

VIBRAÇÕES LIVRES DE VIGAS DE SEÇÃO

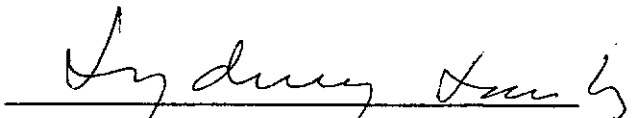
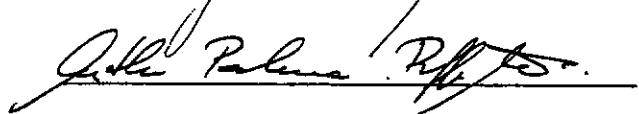
TRANSVERSAL VARIÁVEL

*Carlos Frederico da Silveira Oliveira*

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

APROVADO POR

  
Presidente

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
DEZEMBRO DE 1969

*Carlos Frederico da Silveira Oliveira*

## SUMMARY

This work deals with the problem of the determination of the natural frequencies of transverse vibrations of beams of variable cross section, in particular beams with section height varying according to a polynomial law.

Ritz method is used for the determination of the natural frequencies, due to its rapid convergence.

The method of treatment of the problem, permits a determination of any of the natural frequencies using automatic programming because it does not limit the number of terms of the serie solution to be used.

## S U M Á R I O

O principal problema abordado neste trabalho é o da determinação das frequências naturais de vibrações transversais de vigas de seção transversal variável segundo Leis polinomiais. São analisados os casos de variação linear e variação parabólica.

São determinadas as frequências naturais utilizando-se o método aproximado de Ritz e Rayleigh. Este método é muito utilizado quando na determinação de autovalores (frequências) e fornece uma convergência extremamente rápida.

O modo de tratar o problema, permite a determinação de qualquer frequência natural, mediante um programa automático, tendo em vista que o método foi aplicado considerando-se um número infinito de termos na série solução.

*A minha esposa Marília e minha filha Vania*

Ao Exm<sup>o</sup> Sr. Contra-Almirante Paulo de Castro Moreira da Silva, pelo incentivo

Ao Sr. Tenente-Coronel Alcides Nazario Guerreiro Brito, pelo incentivo e apoio na confecção da Tese

Ao Professor Paulo Alcântara Gomes, pelos ensinamentos ministrados e pela dedicação a meus trabalhos

Meus sinceros agradecimentos

## NOMENCLATURA

- A - área de seção transversal
- $E'_c$  - energia cinética de translação
- $E''_c$  - energia cinética de rotação
- $E_t$  - energia potencial de deformação
- f - frequência de vibração transversal
- I - momento da inércia da seção transversal em relação ao eixo neutro
- S - parâmetro
- $w$  - deflexão transversal da viga
- $\dot{w}$  - velocidade transversal de translação da viga
- $\dot{\theta}$  - velocidade angular
- $\rho_o$  - massa específica
- $\bar{\gamma}_1 = \frac{\lambda^2}{\pi^2}$  - parâmetro para um termo da série Fourier
- $\bar{\gamma}_1 = \frac{\lambda^2}{\pi^2}$  - parâmetro para dois termos da série de Fourier

## Í N D I C E

Dedução da equação diferencial de vibrações transversais de vigas de altura variável .....	pg. 1
Determinação das frequências naturais de vigas de altura variável .....	pg.11
Aplicação a casos particulares de variação de altura .....	pg.24
Conclusões .....	pg.28
Gráficos .....	pg.31
Tabelas .....	pg.33
Bibliografia .....	pg.37

## C A P I T U L O I

### DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE VIGAS DE ALTURA VARIÁVEL

#### 1) Expressão da energia de deformação

A dedução da equação diferencial que caracteriza o fenômeno de vibrações livres de vigas de altura variável pode ser feita a partir do princípio de Hamilton para os sistemas contínuos, desde que se conheçam as expressões da energia potencial de deformação e da energia cinética.

A expressão da energia potencial de deformação é obtida por meio da energia de deformação específica (avaliada por unidade de volume), e dada por:

$$\phi = \frac{d E_T}{dv} \quad (I-1)$$

onde

$E_T$  - é a energia de deformação

$v$  - é o volume do corpo deformável

Admitindo-se que o corpo possui as propriedades de isotropia, elasticidade e homogeneidade, e lembrando que: [1]

$$\phi = \frac{d E_T}{dv} = \frac{1}{2} \sigma \epsilon \quad (I-2)$$

$$\sigma = E \epsilon \quad (\text{lei de Hooke}) \quad (I-3)$$



$$\epsilon = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (\text{I-4})$$

A substituição de (I-4) e (I-3) em (I-2) conduzirá a:

$$dE_T = \frac{1}{2} E \left( z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 dx dy dz \quad (\text{I-5})$$

expressão esta que pode ser integrada ao longo do comprimento da barra e de sua seção reta, obtendo-se a partir daí:

$$E_T = \frac{E}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 dx \int_S \int z^2 dy dz \quad (\text{I-6})$$

Sendo  $S$  o domínio que caracteriza a seção transversal da barra e  $l$  o seu comprimento total.

A efetuação de (I-6) leva a:

$$E_T = \frac{E}{2} \int_0^l I \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (\text{I-7})$$

pois  $I$ , momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo  $x$  que passa pelo seu centro de gravidade é dado por

$$I = \int_S \int z^2 dy dz \quad (\text{I-7A})$$

A energia potencial de deformação será doravante descrita pela expressão (I-7).

Na dedução desta expressão não foram considerados os efeitos dos esforços cortantes, tendo em vista que sua influência é pequena no caso de barras pois a dimensão longitudinal é muito su

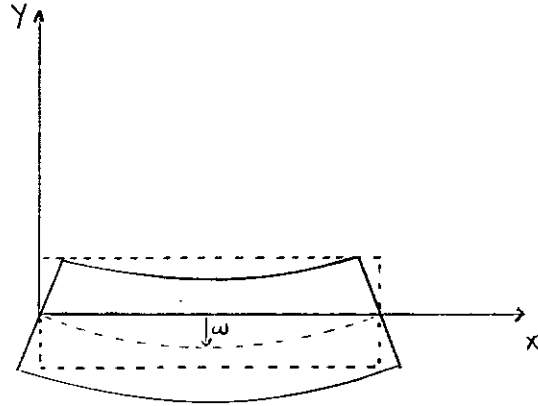


Fig.1

perior às dimensões transversais.

## 2) Expressão da energia cinética da barra

Considerando agora que a barra tem uma massa  $\rho_0$  por unidade de volume, a energia cinética será constituída por duas parcelas.

A primeira, que será denominada de energia cinética de translação, é dada por:

$$E'_C = \frac{1}{2} \int_V \rho_0 (\dot{\omega})^2 dv \quad (I-8)$$

onde  $\dot{\omega}$  é a velocidade de translação dos pontos da barra quando em movimento transversal.

Lembrando que  $dV$  pode ser substituído por  $dx dy dz$ , e integrando ao longo da seção reta, a expressão (I-8) transforma-se em:

$$E'_C = \frac{1}{2} \int_0^l A \rho_0 (\dot{\omega})^2 dx \quad (I-9)$$

onde  $A$  é a área da seção transversal (e que no caso presente é função da abcissa  $x$ ).

A segunda parcela, que será representada por  $E''_C$  e que caracteriza a energia cinética devida à rotação das seções transversais da barra, pode ser escrita em função da velocidade angular

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial t} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial x} \quad (I-10)$$

Então:

$$E''_C = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \rho_0 I \left( \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (I-11)$$

A energia cinética total será dada então por:

$$E_c = E'_c + E''_c = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \rho_0 A (\dot{\omega})^2 + \rho_0 I \left( \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (I-12)$$

Uma vez obtidas as expressões das energias cinéticas e potencial de deformação, pode ser aplicado o princípio de Hamilton sem maiores dificuldades, desde que seja estabelecida uma expressão correspondente a primeira variação de uma integral dupla, o que virá a facilitar enormemente a dedução da equação de vibrações.

3) Expressão da primeira variação de uma integral dupla

Considere-se uma região S definindo uma certa superfície no plano (xy). Admita-se que a região S seja fechada e que os pontos da curva delimitadora desta região pertençam a ela [2].

Considera-se também um certo conjunto F de funções  $\omega(x,y)$  definida de modo a que:

a) qualquer função  $\omega$  desta classe F é contínua, bem como derivável até a quarta ordem na região S;

b) qualquer função deste conjunto satisfaz a no máximo a condições de contorno forçadas do tipo linear, isto é,

$$a\omega + b \frac{\partial \omega}{\partial n} = c \quad (I-13)$$

onde a, b e c são funções definidas nos pontos do contorno de S e  $\frac{\partial \omega}{\partial n}$  caracteriza a derivada normal a  $\omega$  no contorno.

Seja agora definida a integral

$$H = \int_S \int L(x,y,\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}) dx dy \quad (I-14)$$

cujo integrando é uma função das oito variáveis (x,y, $\omega$  e suas de

derivadas representadas com índices), com derivadas contínuas até a 3a. ordem em relação as variáveis  $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}$  e para qualquer  $(x,y)$  em S.

Admitindo-se que  $\omega$  sofre uma variação [3] definida por  $\epsilon \eta(x,y)$  - sendo  $\epsilon$  uma constante arbitrária e  $\eta$  uma função arbitrária que pertença ao conjunto F - pode-se dizer que a variação  $\Delta H$  que sofre a integral é dada por:

$$\Delta H = \int_S \int \left[ L(x,y, \omega + \epsilon \eta, \omega_x + \epsilon \eta_x, \omega_y + \epsilon \eta_y, \omega_{xx} + \epsilon \eta_{xx}, \omega_{yy} + \epsilon \eta_{yy}, \omega_{xy} + \epsilon \eta_{xy}) - L(x,y, \omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}) \right] dx dy \quad (I-15)$$

Lembrando agora que

$$\Delta H = \delta H + \frac{1}{2} \delta^2 H + \dots \quad (I-16)$$

e que  $\delta^2 H$  é pequeno em relação ao termo linear, pode-se escrever após o desenvolvimento em série de Taylor até a primeira potência de  $\epsilon$ ,

$$\delta H = \epsilon \int_S \int \left( \eta \frac{\partial L}{\partial \omega} + \eta_x \frac{\partial L}{\partial \omega_x} + \eta_y \frac{\partial L}{\partial \omega_y} + \eta_{xx} \frac{\partial L}{\partial \omega_{xx}} + \eta_{yy} \frac{\partial L}{\partial \omega_{yy}} + \eta_{xy} \frac{\partial L}{\partial \omega_{xy}} \right) dx dy \quad (I-17)$$

A integral (I-17) pode ser transformada mediante a aplicação sucessiva do teorema de Green aos diversos termos do integrando, desde que estes sejam considerados como produtos de duas funções.

Assim, pode-se escrever, aplicando uma vez o teorema de Green:

$$\int_S \int \eta_x \frac{\partial L}{\partial \omega_x} dx dy = - \int_S \int \eta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_x} \right) dx dy + \int_C \eta \frac{\partial L}{\partial \omega_x} dy \quad (I-18)$$

$$\int_S \int n_Y \frac{\partial L}{\partial \omega_Y} dx dy = - \int_S \int n \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_Y} \right) dx dy - \int_C n \frac{\partial L}{\partial \omega_Y} dx \quad (I-19)$$

Aplicando duas v\u00e9zes o teorema de Green, obtem-se:

$$\int_S \int n_{XX} \frac{\partial L}{\partial \omega_{XX}} dx dy = \int_S \int n \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{XX}} \right) dx dy + \int_C n_X \frac{\partial L}{\partial \omega_{XX}} dy - \int_C n \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{XX}} \right) dy \quad (I-20)$$

$$\int_S \int n_{YY} \frac{\partial L}{\partial \omega_{YY}} dx dy = \int_S \int n \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{YY}} \right) dx dy - \int_C n_Y \frac{\partial L}{\partial \omega_{YY}} dx + \int_C n \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{YY}} \right) dx \quad (I-21)$$

$$\int_S \int n_{XY} \frac{\partial L}{\partial \omega_{XY}} dx dy = \int_S \int n \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{XY}} \right) dx dy + \int_C n \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{XY}} \right) dx + \int_C n_Y \frac{\partial L}{\partial \omega_{XY}} dy \quad (I-22)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \delta H = \epsilon \int \int & \left[ \frac{\partial L}{\partial \omega} - \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_X} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{XX}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{XY}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{YY}} \right) \right] n dx dy + \epsilon \int_C \left[ \frac{\partial L}{\partial \omega_X} - \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{XX}} \right) \right] n dy - \\ & - \epsilon \int_C \left[ \frac{\partial L}{\partial \omega_Y} - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{YY}} \right) \right] n dx + \epsilon \int_C n_X \frac{\partial L}{\partial \omega_{XX}} dy - \\ & - \epsilon \int_C n_Y \frac{\partial L}{\partial \omega_{YY}} dx + \epsilon \int_C n \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{XY}} \right) dx + \epsilon \int_C n_Y \frac{\partial L}{\partial \omega_{XY}} dy \quad (I-23) \end{aligned}$$

A partir de (I-23) podem ser deduzidas as condi\u00e7\u00f5es naturais de cont\u00f3rno que caracterizam o problema variacional, desde que

se anulem os integrandos das integrais de linha ao longo de C. Além disto, se se requer que H seja mínimo é preciso que  $\delta H$  seja nulo. Logo, o integrando da primeira integral de (I-23) também deve ser nulo. Isto leva a equação a derivadas parciais correspondentes a primeira variação de uma integral dupla, bem como as condições naturais de contorno, que implicitamente devem ser satisfeitas.

Pode-se então escrever a equação de Euler para a integral dupla sob a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \omega} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{yy}} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{xy}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (I-24)$$

Com as seguintes condições naturais de contorno

$$\begin{aligned} \eta \left[ \frac{\partial L}{\partial \omega_x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{xx}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{xy}} \right) \right] &= 0 \quad x = \text{constante} \\ \eta \left[ \frac{\partial L}{\partial \omega_{xy}} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_{yy}} \right) - \eta_x \frac{\partial L}{\partial \omega_{xy}} \right] &= 0 \quad y = \text{constante} \\ \eta_x \frac{\partial L}{\partial \omega_{xx}} &= 0 \quad x = \text{constante} \\ \eta_y \frac{\partial L}{\partial \omega_{yy}} &= 0 \quad y = \text{constante} \end{aligned} \quad (I-25)$$

Nos casos normais de vibrações de vigas, as condições de contorno forçadas obrigam a que  $\eta$  seja nulo no contorno, ou que

$n_x, n_y$  seja nula no contôrno, o que leva a serem anuladas automaticamente as condições naturais de contôrno (I-25).

4) Dedução da equação diferencial de vibrações para o caso de vigas com altura variável.

Uma vez que já se possuem as expressões da energia cinética da barra, da sua energia potencial de deformação e da equação a derivadas parciais correspondente à primeira variação de uma integral dupla, pode ser utilizado o princípio de Hamilton para os sistemas contínuos na dedução da equação diferencial em questão.

Definindo a ação por meio da expressão:

$$\Delta = \int_{t_0}^t L dt \quad (I-26)$$

sendo L a lagrangeana correspondente ao sistema, e admitindo a validade do princípio de Hamilton, pode ser escrito que, para que a integral (I-26) seja mínima é preciso que

$$\delta \Delta = 0 \quad (I-27)$$

isto é, que a primeira variação da ação deve ser nula.

Sendo a lagrangeana definida por

$$L = \int_0^l \frac{1}{2} \left[ \rho_0 A (\dot{\omega})^2 + \rho_0 I \left( \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \frac{EI}{2} \int_0^l I \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (I-28)$$

a conseqüente substituição desta expressão em (I-26) permite escrever a ação  $\Delta$  na forma de uma integral dupla,

$$\Delta = \int_{t_0}^t \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \left[ \rho_0 A (\dot{\omega})^2 + \rho_0 I \left( \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{EI}{2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx dt \quad (I-29)$$

e a qual devem ser aplicadas as equações (I-24) e (I-25) já deduzidas no item anterior e correspondentes às condições naturais de contorno e à equação de Euler, respectivamente.

Observando-se que  $\Delta$  pode ser escrita na forma

$$\Delta \equiv \Delta(x, t, \omega_t, \omega_{xx}, \omega_{xt}) \quad (I-30)$$

pode ser concluído que a equação (I-24) será simplificada pois foi deduzida para oito variáveis, das quais somente constam cinco em (I-30).

Aplicando então (I-24) sobre (I-30) obtém-se:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left[ -\rho_0 A \dot{\omega} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \omega_{xx} \right] + \frac{\partial}{\partial x \partial t} \left[ -\rho_0 I \omega_{xt} \right] = 0 \quad (I-31)$$

e notando que A e I são funções de x, a equação (I-31) se transforma em:

$$\rho_0 A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + E \omega_{xx} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} - \rho_0 I \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (I-32)$$

Trabalhos realizados por Lord Rayleigh [4] permitem desprezar os termos que correspondem a rotação das seções retas da barra no caso das frequências não serem grandes. Assim os termos que surgem em (I-32) devido a energia cinética  $E_c''$  podem deixar de ser considerados e a equação a derivadas parciais que rege o fenômeno de vibrações livres em vigas com altura variável toma a forma:

$$E I \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \rho_0 A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + E \omega_{xx} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0 \quad (I-33)$$

ou

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E I \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) + \rho_0 A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0 \quad (I-34)$$



As condições de contorno usuais (casos práticos) obrigam a que  $\eta$ ,  $\eta_x$ ,  $\eta_y$  que aparecem em (I-25) sejam iguais a zero. Assim as condições naturais de contorno são automaticamente satisfeitas e não serão consideradas doravante.

Em geral, estas condições forçadas correspondem a representação de apoios simples, engastes, apoios elásticos e bordos livres e podem ser descritas analiticamente na forma:

$$\begin{aligned} \omega &= 0 \\ \omega_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad \text{(I-35A)}$$

para vigas simplesmente apoiadas

$$\begin{aligned} \omega &= 0 \\ \omega_x &= 0 \end{aligned} \quad \text{(I-35B)}$$

para vigas engastadas, e,

$$\begin{aligned} \omega_{xx} &= 0 \\ \omega_{xxx} &= 0 \end{aligned} \quad \text{(I-35C)}$$

para vigas com extremidade livre.

As condições correspondentes a apoios elásticos devem ser tais que no máximo correspondam à expressão (I-13) utilizada como condição para a dedução da equação de Euler para integrais duplas.

---

C A P I T U L O   I I

DETERMINAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIGAS DE ALTURA VARIÁVEL.

Uma vez deduzida a equação diferencial de vibrações, é preciso que ela seja resolvida e que sejam determinados os seus auto-valores que, no caso, correspondem às frequências naturais.

O processo de determinação dos auto-valores, varia de acôrdo com a natureza do problema. No caso em estudo tanto podem ser utilizados os métodos de desenvolvimento em série como os métodos variacionais.

Os primeiros, tais como o método de Frobenius, demonstram ser extremamente laboriosos [5]. Nos últimos destacam-se o método de Ritz e o método de Galerkin.

O método de Ritz tanto pode ser utilizado a partir da expressão da energia de deformação [6] como a partir da equação diferencial ordinária que se obtém separando as variáveis da equação (I-33).

Admitindo que as vibrações são periódicas, pode-se dizer que a flecha  $w$  é uma função da forma

$$w(x,t) = X(\xi) e^{ift} \quad (\text{II-1A})$$

onde  $f$  define a frequência de vibrações transversais livres da viga e

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (\text{II-1B})$$

define a abcissa de um ponto genérico da barra em função do seu

comprimento total  $\ell$  .

Introduzindo (II-1) em (I-34), obtem-se:

$$\frac{1}{\ell^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \frac{EI(\xi)}{\ell^2} X''(\xi) \right] - f^2 \rho_0 A(\xi) X(\xi) = 0 \quad (\text{II-2})$$

ou ainda

$$\frac{E}{\ell^4} \frac{d^2 I}{d\xi^2} X''(\xi) + \frac{EI}{\ell^4} X^{IV}(\xi) - f^2 \rho_0 A(\xi) X(\xi) = 0 \quad (\text{II-3})$$

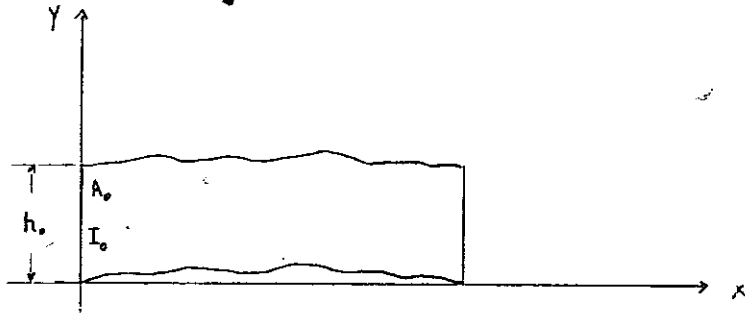
Admitindo que

$$\begin{aligned} I &= I_0 \rho(\xi) \\ A &= A_0 \delta(\xi) \end{aligned} \quad (\text{II-3A})$$

onde

$I_0$  = momento de inércia da seção transversal na origem

$A_0$  = área da seção transversal na origem



considerando que a altura da seção é variável com  $\xi$  , pode-se escrever:

$$X''(\xi) \rho''(\xi) + \rho(\xi) X^{IV}(\xi) - \lambda^4 \delta(\xi) X(\xi) = 0 \quad (\text{II-4})$$

sendo

$$\lambda^4 = \frac{f^2 \rho_0 A_0 \ell^4}{E I_0} \quad (\text{II-4A})$$

ou ainda, em forma simplificada

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \rho(\xi) X''(\xi) \right] - \lambda^4 \delta(\xi) X(\xi) = 0 \quad (\text{II-5})$$

Será considerado aqui que a viga está simplesmente apoiada nos extremos, o que conduz a condições de contorno, uma vez separadas as variáveis, do tipo:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 & X''(0) &= 0 \\ X(1) &= 0 & X''(1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-6})$$

A partir de (II-5) podem ser determinados os valores de  $\lambda^4$ , adotando-se o método de Ritz.

Observe-se que a equação diferencial

$$(g_2(x)X'')'' - (g_1(x)X')' + g_0(x)X = r(x) \quad (\text{II-7})$$

acompanhada de quatro condições de contorno não <sup>(independentes)</sup> contraditórias nos pontos  $x=a$  e  $x=b$ , pode ser identificada como condição necessária e suficiente para que o funcional  $J(\phi)$  seja mínimo.

$$J(\phi) = \int_a^b \left[ g_2 \phi''^2 + g_1 \phi'^2 + g_0 \phi^2 - 2r\phi \right] dx + R_A + R_B \quad (\text{II-8})$$

onde

$$R_B = A\phi_B^2 + 2B\phi_B\phi'_B + C\phi'^2_B + 2D\phi_B + 2E\phi'_B \quad (\text{II-8A})$$

$$e \quad R_A = F\phi_A^2 + 2G\phi_A\phi'_A + H\phi'^2_A + 2I\phi_A + 2J\phi'_A \quad (\text{II-8A})$$

$\phi$  caracteriza uma função admitida como satisfazendo (II-7) e (II-8).

A função  $\phi$  [7] deve ou não satisfazer as condições de contorno conforme estas sejam suprimíveis (dinâmicas) [8] ou essenciais (geométricas), respectivamente.

No caso das condições de contorno serem mistas, isto é, serem suprimíveis e essenciais, deve ser adotada uma função  $\phi$  que as satisfaçam. Neste caso, pode-se garantir, a priori, que tanto os termos  $R_A$  e  $R_B$ , tornam-se nulos.

No caso que será estudado, a natureza mista das condições obriga a que se adote uma função  $\phi$  que satisfaça as condições de contorno apresentadas, o que acarreta serem  $R_A$  e  $R_B$  nulos. Além disto, a comparação de (II-7) com (II-5) conduz a:

$$\begin{aligned}g_2(\xi) &= \rho(\xi) \\g_1(\xi) &= 0 \\g_0(\xi) &= -\lambda^4 \delta(\xi) \\r(\xi) &= 0\end{aligned}\tag{II-9}$$

Conclue-se então que o funcional  $J(\phi)$  a ser identificado com [7] o problema em questão toma o aspecto:

$$J(\phi) = \int_0^1 \left\{ \rho(\xi) \left[ \phi''(\xi) \right]^2 - \lambda^4 \delta(\xi) \left[ \phi(\xi) \right]^2 \right\} d\xi\tag{II-10}$$

Adotando-se para  $\phi$  uma série trigonométrica da forma de uma série de senos de Fourier, que satisfaz as condições (II-6), isto é, fazendo

$$\phi(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \text{ sen } \pi i \xi ,\tag{II-11}$$

obter-se-á o conjunto de auto valores  $\lambda^4$  que satisfaz a (II-10).

Derivando uma e duas vezes sucessivas a expresso (II-11) em relao a  $\xi$ , vem:

$$\phi'(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \pi i \cos \pi i \xi \quad (\text{II-12-A})$$

e

$$\phi''(\xi) = -\sum_{i=1}^{\infty} A_i \pi^2 i^2 \text{sen } \pi i \xi \quad (\text{II-12-B})$$

Admitindo-se uma variao polinomial do 2º grau na altura, obtem-se para expresso da altura em qualquer seo

$$h(\xi) = h_0 (a \xi^2 + b \xi + c) \quad (\text{II-13})$$

Do mesmo modo, o momento de inércia em relao a linha que passa pelo centro de massa e em qualquer seo ser dado por

$$I(\xi) = I_0 \rho(\xi) = I_0 (a \xi^2 + b \xi + c)^3 \quad (\text{II-14})$$

$$A(\xi) = A_0 \delta(\xi) = A_0 (a \xi^2 + b \xi + c) \quad (\text{II-15})$$

A substituio das expresses anteriores em (II-10) conduz a:

$$J = \int_0^1 \left\{ (a \xi^2 + b \xi + c)^3 \left( \sum_{i=1}^{\infty} A_i \pi^2 i^2 \text{sen } \pi i \xi \right)^2 - \lambda^4 (a \xi^2 + b \xi + c) \left( \sum_{i=1}^{\infty} A_i \text{sen } \pi i \xi \right)^2 \right\} d \xi \quad (\text{II-16})$$

Considerando-se a primeira parcela do integrando isoladamente, pode-se escrever:

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} A_i \pi^2 i^2 \text{sen } \pi i \xi \right)^2 = \pi^4 \sum_{i,j} A_i A_j (ij)^2 \text{sen } \pi i \xi \text{sen } \pi j \xi \quad (\text{II-17})$$

ou ainda, substituindo:

$$\text{sen } \pi i \xi \text{sen } \pi j \xi = \frac{1}{2} \left[ \cos \pi (i-j) \xi - \cos \pi (i+j) \xi \right] \quad (\text{II-18})$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^{\infty} A_i \Pi^2 i^2 \operatorname{sen} \Pi i \xi \right)^2 &= \frac{\Pi^4}{2} \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j (ij)^2 \cos \Pi(i-j)\xi - \\ &- \frac{\Pi^4}{2} \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j (ij)^2 \cos \Pi(i+j)\xi \end{aligned} \quad (\text{II-19})$$

Analogamente, a segunda parcela do integrando pode ser escrita

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^{\infty} A_i \operatorname{sen} \Pi i \xi \right)^2 &= \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j \operatorname{sen} \Pi i \xi \operatorname{sen} \Pi j \xi \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j \cos \Pi(i-j)\xi \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j \cos \Pi(i+j)\xi \end{aligned} \quad (\text{II-20})$$

Substituindo as expressões (II-19) e (II-20) em (II-16),

vem:

$$J = \frac{1}{2} (N_1 + N_2) \quad (\text{II-21})$$

onde

$$\begin{aligned} N_1 = \int_0^1 \left[ \Pi^4 (a\xi^2 + b\xi + c)^3 \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j (ij)^2 \cos \Pi(i-j)\xi - \right. \\ \left. - \lambda^4 (a\xi^2 + b\xi + c)^3 \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j \cos \Pi(i-j)\xi \right] d\xi \end{aligned} \quad (\text{II-21A})$$

e

$$\begin{aligned} N_2 = \int_0^1 \left[ \lambda^4 (a\xi^2 + b\xi + c)^3 \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j \cos \Pi(i+j)\xi - \right. \\ \left. - \Pi^4 (a\xi^2 + b\xi + c)^3 \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j (ij)^2 \cos \Pi(i+j)\xi \right] d\xi \end{aligned} \quad (\text{II-21B})$$

(integradas por partes)

As integrais acima podem ser resolvidas por parcelas.

A primeira delas ( $N_1$ ) pode ser escrita na forma:

$$N_1 = \sum_{i=j=1}^{\infty} A_i^2 \int_0^1 \left[ \Pi^4 i^4 (a\xi^2 + b\xi + c)^3 - \lambda^4 (a\xi^2 + b\xi + c) \right] d\xi +$$

$$+ \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \neq j}}^{\infty} A_i A_j \int_0^1 \left[ \Pi^4 (ij)^2 (a\xi^2 + b\xi + c)^3 - \lambda^4 (a\xi^2 + b\xi + c) \right] \cos \Pi(i-j)\xi d\xi$$

... (II-22)

o que conduz a:

$$N_1 = \sum_{i=j=1}^{\infty} A_i^2 \left[ \frac{\Pi^4 i^4 (a\xi^2 + b\xi + c)^4}{4(2a\xi + b)} - \frac{\lambda^4 (a\xi^2 + b\xi + c)^2}{2(2a\xi + b)} \right]_0^1 +$$

$$+ \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \neq j}}^{\infty} A_i A_j \Pi^4 (ij)^2 \left\{ (a\xi^2 + b\xi + c)^3 \frac{\text{sen} \Pi(i-j)\xi}{\Pi(i-j)} + \right.$$

$$+ \left[ 6 a^3 \xi^5 + 15 a^2 b \xi^4 + 12 a \xi^3 (ac + b^2) + 3 b \xi^2 (6 ac + b^2) + 6 c \xi (ac + b^2) + \right.$$

$$+ \left. 3bc^2 \right] \frac{\cos \Pi(i-j)\xi}{\Pi^2(i-j)^2} - \left[ 30 a^3 \xi^4 + 60 a^2 b \xi^3 + 36 a \xi^2 (ac + b^2) + \right.$$

$$+ \left. 6b\xi(6ac + b^2) + 6c(ac + b^2) \right] \frac{\text{sen} \Pi(i-j)\xi}{\Pi^3(i-j)^3} - \left[ 120 a^3 \xi^3 + \right.$$

$$+ \left. 180 a^2 b \xi^2 + 72 a \xi (ac + b^2) + 6 b (6 ac + b^2) \right] \frac{\cos \Pi(i-j)\xi}{\Pi^4(i-j)^4} +$$

$$+ \left[ 360 a^3 \xi^2 + 360 a^2 b \xi + 72 a (ac + b^2) \right] \frac{\text{sen} \Pi(i-j)\xi}{\Pi^5(i-j)^5} +$$

$$+ \left[ 720 a^3 \xi + 360 a^2 b \right] \frac{\cos \Pi(i-j)\xi}{\Pi^6(i-j)^6} - 720 a^3 \frac{\text{sen} \Pi(i-j)\xi}{\Pi^7(i-j)^7} \left. \right\}_0^1 -$$

$$- \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \neq j}}^{\infty} A_i A_j \lambda^4 \left\{ (a\xi^2 + b\xi + c) \frac{\text{sen} \Pi(i-j)\xi}{\Pi(i-j)} + (2a\xi + b) \frac{\cos \Pi(i-j)\xi}{\Pi^2(i-j)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2a \text{sen} \Pi(i-j)\xi}{\Pi^3(i-j)^3} \right\}_0^1 \quad \text{(II-23)}$$



Fazendo o mesmo raciocínio para  $N_2$ , virá:

$$N_2 = \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j \int_0^1 \left[ \lambda^4 (a\xi^2 + b\xi + c) - \right. \\ \left. - \Pi^4 (ij)^2 (a\xi^2 + b\xi + c)^3 \right] \cos \Pi (i+j) \xi \, d\xi \quad (\text{II-24})$$

Integrando, obtem-se:

$$N_2 = \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j \lambda^4 \left\{ (a\xi^2 + b\xi + c) \frac{\text{sen } \Pi (i+j) \xi}{\Pi (i+j)} + \right. \\ \left. + (2a\xi + b) \frac{\cos \Pi (i+j) \xi}{\Pi^2 (i+j)^2} - 2a \frac{\text{sen } \Pi (i+j) \xi}{\Pi^3 (i+j)^3} \right\} \Bigg|_0^1 - \\ - \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j \Pi^4 (ij)^2 \left\{ (a\xi^2 + b\xi + c)^3 \frac{\text{sen } \Pi (i+j) \xi}{\Pi (i+j)} + \right. \\ \left. + \left[ 6 a^3 \xi^5 + 15 a^2 b \xi^4 + 12 a \xi^3 (ac + b^2) + 3 b \xi^2 (6ac + b^2) + \right. \right. \\ \left. + 6c \xi (ac + b^2) + 3 bc^2 \right] \frac{\cos \Pi (i+j) \xi}{\Pi^2 (i+j)^2} - \\ \left. - \left[ 30 a^3 \xi^4 + 60 a^2 b \xi^3 + 36 a \xi^2 (ac + b^2) + 6 b \xi (6ac + b^2) + \right. \right. \\ \left. + 6c (ac + b^2) \right] \frac{\text{sen } \Pi (i+j) \xi}{\Pi^3 (i+j)^3} - \left[ 120 a^3 \xi^3 + 180 a^2 b \xi^2 + \right. \\ \left. + 72 a \xi (ac + b^2) + 6b (6ac + b^2) \right] \frac{\cos \Pi (i+j) \xi}{\Pi^4 (i+j)^4} + \left[ 360 a^3 \xi^2 + \right. \\ \left. + 360 a^2 b \xi + 72 a (ac + b^2) \right] \frac{\text{sen } \Pi (i+j) \xi}{\Pi^5 (i+j)^5} + \\ \left. + \left[ 720 a^3 \xi + 360 a^2 b \right] \frac{\cos \Pi (i+j) \xi}{\Pi^6 (i+j)^6} - 720 a^3 \frac{\text{sen } \Pi (i+j) \xi}{\Pi^7 (i+j)^7} \right\} \Bigg|_0^1 \quad (\text{II-25})$$

Efetuando as operações indicadas em (II-23) e (II-25) e levando em conta que:

$$\cos \pi(i+j) = (-1)^{i+j} \quad (\text{II-26A})$$

$$\text{sen } \pi(i+j) = 0 \quad (\text{II-26B}) \quad \text{virá:}$$

$$N_1 = \sum_{i=j=1}^{\infty} A_i^2 \left[ \frac{\pi^4 i^4 [b(a+b+c) - c^2(2a+b)] + 2\lambda^4 [c^2(2a+b) - b(a+b+c)^2]}{4b(2a+b)} \right] +$$

$$+ \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \neq j}}^{\infty} A_i A_j \pi^4 (ij)^2 \left\{ \frac{[6a^3 + 15a^2b + 12a(ac+b^2) + 3b(6ac+b^2) + 6c(ac+b^2) + 3bc^2] (-1)^{i+j} -}{\pi^2 (i-j)^2} \right.$$

$$- \frac{3bc^2 + 6b(6ac+b^2) - [120a^3 + 180a^2b + 72a(ac+b^2) + 6b(6ac+b^2)] (-1)^{i+j}}{\pi^4 (i-j)^4} +$$

$$\left. + \frac{[720a^3 + 360a^2b] (-1)^{i+j} - 360a^2b}{\pi^6 (i-j)^6} \right\} - \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \neq j}}^{\infty} A_i A_j \lambda^4 \left[ \frac{(2a+b) (-1)^{i+j} - b}{\pi^2 (i-j)^2} \right]$$

(II-27)

$$N_2 = \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j \lambda^4 \left[ \frac{(2a+b) (-1)^{i+j} - b}{\pi^2 (i+j)^2} \right] - \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j \pi^4 (ij)^2$$

$$\left\{ \frac{[6a^3 + 15a^2b + 12a(ac+b^2) + 3b(6ac+b^2) + 6c(ac+b^2) + 3bc^2] (-1)^{i+j} - 3bc^2}{\pi^2 (i+j)^2} + \right.$$

$$+ \frac{6b(6ac+b^2) - [120a^3 + 180a^2b + 72a(ac+b^2) + 6b(6ac+b^2)] (-1)^{i+j}}{\pi^4 (i+j)^4} +$$

$$\left. + \frac{[720a^3 + 360a^2b] (-1)^{i+j} - 360a^2b}{\pi^6 (i+j)^6} \right\} \quad (\text{II-28})$$

Tomando agora:

$$d_i = \frac{\pi^4 i^4 [b(a+b+c)^4 - c^4(2a+b)] + 2\lambda^4 [c^2(2a+b) - b(a+b+c)^2]}{4b(2a+b)} \quad (\text{II-29A})$$

$$e_{ij} = \frac{[6a^3 + 15a^2b + 12a(ac+b^2) + 3b(6ac+b^2) + 6c(ac+b^2) + 3bc^2] (-1)^{i+j} - 3bc^2}{\pi^2 (i-j)^2} +$$

$$+ \frac{6b(6ac+b^2) - [120a^3 + 180a^2b + 72a(ac+b^2) + 6b(6ac+b^2)] (-1)^{i+j}}{\pi^4 (i-j)^4} +$$

$$+ \frac{[720a^3 + 360a^2b] (-1)^{i+j} - 360a^2b}{\pi^6 (i-j)^6} \quad (\text{II-29B})$$

$$e_{ii} = 0 \quad (\text{II-29C})$$

$$f_{ij} = \frac{(2a+b)(-1)^{i+j} - b}{\pi^2 (i-j)^2} \quad (\text{II-29D})$$

$$f_{ii} = 0 \quad (\text{II-29E})$$

$$g_{ij} = \frac{(2a+b)(-1)^{i+j} - b}{\pi^2 (i+j)^2} \quad (\text{II-29F})$$

$$h_{ij} = \frac{[6a^3 + 15a^2b + 12a(ac+b^2) + 3b(6ac+b^2) + 6c(ac+b^2) + 3bc^2] (-1)^{i+j} - 3bc^2}{\pi^2 (i+j)^2} +$$

$$+ \frac{6b(6ac+b^2) - [120a^3 + 180a^2b + 72a(ac+b^2) + 6b(6ac+b^2)] (-1)^{i+j}}{\pi^4 (i+j)^4} +$$

$$+ \frac{[720a^3 + 360a^2b] (-1)^{i+j} - 360a^2b}{\pi^6 (i+j)^6} \quad (\text{II-29G})$$

Desta forma, as expressões (II-27) e (II-28) reduzem-se a:

$$N_1 = \sum_{i=j=1}^{\infty} A_i^2 di + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \neq j}}^{\infty} A_i A_j \Pi^4(ij)^2 e_{ij} - \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \neq j}}^{\infty} A_i A_j \lambda^4 f_{ij} \quad (\text{II-30A})$$

e

$$N_2 = \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j \lambda^4 g_{ij} - \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j \Pi^4(ij)^2 h_{ij} \quad (\text{II-30B})$$

Fazendo ainda

$$k_{ij} = e_{ij} - h_{ij} \quad (\text{II-31A})$$

e

$$l_{ij} = g_{ij} - f_{ij} \quad (\text{II-31B})$$

a expressão (II-21) toma a forma:

$$J = \frac{1}{2}(N_1 + N_2) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=j=1}^{\infty} A_i^2 di + \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j \Pi^4(ij)^2 k_{ij} + \sum_{i+j=2}^{\infty} A_i A_j \lambda^4 l_{ij} \right\} \quad (\text{II-32})$$

Admitindo que:

$$m_i = \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_{\alpha} k_{i\alpha} \quad (\text{II-33A})$$

e

$$n_i = \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_{\alpha} l_{i\alpha} \quad (\text{II-33B})$$

a expressão (II-31) poderá ser escrita como:

$$J = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} A_i^2 di + \Pi^4 \sum_{i=1}^{\infty} (ij)^2 A_i m_i + \lambda^4 \sum_{i=1}^{\infty} A_i n_i \right\} \quad (\text{II-34})$$

A expressão (II-34) fornece uma função

$$J_i = J_i(A_1, A_2, A_3 \dots A_i) \quad (\text{II-35})$$

que caracteriza a aproximação de  $J$  que resulta pela utilização de  $i$  termos na série trigonométrica.

A condição  $\delta J=0$ , correspondente ao mínimo do funcional (II-10), pode ser aproximada pelas condições

$$\frac{\partial J_i}{\partial A_n} = 0 \quad n = 0, 1, 2 \dots i \quad (\text{II-36})$$

equações estas que conduzem a um sistema de onde podem ser determinados os coeficientes  $A_i$  e conseqüentemente a uma aproximação de  $\phi$  por meio da expressão (II-11).

O grande número de cálculos matemáticos levam a que sejam considerados apenas uns poucos termos da série trigonométrica, o que não desmerece em nada os resultados obtidos tendo em vista a taxa de convergência da série resultante quando aplicado o método de Ritz.

Derivando então (II-34) em relação a cada um dos  $A_i$  e igualando a zero, obtem-se:

$$2 \, di A_i + \pi^4 (ij)^2 m_i + \pi^4 \sum_{\gamma=1}^{\infty} (ij)^2 A_{\gamma} \frac{\partial m_{\gamma}}{\partial A_i} + \lambda^4 n_i + \lambda^4 \sum_{\gamma=1}^{\infty} A_{\gamma} \frac{\partial n_{\gamma}}{\partial A_i} = 0$$

ou ainda:

$$2 \, di A_i + \pi^4 (ij)^2 m_i + \pi^4 \sum_{\gamma=1}^{\infty} (ij)^2 A_{\gamma} k_{i\gamma} + \lambda^4 n_i + \lambda^4 \sum_{\gamma=1}^{\infty} A_{\gamma} l_{i\gamma} = 0 \quad (\text{II-37})$$

tornando mais compacta a equação acima:

$$di A_i + \pi^4 (ij)^2 \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_{\alpha} k_{i\alpha} + \lambda^4 \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_{\alpha} l_{i\alpha} = 0 \quad (\text{II-38})$$

A expressão acima pode ser escrita em forma indicial:

$$\sum_{j=1}^8 A_j p_{ij} = 0 \quad (\text{II-39})$$

onde

$$p_{ij} = \pi^4 (ij)^4 k_{ij} + \lambda^4 l_{ij} \quad (\text{II-39A})$$

$$p_{ii} = d_i + \pi^4 i^4 k_{ii} + \lambda^4 l_{ii} \quad (\text{II-39B})$$

O sistema de equações algébricas lineares e homogêneas (II-39) terá soluções não triviais se e somente se o determinante dos coeficientes das incógnitas for igual a zero, isto é,

$$| p_{ij} | = 0 \quad (\text{II-40})$$

expressão esta que traduz a equação de frequências para vibrações transversais de vigas de altura variável segundo lei polinomial.

Uma vez obtido  $\lambda^4$  podem ser determinadas as frequências  $f$ , pois

$$f = \gamma_1 \times \frac{\pi^2}{l^2} \left( \frac{E I_0}{\rho_0 A_0} \right)^{1/2} \quad (\text{II-41})$$

onde

$$\gamma_1 = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \quad (\text{II-41A})$$

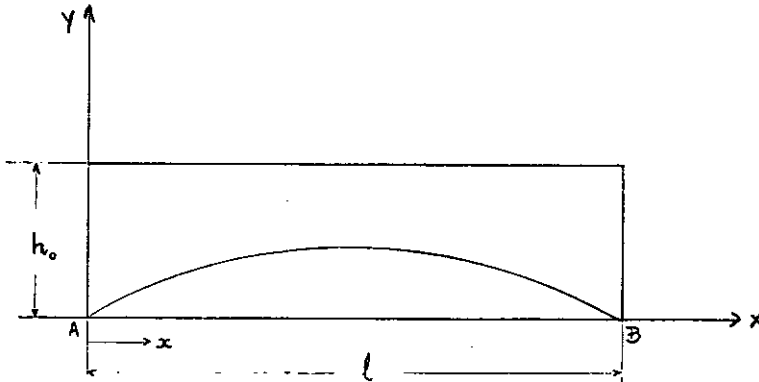
C A P Í T U L O    I I I I

Aplicação a casos particulares de variação de altura

1 - Variação Parabólica

Admitindo que a altura da seção transversal varia segundo a lei

$$h(\xi) = h_0(1 - S\xi + S\xi^2) \quad (III-1)$$



que é um caso particular da equação (II-13), o determinante  $|P_{ij}|$  poderá ser simplificado.

Se fôr utilizado apenas um termo da série trigonométrica, o problema resume-se na determinação de  $\lambda^4$  em uma equação do primeiro grau em  $\lambda^4$ .

Com efeito, o determinante  $|P_{ij}|$  neste caso reduz-se a um único termo  $p_{11}$ , cuja expansão é:

$$\frac{\pi^4 - \lambda^4}{2S} + \pi^4 k_{11} + \lambda^4 \ell_{11} = 0 \quad (III-2)$$

de onde se pode tirar:

$$\lambda^4 = \frac{32 \pi^{10} - 96 S^2 \pi^8 + 48 \pi^6 S^3 (S+6) - 720 S^4 \pi^4}{(\pi^2 - S^2) (32 \pi^4)} \quad (III-3)$$

Admitindo agora que foram tomados dois termos da série trigonométrica, o determinante  $|P_{ij}|$  toma a forma:

$$\begin{vmatrix} \frac{\pi^4 - \lambda^4}{2S} & \pi^4 k_{11} + \lambda^4 \ell_{11} & 0 \\ 0 & \frac{4\pi^4 - \lambda^4}{S} + 16\pi^4 k_{22} + \lambda^4 \ell_{22} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (III-4)$$

e, conseqüentemente, os auto-valores  $\lambda_1^4$  e  $\lambda_2^4$  serão dados por:

$$\lambda_1^4 = \frac{1}{2-2S\ell_{22}-4S\ell_{11}+4S^2\ell_{11}\ell_{22}} \left\{ \left[ 5\pi^4 + 2\pi^4 S k_{11} - \pi^4 S \ell_{22} - \right. \right. \\ \left. \left. - 32\pi^4 S^2 \ell_{11} k_{22} + 16\pi^4 S k_{22} - 2S^2 \pi^4 \ell_{22} k_{11} - 8\pi^4 S \ell_{11} \right] - \right. \\ \left. - \left[ (\pi^4 S \ell_{22} - 5\pi^4 - 2\pi^4 S k_{11} - 16\pi^4 S k_{22} + 32\pi^4 S^2 \ell_{11} k_{22} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2S^2 \pi^4 \ell_{22} k_{11} + 8\pi^4 S \ell_{11})^2 - (4-4S\ell_{22}-8S\ell_{11} + 8S^2\ell_{11}\ell_{22}) \times \right. \right. \\ \left. \left. (4\pi^8 + 8\pi^8 S k_{11} + 16\pi^8 S k_{22} + 32S^2\pi^8 k_{11} k_{22}) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III-5})$$

$$\lambda_2^4 = \frac{1}{2-2S\ell_{22}-4S\ell_{11}+4S^2\ell_{11}\ell_{22}} \left\{ \left[ 5\pi^4 + 2\pi^4 S k_{11} - \pi^4 S \ell_{22} - \right. \right. \\ \left. \left. - 32\pi^4 S^2 \ell_{11} k_{22} + 16\pi^4 S k_{22} - 2S^2 \pi^4 \ell_{22} k_{11} - 8\pi^4 S \ell_{11} \right] + \right. \\ \left. + \left[ (\pi^4 S \ell_{22} - 5\pi^4 - 2\pi^4 S k_{11} - 16\pi^4 S k_{22} + 32\pi^4 S^2 \ell_{11} k_{22} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2S^2 \pi^4 \ell_{22} k_{11} + 8\pi^4 S \ell_{11})^2 - (4-4S\ell_{22} - 8S\ell_{11} + 8S^2\ell_{11}\ell_{22}) \times \right. \right. \\ \left. \left. (4\pi^8 + 8\pi^8 S k_{11} + 16\pi^8 S k_{22} + 32S^2\pi^8 k_{11} k_{22}) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III-6})$$

de onde podem ser obtidos a primeira e a segunda frequências de vi brações. A primeira frequência, que é a menor, corresponde a uma aproximação melhor da frequência fundamental, já obtida quando se utilizou um termo da série trigonométrica.

A verificação do grau de precisão desta primeira frequência pode ser feita por meio de uma análise da diferença entre os valores obtidos com um e dois termos da série.

A tabela I demonstra que os valores encontrados com um termo já conduzem a um resultado bem preciso para determinação prática das frequências fundamentais.



2) Variação linear da altura

Fazendo agora

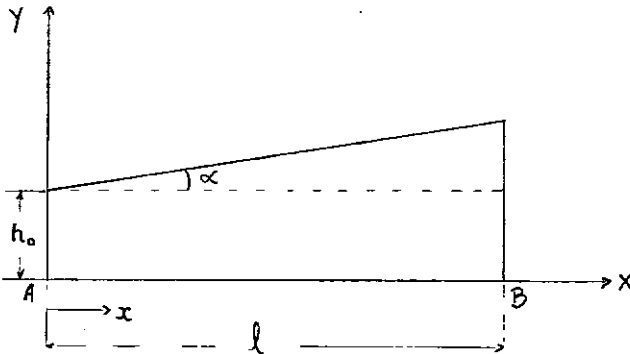
$$a = 0$$

$$b = S$$

$$c = 1$$

a equação que traduz a variação da altura toma a forma

$$h(\xi) = h_0(1 + S\xi) \quad (\text{III-7})$$



$$\text{sendo } S = \frac{l}{h_0} \operatorname{tg} \lambda$$

e as equações deduzidas no capítulo II podem ser simplificadas, obtendo-se, com um termo da série:

$$\lambda^4 = \frac{\pi^2}{2} \left[ \pi^2 (2 + 2S + S^2) - 3S^2 \right] \quad (\text{III-8})$$

com dois termos da série:

$$\lambda_1^4 = \frac{1}{12 \left[ 81\pi^4 (2+S)^2 - 1024S^2 \right]} \left[ \left[ 9\pi^2 (u_{11} + u_{22}) (2+S) + 64 u_{12} S \right] - \left\{ \left[ 9\pi^2 (u_{11} + u_{22}) (2+S) + 64 u_{12} S \right]^2 - 4(u_{11} u_{22} - u_{12}^2) \left[ 81\pi^4 (2+S)^2 - 1024S^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{III-9})$$

onde:

$$\begin{aligned} u_{11} &= 27\pi^4 (2+S) \left[ \pi^2 (2+2S+S^2) - 3S^2 \right] \\ u_{12} &= u_{21} = -128\pi^2 S \left[ 9\pi^2 (2+2S+S^2) - 40S^2 \right] \\ u_{22} &= 108\pi^4 (2+S) \left[ 4\pi^2 (2+2S+S^2) - 3S^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{III-10})$$

$$\lambda_2^4 = \frac{1}{12 \left[ 81 \Pi^4 (2+S)^2 - 1024 S^2 \right]} \left[ \left[ 9 \Pi^2 (u_{11} + u_{22}) (2+S) + 64 u_{12} S \right]^2 - 4 (u_{11} u_{22} - u_{12}^2) \left[ 81 \Pi^4 (2+S)^2 - 1024 S^2 \right] \right]^{1/2} \quad (\text{III-11})$$

A mesma verificação da convergência pode ser empregada aqui (Tabela II), de onde se conclue que um termo já seria suficiente para a determinação da frequência.

### 3) Altura constante

Se a altura da viga permanece invariável com o comprimento, a frequência obtida fazendo S nulo na equação (III-8) fornece

$$\lambda^4 = \Pi^4$$

e, conseqüentemente a frequência torna-se idêntica à obtida por processo exato.



## C O N C L U S Õ E S

O método de Ritz apresentou-se como extremamente útil na solução do problema como os que foram analisados neste trabalho.

Uma verificação mais apurada da rapidez da convergência do método conduziu a tabela (i), que demonstra a grande precisão que se obtém com pequeno número de termos na série solução.

Poder-se-ia pensar na determinação das frequências por métodos menos algébricos e mais ligados a processos de automação, tais como o de matrizes de transferência ou dos elementos finitos. Entretanto, isto não invalida a utilização do método de Ritz na forma em que foi feita, tendo em vista o desenvolvimento geral e permitindo mediante um programa automático, a obtenção de quaisquer frequências desde que seja aumentado o número de termos da série solução.

Por outro lado, a limitação que se impõe ao problema, nos parece partir de dois fatos:

- inicialmente, a própria equação diferencial foi simplificada de modo a se obter um resultado que não leva em consideração a inércia de rotação das seções. Assim, os resultados só valem para baixas frequências de vibração.

- Além disto, a variação de altura pode levar a uma diferença bem grande entre seções transversais extremas (no caso linear) ou entre a seção média e qualquer das seções extremas

(caso da variação parabólica). Isto conduz, assim nos parece, a uma certa diferença entre os valores achados e os valores reais, o que poderia ser confirmado através de uma verificação experimental e de uma conseqüente comparação com os resultados teóricos.

Tendo em vista os resultados obtidos, foram construídas tabelas que dão, indiretamente, os valores das frequências naturais para diversos comprimentos da viga e diversos valores do parâmetro "S" e que define o polinômio caracterizador da variação de altura.

Para a variação linear os resultados coincidiram de modo excelente com os do trabalho de E. Krynicki e Z. Mazurkiewicz (9), que determinaram frequências de vibrações livres em vigas de variação de altura linear e simplesmente apoiadas.

Como era de se esperar, o gráfico correspondente a este caso, apresentou frequências maiores para um mesmo comprimento e coeficientes "S" maiores.

No caso parabólico, embora o comportamento da função  $\ell = F(S, \lambda')$  seja basicamente o mesmo, quando  $\lambda'$  aumenta, mantendo-se constante o comprimento, "S" diminui. Isto não é estranho nem se constitui em exceção, tendo em vista que a maneira de definição do parâmetro "S" varia quando se passa de uma equação linear para uma do segundo grau.

No caso linear, para a obtenção da frequência fundamental da vibração, multiplicaríamos o valor de  $\lambda' = \frac{\lambda}{L^2}$  tabelado em anexo pela expressão  $\left( \frac{E I_0}{\rho_0 A_0} \right)^{1/2}$  referente ao material e dimensões de uma determinada viga em estudos.

No caso da variação de altura segundo lei parabólica, usaríamos os valores de  $\lambda'$  correspondentes, também tabelados em anexo, da mesma forma como foi exposto acima.

$s = 1,0$     $0,8$     $0,6$     $0,4$     $0,2$

$\lambda/l^2$

40

30

20

10

VARIAÇÃO LINEAR DE ALTURA

3,5

3,0

2,5

2,0

1,5



# VARIAÇÃO PARABÓLICA DE ALTURA

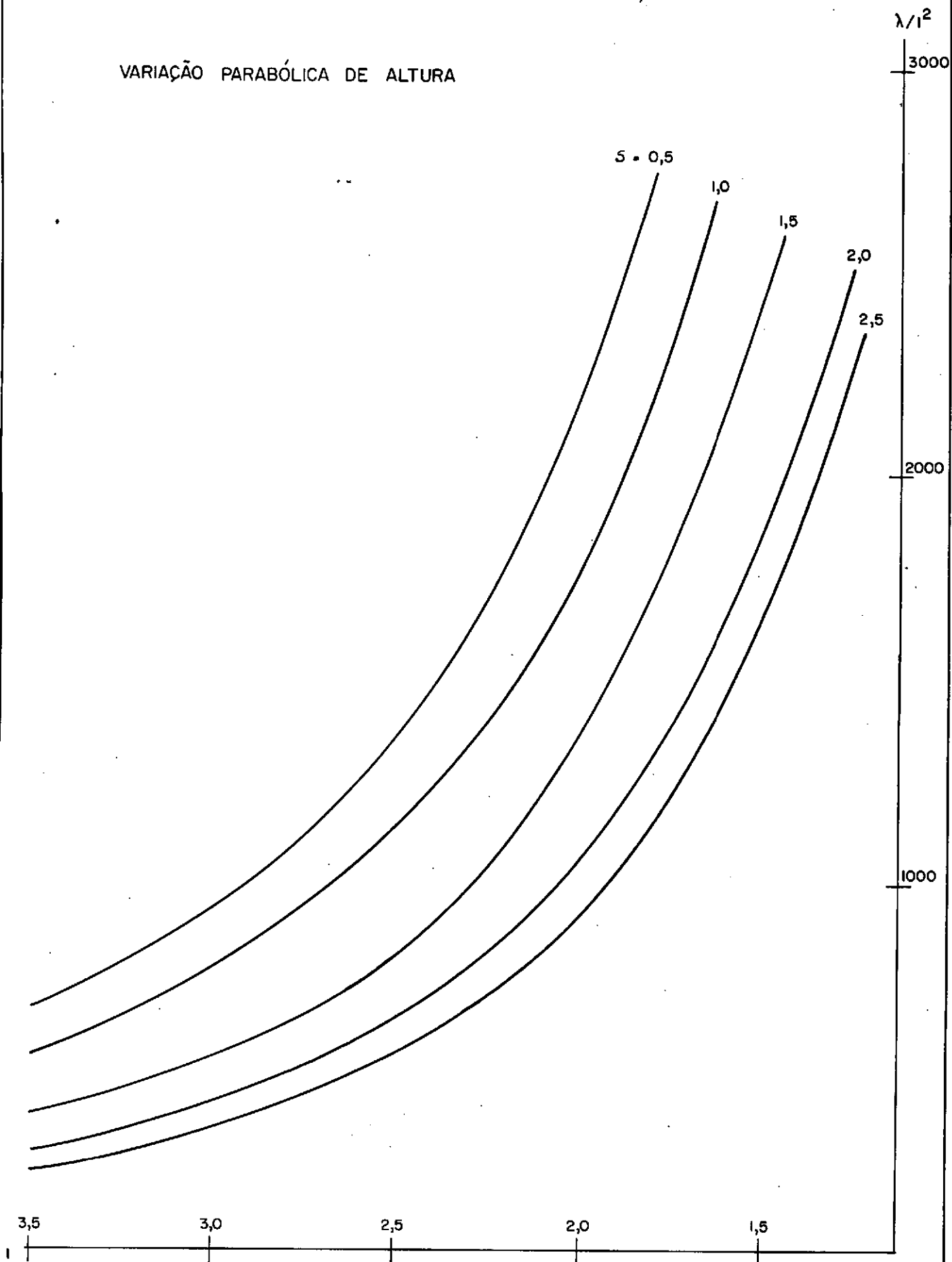


Tabela II

Verificação da convergência para o método de Ritz com um e dois termos da série solução

Variação linear de altura

S	$\pi^2 \bar{\gamma}_1$	$\pi^2 \gamma_1$	$\pi^2 (\bar{\gamma}_1 - \gamma_1)$	$\pi^2 (\bar{\gamma}_1 - \gamma_1) / 100$
0.1	10.3663	10.3535	0.0128	0.0001
0.2	10.8746	10.8272	0.0474	0.0004
0.3	11.3868	11.2861	0.1007	0.0010
0.4	11.9069	11.7372	0.1697	0.0016
0.5	12.4329	12.1803	0.2526	0.0025
0.6	12.9629	12.6155	0.3474	0.0034
0.7	13.4978	13.0458	0.4500	0.0045
0.8	14.0356	13.4701	0.5655	0.0056
0.9	14.5774	13.8925	0.6849	0.0068
1.0	15.1074	14.3100	0.7974	0.0079



Tabela I

Verificação da convergência para o método de Ritz com um e dois termos da série solução.

Variação parabólica de altura

s	$\bar{Y}_1$	$Y_1$	$\bar{Y}_1 - Y_1$	$(\bar{Y}_1 - Y_1)/100$
0.1	97.22042	97.22042	0.00000	0.00000
0.2	96.68735	96.68734	0.00000	0.00000
0.3	95.85507	95.85507	0.00000	0.00000
0.4	94.76397	94.76397	0.00000	0.00000
0.5	93.45027	93.45027	0.00000	0.00000
0.6	91.94667	91.94667	0.00000	0.00000
0.7	90.28686	90.28686	0.00000	0.00000
0.8	88.48599	88.48599	0.00000	0.00000
0.9	86.58109	86.58109	0.00000	0.00000
1.0	84.59145	84.59145	0.00000	0.00000
1.1	82.53899	82.53899	0.00000	0.00000
1.2	80.44463	80.44463	0.00000	0.00000
1.3	78.32865	78.32865	0.00000	0.00000
1.4	76.21115	76.21115	0.00000	0.00000
1.5	74.11252	74.11252	0.00000	0.00000
1.6	72.05405	72.05405	0.00000	0.00000
1.7	70.05874	70.05874	0.00000	0.00000
1.8	68.15238	68.15238	0.00000	0.00000
1.9	66.36514	66.36514	0.00000	0.00000
2.0	64.73385	64.73385	0.00000	0.00000
2.1	63.30566	63.30566	0.00000	0.00000
2.2	62.14389	62.14389	0.00000	0.00000
2.3	61.33803	61.33803	0.00000	0.00000
2.4	61.02180	61.02180	0.00000	0.00000

Valores de  $\lambda/\ell^2$  para variação linear de altura.

$\ell$	$s = 0.2$	0.4	0.6	0.8	1.0
1.0	118.246	141.796	168.058	197.032	228.717
1.5	52.554	63.020	74.692	87.569	101.652
2.0	29.561	35.449	42.014	49.258	57.179
2.5	18.919	22.687	26.889	31.525	36.594
3.0	13.138	15.755	18.673	21.892	25.413
3.5	9.652	11.575	13.719	16.084	18.670
4.0	7.390	8.862	10.530	12.314	14.294
4.5	5.839	7.002	8.299	9.729	11.294
5.0	4.729	5.671	6.722	7.881	9.148
5.5	3.908	4.687	5.555	6.513	7.560
6.0	3.284	3.938	4.668	5.473	6.353
6.5	2.798	3.356	3.977	4.663	5.413
7.0	2.413	2.893	3.429	4.021	4.667
7.5	2.102	2.520	2.987	3.502	4.066
8.0	1.847	2.215	2.625	3.078	3.573
8.5	1.636	1.962	2.326	2.727	3.165
9.0	1.459	1.756	2.074	2.432	2.823
9.5	1.310	1.571	1.862	2.183	2.534
10.0	1.182	1.417	1.680	1.970	2.287
10.5	1.072	1.286	1.524	1.787	2.074
11.0	0.977	1.171	1.388	1.628	1.890
11.5	0.894	1.072	1.270	1.489	1.729
12.0	0.821	0.984	1.167	1.368	1.588
12.5	0.756	0.907	1.075	1.261	1.463
13.0	0.699	0.839	0.994	1.165	1.353
13.5	0.648	0.778	0.922	1.081	1.254
14.0	0.603	0.723	0.857	1.005	1.166
14.5	0.562	0.674	0.799	0.937	1.087
15.0	0.525	0.630	0.746	0.875	1.016

Valores de  $\lambda/\ell^2$  para variação parabólica de altura.

$\ell$	s = 0.5	1.0	1.5	2.0
1.0	8732.919	7155.682	5492.640	4190.451
1.5	3881.297	3180.303	2441.173	1862.422
2.0	2183.229	1788.920	1373.160	1047.612
2.5	1397.267	1144.909	878.822	670.472
3.0	970.324	795.075	610.293	465.605
3.5	712.891	584.137	448.378	342.077
4.0	545.807	447.230	343.290	261.903
4.5	431.255	353.367	371.241	206.935
5.0	349.316	286.227	219.705	167.618
5.5	288.691	236.551	181.574	138.527
6.0	242.581	198.768	152.573	116.401
6.5	206.696	169.365	130.003	99.182
7.0	178.222	146.034	112.094	85.519
7.5	155.251	127.212	97.646	74.496
8.0	136.451	111.807	85.822	65.475
8.5	120.870	99.040	76.022	57.999
9.0	107.813	88.341	67.810	51.733
9.5	96.763	79.287	60.860	46.431
10.0	87.329	71.556	54.926	41.904
10.5	79.210	64.904	49.819	38.008
11.0	72.172	59.137	45.393	34.631
11.5	66.033	54.107	41.532	31.685
12.0	60.645	49.692	38.143	29.100
12.5	55.890	45.796	35.152	26.818
13.0	51.674	42.341	32.500	24.795
13.5	47.917	39.263	30.137	22.992
14.0	44.555	36.508	28.023	21.379
14.5	41.535	34.034	26.124	19.930
15.0	38.812	31.803	24.411	18.624

BIBLIOGRAFIA

- 1 - Nowacki, W. - Dynamics of Elastic Systems - 1963 - Chapman and Hall Ltd.
- 2 - Langhaar, Henry L. Energy Methods in Applied Mechanics - 1962 - Wiley and Sons, Inc.
- 3 - Weinstock, R. - Calculus of Variations - 1962 - McGraw-Hill.
- 4 - Rayleigh, B - The Theory of Sound - Vol.I - 1945 Dover.
- 5 - Andersen, B.W. - Vibrations of Triangular Cantilever Plates by the Ritz Method - Journal of Applied Mechanics - Vol 21, n° 4 - 1954.
- 6 - Timoshenko, S - Theory of Elastic Stability - 1936 - McGraw-Hill.
- 7 - Collatz, L. - The Numerical Treatment of Differential Equations, 1966 Spriger-Verlag.
- 8 - Biezeno, C.B. and Grammel, R. - Engineering Dynamics - Vol I - 1955 Blackie and Son.
- 9 - Krynicki, E and Mazurkiewicz, Z - Journal of Applied Mechanics ASME - Vol. 29 - 1962.
- 10 - Heidebrecht, Arthur C. - Vibration of Nonuniform Simply Supported Beams - vol. n° 93, n° EM2 - April 1967 - Journal of the Engineering Mechanics Division Proceedings of the American Society of Civil Engineers.
- 11 - Korn, G.A. & Korn, T.M. - Mathematical Handbook for Scientists and Engineers - 1961 - McGraw-Hill.
- 12 - Volterra, Enrico & Zachmanoglou, E.C. - Dynamics of Vibrations - 1965 Charles Merryll Books, Inc.