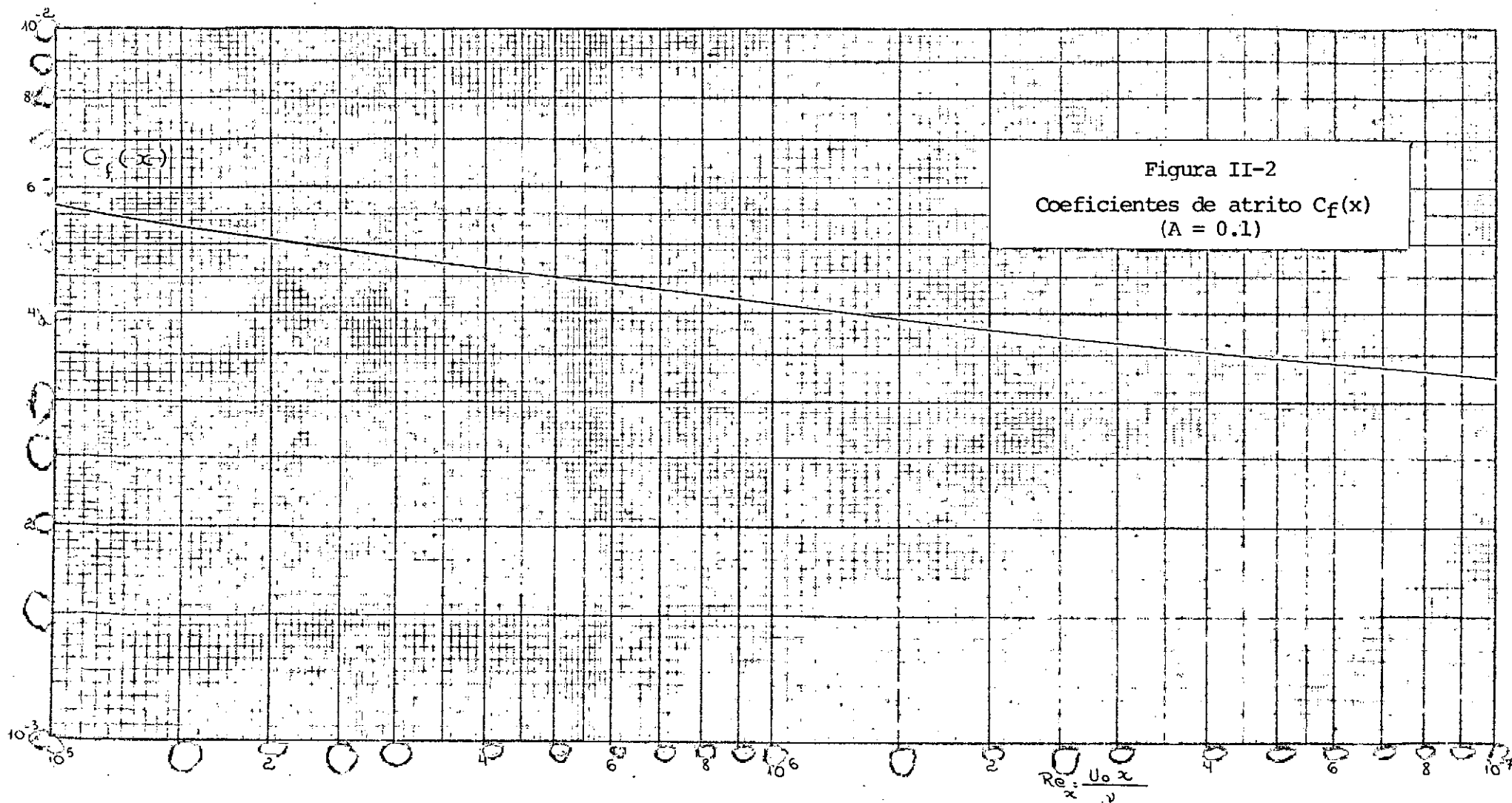
Conforme mencionado no capítulo anterior, para escoamentos laminares com gradiente de pressão positivo, a equação (I.25) possui soluções satisfazendo as condições de contorno (I.27) e (I.28) para $0 < \lambda \leq 0.199$. Para $\lambda = 0.199$ ocorre o fenômeno da separação, caracterizado por $f''(0) = 0$.

Segundo verificações experimentais [7] a turbulência atua como um agente de estabilização, o que leva a prever que a separação em escoamento turbulento se verifique para um valor de λ superior a 0.199.

Os valores obtidos para $f''(0)$, para $Re_x = 10^{-7}$ e $A = 0,1108$, indicados na tabela II.2, implicam em uma influência desprezível da geometria do escoamento, o que é fisicamente incorreto.

É também, praticamente, pouco provável escoamentos do tipo de camada limite correspondendo a altos valores de λ .

A análise quantitativa mostra que, para $Re_x = 10^6$, o aumento de λ de 0. para 0.1 ocasiona uma redução em $f''(0)$ de apenas 1,34%, enquanto uma variação de A dez vezes menor (0.0108) é responsável por uma redução de 2,05% naquele valor.



λ	$f''(0)$
0.0	7.390
0.3	7.294
0.4	7.265
0.5	7.235
0.6	7.208
0.7	7.179
0.8	7.153
0.9	7.127
1.0	7.100

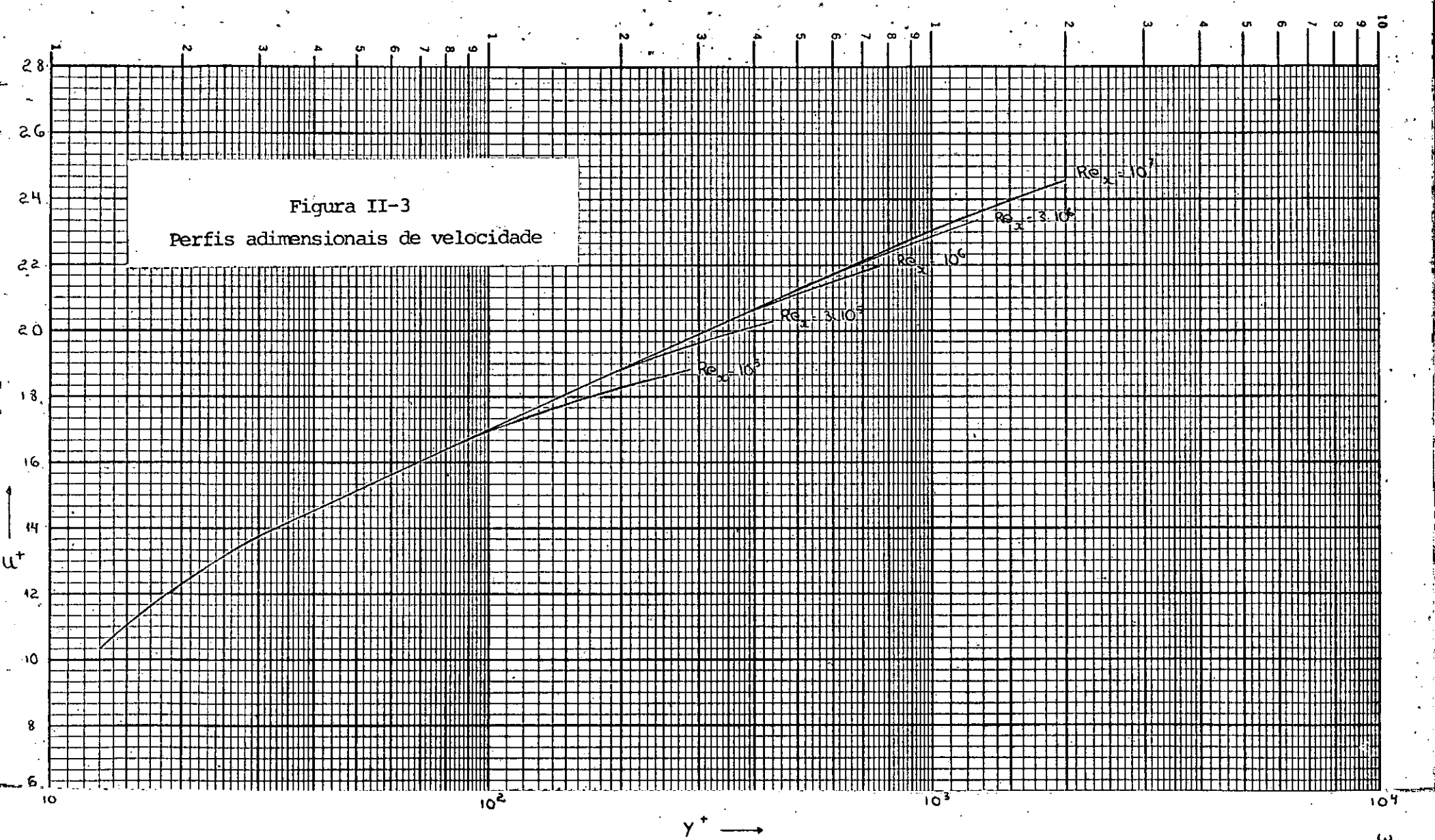
Tabela II.2

Novamente a adoção da expressão (I.12) para ϵ^+ , leva a um efeito da turbulência exagerado, tornando desprezível a influência da variação de λ .

Não conhecendo dados experimentais para $\lambda \neq 0$, restringimos nossa análise ao caso $\lambda = 0$, adotando para A o valor 0.1.

2) - Perfis de velocidade

Os perfis adimensionais de velocidade são determinados sob forma paramétrica, utilizadas as definições de u^+ (I.7a), y^+ (I.7b), Re_ξ (II.3), η (I.14b), e as expressões deduzidas para τ_w (II.2) e u (I.16a).



$$u^+ = u \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} = (2 \operatorname{Re}_\xi)^{\frac{1}{4}} \left[f''(0) \right]^{-\frac{1}{2}} f' \quad (\text{II.7a})$$

$$y^+ = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = (2 \operatorname{Re}_\xi)^{\frac{1}{4}} \left[f''(0) \right]^{\frac{1}{2}} \eta \quad (\text{II.7b})$$

No caso de $\lambda = 0$, podemos escrever:

$$\bar{u}^+ = \sqrt{\frac{2}{C_f(x)}} f' \quad (\text{II.8a})$$

$$y^+ = \sqrt{C_f(x) \operatorname{Re}_x} \eta \quad (\text{II.8b})$$

Na figura II.3 estão plotados os perfis de velocidade calculados para os valores de Re_x indicados anteriormente.

Conseguimos obter, com o ajustamento da constante A de Spalding, uma ótima concordância entre nossos cálculos e os valores indicados pela expressão da "lei da parede" de Prandtl-Taylor, que, conforme indicado na literatura, fornece resultados muito próximos dos dados experimentais.

A análise da figura II.3 mostra a não universalidade dos perfis adimensionais $u^+ = u^+(y^+)$, o que, analiticamente, é facilmente verificado por intermédio de (II.8a).

3) - Resultados referentes à transferência de calor

O fluxo focal de calor é calculado a partir da lei de Fourier

$$\dot{q}_W = -K \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{II.9})$$

Utilizando as definições de θ (I.19) e η (I.14b), obtemos

$$\dot{q}_W = -K (T_W - T_\infty) \left(\frac{1}{2 v U_o \xi} \right)^{\frac{1}{2}} u_1(x) \theta'(0) \quad (\text{II.10})$$

No caso de $\lambda = 0$, sendo $u_1(x) = U_o$ e $\xi = x$, teremos

$$\dot{q}_W = -K (T_W - T_\infty) \left(\frac{U_o}{2 v x} \right)^{\frac{1}{2}} \theta'(0) \quad (\text{II.11})$$

O valor de $\theta'(0)$ é, para escoamentos turbulentos, uma função de Re_x e Pr .

É de uso comum na literatura a apresentação de dados relativos à transferência de calor, por meio dos adimensionais $Nu(x)$ e $St(x)$, números de Nusselt e Stanton, respectivamente, definidos por

$$Nu(x) = \frac{hx}{k} = \frac{\dot{q}_W x}{K (T_W - T_\infty)} \quad (\text{II.12})$$

$$St(x) = \frac{h}{C_p \rho U_o} = \frac{\dot{q}_W}{C_p \rho U_o (T_W - T_\infty)} \quad (\text{II.13})$$

Considerando (II.11), podemos escrever

$$Nu(x) = \sqrt{\frac{Re_x}{2}} \theta'(0) \quad (\text{II.14})$$

$$St(x) = \frac{\theta'(0)}{Pr \sqrt{2 Re_x}} \quad (\text{II.15})$$

As curvas apresentadas na figura II-4 representam a varia

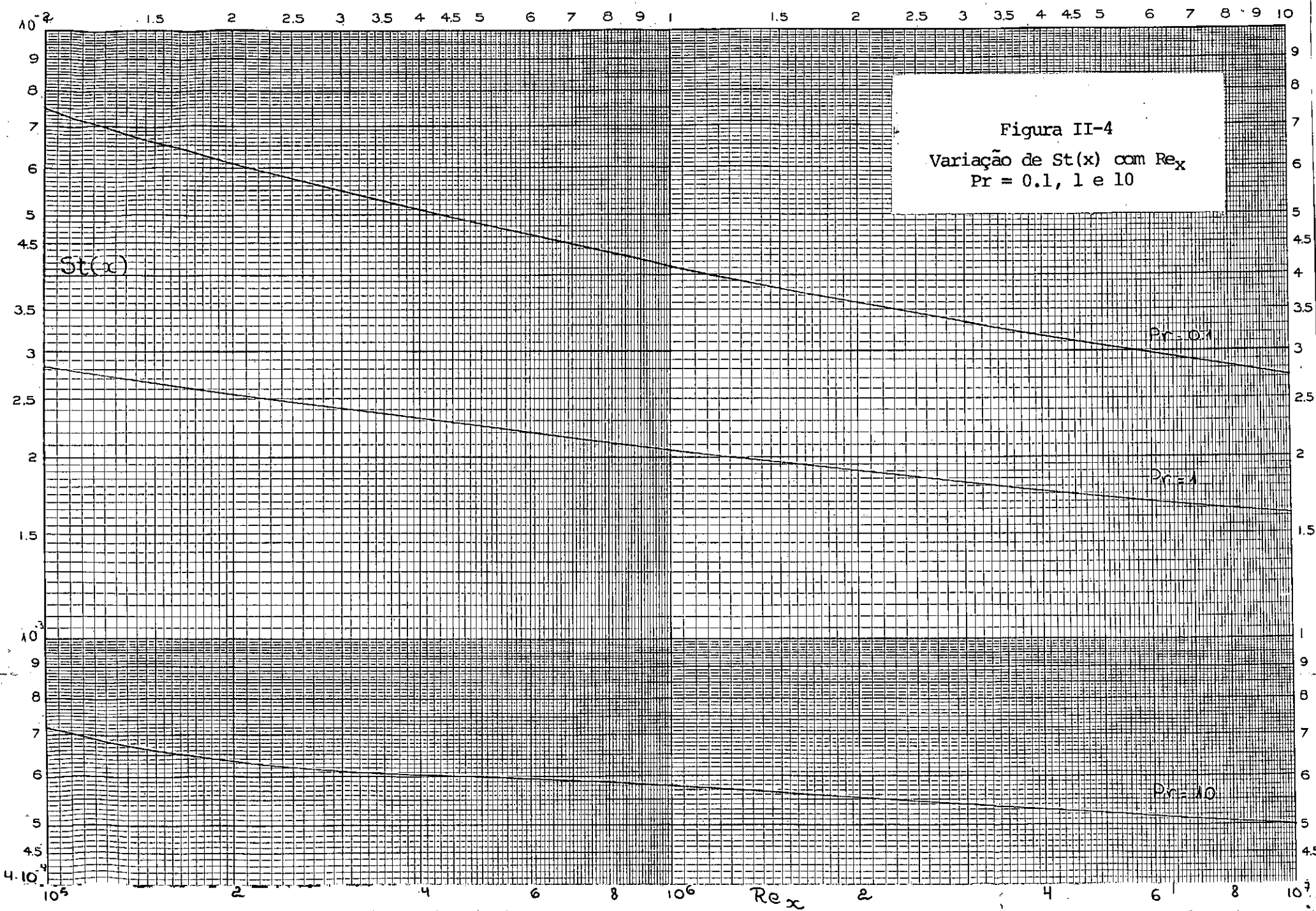


Figura II-4
Variação de $St(x)$ com Re_x
 $Pr = 0.1, 1$ e 10

ção de $St(x)$ com Re_x , tendo como parâmetro o número de Prandtl.

Os valores calculados de $St(x)$ correspondem aos Re_x indicados e aos números de Prandtl 0.1, 1 e 10.

A mesma dificuldade apontada anteriormente para a obtenção de dados experimentais de $C_f(x)$, repete-se para $St(x)$.

Considerando, todavia, que o produto $St.Pr^{2/3}$ tem variação menos pronunciada, os valores calculados nesta análise para $Pr = 1$, estão plotados na figura II-5, juntamente com as medições de Reynolds [11] para o ar. É interessante observarmos que para $Pr = 1$, é verificada a expressão

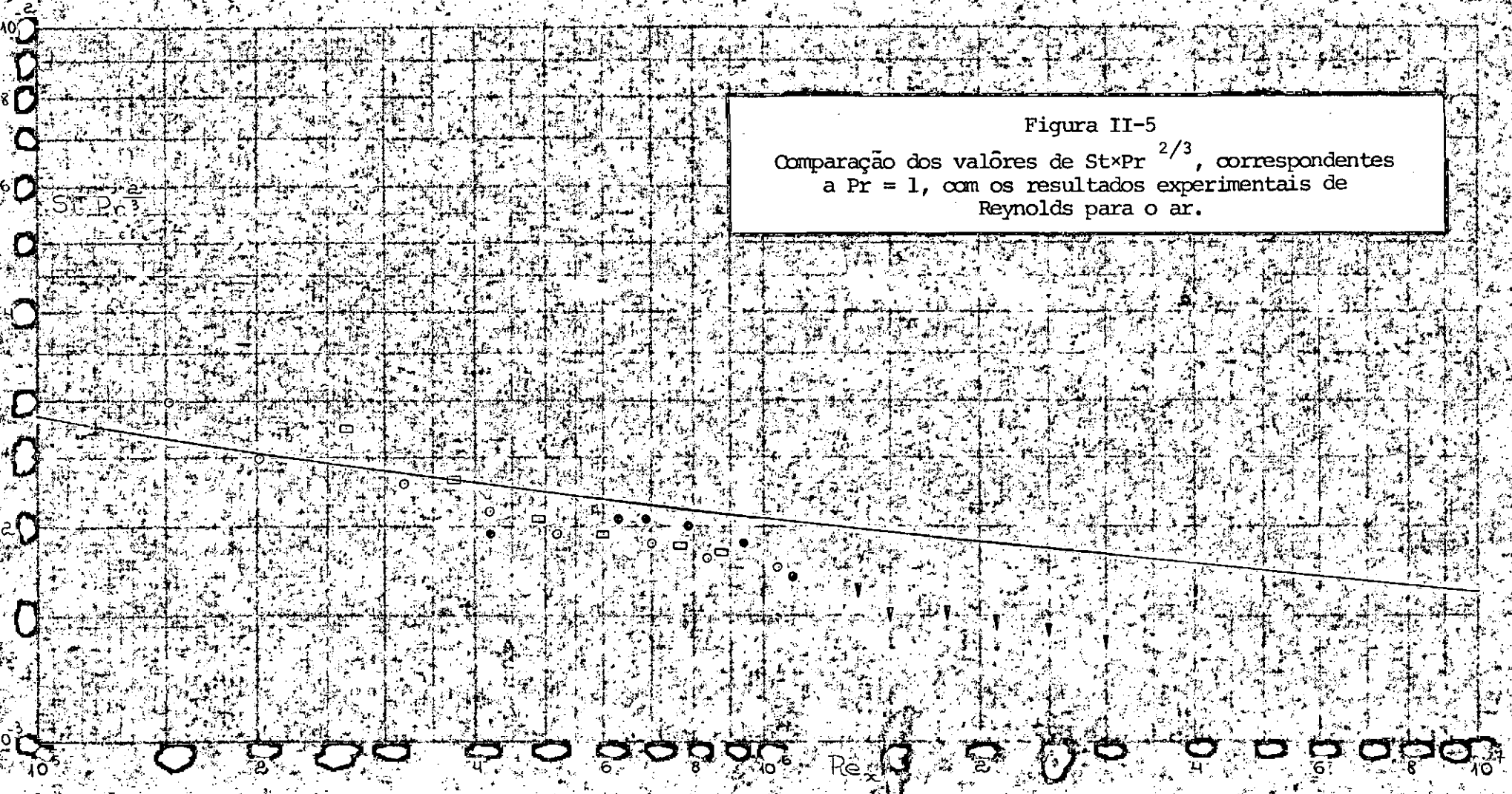
$$St(x) = \frac{1}{2} C_f(x) \quad (II.16)$$

que constitui uma conclusão básica, na teoria elementar da transferência de calor, denominada "Analogia de Reynolds".

4) - Perfis de temperatura

Os perfis de temperatura obtidos diretamente da integração do sistema de equações (I.32) e (I.33) são representados nas figuras II-6, II-7 e II-8, para os números de Prandtl 0.1, 1 e 10.

Conforme pode ser notado é grande a influência de números de Prandtl sobre a forma das famílias de soluções determinadas. Para baixos valores de Pr , a camada limite térmica é mais espessa que a camada limite hidrodinâmica, os perfis de temperatura são mais suaves e alongados



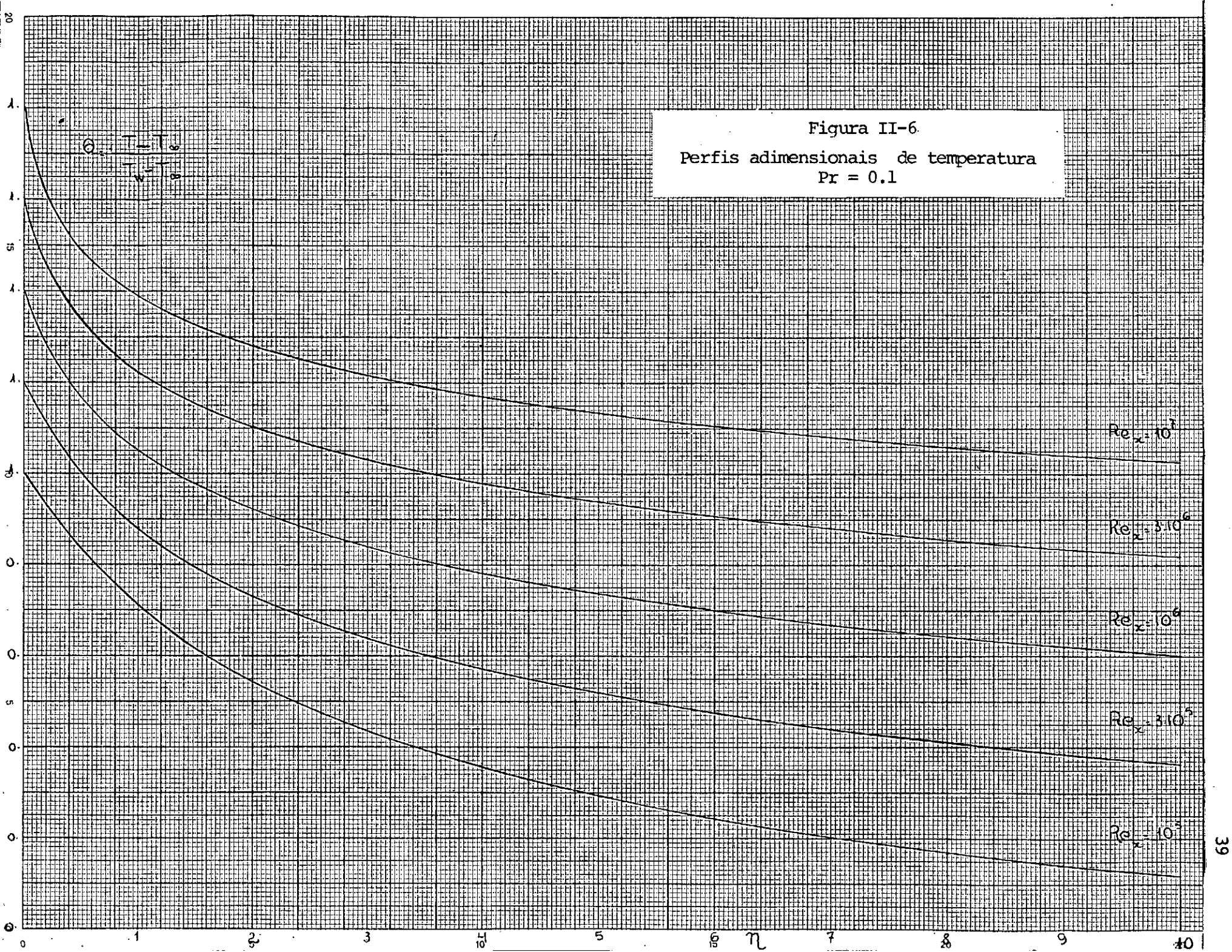


Figura II-7
Perfis adimensionais de temperatura
 $Pr = 1$

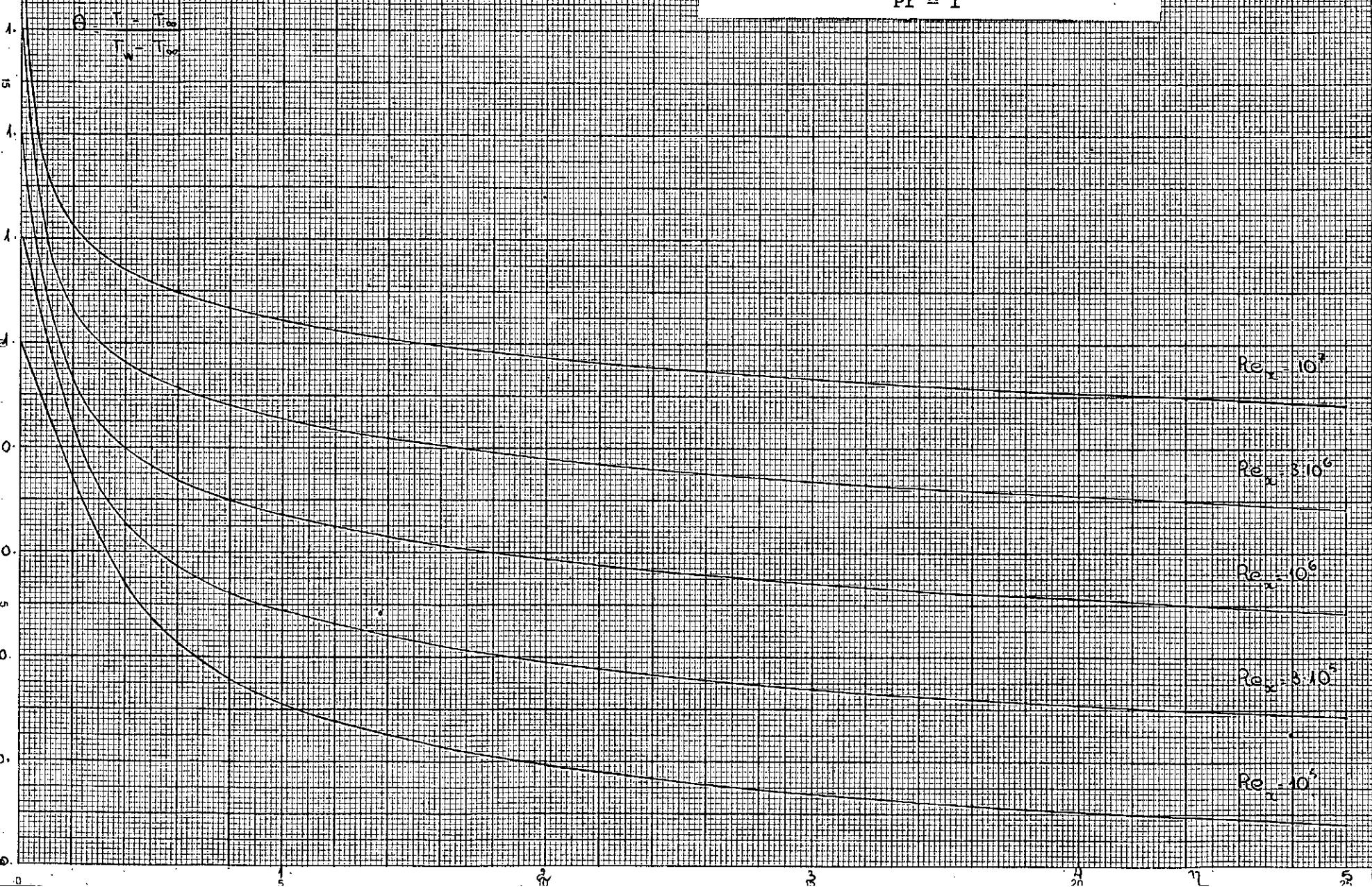
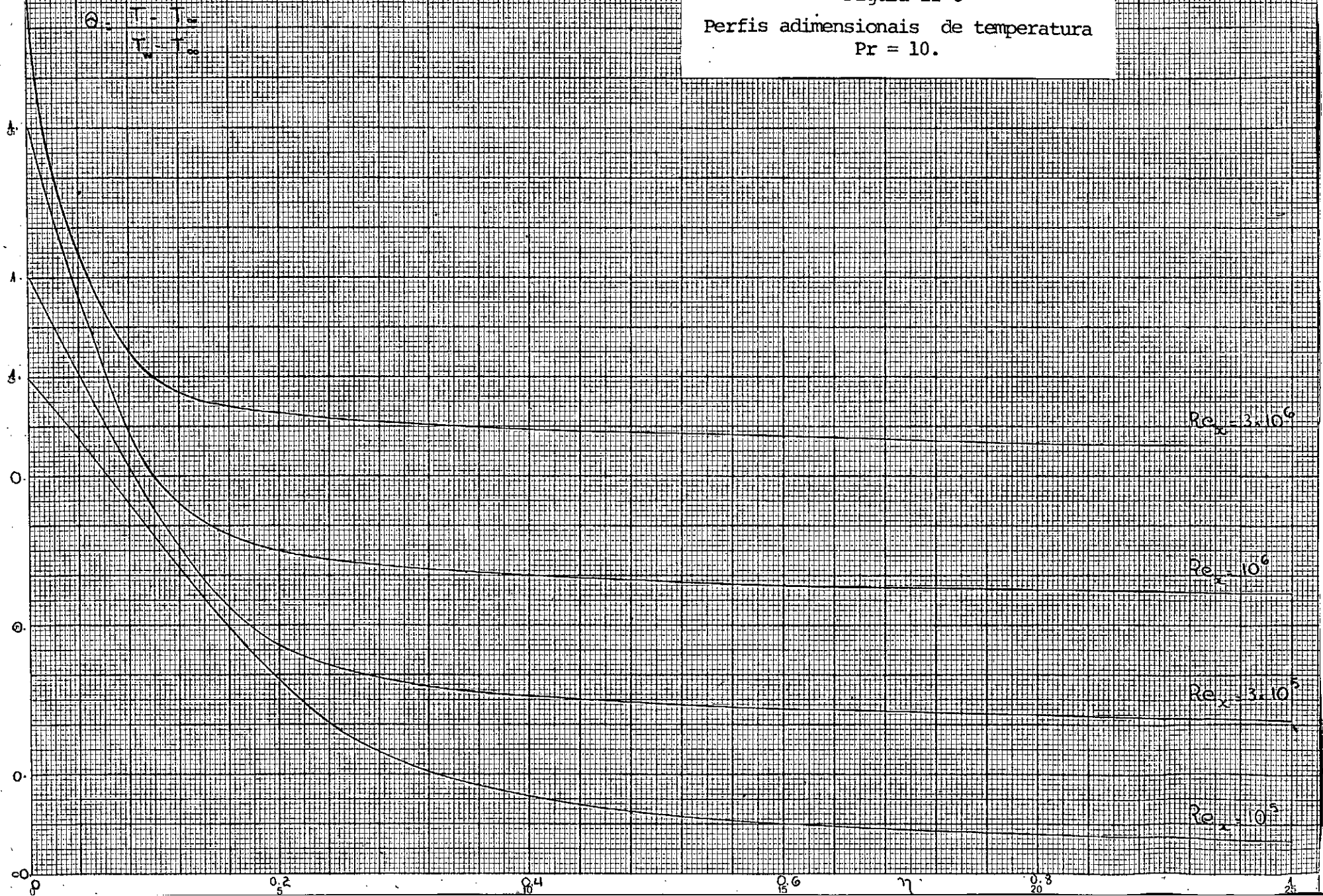


Figura II-8
 Perfis adimensionais de temperatura
 $Pr = 10$.



que os correspondentes a Pr elevado.

Para $Pr = 1$, é verificada a relação entre os perfis de velocidade e temperatura que possibilita a analogia de Reynolds:

$$\theta = 1 - f' \quad (II.17)$$

As camadas limite térmica e hidrodinâmica têm a mesma espessura.

A $Pr = 10$, correspondem perfis representando uma transição abrupta da temperatura; a camada limite térmica torna-se mais fina que a hidrodinâmica.

5) Resumo dos resultados numéricos obtidos

A tabela II.3, apresenta os principais resultados obtidos.

			Pr = 0.1		Pr = 1		Pr = 10	
Re_x	$f''(0)$	$C_f(x) \cdot 10^3$	$-\theta'(0) \cdot 10$	$St(x) \cdot 10^{-3}$	$-\theta'(0)$	$St(x) \cdot 10^{-3}$	$-\theta'(0)$	$St(x) \cdot 10^{-4}$
10^5	1.270	5.68	3.346	7.48	1.269	2.84	3.217	7.19
$3 \cdot 10^5$	1.861	4.80	4.257	5.50	1.860	2.41	4.739	6.12
10^6	2.919	4.13	5.841	4.13	2.918	2.06	8.226	5.82
$3 \cdot 10^6$	4.477	3.65	8.155	3.33	4.476	1.83	13.169	5.38
10^7	7.241	3.24	12.228	2.73	7.241	1.62	22.225	4.97

Tabela II.3

III - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A extensão ao escoamento turbulento, do método da transformação de similaridade, mostrou sua grande utilidade na análise da placa plana com gradiente de pressão nulo.

Conforme foi verificado em uma análise quantitativa sucinta, a adoção de novos valores para o coeficiente A , da expressão de Spalding para a difusividade turbilhonar, conduz à determinação de perfis adimensionais de velocidade $u^+ = u^+(y^+)$ e de coeficientes de atrito $C_f(x)$ verificando com boa aproximação aos dados experimentais.

A teoria desenvolvida foi, entretanto, incapaz de permitir a determinação da separação nos escoamentos com gradiente de pressão positivo.

Uma análise da estrutura matemática e física do desenvolvimento apresentado, mostra que este fato pode ser proveniente de duas causas.

É inicialmente questionável a validade da suposição de serem desprezíveis os termos contendo derivadas com relação a ξ na equação transformada da camada limite hidrodinâmica (I.17).

Para o caso de gradiente de pressão nulo, também estudado por Telles [11], esta hipótese é realmente verificada. Sua extensão a uma primeira análise quantitativa dos casos de gradiente de pressão não

nulo nos parece inteiramente justificável. Uma verificação posterior permitiria a avaliação do erro cometido.

Muito mais comprometedora para a aplicação do método foi, a nosso ver, a utilização do perfil da difusividade de Spalding.

Convem salientar, novamente, que a expressão (I.12) para ϵ^+ , contém em sua dedução a condição $\tau \approx \tau_w$, que, conforme comentamos na introdução, é completamente falha quanto a uma justificativa de natureza física.

Foi ainda verificada uma influência não justificável da variação de A sobre o valor de $f''(0)$, quando comparada à influência da geometria do escoamento.

Do anterior, podemos concluir que a aplicação do método da transformação de similaridade pode ser bastante comprometida pela especificação de um perfil de difusividade não adequado, mormente se considerarmos que a expressão especificada de ϵ^+ , é considerada como empírica e constitui um fundamento da teoria apresentada.

A fim de que se possa avaliar, efetivamente, o alcance do método da transformação de similaridade à análise de problemas de escoamento turbulento, sugerimos que um estudo teórico-experimental seja realizado, visando a determinação de valores ótimos para os coeficientes A e B do perfil de Spalding. Estes coeficientes, segundo o artigo original de Spalding, estão sujeitos a confirmação [9].

Conhecidos os novos valores de A e B a aplicação do método aos problemas de gradiente de pressão não nulo apresenta-se como pesquisa imediata, podendo ser seguido pelo estudo da placa plana com injeção e sucção, e o da convecção natural que constituiu tópico não completamente resolvido na análise de Telles [11].

B I B L I O G R A F I A

- 1 - Beckwith, W.F. e Fahien, R.W., "Determination of Turbulent Thermal Diffusivity for Flow of Liquid in Pipes", Iowa University - Iowa
- 2 - Eckert, E.R.G. e Drake, R.M., "Heat and Mass Transfer", McGraw Hill, 1959
- 3 - Evans, H.L., "Laminar Boundary-Layer Theory", Addison-Wesley, 1968
- 4 - Kays, W.M., "Convective Heat and Mass Transfer", McGraw Hill, 1966
- 5 - Keslin, J. e Richardson, P.D., "Heat Transfer across Turbulent Incompressible Boundary Layers", Int. Journal Heat Mass Transfer, 6, 147 - 1963
- 6 - McKayn, D., "New Methods in Laminar Boundary Layer Theory", Pergamon Press - 1961
- 7 - Schlichting, H., "Boundary Layer Theory", McGraw Hill, 1960
- 8 - Siegel, R. e Sparrow, E.M., "Turbulent Flow in a Circular Tube with Arbitrary Internal Heat Sources and Wall Heat Transfer", J. of Heat Transfer 81, 280 - 1959
- 9 - Spalding, D.B., "A single Formula for the Law of the Wall", J. of Applied Mechanics, 28, 455 - 1961
- 10 - Sparrow, E.M. e Siegel, R., "Unsteady Turbulent Heat Transfer in Tubes" J. of Heat Transfer, 170 - 1960

- 11 - Telles,A.S., "Application of the Similarity Method to some Cases of Turbulent Boundary Layer Flow", University of Houston, Texas - 1963
- 12 - Telles,A.S. e Dukler,A.E., "Similarity Type Solutions of the Turbulent Boundary Layer Equations for Momentum and Energy", University of Houston, Texas - 1969

A P Ê N D I C E

Métodos numéricos

Em virtude das hipóteses estabelecidas no desenvolvimento do primeiro capítulo, vimos que as equações fundamentais (I.2) e (I.3) podem ser escritas

$$f''' = \frac{-\lambda \left(1 - (f')^2\right) - \left(f + \frac{\epsilon_M'}{v}\right) f''}{1 + \frac{\epsilon_M}{v}} \quad (\text{A.1})$$

$$\theta'' = \frac{-\left(f + \frac{\epsilon_H'}{v}\right) \theta'}{\frac{1}{Pr} + \frac{\epsilon_H}{v}} \quad (\text{A.2})$$

com as condições de contorno

$$\eta = 0 \quad f = 0 \quad (\text{A.3a})$$

$$f' = 0 \quad (\text{A.3b})$$

$$\theta = 1 \quad (\text{A.3c})$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad f' \rightarrow 1 \quad (\text{A.4a})$$

$$\theta \rightarrow 0 \quad (\text{A.4b})$$

O sistema (A.1)-(A.2) pode, utilizando um artifício simples, ser escrito sob a forma de um novo sistema de cinco equações diferenciais não lineares de primeira ordem; para tanto, façamos

$$f = f_1 \quad (\text{A.5a})$$

$$f' = f_2 \quad (\text{A.5b})$$

$$f'' = f_3 \quad (\text{A.5c})$$

$$\theta = f_4 \quad (\text{A.5d})$$

$$\theta' = f_5 \quad (\text{A.5e})$$

Obtemos, assim, o sistema

$$\frac{df_1}{d\eta} = f_2 \quad (\text{A.6a})$$

$$\frac{df_2}{d\eta} = f_3 \quad (\text{A.6b})$$

$$\frac{df_3}{d\eta} = \frac{-\lambda (1 - f_2^2) - f_3 (f_1 + \frac{\epsilon'_M}{v})}{1 + \frac{\epsilon_M}{v}} \quad (\text{A.6c})$$

$$\frac{df_4}{d\eta} = f_5 \quad (\text{A.6d})$$

$$\frac{df_5}{d\eta} = \frac{-(f_1 + \frac{\epsilon'_H}{v}) f_5}{\frac{1}{Pr} + \frac{\epsilon_H}{v}} \quad (\text{A.6e})$$

e as condições de contorno

$$\eta = 0 \quad f_1 = 0 \quad (\text{A.7a})$$

$$f_2 = 0 \quad (\text{A.7b})$$

$$f_4 = 1 \quad (\text{A.7c})$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad f_2 \rightarrow 1 \quad (\text{A.8a})$$

$$f_4 \rightarrow 0 \quad (\text{A.8b})$$

Nestas equações a expressão de $\epsilon_H = \epsilon_M$, dada por (I.11) e (II.7a), é

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_M}{v} = \frac{\epsilon_H}{v} = AB \left\{ \exp \left[2^{\frac{1}{4}} B f_3^{-\frac{1}{2}} (0) \operatorname{Re}_{\xi}^{\frac{1}{4}} f_2 \right] - \right. \\ \left. - 1 - 2^{\frac{1}{4}} B f_3^{-\frac{1}{2}} (0) \operatorname{Re}_{\xi}^{\frac{1}{4}} f_2 - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{2}}{2} B^2 f_3^{-1} (0) \operatorname{Re}_{\xi}^{\frac{1}{2}} f_2^2 - \frac{3}{6} B^3 f_3^{-\frac{3}{2}} (0) \operatorname{Re}_{\xi}^{\frac{3}{4}} f_2^3 \right\} \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

Como resultado da suposição de propriedades físicas constantes, as equações (A.6a), (A.6b) e (A.6c) constituem um sistema que pode ser resolvido independentemente; permitindo contornar a necessidade de se arbitrarem simultaneamente $f''(0)$ e $\theta'(0)$, valores necessários à aplicação de um método de integração numérico.

Para a solução deste sistema parcial, que equivale ao estudo hidrodinâmico do escoamento, utilizamos o método de Runge Kutta.

O problema de condições de contorno consiste então na de-

terminação de um valor de $f''(0)$ que satisfaça à condição (A.8a), exigindo que f' tenda assintoticamente para a unidade.

Feita uma estimativa de $f''(0)$ a aplicação do método de Runge Kutta conduz a um valor assintótico de f' . Se o valor obtido é $f'(\infty) = 1$ a estimativa de $f''(0)$ é correta; caso contrário, uma correção em $f''(0)$ é feita e o processamento repetido.

Para a integração numérica no computador IBM-1130 foi utilizada a subrotina RKES, segundo programa anexo em linguagem Fortran.

Determinada a condição de contorno $f''(0) = f_3(0)$, procedimento análogo é utilizado para a integração do sistema completo (A.6), sendo, neste caso, necessário estimar $\theta'(0)$.

A programação para computador empregada sofre, neste caso, algumas alterações motivadas pela variação do número de Prandtl.

O programa anexo foi elaborado para $Pr = 0.1$.

PAGE 1

// JOB T

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0008	0008	0000

// FOR

*ONE WORD INTEGERS

*LIST SOURCE PROGRAM

SUBROUTINE FCT(X,F,DER)

DIMENSION F(3),DER(3)

COMMON RE,F30,XL,A,B,YMAIS,UMAIS

C TRANSFERENCIA DE CALOR EM ESCOAMENTO TURBULENTO

C JOSE AUGUSTO FERREIRA DE GOUVEA

RE2=2.*RE

YMAIS=RE2**0.25*F30**0.5*X

UMAIS=RE2**0.25*F(2)*F30**(-0.5)

XN1=XL*(1.-F(2)**2.)-F(1)*F(3)

XN2=RE2**0.25*B*F(3)*F30**(-0.5)*EXP(B*UMAIS)

XN3=RE2**0.25*B*F(3)*F30**(-0.5)

XN4=RE2**0.5*B**2.*F(2)*F(3)/F30

XN5=0.5*RE2**(.3/.4.)*B**3.*F(2)**2.*F(3)*F30**(-1.5)

XN=XN1-A*B*F(3)*(XN2-XN3-XN4-XN5)

BM=B*UMAIS

XD=1.+A*B*(EXP(BM)-1.-BM-0.5*BM**2.-BM**3./6.)

C SISTEMA DE EQUACOES (A-6)

C CAMADA LIMITE HIDRODINAMICA

DER(1)=F(2)

DER(2)=F(3)

DER(3)=XN/XD

RETURN

END

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR FCT

COMMON	14	VARIABLES	30	PROGRAM	356
--------	----	-----------	----	---------	-----

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA FCT

CART ID 0008 DB ADDR 1CBD DB CNT 001C

// FOR

*ONE WORD INTEGERS

*LIST SOURCE PROGRAM

SUBROUTINE OUT(X,F,DER,IHLF,NDIM,P)

PAGE 2

```

      DIMENSION F(3),DER(3),P(5)
      COMMON RE,F30,XL,A,B,YMAIS,UMAIS
      CALLDATSW(1,KK)
      GOTO(4,9),KK
      9 IF(ABS(X-P(2))-0.05)50,50,30
C NOVA ESTIMATIVA DE F30
      50 FC=F30/F(2)
      WRITE(3,7)F(2),F(3),RE,XL,FC
      7 FORMAT(2F10.5,F20.2,F7.4,F15.5)
      READ(6,8)F30
      8 FORMAT(F10.5)
      30 RETURN
      4 JX=5*(X+0.0015)
      Z=5.*X
      IF(ABS(JX-Z)-0.060)20,20,30
      20 WRITE(3,5)X,F(1),F(2),F(3),YMAIS,UMAIS
      5 FORMAT(6F15.5)
      GOTO9
      END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR OUT
COMMON 14 VARIABLES 14 PROGRAM 162

END OF COMPILATION

// DJP

```

*STORE      WS  UA  OUT
CART ID 0008  DB ADDR 1CD9  DB CNT  000C

```

// FOR

```

*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
*IOCS(CARD,TYPEWRITER,KEYBOARD,1132PRINTER)
      EXTERNAL FCT,OUT
      DIMENSION P(5),F(3),AUX(8,3),DER(3)
      COMMON RE,F30,XL,A,B,YMAIS,UMAIS
      5 READ(2,6)RE,F30,XL,A,B
      6 FORMAT(F12.2,4F7.4)
      IF(RE)7,7,25
      25 P(1)=0.
      P(2)=12.
      P(3)=0.0500003
      P(4)=0.00001
      P(5)=0.
      F(1)=0.

```

PAGE 3

```
F(2)=0.  
F(3)=F30  
NDIM=3  
DER(1)=0.3  
DER(2)=0.3  
DER(3)=0.4  
CALL RKGS(P,F,DER,NDIM,IHLF,FCT,OUT,AUX)  
CALL DATSW(2,NN)  
GOTO(25,5),NN  
7 CALL EXIT  
END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR			
COMMON	14	VARIABLES	78
		PROGRAM	152

END OF COMPILATION

// XEQ

PAGE 1

// JOE T

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0008	0008	0000

// FOR

*ONE WORD INTEGERS

*LIST SOURCE PROGRAM

C TRANSFERENCIA DE CALOR EM ESCOAMENTO TURBULENTO

C JOSE AUGUSTO FERREIRA DE GOUVEA

SUBROUTINE FCT(X,F,DER)

DIMENSION F(5),DER(5)

COMMON RE,F30,XL,A,B,PR,F50

RE2=2.*RE

UMAI5=RE2**0.25*F(2)*F30**(-0.5)

XN1=XL*(1.-F(2)**2.)*F(1)*F(3)

XN2=RE2**0.25*B*F(3)*F30**(-0.5)*EXP(B*UMAI5)

XN3=RE2**0.25*B*F(3)*F30**(-0.5)

XN4=RE2**0.5*B**2.*F(2)*F(3)/F30

XN5=0.5*RE2**(.3/.4.)*B**3.*F(2)**2.*F(3)*F30**(-1.5)

XN=XN1-A*B*F(3)*(XN2-XN3-XN4-XN5)

RM=B*UMAI5

XD=1.+A*B*(EXP(BM)-1.-BM-0.5*BM**2.-BM**3./6.)

C SISTEMA DE EQUACOES (A-6)

C CAMADA LIMITE TERMICA

IF(X-12.)38,39,39

38 DER(1)=F(2)

DER(2)=F(3)

DER(3)=XN/XD

DER(4)=F(5)

DER(5)=(-F(1)*F(5)-A*B*F(5)*(XN2-XN3-XN4-XN5))/(1./PR+XD-1.)

FI=F(1)

GOTO 55

39 F(1)=X-12.+FI

F(2)=1.

F(3)=0.

DER(1)=1.

DER(2)=0.

DER(3)=0.

DER(4)=F(5)

DER(5)=(-F(1)*F(5)-A*B*F(5)*(XN2-XN3-XN4-XN5))/(1./PR+XD-1.)

55. RETUFN

END

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR FCT

COMMON 14 VARIABLES 36 PROGRAM 524

PAGE 2

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA FCT
CART ID 0008 DB ADDR 1CBD DB CNT 0029

// FOR

*ONE WORD INTEGERS

*LIST SOURCE PROGRAM

SUBROUTINE OUT(X,F,DER,IHLF,NDIM,P)

DIMENSION F(5),DER(5),P(5)

COMMON RE,F30,XL,A,B,PR,F50

CALL DATSW(1,KK)

GOTO(4,9),KK

9 IF(ABS(X-P(2))-0.05)50,50,30

C NOVA ESTIMATIVA DE F50

50 FC=F50/(1.-F(4))

WRITE(3,7)F(4),F(5),RE,PR,FC

7 FORMAT(2F10.5,F20.2,F6.1,F10.5)

READ(6,8)F50

8 FORMAT(F10.5)

30 RETURN

4 JX=5*(X+0.0015)

Z=5.*X

IF(ABS(JX-Z)-0.060)20,20,30

20 WRITE(3,5)X,F(4),F(5)

5 FORMAT(3F15.5)

GOTO 9

END

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR OUT

COMMON 14 VARIABLES 12 PROGRAM 156

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA OUT
CART ID 0008 DB ADDR 1CE6 DB CNT 000C

// FOR

*ONE WORD INTEGERS

*LIST SOURCE PROGRAM

*IOCS(CARD,TYPEWRITER,KEYBOARD,1132PRINTER)
EXTERNAL FCT,OUT

PAGE 3

```

      DIMENSION P(5),F(5),AUX(8,5),DER(5)
      COMMON RE,F30,XL,A,B,PR,F50
C     PROGRAMA PRINCIPAL
      5 READ(2,6)RE,F30,XL,A,B,PR,F50
      6 FORMAT(F12.2,4F7.4,F4.1,F8.4)
      IF(PR)7,7,25
25    P(1)=0.
      P(2)=30
      P(3)=0.0500003
      P(4)=0.00001
      P(5)=0.
      F(1)=0.
      F(2)=0.
      F(3)=F30
      F(4)=1.
      F(5)=F50
      NDIM=5
      DER(1)=0.2
      DER(2)=0.2
      DER(3)=0.2
      DER(4)=0.2
      DER(5)=0.2
      CALL RKGS(P,F,DER,NDIM,IHLF,FCT,OUT,AUX)
      CALL DATSW(2,NN)
      GOTO(25,5),NN
      7 CALL EXIT
      END

```

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON 14 VARIABLES 118 PROGRAM 182

END OF COMPILATION

// XEQ

// FOR

NOTAÇÕES

A, B	Constantes adimensionais da expressão do perfil de difusividade turbilhonar de Spalding
C_f	Coefficiente de atrito (II.4)
$C_f(x)$	Coefficiente local de atrito (II.6)
f	Variável de similaridade dependente
$Nu(x)$	Número de Nusselt local (II.12)
K	Condutividade térmica
P	Pressão média temporal
Pr_e	Número de Prandtl efetivo (4)
Pr	Número de Prandtl
\dot{q}	Fluxo de calor
\dot{q}_w	Fluxo de calor na parede (II.9)
Re_ξ	Número de Reynolds (II.3)
Re_x	Número de Reynolds local
$Sp(x^+, Pr)$	Função de Spalding (8)
$St(x)$	Número de Stanton local (II.13)
T	Temperatura média temporal
T_w	Temperatura da parede
T_∞	Temperatura no escoamento não perturbado
u, v	Componentes médias temporais da velocidade
U_0	Velocidade média do escoamento não perturbado
$u_1(x)$	Velocidade do escoamento potencial junto à parede

u^+	Velocidade adimensional (II.7a)
u_*	Velocidade de atrito
x	Coordenada medindo a distância ao ponto de estagnação
x^+	Coordenada x adimensionalizada (5a)
y	Coordenada medindo distâncias à parede
y^+	Coordenada y adimensionalizada (II.7b)

SÍMBOLOS GREGOS

α	Difusividade térmica
ϵ^+	Viscosidade adimensional efetiva (I.10)
ϵ_M	Difusividade turbilhonar para transferência de quantidade de movimento (I.2)
ϵ_H	Difusividade turbilhonar para transferência de calor (I.3)
n	Variável de similaridade independente
θ	Temperatura adimensional
λ	Coeficiente que caracteriza a geometria do escoamento
μ	Viscosidade absoluta
ν	Viscosidade cinemática
ξ	Variável de similaridade independente
ρ	Massa específica
τ	Tensão de cisalhamento
τ_w	Tensão de cisalhamento junto à parede
ψ	Função fluxo