

M E T O D O S      D E      S I N T E S E  
E M      M E C A N I S M O S

JAYME MASCHKVICH

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTEÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

LR Koval

Presidente

José Palmeiro Pinto.

Américo Durval

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
ABRIL DE 1970

D E D I C A T O R I A

À minha esposa Celina

Aos meus filhos Myriam, André e Mauro

## A G R A D E C I M E N T O

Agradeço ao Professor Dr. Leslie R. Koval pela orientação  
e colaboração.

## RESUMO

E apresentado uma nova forma da equação da curva descrita por um ponto do plano da biela, desenvolvendo todos os coeficientes da equação do 6º grau em x e y. Para os mecanismos articulados planos, são apresentados os métodos tradicionais e desenvolvido um novo método baseado nas propriedades do rolamento sem deslizamento e no centro instantâneo de rotação. Para os mecanismos em 3 dimensões, são apresentados métodos tradicionais e analizado em detalhe, com demonstração completa dos teoremas, o método indicado por Bernard Roth, analizando o movimento geral de um ponto sujeito a um movimento geral no espaço. Programas para o computador digital da COPPE, foram escritos para todas as etapas, incluindo as aplicações numéricas.

## ABSTRACT

A new form for the equation of four-bar coupler curve is presented in which all coefficients of the 6th degree equation are shown. For the planar linkage the trational methods are shown and a new method is developed based on rolling-curve and instant center properties. Methods are also summarized and for three dimensional mechanisms and the general method of Bernard Roth is analyzed in detail, including derivations of all necessary theorems. Digital computer programs were prepared for all steps, and numerical examples presented.

## ÍNDICE

ASSUNTO	PÁGINA
1 - Introdução	1
2 - Dados Históricos	4
3 - Mecanismos Articulados Planos	6
4 - Mobilidade	10
5 - Curva descrita por um ponto do plano da biela	11
6 - Um aspecto diferente para a equação da curva descrita por um ponto do plano da biela	14
7 - Resolução do quadrilátero articulado e programa para o computador digital IBM 1130	21
8 - Métodos de síntese de mecanismos articulados planos. Exposição e análise de alguns métodos convencionais.	36
9 - Métodos algébricos com emprêgo de números complexos	64
10 - Novo método de síntese. Baseado nas propriedades das curvas rolantes	68
11 - A síntese de mecanismos tridimensionais	92
12 - Método Direto. Síntese pelas equações de vínculo	94
13 - Síntese Indireta	110
14 - Rotação em torno de um eixo qualquer	120
15 - Determinação do lugar geométrico dos pontos que em um deslocamento geral dado por um parafuso permanecem a uma distância fixa de um ponto	129
16 - Transformação cúbica	138
17 - Extensão do estudo de pontos em lugares especiais. Movimentos especiais	162
18 - Problemas de síntese	167
19 - Extensão de método	176
20 - Resumos	180

1.

## MÉTODOS DE SÍNTESE EM MECANISMOS

### INTRODUÇÃO GERAL

o objetivo principal deste trabalho teórico é o estudo de métodos vários para a síntese de mecanismos, ou seja, a determinação de dimensões e outras características para que um mecanismo de determinada natureza, com certo número de elementos, seja capaz de realizar determinada performance.

O autor dedicou parte de suas atividades profissionais ao estudo de mecanismos, em particular a análise e síntese de engrenagens. Problemas de transmissão de movimento com relação de velocidade variável, utilizando engrenagens, foram muitas vezes resolvidos.

A realização de cursos avançados colocou o autor em contacto com as possibilidades de utilização de mecanismos articulados planos e espaciais, capazes de solucionar os mesmos problemas. Este contacto se deu principalmente através de artigos técnicos publicados nas revistas especializadas de engenharia mecânica.

A grande atenção despertada no mundo, em particular nos centros de técnica altamente avançada, para os problemas de síntese, pode ser avaliada pelos trabalhos publicados nas últimas décadas, e dos quais uma pequena relação está incluída ao longo da tese. Este fato serviu de incentivo ao autor para a realização do trabalho. Ao lado de contribuições reais, o trabalho serve de ponto de partida para futuras investigações a serem realizadas não só pelo autor, mas também por outros interessados na área.

A execução de programas de cálculo para uso no computador IBM da COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRA-

DUAÇÃO EM ENGENHARIA, constitue uma real contribuição do autor e permite resolver muitos problemas inerentes ao projeto de máquinas.

Este trabalho, como todos os trabalhos de pesquisa da Humanidade, constitue uma etapa. Não é início, nem corresponde a um final. A limitação dada a sua extensão, pren~~d~~de-se a quantidade de assuntos abordados dentro de um programa de mestrado.

Para o autor, todo o assunto, no nível a bordado, é novo; não consta de nenhum programa de formação ou pós-graduação na Universidade Federal do Rio de Janeiro, até a presente data.

Entre os objetivos inclue-se o domínio de várias técnicas, o desenvolvimento didático em detalhe de técnicas mencionadas qualitativamente em artigos de revistas técnicas e a formação de uma nova técnica, cujo emprêgo foi sugerido ao autor em função de seu trabalho com as engrenagens.

A performance desejada para um mecanismo pode ser definida em termos cinemáticos ou dinâmicos. Neste trabalho, toda a atenção é voltada para a cinemática, em particular para os problemas de trajetória.

A análise do movimento definido pelos vínculos de determinado mecanismo tem sido objeto de estudo há longo tempo. A síntese, em particular através de equações e soluções numéricas, é recente. Para a síntese, em geral, os caminhos são longos e as equações obtidas não são em forma explícita. O uso do computador digital é um dos responsáveis pelo incremento dos trabalhos de síntese.

De um modo geral, os estudos realizados são distintos para os mecanismos planos e para os tri-dimensionais.

Este trabalho apresenta como base matemática e cinemática, assuntos vários publicados em língua estrangeira ( no âmbito de conhecimento do autor ) e cuja fonte será citada no decorrer da tese.

O autor apresenta como contribuição pessoal, um adendo à análise da curva gerada por um ponto do plano da biela, cuja base foi estabelecida por Samuel Roberts e que está apresentada no livro de J.Denavit e S. Hartenberg<sup>1</sup>. A síntese por método novo, baseado em propriedades do movimento de rolamento de uma curva plana sobre sua conjugada também constitue trabalho do autor. O desenvolvimento em detalhe dos trabalhos do professor Roth,<sup>89</sup> é realizado pelo autor, incluindo contribuição pessoal.

Os programas necessários a solução de problemas envolvendo as técnicas mencionadas, em linguagem FORTRAN IV, foram preparados pelo autor e utilizados na solução de muitos problemas numéricos. Pela sua extensão, nem todos os programas estão reproduzidos com a tese; aqueles apenas citados, passam a pertencer a biblioteca da COPPE e estão a disposição, em poder do autor.

## 2. DADOS HISTÓRICOS

Extraídos de Denavit e Hartenberg<sup>1</sup>

Leonardo da Vinci (século XV) deixou cader nos com inúmeras anotações, mas que não podem ser usados propriamente para mostrar as ideias que tiveram solução prática.

Jacob Leupold no século XVIII deu talvez a primeira idéia de estudar a modificação do movimento, ao invez de construir apenas os aparelhos e máquinas, como fôra feito até então.

Euler e Watt no século XVIII, embora vivendo em épocas que se sobrepõe, mas sem aparente contacto, muito contribuiram.

Euler, na "MECHANICA SIVE MOTUS SCIENTIA ANALYTICA EXPOSITA", apresenta a idéia de que o movimento plano pode em geral ser descrito como uma translação de um ponto e uma rotação em torno d'este ponto.

Watt, fabricante de instrumentos ("instrument maker") e engenheiro, em contraste com Euler, dedicou -se à síntese do movimento. Até então, a atenção ao movimento era dedicada as barras articuladas na base. Watt pontou e empregou o movimento da barra intermediária, a biela.

No fechamento do século XVIII, Monge propôs um curso de elementos de máquinas na "Ecole Polytechnique", contendo uma completa enumeração dos elementos preparada por Hachette, e baseada na ementa:

"By these elements are to be understood the means by which the directions of motions are changed; those by which the progressive motion in a right line, rotative motion

and reciprocating motion are made each to reproduce the others. The most complicated machines being merely the result of a combination of some of these elements, it is necessary that a complete enumeration of them should be drawn up" (Sic)

Dois nomes devem ainda ser citados antes de seguir a ciéncia atual da cinemática. Borgnis e De Coriolis.

Foi o fisico Ampére quem no seu "Essai sur la philosophie des sciences" reconheceu uma nova área da mecânica: CINEMÁTICA, a ciéncia da geometria do movimento - sem preocupação com a força causadora.

A moderna cinemática deve-se a Relaux, com notaveis contribuições.

Samuel Roberts, geômetra de 1870 mostrou pela primeira vez que a curva de um ponto da biela do quadrilátero articulado é de sexta ordem. Seu importante teorema de 3 diferentes mecanismos capazes de traçar a mesma curva de um ponto do plano da biela, permite resolver um sem número de problemas, e relacionar o mecanismo aproximado de linha reta de Watt com outros.

Outros nomes vêm a seguir, como o de Aronhold, Kennedy, Burmester, etc., com as mais importantes contribuições.

O matemático russo Chebyshev deve ser citado também, pela notavel contribuição a Síntese.

## 3.

## MECANISMOS ARTICULADOS PLANOS

Um mecanismo articulado plano é constituído de barras articuladas. Cada articulação contém no mínimo duas barras convergindo para a mesma. A articulação é um conjugado cinemático de primeira espécie, em que o contacto entre os elementos se dá ao longo de uma superfície. Uma das barras do mecanismo é fixada a um plano de referência (a base). Em consequência, ao menos duas articulações têm posição fixa. No mecanismo plano, todas as partes móveis mantém seu movimento em planos paralelos (figura 3.1).

Define-se "grau de liberdade" de um elemento como o número de coordenadas independentes necessárias para determinar sua posição em um sistema de referência. O número de graus de liberdade do mecanismo é o número de parâmetros independentes necessário para definir sua configuração.

A posição de uma barra fica perfeitamente definida no sistema de referência, quando são conhecidas 3 coordenadas independentes (as duas coordenadas de um ponto da barra e o ângulo que a barra faz com determinada direção), como indicamos na figura 3.2.

Um mecanismo fica constituído, quando uma cadeia cinemática contendo  $n$  barras e  $j$  juntas ou articulações, tem uma de suas barras fixadas ao plano de referência (figura 3.3). Por conseguinte, restam  $(n-1)$  barras, com o total de  $3(n-1)$  graus de liberdade. Porém, quando colocamos uma articulação rotativa, ou rótula, estamos reduzindo 2 graus de liberdade, ou seja, reduzimos um total de  $2j$  graus de liberdade. Teremos então para o mecanismo:

$$L = 3(n-1) - 2j, \quad (3.1)$$

sendo L o número de graus de liberdade do mecanismo.

É necessário cuidado na aplicação indis criminada da relação acima deduzida. Com o mesmo número de barras e juntas, pode-se construir mecanismos, iguais em espe cie, mas de dimensões tais que modifiquem o número de graus de liberdade, ou ao menos modifiquem o comportamento. Ilustra mos o fato na figura 3.4, através de um quadrilátero articulado conhecido, que pela modificação do comprimento da biela passa de um grau de liberdade, para a condição de estrutura - (zero graus de liberdade)

A análise do comportamento do mecanis mo pode ser denominada de análise de mobilidade.

Um mecanismo que tem apenas um grau de liberdade é denominado de mecanismo com movimento determinado ou simplesmente determinado.

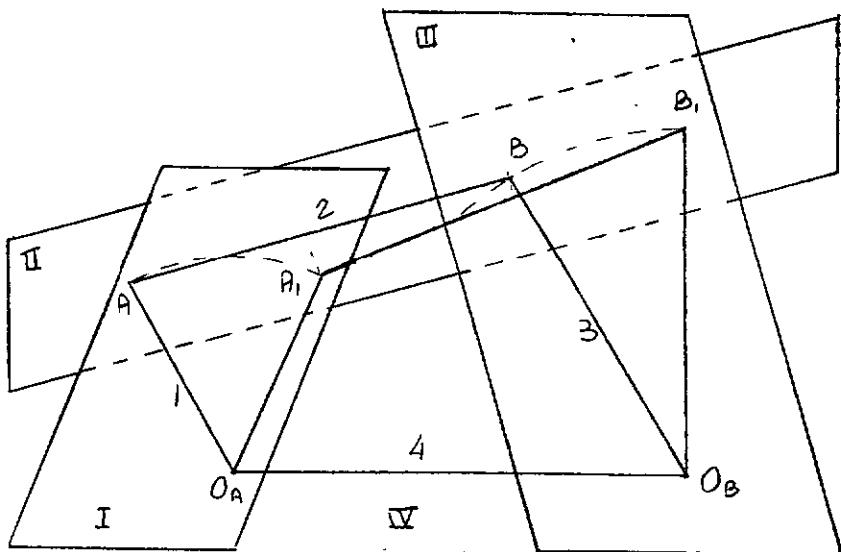


fig. 3.1 Mecanismo plano  
I, II, III, IV - planos paralelos

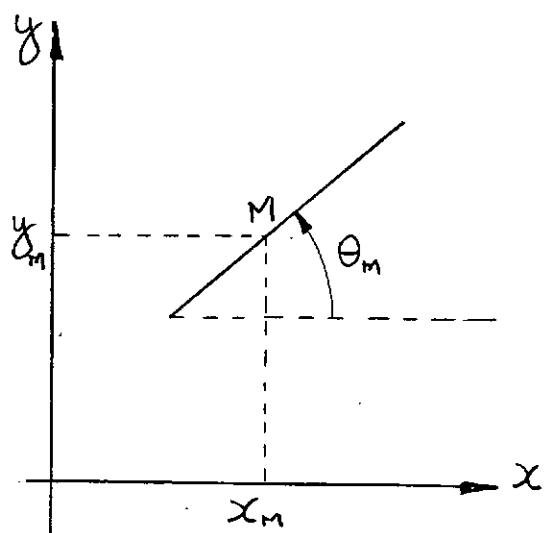


fig. 3.2 3 graus  
de liberdade  
de uma barra

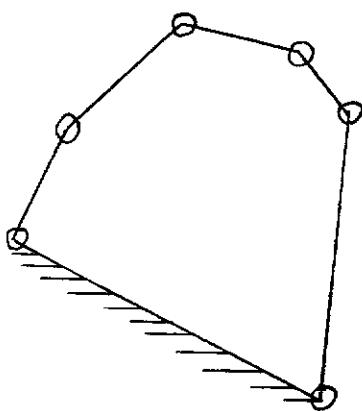


fig. 3.3 n barras. 6  
j articulações. 6  
3 graus de liberdade

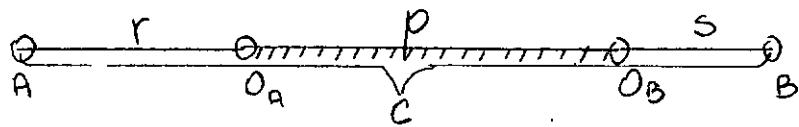


fig. 3.4 o graus de liberdade

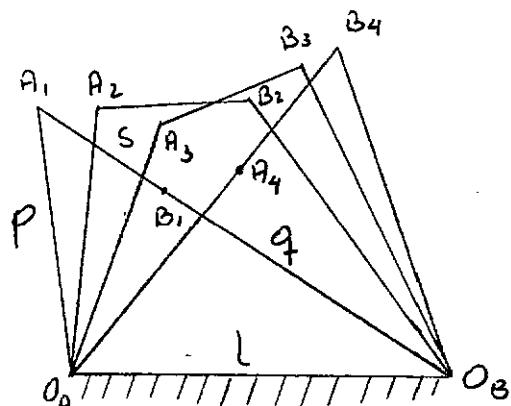
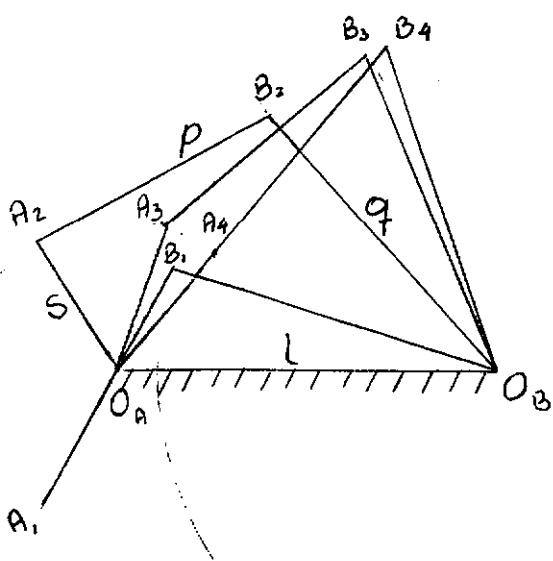


fig. 4.3  
dupla alavanca  
 $L + s < p + q$

fig. 4.1

manivela - alavanca

$$l + s < p + q$$

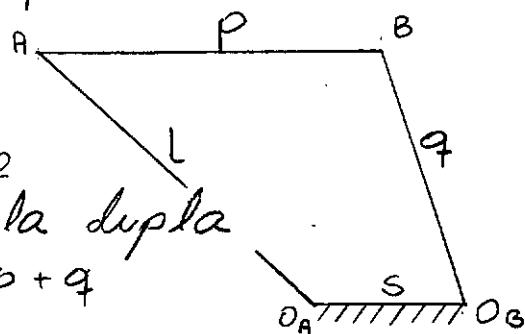


fig. 4.2

manivela dupla

$$l + s < p + q$$

MOBILIDADE

O quadrilátero articulado é um mecanismo de movimento determinado. A análise de Grashof, para a sua mobilidade, permite distinguir mecanismos de comportamento, distinto.

Seja l o comprimento da barra maior, s o comprimento da barra menor, p e q os comprimentos das barras intermediárias.

Sendo  $l + s < p + q$ , serão possíveis de obter 2 mecanismos manivela-alavanca (a manivela, barra que recebe o movimento, ou acionadora faz um giro completo, enquanto a alavanca, barra que transmite o movimento, ou acionada oscila ao longo de certa amplitude). Em cada caso, a barra menor será a manivela (figura 4.1).

Se a barra menor for a base, (barra fixada ao plano de referência) o mecanismo será de dupla manivela (figura 4.2).

Se a barra oposta a menor for a base, o mecanismo será de dupla alavanca (nem a manivela, nem a alavanca completam um giro), como indica a figura 4.3.

Quando  $l + s > p + q$ , apenas serão possíveis mecanismos de dupla alavanca.

Quando  $l + s = p + q$ , os mecanismos terão pontos mortos, que podem ser interpretados como variação do gráu de liberdade.

Finalmente, pode-se transformar o mecanismo em estrutura, pela alteração de suas dimensões, como já indicamos anteriormente.

5.

CURVA DESCrita POR UM PONTO DO PLANO DA BIELA

Partimos de uma análise idêntica à de Hartenberg e Denavit atribuída pelos mesmos a Samuel Roberts.

As equações serão escritas em coordenadas cartesianas, com o eixo dos x ao longo da linha dos centros fixos  $O_A$  e  $O_B$ , em coincidência com a base; o eixo dos y será colocado perpendicularmente ao eixo dos x, passando pelo centro fixo  $O_A$ .

Conforme a figura 5.1, sejam as coordenadas:

$(x', y')$  -- coordenadas de A

$(x'', y'')$  -- coordenadas de B

$(x, y)$  -- coordenadas de M (o ponto que traça a curva)

Teremos:

$$x' = x - b \cos \theta \quad y' = y - b \sin \theta \quad (5.1)$$

$$x'' = x - a \cos(\theta + \delta) \quad y'' = y - a \sin(\theta + \delta)$$

Como os pontos A e B descrevem circunferências, ou arcos de circunferências, em torno dos centros fixos, virá:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= r^2 \\ (x'' - p)^2 + y''^2 &= s^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Substituindo as equações (5.2) nas equações (5.1)

obteremos:

$$(x - b \cos \theta)^2 + (y - b \sin \theta)^2 = r^2 \quad (5.3)$$

$$[x - a \cos(\theta + \delta) - p]^2 + [y - a \sin(\theta + \delta)]^2 = s^2$$

Aplicando identidades trigonométricas, chegamos

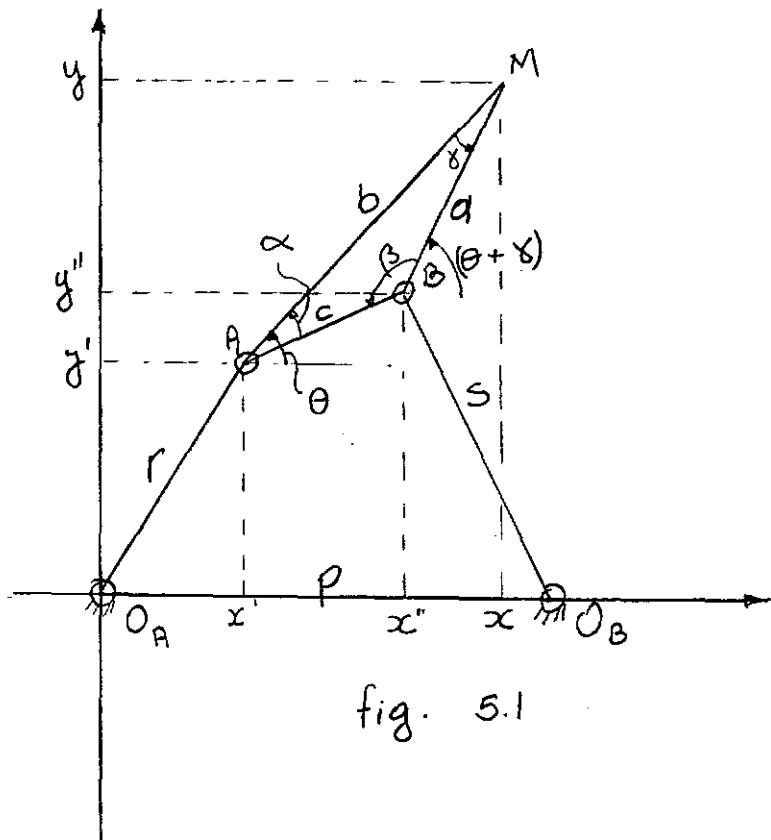


fig. 5.1

a seguinte relação:

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \frac{x^2 + y^2 + b^2 - r^2}{2b} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} [(x-p)\cos\delta + y \sin\delta] \cos\theta - [(x-p)\sin\delta - y \cos\delta] \sin\theta &= \\ &= \frac{(x-p)^2 + y^2 + a^2 - s^2}{2a} \end{aligned}$$

Eliminando o ângulo  $\theta$  entre as duas equações, obteremos a equação desejada para a curva descrita por um ponto do plano da biela. Para tal fim, o sistema de equações é resolvido para  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  e aplicada a relação

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

A equação em seu aspecto final, é apresentada por Hartenberg e Denavit<sup>1</sup>, adicionada da seguinte relação introduzida:

$$k = \frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c} \quad (5.5)$$

A equação final tem o aspecto:

$$\begin{aligned} &\left\{ \sin \alpha \left[ (x-p) \sin \delta - y \cos \delta \right] \left( x^2 + y^2 + b^2 - r^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + y \sin \beta \left[ (x-p)^2 + y^2 + a^2 - s^2 \right] \right\}^2 \\ &\left\{ \sin \alpha \left[ (x-p) \cos \delta + y \sin \delta \right] \left( x^2 + y^2 + b^2 - r^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + x \sin \beta \left[ (x-p)^2 + y^2 + a^2 - s^2 \right] \right\}^2 = \\ &= 4 k^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \left[ x(x-p) - y - p \cot \delta \right]^2 \quad (5.6) \end{aligned}$$

6. UM ASPECTO DIFERENTE PARA A EQUAÇÃO DA CURVA  
DESCRITA POR UM PONTO DO PLANO DA BIELA

A equação, ou mesmo um desenvolvimento dos determinantes de forma expandida, permite escrever o resultado através de uma equação contendo separadamente formas algébricas, e que indicamos a seguir.

$$F^6 + F^5 + F^4 + F^3 + F^2 + F^1 + F^0 = 0 \quad (6.1a)$$

$$\begin{aligned}
 & A_1(x^6 + 3x^2y^2 + 3x^2y^4 + y^6) + \\
 & A_2(x^5 + 2x^3y^2 + xy^4) + A_3(x^4y + 2x^2y^3 + y^5) + \\
 & A_4x^4 + A_5(x^3y + xy^3) + A_6(x^2y^2) + A_7y^4 + \\
 & A_8(x^3 + xy^2) + A_9(x^2y + xy^3) + \\
 & A_{10}x^2 + A_{11}y^2 + A_{12}xy + \\
 & A_{13}x + A_{14}y + \\
 & A_{15} = 0 \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{\sin^2 \gamma}{4b^2} + \left( \frac{1}{2a} - \frac{\cos \gamma}{2b} \right)^2 = \frac{c^2}{4a^2 b^2} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= -P \left[ \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{3\cos\delta}{2ab} \right] = -P \frac{a^2 + 2b^2 - 3ab\cos\delta}{2a^2b^2} \\
 &= -P \frac{c^2 + b^2 - ab\cos\delta}{2a^2b^2} = -P \frac{c^2 + bc\cos\alpha}{2a^2b^2} \\
 &= -P \frac{2c^2 - ac\cos\beta}{2a^2b^2} \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

$$A_3 = -P \frac{\sin\delta}{2ab} = -P \frac{ab\sin\delta}{2a^2b^2} \quad (6.4)$$

$$A_4 = B_1 + B_2 \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{b^2 - r^2}{2b^2} + \frac{a^2 - s^2 + p^2}{2a^2} + \frac{p^2}{4b^2} - \sin^2\delta \\
 &\quad - \cos\delta \left( \frac{b^2 - r^2}{2ab} + \frac{a^2 - s^2 + p^2}{2ab} \right) \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4a^2b^2} \left[ 4a^2b^2\cos^2\delta - 2a^2r^2 - 2s^2b^2 + \right. \\
 &\quad \left. p^2(7b^2 + a^2) - 2ab\cos\delta(b^2 - r^2 + a^2 - s^2 + p^2) \right]
 \end{aligned}$$

$$B_2 = \frac{p^2}{a^2} - \frac{p^2\cos\delta}{ab} = \frac{p^2bc\cos\alpha}{a^2b^2} \quad (6.7)$$

$$A_5 = -P^2 \frac{\sin \delta}{ab} = -P^2 \frac{ab \sin \delta}{a^2 b^2} \quad (6.8)$$

$$A_6 = 2B_1 + B_2 \quad (6.9)$$

$$A_7 = B_1 \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} A_8 = -P & \left[ \frac{b^2 - r^2}{b^2} + \frac{a^2 - s^2 + P^2}{a^2} - \cos \delta \left( \frac{b^2 - r^2}{2ab} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{b^2 - r^2}{ab} + \frac{a^2 - s^2 + P^2}{2ab} \right) - 2 \sin^2 \delta \right] \quad (6.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-P}{2a^2 b^2} \left[ 4a^2 b^2 \cos^2 \delta - 2r^2 a^2 - 2s^2 b^2 + 2P^2 b^2 \right. \\ &\quad \left. - ab \cos \delta (3b^2 a - 3r^2 ab + a^3 b - s^2 ab + P^2 ab) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_9 = -P \sin \delta & \left[ \frac{b^2 - r^2}{2ab} + \frac{a^2 - s^2 + P^2}{2ab} - 2 \cos \delta \right] \\ &= \frac{-P \sin \delta}{2a^2 b^2} \left[ b^3 a - r^2 ab + a^3 b - s^2 ab + P^2 ab \right. \\ &\quad \left. - 4ab \cos \delta \right] \quad (6.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{10} &= -P^2 \frac{b^2 - r^2}{2b^2} + \frac{(b^2 - r^2)^2}{4b^2} + \frac{a^2 s^2 + P^2}{4a^2} - P^2 \sin^2 \delta \\
 &\quad - \cos \delta \left[ \frac{P^2 (b^2 - r^2)}{ab} + \frac{(b^2 - r^2)(a^2 - s^2 + P^2)}{2ab} \right] \\
 &= \frac{-G s \delta}{2a^2 b^2} \left[ 2P^2 ab (b^2 - r^2) + \right. \\
 &\quad \left. + ab (b^2 - r^2) (a^2 - s^2 + P^2) \right] \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

$$A_{11} = A_{10} + B_3 \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned}
 B_3 &= \cos \delta \frac{P^2 (b^2 - r^2)}{ab} - P^2 + 2P^2 \sin^2 \delta \\
 &= \frac{1}{a^2 b^2} \left[ \cos \delta ab P^2 (b^2 - r^2) - P^2 a^2 b^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2P^2 a^2 b^2 \sin^2 \delta \right] \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= P^2 \sin \delta \left[ \frac{b^2 - r^2}{ab} - 2 \cos \delta \right] \\
 &= P^2 \frac{\sin \delta}{a^2 b^2} \left[ ab (b^2 - r^2) - 2a^2 b^2 \cos \delta \right] \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

$$A_{13} = -P \left[ \frac{(b^2 - r^2)^2}{2b^2} - \cos \gamma \frac{(b^2 - r^2)(a^2 - s^2 + p^2)}{2ab} \right]$$

$$= \frac{-P}{2a^2 b^2} \left[ a^2 (b^2 - r^2)^2 - ab \cos \gamma (b^2 - r^2)(a^2 - s^2 + p^2) \right] \quad (6.17)$$

$$A_{14} = -P \sin \gamma \frac{(b^2 - r^2)(a^2 - s^2 + p^2)}{2ab}$$

$$= \frac{-Pab \sin \gamma (b^2 - r^2)(a^2 - s^2 + p^2)}{2a^2 b^2} \quad (6.18)$$

$$A_{15} = \frac{P^2 (b^2 - r^2)^2}{4b^2} = \frac{P^2 a^2 (b^2 - r^2)^2}{4a^2 b^2} \quad (6.19)$$

A equação (5.6) permite analizar propriedades particulares da curva, com o emprego das aplicações do cálculo diferencial.

É possível demonstrar, por exemplo, que, se a curva possuir pontos múltiplos eles pertencerão à circunferência de círculo

$$x(x-p) + y^2 - py \cot \delta = 0 \quad (6.20)$$

Esta circunferência é denominada de circunferência de focos singulares.

A curva descrita por um ponto da biela é do sexto grau (em geral) e fechada. Extendendo, no entanto, o estudo da curva ao campo dos complexos, podemos nos referir aos pontos imaginários situados no infinito e determinar assíntotas, ou seja, tangentes a curva, passando por tais pontos.

A determinação destas assíntotas, segue os padrões usuais. Assim, podemos agrupar os termos de grau mais elevado na equação (6.1a), com o aspecto

$$A_1(x^2+y^2)^3 + A_2x(x^2+y^2)^2 + A_3y(x^2+y^2)^2 + \dots \quad (6.21)$$

Procurando a interseção da curva com a reta  $y = mx + m$  e igualando a zero os coeficientes dos termos de mais alto grau e seu imediato, após a redução do polinômio, encontraremos:

$$m = \pm i \quad (6.22)$$

$$m = p \left[ \frac{ab}{Rc} \mp \frac{b \cos \alpha}{c} i \right]$$

As assíntotas formam um sistema de retas imaginárias paralelas 3 a 3. A interseção das assíntotas contém 3 pontos reais, que são:

A origem,  $x = 0$ ;  $y = 0$

A articulação em  $O_3$ ,  $x = P$ ;  $y = 0$

Um ponto com as coordenadas:

$$y = P \frac{ab}{kc} \quad x = P - \frac{b \cos \alpha}{c}$$

Estes pontos também pertencem à circunferência de focos singulares citadas anteriormente.

Baseado na afirmação acima, é possível demonstrar o teorema de Samuel Roberts, e encontrar os 3 mecanismos que traçam a mesma curva de um ponto da biela. Cada mecanismo toma para centros fixos dois dos pontos acima, determinando a circunferência de focos singulares com o terceiro.

A equação(6.1) com os coeficientes determinados da forma mais conveniente, pode vir a ser empregada em um método de síntese, como será exposto mais adiante.

7

## RESOLUÇÃO DO QUADRILÁTERO ARTICULADO PROGRAMA PARA O COMPUTADOR DIGITAL IBM 1130

Conhecidas as proporções do mecanismo, podemos tomar o ângulo de giro da manivela como parâmetro; sendo o quadrilátero articulado um mecanismo de um grau de liberdade, os valores numéricos ligados ao movimento plano dos vários pontos do mecanismo serão obtidos facilmente.

De um modo geral, haverá duas soluções para o fechamento do mecanismo, ou seja, duas posições para a alavanca para cada posição da manivela com os mesmos parâmetros.

O programa escrito a seguir, foi realizado tendo em vista testar as soluções que serão obtidas pela síntese, servindo também para obter dados de um mecanismo conhecido.

O programa tem em vista varias partes, correspondentes a informações que podem ser desejadas.

### 1a. parte - RELAÇÕES DE MOBILIDADE

O programa aplica a análise de Grashof, como já foi descrito anteriormente.

### 2a. parte - TRAÇADO DA CURVA DE UM PONTO DA BIELA

O programa, baseado nas relações geométricas a seguir indicadas, fornece as coordenadas de ponto M para

cada posição da manivela , com o ângulo  $\phi$  varrendo todo o plano. Também fornece apenas o valor instantâneo para um valor definido do ângulo de posição da manivela de a partir de determinada origem.

### RELACIONES GEOMÉTRICAS

Conforme a figura 7.1

$$l^2 = p^2 + r^2 + 2pr \cos \phi \quad (7.1)$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{r \sin \phi}{p + r \cos \phi} \quad (7.2)$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{l^2 + s^2 - c^2}{2ls} \quad (7.3)$$

$$\cos \beta_1 = \frac{c^2 + l^2 - s^2}{2cl} \quad (7.4)$$

$$1^{\text{a}} \text{ solução} \quad \psi = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (7.5)$$

$$\Theta = \beta_1 - \alpha_1$$

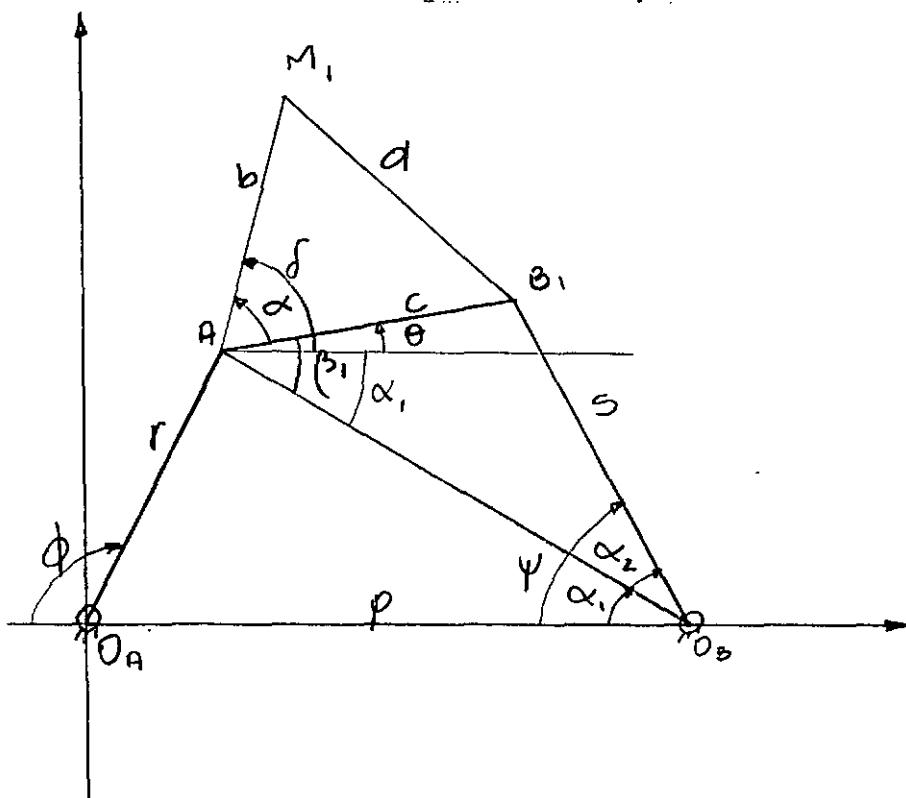
$$\delta = \alpha + \Theta$$

$$2^{\text{a}} \text{ solução} \quad \psi = \alpha_1 - \alpha_2 \quad (7.6)$$

$$\Theta = -(\alpha_1 + \beta_2)$$

$$\delta = \alpha + \Theta$$

## 1º Solução



## 2º Solução

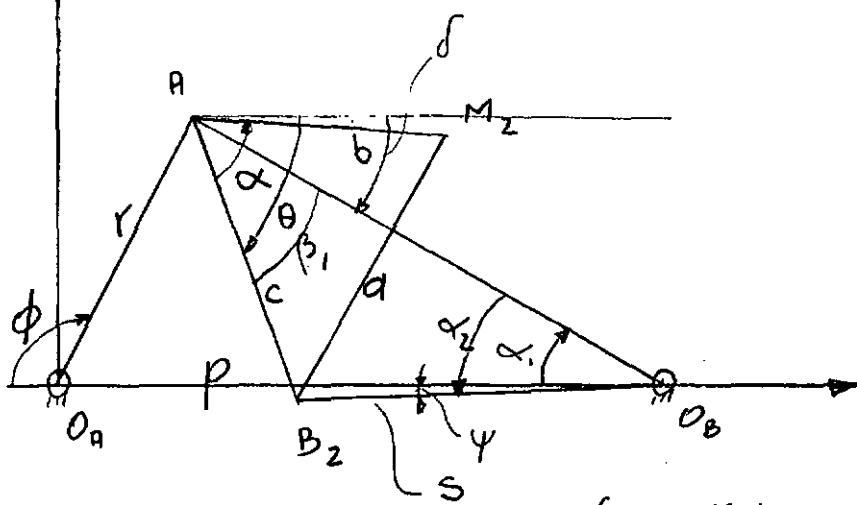


fig. 7.1

$$x_A = -R \cos \phi$$

$$x_B = p - s \cos \psi$$

$$y_A = R \sin \phi$$

$$y_B = s \sin \psi$$

$$x_M = x_A + b \cos \delta$$

$$y_M = y_A + b \sin \delta$$

Limitações:

O ângulo  $\phi$  que define a posição do ponto M será orientado. É o ângulo descrito pela biela ao abater-se sobre o lado AM = b. A orientação é trigonométrica usual.

Para mecanismo de manivela-alavanca, o ângulo de giro  $\phi$  da manivela de entrada pode variar entre  $0, 2\pi$  havendo duas soluções para o ângulo  $\psi$ . A primeira solução leva em conta o valor inicial positivo para o ângulo  $\psi$ , quando o ângulo  $\phi$  é igual a zero.

Quando o mecanismo é dupla-alavanca, o ângulo  $\phi$  é limitado. Inicialmente serão calculados os valores extremos de  $\phi$ . Observe-se que aos valores extremos de  $\phi$  não correspondem obrigatoriamente valores extremos de  $\psi$ .

Para os mecanismos com ponto morto, na passagem pelos mesmos, a continuação da trajetória pode seguir diferentemente as soluções 1 ou 2, a menos de restrições adicionais.

### 3a. parte - VALORES RELACIONADOS COM O CENTRO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO

O centro instantâneo de rotação pode ser

obtido graficamente, com facilidade, na interseção da manivela com a alavanca, em cada posição do mecanismo, fornecendo para suas coordenadas os valores:

$$x_I = \frac{P \tan \psi}{\tan \psi - \tan \phi} ; \quad y_I = -x_I \tan \psi \quad (7.8)$$

Atingindo o ângulo  $\phi$  valores notáveis, o cálculo não pode seguir a formula indicada. No entanto, para os valores notáveis de  $\phi$  é fácil obter as coordenadas do C.I., como indicamos a seguir

$$\phi = 0, \pi \left\{ \begin{array}{l} x_I = P \\ y_I = 0 \end{array} \right. \quad \psi = 0, \pi \left\{ \begin{array}{l} x_I = 0 \\ y_I = 0 \end{array} \right. \quad (7.9)$$

$$\phi = \pi/2, 3\pi/2 \left\{ \begin{array}{l} x_I = 0 \\ y_I = -P \tan \psi \end{array} \right. \quad \psi = \pi/2, 3\pi/2 \left\{ \begin{array}{l} x_I = P \\ y_I = -P \tan \phi \end{array} \right.$$

PONTO DA CIRCUNFERÊNCIA DE INFLEXÃO, em cada posição da manivela de entrada.

A circunferência de inflexão (lugar geométrico dos pontos do plano móvel que têm no determinado instante trajetória retilínea), pode ser determinada por alguns de seus pontos, empregando-se a relação de EULER SAVARI, que pode ser indicada:

$$J_A A = \frac{(I_A)^2}{O_A A} \quad (7.10)$$

Sendo:

$I$  = Centro instantâneo de rotação

$A$  = Ponto que descreve uma trajetória qualquer

$J_R$  = Ponto da circunferência de infle xão, correspondente ao ponto

$O_R$  = Centro de curvatura da trajetória do ponto .

Como são conhecidos os parâmetros do mecanismo, determinamos a circunferência de inflexão, para determinado valor de  $\phi$ , para os pontos A e B. De posse do centro instantâneo de rotação, determinamos o centro de curvatura da trajetória de M, usando a mesma equação.

O emprêgo do programa poderá ser extendido a outros valores que dependam da circunferência de inflexão.

#### NOMENCLATURA EMPREGADA NO PROGRAMA VALORES FORNECIDOS AO COMPUTADOR

IDENT - Número inteiro que identifica o caso trigonométrico na resolução do triângulo ABM.

ALSIG - Unidade algébrica que define a orientação do ângulo .

#### ELEMENTOS PARA O TRIÂNGULO ABM

P, R, S, - Parâmetros do mecanismos

N - Número de pontos em que se pretende testar o mecanismo.

RAFI - N valores do ângulo de giro da manivela em radianos, para testar o mecanismo.

#### VALORES FORNECIDOS PELO COMPUTADOR

XA, YA, - Coordenadas do ponto A

XB,YB - Coordenadas do ponto B

XM,YM - Coordenadas do ponto M

XCINS,YCINS - Coordenadas do C.I.

XJA,YJA - Coordenadas do ponto JA

XJB,YJB - Coordenadas do ponto JB

XJM,YJM - Coordenadas do ponto JM

XCINF,YCINF - Coordenadas do centro da

circunferência de inflexão.

XOM,YOM - Coordenadas do centro de curvatura da trajetória de M.

RCINF - Raio da circunferência de inflexão.

```

// JOB T 00FF 10FF
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(2501READER,1403PRINTER)
*NAME QMAN
      DIMENSION ORDEM(4),FI(36),PSI(36),XA(36),YA(36),XB(36),YB(36),
      IXM(36),YM(36),EE(2,2),FF(2)
C      ANALISE DE UM QUADRILATERO DE MANIVELAS
C      LOCALIZACAO DO PONTO M
      TAN(QQ)=SIN(QQ)/COS(QQ)
      PI=3.1415926535
      READ(8,1)IDENT,ALSIG
      WRITE(5,1)IDENT,ALSIG
1     FORMAT(13,F10.4)
      IF(IDENT-5)2,5,2
2     IF(IDENT-4)3,7,3
3     IF(IDENT-3)4,8,4
4     IF(IDENT-2)10,9,10
5     READ(8,6)A,B,C,P,R,S
6     FORMAT(6F10.4)
      CALL TRIAE(A,B,C,GAMA)
      RGAMA=GAMA
      CALL TRIAE(B,C,A,ALFA)
      RALFA=ALFA
      CALL TRIAE(C,A,B,BETA)
      RBETA=BETA
      GALFA=(180./PI)*RALFA
      GBETA=(180./PI)*RBETA
      GGAMA=(180./PI)*RGAMA
      GO TO 11
7     READ(8,6)GALFA,GGAMA,B,P,R,S
      RALFA=(PI/180.)*GALFA
      RGAMA=(PI/180.)*GGAMA
      CALL TRIAD(AD,B,CD,RALFA,BETA,RGAMA)
      RBETA=BETA
      GBETA=(180./PI)*RBETA
      A=AD
      C=CD
      GO TO 11
8     READ(8,6)GALFA,GGAMA,A,P,R,S
      RALFA=(PI/180.)*GALFA
      RGAMA=(PI/180.)*GGAMA
      CALL TRIAC(A,BC,CC,RALFA,BETA,RGAMA)
      RBETA=BETA
      GBETA=(180./PI)*RBETA
      B=BC
      C=CC
      GO TO 11
9     READ(8,6)A,B,GALFA,P,R,S
      RALFA=(PI/180.)*GALFA
      CALL TRIAB(A,B,CB,RALFA,BETA,GAMA)
      RBETA=BETA
      RGAMA=GAMA
      GBETA=(180./PI)*RBETA
      GGAMA=(180./PI)*RGAMA
      C=CB
      GO TO 11
10    READ(8,6)A,B,GGAMA,P,R,S
      RGAMA=(PI/180.)*GGAMA

```

P 142108 -28-  
JAYME MASCHKVICH

QMAN100

```

CALL TRIAA(A,B,CA,ALFA,BETA,RGAMA)
C=CA
RALFA=ALFA
RBETA=BETA
GALFA=(180./PI)*RALFA
GBETA=(180./PI)*RBETA
11 WRITE(5,12)A,B,C,GALFA,GBETA,GGAMA
12 FORMAT(' LOCALIZACAO DO PONTO M///,6X,'A',11X,'B',11X,'C',11X,
I'ALFA',8X,'BETA',8X,'GAMA'//,6F12.4//)
13 WRITE(5,13)P,R,S,C
FORMAT(' PARAMETROS DO MECANISMO//,6X,'P=',F12.4,6X,'R=',,
'F12.4,6X,'S',F12.4,6X,'C=',F12.4//)
C VERIFICACAO DA MOBILIDADE
CALL ORGAN(R,C,P,S,ORDEM)
X1=ORDEM(1)
X2=ORDEM(2)
X3=ORDEM(3)
X4=ORDEM(4)
XTEST=X1+X4
YTEST=X2+X3
IF(XTEST-YTEST)14,22,32
14 IF(X1-P)17,15,17
15 WRITE(5,16)
16 FORMAT(' MECANISMO E BIELA MANIVELA DUPLA'//)
JJ=1
GO TO 100
17 IF(X1-C)20,18,20
18 WRITE(5,19)
19 FORMAT(' MECANISMO E DUPLO OSCILANTE'//)
JJ=2
GO TO 100
20 WRITE(5,21)
21 FORMAT(' MECANISMO E BIELA MANIVELA SIMPLES'//)
JJ=1
GO TO 100
22 WRITE(5,23)
23 FORMAT(' MECANISMO TEM PONTO MORTO'//)
IF(X1-X2)24,25,24
24 GO TO 14
25 XXTES=P+R
YYTES=R+C
IF(XXTES-YYTES)28,26,28
26 WRITE(5,27)
27 FORMAT(' MECANISMO E PARALELOGRAMO'//)
GU TO 15
28 WRITE(5,29)
29 FURMAT(' MECANISMO E DELTOIDE'//)
IF(X1-P)30,31,31
30 GO TO 20
31 GO TO 15
32 WRITE(5,33)
33 FORMAT(' MECANISMO E DUPLO OSCILANTE'//)
JJ=2
C TRACADO DA CURVA SOLUCAO 1
100 WRITE(5,101)
101 FORMAT(' TRACADO DA CURVA SOLUCAO 1'//, FI XA
1 YA PSI XB YB XM YM
2//)
IF(JJ-2)102,103,103
102 GO TO 113

```

```

103 ALMIN=S+C
  CFMIN=(R**2+P**2-ALMIN**2)/(2.*R*P)
  SFMIN=SQRT(1.-CFMIN**2)
  TFMIN=SFMIN/CFMIN
  IF(TFMIN)104,105,105
104 FMIN=ATAN(TFMIN)&PI
  GO TO 106
105 FMIN=ATAN(TFMIN)
106 FIMIN=PI-FMIN
  IF(S-P+R)107,108,108
107 FIMAX=PI+FMIN
  GO TO 112
108 ALMAX=S-C
  CFMAX=(R**2+P**2-ALMAX**2)/(2.*R*P)
  SFMAX=SQRT(1.-CFMAX**2)
  TFMAX=SFMAX/CFMAX
  IF(TFMAX)109,110,110
109 FMAX=ATAN(TFMAX)+PI
  GO TO 111
110 FMAX=ATAN(TFMAX)
111 FIMAX=PI-FMAX
112 RAFI=FIMIN-PI/18.
  GO TO 114
113 RAFI=-PI/18.
114 ACRES=PI/18.
  DO 126 I=1,36
  RAFI=RAFI+ACRES
  IF(JJ-2)115,116,116
115 GO TO 119
116 IF(RAFI-FIMAX)117,117,118
117 GO TO 119
118 GO TO 126
119 TALF1=(R*SIN(RAFI))/(P+R*COS(RAFI))
  ALFA1=ATAN(TALF1)
  ALO=SQRT(R**2+P**2+2.*P*R*COS(RAFI))
  CALF2=(S**2+ALO**2-C**2)/(2.*S*ALO)
  SALF2=SQRT(1.-CASF2**2)
  TALF2=SALF2/CALF2
  IF(TALF2)120,121,121
120 ALFA2=ATAN(TALF2)+PI
  GO TO 122
121 ALFA2=ATAN(TALF2)
122 CBET1=(C**2+ALO**2-S**2)/(2.*C*ALO)
  SBET1=SQRT(1.-CBET1**2)
  TBET1=SBET1/CBET1
  IF(TBET1)123,124,124
123 BETA1=ATAN(TBET1)+PI
  GO TO 125
124 BETA1=ATAN(TBET1)
125 FI(I)=(180./PI)*RAFI
  RAPSI=ALFA1+ALFA2
  PSI(I)=(180./PI)*RAPSI
  RATET=BETA1-ALFA1
  RALFA=RALFA*ALSIG
  RADEL=RALFA+RATET
  XA(I)=-R*COS(RAFI)
  YA(I)=R*SIN(RAFI)
  XB(I)=P-S*COS(RAPSI)
  YB(I)=S*SIN(RAPSI)
  XM(I)=XA(I)+B*COS(RADEL)

```

```

      YM(I)=YA(I)+B*SIN(RADEL)
126 CONTINUE
      WRITE(5,127)(FI(I),XA(I),YA(I),PSI(I),XB(I),YB(I),XM(I),YM(I),I=
11,36)
127 FORMAT(8F12.4)
C     TRACADO DA CURVA SOLUCAO 2
      WRITE(5,201)
201 FORMAT('    TRACADO DA CURVA SOLUCAO 2'//      FI          XA
1      YA          PSI          XB          YB          XM          YM
2'//')
      IF(JJ-2)202,203,203
202 GO TO 204
203 RAFI=FIMIN-PI/18.
      GO TO 205
204 RAFI=-PI/18.
205 ACRES=PI/18.
      DO 217 I=1,36
      RAFI=RAFI+ACRES
      IF(JJ-2)206,207,207
206 GO TO 210
207 IF(RAFI-FIMAX)208,208,209
208 GO TO 210
209 GO TO 217
210 TALF1=(R*SIN(RAFI))/(P+R*COS(RAFI))
      ALFA1=ATAN(TALF1)
      ALO=SQRT(R**2+P**2+2.*P*R*COS(RAFI))
      CALF2=(S**2+ALO**2-C**2)/(2.*S*ALO)
      SALF2=SQRT(1.-CALF2**2)
      TALF2=SALF2/CALF2
      IF(TALF2)211,212,212
211 ALFA2=ATAN(TALF2)+PI
      GO TO 213
212 ALFA2=ATAN(TALF2)
213 CBET1=(C**2+ALO**2-S**2)/(2.*C*ALO)
      SBET1=SQRT(1.-CBET1**2)
      TBET1=SBET1/CBET1
      IF(TBET1)214,215,215
214 BETA1=ATAN(TBET1)+PI
      GO TO 216
215 BETA1=ATAN(TBET1)
216 FI(I)=(180./PI)*RAFI
      RAPSI=ALFA1-ALFA2
      PSI(I)=(180./PI)*RAPSI
      RATET=-(BETA1&ALFA1)
      RADEL=RALFA+RATET
      XA(I)=-R*COS(RAFI)
      YA(I)=R*SIN(RAFI)
      XB(I)=P-S*COS(RAPSI)
      YB(I)=S*SIN(RAPSI)
      XM(I)=XA(I)+B*COS(RADEL)
      YM(I)=YA(I)+B*SIN(RADEL)
217 CONTINUE
      WRITE(5,127)(FI(I),XA(I),YA(I),PSI(I),XB(I),YB(I),XM(I),YM(I),I=
11,36)
C     SAIDA PARA VALORES DETERMINADOS
      READ(8,300)N
300 FORMAT(I3)
      DO 620 I=1,N
      READ(8,301)RAFI
301 FORMAT(F12.4)

```

```

IF(JJ-2)302,303,303
302 GO TO 308
303 IF(RAFI-FIMIN)304,306,306
304 WRITE(5,305)RAFI
305 FORMAT('    RAFI=',F12.4,',    SOLUCAO IMPOSSIVEL'//)
GO TO 401
306 IF(RAFI-FIMAX)308,308,307
307 WRITE(5,305)RAFI
308 TALF1=(R*SIN(RAFI))/(P+R*COS(RAFI))
ALFA1=ATAN(TALF1)
AL0=SQRT(R**2+P**2+2.*P*R*COS(RAFI))
CALF2=(S**2+AL0**2-C**2)/(2.*S*AL0)
SALF2=SQRT(1.-CALF2**2)
TALF2=SALF2/CALF2
IF(TALF2)309,310,310
309 ALFA2=ATAN(TALF2)+PI
GO TO 311
310 ALFA2=ATAN(TALF2)
311 CBET1=(C**2+AL0**2-S**2)/(2.*C*AL0)
SBET1=SQRT(1.-CBET1**2)
TBET1=SBET1/CBET1
IF(TBET1)312,313,313
312 BETA1=ATAN(TBET1)+PI
GO TO 314
313 BETA1=ATAN(TBET1)
314 FI1=(180./PI)*RAFI
RAPSI=ALFA1+ALFA2
PSI1=(180./PI)*RAPSI
RATET=BETA1-ALFA1
RADEL=RALFA+RATET
XA1=-R*COS(RAFI)
YA1=R*SIN(RAFI)
XB1=P-S*COS(RAPSI)
YB1=S*SIN(RAPSI)
XM1=XA1+B*COS(RADEL)
YM1=YA1+B*SIN(RADEL)
WRITE(5,315)FI1,XA1,YA1,PSI1,XB1,YB1,XM1,YM1
315 FORMAT('    PRIMEIRA SOLUCAO PARA FI DETERMINADO'//, FI
1XA          YA          PSI          XB          YB          XM
2          YM'/,8F12.4//)
C      COORDENADAS DO CENTRO INSTANTANEO DE ROTACAO
IF(RAFI)402,401,402
401 XCINS=P
YCINS=0.
GO TO 406
402 IF(RAFI-PI)403,401,403
403 PPI=PI/2.
IF(RAFI-PPI)405,404,405
404 XCINS=0.
YCINS=P*TAN(RAPSI)
GO TO 406
405 PPI=(3.*PI)/2.
IF(RAFI-PPI)406,404,406
406 IF(RAPSI)408,407,408
407 XCINS=0.
YCINS=0.
GO TO 413
408 IF(RAPSI-PI)409,407,409
409 PPI=PI/2.
IF(RAPSI-PPI)411,410,411

```

```

410 XCINS=P
  YCINS=-P*TAN(RAFI)
  GO TO 413
411 PPI=(3.*PI)/2.
  IF(RAPSI-PPI)412,410,412
412 XCINS=(P*TAN(RAPSI))/(TAN(RAPSI)-TAN(RAFI))
  YCINS=-XCINS*TAN(RAFI)
C   COORDENADAS DOS PONTOS DA CIRCUNFERENCIA DE INFLEXAO
413 DIA2=(XCINS-XA1)**2+(YCINS-YA1)**2
  DJAA=DIA2/R
  XJA=-(R-DJAA)*COS(RAFI)
  YJA=(R-DJAA)*SIN(RAFI)
  DIB2=(XCINS-XB1)**2+(YCINS-YB1)**2
  DJBB=DIB2/S
  XJB=-(S-DJBB)*COS(RAPSI)+P
  YJB=(S-DJBB)*SIN(RAPSI)
C   CIRCUNFERENCIA DE INFLEXAO
  EE(1,1)=XJA-XCINS
  EE(1,2)=YJA-YCINS
  EE(2,1)=XJB-XCINS
  EE(2,2)=YJB-YCINS
  FF(1)=.5*(XJA**2+YJA**2-XCINS**2-YCINS**2)
  FF(2)=.5*(XJB**2+YJB**2-XCINS**2-YCINS**2)
  CALL SIMQ(EE,FF,2,KS)
  XCINF=FF(1)
  YCINF=FF(2)
  WRITE(5,414)KS
414 FORMAT('  NUMERO DE CODIGO PARA CIR INF',I3//)
  RCINF=(XCINS-XCINF)**2+(YCINS-YCINF)**2
  RCINF=SQRT(RCINF)
C   CENTRO DE CURVATURA DO PONTO M
C   RETA IM
  EE(1,1)=XCINS
  EE(2,1)=XM1
  EE(1,2)=1.
  EE(2,2)=1.
  FF(1)=YCINS
  FF(2)=YM1
  CALL SIMQ(EE,FF,2,KS)
  ARIM=FF(1)
  BRIM=FF(2)
  WRITE(5,415)KS
415 FORMAT('  NUMERO DE CODIGO PARA CEN CURV',I3//)
C   RETA QUE PASSA PELO CENTRO DA CIRC INF E PERPEND A IM
  BRP1M=YCINF+(1./ARIM)*XCINF
C   COORDENADAS DO PONTO DE INFLEXAO
  YPINM=ARIM*XPINM+BRIM
C   COORDENADAS DE JM
  XJM=XCINS+2.*(XPINM-XCINS)
  YJM=YCINS+2.*(YPINM-YCINS)
C   COORDENADAS DE OM
  DIM2=(XCINS-XM1)**2+(YCINS-YM1)**2
  DJMM=SQRT((XJM-XM1)**2+(YJM-YM1)**2)
  DOMM=DIM2/DJMM
  XOM=XM1-(XM1-XJM)*(DOMM/DJMM)
  YOM=YM1-(YM1-YJM)*(DOMM/DJMM)
  WRITE(5,416)XA1,YA1,XB1,YB1,XM1,YM1
416 FORMAT('  XA1=',F12.4,'YA1=',F12.4,'XB1=',F12.4,'YB1=',F12.4,
1'XM1=',F12.4,'YM1=',F12.4//)
  WRITE(5,417)XCINS,YCINS,XJA,YJA,XJB,YJB

```

```

417 FORMAT(' XCINS=',F12.4,'YCINS=',F12.4,'XJA=',F12.4,'YJA=',F12.4
1,'XJB=',F12.4,'YJB=',F12.4//)
  WRITE(5,418)XCINF,YCINF,XJM,YJM,XOM,YOM
418 FORMAT(' XCINF=',F12.4,'YCINF=',F12.4,'XJM=',F12.4,'YJM=',F12.4
1,'XOM=',F12.4,'YOM=',F12.4//)
  WRITE(5,419)RCINF
419 FORMAT(' RAI0 DA CIRCUNF. DE INFLEXAO=',F12.4//)
  FI2=(180./PI)*RAFI
  RAPSI=ALFA1-ALFA2
  PSI2=(180./PI)*RAPSI
  RATET=-(BETA1&ALFA1)
  RADEL=RALFA+RATET
  XA2=-R*COS(RAFI)
  YA2=R*SIN(RAFI)
  XB2=P-S*COS(RAPSI)
  YB2=S*SIN(RAPSI)
  XM2=XA2+B*COS(RADEL)
  YM2=YA2+B*SIN(RADEL)
  WRITE(5,516)FI2,XA2,YA2,PSI2,XB2,YB2,XM2,YM2
516 FORMAT(' SEGUNDA SOLUCAO PARA FI DETERMINADO'//      FI
1XA          YA          PSI          XB          YB          XM
2          YM//,8F12.4//)
C   COORDENADAS DO CENTRO INSTANTANEO DE ROTACAO
  IF(RAFI)602,601,602
601 XCINS=P
  YCINS=0.
  GO TO 606
602 IF(RAFI-PI)603,601,603
603 PPI=PI/2.
  IF(RAFI-PPI)605,604,605
604 XCINS=0.
  YCINS=P*TAN(RAPSI)
  GO TO 606
605 PPI=(3.*PI)/2.
  IF(RAFI-PPI)606,604,606
606 IF(RAPSI)608,607,608
607 XCINS=0.
  YCINS=0.
  GO TO 613
608 IF(RAPSI-PI)609,607,609
609 PPI=PI/2.
  IF(RAPSI-PPI)611,610,611
610 XCINS=P
  YCINS=-P*TAN(RAFI)
  GO TO 613
611 PPI=(3.*PI)/2.
  IF(RAPSI-PPI)612,610,612
612 XCINS=(P*TAN(RAPSI))/(TAN(RAPSI)-TAN(RAFI))
  YCINS=-XCINS*TAN(RAFI)
C   COORDENADAS DOS PONTOS DA CIRCUNFERENCIA DE INFLEXAO
613 DIA2=(XCINS-XA2)**2+(YCINS-YA2)**2
  DJAA=DIA2/R
  XJA=-(R-DJAA)*COS(RAFI)
  YJA=(R-DJAA)*SIN(RAFI)
  DIB2=(XCINS-XB2)**2+(YCINS-YB2)**2
  DJBB=DIB2/S
  XJB=-(S-DJBB)*COS(RAPSI)+P
  YJB=(S-DJBB)*SIN(RAPSI)
C   CIRCUNFERENCIA DE INFLEXAO
  EE(1,1)=XJA-XCINS

```

```

EE(1,2)=YJA-YCINS
EE(2,1)=XJB-XCINS
EE(2,2)=YJB-YCINS
FF(1)=.5*(XJA**2+YJA**2-XCINS**2-YCINS**2)
FF(2)=.5*(XJB**2+YJB**2-XCINS**2-YCINS**2)
CALL SIMQ(EE,FF,2,KS)
XCINF=FF(1)
YCINF=FF(2)
WRITE(5,614)KS
614 FORMAT('  NUMERO DE CODIGO PARA CIR INF',I3//)
RCINF=(XCINS-XCINF)**2+(YCINS-YCINF)**2
RCINF=SQRT(RCINF)
C   CENTRO DE CURVATURA DO PONTO M
C   RETA IM
EE(1,1)=XCINS
EE(2,1)=XM2
EE(1,2)=1.
EE(2,2)=1.
FF(1)=YCINS
FF(2)=YM2
CALL SIMQ(EE,FF,2,KS)
ARIM=FF(1)
BRIM=FF(2)
WRITE(5,615)KS
615 FORMAT('  NUMERO DE CODIGO PARA CEN CURV',I3//)
C   RETA QUE PASSA PELO CENTRO DA CIRC INF E PERPEND A&IM
BRPIM=YCINF+(1./ARIM)*XCINF
C   COORDENADAS DO PONTO DE INFLEXAO
XPINM=(BRPIM-BRIM)/(ARIM+(1./ARIM))
YPINM=ARIM*XPINM+BRIM
C   COORDENADAS DE JM
XJM=XCINS+2.*(XPINM-XCINS)
YJM=YCINS+2.*(YPINM-YCINS)
C   COORDENADAS DE OM
DIM2=(XCINS-XM2)**2+(YCINS-YM2)**2
DJMM=SQRT((XJM-XM2)**2+(YJM-YM2)**2)
DOMM=DIM2/DJMM
XOM=XM2-(XM2-XJM)*(DOMM/DJMM)
YOM=YM2-(YM2-YJM)*(DOMM/DJMM)
WRITE(5,616)XA2,YA2,XB2,YB2,XM2,YM2
616 FORMAT('  XA2=',F12.4,'YA2=',F12.4,'XB2=',F12.4,'YB2=',F12.4,
1'XM2=',F12.4,'YM2=',F12.4//)
WRITE(5,617)XCINS,YCINS,XJA,YJA,XJB,YJB
617 FORMAT('  XCINS=',F12.4,'YCINS=',F12.4,'XJA=',F12.4,'YJA=',F12.4
1,'XJB=',F12.4,'YJB=',F12.4//)
WRITE(5,618)XCINF,YCINF,XJM,YJM,XOM,YOM
618 FORMAT('  XCINF=',F12.4,'YCINF=',F12.4,'XJM=',F12.4,'YJM=',F12.4
1,'XOM=',F12.4,'YOM=',F12.4//)
WRITE(5,619)RCINF
619 FORMAT('  RAIO DA CIRCUNF. DE INFL.=',F12.4//)
620 CONTINUE
CALL EXIT
END

```

8-

## MÉTODOS DE SÍNTESE DE MECANISMOS ARTICULADOS PLANOS

Exposição e análise de alguns métodos convencionais

A síntese de mecanismos, objetivo principal do presente trabalho, consiste na determinação de dimensões e demais características de um mecanismo de determinada natureza, para que o mesmo realize determinada performance.

O trabalho de síntese parte de propriedades que foram ditadas pela análise e do equacionamento dos vínculos próprios do mecanismo desejado.

Alguns problemas permitem determinar um mecanismo que os resolva com exatidão. Outros exigem uma solução aproximada, dentro de certas prescrições. É possível analizar, o erro resultante do dimensionamento (denominado de erro estrutural) e aplicar processos para reduzi-lo.

Os processos aproximados fazem uso dos pontos precisos, isto é, pontos nos quais o mecanismo resolve com exatidão a performance desejada. Entre os pontos precisos, e particularmente fora o intervalo determinado pelos mesmos, existe inexatidão, que deve ser limitada.

Neste trabalho, analizaremos vários métodos tradicionais que serão aplicados a problemas novos. Um método novo, que constitue a principal contribuição do autor na presente tese, baseado em propriedades das centrodades, será abordado como parte final da síntese de mecanismos articulados planos.

## MÉTODOS GEOMÉTRICOS

A solução geométrica ( empregando a régua e o compasso) de problemas de desenho, pode ser utilizada para a síntese de mecanismos articulados planos.

Apresentamos alguns problemas, que servem também para ilustrar como o problema prático é transportado para a síntese.

Projetar um quadrilátero articulado plano, de proporções tais, que no intervalo  $0 < x < 30$  se obtenha uma relação entre duas variáveis definida por:

$$y = \ln x = \tan x - x$$

Este problema é conhecido como o de geração de funções. Fazemos o ângulo de giro da manivela , a partir de determinada origem proporcional ao valor da variável independente  $x$ , enquanto o ângulo de giro da alavanca, a partir de determinada origem é tomado proporcional a variável dependente  $y$ . A figura 8.5 com a solução do primeiro problema, apresenta o mecanismo com escalas circulares colocadas nos eixos  $O_A$  e  $O_B$ , satisfazendo a relação desejada.

Em geral, não é possível sintetizar um mecanismo em que a relação dada subsista em todo o intervalo. APLICAMOS ENTÃO A NOÇÃO DO PONTO PRECISO, OU SEJA, PROCURAMOS SATISFAZER A RELAÇÃO EM UM NÚMERO FINITO DE PONTOS AO LONGO DO INTERVALO DE-

sejado.

O espaçamento dos pontos e outras técnicas, contribuem para minimizar o erro em pontos que não os pontos precisos. Lembramos que, além do intervalo empregado para a síntese, não existe nenhuma relação determinada a priori entre as variáveis.

### GERAÇÃO DE FUNÇÕES COM 3 PONTOS PRECISOS

A escolha dos pontos precisos pode obedecer a uma lei qualquer, ou a uma escolha arbitrária. Inclusive os valores a obedecer em 3 posições podem ser determinados arbitrariamente, sem obedecer a nenhuma função explícita. No caso presente, o espaçamento foi escolhido de modo a contribuir para minimizar o erro fora dos pontos precisos. Para tal fim, a posição dos mesmos dentro do intervalo foi escolhida empregando os polinômios de Chebychev. Alguns elementos do mecanismo serão arbitrados, no método dos 3 pontos precisos, sem prejuízo do resultado.

Façamos a variação angular da manivela de entrada linearmente proporcional a variação da variável independente, ou seja:

$$\frac{\phi - \phi_i}{x - x_i} = \frac{\Delta \phi}{\Delta x} \quad \therefore \quad \frac{\phi - \phi_i}{\Delta \phi} = \frac{x - x_i}{\Delta x}, \quad \text{ou ainda}$$

$$\phi - \phi_i = \frac{\Delta \phi}{\Delta x} (x - x_i) = r_x (x - x_i)$$

Sendo:

- $x_i$  - Valor inicial de  $x$
- $\Delta x$  - Intervalo de variação de  $x$
- $\phi_i$  - Valor inicial de  $\phi$
- $\Delta \phi$  - Intervalo de variação de  $\phi$

Para a variável dependente, teremos de modo análogo:  $\frac{\psi - \psi_i}{\delta - \delta_i} = \frac{\Delta \psi}{\Delta \delta} \therefore \frac{\psi - \psi_i}{\Delta \psi} = \frac{\delta - \delta_i}{\Delta \delta}$ , ou ainda

$$\psi - \psi_i = \frac{\Delta \psi}{\Delta \delta} (\delta - \delta_i) = r_3 (\delta - \delta_i)$$

$y_i$  - Valor inicial de

$\Delta y$  - Intervalo de variação de

$\varphi_i$  - Valor inicial de

$\Delta \varphi$  - Intervalo de variação de

Os valores numéricos a aplicar, são:

$$\Delta x = x_f - x_i = 30^\circ \quad (\text{sentido trigonométrico})$$

$$\Delta \phi = \phi_f - \phi_i = 60^\circ$$

$$x_i = 2,01^\circ$$

$$y_i = 0$$

$$x_2 = 15^\circ$$

$$y_2 = 0,006$$

$$x_3 = 27,99^\circ$$

$$y_3 = 0,043$$

$$\Delta y = \delta_f - \delta_i = 0,0538$$

$$\Delta \varphi = \varphi_f - \varphi_i = 30^\circ \quad (\text{arbitrada})$$

Os ângulos totais de giro da manivela e da alavanca a partir de suas posições iniciais, serão:

$$\phi_{12} = \phi_2 - \phi_1 = \frac{\Delta\phi}{\Delta x} (x_2 - x_1) = 25,98^\circ$$

$$\phi_{13} = \phi_3 - \phi_1 = \frac{\Delta\phi}{\Delta x} (x_3 - x_1) = 51,96^\circ$$

$$\psi_{12} = \psi_2 - \psi_1 = \frac{\Delta\psi}{\Delta y} (y_2 - y_1) = 3,42^\circ$$

$$\psi_{13} = \psi_3 - \psi_1 = \frac{\Delta\psi}{\Delta y} (y_3 - y_1) = 23,97^\circ$$

Transformamos o problema em outro problema geométrico. Conhecidas duas rotações sucessivas da manivela e as correspondentes rotações sucessivas da alavanca, determinar as proporções do quadrilátero articulado.

A solução do novo problema é obtida com a ajuda dos polos e polos relativos para deslocamento finito.

O polo relativo para os deslocamentos correspondentes  $\phi_{12}$ ,  $\psi_{12}$ , é a interseção de duas retas:

$O_A R_{12}$ , fazendo ângulo  $-\frac{\phi_{12}}{2}$  com a base, e  
 $O_B R_{12}$ , fazendo ângulo  $\frac{\psi_{12}}{2}$  com a base.

Numa inversão cinemática (a manivela passando a constituir a base, e os deslocamentos compatíveis com os vínculos) o polo relativo é o centro de rotação da biela e equivalente às duas rotações  $-\phi_{12}$  e  $\psi_{12}$ , como indicamos nas figuras 8.1 e 8.3

No problema em estudo podemos determinar

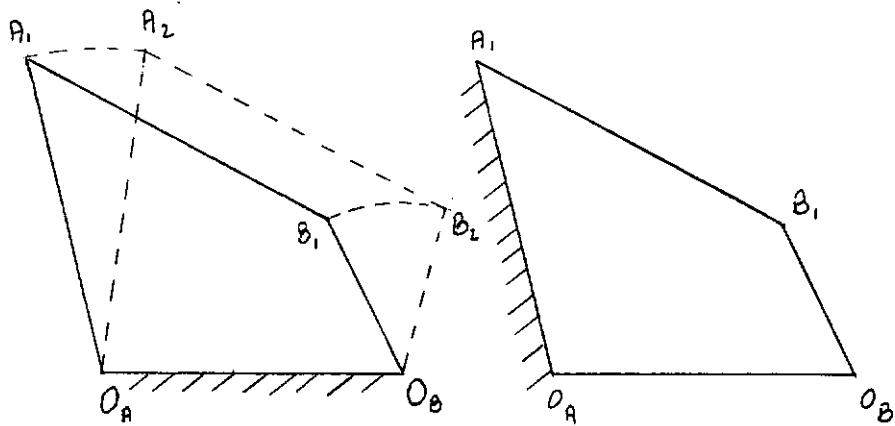


fig. 8.1 - Quadrilátero  
deslocamentos  
correspondentes

Inversão  
cinemática

fig. 8.2

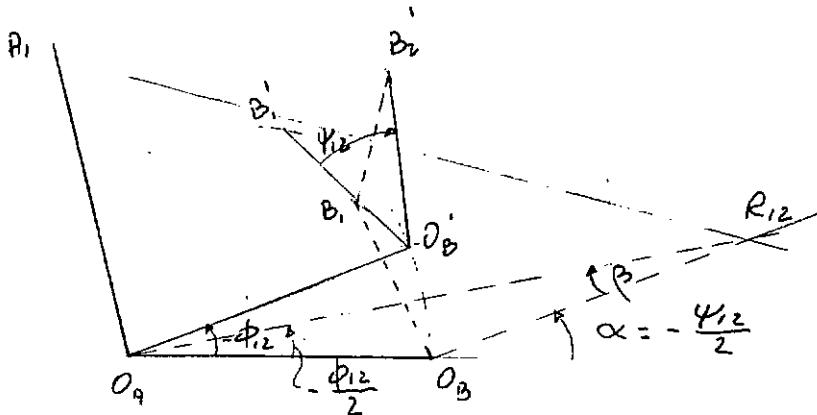


fig. 8.3 - Polo relativo

dois polos relativos, a saber:  $R_{12}$  e  $R_{13}$

Para a solução do nosso problema, é possível ainda arbitrar a posição do ponto extremo da manivela A, e a distância de centros (comprimento da base) (figura 8.4).

O ponto extremo da alavanca B, será obtido na interseção de duas retas, a saber:

$$R_{12} \text{U} \quad | \quad \beta_2 = A, R_{12} \text{U} = O_A R_{12} O_B$$

$$R_{13} \text{V} \quad | \quad \beta_3 = A, R_{13} \text{V} = O_A R_{13} O_B$$

A afirmativa de que a solução geométrica é válida, basseia-se no fato de que vistos de um polo relativo, a manivela e a alavanca aparecem sob ângulos iguais, bem como a base e a biela (Hartenberg e Denavit).

Temos então o mecanismo desenhado na posição inicial correspondente a  $\delta_1 = \text{Inv } x$ . A figura apresenta o mecanismo e a escala circular que permite avaliar o valor de  $\text{Inv } x$  para cada valor de  $x$ .

A arbitrariedade para a escala do ponto A pode conduzir a soluções estranhas, visto que as condições geométricas empregadas são suficientes, mas não necessárias.

Os parâmetros obtidos foram:

$$P = 1,0 ; \quad R = 1,2 ; \quad S = 1,12 ; \quad c = 0,67$$

$$\phi_1 = 90^\circ ; \quad \psi_1 = 28^\circ$$

Aplicando estes parâmetros no programa QMAN, encontramos para erro máximo, o valor correspondente a  $x = 18^\circ$ , ou seja:  $\gamma = 0,0133$  ao invés de  $\gamma = 0,0147$ .

O erro máximo equivale a 5% da variação de  $y$ .

A redução do erro pode ser tentada pelo reespacamento dos pontos precisos, ou mudança dos valores arbitrários.

O mecanismo, com as escalas, está indicado na figura (8.5).

#### GERAÇÃO DE FUNÇÕES COM QUATRO PONTOS PRECISOS

Para resolver o problema com 4 pontos precisos, o caminho anterior já não serve. Uma solução seria obter pontos simetricamente colocados em relação a base, mas haveria prejuízo para minimização do erro. O método adequado faz intervir os chamados pontos de trajetórias circulares e "pontos centros".

Submetendo um ponto a 2 rotações finitas sucessivas (ocupará ao todo 3 posições) diferentes, será sempre possível encontrar um polo único, tal que o ponto, submetido a uma única rotação em torno do polo, terá uma trajetória circular passando pelas 3 posições. Em outras palavras, 3 pontos sempre pertencem a uma circunferência de raio a determinar.

Quando se submete um plano a 3 rotações

fig. 8.4

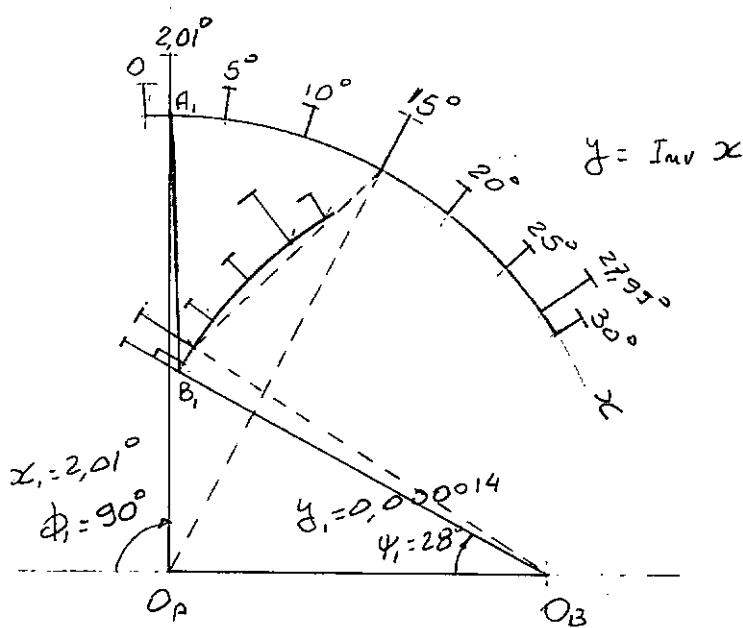
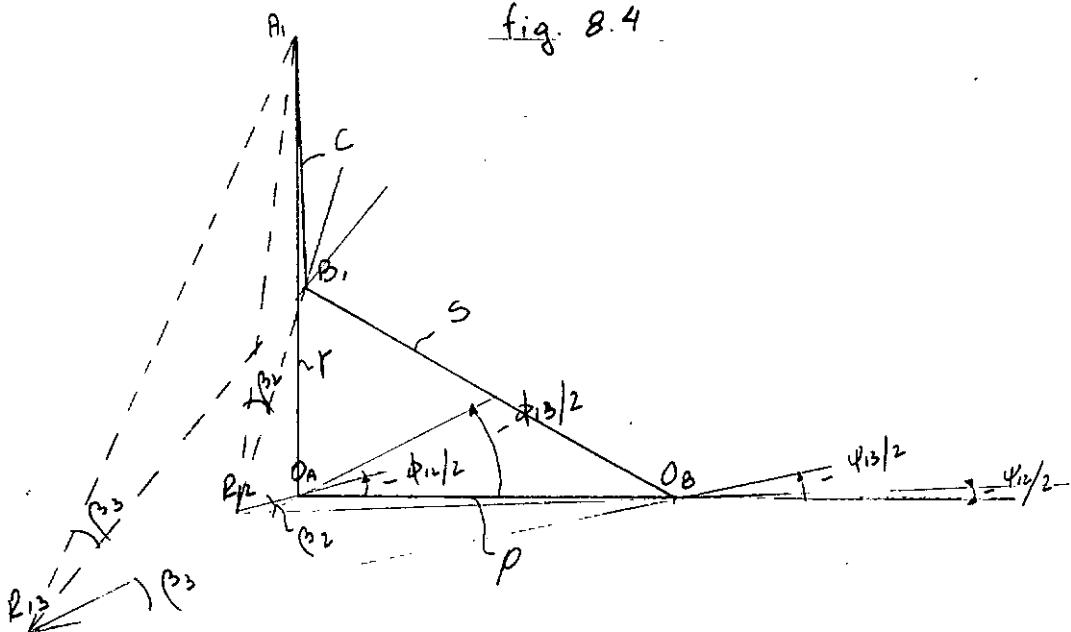


fig. 8.5

finitas sucessivas, as 4 posições ocupadas por um ponto pertencente ao plano, em geral, não pertencerão a mesma circunferência, ou seja, para que 4 pontos pertençam a uma circunferência, torna-se necessário obedecer a uma condição de compatibilidade.

Em um movimento plano, os pontos que em 4 posições finitamente separadas, dadas por 3 rotações sucessivas em torno de pontos diferentes permanecem em uma circunferência, chamados "pontos de trajetórias circulares", definem uma curva. Seus centros definem outra curva chamada de curva dos "pontos centros". Em uma inversão cinemática, estes pontos mudam de posição.

A descrição e comprovação do método geométrico para a obtenção de tais pontos, não será aqui apresentada. Faremos uma aplicação, fazendo a denominação corretamente empregada para as figuras geométricas necessárias.

O mesmo problema anterior será executado com 4 pontos precisos. O erro estrutural a esperar neste caso será menor e por este motivo, o espaçamento dos pontos precisos será uniforme.

Tomaremos os dados:

$$x_1 = 0^\circ \quad x_2 = 10^\circ \quad x_3 = 20^\circ \quad x_4 = 30^\circ$$

Os valores correspondentes de y serão:

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 0,0018 \quad y_3 = 0,0149 \quad y_4 = 0,0538$$

Os ângulos de giro serão

$$\phi_{12} = 20^\circ \quad \phi_{13} = 40^\circ \quad \phi_{14} = 60^\circ$$

$$\psi_{12} = 1,01^\circ \quad \psi_{13} = 8,33^\circ \quad \psi_{14} = 30,07^\circ$$

De posse destes valores, podemos obter 6 polos relativos, a saber:

$$R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{23}, R_{24}, R_{34} \quad \text{figura (8.6)}$$

Escolhemos então, um quadrilátero de polos opostos (quadrilátero, podendo ser estrelado e constituído de lados formados por polos tais, que as diagonais que ligam os polos não contém o mesmo índice)  $R_{14} R_{13} R_{23} R_{24}$

Determinamos um ponto centro, usando a sequência:

- 1) Construimos as normais aos meios de 2 lados opostos  $R_{13} R_{14}$  e  $R_{23} R_{24}$
- 2) Construimos ângulos arbitrários  
 $M' R_{24} R_{23} = M' R_{14} R_{13} = \alpha$
- 3) Traçamos circunferências com centros  $M'$  e  $M''$  ao longo das normais e passando pelos respectivos polos.
- 4) A interseção das duas circunferências é um ponto centro.

Há uma infinidade de pontos centro (duas para cada interseção como descrita). Tomamos um dos pontos determinados  $A$ , como ponto centro e o próprio ponto  $O_A$  como outro ponto centro que é.

O ponto B, será obtido na interseção de duas retas a saber:

$R_{12} u \neq R_{13} v$ , tais que:

$$A, R_{12} u = \frac{\phi_{12} - \psi_{12}}{2}$$

$$A, R_{13} v = \frac{\phi_{13} - \psi_{13}}{2}$$

Os parâmetros medidos na solução geométrica com 4 pontos precisos, são:

$$\begin{array}{llll} p = 1 & R = 1,44 & S = 1,3 & C = O, B \\ \phi_1 = 70^\circ & \psi_1 = 30^\circ & & \end{array}$$

Aplicando estes valores no programa QMAN, podemos constatar que o erro é muito grande. No caso, o erro gráfico se acumula, em virtude da dificuldade em obter todos os pontos de interseção, pois a função varia pouco, a princípio.

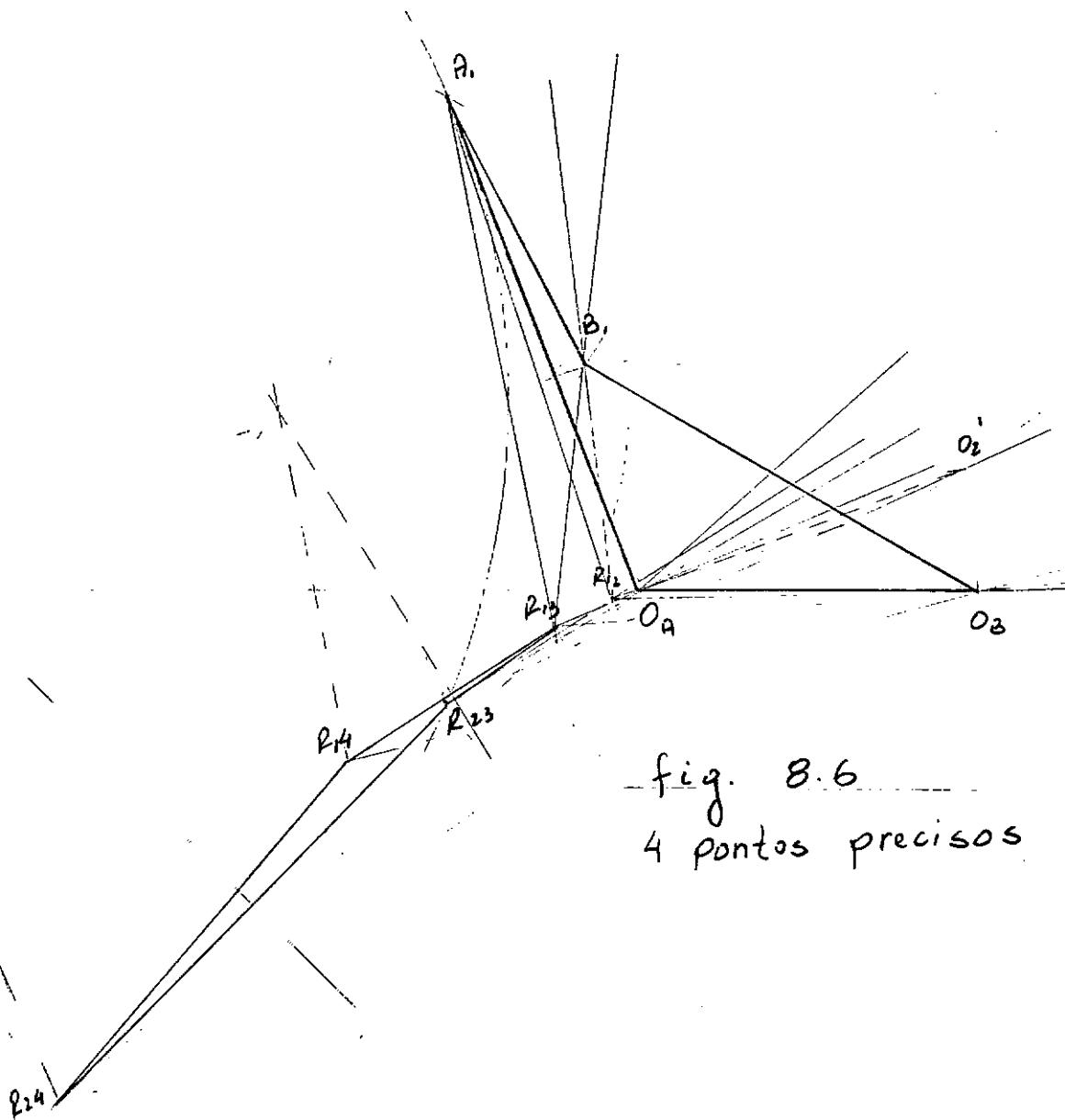


fig. 8.6  
4 pontos precisos

### MÉTODOS ALGÉBRICOS

A solução dos problemas de síntese por meio de régua e compasso pode satisfazer em alguns casos, mas em geral deixa a desejar.

A álgebra é empregada para, após estabelecer relação entre as variáveis práticas e as variáveis de projeto do mecanismo, colocar em um sistema de equações os parâmetros a determinar do mecanismo.

A solução do sistema simultâneo de equações, partindo de valores numéricos determinados nos pontos precisos, fornecerá as dimensões do mecanismo desejado.

Para relacionar os parâmetros do mecanismo com as variações angulares da manivela e da alavanca de um quadrilátero articulado, procuramos estabelecer as equações trigonométricas entre os mesmos, como uma relação exata. Em seguida, procuramos agrupar os parâmetros de modo a definir novos parâmetros algébricos, capazes de fornecer os parâmetros a determinar do mecanismo, um a um.

Este tratamento, equivale a determinar uma distância conhecida, ( o comprimento da biela, por exemplo) ou a determinar em função das variáveis e parâmetros, a diferença entre o valor fornecido pela álgebra do problema e o valor exato, de modo a torna-la mínima. Em geral, nos pontos precisos esta diferença é tornada nula.

Uma das equações mais simples e de resultados mais produtivos para a resolução do quadrilátero articulado, é a conhecida equação de Freudenstein.

Définindo

$\phi$  - Ângulo de rotação da manivela . . . . .  
partir de determinada origem (sentido trigonométrico)

$\psi$  - Ângulo de rotação da alavanca . . . . . partindo de determinada origem, adotada uma das duas possíveis soluções (nada sendo dito em contrário, será adotada a solução positiva, isto é, a que fornece  $\psi$  positivo para  $\phi$  nulo).

A equação será obtida em função do movimento circular dos pontos A e B, e pela constância da distância AB.

Segundo as definições da figura (8.7), temos:

$$x_2 = a_1 \cos \phi$$

$$y_2 = a_1 \sin \phi$$

$$x_3 = -a_4 + a_3 \cos \psi$$

$$y_3 = a_3 \sin \psi$$

$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = a_2^2$

Substituindo e agrupando convenientemente os termos, após as transformações trigonométricas necessárias obteremos a equação de Freudenstein

$$K_1 \cos \phi - K_2 \cos \psi + K_3 = \cos(\phi - \psi) \quad (8.1)$$

$$K_1 = \frac{a_4}{a_3} \qquad K_2 = \frac{a_4}{a_1}$$

$$K_3 = \frac{a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2a_1 a_3}$$

No problema de geração de funções, sempre possuímos os ângulos  $\phi$  e  $\psi$  em alguns pontos, o que permite obter um sistema de equações nos parâmetros de Freudenstein.

### GERAÇÃO DE FUNÇÕES COM 3 PONTOS PRECISOS

Para 3 pontos precisos, a equação (8.1) escrita 3 vezes, em função dos valores de  $\phi$  e  $\psi$  fornece um sistema linear, que pode ser resolvido facilmente. O parâmetro de projeto  $a_4$  é tomado igual a unidade, servindo de fator de escala para as dimensões do mecanismo.

Tendo em vista as facilidades do computador, inclusive sub-rotina própria para resolver o sistema simultâneo de equações lineares, escrevemos o programa SINTE.

Aplicamos para a solução do mesmo problema já resolvido pelo método geométrico. Os parâmetros obtidos foram:

$$\begin{array}{lll} p = 1 & \rho = 1,1006 & s = 1,0979 \\ c = 0,5539 & \phi = 90^\circ & \psi = 30^\circ \end{array}$$

A análise do erro revela um erro máximo de  $2,5^\circ$  correspondente a  $\chi = 18^\circ$ , dentro do intervalo de síntese.

### GERAÇÃO DE FUNÇÕES COM 4 PONTOS PRECISOS

Para 4 pontos precisos, não é possível escrever simplesmente um sistema de equações simultâneo e resolvê-lo. Havendo um parâmetro a determinar, que não seja um dos  $K$ , o sistema não mais será linear. Torna-se necessário

// JOB T 00FF 10FF

P 142108

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	00FF	00FF	0000
0001	10FF	10FF	0001

V2 M05 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

JAYME MASCHKVICH

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

\*IOCS(2501READER,1403PRINTER)

\*NAME SINTSEPELA EQUACAO DE FREUDENSTEIN

DIMENSION EE(3,3),FF(3)

C SOLUCAO DO PROBLEMA DE GERACAO DA FUNCAO INVOLUTA COM 03 PONTOS

TAN(QQ)=SIN(QQ)/COS(QQ)

PI=3.1415926535

DO 100 I=1,3

READ(8,1)X0,XS,GFI1,PSI1,DELPS

1 FORMAT(6F10.4)

WRITE(5,5)X0,XS,GFI1,PSI1,DELPS

5 FORMAT(' X0 XS FI1 PSI1 DELPS'//6F12.4)

1DELFI DELPS'//6F12.4)

DELX=X0-X0

VX=DELX/2.

X2=X0+VX

X1=X2-VX\*COS(PI/6.)

X3=X2+VX\*COS(PI/6.)

X12=X2-X1

X13=X3-X1

FI12=(X12/DELX)\*DELFI

FI13=(X13/DELX)\*DELFI

RX1=(PI/180.)\*X1

RX2=(PI/180.)\*X2

RX3=(PI/180.)\*X3

RX0=(PI/180.)\*X0

RXS=(PI/180.)\*XS

Y1=TAN(RX1)-RX1

Y2=TAN(RX2)-RX2

Y3=TAN(RX3)-RX3

YO=TAN(RX0)-RX0

YS=TAN(RXS)-RXS

WRITE(5,6)X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3

6 FORMAT(' X Y'//,3(2F12.4)//)

DELY=YS-Y0

Y12=Y2-Y1

Y13=Y3-Y1

PSI12=(Y12/DELY)\*DELPS

PSI13=(Y13/DELY)\*DELPS

GFI2=GFI1+FI12

GFI3=GFI1+FI13

GPSI2=GPSI1+PSI12

GPSI3=GPSI1+PSI13

WRITE(5,7)GFI1,PSI1,DELPS,GFI2,PSI2,GFI3,PSI3

7 FORMAT(' FI PSI'//,3(2F12.4)//)

RFI1=(PI/180.)\*GFI1

RFI2=(PI/180.)\*GFI2

RFI3=(PI/180.)\*GFI3

```

RPSI1=(PI/180.)*GPSI1
RPSI2=(PI/180.)*GPSI2
RPSI3=(PI/180.)*GPSI3
C FORMACAO DA MATRIZ DE EQUACOES SIMULTANEAS
EE(1,1)=COS(RFI1)
EE(2,1)=COS(RFI2)
EE(3,1)=COS(RFI3)
EE(1,2)=-COS(RPSI1)
EE(2,2)=-COS(RPSI2)
EE(3,2)=-COS(RPSI3)
EE(1,3)=1.
EE(2,3)=1.
EE(3,3)=1.
FF(1)=COS(RFI1-RPSI1)
FF(2)=COS(RFI2-RPSI2)
FF(3)=COS(RFI3-RPSI3)
CALL SIMQ(EE,FF,3,KS)
U1=FF(1)
U2=FF(2)
U3=FF(3)
R=1./U2
S=1./U1
TEST=R**2+S**2+1.-(2.*R*S*U3)
IF(TEST)27,27,28
27 C=0.
GO TO 35
28 C=SQRT(TEST)
35 P=1.
WRITE(5,30)KS
30 FORMAT(' NUMERO DE CODIGO KS=',I3)
WRITE(5,40)P,R,S,C
40 FORMAT(' P R S C'//4F12.4//)
100 CONTINUE
CALL EXIT
END

```

FEATURES SUPPORTED  
 ONE WORD INTEGERS  
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR SINTE  
 COMMON 0 VARIABLES 140 PROGRAM 730

END OF COMPILEATION

// XEQ

X0	XS	FI1	PSI1	DELFI	
10.0000	30.0000	90.0000	45.0000	30.0000	30.0000
X	Y				
11.3397	0.0026				
20.0000	0.0149				
28.6602	0.0463				

FI PSI

90.0000	45.0000
102.9903	52.0899
115.9807	70.2562

NUMERO DE CODIGO KS= 0

P R S C

1.0000	1.3479	1.5481	0.2703
--------	--------	--------	--------

XO XS FI1 PSI1 DELFI

X 0.0000	Y 30.0000	90.0000	30.0000	60.0000	30.0000
----------	-----------	---------	---------	---------	---------

X Y

2.0096	0.0000
15.0000	0.0061
27.9903	0.0429

FI PSI

90.0000	30.0000
115.9807	33.4243
141.9615	53.9744

NUMERO DE CODIGO KS= 0

P R S C

1.0000	1.1006	1.0979	0.5539
--------	--------	--------	--------

XO XS FI1 PSI1 DELFI

X 10.0000	Y 30.0000	90.0000	45.0000	30.0000	30.0000
-----------	-----------	---------	---------	---------	---------

X Y

11.3397	0.0026
20.0000	0.0149
28.6602	0.0463

FI PSI

90.0000	45.0000
102.9903	52.0899
115.9807	70.2562

um artifício para resolve-lo.

Obtidos os valores das variações angulares das posições das manivela e da alavanca,

$$\phi_j = \phi + p_j$$

$$\psi_j = \psi + \gamma_j \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Arbitramos o valor da diferença  $\lambda = \phi - \psi$

e reescrevemos o sistema de equações na forma:

$$K_1 \cos(\phi + p_j) - K_2 \cos(\psi + \gamma_j) + K_3 = \cos[(\phi + p_j) - (\psi + \gamma_j)]$$

Podemos agora eliminar sucessivamente as variáveis.

Subtraindo da primeira equação todas as demais, ficamos com um sistema de 3 equações que escrevemos:

$$K_1 [\cos(\phi + p_1) - \cos(\phi + p_j)] - K_2 [\cos(\psi + \gamma_1) - \cos(\psi + \gamma_j)]$$

$$= \cos[\lambda + p_1 - \gamma_1] - \cos[\lambda + p_j - \gamma_j] \quad j = 2, 3, 4$$

Aplicando uma transformação trigonométrica para as diferenças de cossenos, transformamos as equações em

$$K_1 \sin\left(\frac{\phi + p_1 + p_j}{2}\right) \sin\frac{p_1 - p_j}{2} - K_2 \sin\left(\frac{\psi + \gamma_1 + \gamma_j}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_j}{2}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\lambda + p_1 - \gamma_1 + p_j - \gamma_j}{2}\right) \sin\frac{p_1 - \gamma_1 + \gamma_j - p_j}{2} \quad j = 2, 3, 4$$

ou

$$A_j K_1 \sin(\phi + \alpha_j) - B_j K_2 \sin(\psi + \beta_j) = C_j \sin(\lambda + \delta_j)$$

$$j = 2, 3, 4$$

Definindo  $\lambda = \phi - \psi$  (arbitrado), podemos fazer  $\phi = \psi + \lambda$  e  $\lambda + \alpha_j = \beta_j$

Por eliminação sucessiva, chegamos a uma equação do terceiro grau em  $\tan \psi$ , com a forma:

$$m_1 \tan^3 \psi + m_2 \tan^2 \psi + m_3 \tan \psi + m_4 = 0$$

Os coeficientes da equação, são:

$$m_1 = k_1 s_1 - l_1 r_1$$

$$m_2 = k_2 s_1 + k_1 s_3 - l_2 r_1 - l_1 r_3$$

$$m_3 = k_1 s_2 + k_2 s_3 - l_1 r_2 - l_2 r_3$$

$$m_4 = k_2 s_2 - l_2 r_2$$

Ao fim do item, fornecemos os valores de  $l, r, s, k$ .

A solução  $\psi = -\beta_3$  é expúria, resultante do possível cancelamento de fatores iguais ao longo do desenvolvimento, e pode ser eliminada caso desejado, reduzindo a equação para o segundo grau. Em nossa aplicação, deixando ao encargo do computador resolver a equação, preferimos colocar no programa a eliminação da solução expúria.

Conhecidos os valores iniciais de  $\phi$  e  $\psi$  reduzimos o problema a 3 pontos precisos, cuja solução, é completa como anteriormente.

O programa SQPPF, partindo dos 4 pontos precisos e do valor arbitrado de  $\lambda$ , fornece os valores dos parâmetros que interessam ao problema.

Aplicamos para o mesmo problema anterior

obtendo os seguintes parâmetros.

$$\rho = 1 \quad l = 1,1596 \quad s = 1,0845 \quad c = 2,6419$$

$$\beta_1 = 88,7518^\circ \quad \varphi_1 = 28,7525^\circ$$

A análise do erro revela um erro máximo de 2% correspondente ao ponto  $x = 27^\circ$

A figura 8.8 fornece o mecanismo sintetizado e a escala circular que permite obter  $y = \text{Inv } x$  no intervalo  $0 < x < 30^\circ$

VALORES DE  $k, l, r, s$

$$k_1 = -\Sigma_2 B_3 \cos \beta_3 + \Sigma_3 B_2 \cos \beta_2$$

$$k_2 = -\Sigma_2 B_3 \sin \beta_3 + \Sigma_3 B_2 \sin \beta_2$$

$$l_1 = -\Sigma_4 B_3 \cos \beta_3 + \Sigma_3 B_4 \cos \beta_4$$

$$l_2 = -\Sigma_4 B_3 \sin \beta_3 + \Sigma_3 B_4 \sin \beta_4$$

$$r_1 = -A_2 B_3 \cos \beta_3 \cos \delta_2 + A_3 B_2 \cos \beta_1 \cos \delta_3$$

$$r_2 = -A_2 B_3 \sin \beta_3 \cos \delta_2 + A_3 B_2 \sin \beta_1 \cos \delta_3$$

$$r_3 = A_3 B_2 \sin (\beta_1 + \delta_3) - A_2 B_3 \sin (\beta_3 + \delta_2)$$

$$s_1 = -A_4 B_3 \cos \beta_3 \cos \delta_4 + A_3 B_4 \cos \beta_4 \cos \delta_3$$

$$s_2 = -A_4 B_3 \sin \beta_3 \cos \delta_4 + A_3 B_4 \sin \beta_4 \cos \delta_3$$

$$s_3 = A_3 B_4 \sin (\beta_4 + \delta_3) - A_4 B_3 \sin (\beta_3 + \delta_4)$$

$$\Sigma_j = c_j \sin(\lambda + \delta_j) \quad j = 2, 3, 4$$

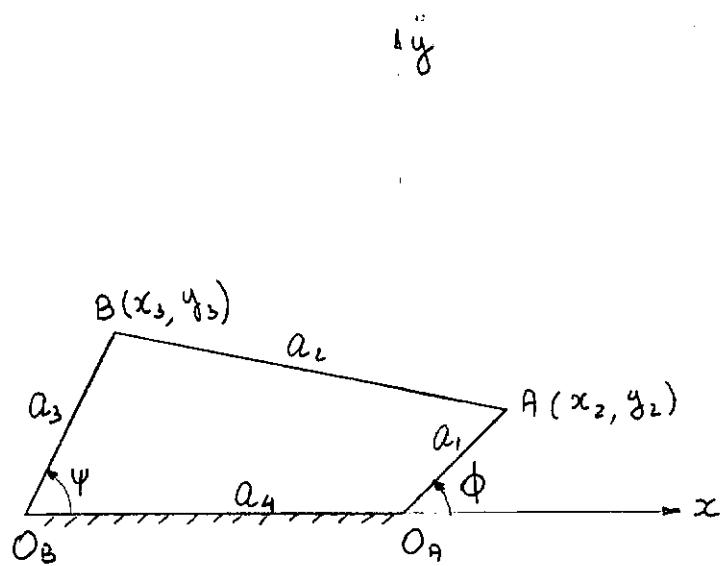


fig. 8.7

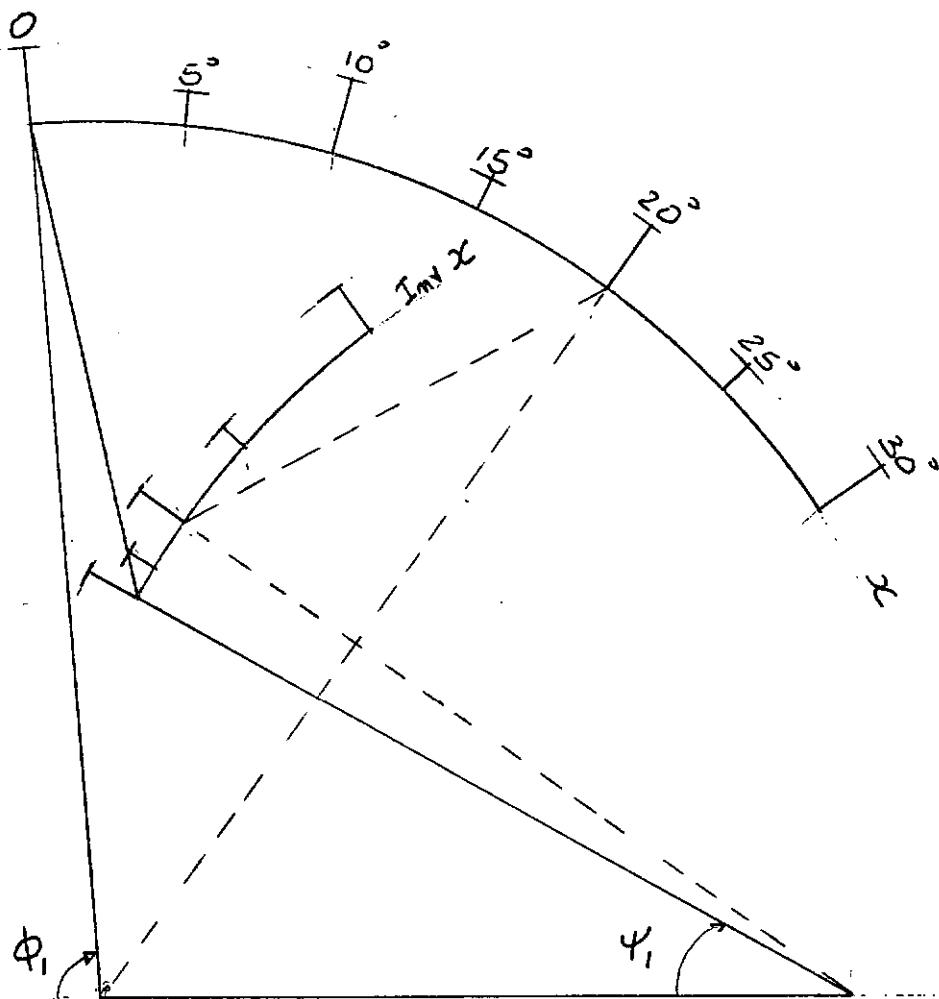


fig. 8.8

// JOB T 0OFF 10FF

P 142108

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0OFF	0OFF	0000
0001	1OFF	1OFF	0001
		2019	0002

V2 M04 ACTUAL 32K CONFIG 32K

```

// FOR                                JAYME MASCHKVICH
*LIST SOURCE PROGRAM
*DINE WORD INTEGERS
*IOCS(2501READER,1403PRINTER)
*NAME SQPPF
      DIMENSION X(5),Y(5),P(5),Q(5),RP(5),RQ(5),ALFA(5),AA(5),BETA(5)
      1,BB(5),GAMA(5),CC(5),RALFA(5),RBETA(5),RGAMA(5),RV(3),EPSI(4),
      2RDEL(4),WW(4),COF3(4),RR(3),RI(3),RFI1(3),RPSI1(3),FF(3,3),GG(3)
C   SINTESE POR 4 PONTOS PRECISOS PELA EQUACAO DE FREUDESTIN
      PI=3.1415926535
      READ(8,1)ESCFI,ESCPS
 1 FORMAT(2F10.4)
      READ(8,2)(X(I),I=1,5),XS
 2 FORMAT(6F10.4)
      READ(8,3)(Y(I),I=1,5),YS
 3 FORMAT(6F10.4)
      WRITE(5,4)
 4 FORMAT(' DADOS PARA O PROBLEMA')
      WRITE(5,1)ESCFI,ESCPS
      WRITE(5,2)(X(I),I=1,5),XS
      WRITE(5,3)(Y(I),I=1,5),YS
      DO 5 I=1,5
C   CALCULO DOS ANGULOS DE POSICAO DAS MANIVELAS
      P(I)=(X(I)-XS)*ESCFI
      Q(I)=(Y(I)-YS)*ESCPS
      RP(I)=(PI/180.)*P(I)
      RQ(I)=(PI/180.)*Q(I)
 5 CONTINUE
      WRITE(5,6)
 6 FORMAT(' ANGULOS DE POSICAO DA MANIVELA'//)          P        Q'
      WRITE(5,7)(P(I),Q(I),I=1,5)
 7 FORMAT(2F12.4)
C   CALCULO DOS COEFICIENTES PARA AS EQUACOES SIMULTANEAS
      DO 8 I=1,5
      ALFA(I)=.5*(P(1)+P(I))
      AA(I)=SIN((RP(1)-RP(I))/2.)
      BETA(I)=.5*(Q(1)+Q(I))
      BB(I)=SIN((RQ(1)-RQ(I))/2.)
      GAMA(I)=.5*(P(1)-Q(1)+P(I)-Q(I))
      CC(I)=SIN((RP(1)-RQ(1)+RQ(I)-RP(I))/2.)
 8 CONTINUE
      WRITE(5,9)
 9 FORMAT(' COEFICIENTES PARA AS EQUACOES SIMULTANEAS'//) ALFA
 10 AA      BETA      BB      GAMA      CC'//)
      WRITE(5,10)(ALFA(I),AA(I),BETA(I),BB(I),GAMA(I),CC(I),I=1,5)
 10 FORMAT(6F12.4)
      DO 11 I=1,5
      RALFA(I)=(PI/180.)*ALFA(I)
      RBETA(I)=(PI/180.)*BETA(I)
      RGAMA(I)=(PI/180.)*GAMA(I)
 11 CONTINUE
      READ(8,12)(RV(I),I=1,3)

```

```

12 FORMAT(3F10.4)
  WRITE(5,121)(RV(I),I=1,3)
121 FORMAT(' DADO DO PROBLEMA RAIZES DE LAMBDA'//3F12.4//)
  DO 1000 JA=1,3
    RM1=RV(JA)
    DO 1000 JB=1,2
      RLAMB=ATAN(RM1)+(JB-1)*PI
      GLAMB=(180./PI)*RLAMB
      DO 13 JC=1,4
        EPSI(JC)=CC(JC)*SIN(RLAMB+RGAMA(JC))
        RDEL(JC)=RLAMB+RALFA(JC)
13  CONTINUE
  AK1=EPSI(2)*BB(3)*COS(RBETA(3))-EPSI(3)*BB(2)*COS(RBETA(2))
  AK2=EPSI(2)*BB(3)*SIN(RBETA(3))-EPSI(3)*BB(2)*SIN(RBETA(2))
  AR1=AA(2)*BB(3)*COS(RBETA(3))*COS(RDEL(2))-AA(3)*BB(2)*COS(RBETA
1(2))*COS(RDEL(3))
  AR2=AA(2)*BB(3)*SIN(RBETA(3))*SIN(RDEL(2))-AA(3)*BB(2)*SIN(RBETA
1(2))*SIN(RDEL(3))
  AR3=AA(2)*BB(3)*SIN(RBETA(3)+RDEL(2))-AA(3)*BB(2)*SIN(RBETA(2)
1+RDEL(3))
  AL1=EPSI(4)*BB(3)*COS(RBETA(3))-EPSI(3)*BB(4)*COS(RBETA(4))
  AL2=EPSI(4)*BB(3)*SIN(RBETA(3))-EPSI(3)*BB(4)*SIN(RBETA(4))
  AS1=AA(4)*BB(3)*COS(RBETA(3))*COS(RDEL(4))-AA(3)*BB(4)*COS(RBETA
1(4))*COS(RDEL(3))
  AS2=AA(4)*BB(3)*SIN(RBETA(3))*SIN(RDEL(4))-AA(3)*BB(4)*SIN(RBETA
1(4))*SIN(RDEL(3))
  AS3=AA(4)*BB(3)*SIN(RBETA(3)+RDEL(4))-AA(3)*BB(4)*SIN(RBETA(4)
1+RDEL(3))
  WW(1)=AK2*AS2-AL2*AR2
  WW(2)=AK1*AS2+AK2*AS3-AL1*AR2-AL2*AR3
  WW(3)=AK2*AS1+AK1*AS3-AL2*AR1-AL1*AR3
  WW(4)=AK1*AS1-AL1*AR1
  WW(1)=100000.*WW(1)
  WW(2)=100000.*WW(2)
  WW(3)=100000.*WW(3)
  WW(4)=100000.*WW(4)
  WRITE(5,33)(WW(JC),JC=1,4)
33  FORMAT(' COEFICIENTES DA EQUACAO'//4F12.4//)
  CALL POLRT(WW,COF3,3,RR,RI,IS)
  WRITE(5,14)IS
14  FORMAT(' CODIGO DE ERRO'//I3//)
  WRITE(5,34)(RR(JC),RI(JC),JC=1,3)
34  FORMAT(' RAIZES'//2F12.4//)
  DO 1000 JD=1,3
    RN1=RR(JD)
    RN11=RI(JD)
    IF(RN11)1000,15,1000
15  DO 1000 JE=1,2
    RPSI=ATAN(RN1)+(JE-1)*PI
    RFI=RLAMB+RPSI
    GPSI=(180./PI)*RPSI
    GFI=(180./PI)*RFI
    DO 16 JF=1,3
      RFI1(JF)=RFI+RP(JF)
      RPSI1(JF)=RPSI+RQ(JF)
      FF(JF,1)=COS(RFI1(JF))
      FF(JF,2)=-COS(RPSI1(JF))
      FF(JF,3)=1.
      GG(JF)=COS(RFI1(JF)-RPSI1(JF))
16  CONTINUE
  CALL SIMQ(FF,GG,3,KT)

```

```

      WRITE(5,17)KT
17 FORMAT('  NUMERO DE CODIGO'//I3//)
  UU1=GG(1)
  UU2=GG(2)
  UU3=GG(3)
  PA=1.
  R=1./UU2
  S=1./UU1
  TEST=1.+R**2+S**2-2.*R*S*UU3
  IF(TEST)1000,19,19
19 C=SQRT(TEST)
  WRITE(5,31)RM1,GLAMB
31 FORMAT('  RM1=',F12.4,'  LAMBDA=',F12.4//)
  WRITE(5,35)GFI,GPSI,UU1,UU2,UU3
35 FORMAT('  SOLUCAO DO PROBLEMA'//'*' FI          PSI      K1
1           K2           K3'//5F12.4//)
  WRITE(5,36)PA,R,S,C
36 FORMAT('  PARAMETROS DO MECANISMO'//'*' PA          R      S
1           C'//4F12.4//)
1000 CONTINUE
  CALL EXIT
END

```

FEATURES SUPPORTED  
 ONE WORD INTEGERS  
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR SQPPF  
 COMMON 0 VARIABLES 334 PROGRAM 2070

END OF COMPILATION

// XEQ

#### DADOS PARA O PROBLEMA

2.0000	559.0001				
0.0000	10.0000	20.0000	30.0000	40.0000	0.0000
0.0000	0.0018	0.0149	0.0538	0.1410	0.0000

#### ANGULOS DE POSICAO DA MANIVELA

P	Q
0.0000	0.0000
20.0000	1.0062
40.0000	8.3290
60.0000	30.0741
80.0000	78.8189

#### COEFICIENTES PARA AS EQUACOES SIMULTANEAS

ALFA	AA	BETA	BB	GAMA	CC
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10.0000	-0.1736	0.5031	-0.0087	9.4969	-0.1649
20.0000	-0.3420	4.1645	-0.0726	15.8354	-0.2728
30.0000	-0.4999	15.0370	-0.2594	14.9629	-0.2581
40.0000	-0.6427	39.4094	-0.6348	0.5905	-0.0103

#### DADO DO PROBLEMA RAIZES DE LAMBDA

1.7320	1.0000	0.0000
--------	--------	--------

-0.2154	-2.7675	2.9982	5.0328
---------	---------	--------	--------

## CODIGO DE ERRO

0

## RAIZES

-0.0728	0.0000
---------	--------

## RAIZES

0.5486	0.0000
--------	--------

## RAIZES

-1.0716	0.0000
---------	--------

## NUMERO DE CODIGO

0

RM1= 1.7320 LAMBDA= 59.9992

## SOLUCAO DO PROBLEMA

F1	PSI	K1	K2	K3
55.8347	-4.1645	0.7978	50.1843	50.1037

## PARAMETROS DO MECANISMO

PA	R	S	C
1.0000	0.0199	1.2533	0.2619

## NUMERO DE CODIGO

0

RM1= 1.7320 LAMBDA= 59.9992

## SOLUCAO DO PROBLEMA

F1	PSI	K1	K2	K3
235.8347	175.8354	-0.7978	-50.1851	50.1045

## PARAMETROS DO MECANISMO

PA	R	S	C
1.0000	-0.0199	-1.2534	0.2619

NUMERO DE CODIGO

0

RM1= 1.7320 LAMBDA= 59.9992

SOLUCAO DO PROBLEMA

FI	PSI	K1	K2	K3
88.7518	28.7525	0.9220	0.8623	1.2359

PARAMETROS DO MECANISMO

PA	R	S	C
1.0000	1.1596	1.0845	0.6419

NUMERO DE CODIGO

0

RM1= 1.7320 LAMBDA= 59.9992

SOLUCAO DO PROBLEMA

FI	PSI	K1	K2	K3
268.7518	208.7525	-0.9220	-0.8623	1.2359

PARAMETROS DO MECANISMO

PA	R	S	C
1.0000	-1.1596	-1.0845	0.6420

NUMERO DE CODIGO

0

RM1= 1.7320 LAMBDA= 59.9992

SOLUCAO DO PROBLEMA

FI	PSI	K1	K2	K3
13.0196	-46.9796	2.7451	-5.0056	-5.5897

## 9 MÉTODOS ALGÉBRICOS COM EMPRÉGO DE NÚMEROS COMPLEXOS

A utilização de números complexos, permite resolver uma série de problemas, em particular problemas de pesquisa sobre pontos de trajetórias circulares e problemas em que se define a trajetória de um ponto do plano da biela, conhecido como problema de geração de trajetória.

As barras de um mecanismo podem ser consideradas como vetores complexos de módulo constante. Nestas circunstâncias, a rotação de uma barra pode ser interpretada como a aplicação de um operador rotação, no plano complexo, que é o complexo de módulo unitário  $e^{i\theta}$ .

Na figura 3.1,  $\vec{z}_i$  é o complexo (vetor) que identifica a manivela. Ao passar da posição 1 para a posição j, a diferença vetorial entre os dois complexos será igual a  $\vec{z}_i(\lambda_j - 1)$ , sendo  $\lambda_j$  o operador rotação  $e^{i\phi_j}$  que indica o ângulo de rotação da manivela entre as duas posições.

Analogamente, teremos para a alavanca com o operador  $\vec{\mu}_j = e^{i\psi_j}$  a diferença vetorial  $\vec{z}_4(\vec{\mu}_j - 1)$ .

O método está sendo empregado para um ponto do plano da biela  $M$ , ligado ao ponto de trajetória circular  $A_1$  pelo complexo  $\vec{z}_2$  e ao ponto de trajetória circular  $B_1$  pelo complexo  $\vec{z}_3$ . O operador complexo  $\vec{\gamma}_j = e^{i\beta_j}$  será o mesmo aplicado aos dois complexos  $\vec{z}_2$ ,  $\vec{z}_3$  uma vez que a biela é rígida. Teremos as diferenças vetoriais  $\vec{z}_2(\vec{\gamma}_j - 1)$  e  $\vec{z}_3(\vec{\gamma}_j - 1)$ .

A base é fixa.

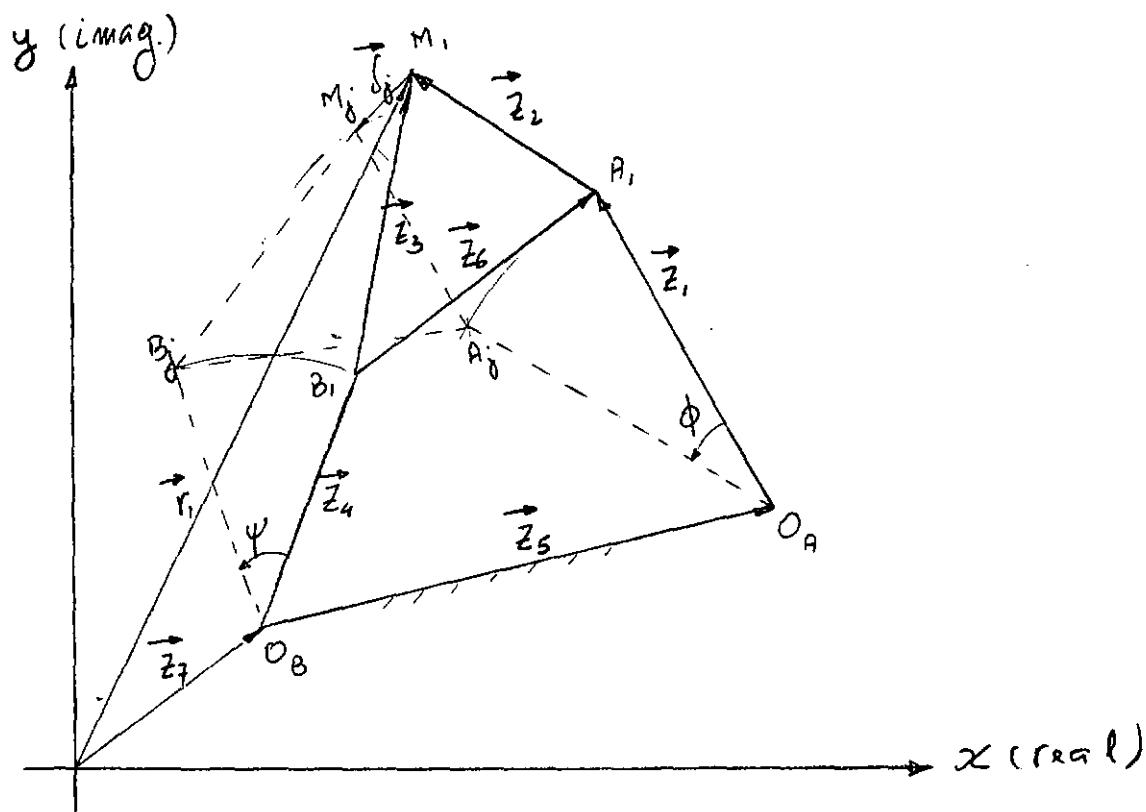


fig. 9.1

Conhecemos a posição do ponto pertencente ao plano da biela nos pontos precisos. Ao passar da posição 1 para a posição j, o raio vetor do ponto M para a origem arbitrada, recebe um incremento vetorial dado pela diferença dos raios vetores  $\vec{f}_j = \vec{r}_j - \vec{r}_1$

Aqui não se pode aplicar simplesmente o operador rotação, pois o módulo do vetor varia.

Podemos então formar um sistema de equações com variáveis complexas, dadas pelas relações incrementais obtidas nos pontos precisos, que se escreve:

$$\vec{f}_j = \vec{z}_1(\vec{\lambda}_j - 1) + \vec{z}_2(\vec{\gamma}_j - 1) = \vec{z}_4(\vec{\mu}_j - 1) + \vec{z}_3(\vec{\tau}_j - 1)$$

A solução do sistema que é linear nas variáveis complexas, permite determinar os complexos que irão definir os parâmetros do mecanismo.

Uma vez que são conhecidos os  $\vec{f}_j$ , formamos 2 sistemas distintos de equações, que estão acoplados a traves da biela, cada um contendo 2 incógnitas  $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4$  os quais contém 4 equações.

Em cada sistema, o número de equações é maior que o número de incógnitas. Empregamos o caminho tradicional da solução de sistemas de equações lineares simultâneos para resolve-lo.

Elegemos dois determinantes principais:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda_2 - 1 & \lambda_2 - 1 \\ \lambda_4 - 1 & \lambda_3 - 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad D_2 = \begin{vmatrix} \mu_2 - 1 & \gamma_2 - 1 \\ \mu_3 - 1 & \gamma_3 - 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Para que, em cada sistema, a solução obtida seja compatível, é necessário que o determinante de 3a ordem correspondente a matriz aumentada seja nulo, ou seja:

$$\begin{vmatrix} \lambda_2 - 1 & \lambda_2 - 1 & J_2 \\ \lambda_3 - 1 & \lambda_3 - 1 & J_3 \\ \lambda_4 - 1 & \lambda_4 - 1 & J_4 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} \lambda_2 - 1 & \lambda_2 - 1 & J_2 \\ \lambda_3 - 1 & \lambda_3 - 1 & J_3 \\ \lambda_5 - 1 & \lambda_5 - 1 & J_5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \mu_2 - 1 & \lambda_2 - 1 & J_2 \\ \mu_3 - 1 & \lambda_3 - 1 & J_3 \\ \mu_4 - 1 & \lambda_4 - 1 & J_4 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} \mu_2 - 1 & \lambda_2 - 1 & J_2 \\ \mu_3 - 1 & \lambda_3 - 1 & J_3 \\ \mu_5 - 1 & \lambda_5 - 1 & J_5 \end{vmatrix} = 0$$

A solução das equações formadas pela anulação dos determinantes de 3a ordem acima, fornece os valores de  $\lambda$  no primeiro par, que substituídos no segundo par fornecerá os valores de  $\mu$ .

A solução é obtida através de uma equação algébrica do 4º grau, cujas raízes devem ser reais e que pertencem simultaneamente (mas não identicamente) aos dois grupos de equações resultantes da anulação dos determinantes.

Nestas circunstâncias, o sistema poderá ter:

- a) Nenhuma solução
- b) Duas soluções
- c) 12(doze) soluções, pela combinação das raízes.

10.

## NOVO MÉTODO DE SÍNTES

### BASEADO NAS PROPRIEDADES DAS CURVAS ROLANTES FUNDAMENTO MATEMÁTICO

Um movimento plano pode ser definido por duas curvas conjugadas, uma rolando sem deslizar sobre a outra. A curva fixa, que denominamos de centro de fixa, é o lugar geométrico dos centros instantâneos de rotação no plano fixo. A curva móvel, que denominaremos de rolante ou centro de móvel, é o lugar geométrico dos centros instantâneos de rotação no plano móvel. Durante o movimento, os pontos da centrode móvel vão se ajustando aos de sua conjugada e os pontos comuns definem os centros instantâneos de rotação.

Os pontos situados no plano móvel descrevem, no plano fixo, trajetórias cujo centro de curvatura, em cada instante, está ao longo da reta que liga o ponto ao centro instantâneo de rotação.

O centro instantâneo de rotação, é um ponto comum aos dois planos e que tem, no instante considerado, velocidade nula. Tudo se passa como se as trajetórias elementares fossem arcos de circunferência elementares com centro no centro instantâneo de rotação.

Façamos a seguinte notação:

$X, Y$ , coordenadas no plano de referência (fixo)

$x, y$ , coordenadas no plano móvel

$\xi, \eta$ , coordenadas da origem do sistema móvel, no plano fixo  
 $\theta$  ângulo entre os eixos coordenados

(vide fig. 10.1)

As coordenadas de um ponto P, de coordenadas  $x, y$  no sistema móvel, em relação ao sistema fixo, serão:

$$\begin{aligned} x &= \xi + x \cos \theta - y \sin \theta \\ y &= \eta + x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \quad (10.1)$$

Podemos diferenciar a expressão e obter:

$$dx = d\xi + (dx - y d\theta) \cos \theta - (x d\theta + dy) \sin \theta \quad (10.2)$$

$$dy = dy + (x d\theta + dy) \cos \theta + (dx - y d\theta) \sin \theta$$

O centro instantâneo de rotação estará momentaneamente imóvel nos dois planos, ou seja:

$$dX = dY = dx = dy = 0$$

Podemos então escrever:

$$\begin{aligned} x d\theta \sin \theta + y d\theta \cos \theta &= d\xi \\ x d\theta \cos \theta - y d\theta \sin \theta &= dy \end{aligned} \quad (10.3)$$

$$x = \frac{d\xi}{d\theta} \sin \theta - \frac{dy}{d\theta} \cos \theta \quad (10.4)$$

$$y = \frac{dy}{d\theta} \sin \theta + \frac{d\xi}{d\theta} \cos \theta$$

$$(10.4) \text{ em } (10.1)$$

$$x = \xi - \frac{dy}{d\theta}$$

$$y = \eta + \frac{d\xi}{d\theta} \quad (10.5)$$

As equações (10.4) e (10.5) servem para determinar parametricamente as curvas conjugadas, se fôr possível estabelecer uma relação entre as 3 quantidades:  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\theta$ .

### INTRODUÇÃO AO MÉTODO

Consideremos o sistema fixo ( $X, O, Y$ ), o sistema móvel ( $x, \alpha, y$ ), e sejam  $\xi, \eta$  as coordenadas da origem do sistema móvel e  $\theta$  o ângulo entre os eixos (fig. 10.2)

Seja  $N$  um ponto do sistema móvel (figura 10.2). Sua localização será dada em função de sua distância para a origem do sistema móvel e pelo ângulo que o raio vetor  $ON$  forma com o eixo dos  $x$ .

As coordenadas de  $N$  serão:

No sistema móvel  $x_N = -M \sin \alpha$

$y_N = M \cos \alpha$

No sistema fixo  $x_N = \xi + M \sin(\alpha - \theta)$

$y_N = \eta + M \cos(\alpha - \theta)$

### MOVIMENTO DOS PONTOS DO SISTEMA MOVEL EM FUNÇÃO DAS CURVAS CONJUGADAS

Definimos na figura 10.3 os elementos:

$O$  - Centro de curvatura da centrode fixa

$O'$  - Centro de curvatura da centrode móvel

$P$  - Centro instantâneo de rotação no instante  $t$

$T-T$  Tangente comum no instante  $t$

$O-O'$  Normal comum no instante  $t$

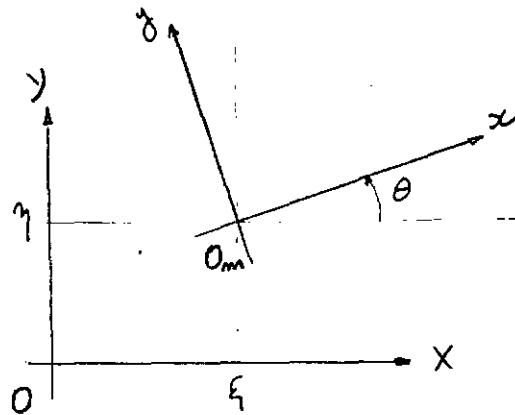


fig. 10.1

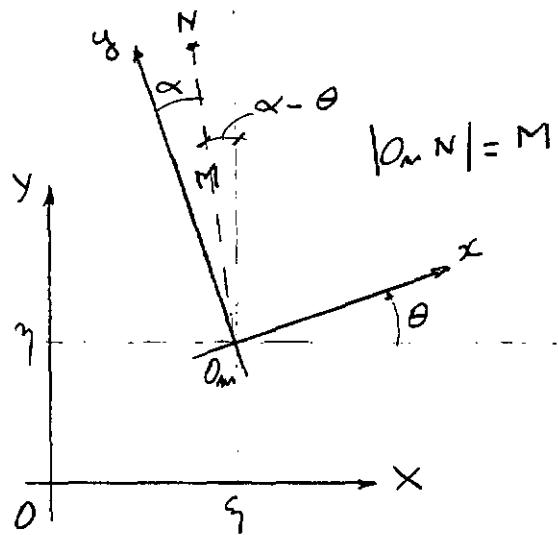


fig. 10.2

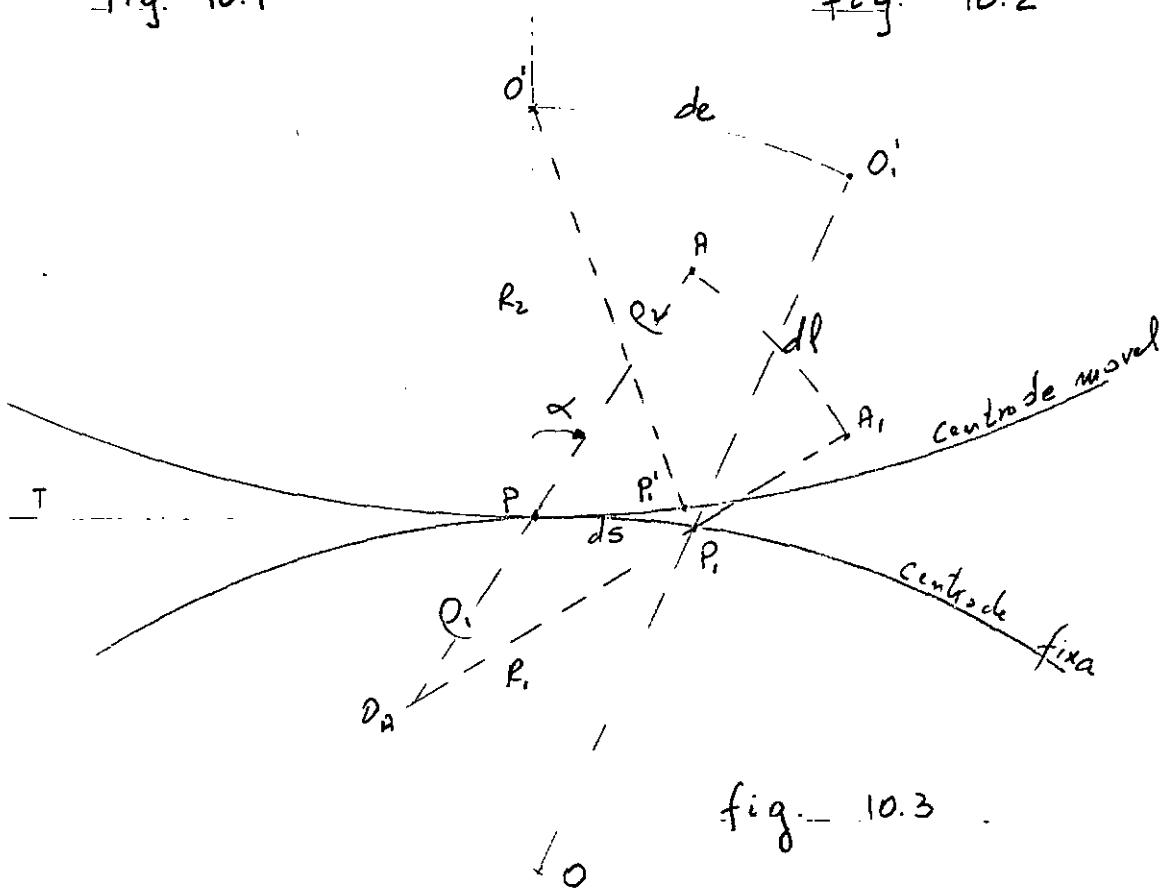


fig. 10.3

No instante  $t + dt$  o centro instantâneo de rotação será  $P_1'$ , no qual coincidirá  $P_1$ . Portanto, o centro de curvatura da centrode móvel estará ao longo do raio  $OP_1$ . Sejam de  $\sigma$  o espaço percorrido por  $O'$  ao longo de sua trajetória e  $ds$  o arco  $PP_1$ , igual nas duas curvas.

$$\text{Teremos: } \frac{OO'}{OP} = \frac{d\sigma}{ds} \text{ ou } \frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{d\sigma}{ds}$$

$$\text{dividindo por } dt : \frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{V_o'}{U} \quad (10.7)$$

Em que  $V_o'$  é a velocidade do centro de curvatura  $O'$ , cuja trajetória é um arco de circunferência com centro em  $O$ .  $U$  é a velocidade em que os C.I. se sucedem.

Tomemos um ponto  $A$  do plano móvel. Seu centro de curvatura estará ao longo da reta  $AP$  na primeira posição e será designado por  $O_A$ . Na segunda posição a reta  $O_A P_1$  contará  $A_1$ , ponto da trajetória de  $A$ .

Denominando  $dl$  ao espaço percorrido pelo ponto  $A$ , podemos escrever:

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{dl}{ds \cos \alpha} \quad \alpha = \text{ângulo de } PA \text{ com } OO' \\ \text{Dividindo por } dt$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{V_A}{U \cos \alpha} \quad (10.8) \quad \text{Dividindo (10.8) por (10.7)}$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1} \times \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{V_A}{V_o' \cos \alpha}$$

Porém  $\frac{\nu_A}{\nu'_A} = \frac{r_2}{R_2}$  uma vez que P é o centro instantâneo de rotação e a velocidade dos pontos do plano móvel está na razão de suas distâncias ao centro instantâneo de rotação (C.I.).

Portanto:

$$\frac{r_1 + r_2}{r} \cos \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad (10.9)$$

Façamos:

$$r_1 + r_2 = R \quad ; \quad r_2 = n \quad \therefore R = r - n \quad (10.10)$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = B$$

Virá:

$$\frac{R \cos \alpha}{r - n} = n B \quad \therefore R \cos \alpha = n B - n^2 B$$

Finalmente

$$R = \frac{n^2 B}{n B - \cos \alpha} \quad (10.11)$$

Onde  $R$  é o raio de curvatura da trajetória do ponto N  
 $n$  é a distância de N ao C.I.

$B$  é a soma dos inversos dos raios de curvatura das curvas conjugadas

$\alpha$  é o ângulo de PA com a normal  $\omega'$ .

#### EMPREGO DOS PRIMEIROS RESULTADOS

Tomamos na figura 10.4 um ponto N que terá sua posição indicada como no item anterior e que ligaremos ao centro instantâneo de rotação, como indicamos para o ponto A.

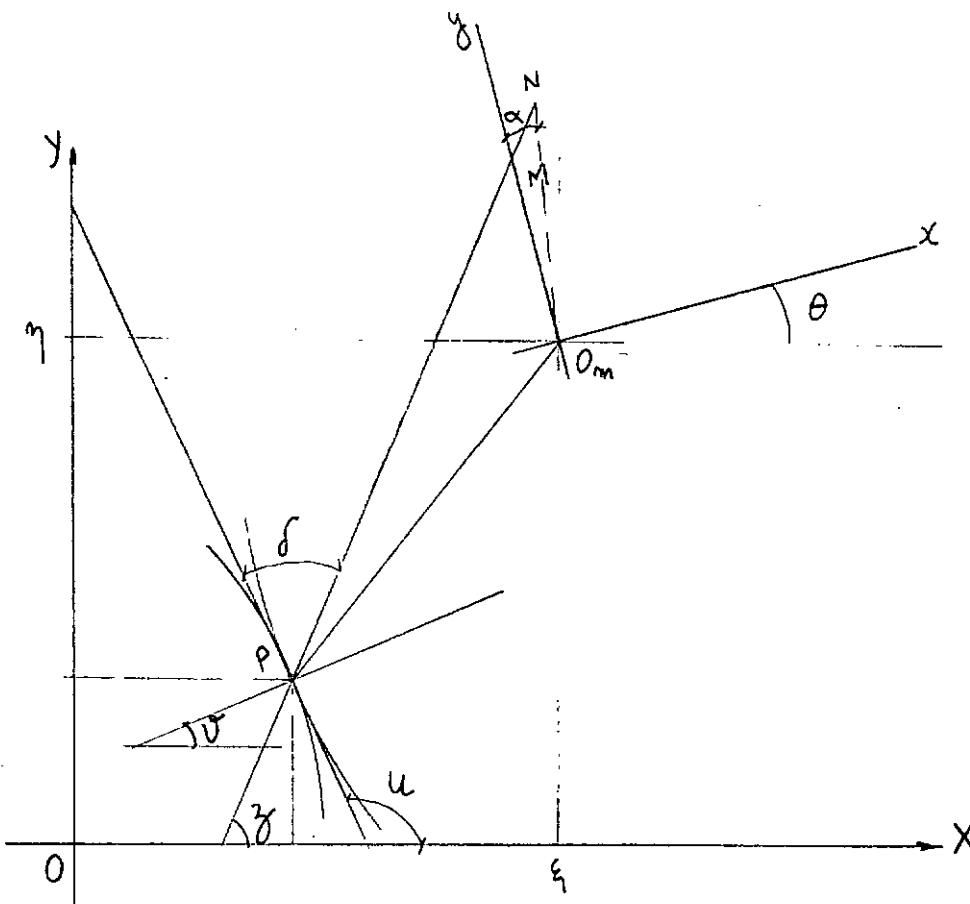


fig. 10.4

Os demais valores indicados na figura terão o seguinte significado:

$O_m$  - Origem do sistema móvel

$P$  - Centro Instantâneo de rotação para o instante considerado

$n$  - Distância do ponto N ao centro Instantâneo de rotação

$M$  - Distância de N até a origem do sistema móvel (parâmetro a determinar)

$\beta$  - Ângulo entre o raio vetor e a tangente comum às duas curvas conjugadas

$u$  - Ângulo que a tangente comum as curvas conjugadas faz com o eixo dos X, no sistema fixo, no instante considerado

$v$  - Ângulo que a normal comum em P, às duas curvas conjugadas faz com o eixo dos X (a normal considerada é perpendicular à tangente indicada).

$\delta$  - Ângulo que a reta faz com o eixo dos X

$\xi$  - Abscissa de O no sistema fixo

$\gamma$  - Ordenada de O no sistema fixo

Partimos das relações já estabelecidas:

$$x_p = \xi - \gamma$$

$$y_p = \gamma + \xi$$

$$x_n = \xi + M \sin(\alpha - \theta)$$

$$y_n = \gamma + M \cos(\alpha - \theta)$$

Para o ângulo  $u$ , temos:

$$\tan u = \frac{dy_p}{dx_p} = \frac{y_p'}{x_p'} \quad (10.12)$$

Para o ângulo  $v$ , obtemos:

$$\tan v = - \frac{1}{\tan u} = - \frac{x_p'}{y_p'} \quad (10.13)$$

Porém

$$x_p' = \xi' - \gamma'' \quad (10.14)$$

$$y_p' = \gamma' + \xi''$$

Portanto

$$\tan \delta = \frac{\gamma'' - \xi'}{\gamma' + \xi''} \quad (10.15)$$

Por outro lado, temos:

$$r \cos \beta - M \sin(\alpha - \theta) = \xi - x_p = \gamma'$$

$$r = \frac{\gamma' + M \sin(\alpha - \theta)}{\cos \beta} \quad (10.16)$$

Sendo  $\beta$  o ângulo já indicado, vira:

$$\tan \beta = \frac{y_p - y_p}{x_p - x_p} = \frac{M \cos(\alpha - \theta) - \xi'}{M \sin(\alpha - \theta) + \gamma'} \quad (10.17)$$

comum, vale:

$$\pi/2 - \delta = \beta - \delta \quad (10.18)$$

#### DESCRÍÇÃO DO MÉTODO DE SÍNTESE

Procuramos determinar um mecanismo que, em um determinado ponto preciso, seja capaz de possuir um ponto passando pela trajetória de certa curva desejada, e cuja trajetória real tenha a maior intimidade possível com a curva pretendida.

Na posição indicada, um ponto do sistema móvel (não é o ponto que vai traçar a curva desejada), será obtido através de um parâmetro. Procuraremos um tal ponto, que tenha trajetória circular.

Em outras palavras, se for possível de -

terminar parâmetros exatos de um mecanismo capaz de satisfazer ao problema, isto é, que tenha um ponto no plano da biela capaz de traçar no sistema fixo uma trajetória igual a curva desejada, haverá em geral pelo menos dois pontos circulares - (podem haver mais e pode não haver nenhum).

Obtidos os dois pontos (de um modo geral apenas aproximadamente circulares) e seus centros, estabeleceremos um quadrilátero de manivelas tendo os pontos circulares como articulação, e seus centros como centros fixos.

Em primeira e boa aproximação, tomaremos um ponto N que tenha curvatura estacionária, isto é, cuja derivada do raio de curvatura em relação ao ângulo de posição do sistema móvel seja nula. Se for possível calcular um ponto entre aqueles que, além de ter a primeira derivada nula, tenha também a segunda derivada nula, então o ponto determinado constituirá em dos pontos de Burmester (que mantém trajetória circular em 4 rotações finitas sucessivas do plano móvel) Apenas um número finito de pontos podem satisfazer a segunda condição:

Em nosso trabalho, desenvolvemos as equações e formulamos os programas para computação, apenas para a primeira aproximação. A extensão do problema para a segunda aproximação consistirá em resolver um sistema simultâneo de e-quações não lineares.

O método consiste em obter as relações para as variáveis e suas derivadas em função da definição da curva pretendida e suas derivadas e com auxílio do computador determinar um ângulo que satisfaça ao problema.

### DEDUÇÃO DA FÓRMULA

Partimos de:

$$\rho = \frac{r^2 B}{rB - 2\sin \beta} \quad \begin{aligned} B &= \frac{r\alpha - \rho}{\cos \beta} \\ \cos \beta &= \frac{\rho}{r} \end{aligned} \quad (10.19)$$

Apenas o valor de  $B$  não varia com  $\alpha$  e podemos determinar este valor de  $B$  no ponto preciso.

Para obter o valor de  $B$ , precisamos determinar o raio de curvatura das curvas conjugadas. Empregando as conhecidas relações para o raio de curvatura quando se conhecem as curvas sob forma paramétrica:

$$\rho = \frac{\{[F'(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2\}^{3/2}}{F''(\theta)f'(\theta) - f''(\theta)F'(\theta)} \quad \begin{aligned} F(\theta) &= x_p = \xi - \gamma' && \left. \begin{array}{l} \text{Curva fixa} \\ \text{Curva móvel} \end{array} \right\} \\ f(\theta) &= y_p = \gamma + \xi' \end{aligned} \quad (10.20)$$

$$F(\theta) = x_p = \xi' \sin \theta - \gamma' \cos \theta \quad \left. \begin{array}{l} \text{Curva móvel} \\ \text{Curva fixa} \end{array} \right\} \quad (10.21)$$

$$f(\theta) = y_p = \xi' \cos \theta + \gamma' \sin \theta$$

Chegamos a:

$$R_1 = \frac{\{(\xi'' + \gamma')^2 + (\gamma'' + \xi')^2\}^{3/2}}{(\xi' - \gamma'')(\gamma'' + \xi'') - (\gamma' + \xi'')(\xi'' - \gamma'')} \quad (10.22)$$

$$R_2 = \frac{\{(\xi'' + \gamma')^2 + (\gamma'' + \xi')^2\}^{3/2}}{(\xi'' + \gamma')(y'' - 2\xi'' - \gamma') - (\gamma'' - \xi'')(\xi'' + 2\gamma'' - \gamma')} \quad (10.23)$$

Para as curvas conjugadas, com curvatura no mesmo sentido, virá:

$$B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{[(\xi'' - \gamma')^2 + (\gamma'' - \xi')^2]^{3/2}} \quad (10.24)$$

Para as curvas conjugadas, com curvaturas em sentidos contrários, a relação será:

$$B = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (10.25)$$

Podemos agora derivar a equação (10.19) em relação ao ângulo  $\alpha$  e obter:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = B \frac{R}{R} \frac{\frac{dR}{d\alpha} - 2 \operatorname{sen} \varphi \frac{d\varphi}{d\alpha} + R \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\alpha}}{(R B - \operatorname{sen} \varphi)^2} \quad (10.26)$$

Os valores das variáveis em função do parâmetro a determinar  $M$  e do ângulo  $(\alpha - \theta)$  são:

$$R = \frac{M \operatorname{sen}(\alpha - \theta) + \gamma'}{\cos \varphi} = \frac{M \operatorname{sen}(\alpha - \theta) + \gamma'}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \sqrt{[M \operatorname{sen}(\alpha - \theta) + \gamma']^2 + [M \operatorname{sen}(\alpha - \theta) - \xi']^2} \quad (10.27)$$

$$\frac{dR}{d\alpha} = \frac{M [\gamma' \cos(\alpha - \theta) + \xi' \operatorname{sen}(\alpha - \theta)]}{\sqrt{[M \operatorname{sen}(\alpha - \theta) + \gamma']^2 + [M \operatorname{sen}(\alpha - \theta) - \xi']^2}} \quad (10.28)$$

$$\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen}(\varphi, \delta) = \frac{[M \operatorname{sen}(\alpha - \theta) + \gamma'] \cos \delta + [M \operatorname{sen}(\alpha - \theta) - \xi'] \operatorname{sen} \delta}{\sqrt{[M \operatorname{sen}(\alpha - \theta) + \gamma']^2 + [M \operatorname{sen}(\alpha - \theta) - \xi']^2}} \quad (10.29)$$

$$\cos \varphi = \operatorname{sen}(\varphi, \delta) = \frac{[M \operatorname{sen}(\alpha - \theta) - \xi'] \cos \delta - [M \operatorname{sen}(\alpha - \theta) + \gamma'] \operatorname{sen} \delta}{\sqrt{[M \operatorname{sen}(\alpha - \theta) + \gamma']^2 + [M \operatorname{sen}(\alpha - \theta) - \xi']^2}} \quad (10.30)$$

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = - \frac{d\delta}{d\alpha} \quad (10.31)$$

O ângulo  $\zeta$  não depende de  $\alpha$

Por outro lado,

$$\tan \zeta = \frac{M \cos(\alpha - \theta) - \xi'}{M \sin(\alpha - \theta) + \gamma'} \quad (10.32)$$

Então:

$$\sec^2 \zeta \frac{d\zeta}{d\alpha} = \frac{[M \sin(\alpha - \theta) + \gamma'][-M \sin(\alpha - \theta)] - [M \cos(\alpha - \theta) - \xi'][M \cos(\alpha - \theta)]}{[M \sin(\alpha - \theta) + \gamma']^2} \quad (10.33)$$

Porém,

$$\sec^2 \zeta = \frac{1}{\cos^2 \zeta} \quad (10.33)$$

Consequentemente

$$\frac{d\zeta}{d\alpha} = - \frac{[M \sin(\alpha - \theta) + \gamma']M \sin(\alpha - \theta) + [M \cos(\alpha - \theta) - \xi'][M \cos(\alpha - \theta)]}{[M \sin(\alpha - \theta) + \gamma']^2 + [M \cos(\alpha - \theta) - \xi']^2} \quad (10.34)$$

Estamos procurando um ponto para o qual

$$\frac{dP}{d\alpha} = 0 \quad (10.35)$$

Excessão deve ser feita talvez para os pontos em que

$$\pi B - \sin \zeta = 0 \quad (10.36)$$

Temos então ...

$$Bn \frac{dn}{d\alpha} - 2 \sin \zeta \frac{dn}{d\alpha} + n \cos \zeta \frac{d\zeta}{d\alpha} = 0 \quad (10.37)$$

Aplicando os resultados obtidos em (10.37)

obteremos uma equação do segundo grau em  $M$ , para cada valor de  $\alpha$ .

$$a_1 M^2 + a_2 M + a_3 = 0 \quad (IV.38)$$

$$\text{Fazendo } (\alpha - \theta) = \beta$$

$$a_1 = B [\gamma' \cos \beta + \xi' \sin \beta] + [\cos \beta \cos \delta - \sin \beta \sin \delta]$$

$$a_2 = 2B [\gamma' \sin \beta - \xi' \cos \beta] [\gamma' \cos \beta + \xi' \sin \beta]$$

$$- 2 [\sin \beta \cos \delta + \cos \beta \sin \delta] [\gamma' \cos \beta + \xi' \sin \beta]$$

$$+ [\cos \beta \cos \delta - \sin \beta \sin \delta] [\gamma' \sin \beta - \xi' \cos \beta]$$

$$- [\gamma' \sin \delta + \xi' \cos \delta]$$

$$a_3 = B [\gamma'^2 + \xi'^2] [\gamma' \cos \beta + \xi' \sin \beta]$$

$$- 2 [\gamma' \cos \delta - \xi' \sin \delta] [\gamma' \cos \beta + \xi' \sin \beta]$$

$$- [\gamma' \sin \delta + \xi' \cos \delta] [\gamma' \sin \beta - \xi' \cos \beta]$$

A solução da equação acima não pode ser conduzida manualmente. Escrevemos um programa FORTRAN IV, permitindo estabelecer os dois valores de M (raízes da equação), partindo de:

1) especificação da curva a ser traçada pe la origem do sistema móvel no sistema fixo

2) especificação de uma relação arbitrária entre  $\xi$  e  $\theta$ ;  $\xi = \theta$

3) valores arbitrários de  $\alpha$ ; o computador varre o plano com pequenos incrementos de  $\alpha$ .

De posse de M e  $\alpha$ , determinamos as coordenadas do ponto N (dos pontos N) e dos seus centros de curvatura.

De um modo geral, para cada  $\alpha$  obtemos uma solução. Pode haver direção em que não exista ponto de curvatura estacionária (a curva de curvatura estacionária é uma cúbica como já foi indicado anteriormente)

O método pode ser extendido para obter pontos em que a derivada segunda seja nula (pontos de Burmester). Deve ser obtida uma equação do 4º grau. Até o momento, apenas imaginamos uma solução por método iterativo e resolvemos não inclui-la no trabalho.

Os pontos obtidos apenas com a primeira aproximação já conduzem a um bom resultado. Podemos aperfeiçoar o método, pesquisando, entre os pontos sintetizados, qual define um mecanismo que apresente uma maior extensão em contac-

to com a curva desejada. Ou determinar o raio de curvatura da curva traçada pela origem do sistema móvel e comparar com o da curva pretendida.

### APLICAÇÕES

1) Projetar um quadrilátero articulado, de sorte que um ponto do plano da biela passe pela posição  $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} z$  da curva  $y = \sin x$

Arbitramos a seguinte relação entre a abscissa de origem do sistema móvel e o ângulo de posição do sistema móvel  $\xi = \Theta$

Obtemos as seguintes relações e valores:

$$\xi'_0 = 1$$

$$\xi''_0 = 0$$

$$\xi'''_0 = 0$$

$$y_0 = \sin \xi_0 = \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ rad.} = 0,64955$$

$$y'_0 = \cos \xi_0 = \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ rad.} = 0,76031$$

$$y''_0 = -\sin \xi_0 = -0,64955$$

$$y'''_0 = -\cos \xi_0 = -0,76031$$

Partindo de  $\alpha$  igual a zero, substituindo os valores obtidos no ponto preciso na equação 10.38, e calculando para valores de  $\alpha$  de modo a varrer o plano, encontramos a tabela de resultados para as coordenadas de N e para as coordenadas dos centros de curvatura fornecida pelo computador.

As figuras 10.4 apresentam alguns dos mecanismos construídos com os resultados obtidos. Não houve

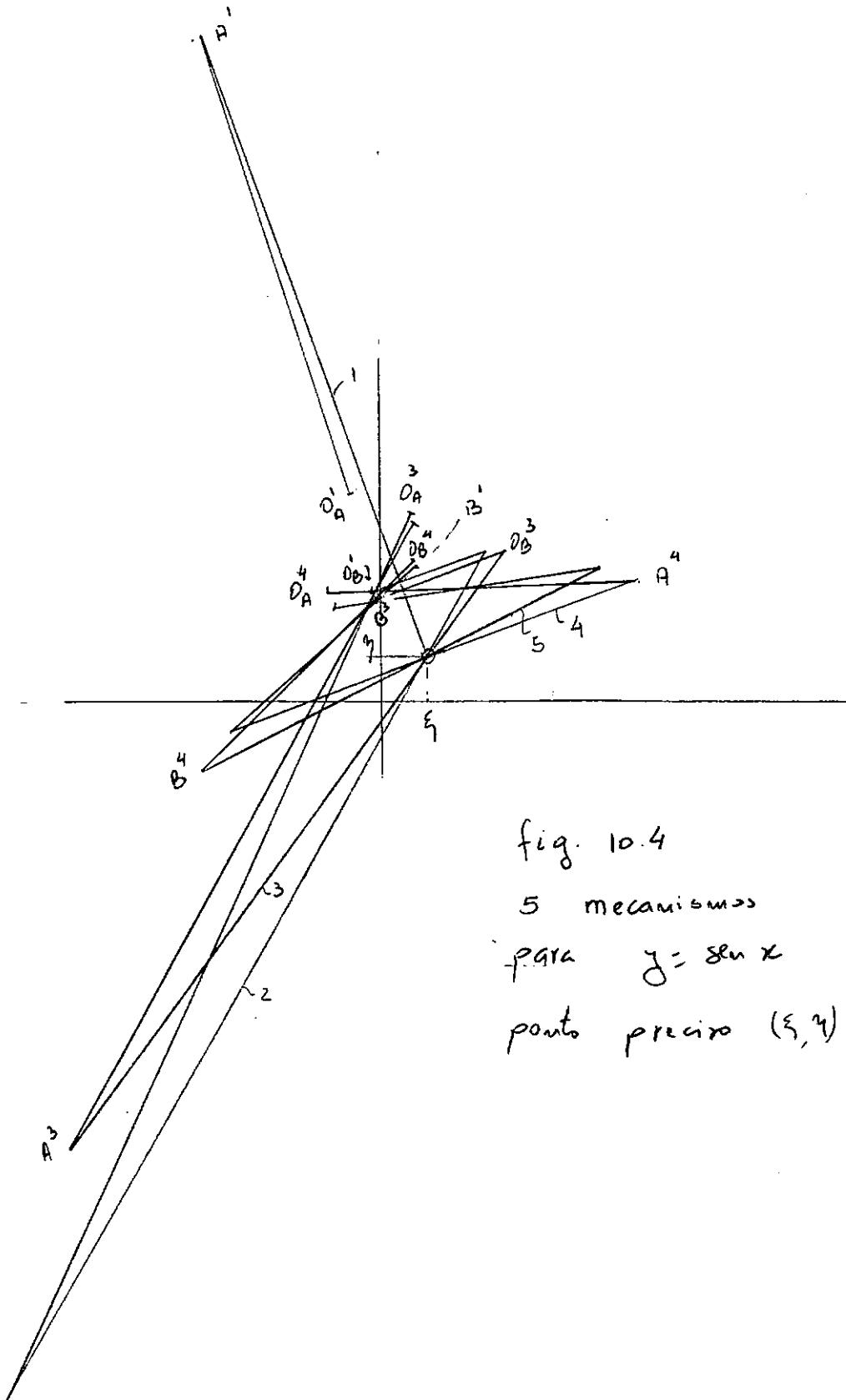


fig. 10.4

5 mecanismos

para  $\gamma = \sin x$

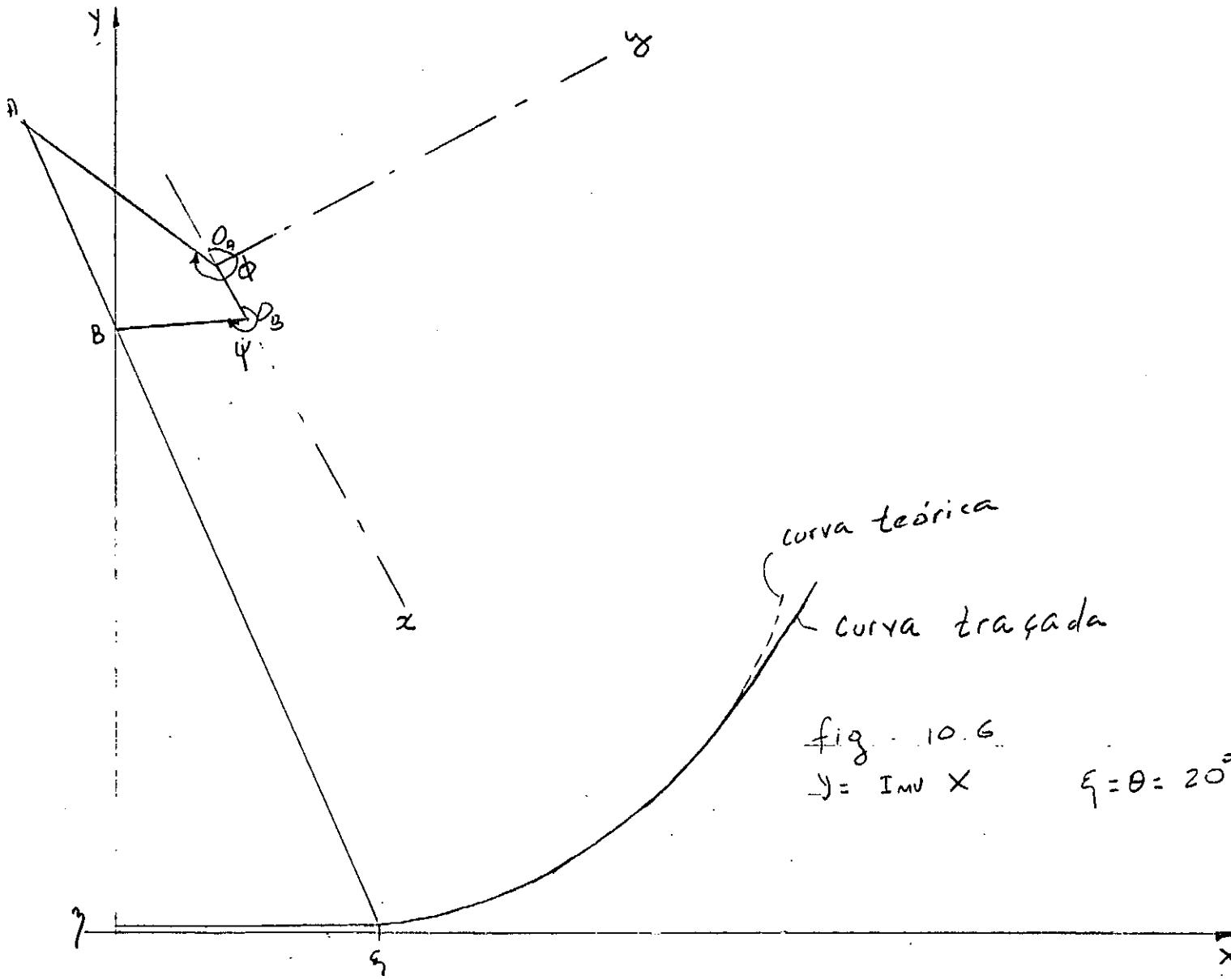
ponto preciso  $(x, y)$

preocupação de selecionar o melhor resultado.

Com os parâmetros determinados, podemos empregar o programa QMAN de análise e traçar a curva descrita por um ponto do plano da biela correspondente a origem do sistema móvel e comparar com a curva teórica.

2) Problema análogo ao anterior, para a função  $g = I_{uv} X$  no ponto preciso  $X = 2\omega^0 : \theta$

A figura 10.6 apresentam um mecanismo construído com os parâmetros da posição 50 do programa e a comparação entre as curvas.



// JOB T 00FF 10FF

P 142108

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	00FF	00FF	0000
0001	10FF	10FF	0001
		2014	0002

V2 M05 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

JAYME MASCHKVICH

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

\*IOCS(2501READER,1403PRINTER)

\*NAME ROLET

```
DIMENSION B(3),COF2(3),RR(2),RI(2),XZ1(100),YZ1(100),XC1(100),
1YC1(100),XZ2(100),YZ2(100),XC2(100),YC2(100),RBR1(100),RBI1(100)
2,RBR2(100),RBI2(100)
```

C CALCULO DE M COM R VARIABEL

TAN(QQ)=SIN(QQ)/COS(QQ)

SEC(QQ)=1./COS(QQ)

PI=3.1415926535

RAFI=(PI/180.)\*20.

XQ=RAFI

XQL=1.

XQLL=0.

XQLLL=0.

YQ=TAN(RAFI)-RAFI

YQL=(SEC(RAFI)\*\*2)-1.

YQLL=2.\*((SEC(RAFI)\*\*2)\*TAN(RAFI))

YQLLL=4.\*((SEC(RAFI)\*\*2)\*(TAN(RAFI)\*\*2)+2.\*((SEC(RAFI)\*\*4))

ALFA=-PI/50.

ACR=PI/50.

DO 100 I=1,100

ALFA=ALFA+ACR

BETA=ALFA-RAFI

TV=(YQLL-XQL)/(YQL+XQLL)

CV=1./SQRT(1.+TV\*\*2)

SV=TV\*CV

W1=YQL\*COS(BETA)+XQL\*SIN(BETA)

W2=YQL\*CV-XQL\*SV

W3=XQL\*CV+YQL\*SV

W4=YQL\*SIN(BETA)-XQL\*COS(BETA)

W5=CV\*COS(BETA)-SV\*SIN(BETA)

W6=((XQLL+YQL)\*\*2)+((YQLL-XQL)\*\*2)

Z1=SQRT(W6\*\*3)

W7=(XQL-YQLL)

W8=YQLL+XQLLL

Z2=W7\*W8

W9=YQL+XQLL

W10=XQLL-YQLLL

Z3=W9\*W10

R1=Z1/(Z2-Z3)

W11=YQLLL-2.\*XQLL-YQL

W12=XQLLL+2.\*YQLL-XQL

Z4=W9\*W11

Z5=-W7\*W12

R2=Z1/(Z4-Z5)

A=(R1-R2)/(R1\*R2)

```

Y1=YQL*COS(BETA)+XQL*SIN(BETA)
Y2=XQL**2+YQL**2
Y3=CV*YQL-SV*XQL
Y4=YQL*SIN(BETA)-XQL*COS(BETA)
Y5=SV*YQL+CV*XQL
Y6=CV*SIN(BETA)+SV*COS(BETA)
Y7=CV*COS(BETA)-SV*SIN(BETA)
B(1)=A*Y2*Y1-2.*Y3*Y1-Y4*Y5
B(2)=2.*A*Y4*Y1-2.*Y6*Y1+Y7*Y4-Y5
B(3)=A*Y1+Y7
CALL POLRT(B,COF2,2,RR,RI,IE)
RB1=RR(1)
RB1I=RI(1)
RB2=RR(2)
RB2I=RI(2)
IF(RB1I)20,10,20
10 RM1=RB1
XZET1=XQ+RM1*SIN(BETA)
YZET1=YQ+RM1*COS(BETA)
XZEL1=XQL-RM1*COS(BETA)
YZEL1=YQL+RM1*SIN(BETA)
YXZL1=YZEL1/XZEL1
YXLL1=(XQL*YQLL-YQL*XQLL+RM1*((YQL-XQLL)*SIN(BETA)-(YQLL+XQL)*
1COS(BETA))+(RM1**2))/((XQL-RM1*COS(BETA))**3)
XCC1=XZET1-(YXZL1)*((1.+YXZL1**2)/YXLL1)
YCC1=YZET1+((1.+YXZL1**2)/YXLL1)
XZ1(I)=XZET1
YZ1(I)=YZET1
XC1(I)=XCC1
YC1(I)=YCC1
RM1=RB2
XZET1=XQ+RM1*SIN(BETA)
YZET1=YQ+RM1*COS(BETA)
XZEL1=XQL-RM1*COS(BETA)
YZEL1=YQL+RM1*SIN(BETA)
YXZL1=YZEL1/XZEL1
YXLL1=(XQL*YQLL-YQL*XQLL+RM1*((YQL-XQLL)*SIN(BETA)-(YQLL+XQL)*
1COS(BETA))+(RM1**2))/((XQL-RM1*COS(BETA))**3)
XCC1=XZET1-(YXZL1)*((1.+YXZL1**2)/YXLL1)
YCC1=YZET1+((1.+YXZL1**2)/YXLL1)
XZ2(I)=XZET1
YZ2(I)=YZET1
XC2(I)=XCC1
YC2(I)=YCC1
20 RBR1(I)=RB1
RB1I(I)=RB1I
RBR2(I)=RB2
RB2I(I)=RB2I
100 CONTINUE
WRITE(5,111)(I,RBR1(I),RB1I(I),RBR2(I),RB2I(I),I=1,100)
111 FORMAT(I4,4F12.4)
WRITE(5,112)(I,XZ1(I),YZ1(I),XC1(I),YC1(I),XZ2(I),YZ2(I),XC2(I),
1YC2(I),I=1,100)
112 FORMAT(I4,8F12.4)
CALL EXIT
END

```

9	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000*****
10	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000 0.0
11	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000***** 0.0
12*****	590094.1267		0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000 0.0
13*****		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000 0.0
14	0.0000	-0.0000*****		0.0000	-0.0000	0.0000 0.0
15	0.0000	-44544.0002	-0.0000	-0.0000*****		0.0000 0.0
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000*****		0.0000 0.0
17*****		-0.0000	0.0000	0.0000	-223.8633	0.8218 0.0
18	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000*****		0.00009683008.7
19*****		-0.0000	0.0000	0.0000*****		***** 0.0
20	0.0000	0.0000*****		0.0000*****		0.0068 0.0
21	0.0000	-0.0000*****		0.0000*****		-0.0000 0.0
22	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000*****		-719.7014*****
23	0.1347	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-121.9604*****
24	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-121.9524*****
25*****		0.0000*****		0.0000	0.0000	0.0000 0.0
26	0.0063	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000*****
27	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000 0.0
28	0.0000*****		0.0000*****		0.0000	0.8825*****
29	0.0000	0.0000	0.0000*****		0.0000	-0.0000 0.0
30	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000*****	***** 0.0
31	0.0000*****		0.0000*****		-0.0000	-0.0000 0.0
32*****		0.0000		-0.0000	0.0000	0.0000 0.0
33	0.0000	-0.0000*****		-0.0000	-65463.7658*****	0.0
34	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000*****
35*****		-0.0000*****		-0.0000	0.0000	0.0000*****
36*****		-0.0000	-0.0000*****		-0.0000	100618.5632*****
37	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-7.9872	0.0000*****
38	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000*****
39	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000*****
40	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000*****
41	0.0000	-0.0000	48.0632	0.0000	-0.0000	0.0000*****
42	0.0000*****		0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000*****
43	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	1.5017	0.0000 0.0
44	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-23.9216	0.0000*****
45	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000 0.0
46	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000*****
47	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000 0.0
48	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000 0.0
49	-0.1866	1.0573	0.1076	1.0263	-0.2160	1.1144 0.0
50	-0.0761	0.9881	0.1337	1.0073	-0.1458	1.1477 0.0
51	0.0009	0.9713	0.1515	1.0017	-0.0737	1.1766 0.1
52	0.0676	0.9711	0.1669	1.0003	-0.0000	1.2008 0.12
53	0.1293	0.9817	0.1819	1.0017	0.0751	1.2204 0.1
54	0.1891	1.0020	0.2000	1.0071	0.1513	1.2352 0.18
55	0.2755	0.7646	0.0037	1.9185	0.2284	1.2452 0.22
56	0.3118	1.0793	0.2061	1.0078	0.3059	1.2504 0.2
57	0.3807	1.1511	0.2240	1.0211	0.3835	1.2507 0.2
58	0.4650	1.2898	0.2415	1.0425	0.4610	1.2460 0.2
59	0.3750	0.0000	0.0000	-719.7014	0.0000	-0.0000 -0.0
60	0.0000	0.0000	0.0000	-121.9604*****	-0.0000	-0.0000 -0.0
61	0.3750	-0.0000	0.0000	-121.9524	-0.0000	0.0000 0.00
62	0.0000*****		0.0000	0.0000*****		-0.0000 0.00
63	0.3750*****		-0.0000	0.0000*****		0.0000***** 0.00
64	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000 -0.00
65	0.0000*****		0.0065	0.8825	0.0000	0.0000 0.00
66	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000 -0.00
67	0.0000	0.0000	-0.0000*****		0.0000	-0.0000 -0.00
68	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	16.0067	-0.0000 0.00

69	-0.0000	-0.0001	0.0000	0.0000*****	0.0000
70	0.0000	655619.0000	0.0000*****	0.0000	-0.0000
71	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
72	0.0000	0.0000*****	0.0000*****	0.0000	-0.0000
73	0.0000	0.0000	0.0000	100618.5632*****	0.0000
74	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000*****	-0.0000
75	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
76	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000*****	-0.0000
77	0.0000*****	0.0000	0.0000	0.0000*****	0.0000
78	0.0000	0.5625	-0.0000	0.0000	-0.0000****
79	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000*****	0.0000
80*****	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
81	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
82*****	0.0000	-0.0000*****	0.0000	0.0000*****	-0.0000
83*****	0.0000	-0.0000*****	0.0000	0.0000*****	-0.0001
84	-0.0000*****	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
85*****	0.1880	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000****
86	0.0000-261819.9382	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
87*****	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
88	0.0000*****	0.0000	0.0000*****	0.0000	0.0000
89	0.0000	-0.0000*****	0.0000*****	0.0000*****	0.0000****
90*****	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000*****	0.0000
91	0.0000*****	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0003
92*****	0.0000*****	0.0000*****	0.0000	0.0000	-0.0000
93	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
94*****	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
95	0.8268	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
96	-0.0000	0.0000	0.0000*****	0.0000	0.0000
97*****	0.0000	0.0000	472.0156	0.0000	0.0000
98	0.0000*****	-0.0000*****	0.0000	0.0000	-0.0000
99	-0.1868	1.0574	0.1076	1.0264	-0.2160
100	-0.0761	0.9881	0.1337	1.0073	-0.1459
					1.1144
					1.1477

RELAÇÃO DOS PROGRAMAS DE COMPUTADOR ESCRITOS PARA  
APLICAÇÃO A QUADRILÁTEROS ARTICULADOS

Programa QMAN	Fornece a curva descrita por um ponto do plano da biela e valores instantâneos ligados as articulações, ao ponto traçador e aos ângulos de giro; também valores ligados ao centro instantâneo de rotação e circunferência de inflexão.
Programa SINTE	Síntese de mecanismo com 3 pontos precisos pela equação de Freudenstein
Programa SQPPE	Síntese de mecanismo com 4 pontos precisos pela equação de Freudenstein
Programa TESTE	Fornece valores para analizar o erro cometido pelo mecanismo aproximado
Programa ROLET	Síntese pelo novo método

11.

## A.SÍNTESSE DE MECANISMOS TRIDIMENSIONAIS

Para o estudo dos mecanismos tri-dimensionais, tanto a análise como a síntese se tornam mais complicados.

O emprêgo de conjugados cinemáticos que não são possíveis no mecanismo planar introduz possibilidades de movimentos relativos, cuja descrição completa, sem ambiguidade, não é simples.

A descrição completa de um mecanismo exige uma estensão de palavras não deseável, ou o emprego de uma notação simbólica ainda não perfeitamente estabelecida.

Os métodos gráficos passariam a exigir desenhos em várias vistas e rebatimentos, ou o emprêgo da perspectiva, o que não colabora para a obtenção de soluções.

Para simplificar a descrição dos mecanismos, simboliza-se o conjugado através de uma letra.

A articulação R permite apenas uma rotação, tal como um mancal onde não apareça empuxo axial, ou se aparecer, fôr o mesmo escorado: possui um grau de liberdade.

O conjugado de prisma P permite apenas translação relativa e possui também um grau de liberdade.

O conjugado cilíndrico C permite rotação e translação simultâneos arbitrários e tem por conseguinte 2 graus de liberdade.

O conjugado de parafuso S, aparentemente o mais complexo para a síntese, permite o movimento típico do parafuso, uma rotação e uma translação ligadas por lei determinada e possui um grau de liberdade.

O conjugado globoide G, ou esférico faz uma conexão esférica com 3 graus de liberdade.

Podemos nos referir ainda, ao conjugado plano, ou chato ("flat") F, que permite 3 graus de liberdade, uma rotação e duas translações deslizando sobre um plano.

A ferramenta básica para a solução dos problemas de síntese de mecanismos tri-dimensionais é a geometria analítica em 3 dimensões, em particular as transformações de coordenadas tratadas através de matrizes.

Indicamos dois métodos principais.

MÉTODO DIRETO - Utilizando os vínculos estabelecidos para um mecanismo conhecido, e caminhos semelhantes àqueles já indicados para os mecanismos planares, exigindo a obtenção das equações próprias do mecanismo.

MÉTODO INDIRETO - Partindo da análise do movimento geral de um ponto no espaço e procurando estabelecer lugares geométricos gozando de propriedades especiais e que identifiquem determinado conjugado cinemático. Este método se assemelha a pesquisa dos pontos de Burmester, ou melhor, os pontos centros e os pontos de trajetórias circulares dos movimentos planos podem vir a ser considerados casos particulares do estudo do movimento geral no espaço.

MÉTODO DIRETO

12. SÍNTESE PELAS EQUAÇÕES DE VÍNCULO

Este método em tudo se assemelha ao que já foi aplicado para os mecanismos planares. Para um mecanismo de determinado tipo, procuramos obter uma relação entre as variáveis de entrada e de saída, através dos parâmetros do mecanismo.

Um elemento métrico, reconhecido como constante, como o comprimento de uma barra, ou o arco esférico de uma barra, servirá para determinar a relação que envolve parâmetros e variáveis. Em outras palavras, calcularemos o elemento métrico constante, em função dos parâmetros e variáveis como sendo exato. Não sendo possível manter esta constância ao longo de todo o espaço, procuraremos fazê-lo nos pontos precisos. Isto equivale a tomar a diferença entre o elemento constante e seu valor dado em função dos parâmetros e variáveis igual a zero apenas nos pontos precisos. Fora destes pontos, como o elemento métrico continua constante, haverá variação na relação entre as variáveis de entrada e saída, conduzindo a um erro que deve ser limitado.

A equação obtida é semelhante à equação de Freudenstein. Obtem-se um sistema de equações que se procura resolver para determinados parâmetros e através dos mesmos, chegamos às dimensões do mecanismo.

Quando a equação obtida é "separável" nos parâmetros de Freudenstein, o sistema de equações é linear e a síntese segue um caminho simples. A escolha judiciosa dos pontos precisos, tal como no mecanismo planar, é fator impor-

tante para a precisão dos resultados e minimização do erro fora dos pontos precisos.

A aplicação do método direto, traz um novo problema: - Determinar a equação que liga as variáveis de modo a proceder a síntese e separar as variáveis, estabelecendo parâmetros a arbitrar e parâmetros de projeto.

A obtenção desta equação pode ser feita por meio de uma representação direta do mecanismo e estabelecimento das coordenadas dos pontos desejados em um único sistema de coordenadas, e aplicação das condições de restrição . Também pode ser empregado o método matricial.

A cadeia cinemática que descreve um mecanismo contendo conjugados de primeira espécie, é fechada. Se fixarmos a cada elemento um sistema de coordenadas triretangular, podemos através de uma matriz de transformação estabelecer as coordenadas de um ponto de um dos sistemas, em função do segundo sistema de coordenadas e das variáveis e parâmetros que ligam os dois sistemas.

Procedendo desta forma, podemos passar do sistema 1 para o sistema 2, deste para o sistema 3, do sistema 3 para o sistema 4, etc., ao fim da cadeia podemos voltar ao sistema inicial.

Partindo do sistema 1 e voltando ao mesmo estaremos definindo a matriz identidade, através de transformações sucessivas.

Adiante, no estudo do movimento geral de

um ponto no espaço, iremos mostrar alguns detalhes de obtenção de vários tipos destas matrizes e produtos de matrizes. Agora, como o principal objetivo é empregar equações de deslocamentos, faremos apenas referências.

### SÍNTSE DE UM MECANISMO RRRR

O mecanismo contém 4 articulações, ou seja, 4 conjugados de rotação e a forma das barras permite o movimento esférico, sendo mostrado na figura 12.1.

Trata-se de um quadrilátero articulado tri-dimensional.

A perfeita definição dos eixos coordenados é condição fundamental para a obtenção das equações.

Devemos fazer referência ao fato da junta de Hooke constituir um caso particular do mecanismo em estudo.

Os eixos que passam pelo centro geométrico das articulações se encontram no centro da esfera e contêm as 4 articulações. Denominamos estes eixos com a letra  $\beta$ .

Os ângulos entre os sucessivos eixos  $\beta_i$  estão indicados pela letra  $\alpha$  e constituem parâmetros do mecanismo.

Teremos então:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \text{ângulo entre } \beta_1 \text{ e } \beta_2 \\ \alpha_2 &= " \qquad \qquad \qquad \beta_2 \text{ e } \beta_3 \\ \alpha_3 &= " \qquad \qquad \qquad \beta_3 \text{ e } \beta_4 \\ \alpha_4 &= " \qquad \qquad \qquad \beta_4 \text{ e } \beta_1\end{aligned}$$

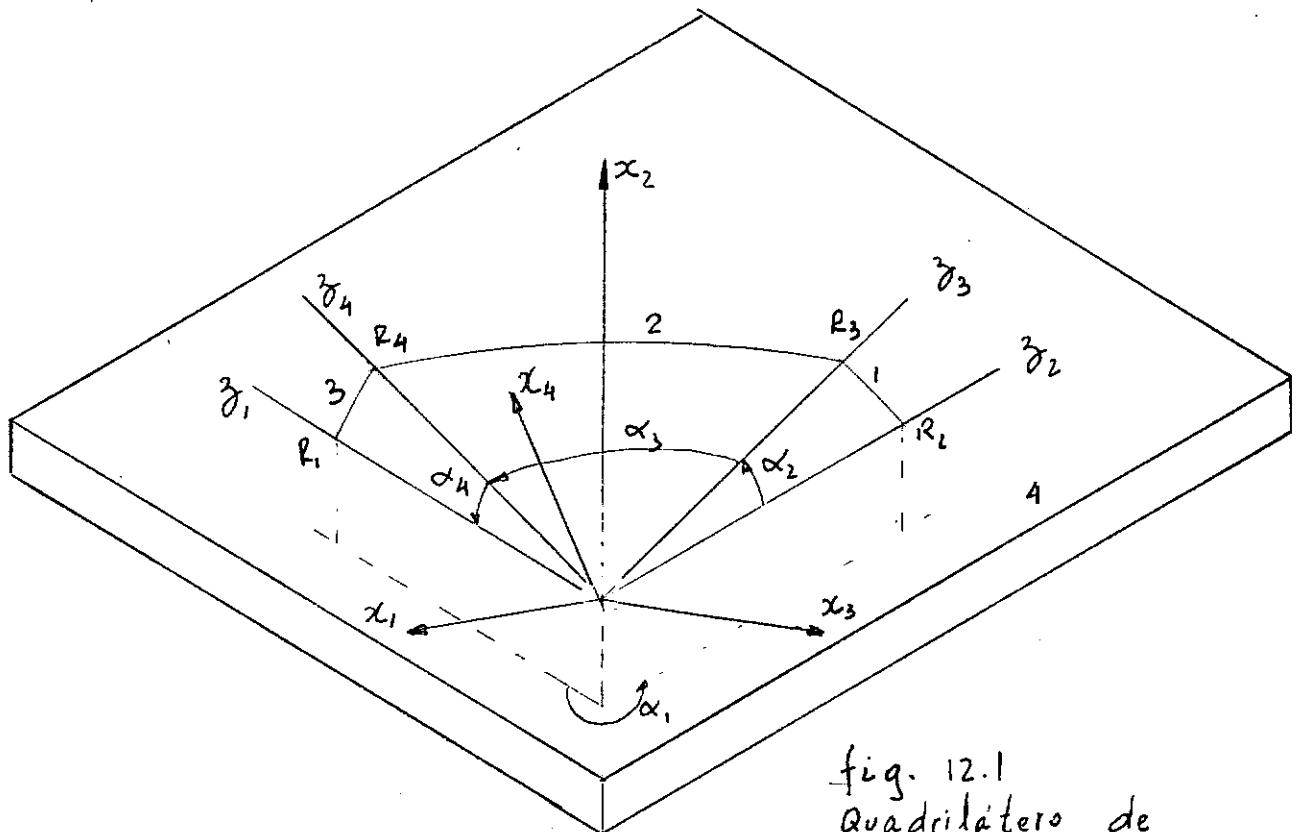


fig. 12.1  
Quadrilátero de  
mamíferos 3D  
mecanismo RRRR

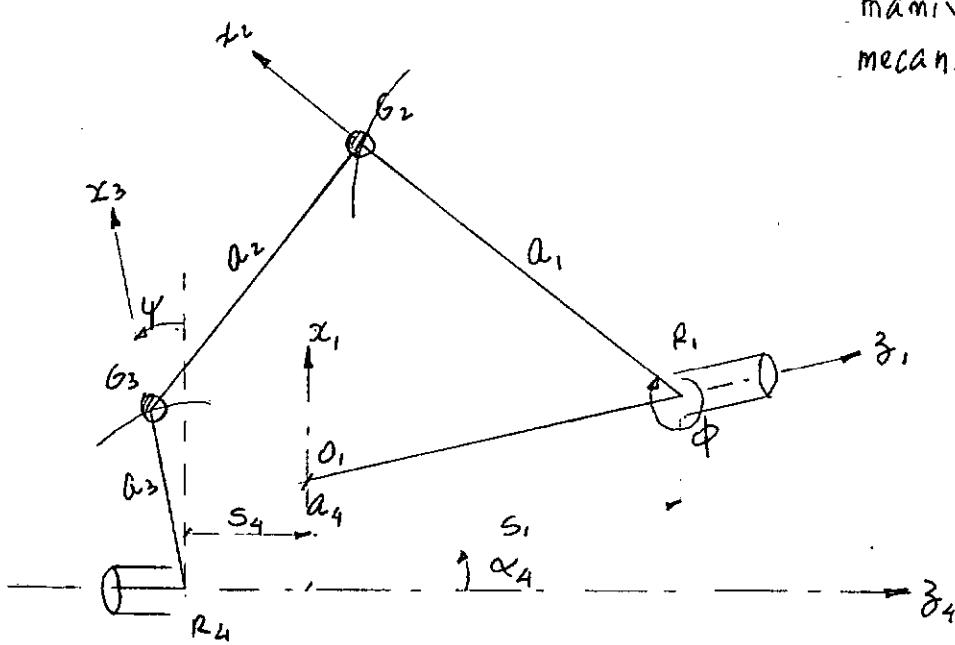


fig. 12.2  
mecanismo RGGR

Ligado a cada articulação, vamos definir um sistema de coordenadas que contém o eixo  $\gamma_i$  já definido e ainda:

Eixo dos  $\gamma_i$  perpendicular comum aos eixos  $\beta_{i-1}$  e  $\beta_i$ , ou seja

$x_1 = \epsilon' \perp$  ao plano de  $\beta_4 \circ \beta_1$

$x_2 = \epsilon' \perp$  ao plano de  $\beta_1 \circ \beta_2$

$x_3 = \epsilon' \perp$  ao plano de  $\beta_2 \circ \beta_3$

$x_4 = \epsilon' \perp$  ao plano de  $\beta_3 \circ \beta_4$

O ângulo entre dois eixos  $x_i$  é designado pela letra  $\theta$ , e temos:

$\theta_1 = \text{ângulo entre } x_1 \text{ e } x_2$

$\theta_2 = \text{ângulo entre } x_2 \text{ e } x_3$

$\theta_3 = \text{ângulo entre } x_3 \text{ e } x_4$

$\theta_4 = \text{ângulo entre } x_4 \text{ e } x_1$

Os eixos dos  $\gamma_i$  completam o triedro trirretangular em cada caso (triedro direto).

Definimos as coordenadas de um ponto no sistema 2. Para obter os valores das coordenadas no sistema 1, temos uma matriz de transformação  $A_1$ . Analogamente definiríamos as matrizes  $A_2, A_3$  e  $A_4$ . Partindo do sistema 1 e voltando ao mesmo, o produto das 4 matrizes define a matriz identidade, ou seja:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 = I \quad (12.1)$$

A matriz  $A_1$  para os eixos definidos como

acima, terá o seguinte aspecto: (Hartenberg e Denavit<sup>1</sup>)

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 \cos \theta_1 & \omega_1 \theta_1 & -\cos \alpha_1 \sin \theta_1 & \sin \alpha_1 \sin \theta_1 \\ \alpha_1 \sin \theta_1 & \sin \theta_1 & \cos \alpha_1 \cos \theta_1 & -\sin \alpha_1 \cos \theta_1 \\ 0 & 0 & \sin \alpha_1 & \omega_1 \alpha_1 \end{vmatrix}$$

Efetuando o produto matricial indicado e resolvendo a equação, é possível obter: (Hartenberg e Denavit).

$$\sin \alpha_1 \cot \alpha_2 \cos \theta_1 + \sin \alpha_1 \cot \alpha_4 \cos \theta_2 + \frac{\cos \alpha_3}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_4} - \cos \alpha_1 \cot \alpha_2 \cot \alpha_4 = \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \alpha_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad (12)$$

Esta equação pode ser empregada para a síntese por 3 pontos precisos. Arbitramos  $\alpha$ , e relacionamos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  em 3 pontos.

A determinação de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ , que são os parâmetros de projeto é realizada através dos parâmetros auxiliares, assim definidos:

$$k_1 = \sin \alpha_1 \cot \alpha_2$$

$$k_2 = \sin \alpha_1 \cot \alpha_4$$

$$k_3 = \frac{\cos \alpha_3}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_4} - \cos \alpha_1 \cot \alpha_2 \cot \alpha_4 \quad (12.3)$$

Portanto, a equação empregada para a síntese, terá o aspecto:

$$k_1 \cos \theta_1^i + k_2 \cos \theta_2^i + k_3 = \sin \theta_1^i \sin \theta_2^i - \cos \alpha_1 \cos \theta_1^i \cos \theta_2^i \quad (12.4)$$

Obtemos um sistema de equações simultâneas

neas, lineares, nas incognitas  $k_1, k_2, k_3$

Uma vez obtidos os valores dos  $k_i$ , os parâmetros de projeto serão obtidos das equações (12.3)

Para a solução, embora possa o cálculo ser conduzido manualmente, escrevemos o programa S3D3M

### Aplicação:

Dada a função  $y = \log x$  no intervalo  $1 < x < 10$  e os pontos precisos  $1, 3, 10^{\circ}$ , para  $\alpha_s = 90^{\circ}$

Determinar  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ .

### Resultados

" Parâmetros de Freudenstein"

$$k_1 = -1,2247 \quad k_2 = 0,8429 \quad k_3 = -0,2300$$

### Solução

$$\alpha_2 = -33,2315^{\circ}$$

$$\alpha_3 = 83,6130^{\circ}$$

$$\alpha_4 = 49,8700^{\circ}$$

SÍNTSE DE UM MECANISMO RGGR

O mecanismo, esquematizado na figura 12,2 possui 2 conjugados rotativos e 2 conjugados esféricos.

Os eixos coordenados são definidos como no caso anterior e torna-se necessário definir mais alguns elementos, como:

$a_1$  = comprimento da manivela de entrada

$a_3$  = comprimento da alavanca

$a_2$  = comprimento da biela

$a_4$  = comprimento entre  $\beta_1$  e  $\beta_4$  ao longo de  $\chi_1$ , é a base.

A distância medida ao longo de  $\beta_1$ , indo de  $\chi_1$  ao plano de rotação da manivela é um parâmetro importante e designado por  $s_1$ . Analogamente, teremos a distância  $s_4$ , medida ao longo de  $\beta_4$  indo do plano de rotação da alavanca ao eixo  $\chi_1$ .

É possível aplicar exatamente o mesmo método matricial, para obter a equação de deslocamento necessário a síntese, uma vez introduzidos os valores das distâncias  $a_i$  e  $s_i$ .

No caso presente, no entanto, vamos obter a equação de deslocamento necessária a síntese, pela análise passo, a passo das coordenadas de um ponto e das projeções necessárias a colocar todas as distâncias em um plano de medição.

O comprimento da biela, um fator constante, será o elemento para definir a equação de deslocamento.

O ângulo de rotação da manivela no seu plano, a partir de determinada origem, será a variável independente( ou melhor, proporcional a variável independente), enquanto o ângulo de rotação da alavanca é feito proporcional a variável dependente.

As coordenadas do ponto  $G_2$  no sistema  $O, \chi, \beta_1, \beta_2$ ,

podem ser obtidas facilmente, e são:

$$G_2 \begin{cases} x_1 = a \cos \phi \\ y_1 = a \sin \phi \\ z_1 = s_1 \end{cases} \quad (12.5)$$

Para obter as coordenadas de  $G_3$  no sistema  $x_1 y_1 z_1$ , podemos empregar a matriz de transformação, ou mais diretamente observar o que ocorre com as projeções:

$$G_3 \begin{cases} x_1 = a_3 \cos \varphi - a_4 \\ y_1 = -s_4 \sin \alpha_4 + a_3 \sin \varphi \cos \alpha_4 \\ z_1 = -s_4 \cos \alpha_4 - a_3 \sin \varphi \sin \alpha_4 \end{cases} \quad (12.6)$$

A distância  $G_2 G_3$ , ou seja, o comprimento da biela é obtida através da conhecida relação:

$$(x_{1G2} - x_{1G3})^2 + (y_{1G2} - y_{1G3})^2 + (z_{1G2} - z_{1G3})^2 = (G_2 G_3)^2 \quad (12.7)$$

Desta forma, a diferença entre o comprimento da biela e seu valor obtido quando introduzimos as relações já determinadas anteriormente na equação será expressa por

$$\Delta = (a \cos \phi - a_3 \cos \varphi - a_4)^2 + (a \sin \phi + s_4 \sin \alpha_4 - a_3 \sin \varphi \cos \alpha_4)^2 + (s_1 + s_4 \cos \alpha_4 - a_3 \sin \varphi \sin \alpha_4)^2 - a_2^2 \quad (12.8)$$

Esta diferença deve ser nula para que a equação seja exata. Não podendo garantir a exatidão, podemos fazê-la permanecer nos pontos precisos.

O desenvolvimento da expressão obtida, de modo a formar o sistema de equações simultâneas, pode ser feito por vários caminhos. Procuramos reunir fatores que permitem definir parâmetros em números correspondente ao número de

pontos precisos, de modo a formar uma equação linear. O desenvolvimento que damos a seguir, viza uma síntese com 6 pontos precisos.

$$\text{Fazendo } \phi = \phi_0 + p$$

Desenvolvendo os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & a_1^2 \cos^2 \phi + a_3^2 \cos^2 \psi + a_4^2 - 2 a_1 a_3 \cos \phi \cos \psi \\
 & + 2 a_1 a_4 \cos \phi - 2 a_3 a_4 \cos \psi + a_1^2 \sin^2 \phi + s_4^2 \sin^2 \alpha_4 \\
 & + a_3^2 \sin^2 \psi \cos^2 \alpha_4 + 2 a_1 s_4 \sin \phi \sin \alpha_4 \\
 & - 2 a_1 a_3 \sin \phi \sin \psi \cos \alpha_4 - 2 s_4 a_3 \sin \alpha_4 \sin \phi \cos \alpha_4 \\
 & + s_1^2 + s_4^2 \cos^2 \alpha_4 + a_3^2 \sin^2 \psi \sin^2 \alpha_4 \\
 & + 2 s_1 s_4 \cos \alpha_4 + 2 s_1 a_3 \sin \psi \sin \alpha_4 \\
 & + 2 s_4 a_3 \cos \alpha_4 \sin \psi \sin \alpha_4 - a_2^2 = 0 \tag{12.3}
 \end{aligned}$$

Reduzindo termos semelhantes, desenvolvendo  $\phi$  e dividindo por  $2 a_1 \cos \phi_0$ , temos:

$$\begin{aligned}
 & a_1^2 + a_3^2 + a_4^2 + s_1^2 + s_4^2 - a_2^2 + 2 s_1 s_4 \cos \alpha_4 \\
 & + (\cos \phi_0 \cos p - \sin \phi_0 \sin p) (-2 a_1 a_3 \cos \psi + 2 a_1 a_4) \\
 & - 2 a_3 a_4 \cos \psi \\
 & + (\sin \phi_0 \cos p + \sin p \cos \phi_0) (2 a_1 s_4 \sin \alpha_4 - 2 a_1 a_3 \sin \psi \cos \alpha_4) \\
 & - 2 s_4 a_3 \sin \alpha_4 \sin \psi \cos \alpha_4 + 2 s_1 a_3 \sin \psi \sin \alpha_4 \\
 & + 2 s_4 a_3 \cos \alpha_4 \sin \psi \sin \alpha_4 = 0 \tag{12.12}
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{a_4}{a_3} + \frac{s_4 \sin \alpha_4 \sin \phi_0}{a_3 \cos \phi_0} \right) \cos \rho + \left( \frac{s_4 \sin \alpha_4}{a_3} - \frac{a_4 \sin \phi_0}{a_3 \cos \phi_0} \right) \sin \rho \\
 & - \frac{a_4 \cos \phi_0}{a_3 \cos \phi_0} + \frac{s_4 \sin \alpha_4 \sin \phi_0}{a_3 \cos \phi_0} + (\sin \rho \cos \phi - \sin \phi \cos \alpha_4 \cos \rho) \tan \\
 & + (a_1^2 + a_3^2 + a_4^2 + s_1^2 + s_4^2 - a_1^2 + 2s_1 s_4 \cos \alpha_4) = \\
 & = \cos \rho \cos \phi + \sin \rho \sin \phi \cos \alpha_4 \quad (12.11)
 \end{aligned}$$

$$k_1 = \frac{a_4 + s_4 \sin \alpha_4 \tan \phi_0}{a_3} \quad (12.12)$$

$$k_2 = \frac{s_4 \sin \alpha_4 - a_4 \tan \phi_0}{a_3} \quad (12.13)$$

$$k_3 = \frac{-a_4}{a_3 \cos \phi_0} \quad (12.14) \quad k_4 = \frac{s_4 \sin \alpha_4}{a_3 \cos \phi_0} \quad (12.15)$$

$$k_5 = \tan \phi_0 \quad (12.16)$$

$$k_6 = \frac{a_1^2 + a_3^2 + a_4^2 + s_1^2 + s_4^2 + 2s_1 s_4 \cos \alpha_4}{2a_1 a_3 \cos \phi_0} \quad (12.17)$$

$$\begin{aligned}
 & k_1 \cos \rho + k_2 \sin \rho + k_3 \cos \phi + k_4 \sin \phi \\
 & + k_5 (\sin \rho \cos \phi - \cos \alpha_4 \cos \rho \sin \phi) + k_6 \\
 & = \cos \rho \cos \phi + \cos \alpha_4 \sin \rho \sin \phi \quad (12.18)
 \end{aligned}$$

Para resolver o problema de síntese, vamos detalhar o procedimento adotado, incluindo as fases do programa.

Queremos relacionar duas variáveis pela e equação:  $y = f(x)$

Supondo variação linear entre a variável e o ângulo de deslocamento da manivela, a partir de determinada origem  $\phi_0$  podemos escrever:

$$p_i = \frac{\Delta\phi}{\Delta x} (x_i - x_0)$$

$$\phi_i = \phi_0 + p_i$$

Analogamente, teremos para a variável de pendente e o ângulo de rotação da alavanca:

$$\gamma_i = \frac{\Delta\psi}{\Delta y} (y_i - y_0)$$

$$\psi_i = \psi_0 + \gamma_i$$

No caso presente, o intervalo de variação da variável independente,  $\Delta x$  é especificada, bem como o ângulo de rotação da manivela e alavanca ao longo do intervalo de síntese ( $\Delta\phi$  e  $\Delta\psi$ )

As variáveis que interessam a solução do problema estão, identificadas no programa para o computador do seguinte modo

#### VALORES FORNECIDOS AO COMPUTADOR

- |      |  |   |
|------|--|---|
| X(I) | - variável independente, definida em 6 pontos precisos | 6 |
| X0   | - valor inicial do intervalo de síntese                |   |
| XF   | - Os valores Y se correspondem com X                   |   |

DELFI - Valor do intervalo de variação do ângulo da manivela, correspondente a XF-XO  
DELPS - Análogo para alavanca  
PSIO - Origem de rotação da alavanca  
ALFA4 - Parâmetro arbitrado-ângulo entre os eixos  $\delta_1$  e  $\delta_4$   
A4 - Parâmetro arbitrado-distância da perpendicular comum a  $\delta_1$  e  $\delta_4$

VALORES FORNECIDOS PELO COMPUTADOR

FIO - Origem de rotação da manivela  
DELX - Diferença XF-XO  
DELY - YF-YO  
P(I) - Variação do ângulo de rotação da manivela a partir da origem e correspondente a X(I)-X(1)  
Q(I) - Idem, alavanca  
FI(I) - Ângulo total de rotação da manivela, a partir do eixo coordenado

Os valores dos ângulos precedidos pela letra R, referem-se aos mesmos em radianos.

O determinante principal do sistema de equações lineares em  $k$  tem componentes EE(I,J). O vetor que caracteriza o segundo membro das equações tem componentes FF(I)

Para resolver o sistema de equações simultâneas é utilizada a sub-rotina SIMQ da biblioteca do computador.

Os parâmetros de cálculo, estão relacionados com os parâmetros de projeto pelas relações (12.12) & (12.17)

Com o valor de  $k_5$  obtemos imediatamente  $\phi_0$ . Conhecidos  $\phi_0, \alpha_4$ , uma vez que o parâmetro  $\alpha_4$  foi arbitrado, a equação (12.14) permite obter o valor de  $\alpha_1$ .

A equação (12.15) permite determinar  $S_4$ , já que nestas alturas os demais elementos estão conhecidos.

Para obter os parâmetros  $\alpha_3, S_4$  formamos um sistema de 2 equações com duas incógnitas a partir das equações (12.18) e (12.19)

Finalmente o parâmetro de projeto  $\alpha_2$  é obtido da definição de  $k_6$ .

O programa pode ser utilizado para outras funções, mediante a definição dos pontos precisos e refazendo os cartões que definem a variável independente em função da independente. Os dados arbitrados devem ser colocados nos 3 cartões de dados.

### APLICAÇÃO

Para a função  $y = \log_{10} x$  no intervalo  $1 < x < 10^3$  com 6 pontos precisos determinados pelos polinômios de Chebychev, arbitrando

$$\Delta\phi = 120^\circ$$

$$\Delta\psi = 30^\circ$$

$$\alpha_4 = 90^\circ$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$a_4 = 1.0$$

obtemos:

" Parâmetros de Freudenstein"

$$R_1 = 0,9390$$

$$k_2 = 0,1334$$

$$k_5 = -0,7948$$

$$k_4 = 0,1354$$

$$R_5 = -1,8924$$

$$k_6 = 0,8558$$

"Solução:

$$\phi_2 = -62,1479$$

$$\psi_2 = (\text{arbitrada})$$

$$q_1 = 2,6928$$

$$q_2 = 6,7278$$

$$q_3 = 2,1664$$

$$q_4: (\text{arbitrada}) = 1,0$$

$$s_1 = 5,8662$$

$$s_4 = -1,6033$$

## CONCLUSÃO

Queremos terminar esta parte da exposição da síntese através das equações de deslocamentos, lembrando que é possível separar as parcelas da mesma em outras combinações de modo a obter síntese com número diferentes de pontos precisos. De um modo geral, é preferível obter a solução em forma de um sistema de equações simultâneas linear, não é impossível trabalhar com um sistema não linear como já foi feita no mecanismo planar com 5 pontos precisos. Por outro lado, o computador permite sempre empregar a mesma sistemática de  $n$  pontos para uma pesquisa com  $(n + 1)$  pontos, mediante a procura do valor de um ou mais dos parâmetros arbitrados a partir de um valor inicial e em pequenos acréscimos, completando o trabalho com a análise de ângulo da alavanca em função do ângulo da manivela, no ponto  $(n + 1)$  desejado. O re-espaçamento dos pontos precisos, também conduz a soluções diferentes, com modificação do alcance da síntese. O emprêgo de métodos de pesquisa para otimização do erro, também conduz a melhoria do resultado.

13.

## SÍNTESSE INDIRETA

Solução do problema de síntese de mecanismos tri-dimensionais através do estudo do movimento geral de um ponto no espaço.

## PRELIMINARES

No estudo do movimento dos mecanismos faremos referência a passagem de um corpo rígido de uma posição qualquer estabelecida em um sistema de referência fixo  $\Sigma'$ , através de uma rotação e uma translação em torno de um eixo cuja posição é estabelecida no sistema fixo, por meio de sua direção e indicação de um de seus pontos.

Quando nos referimos as coordenadas de um ponto em relação ao sistema móvel, ao qual está ligado o corpo rígido, atribuiremos ao sistema móvel a notação  $\Sigma_{\gamma}$ , indicando  $\gamma$  o nº de ordem do sistema móvel, quando houver mais de um, como indicamos na figura 13.1.

Faremos uso dos ângulos Eulerianos modificados, empregados em aviação, de sorte que a posição de um ponto em um sistema móvel, cuja origem coincide com o sistema fixo, é definida por 3 rotações sucessivas, uma em torno de cada eixo coordenado, na ordem:

- 1 - Rotação em torno de  $X_3$
- 2 - Rotação em torno de  $X_2'$
- 3 - Rotação em torno de  $X_1''$

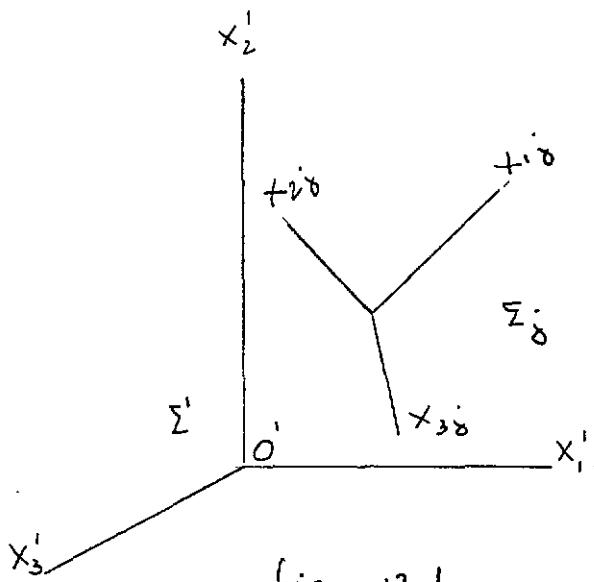


fig. 13.1

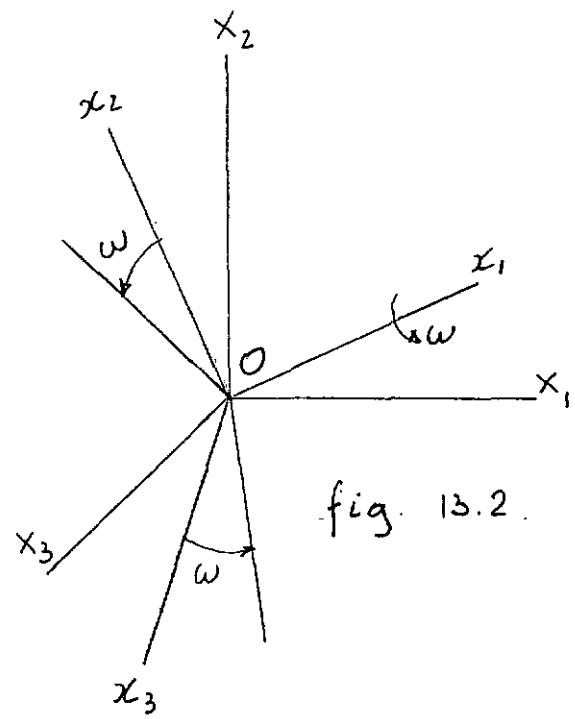
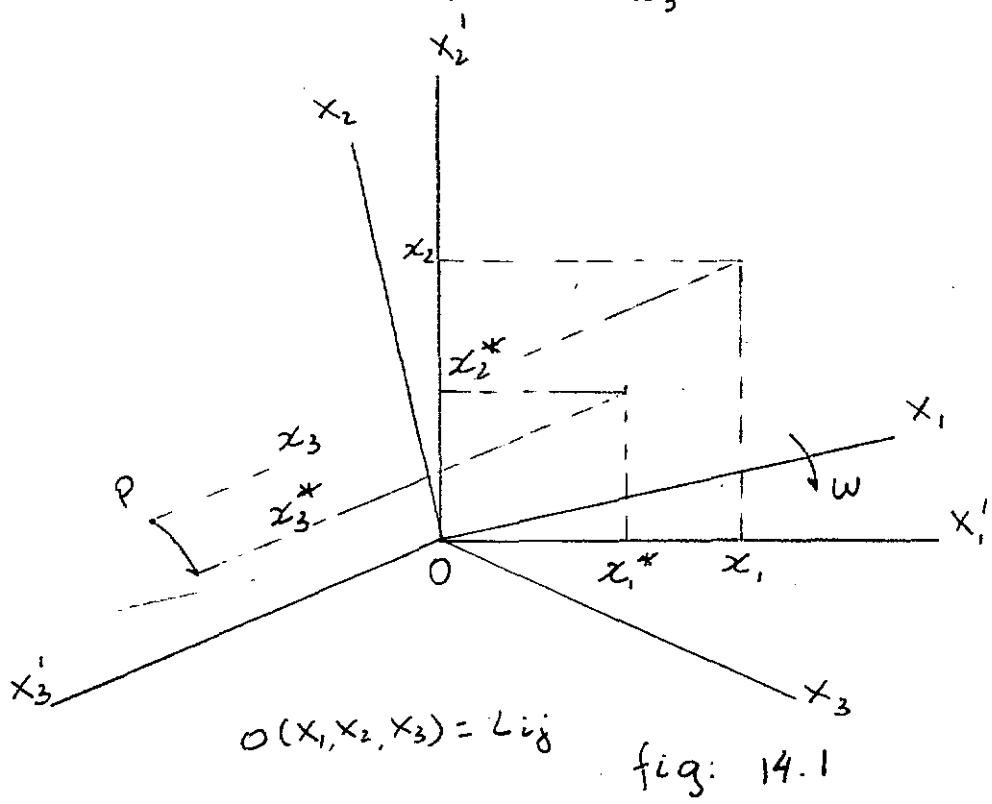


fig. 13.2.



$$O(x_1, x_2, x_3) = L_{ij}$$

fig. 14.1

## DEDUÇÃO CLÁSSICA DAS TRANSFORMAÇÕES

Girando um sistema  $O(x_1, x_2, x_3)$  em torno do eixo  $x_3$  de um ângulo  $\omega$ , os vetores unitários ou as coordenadas de um ponto medido no sistema de referência fixo (inicialmente coincidente), serão:

$$x' = M_1 x$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (13.1)$$

Também é possível obter a relação inversa

$$x = M_1^{-1} x'$$

Girando em seguida em torno de  $x_2'$ , teremos:

mos:

$$x'' = M_2 x' = M_2 M_1 x$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix} \quad (13.2)$$

Também:

$$x = M_1^{-1} M_2^{-1} x''$$

Finalmente, girando em torno de  $x_1''$ ,

$$x''' = M_3 x'' = M_3 M_2 M_1 x$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \quad (13.3)$$

As matrizes  $M$  são unitárias e ortogonais.

### NOVA DEDUÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES

As coordenadas de um ponto medidas no sistema móvel estão ligadas às coordenadas do mesmo ponto medidas no sistema fixo.

Os eixos que definem o sistema móvel, tem em relação ao sistema fixo, os cosenos diretores dados pela matriz

$$\ell = \begin{vmatrix} \ell_{\delta 1} & \ell_{\delta 2} & \ell_{\delta 3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{vmatrix} \quad (13.4)$$

Temos a seguinte relação de transformação entre os dois sistemas:

$$\Sigma' = \ell \Sigma \quad (13.5)$$

Isto equivale a notação tensorial

$$x_i' = a_{ij} x_j$$

$$\text{Então: } M = \ell \bar{M} \quad (13.6)$$

Em particular para a matriz unitária  $I_3$  correspondente aos 3 vetores fundamentais do sistema móvel, teremos:

$$I_3 = \ell \bar{M} = \ell \ell' = \ell \ell \quad (13.7)$$

Ou em outras palavras, no caso presente, a matriz  $\bar{M}$  é a matriz transposta de  $\ell$ , ou ainda a inversa, pois  $\ell$  é ortogonal.

## PROPRIEDADES PARTICULARES

$$|\ell| = 1$$

$$\ell' = \ell^{-1} = \ell^T$$

Cada elemento de  $\ell$  iguala seu co-fator

Suponha-se uma rotação do sistema em torno de  $\partial x_1$  de um ângulo  $\omega$  (figura 13.2)

Tinhamos inicialmente

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{vmatrix} \quad \Sigma' = \ell \Sigma \quad (13.8)$$

Temos agora

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21}^* & \ell_{22}^* & \ell_{23}^* \\ \ell_{31}^* & \ell_{32}^* & \ell_{33}^* \end{vmatrix} \quad \Sigma' = R_1 \Sigma \quad (13.9)$$

Ora,  $\partial x_1$  é perpendicular a  $\partial x_1$ , e faz ângulo  $\omega$  com os eixos  $\partial x_2$  e  $\partial x_3$

Virá portanto

$$\ell \ell^* = I \begin{vmatrix} \ell_{11} & \ell_{21}^* & \ell_{31}^* \\ \ell_{12} & \ell_{22}^* & \ell_{32}^* \\ \ell_{13} & \ell_{23}^* & \ell_{33}^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{vmatrix}$$

Logo,  $\ell = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{vmatrix} \ell_1$

Portanto,

$$\ell_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{vmatrix}^{-1} \ell = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{vmatrix} \ell$$

$$\ell_1 = e_{1}(\omega) \ell \quad (131v)$$

Observação :

$$\begin{vmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ell_{21}^* \\ \ell_{22}^* \\ \ell_{23}^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \cos\omega \\ \sin\omega \end{vmatrix} \text{ porque}$$

$$[\ell_{11}, \ell_{12}, \ell_{13}] \{ \ell_{21}^*, \ell_{22}^*, \ell_{23}^* \} = \text{(ortogonais)}$$

$$[\ell_{21}, \ell_{22}, \ell_{23}] \{ \ell_{11}^*, \ell_{12}^*, \ell_{13}^* \} = \cos\omega \text{ (unitários)}$$

$$[\ell_{31}, \ell_{32}, \ell_{33}] \{ \ell_{21}^*, \ell_{22}^*, \ell_{23}^* \} = \cos(\pi/2 - \omega) \text{ (unitários)}$$

Analogamente

$$\mathbf{l} \{ l_{31}^+, l_{32}^+, l_{33}^+ \} = \{ 0, -\sin \omega, \cos \omega \} \quad (13.11)$$

Por processo similar

$$\rho_2(\omega) = \begin{vmatrix} \cos \omega & 0 & -\sin \omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega & 0 & \cos \omega \end{vmatrix} \quad (13.13)$$

$$\rho_3(\omega) = \begin{vmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\rho(\omega)$  é ortogonal e unitária

Girando o sistema, primeiro de  $\omega_3$  em  $Ox_3$ , depois de  $\omega_2$  em  $OK'$  e finalmente de  $\omega_1$  em  $OK''$ , teremos

$$\mathbf{l}_1 = \rho_1(\omega_1) \rho_2(\omega_2) \rho_3(\omega_3) \mathbf{l} \quad (13.14)$$

## PÓS-MULTIPLICAÇÃO

Temos  $\lambda_1 = \rho_1(\omega) \lambda$

Podemos fazer  $\lambda_1 = \lambda G_1(\omega)$ , com

$$G_1(\omega) = \lambda' \rho_1(\omega) \lambda \quad (13.16a)$$

Desenvolvendo

$$G_1(\omega) = \cos \omega I_3 + (1 - \cos \omega) \{ \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13} \} [ \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13} ]$$

$$+ \sin \omega \begin{vmatrix} 0 & \lambda_{13} & -\lambda_{12} \\ -\lambda_{13} & 0 & \lambda_{11} \\ \lambda_{12} & -\lambda_{11} & 0 \end{vmatrix} \quad (13.17)$$

$$G_1(\omega) = \cos \omega \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (1 - \cos \omega) \left\{ \begin{array}{c} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \lambda_{13} \end{array} \right\} [ \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13} ] +$$

$$+ \sin \omega \begin{vmatrix} 0 & \lambda_{13} & -\lambda_{12} \\ -\lambda_{13} & 0 & \lambda_{11} \\ \lambda_{12} & -\lambda_{11} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$G_1(\omega) = \begin{vmatrix} \cos\omega & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega \end{vmatrix} + (1-\cos\omega) \begin{vmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{12} & l_{11}l_{13} \\ l_{11}l_{12} & l_{12}^2 & l_{12}l_{13} \\ l_{11}l_{13} & l_{12}l_{13} & l_{13}^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \sin\omega \begin{vmatrix} 0 & l_{13} & -l_{12} \\ -l_{13} & 0 & l_{11} \\ l_{12} & -l_{11} & 0 \end{vmatrix}$$

$$G_1(\omega) = \begin{vmatrix} \cos\omega + l_{11}^2(1-\cos\omega) & l_{11}l_{12}(1-\cos\omega) + l_{13}\sin\omega & l_{11}l_{13}(1-\cos\omega) - l_{12}\sin\omega \\ l_{11}l_{12}(1-\cos\omega) - l_{13}\sin\omega & \cos\omega + l_{12}^2(1-\cos\omega) & l_{11}l_{12}(1-\cos\omega) + l_{13}\sin\omega \\ l_{11}l_{13}(1-\cos\omega) + l_{12}\sin\omega & l_{12}l_{13}(1-\cos\omega) - l_{11}\sin\omega & \cos\omega + l_{13}^2(1-\cos\omega) \end{vmatrix} \quad (13.18)$$

Definindo

$$B = \begin{vmatrix} 1 & l_{13} \tan \frac{\omega}{2} & -l_{12} \tan \frac{\omega}{2} \\ -l_{13} \tan \frac{\omega}{2} & 1 & l_{11} \tan \frac{\omega}{2} \\ l_{12} \tan \frac{\omega}{2} & -l_{11} \tan \frac{\omega}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

(13.19)

Pode-se verificar que

$$G(\omega) = (B')^{-1} B \quad (13.20)$$

14. ROTAÇÃO DE  $O(x_1, x_2, x_3)$  EM TORNO DE UM EIXO QUALQUER PASSANDO POR  $O(x_1, x_2, x_3)$

Seja  $\partial X_1$  o eixo e sejam  $\partial X_2$  e  $\partial X_3$  dois eixos que juntamente com  $\partial X_1$  formam um sistema ortogonal, cuja matriz é  $[L_{ij}]$

Sendo  $O(x_1, x_2, x_3)$  rigidamente ligado a  $O(x_1, x_2, x_3)$ , tomado vetores unitários nos eixos coordenados  $\partial x_1$ ,  $\partial x_2$ ,  $\partial x_3$ , as coordenadas das extremidades são  $\xi, \gamma, z$

$$[\xi, \gamma, z] = L l' \quad (14.1)$$

(Vide equações (B.7))

Quando o sistema  $O(x_1, x_2, x_3)$  gira em torno de  $\partial X_1$  de uma rotação  $\omega$ , as coordenadas  $[\xi, \gamma, z]$  não mudam.

Sendo  $l_1$  a matriz adequada para a nova posição de  $O(x_1, x_2, x_3)$ , tal como em (13.10), virá:

$$[\xi, \gamma, z] = P_1(\omega) L l_1'$$

$$L l_1' = P_1(\omega) L l_1'$$

$$l_1 = L L' P_1(\omega) L \quad (14.2)$$

$$\text{ora, } L' P_1(\omega) L = (B')^{-1} B \text{ (ver em (13.16a) e (13.20)).}$$

$$\text{Então } l_1 = L (B')^{-1} B$$

Observe-se que, se  $O(x_1, x_2, x_3)$  coincide com  $\partial x_1, x_2, x_3$  de sorte que  $L = I$ , virá:

$$l_1 = P_1(\omega) l \quad (14.3)$$

## FÓRMULA DE RODRIGUEZ

Figura 14.1

Rotação em torno de  $Ox_1 (\angle_{11}, \angle_{12}, \angle_{13})$  do ângulo  $\omega$

$x_1, x_2, x_3$ , coordenadas do ponto P no sistema  $O(x'_1, x'_2, x'_3)$  antes da rotação

$x^*, x_2^*, x_3^*$ , coordenadas do ponto P no sistema  $O(x'_1, x'_2, x'_3)$  após, a rotação

## Demonstração

Sejam  $(x_1, x_2, x_3)$  as coordenadas de P em relação a um sistema qualquer passando por O cuja matriz é  $B$ .

$$\underline{x} = l x = l_1 x^* = l (B')^{-1} B x^*$$

$$\text{Então } l x = l (B')^{-1} B x^*, \sim$$

$$x = (B')^{-1} B x^*$$

$$B' x = B x^*$$

(14.18)

Finalmente

FORMA GENERALIZADA DA EQUAÇÃO DE RODRIGUEZ  
Figura 14.3

Queremos determinar relações de transformação de coordenadas, quando o sistema móvel recebe uma rotação de valor  $\omega_j$  em torno de um eixo que não passa pela origem e ainda uma translação paralela a este mesmo eixo de valor  $\vec{c}_j$ . O conjunto de rotação e translação define um parafuso que pode ser determinado pelos cosenos diretores do eixo  $O\kappa$ , do parafuso e pelas coordenadas do ponto por onde passa o parafuso ( $a_j, b_j, c_j$ ).

O sistema fixo está definido por  $O'(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$   
O sistema móvel, na posição  $j$  está definido por  $O_j(x_1, x_2, x_3)$

O vetor que une a origem do sistema fixo com a origem do sistema móvel, na posição  $j$  designado por  $A_j$  tem as componentes  $\vec{A}_j(a_j, b_j, c_j)$

O eixo do parafuso em torno do qual vai girar e paralelamente ao qual vai se deslocar o sistema é definido pelos cosenos diretores  $\{u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}\}$

Traçamos por  $O_j$  eixos paralelos aos sistemas fixo e anotamos por  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$

O sistema  $O_j$  apresenta em relação ao sistema  $O$  a matriz  $\lambda$  e permite escrever:  $x = \lambda \bar{x}$  (14.6)  
(coordenadas do ponto medidas em  $O_j$  em função de  $\lambda$  e das coordenadas medidas em  $O$ )

$$\therefore \text{Podemos computar } \bar{x} = \lambda^{-1}x \quad (14.7)$$

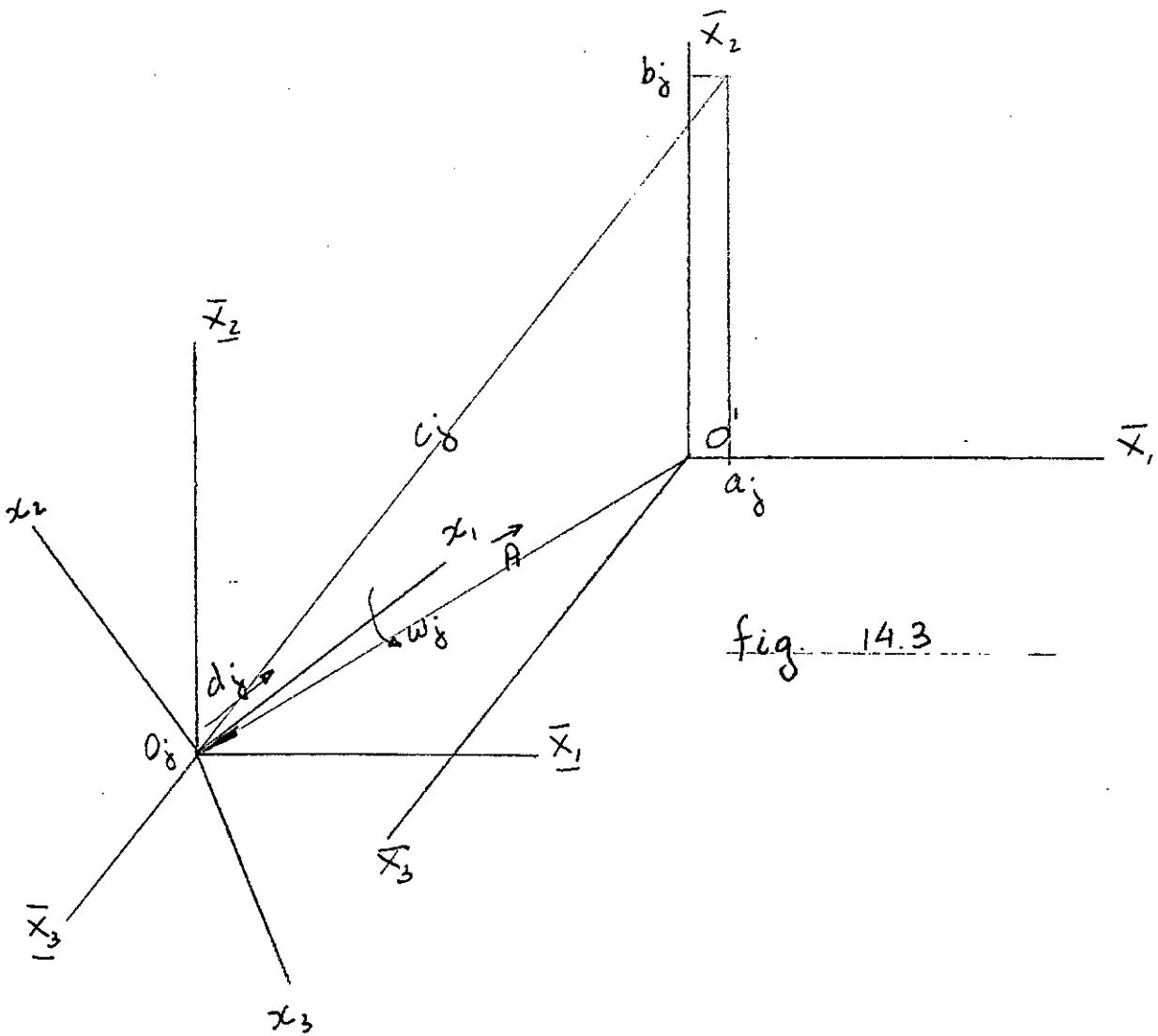


fig. 14.3

Em relação ao sistema fixo, virá

$$\underline{x} = \underline{x}^* + \{\vec{A}\}$$

Dando-se ao sistema  $O(x_1, x_2, x_3)$  uma rotação  $\omega$  em torno de  $O\langle$ , sendo a rotação definida pela matriz  $\rho_r(\omega)$ , as coordenadas medidas em relação a posição inicial de  $O(x_1, x_2, x_3)$  valem

$$\underline{x}^* = B^{-1} B' \underline{x}$$

As coordenadas em  $O(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  relativas ao ponto  $\bar{x}^*$  são

$$\bar{x}^* = l^{-1} x^* = l^{-1} B' B \underline{x} \quad (14.8)$$

Em relação ao sistema fixo, virá

$$\bar{x}^* = \bar{x}^* + \{\vec{A}\} = l^{-1} B' B \underline{x} + \{\vec{A}\}$$

$$\text{ora, } \underline{x} = l \bar{x} = l (\bar{x} - \{\vec{A}\})$$

$$\text{Logo, } \bar{x}^* = l^{-1} B' B' l - l^{-1} B' B' l \{\vec{A}\} + \{\vec{A}\} \quad (14.9)$$

Podemos computar  $l$  através do vetor  $\vec{u}$  e escolhendo os outros 2 eixos. Também podemos fazer uso das relações já definidas

$$l^{-1} \rho_r(\omega) \rho = (B')^{-1} B$$

Para cuja definição bastam  $\vec{u} = \omega$

Os dois movimentos (rotação e translação) podem ser superpostos. Deslocando-se a origem  $O_j$  de uma distância  $d_j$  ao longo do eixo  $O_j x_i$ , as coordenadas de  $\bar{x}^*$  serão acrescidas de  $d_j \{u_{ij}\}$

Teremos então para a posição final do ponto  $(x_1, x_2, x_3)$ , ou  $(x_1, y_1, z_1)$

$$\begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} - [R] \begin{Bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{Bmatrix} + d_j \begin{Bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ u_{3j} \end{Bmatrix} \quad (14.20)$$

$$[R] = \begin{vmatrix} 1 + (u_{1j}^2 - 1)(1 - \cos \theta_j) & u_{1j}u_{2j}(1 - \cos \theta_j) - u_{3j}\sin \theta_j & u_{1j}u_{3j}(1 - \cos \theta_j) + u_{2j}\sin \theta_j \\ u_{1j}u_{2j}(1 - \cos \theta_j) + u_{3j}\sin \theta_j & 1 + (u_{2j}^2 - 1)(1 - \cos \theta_j) & u_{2j}u_{3j}(1 - \cos \theta_j) - u_{1j}\sin \theta_j \\ u_{1j}u_{3j}(1 - \cos \theta_j) - u_{2j}\sin \theta_j & u_{2j}u_{3j}(1 - \cos \theta_j) + u_{1j}\sin \theta_j & 1 + (u_{3j}^2 - 1)(1 - \cos \theta_j) \end{vmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} a_{xj} + 1 & b_{xj} & c_{xj} \\ a_{yj} & b_{yj} + 1 & c_{yj} \\ a_{zj} & b_{zj} & c_{zj} \end{bmatrix}$$

Ou seja

$$\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{xj} & b_{xj} & c_{xj} \\ a_{yj} & b_{yj} & c_{yj} \\ a_{zj} & b_{zj} & c_{zj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{bmatrix} + \\ + d_j \begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ u_{3j} \end{bmatrix}$$

Fazendo a necessária substituição

$\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}$	$= [R] \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} du_{1j} \\ du_{2j} \\ du_{3j} \end{bmatrix}$	$(14.11)$
---	---	-----------

As coordenadas finais  $\bar{X}^*$  (sistema fixo) em função das coordenadas iniciais  $\bar{X}$  (sistema fixo) serão fornecidas por

$$\bar{X}^* = B^{-1} B' \bar{X}; \quad \text{sendo}$$

$$\bar{X} = \bar{X} - \{\vec{A}\}$$

$$\bar{X}^* = B^{-1} B' (\bar{X} - \{\vec{A}\}); \quad \text{então}$$

$$\bar{X}^* = B^{-1} B' \bar{X} - B^{-1} B' \{\vec{A}\} + \{\vec{A}\}$$

FINALMENTE

$$\bar{X}^* = B^{-1} B' \bar{X} - B^{-1} B' \{\vec{A}\} + \{\vec{A}\} + d_j \hat{u} \{ \vec{u} \} \quad (19.12)$$

Enfatizamos o fato que o deslocamento é equivalente a uma translação ao longo e uma rotação em torno de um eixo paralelo ao unitário  $\hat{u}$  que define o parafuso e que passa pelo ponto  $(a_j, b_j, c_j)$

Os valores de  $d_j, \theta_j$  são os parâmetros do parafuso, seu sentido dado pela regra convencional.

#### MÉTODO INDIRETO

O método apresentado pelo professor B. Roth e que denominamos de método indireto, tem como principal característica o estudo geral do movimento e identificação do conjugado cinemático que a ele pode corresponder, tornando desnecessária uma representação completa e precisa do mecanismo a ser empregado, evitando a necessidade da determinação das equações de ligação dos elementos.

## DESLOCAMENTO GERAL DOS CORPOS RÍGIDOS

No estudo dos mecanismos, faremos referência a um sistema fixo e a um sistema móvel. Na realidade, os sistemas podem ter sua posição invertida. Em cada sistema temos corpos rígidos, cada um contendo todos os pontos do espaço de 3 dimensões.

Para fixar  $\Sigma^1$  basta fixar 3 pontos não colineares.

Na passagem de uma posição  $\Sigma_1$  para outra  $\Sigma_2$  finitamente separada da primeira, pode-se escolher vários caminhos. Iremos preferir um parafuso, isto é, uma rotação em torno de uma translação ao longo do mesmo eixo. O parafuso é notado  $\phi_{ij}$ .

Se nós conhecermos 2 posições, isto é, 2 conjuntos de 3 pontos não colineares, o parafuso será determinado através da expressão generalizada da equação de Rodriguez. Alternativamente, sendo fornecido o parafuso, será determinada a nova posição  $x_2, y_2, z_2$  de um ponto  $x_1, y_1, z_1$  através das transformações lineares já definidas.

DETERMINAÇÃO DO LUGAR GEOMÉTRICO DOS PONTOS QUE EM UM DESLOCAMENTO GERAL DADO POR UM PARAFUSO PERMANECEM A UMA DISTÂNCIA FIXA DE UM PONTO

### Teorema

O lugar geométrico dos pontos citados de  $\Sigma$  que permanecem a distância fixa de um ponto de  $\Sigma'$  é um plano.

Seja  $A$  o ponto de referência (figura 15.1). Denominamos o vetor de  $\vec{r}_j$  para a primeira posição por  $\vec{r}_j - \vec{A}$  e o mesmo vetor na segunda posição por  $\vec{r}_j' - \vec{A}$ .

Podemos escrever a igualdade dos módulos dos vetores

$$|\vec{r}_j - \vec{A}| = |\vec{r}_j' - \vec{A}| \quad (15.1)$$

Sendo o módulo de um vetor igual a raiz quadrada do produto escalar do vetor por ele mesmo, virá

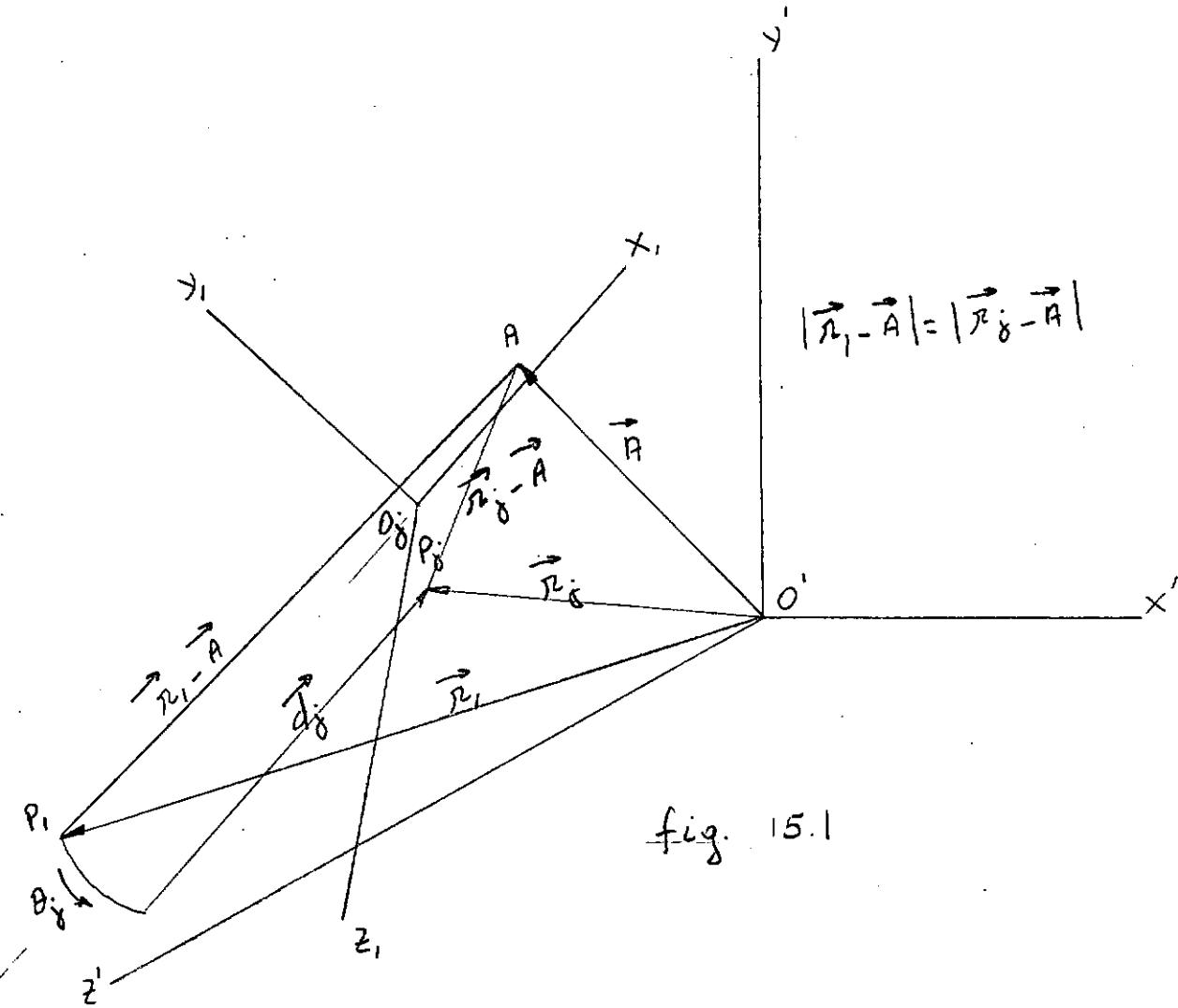
$$\vec{r}_j \cdot \vec{r}_j - 2\vec{A} \cdot \vec{r}_j + \vec{A} \cdot \vec{A} = \vec{r}_j' \cdot \vec{r}_j' - 2\vec{A} \cdot \vec{r}_j' + \vec{A} \cdot \vec{A}$$

$$\frac{\vec{r}_j^2 - \vec{r}_j'^2}{2} + \vec{A} \cdot (\vec{r}_j' - \vec{r}_j) = 0 \quad (15.2)$$

Sendo as componentes de  $\vec{r}_j'$  função linear das componentes de  $\vec{r}_j$ , o próprio  $\vec{r}_j'$  é função linear de  $\vec{r}_j$ ,

$$\vec{r}_j' = x_j \vec{i} + y_j \vec{j} + z_j \vec{k}$$

$$\vec{r}_j = x_i \vec{i} + y_j \vec{j} + z_i \vec{k} \quad (15.3)$$



Precisamos computar  $r_j^2$  para verificar a linearidade e demonstrar o teorema.

Podemos escrever:

$$r_j^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 \quad (15.4)$$

$$\begin{aligned}
 r_j^2 &= [(a_{xj}+1)x_1 + b_{xj}y_1 + c_{xj}z_1 + d_{xj}]^2 + \\
 &\quad [a_{yj}x_1 + (b_{yj}+1)y_1 + c_{yj}z_1 + d_{yj}]^2 + \\
 &\quad [a_{zj}x_1 + b_{zj}y_1 + (c_{zj}+1)z_1 + d_{zj}]^2 \\
 &= [(a_{xj}+1)^2 + a_{yj}^2 + a_{zj}^2]x_1^2 + [b_{xj}^2 + (b_{yj}+1)^2 + b_{zj}^2]y_1^2 \\
 &\quad + [c_{xj}^2 + c_{yj}^2 + (c_{zj}+1)^2]z_1^2 + \\
 &\quad 2[(a_{xj}+1)b_{xj} + a_{yj}(b_{yj}+1) + a_{zj}b_{zj}]x_1y_1 + \\
 &\quad 2[(a_{xj}+1)c_{xj} + a_{yj}c_{yj} + a_{zj}(c_{zj}+1)]x_1z_1 + \\
 &\quad 2[b_{xj}c_{xj} + (b_{yj}+1)c_{yj} + b_{zj}(c_{zj}+1)]y_1z_1 +
 \end{aligned}$$

$$= [(a_{xj} + 1)dx_j + a_{yj}dy_j + a_{zj}dz_j]x_i +$$

$$+ [bx_j dx_j + (by_j + 1)dy_j + bz_j dz_j]y_i +$$

$$+ [cx_j dx_j + cy_j dy_j + (cz_j + 1)dz_j]z_i +$$

$$dx_j^2 + dy_j^2 + dz_j^2$$

## OBSERVAÇÃO

Antecipamos o valor de  $r_j^2 - r_i^2$

$$\begin{aligned} r_j^2 - r_i^2 &= (d_j u_j + a_j a_{xj} + b_j a_{yj} + c_j a_{zj})x_i \\ &+ (d_j u_j + a_j b_{xj} + b_j b_{yj} + c_j b_{zj})y_i \\ &+ (d_j u_j + a_j c_{xj} + b_j c_{yj} + c_j c_{zj})z_i \\ &+ d_j^2 \\ &+ 2(1 - \cos \theta_j) [a_j^2 + b_j^2 + c_j^2 - (a_j u_j + b_j v_j + c_j w_j)^2] \end{aligned}$$

E possível demonstrar que:

- a) Os coeficientes dos termos em  $x_j^2, j_j^2, z_j^2$  se reduzem a unidade
- b) Os coeficientes dos termos cruzados se anulam

Portanto,  $r_j^2 - n_i^2$  não contém termos não lineares em  $x_i, j_i, z_i$ .

Fazendo a diferença  $r_j^2 - n_i^2$ , desaparecem os termos do segundo grau, pois  $n_i^2 = n_i^2 + j_i^2 + z_i^2$

O teorema fica, pois, demonstrado.

Obs. Se o parafuso passa pela origem,

$$q_j = b_j = c_j = 0, \text{ e teremos}$$

$$\frac{r_j^2 - n_i^2}{2} = \frac{d_j^2}{2} + d_j(u_{ij}n_i + u_{j_i}j_i + u_{z_i}z_i)$$

Se ainda não houver translação, virá

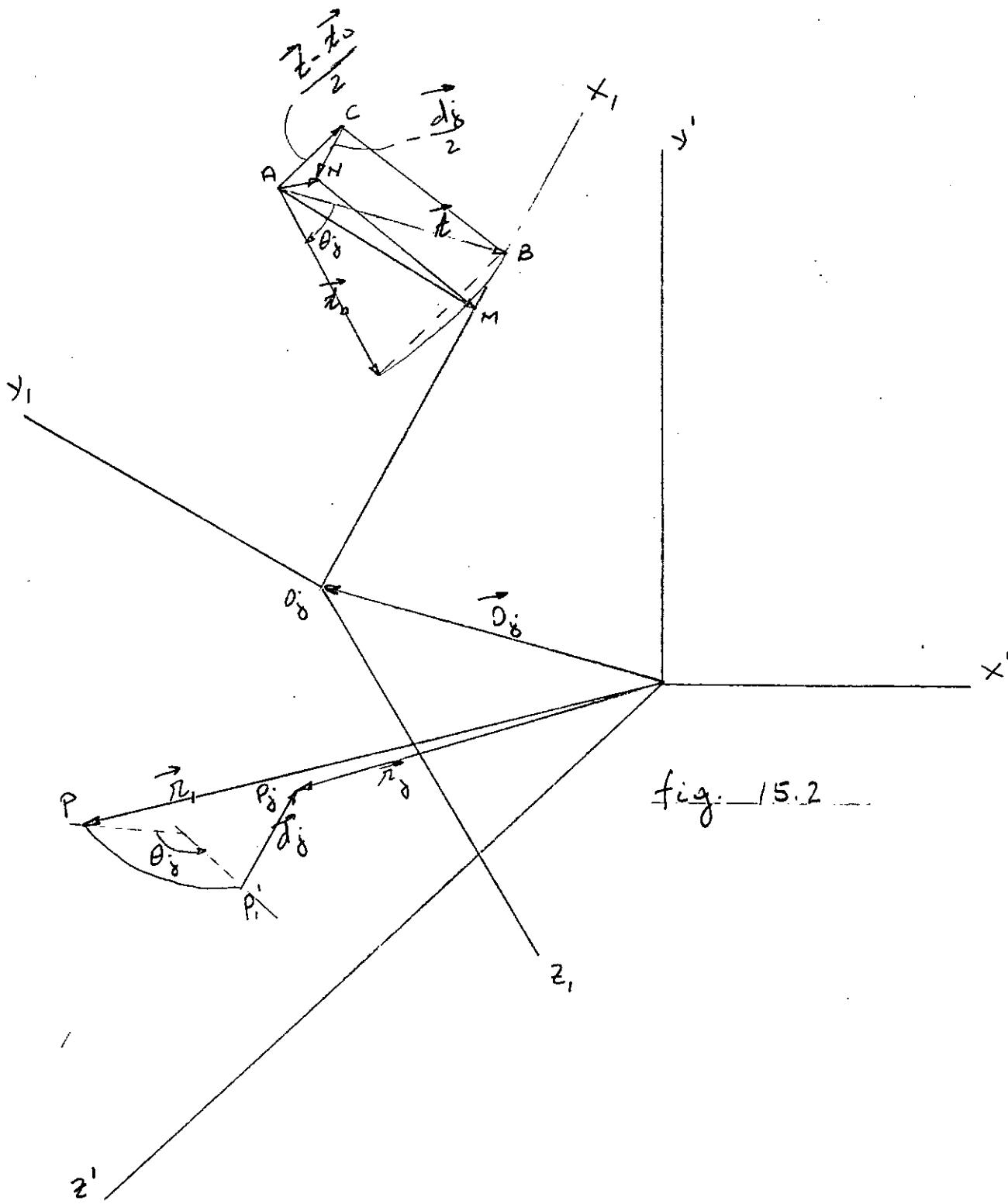
$$r_j^2 - n_i^2 = \rightarrow$$

#### DETERMINAÇÃO DA POSIÇÃO DO PLANO

Poderemos calcular a posição do plano a partir do ponto  $A$  arbitrário. Para isto, vamos determinar alguns pontos que pertencem ao plano citado. (Figura 15.2)

Os pontos  $M$  e  $N$  pertencem ao plano em estudo.

$M$  é marcado no eixo  $X_1$ , a uma distância  $\frac{d_j}{2}$  a partir do pé da perpendicular baixada do ponto  $A$  ao eixo  $X_1$ ,



pois não gira e a distância do ponto A permanece inalterada em módulo após a translação.

N é a extremidade do vetor obtido pela soma de dois vetores

a) o vetor  $\frac{\vec{t} - \vec{t}_0}{2}$  traçado em um plano perpendicular ao eixo de rotação. O vetor  $\frac{\vec{t} - \vec{t}_0}{2}$  é obtido no plano perpendicular ao eixo de rotação, pela diferença dos vetores

$\vec{z}$  - Vetor passando por A e perpendicular ao eixo de rotação.

$\vec{z}_0$  - Vetor obtido girando  $\vec{z}$  do ângulo  $\theta_0$

Assim, o módulo do vetor  $\vec{z} - \vec{t}$  será  $t \sin \frac{\theta_0}{2}$  e o módulo do vetor  $\frac{\vec{t} - \vec{t}_0}{2}$  será  $t \sin \frac{\theta_0}{2}$ .

b) o vetor  $\frac{\vec{t}_0}{2}$  paralelo ao eixo de rotação e portanto perpendicular ao vetor  $\frac{\vec{z} - \vec{t}_0}{2}$

Assim, o módulo do vetor  $\vec{AN}$  vale

$$|\vec{AN}| = \left[ t^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left( \frac{t_0}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Os vetores  $\vec{AN}$ ,  $\vec{MN}$  são perpendiculares pois o quadrilátero  $MNCB$  é um retângulo, já que:

$$\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{z} - \left( \frac{\vec{z} - \vec{t}_0}{2} \right) = \frac{\vec{z} + \vec{t}_0}{2}$$

$$\vec{NM} = \vec{CB} = \frac{\vec{z} + \vec{t}_0}{2}$$

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{z} - \frac{\vec{t}_0}{2}$$

$$\vec{AN} = \vec{AC} + \vec{CN} = \frac{\vec{z} - \vec{t}_0}{2} - \frac{\vec{t}_0}{2}$$

$$\vec{NM} = \vec{AM} - \vec{AN} = \vec{x} - \frac{\vec{d}\vec{\phi}}{2} - \left[ \frac{\vec{x} - \vec{z}_0}{2} - \frac{\vec{d}\vec{\phi}}{2} \right]$$

$$\vec{NM} = \frac{\vec{x} + \vec{z}_0}{2}$$

$$|\vec{AN}|^2 = t^2 \sin^2 \frac{\theta\vec{\phi}}{2} + \left( \frac{d\vec{\phi}}{2} \right)^2$$

$$|\vec{AM}|^2 = t^2 + \left( \frac{d\vec{\phi}}{2} \right)^2$$

$$\left| \frac{\vec{x} + \vec{z}_0}{2} \right| = t \cos \frac{\theta\vec{\phi}}{2}$$

$$|NM|^2 = t^2 \cos^2 \frac{\theta\vec{\phi}}{2}$$

Logo,

$$|\vec{AM}|^2 = |\vec{AN}|^2 + |NM|^2, \sim$$

$$t^2 + \left( \frac{d\vec{\phi}}{2} \right)^2 = t^2 \sin^2 \frac{\theta\vec{\phi}}{2} + \left( \frac{d\vec{\phi}}{2} \right)^2 + t^2 \cos^2 \frac{\theta\vec{\phi}}{2}$$

Logo, o triangulo  $\overline{ANM}$  é retângulo e  $\overline{AN}$  mede a distância do ponto ao plano em estudo.

Se o eixo passa pelo ponto fixo, o parafuso é normal ao plano e a distância do ponto fixo ao plano vale -  $\frac{d_2}{2}$

Podemos determinar o ponto  $A$  se forem definidos os vetores  $\vec{n}_j$  e  $\vec{\pi}_j$  que devem permitir obter a distância desejada. O lugar geométrico esperado será então o plano bissetor perpendicular a corda que une  $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$  e  $(x_j, y_j, z_j)$

O teorema básico, cujo completo desenvolvimento foi por nós realizado, e cujos resultados finais, a menos de pequenas diferenças foram apresentados pr B. Roth<sup>8</sup> é fundamental para o estudo que ora iniciamos.

16.

## TRANSFORMAÇÃO CÚBICA

B. Roth<sup>8</sup> definiu como transformação cúbica, a relação que se obtém quando um ponto de  $\Sigma$  ocupa 4 posições  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , finitamente separadas, de sorte que em cada posição a distância de um ponto central é constante.

Sempre é possível passar uma esfera por 4 posições no espaço, logo as 4 posições definem uma esfera, sendo  $A$  o seu centro.

Analiticamente, temos um sistema de 3 equações correspondente a equação 15.2 escrita 3 vezes.

$$(x_j - x_i) A_x + (y_j - y_i) A_y + (z_j - z_i) A_z + \frac{R_j^2 - R_i^2}{2} = 0$$

$$j = 2, 3, 4 \quad (16.1)$$

O problema poderá ser atacado de dois modos.

Sendo conhecidos um ponto qualquer e 3 parafusos, determinamos  $A (A_x, A_y, A_z)$ .

De modo similar, sendo conhecidos os 3 parafusos e o centro  $A$ , determinaremos um único ponto  $x_j, y_j, z_j$ , de um modo geral.

Em outras palavras, há correspondência bi-unívoca entre os pontos de  $\Sigma$  e de  $\Sigma'$

A análise do sistema de equações pode revelar a existência de singularidades, o que pode ser efetuado com a matriz completa do sistema.

Exemplificando, se a característica da matriz completa for igual a 2, a um ponto de um sistema corresponde uma linha em outro, o que irá definir 4 posições de um ponto pertencentes a uma circunferência (ponto circular e ponto central do mecanismo planar).

#### PONTOS QUE PERTENCEM A UM LUGAR GEOMÉTRICO ESPECIAL

##### PONTOS QUE PERTECEM A UMA ESFERA

Um ponto qualquer tem 4 posições em uma esfera. Em geral, um ponto não tem mais de 4 posições em uma esfera.

Pontos que pertencem a uma esfera em 5 posições distintas, devem satisfazer ao sistema com 4 equações análogas a equação (15.2), ou seja, com  $\gamma = 2, 3, 4, 5$

Uma vez que A tem apenas 3 componentes para que o sistema 16.1 seja compatível nas 5 posições, devemos ter

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & \dot{x}_2 - \dot{x}_1 & r_1^2 - r_2^2 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & \dot{x}_3 - \dot{x}_1 & r_1^2 - r_3^2 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & \dot{x}_4 - \dot{x}_1 & r_1^2 - r_4^2 \\ x_5 - x_1 & y_5 - y_1 & \dot{x}_5 - \dot{x}_1 & r_1^2 - r_5^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (16.2)$$

Substituindo as posições  $\gamma$  em função da posição inicial, obtem-se uma equação linear.

A solução do determinante nulo fornece o lugar geométrico que é uma superfície do 4º grau. É praticamente impossível obter os 35 coeficientes da equação explicitamente, mesmo para uma aplicação numérica, por cálculo manual. Resolvemos o problema, utilizando o computador digital, por meio do programa PPSPE.

De um modo geral, escrevemos a expressão de  $x_8, y_8, z_8$  em função de  $x, y, z$ , obtendo um determinante  $4 \times 4$  com cada coluna formada de termos que possuem um polinômio formado de um número igual de monômios nas incógnitas  $x, y, z$ , separadas, e com seus próprios coeficientes. A expansão é feita pelo programa, desenvolvendo os determinantes pelas propriedades do desdobramento de cada termo e somando os coeficientes dos termos semelhantes.

Para determinar o centro da esfera, uma vez conhecidos os parafusos e o lugar geométrico, escolhemos um ponto que satisfaz a equação e aplicando na transformação cúbica, resolvendo o sistema de 3 posições simultâneas, com equações lineares em  $A_x, A_y, A_z$ .

// JOB T 0OFF 10FF

P 142108

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0OFF	0OFF	0000
0001	10FF	10FF	0002
		2016	0001

V2 M05 ACTUAL 32K CONFIG 32K

JAYME

// FOR

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

```

SUBROUTINE ESFER(L)
REAL L(4,4,5)
DIMENSION XI(4,4),LUZ(4),MAR(4),DX(11),X(4,4)
COMMON DX
DO 10 J=1,4
DO 10 I=1,4
  X(I,J)=L(J,I,I+1)
  XI(I,J)=X(I,J)
10 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(1)=D
CALL RPOE(XI,X,4)
DO 20 K=2,4
DX(K)=0
DO 20 J=1,4
DO 111 I=1,4
  XI(I,J)=L(J,K,I+1)
111 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(K)=DX(K)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
20 CONTINUE
DO 200 K=2,4
DX(K+3)=0
DO 30 J=1,3
DO 121 I=1,4
  XI(I,J)=L(J,K,I+1)
  XI(I,J+1)=L(J+1,K,I+1)
121 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(K+3)=DX(K+3)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
30 CONTINUE
DO 40 J=1,2
DO 131 I=1,4
  XI(I,J)=L(J,K,I+1)
  XI(I,J+2)=L(J+2,K,I+1)
131 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(K+3)=DX(K+3)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
40 CONTINUE
DO 50 I=1,4
  XI(1,I)=L(1,K,I+1)
  XI(1,4)=L(4,K,I+1)
50 CONTINUE

```

```
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(K+3)=DX(K+3)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
200 CONTINUE
DO 400 K=2,3
DX(K+6)=0
DO 230 J=1,3
DO 221 I=1,4
XI(I,J)=L(J,K,I+1)
XI(I,J+1)=L(J+1,K+1,I+1)
221 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(K+6)=DX(K+6)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
230 CONTINUE
DO 240 J=1,2
DO 231 I=1,4
XI(I,J)=L(J,K,I+1)
XI(I,J+2)=L(J+2,K+1,I+1)
231 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(K+6)=DX(K+6)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
240 CONTINUE
DO 250 I=1,4
XI(I,1)=L(1,K,I+1)
XI(I,4)=L(4,K+1,I+1)
250 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(K+6)=DX(K+6)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
DO 330 J=1,3
DO 321 I=1,4
XI(I,J)=L(J,K+1,I+1)
XI(I,J+1)=L(J+1,K,I+1)
321 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(K+6)=DX(K+6)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
330 CONTINUE
DO 340 J=1,2
DO 331 I=1,4
XI(I,J)=L(J,K+1,I+1)
XI(I,J+2)=L(J+2,K,I+1)
331 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(K+6)=DX(K+6)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
340 CONTINUE
DO 350 I=1,4
XI(I,1)=L(1,K+1,I+1)
XI(I,4)=L(4,K,I+1)
350 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(K+6)=DX(K+6)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
400 CONTINUE
DX(10)=0
```

```
DO 530 J=1,3
DO 521 I=1,4
XI(I,J)=L(J,2,I+1)
XI(I,J+1)=L(J+1,4,I+1)
521 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(10)=DX(10)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
530 CONTINUE
DO 540 J=1,2
DO 531 I=1,4
XI(I,J)=L(J,2,I+1)
XI(I,J+2)=L(J+2,4,I+1)
531 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(10)=DX(10)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
540 CONTINUE
DO 550 I=1,4
XI(I,1)=L(1,2,I+1)
XI(I,4)=L(4,4,I+1)
550 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(10)=DX(10)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
DO 630 J=1,3
DO 621 I=1,4
XI(I,J)=L(J,4,I+1)
XI(I,J+1)=L(J+1,2,I+1)
621 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(10)=DX(10)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
630 CONTINUE
DO 640 J=1,2
DO 631 I=1,4
XI(I,J)=L(J,4,I+1)
XI(I,J+2)=L(J+2,2,I+1)
631 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(10)=DX(10)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
640 CONTINUE
DO 650 I=1,4
XI(I,1)=L(1,4,I+1)
XI(I,4)=L(4,2,I+1)
650 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(10)=DX(10)+D
CALL RPOE(XI,X,4)
DO 710 I=1,4
DO 710 K=1,4
XI(I,K)=L(K,K,I+1)
710 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(11)=D
DO 711 I=1,4
DO 711 K=1,2
```

```

XI(I,K)=L(K,K,I+1)
XI(I,3)=L(3,4,I+1)
XI(I,4)=L(4,3,I+1)
711 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(11)=DX(11)+D
DO 712 I=1,4
XI(I,1)=L(1,1,I+1)
XI(I,2)=L(2,3,I+1)
XI(I,3)=L(3,2,I+1)
XI(I,4)=L(4,4,I+1)
712 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(11)=DX(11)+D
DO 713 I=1,4
XI(I,1)=L(1,1,I+1)
XI(I,2)=L(2,3,I+1)
XI(I,3)=L(3,4,I+1)
XI(I,4)=L(4,2,I+1)
713 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(11)=DX(11)+D
DO 714 I=1,4
XI(I,1)=L(1,1,I+1)
XI(I,2)=L(2,4,I+1)
XI(I,3)=L(3,3,I+1)
XI(I,4)=L(4,2,I+1)
714 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(11)=DX(11)+D
DO 715 I=1,4
XI(I,1)=L(1,1,I+1)
XI(I,2)=L(2,4,I+1)
XI(I,3)=L(3,2,I+1)
XI(I,4)=L(4,3,I+1)
715 CONTINUE
CALL MINV(XI,4,D,LUZ,MAR)
DX(11)=DX(11)+D
CALL RPDE(XI,X,4)
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR ESFER

COMMON 22 VARIABLES 86 PROGRAM 2058

END OF COMPILEATION

// DUP

\*STORE WS UA ESFER
CART ID 00FF DB ADDR 2B07 DB CNT 0087

// FOR

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

```

SUBROUTINE TRANS(L,K,M,L1)
REAL L(4,4,5),L1(4,4,5)
DO 10 J=2,5
DO 10 I=1,4
L1(I,K,J)=L(I,M,J)
L1(I,M,J)=L(I,K,J)
10 CONTINUE
DO 20 J=2,5
DO 20 I=1,4
L(I,K,J)=L1(I,K,J)
L(I,M,J)=L1(I,M,J)
20 CONTINUE
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR TRANS  
COMMON 0 VARIABLES

4 PROGRAM 136

END OF COMPIRATION

// DUP

```

*STORE WS UA TRANS
CART ID 0OFF DB ADDR 2B8E DB CNT 000A

```

// FOR

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

```

SUBROUTINE RTRAN(L,K,M,L1)
REAL L(4,4,5),L1(4,4,5)
DO 10 J=2,5
DO 10 I=1,4
L(I,K,J)=L1(I,M,J)
L(I,M,J)=L1(I,K,J)
10 CONTINUE
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR RTRAN  
COMMON 0 VARIABLES

4 PROGRAM 78

END OF COMPIRATION

// DUP

```

*STORE WS UA RTRAN
CART ID 0OFF DB ADDR 2B98 DB CNT 0006

```

// FOR

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

SUBROUTINE RPOE(XX,YY,L)

JAYME MASCHKVICH

```

DIMENSION XX(4,4),YY(4,4)
DO 10 J=1,L
DO 10 I=1,L
XX(I,J)=YY(I,J)
10 CONTINUE
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS

## CORE REQUIREMENTS FOR RPOE

COMMON 0 VARIABLES 4 PROGRAM 50

END OF COMPIALATION

// DUP

```

*STORE WS UA RPOE
CART ID 0OFF DB ADDR 2B9E DB CNT 0004

```

// FOR JAYME MASCHKVICH

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

\*NAME PP567

\*IOCS(2501READER,1403PRINTER)

REAL L(4,4,5),L1(4,4,5)

DIMENSION U(3,5),TERAD(5),A(3,5),D(5),TETA(5),PR(3,3,5)

1,PRT(3,3,5),PRI(3,3),PRIN(3,3,5),DE(3,5),LIZ(3),MIR(3)

2,DET(105),DX(44)

COMMON DX

C PONTOS QUE PERTENCEM A UMA ESFERA DESLOCAMENTO GERAL DE CORPO

C RIGIDO DADO POR QUATRO PARAFUSOS

C ESTE PROGRAMA FORNECE ATÉ AS 3 EQUAÇÕES PARA DETERMINAR O LUGAR

C GEOMÉTRICO DE PONTOS COM ATÉ 6 OU 7 POSIÇÕES EM UMA ESFERA

C PARAMETROS DO PARAFUSO

TAN(W)=SIN(W)/COS(W)

DO 1510 MEZ=1,3

READ(8,1)((U(I,J),I=1,3),J=2,5)

1 FORMAT(3F10.4)

READ(8,101)(TERAD(J),J=2,5)

101 FORMAT(4F10.4)

READ(8,1)((A(I,J),I=1,3),J=2,5)

READ(8,101)(D(J),J=2,5)

WRITE(5,1001)((U(I,J),I=1,3),J=2,5)

1001 FORMAT(' U(I,J)'//,4(1X,3F10.4/))

WRITE(5,1002)((A(I,J),I=1,3),J=2,5)

1002 FORMAT(' A(I,J)'//,4(1X,3F10.4/))

WRITE(5,1003)(TERAD(J),J=2,5)

1003 FORMAT(' TETA(J)'//4F10.4)

WRITE(5,1004)(D(J),J=2,5)

1004 FORMAT(' D(J)'//4F10.4)

DO 110 J=2,5

110 TETA(J)=TERAD(J)/2.

C FORMAÇÃO DAS MATRIZES DOS PARAFUSOS

DO 2 J=2,5

DO 2 I=1,3

DO 2 K= 1,3

```

PR(I,K,J)=0
PR(1,2,J)=U(3,J)
PR(1,3,J)=-U(2,J)
PR(2,1,J)=-U(3,J)
PR(2,3,J)=U(1,J)
PR(3,1,J)=U(2,J)
PR(3,2,J)=-U(1,J)

```

2 CONTINUE

```

DO 21 J=2,5
DO 21 I=1,3
DO 21 K=1,3
PR(I,K,J)=PR(I,K,J)*TAN(TETA(J))
PR(I,I,J)=1.

```

21 CONTINUE

```

WRITE(5,2001)((PR(I,K,J),K=1,3),I=1,3),J=2,5)

```

2001 FORMAT(' MATRIZ DO PARAFUSO PR(I,J)',//,3(1X,3F10.4)//)

C MATRIZES TRANPOSTAS DOS PARAFUSOS

```

DO 3 J=2,5
DO 3 I=1,3
DO 3 K=1,3
PRT(I,K,J)= PR(K,I,J)

```

3 CONTINUE

```

C INVERSÃO DAS MATRIZES DOS PARAFUSOS
DO 41 J=2,5
DO 4 I=1,3
DO 4 K=1,3
PRI(I,K)=PR(I,K,J)

```

4 CONTINUE

```

CALL MINV(PRI,3,D,LIZ,MIR)
DO 41 I=1,3
DO 41 K=1,3
PRIN(I,K,J)=PRI(I,K)

```

41 CONTINUE

```

WRITE(5,4001)((PRIN(I,K,J),K=1,3),I=1,3),J=2,5)

```

4001 FORMAT(' MATRIZ INVERSA PRIN(I,K,J)',//,3(1X,3F10.4)//)

C MATRIZ DE ROTACAO DOS PARAFUSOS

```

DO 5 J=2,5
DO 5 I=1,3
DO 5 K= 1,3
L(I,K,J)=0
DO 5 N=1,3
L(I,K,J)=PRIN(I,N,J)*PRT(N,K,J)+L(I,K,J)

```

5 CONTINUE

```

C VETOR DESLOCAMENTO DOS PARAFUSOS

```

```

C MATRIZ DEPURADA DAS ROTACOES

```

```

DO 6 J=2,5

```

```

DO 6 I=1,3

```

```

L(I,I,J)=L(I,I,J)-1.

```

6 CONTINUE

```

C CALCULO DO VETOR DESLOCAMENTO

```

```

DO 7 J=2,5

```

```

DO 7 I=1,3

```

```

DE(I,J)=0

```

```

DO 7 N=1,3

```

```

DE(I,J)=L(I,N,J)*A(N,J)+DE(I,J)

```

7 CONTINUE

```

DO 8 J=2,5

```

```

DO 8 I=1,3

```

```

L(I,4,J)=D(J)*U(I,J)-DE(I,J)
8 CONTINUE
C FORMACAO DOS TERMOS(4,K,J)
DO 9 J=2,5
DO 9 K=1,3
L(4,K,J)=0
DO 9 I=1,3
L(4,K,J)=A(I,J)*L(I,K,J)+L(4,K,J)
9 CONTINUE
DO 10 J=2,5
DO 10 K=1,3
L(4,K,J)=L(4,K,J)+D(J)*U(K,J)
10 CONTINUE
DO 11 J=2,5
L(4,4,J)=(D(J)**2)/2+((A(1,J)**2+A(2,J)**2+A(3,J)**2)-(A(1,J)*U(1
1,J)+A(2,J)*U(2,J)+A(3,J)*U(3,J))**2)*(1-COS(TERAD(J)))
11 CONTINUE
WRITE(5,1101) (((L(I,K,J),K=1,4),I=1,4),J=2,5)
1101 FORMAT('1',' L(I,K,J)'//,4(1X,4F10.4)//)
C CALCULO DOS COEFICIENTES DA EQUACAO
CALL ESFER(L)
WRITE(5,1201)(DX(K),K=1,11)
1201 FORMAT(5F20.4)
IF(MEZ-1)1202,1202,1203
1202 DET(1)=DX(1)
DET(2)=DX(2)
DET(3)=DX(3)
DET(4)=DX(4)
DET(13)=DX(5)
DET(14)=DX(6)
DET(26)=DX(7)
DET(16)=DX(8)
DET(19)=DX(9)
DET(22)=DX(10)
DET(25)=DX(11)
GO TO 1280
1203 IF(MEZ-2)1204,1204,1205
1204 DET(36)=DX(1)
DET(37)=DX(2)
DET(38)=DX(3)
DET(39)=DX(4)
DET(48)=DX(5)
DET(49)=DX(6)
DET(61)=DX(7)
DET(51)=DX(8)
DET(54)=DX(9)
DET(57)=DX(10)
DET(60)=DX(11)
GO TO 1280
1205 DET(71)=DX(1)
DET(72)=DX(2)
DET(73)=DX(3)
DET(74)=DX(4)
DET(83)=DX(5)
DET(84)=DX(6)
DET(96)=DX(7)
DET(86)=DX(8)
DET(89)=DX(9)

```

```
DET(92)=DX(10)
DET(95)=DX(11)
1280 DO 1500 NAO=2,4
      CALL TRANS(L,1,NAO,L1)
      CALL ESFER(L)
      DO 1290 K=1,11
      NIL=(NAO-1)*11+K
      DX(NIL)=DX(K)
1290 CONTINUE
      NIL=(NAO-1)*11+1
      MIL=NIL+10
      WRITE(5,1301)(DX(K),K=NIL,MIL)
1301 FORMAT(5F20.4)
      CALL RTRAN(L,1,NAO,L1)
1500 CONTINUE
      IF(MEZ-1)1501,1501,1502
1501 DET(5)=DX(12)
      DET(6)=DX(13)
      DET(7)=DX(14)
      DET(8)=DX(15)
      DET(9)=DX(23)
      DET(10)=DX(24)
      DET(11)=DX(25)
      DET(12)=DX(26)
      DET(15)=DX(17)
      DET(17)=DX(19)
      DET(18)=DX(30)
      DET(20)=DX(20)
      DET(21)=DX(31)
      DET(23)=DX(21)
      DET(24)=DX(32)
      DET(25)=DET(25)+DX(22)+DX(33)+DX(44)
      DET(27)=DX(18)
      DET(28)=DX(29)
      DET(29)=DX(41)
      DET(30)=DX(42)
      DET(31)=DX(43)
      DET(32)=DX(37)
      DET(33)=DX(35)
      DET(34)=DX(36)
      DET(35)=DX(34)
      GO TO 1510
1502 IF(MEZ-2)1503,1503,1504
1503 DET(40)=DX(12)
      DET(41)=DX(13)
      DET(42)=DX(14)
      DET(43)=DX(15)
      DET(44)=DX(23)
      DET(45)=DX(24)
      DET(46)=DX(25)
      DET(47)=DX(26)
      DET(50)=DX(17)
      DET(52)=DX(19)
      DET(53)=DX(30)
      DET(55)=DX(20)
      DET(56)=DX(31)
      DET(58)=DX(21)
      DET(59)=DX(32)
```

```

DET(60)=DET(60)+DX(22)+DX(33)+DX(44)
DET(62)=DX(18)
DET(63)=DX(29)
DET(64)=DX(41)
DET(65)=DX(42)
DET(66)=DX(43)
DET(67)=DX(37)
DET(68)=DX(35)
DET(69)=DX(36)
DET(70)=DX(34)
GO TO 1510
1504 DET(75)=DX(12)
DET(76)=DX(13)
DET(77)=DX(14)
DET(78)=DX(15)
DET(79)=DX(23)
DET(80)=DX(24)
DET(81)=DX(25)
DET(82)=DX(26)
DET(85)=DX(17)
DET(87)=DX(19)
DET(88)=DX(30)
DET(90)=DX(20)
DET(91)=DX(31)
DET(93)=DX(21)
DET(94)=DX(32)
DET(95)=DET(95)+DX(22)+DX(33)+DX(44)
DET(97)=DX(18)
DET(98)=DX(29)
DET(99)=DX(41)
DET(100)=DX(42)
DET(101)=DX(43)
DET(102)=DX(37)
DET(103)=DX(35)
DET(104)=DX(36)
DET(105)=DX(34)
1510 CONTINUE
WRITE(5,1511)(DET(K),K=1,25)
1511 FORMAT('1',' PONTOS QUE PERTENCEM A UMA ESFERA',//,F12.5,' X4',
1F12.5,' X3Y',F12.5,' X3Z',F12.5,' X3',F12.5,' Y4', F12.5,' Y3X',
2F12.5,' Y3Z',//,F12.5,' Y3',F12.5,' Z4',F12.5,' Z3Y',F12.5,' Z3X',
3F12.5,' Z3',F12.5,' X2Y2',F12.5,' X2Z2',//,F12.5,' Y2Z2',F12.5,
4 X2YZ',F12.5,' Y2XZ',F12.5,' Z2YX',F12.5,' X2Z',F12.5,' Y2Z',
5F12.5,' Z2X',//,F12.5,' X2Y',F12.5,' Y2X',F12.5,' Z2Y',F12.5,' XYZ')
WRITE(5,1512)(DET(K),K=26,35)
1512 FORMAT(F12.5,' X2',F12.5,' Y2',F12.5,' Z2',//,F12.5,' YZ',F12.5,
1' XZ',F12.5,' XY',F12.5,' X',F12.5,' Y',F12.5,' Z',F12.5)
WRITE(5,1511)(DET(K),K=36,60)
WRITE(5,1512)(DET(K),K=61,70)
WRITE(5,1511)(DET(K),K=71,95)
WRITE(5,1512)(DET(K),K=96,105)
CALL EXIT
END

```

## APLICAÇÃO

Com o emprêgo do programa PP5PE, definimos 4 parafusos e obtevemos a equação que vai indicada. Escolhendo um ponto que satisfaz ao lugar geométrico, determinamos para o mesmo o centro e o raio da esfera correspondente ao movimento.

Cosenos diretores dos parafusos  $U(I,J)$

1)	0,2943	-0,0077	0,9557
2)	0,3791	-0,0499	0,9240
3)	0,6624	0,0521	0,7474
4)	0,1799	0,0000	0,9837

Ponto por onde passa o parafuso  $A(I,J)$

1)	0,1429	0,6971	0,0000
2)	3,3829	0,0000	7,3285
3)	0,0000	1,0494	-0,6080
4)	0,3190	0,8535	-0,0585

Ângulo de giro do parafuso  $\theta(J)$  rad.

1)	0,6011	2)	0,8429	3)	1,7039	4)	2,1086
----	--------	----	--------	----	--------	----	--------

Deslocamento do parafuso  $D(j)$

1)	0,4789	2)	0,8252	3)	0,4531	4)	0,7855
----	--------	----	--------	----	--------	----	--------

PONTOS QUE PERTENCEM A UMA ESFERA EM 5 POSIÇÕES

$$\begin{aligned}
 & 0.04080 x^4 + 0.04562 x^3 y - 0.14486 x^3 z - 0.16957 x^3 + \\
 & + 0.00648 y^4 + 0.05626 y^4 x - 0.12803 y^3 z - 0.23136 y^3 + \\
 & + 0.00253 z^4 - 0.01707 z^3 y - 0.03331 z^3 x + 0.22202 z^3 + \\
 & + 0.05517 x^2 y^2 + 0.14334 x^2 z^2 + 0.09112 y^2 z^2 - 0.13584 x^2 y z - \\
 & - 0.12690 y^2 x z + 0.07173 z^2 y x + 0.39993 x^2 z + 0.56199 y^2 z - \\
 & - 0.14661 z^2 x - 0.30785 x^2 y - 0.25965 y^2 x - 0.21427 z^2 y + \\
 & + 0.37545 x y z + 0.44962 x^2 + 0.72695 y^2 + 0.13202 z^2 - \\
 & - 0.79455 y z - 0.39153 x z + 0.34249 x y - 0.20973 x - \\
 & - 0.79780 y + 0.38052 z + 0.29572 = 0
 \end{aligned}$$

## PONTOS COM MAIS POSIÇÕES EM UMA ESFERA

Pontos que tenham 6 posições em uma esfera, poderão ser obtidos pela interseção de duas superfícies do 4º grau. São as superfícies que correspondem a 2 grupos de pontos com 5 posições em uma esfera, sendo as 4 primeiras posições comuns aos dois grupos, ou seja, por exemplo:

$$\gamma = 2, 3, 4, 5$$

$$\gamma = 2, 3, 4, 6$$

Esta interseção conterá, além dos pontos que satisfazem as 6 posições, ainda soluções estranhas correspondentes aos pontos com 4 posições em uma circunferência.

Fisicamente, os dois conjuntos de pontos não definem a mesma e única esfera, e as duas esferas tem em comum uma circunferência.

Para 7 posições em uma esfera, vamos obter a interseção de 3 superfícies do 4º grau, que contém no máximo 20 pontos comuns (B.Roth<sup>8</sup>)

Também aqui, aparecerão soluções estranhas, como já indicado.

Para 8 posições em uma esfera, em geral não será possível obter a interseção de 4 superfícies.

As interseções foram obtidas com o uso dos programas PPF6P6 e PPF7P6 no computador digital, utilizando o método iterativo de Newton Rapson com as fórmulas por nós generalizadas para o espaço de 3 dimensões. Não houve preocu-

pação de verificar a priori a possibilidade de convergência. Seria talvez preferível obter uma ideia das interseções por meio de curvas de nível.

### PONTOS QUE PERTENCEM A UMA CIRCUNFERÊNCIA

Uma circunferência, no espaço, pode ser especificada por meio dos cosenos diretores do seu plano e pelas coordenadas de um de seus pontos, além das coordenadas do seu centro, ou dos cosenos diretores do eixo perpendicular ao seu plano, e um ponto por onde este passa. Os pontos que pertencem a circunferência, distam igualmente de qualquer ponto de seu eixo, em particular do seu centro situado no seu plano, além disto, pertencem a um plano perpendicular ao seu eixo.

Forma-se então o seguinte sistema de equações

$$(x_j - x_i) A_x + (y_j - y_i) A_y + (z_j - z_i) A_z + \frac{r_i^2 - r_j^2}{2} = 0$$

$$(x_j - x_i) l + (y_j - y_i) m + (z_j - z_i) n = 0 \quad (16.3)$$

A análise da 2ª equação (16.3) permite afirmar que o lugar geométrico dos pontos que têm duas posições em linha reta (ou em um plano) para um deslocamento finito dado por um parafuso, é um plano. O plano pode ser obtido expandindo a 2ª equação (16.3) em função das fórmulas já determinadas. Algumas conclusões são:

1) Distância do plano obtido ao eixo do parafuso:  $\frac{d_j}{2} \cot(\alpha_j) \cos \epsilon \left( \frac{\theta_j}{2} \right)$

$\alpha_j$  = ângulo entre os eixos

2) ângulo diedro entre o plano e um plano paralelo ao eixo do parafuso e ao eixo da circunferência  $\frac{\theta_5}{z}$

3) ângulo entre a normal comum aos dois eixos e a normal ao plano  $\frac{\theta_6}{z}$

OBS. A inclinação do plano só depende da direção e da magnitude da rotação. Não depende da translação.

Resolvendo o sistema simultâneo de equações (16.3) podemos especificar o eixo da circunferência e obter para o lugar geométrico a interseção de 2 planos, ou seja, uma linha reta.

Também podemos especificar apenas o ponto por onde passa o eixo da circunferência, sem especificar sua direção e resolver duas equações simultâneas similares a 1ª equação 16.3 com  $\beta = 2,3$ . O lugar geométrico obtido é uma linha reta.

Para 4 posições, o sistema da 1ª equação (16.3) determina um único ponto. Já o sistema da 2ª equação fornece uma condição já indicada como singularidade no estudo dos pontos em uma esfera, anulando o determinante de 3a. ordem. Em consequência, não é possível especificar o eixo, nem o centro da circunferência. O lugar geométrico obtido na solução da singularidade é uma curva espacial de ordem 6.

#### PONTOS EM LINHA RETA

Pontos com 3 posições em linha reta, re-

querem que os planos bisetores perpendiculares as suas cordas sejam paralelos, ou analiticamente, que pertençam ao caso de 3 posições em uma circunferência, com raio infinito. Isto conduz ao sistema

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

### PONTOS EM UM PLANO

Escrevemos apenas as conclusões

Para 3 posições, os pontos sempre pertencem a um plano

Para 4 posições, resolvemos para 4 posições em uma esfera, com raio infinito. O lugar geometrico é uma superfície de 3a. ordem

Para 5 posições, resolvemos pela interseção de 4 posições, duas vezes.

Para 6 posições, por caminho análogo, vamos obter no máximo 10 pontos.

Para 7 posições, em geral não há solução

### PONTOS QUE PERTENCEM A UM CILINDRO

Especificando o eixo do cilindro e um de seus pontos, procedemos inicialmente procurando uma equação ove

torial reunindo os elementos conhecidos e os desejados, e obtendo como conclusões:

- 1) para 3 posições, o lugar geométrico é uma curva espacial de 4a. ordem.
- 2) Para 4 posições há no máximo 8 pontos
- 3) Para 5 posições podemos apenas especificar a direção do eixo do cilindro. A solução é uma superfície de quarta ordem, quando apenas especificamos a direção do eixo e aplicamos para 4 pontos.
- 4) Para 5 posições a solução é uma curva espacial de 13a. ordem.
- 5) Para 6 posições, obtemos 31 pontos.

O problema pode ser resolvido quando não especificamos simultaneamente a inclinação do eixo e nem uma direção perpendicular ao mesmo. Também quando apenas não especificamos a inclinação do eixo. Nesses casos, o sistema deixa de ser linear.

// JOB T 00FF 10FF

P 142108

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	00FF	00FF	0000
0001	10FF	10FF	0002
		2016	0001

V2 M05 ACTUAL 32K CONFIG 32K

```

// FOR JAYME MASCHKVICH
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*I0CS(2501READER,1403PRINTER)
*NAME PP7PE
C   ESTE PROGRAMA RESOLVE PELO PROCESSO ITERATIVO DE NEWTON A INTER
C   SECAO DE TRES EUPERFICIES DO QUARTO GRAU CORRESPONDENTES A PRO
C   BLEMA DE PONTOS COM 7 POSICOES EM UMA ESFERA
C   OS VALORES DOS COEFICIENTES DAS EQUACOES FORAM OBTIDOS NO
C   PROGRAMA PP567
C   OS VALORES INICIAIS DE X, Y, Z, DEVEM SER ARBITRADOS
  DIMENSION XC01(5),XC02(5),XC03(5),YC01(5),YC02(5),YC03(5),
  1FD1X(4),FD2X(4),FD3X(4),FD1Y(4),FD2Y(4),FD3Y(4),FD1Z(4),FD2Z(4),
  2FD3Z(4),DFX(3,3),DFY(3,3),DFZ(3,3),DJAC(3,3),LIZ(3),MIR(3)
  3,ZC01(5),ZC02(5),ZC03(5),DET(105)
  READ(8,10)(DET(K),K=1,105)
10 FORMAT(7F10.4)
  WRITE(5,10)(DET(K),K=1,105)
  DO 2000 JUY=1,5
  IOR=0
  READ(8,1951)X,Y,Z,TOL
1951 FORMAT(4F10.4)
  DO 1908 JOY=1,100
  XC01(1)=DET(5)*(Y**4)+DET(7)*(Y**3)*Z+DET(8)*(Y**3)+DET(9)*(Z**4)
  1+DET(10)*(Z**3)*Y+DET(12)*(Z**3)+DET(15)*(Y**2)*(Z**2)+DET(20)*
  2(Y**2)*Z+DET(24)*(Z**2)*Y+DET(27)*(Y**2)+DET(28)*(Z**2)
  XC01(1)=XC01(1)+DET(29)*Y*Z+DET(33)*Y+DET(34)*Z+DET(35)
  XC01(2)=DET(6)*(Y**3)+DET(11)*(Z**3)+DET(17)*(Y**2)*Z+DET(18)*(Z
  2**2)*Y+DET(21)*(Z**2)+DET(23)*(Y**2)+DET(25)*Y*Z+DET(30)*Z+DET(31)
  3*Y+DET(32)
  XC01(3)=DET(13)*(Y**2)+DET(14)*(Z**2)+DET(16)*Y*Z+DET(19)*Z+DET(
  122)*Y+DET(26)
  XC01(4)=DET(2)*Y+DET(3)*Z+DET(4)
  XC01(5)=DET(1)
  YC01(1)=DET(1)*(X**4)+DET(3)*(X**3)*Z+DET(4)*(X**3)+DET(9)*(Z**4)
  1+DET(11)*(Z**3)*X+DET(12)*(Z**3)+DET(14)*(X**2)*(Z**2)+DET(19)*(
  2X**2)*Z+DET(21)*(Z**2)*X+DET(26)*(X**2)+DET(28)*(Z**2)
  YC01(1)=YC01(1)+DET(30)*X*Z+DET(32)*X+DET(34)*Z+DET(35)
  YC01(2)=DET(2)*(X**3)+DET(10)*(Z**3)+DET(16)*(X**2)*Z+DET(18)*(Z
  1**2)*X+DET(22)*(X**2)+DET(24)*(Z**2)+DET(25)*X*Z+DET(29)*Z+DET(31)
  2*X
  YC01(3)=DET(13)*(X**2)+DET(15)*(Z**2)+DET(17)*X*Z+DET(20)*Z+DET(
  123)*X+DET(27)
  YC01(4)=DET(6)*X+DET(7)*Z+DET(8)
  YC01(5)=DET(5)
  ZC01(1)=DET(1)*(X**4)+DET(2)*(X**3)*Y+DET(4)*(X**3)+DET(5)*(Y**4)+
  1DET(6)*(Y**3)*X+DET(8)*(Y**3)+DET(13)*(X**2)*(Y**2)+DET(22)*(X**2)
  2*Y+DET(23)*(Y**2)*X+DET(26)*(X**2)+DET(27)*(Y**2)
  ZC01(1)=ZC01(1)+DET(31)*X*Y+DET(32)*X+DET(33)*Y+DET(35)

```

$ZC01(2) = \text{DET}(3)*(X^{**3}) + \text{DET}(7)*(Y^{**3}) + \text{DET}(16)*(X^{**2})*Y + \text{DET}(17)*(Y^{**2})*X + \text{DET}(19)*(X^{**2}) + \text{DET}(20)*(Y^{**2}) + \text{DET}(25)*X*Y + \text{DET}(29)*Y + \text{DET}(30)*X + \text{DET}(34)$   
 $ZC01(3) = \text{DET}(14)*(X^{**2}) + \text{DET}(15)*(Y^{**2}) + \text{DET}(18)*Y*X + \text{DET}(21)*X + \text{DET}(124)*Y + \text{DET}(28)$   
 $ZC01(4) = \text{DET}(10)*Y + \text{DET}(11)*X + \text{DET}(12)$   
 $ZC01(5) = \text{DET}(9)$   
 $XCO2(1) = \text{DET}(40)*(Y^{**4}) + \text{DET}(42)*(Y^{**3})*Z + \text{DET}(43)*(Y^{**3}) + \text{DET}(44)*(Z^{**4}) + \text{DET}(45)*(Z^{**3})*Y + \text{DET}(47)*(Z^{**3}) + \text{DET}(50)*(Y^{**2})*Z + \text{DET}(55)*Z*(Y^{**2})*Z + \text{DET}(59)*(Z^{**2})*Y + \text{DET}(62)*(Y^{**2}) + \text{DET}(63)*(Z^{**2})$   
 $XCO2(1) = XCO2(1) + \text{DET}(64)*Y*Z + \text{DET}(68)*Y + \text{DET}(69)*Z + \text{DET}(70)$   
 $XCO2(2) = \text{DET}(41)*(Y^{**3}) + \text{DET}(46)*(Z^{**3}) + \text{DET}(52)*(Y^{**2})*Z + \text{DET}(53)*(Z^{**2})*Y + \text{DET}(56)*(Z^{**2}) + \text{DET}(58)*(Y^{**2}) + \text{DET}(60)*Y*Z + \text{DET}(65)*Z + \text{DET}(66)*Z + \text{DET}(67)$   
 $XCO2(3) = \text{DET}(48)*(Y^{**2}) + \text{DET}(49)*(Z^{**2}) + \text{DET}(51)*Y*Z + \text{DET}(54)*Z + \text{DET}(157)*Y + \text{DET}(61)$   
 $XCO2(4) = \text{DET}(37)*Y + \text{DET}(38)*Z + \text{DET}(39)$   
 $XCO2(5) = \text{DET}(36)$   
 $YCO2(1) = \text{DET}(36)*(X^{**4}) + \text{DET}(38)*(X^{**3})*Z + \text{DET}(39)*(X^{**3}) + \text{DET}(44)*(Z^{**4}) + \text{DET}(46)*(Z^{**3})*X + \text{DET}(47)*(Z^{**3}) + \text{DET}(49)*(X^{**2})*Z + \text{DET}(54)*Z*(X^{**2})*Z + \text{DET}(56)*(Z^{**2})*X + \text{DET}(61)*(X^{**2}) + \text{DET}(63)*(Z^{**2})$   
 $YCO2(1) = YCO2(1) + \text{DET}(65)*X*Z + \text{DET}(67)*X + \text{DET}(69)*Z + \text{DET}(70)$   
 $YCO2(2) = \text{DET}(37)*(X^{**3}) + \text{DET}(45)*(Z^{**3}) + \text{DET}(51)*(X^{**2})*Z + \text{DET}(53)*(Z^{**2})*X + \text{DET}(57)*(X^{**2}) + \text{DET}(59)*(Z^{**2}) + \text{DET}(60)*X*Z + \text{DET}(64)*Z + \text{DET}(66)*Z$   
 $YCO2(3) = \text{DET}(48)*(X^{**2}) + \text{DET}(50)*(Z^{**2}) + \text{DET}(52)*X*Z + \text{DET}(61)*Z + \text{DET}(158)*X + \text{DET}(62)$   
 $YCO2(4) = \text{DET}(41)*X + \text{DET}(42)*Z + \text{DET}(43)$   
 $YCO2(5) = \text{DET}(40)$   
 $ZCO2(1) = \text{DET}(36)*(X^{**4}) + \text{DET}(37)*(X^{**3})*Y + \text{DET}(39)*(X^{**3}) + \text{DET}(40)*(Y^{**4}) + \text{DET}(41)*(Y^{**3})*X + \text{DET}(43)*(Y^{**3}) + \text{DET}(48)*(X^{**2})*Y + \text{DET}(52)*(X^{**2})*Y + \text{DET}(57)*(X^{**2})*Y + \text{DET}(58)*(Y^{**2})*X + \text{DET}(61)*(X^{**2}) + \text{DET}(62)*(Y^{**2})$   
 $ZCO2(1) = ZCO2(1) + \text{DET}(66)*X*Y + \text{DET}(67)*X + \text{DET}(68)*Y + \text{DET}(70)$   
 $ZCO2(2) = \text{DET}(38)*(X^{**3}) + \text{DET}(42)*(Y^{**3}) + \text{DET}(51)*(X^{**2})*Y + \text{DET}(52)*(Y^{**2})*X + \text{DET}(54)*(X^{**2}) + \text{DET}(55)*(Y^{**2}) + \text{DET}(60)*X*Y + \text{DET}(64)*Y + \text{DET}(65)*Z + \text{DET}(69)$   
 $ZCO2(3) = \text{DET}(49)*(X^{**2}) + \text{DET}(50)*(Y^{**2}) + \text{DET}(53)*Y*X + \text{DET}(56)*X + \text{DET}(159)*Y + \text{DET}(63)$   
 $ZCO2(4) = \text{DET}(45)*Y + \text{DET}(46)*X + \text{DET}(47)$   
 $ZCO2(5) = \text{DET}(44)$   
 $XCO3(1) = \text{DET}(75)*(Y^{**4}) + \text{DET}(77)*(Y^{**3})*Z + \text{DET}(78)*(Y^{**3}) + \text{DET}(79)*(Z^{**4}) + \text{DET}(80)*(Z^{**3})*Y + \text{DET}(82)*(Z^{**3}) + \text{DET}(85)*(Y^{**2})*Z + \text{DET}(90)*Z*(Y^{**2})*Z + \text{DET}(94)*(Z^{**2})*Y + \text{DET}(97)*(Y^{**2}) + \text{DET}(98)*(Z^{**2})$   
 $XCO3(1) = XCO3(1) + \text{DET}(99)*Y*Z + \text{DET}(103)*Y + \text{DET}(104)*Z + \text{DET}(105)$   
 $XCO3(2) = \text{DET}(76)*(Y^{**3}) + \text{DET}(81)*(Z^{**3}) + \text{DET}(87)*(Y^{**2})*Z + \text{DET}(88)*(Z^{**2})*Y + \text{DET}(91)*(Z^{**2}) + \text{DET}(93)*(Y^{**2}) + \text{DET}(95)*Y*Z + \text{DET}(100)*Z + \text{DET}(2101)*Y + \text{DET}(102)$   
 $XCO3(3) = \text{DET}(83)*(Y^{**2}) + \text{DET}(84)*(Z^{**2}) + \text{DET}(86)*Y*Z + \text{DET}(89)*Z + \text{DET}(192)*Y + \text{DET}(96)$   
 $XCO3(4) = \text{DET}(72)*Y + \text{DET}(73)*Z + \text{DET}(74)$   
 $XCO3(5) = \text{DET}(71)$   
 $YCO3(1) = \text{DET}(71)*(X^{**4}) + \text{DET}(73)*(X^{**3})*Z + \text{DET}(74)*(X^{**3}) + \text{DET}(79)*(Z^{**4}) + \text{DET}(81)*(Z^{**3})*X + \text{DET}(82)*(Z^{**3}) + \text{DET}(84)*(X^{**2})*Z + \text{DET}(88)*(X^{**2})*Z + \text{DET}(91)*(Z^{**2})*X + \text{DET}(96)*(X^{**2}) + \text{DET}(98)*(Z^{**2})$   
 $YCO3(1) = YCO3(1) + \text{DET}(100)*X*Z + \text{DET}(102)*X + \text{DET}(104)*Z + \text{DET}(105)$   
 $YCO3(2) = \text{DET}(72)*(X^{**3}) + \text{DET}(80)*(Z^{**3}) + \text{DET}(86)*(X^{**2})*Z + \text{DET}(88)*(Z^{**2})*X + \text{DET}(92)*(X^{**2}) + \text{DET}(94)*(Z^{**2}) + \text{DET}(95)*X*Z + \text{DET}(99)*Z + \text{DET}(2101)*X$

```

YC03(3)=DET(83)*(X**2)+DET(85)*(Z**2)+DET(87)*X*Z+DET(90)*Z+DET
1(93)*X+DET(97)
YC03(4)=DET(76)*X+DET(77)*Z+DET(78)
YC03(5)=DET(75)
ZC03(1)=DET(71)*(X**4)+DET(72)*(X**3)*Y+DET(74)*(X**3)+DET(75)*(Y**4)+DET(76)*(Y**3)*X+DET(78)*(Y**3)+DET(83)*(X**2)*(Y**2)+DET(92
2)*(X**2)*Y+DET(93)*(Y**2)*X+DET(96)*(X**2)+DET(97)*(Y**2)
ZC03(1)=ZC03(1)+DET(101)*X*Y+DET(102)*X+DET(103)*Y+DET(105)
ZC03(2)=DET(73)*(X**3)+DET(77)*(Y**3)+DET(86)*(X**2)*Y+DET(87)*
1(Y**2)*X+DET(89)*(X**2)+DET(90)*(Y**2)+DET(95)*X*Y+DET(99)*Y+DET
2(100)*X+DET(104)
ZC03(3)=DET(84)*(X**2)+DET(85)*(Y**2)+DET(88)*Y*X+DET(91)*X+DET(
194)*Y+DET(98)
ZC03(4)=DET(80)*Y+DET(81)*X+DET(82)
ZC03(5)=DET(79)
CALL PDER(FD1X,4,XC01,5)
CALL PDER(FD2X,4,XC02,5)
CALL PDER(FD3X,4,XC03,5)
CALL PDER(FD1Y,4,YC01,5)
CALL PDER(FD2Y,4,YC02,5)
CALL PDER(FD3Y,4,YC03,5)
CALL PDER(FD1Z,4,ZC01,5)
CALL PDER(FD2Z,4,ZC02,5)
CALL PDER(FD3Z,4,ZC03,5)
CALL PVAL(VFD1X,X,FD1X,4)
CALL PVAL(VFD2X,X,FD2X,4)
CALL PVAL(VFD3X,X,FD3X,4)
CALL PVAL(VFD1Y,Y,FD1Y,4)
CALL PVAL(VFD2Y,Y,FD2Y,4)
CALL PVAL(VFD3Y,Y,FD3Y,4)
CALL PVAL(VFD1Z,Z,FD1Z,4)
CALL PVAL(VFD2Z,Z,FD2Z,4)
CALL PVAL(VFD3Z,Z,FD3Z,4)
CALL PVAL(VXC01,X,XC01,5)
CALL PVAL(VXC02,X,XC02,5)
CALL PVAL(VXC03,X,XC03,5)
DFX(1,1)=VXC01
DFX(1,2)=VFD1Y
DFX(1,3)=VFD1Z
DFX(2,1)=VXC02
DFX(2,2)=VFD2Y
DFX(2,3)=VFD2Z
DFX(3,1)=VXC03
DFX(3,2)=VFD3Y
DFX(3,3)=VFD3Z
DO 1901 JIY=1,3
DFY(JIY,3)=DFX(JIY,3)
DFY(JIY,2)=DFX(JIY,1)
1901 CONTINUE
DFY(1,1)=VFD1X
DFY(2,1)=VFD2X
DFY(3,1)=VFD3X
DO 1902 JIY=1,3
DFZ(JIY,1)=DFY(JIY,1)
DFZ(JIY,2)=DFX(JIY,2)
DFZ(JIY,3)=DFX(JIY,1)
1902 CONTINUE
DO 1903 JIY=1,3

```

```

DJAC(JIY,1)=DFY(JIY,1)
DJAC(JIY,2)=DFX(JIY,2)
DJAC(JIY,3)=DFX(JIY,3)
1903 CONTINUE
  CALL MINV(DFX,3,DEX,LIZ,MIR)
  CALL MINV(DFY,3,DEY,LIZ,MIR)
  CALL MINV(DFZ,3,DEZ,LIZ,MIR)
  CALL MINV(DJAC,3,DEJC,LIZ,MIR)
  XA=X-DEX/DEJC
  YA=Y-DEY/DEJC
  ZA=Z-DEZ/DEJC
  VAR=XA-X
  BVAR=ABS(VAR)
  IF(BVAR-TOL)1905,1905,1907
1905 VAR=YA-Y
  BVAR=ABS(VAR)
  IF(BVAR-TOL)1906,1906,1907
1906 VAR=ZA-Z
  BVAR=ABS(VAR)
  IF(BVAR-TOL)1990,1990,1907
1907 X=XA
  Y=YA
  Z=ZA
1908 CONTINUE
  IOR=2
1990 WRITE(5,1991)XA,YA,ZA,IOR,JOY
1991 FORMAT(' INTERSECAO DE 3 SUPERFICIES///', ' XA=',F10.4,' YA='
  1,F10.4,' ZA=',F10.4,I3,I5)
2000 CONTINUE
  CALL EXIT
  END

```

FEATURES SUPPORTED  
 ONE WORD INTEGERS  
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR PP7PE  
 COMMON 0 VARIABLES 542 PROGRAM 4130

END OF COMPILATION

// XEQ

0.0408	0.0456	-0.1449	-0.1695	0.0065	0.0563	-0.1280
-0.2312	0.0025	-0.0171	-0.0333	0.0220	0.0552	0.1434
0.0911	-0.1359	-0.1269	0.0717	0.3998	0.5619	-0.1466
-0.3077	-0.2596	-0.2143	0.3754	0.4493	0.7265	0.1320
-0.7943	-0.3912	0.3424	-0.2096	-0.7972	0.3803	0.2955
0.0468	0.0373	-0.1720	-0.1550	0.0054	0.0515	-0.1153
-0.1876	0.0033	-0.0208	-0.0423	0.0253	0.0634	0.1735
0.1227	-0.1376	-0.1518	0.0735	0.4158	0.5487	-0.1653
-0.3521	-0.2242	-0.2744	0.4400	0.4674	0.5098	0.1552
-0.8291	-0.4475	0.3046	-0.2137	-0.4750	0.4201	0.1474
-0.0002	-0.0065	0.0025	-0.0225	-0.0021	-0.0125	0.0347
0.0749	-0.0003	0.0090	-0.0015	-0.0098	-0.0054	-0.0001
-0.0025	0.0377	-0.0040	-0.0373	0.0270	-0.0986	0.0006
0.0771	-0.0108	0.0223	-0.0715	-0.0299	-0.2244	-0.0356
0.1398	0.0474	0.0387	-0.0404	0.3212	-0.0737	-0.1696

## INTERSECAO DE 3 SUPERFICIES

-161-A-

XA=	2.0822	YA=	2.9046	ZA=	-0.2366	0	81
INTERSECAO DE 3 SUPERFICIES							
XA=	0.1952	YA=	-0.4076	ZA=	-2.9328	0	12
INTERSECAO DE 3 SUPERFICIES							
XA=	-0.3209	YA=	-0.2956	ZA=	0.0258	2	101
INTERSECAO DE 3 SUPERFICIES							
XA=	-0.3011	YA=	0.4872	ZA=	-4.8878	0	7
INTERSECAO DE 3 SUPERFICIES							
XA=	0.1935	YA=	-0.3992	ZA=	-2.9364	0	40

## 17. EXTENSÃO DO ESTUDO DE PONTOS EM LUGARES ESPECIAIS

### MOVIMENTOS ESPECIAIS

Alguns movimentos, combinando parafusos inter-relacionados, merecem estudo especial, por ocorrerem com frequência em mecanismos tri-dimensionais.

#### 1) ROTAÇÃO PURA EM TORNO DE 2 EIXOS NÃO COPLANARES

Para este tipo de movimento, como indica mos na figura 17.1 e que B. Roth denominou de transformação similar, será sempre possível obter um parafuso único equivalente a dois parafusos dados.

Uma transformação similar é definida, partindo do princípio que a posição final do mecanismo após aplicadas as duas rotações é uma só. Os parafusos isolados são de translação nula, mas o parafuso equivalente tem rotação e translação.

Aplicamos o seguinte raciocínio.

Sejam A e B as matrizes referentes a cada rotação. O produto das transformações pode ser indicado por AB, sendo B aplicada em primeiro lugar. Se for aplicada inicialmente a rotação A, invertendo a ordem, a aplicação de uma segunda rotação representada pelo produto  $ABA^{-1}$ , a transformação total será novamente AB, tornando então, indiferente a ordem da transformação.

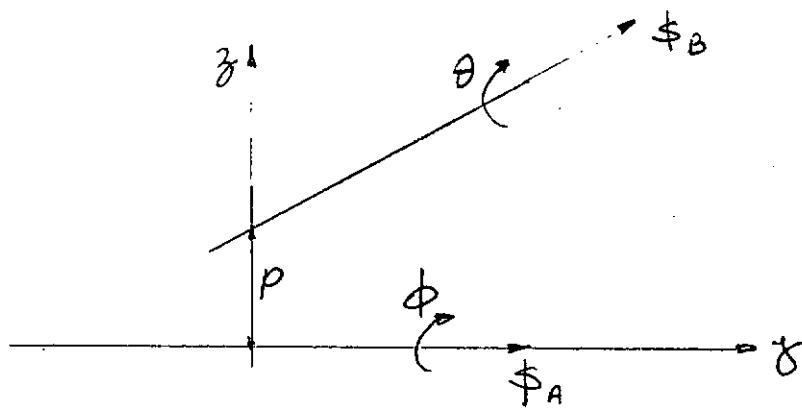
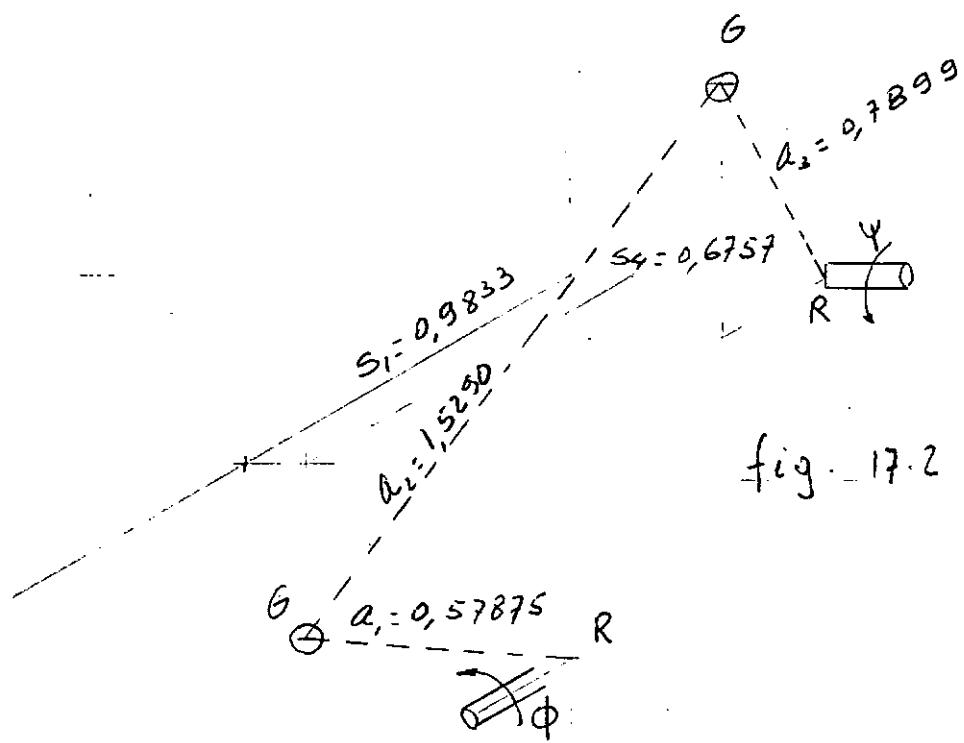


fig 17.1  
Transformação similar



Para simplificar a obtenção do parafuso e equivalente, fazemos o eixo dos y coincidente com a direção do parafuso A e o eixo dos z ao longo da perpendicular comum aos dois parafusos (figura 17.1). O comprimento da normal comum é  $p$ , e neste caso, os cosenos diretores do parafuso B, serão  $(u_1, u_2, 0)$ .

O parafuso equivalente terá rotação, translação, e seus cosenos diretores serão

$$u_{1,eq} = u_1 \frac{c}{z}$$

$$u_{2,eq} = \frac{u_2 c + d}{z}$$

$$u_{3,eq} = -u_1 \frac{b}{z}$$

$$d_{eq} = 2 p u_1^2 \frac{b}{z}$$

$$\omega \theta_{eq} = A - u_2 b \quad (17.1)$$

sendo

$$A = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2}$$

$$B = \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2}$$

$$C = \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$D = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2}$$

$$z = \sin \left( \frac{\theta + \phi}{2} \right) \quad (17.2)$$

Não havendo translação nos parafusos isô lados, o lugar geométrico dos pontos com 5 posições em uma esfera é composto de 2 superfícies quadráticas, simbolicamente indicadas por

$$E^4 = u_1 F^2 G^2 \quad (17.3)$$

A superfície  $F^2$  que não contém os pontos que vão interessar ao problema, tem o seguinte desenvolvimento

$$F^2 = [(u_1 x_1 - u_1 z_1)^2 + z_1(z_1 - p)] \quad (17.4)$$

Logo, é uma superfície independente da rotação. Na realidade, seus únicos pontos reais são dados pelas interseções de  $u_1 x_1 - u_1 z_1 = 0$  e  $z_1 - p = 0$  (17.5). Representam o eixo móvel do parafuso B, que obviamente tem todos os seus pontos com movimento circular.

Quando os parafusos são paralelos, a superfície  $E^4$  é identicamente nula. Representa o caso do movimento planar, ou esférico de raio infinito.

A superfície  $G^2$  é um hiperbolóide.

Se os parafusos forem arbitrários, as conclusões serão análogas.

Para 6 posições em uma esfera, desde que os parafusos não sejam paralelos, a interseção das duas superfícies  $G^2$  fornece uma cônica espacial e mais uma linha que é estranha as soluções.

Para 7 posições a interseção revela no máximo 4 soluções.

As interseções são obtidas através das superfícies  $G^2$  que são do segundo grau.

Estudando este problema, para o caso da singularidade já apresentada (matriz do sistema completo com característica igual a 2), teremos:

Uma equação fatora-se em um plano  $P^*$  e uma superfície do tipo  $F^2$ . O plano  $P^*$  tem para equação

$$P^* = \sum_{l,k,j=2}^4 (x_l - x_i) \sin \theta_j (1 - \cos \theta_k) e_{ijk} \quad \textcircled{1}$$

Outra equação conserva-se cônica, e pode ser posta na forma

$$u_1 [(x_1 u_2 - y_1 u_1) F_A^{*2} - (z_1 - p) F_B^{*2}] = 0$$

Aqui  $F_A^{*2}$  e  $F_B^{*2}$  são funções do segundo grau em  $x_1, y_1, z_1$ .

Todos os pontos do parafuso B (do eixo) satisfazem as duas equações.

①  $e_{ijk} = \text{tensor permutação}$

## 18 PROBLEMAS DE SÍNTSE DE MECANISMOS COM EMPREGO DO MÉTODO INDICADO

### SÍNTSE DE UM MECANISMO 2R 2G, ou RGRG

Tomando um mecanismo, RGRG, como indicado na figura 12.2, vamos fazer uma inversão cinemática, análoga a que foi realizada no mecanismo planar, de sorte que o conjugado esférico  $G'$  estará sujeito a dois parafusos.

O movimento relativo entre duas barras de um mecanismo, independe de qual é fixo; apenas o ângulo de deslocamento deve ser o adequado a inversão.

Tornamos fixa a manivela. Em consequência, a nova biela(que passa a ser a alavanca, deve ser sintetizada em função do ângulo  $-\varphi_{ig}$  em torno do parafuso fixo, e do ângulo  $-\dot{\varphi}_{ig}$  em torno do parafuso movel. Ou alternativamente fixando a alavanca.

Temos então um caso de transformação similar, e basta determinar um ponto com várias posições em uma esfera. O ponto determinado e o centro da esfera obtida, serão os conjugados esféricos do mecanismo(figura 17.2).

O problema inicial, que é o de ligar as variaveis práticas com as de projeto, é idêntico ao que foi feito no método direto. O ângulo  $\dot{\varphi}_{ig}$  de variação da posição da manivela e o ângulo  $\varphi_{ig}$  de variação de posição da alavanca a partir de uma certa origem, são correspondentes a função a obedecer. O ângulo entre os parafusos, deve ser especificado.

Os programas  $SG27P$ ,  $CG27P$  foram escritos para realizar esta síntese. Aplicado aos valores a seguir indicados, forneceram o mecanismo que vai indicado nas tabelas e na figura 17.2.

Função  $y = \cos x$   
 Intervalo  $\Delta\phi = 100^\circ$   
 $\nabla\phi = 150^\circ$

Pontos precisos

$j$	1	2	3	4	5	6
$\phi_{ij}$	3,0910	14,4145	49,7700	85,1255	96,4490	99,5400
$\psi_{ij}$	12,9167	32,9167	70,9167	107,9167	127,9167	140,8333

Parâmetros dos parafusos equivalentes

$j$	1	2	3	4	5	6
$u_{1j}$	0,9724	0,9131	0,7791	0,6607	0,6259	0,6232
$u_{2j}$	-0,2317	-0,3908	-0,5121	-0,4415	-0,3423	-0,2621
$u_{3j}$	0,0262	0,1154	0,3614	0,6068	0,7006	0,7367
$a_j$	35,0729	6,6995	1,5902	0,8765	0,7886	0,7378
$b_j$	-8,3534	-2,8226	-0,8602	0,3144	-0,1914	-0,1382
$c_j$	0	0	0	0	0	0
$\theta_j$	0,0317	0,6257	1,4718	2,2451	2,5479	2,7051
$d_j$	0,0524	0,2349	0,7228	1,2137	1,4013	1,4735

SUPERFÍCIES  $G^2$ 

	$G_{2345}$	$G_{2346}$	$G_{2347}$
$x^2$	0,0011	0,0023	0,0031
$y^2$	0,0031	0,0057	0,0072
$z^2$	0,0047	0,0090	0,0113
$xy$	0,0019	0,0031	0,0036
$xz$	-0,0040	-0,0073	-0,0098
$yz$	0,0007	0,0030	0,0055
$x$	-0,0060	-0,0078	-0,0098
$y$	-0,0034	-0,0053	-0,0058
$z$	0,0070	0,0131	0,0160
Indep.	0,0035	0,0064	0,0073

Pontos que pertence a  
uma esfera

$$x = 0,9833$$

$$A_x = 0,2110$$

$$y = 0,1659$$

$$A_y = 0,6757$$

$$z = -0,4561$$

$$A_z = 0,7610$$

$$\text{Raio da esfera } R = 1,5290$$

Centro da esfera

// JOB T 0OFF 1OFF

P 142108

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0OFF	0OFF	0000
0001	1OFF	1OFF	0002
		2015	0001

V2 M05 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

JAYME MASCHKVICH

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

```

SUBROUTINE RAIO(L)
REAL L(4,4,5)
DIMENSION E1(3,3),E4(3,3),E5(3,3),B1(3),B4(3),B5(3)
COMMON X,Y,Z,B4,B5
DO 10 N=1,3
B1(N)= L(4,1,N+1)*X+L(4,2,N+1)*Y+L(4,3,N+1)*Z+L(4,4,N+1)
B4(N)=B1(N)
DO 10 M=1,3
E1(N,M)=L(M,1,N+1)*X+L(M,2,N+1)*Y+L(M,3,N+1)*Z+L(M,4,N+1)
E4(N,M)=E1(N,M)
10 CONTINUE
CALL SIMQ(E4,B4,3,K4)
DO 20 N=1,3
B5(N)=B1(N)
DO 20 M=1,3
E5(N,M)=E1(N,M)
20 CONTINUE
DO 30 M=1,3
E5(3,M)=L(M,1,5)*X+L(M,2,5)*Y+L(M,3,5)*Z+L(M,4,5)
30 CONTINUE
B5(3)= L(4,1,5)*X+L(4,2,5)*Y+L(4,3,5)*Z+L(4,4,5)
CALL SIMQ(E5,B5,3,K5)
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR RAIO

COMMON 18 VARIABLES 78 PROGRAM 330

END OF COMPIILATION

// DUP

```

*STORE WS UA RAIO
CART ID 0OFF DB ADDR 2E2F DB CNT 0018

```

// FOR

JAYME

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

\*IOCS(2501READER,1403PRINTER)

```

REAL L(4,4,5)
DIMENSION U(3,5),TERAD(5),A(3,5),D(5),TETA(5),PR(3,3,5)
1,PRT(3,3,5),PRI(3,3),PRIN(3,3,5),DE(3,5),LIZ(3),MIR(3)
2,B4(3),B5(3)

```

```

COMMON X,Y,Z,B4,B5
C PONTOS QUE PERTENCEM A UMA ESFERA DESLOCAMENTO GERAL DE CORPO
C RIGIDO DADO POR QUATRO PARAFUSOS
C ESTE PROGRAMA CALCULA AS COORDENADAS DO CENTRO E O RAIO DA ES
C FERA CORRESPONDENTE AO PARAFUSO EM 4 POSICOES 3 PROGRAMA INCLUI
C A DETERMINACAO DAS MATRIZES DO MOVIMENTO A PARTIR DOS PARAME
C TROS DOS PARAFUSOS ATÉ 3 PARAFUSOS OU SEJA CORRESPONDENTE A
C ATÉ PONTOS COM 7 POSICOES EM UMA ESFERA
C PARAMETROS DO PARAFUSO
TAN(W)=SIN(W)/COS(W)
DO 1510 MEZ=1,3
READ(8,1)((U(I,J),I=1,3),J=2,5)
1 FORMAT(3F10.4)
READ(8,101)(TERAD(J),J=2,5)
101 FORMAT(4F10.4)
READ(8,1)((A(I,J),I=1,3),J=2,5)
READ(8,101)(D(J),J=2,5)
WRITE(5,1001)((U(I,J),I=1,3),J=2,5)
1001 FORMAT(' U(I,J)'//,4(1X,3F10.4//))
WRITE(5,1002)((A(I,J),I=1,3),J=2,5)
1002 FORMAT(' A(I,J)'//,4(1X,3F10.4//))
WRITE(5,1003)(TERAD(J),J=2,5)
1003 FORMAT(' TETA(J)'//4F10.4)
WRITE(5,1004)(D(J),J=2,5)
1004 FORMAT(' D(J)'//4F10.4)
DO 110 J=2,5
110 TETA(J)=TERAD(J)/2.
C FORMACAO DAS MATRIZES DOS PARAFUSOS
DO 2 J=2,5
DO 2 I=1,3
DO 2 K= 1,3
PR(I,K,J)=0
PR(1,2,J)=U(3,J)
PR(1,3,J)=-U(2,J)
PR(2,1,J)=-U(3,J)
PR(2,3,J)=U(1,J)
PR(3,1,J)=U(2,J)
PR(3,2,J)=-U(1,J)
2 CONTINUE
DO 21 J=2,5
DO 21 I=1,3
DO 21 K=1,3
PR(I,K,J)=PR(I,K,J)*TAN(TETA(J))
PR(I,I,J)=1.
21 CONTINUE
WRITE(5,2001)((PR(I,K,J),K=1,3),I=1,3),J=2,5)
2001 FORMAT(' MATRIZ DO PARAFUSO PR(I,J)'//,3(1X,3F10.4//)//)
C MATRIZES TRANPOSTAS DOS PARAFUSOS
DO 3 J=2,5
DO 3 I=1,3
DO 3 K=1,3
PRT(I,K,J)= PR(K,I,J)
3 CONTINUE
C INVERSAO DAS MATRIZES DOS PARAFUSOS
DO 41 J=2,5
DO 4 I=1,3
DO 4 K=1,3
PRI(I,K)=PR(I,K,J)

```

```

4 CONTINUE
CALL MINV(PRI,3,D,LIZ,MIR)
DO 41 I=1,3
DO 41 K=1,3
PRIN(I,K,J)=PRI(I,K)
41 CONTINUE
WRITE(5,4001)({((PRIN(I,K,J),K=1,3),I=1,3),J=2,5)
4001 FORMAT(' MATRIZ INVERSA PRIN(I,K,J)'//,3(1X,3F10.4)//)
C      MATRIZ DE ROTACAO DOS PARAFUSOS
DO 5 J=2,5
DO 5 I=1,3
DO 5 K= 1,3
L(I,K,J)=0
DO 5 N=1,3
L(I,K,J)=PRIN(I,N,J)*PRT(N,K,J)+L(I,K,J)
5 CONTINUE
C      VETOR DESLOCAMENTO DOS PARAFUSOS
C      MATRIZ DEPURADA DAS ROTACOES
DO 6 J=2,5
DO 6 I=1,3
L(I,I,J)=L(I,I,J)-1.
6 CONTINUE
C      CALCULO DO VETOR DESLOCAMENTO
DO 7 J=2,5
DO 7 I=1,3
DE(I,J)=0
DO 7 N=1,3
DE(I,J)=L(I,N,J)*A(N,J)+DE(I,J)
7 CONTINUE
DO 8 J=2,5
DO 8 I=1,3
L(I,4,J)=D(J)*U(I,J)-DE(I,J)
8 CONTINUE
C      FORMACAO DOS TERMOS(4,K,J)
DO 9 J=2,5
DO 9 K=1,3
L(4,K,J)=0
DO 9 I=1,3
L(4,K,J)=A(I,J)*L(I,K,J)+L(4,K,J)
9 CONTINUE
DO 10 J=2,5
DO 10 K=1,3
L(4,K,J)=L(4,K,J)+D(J)*U(K,J)
10 CONTINUE
DO 11 J=2,5
L(4,4,J)=(D(J)**2)/2+((A(1,J)**2+A(2,J)**2+A(3,J)**2)-(A(1,J)*U(1,
1,J)+A(2,J)*U(2,J)+A(3,J)*U(3,J))**2)*(1-COS(TERAD(J)))
11 CONTINUE
WRITE(5,1101)({((L(I,K,J),K=1,4),I=1,4),J=2,5)
1101 FORMAT('1',1 L(I,K,J)'//,4(1X,4F10.4)//)
DO 1110 JAL=1,3
READ(8,1)X,Y,Z
WRITE(5,1)X,Y,Z
CALL RAIO(L)
WRITE(5,1111)(JY,B4(JY),B5(JY),JY=1,3)
1111 FORMAT(I3,2F12.5)
RA04=SQRT((X-B4(1))**2+(Y-B4(2))**2+(Z-B4(3))**2)
RA05=SQRT((X-B5(1))**2+(Y-B5(2))**2+(Z-B5(3))**2)

```

```

      WRITE(5,1112)RA04,RA05
1112 FORMAT('    RAIO DA ESFERA',//,2F12.5//)
1110 CONTINUE
1510 CONTINUE
      CALL EXIT
      END

```

FEATURES SUPPORTED  
 ONE WORD INTEGERS  
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
 COMMON 18 VARIABLES 614 PROGRAM 1750

END OF COMPIILATION

// XEQ

U(I,J)

0.9724	-0.2317	0.0262
0.9131	-0.3908	0.1154
0.7791	-0.5121	0.3614
0.6608	-0.4415	0.6068

A(I,J)

35.0729	-8.3534	0.0000
6.6995	-2.8226	0.0000
1.5902	-0.8602	0.0000
0.8765	-0.3177	0.0000

TETA(J)

0.2317	0.6257	1.4718	2.2451
--------	--------	--------	--------

D(J)

0.0524	0.2309	0.7228	1.2137
--------	--------	--------	--------

MATRIZ DO PARAFUSO PR(I,J)

1.0000	0.0030	0.0269
-0.0030	1.0000	0.1131
-0.0269	-0.1131	1.0000

1.0000	0.0373	0.1264
-0.0373	1.0000	0.2953
-0.1264	-0.2953	1.0000

1.0000	0.3272	0.4637
-0.3272	1.0000	0.7055
-0.4637	-0.7055	1.0000

L(I,K,J)

-175-

-0.0014	-0.0120	-0.0525	0.0013
-0.0000	-0.0252	-0.2234	-0.2232
0.0538	0.2231	-0.0267	-0.0246
0.0000	-0.2230	0.0257	0.0275

-0.0314	-0.1351	-0.2089	0.0399
-0.0000	-0.1604	-0.5433	-0.5430
0.2488	0.5262	-0.1868	-0.1551
0.0001	-0.5429	0.1605	0.1623

-0.3540	-0.7192	-0.2558	0.5074
0.0000	-0.6647	-0.9421	-0.9421
0.7633	0.6085	-0.7833	-0.4292
0.0000	-0.9420	0.6647	0.6651

-0.9148	-0.9480	0.3065	1.3027
0.0001	-1.3076	-0.9515	-0.9513
0.9963	0.0810	-1.0260	-0.1111
0.0000	-0.9513	1.3074	1.3076

0.9833 0.1659 -0.4561  
1 0.21060 0.21104  
2 0.67576 0.67573  
3 0.76110 0.76092

RAIO DA ESFERA=

1.52925 1.52887

0.9833 0.1659 -0.4561  
1 0.21060 0.21104  
2 0.67576 0.67573  
3 0.76110 0.76092

RAIO DA ESFERA=

1.52925 1.52887

0.9833 0.1659 -0.4561  
1 0.21060 0.21104  
2 0.67576 0.67573  
3 0.76110 0.76092

RAIO DA ESFERA=

1.52925 1.52887

U(I,J)

0.9724 -0.2317 0.0262

19. EXTENSÃO DO MÉTODO DE SÍNTSESE BASEADO NAS PROPRIEDADES  
DO CENTRO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO, NO CASO DE MECANISMO  
TRI-DIMENSIONAL

O método que foi empregado para os mecanismos planares, poderá vir a ser extendido aos mecanismos tri-dimensionais.

Estabelecendo-se um parâmetro que interligue a origem do sistema móvel com os ângulos Eulerianos, será possível determinar um ponto momentaneamente imóvel, sob determinadas condições. A ligação de um ponto pertencente ao sistema móvel, a sua origem, através da matriz adequada, poderá permitir equações baseadas em um parâmetro, que com o auxílio do computador, permitiriam obter pontos com movimentos em uma esfera (curvatura constante em todas as direções) ou outras superfícies cuja curvatura puder ser equacionada. Deixamos de desenvolver os programas necessários, devido a sua extensão.

RELAÇÃO DOS PROGRAMAS DE COMPUTADOR ESCRITOS PARA  
APLICAÇÃO A MECANISMOS TRIDIMENSIONAIS

- Programa S3D3M - Síntese por método direto matricial para um quadrilátero articulado tridimensional, aplicado a um mecanismo RRRR
- Programa S3D3D - Síntese por método direto de projeções para um quadrilátero articulado tridimensional aplicado a um mecanismo RGGR
- Programa PP5PE - Escrevo a equação da superfície correspondente ao lugar geométrico de ponto com 5 posições em uma esfera para um deslocamento geral dado por 4 parafusos.
- Programa PP567 - Análogo ao PP5PE, escrevendo até 3 equações similares necessárias para pontos com 5,6,7 posições em uma esfera, em deslocamento geral dado por 4,5,6 parafusos.
- Programa PP6PE - Determina por método iterativo a interseção de duas superfícies do 4º grau, fornecendo pontos com 6 posições em uma esfera para um deslocamento geral dado por 5 parafusos.
- Programa PP7PE - Determinar por iteração a interseção de 3 superfícies do 4º grau, fornecendo pontos com 7 posições em uma esfera para um deslocamento geral dado por 6 parafusos.

Programa CRESF - Determina o centro e o raio da esfera para até 7 posições. Em cada posição admite 3 entradas.

Programa EP4PG - Escrevo as equações do 3º grau correspondentes a singularidade na análise de pontos com 5 posições em uma esfera e que identificam pontos com 4 posições em uma circunferência no espaço.

Programa PP4PC - Determina a interseção de duas equações do 3º grau, correspondentes a pontos com 4 posições em uma circunferência, por método iterativo.

Programa CCRC - Determina o centro, cosenos diretores e raio da circunferência, para pontos com 4 posições em uma circunferência no espaço, do deslocamento geral dado por 4 parafusos.

Programa P3PLR - Escrevo as equações do 2º grau correspondentes a pontos com 3 posições em linha reta.

Programa SG27P - Fornece o parafuso equivalente para uma transformação singular e resolve escrevendo a equação para a superfície  $G^2$  correspondente a pontos com até 7 posições em uma esfera na transformação similar dada por 6 parafusos equivalentes ou 12 parafusos correspondentes.

Alguns programas têm utilização mais de uma

vez na solução de problemas diversos.

Alguns programas foram ainda escritos para verificação de raízes obtidas por método iterativo.

A análise da curva descrita por um ponto do plano da biela foi realizada, obtendo-se a equação com dois aspectos diferentes. Um programa para computador foi escrito, tendo em vista o computador IBM 1130 da COPPE, permitindo obter os valores relacionados com a performance do quadrilátero articulado, traçando a curva e determinando valores instantâneos. Os valores ligados ao centro instantâneo de rotação incluindo a circunferência de inflexão, aparecem como resposta no programa.

A síntese do quadrilátero articulado foi realizada por vários métodos, empregando a noção de ponto preciso. Método geométrico com 3 pontos precisos foi desenvolvido e aplicado, o mesmo acontecendo com 4 pontos precisos. Para 3 pontos precisos, o teorema mais importante refere-se a noção de polo relativo. Para 4 pontos precisos, acrescentamos a ideia de pontos de trajetórias circulares e pontos centros. Os métodos foram aplicados aos mesmos problemas, permitindo uma comparação do erro máximo.

A síntese por métodos algébricos foi desenvolvida a partir da equação de Freudenstein e aplicada para 3 pontos precisos e para 4 pontos precisos. Com 3 pontos precisos obtém-se um sistema linear de equações simultâneas. Com 4 pontos precisos, o sistema obtido não é linear; foram aplicados artifícios que permitiram a resolução. Os métodos foram aplicados aos mesmos problemas que nos métodos geométricos e o erro máximo comparado.

A sistemática a ser estendida a 5 pontos

precisos não foi desenvolvida, no que diz respeito aos métodos geométricos, seria necessário obter os pontos de Burmester e emprega-los como articulações. Quanto ao método algébrico, a eliminação sucessiva de incógnitas no sistema de equações simultâneo não linear, conduz a uma equação de grau elevado cuja solução fornecerá pontos que satisfazem ao problema.

Pode-se chegar a síntese com um número mais elevado de pontos precisos, em particular quando houver condição de simetria.

O emprego de números complexos foi apresentado sem contudo fazer-se uma aplicação. Devemos fazer notar que ultimamente a técnica de números complexos vem sendo empregada com ótimos resultados, em particular para o desenvolvimento de mecanismos pouco ou ainda não tratados, como são os mecanismos com mais graus de liberdade, com duas variáveis de entrada ou com conexão por engrenagem, ou mesmo ainda no desenvolvimento de uma teoria cicloidal para os pontos de Burmester. A técnica dos números complexos merece um tratamento isolado, possuindo material para justificar um trabalho de pesquisa isolado.

Um novo método de síntese foi desenvolvido e aplicado. Baseia-se nas propriedades do centro instantâneo de rotação e no emprêgo generalizado da relação entre os movimentos de pontos do plano móvel e o centro instantâneo de rotação. A trajetória desejada deve ser obtida com exatidão em um ponto preciso. O mecanismo obtido traça uma curva que se aproxima bastante da curva indicada, na vizinhança do ponto preciso. Foi apontada a possibilidade de aperfeiçoamento do método.

20

## RESUMO DE MECANISMOS TRIDIMENSIONAIS

A sistemática geral foi apresentada, incluindo a descrição dos conjugados cinemáticos e divisão dos métodos.

Pelo método direto foram deduzidas equações de vínculo por dois caminhos, um matricial e outro baseado em projeções, para os quais foram escritos os programas para o computador.

Para o método indireto, tendo em vista a apresentação completa dos trabalhos do Professor Bernard Roth com significativas contribuições do autor, de inicio foi desenvolvido o estudo do movimento geral de um ponto no espaço, incluindo todas as fases para chegar a forma generalizada da equação de Rodriguez, para o movimento ditado por um parafuso rotação e translação) qualquer no espaço. Em continuação, a demonstração do importante teorema de B. Roth foi completamente realizada em trabalho original pelo autor. A apresentação e dedução das expressões necessárias para estudar as transformações ditadas pelo movimento geral dos parafusos, incluindo a transformação cúbica (pontos com 4 posições em uma esfera) e o estudo de pontos com várias posições em lugar geométrico especial, constitue a parte seguinte.

O estudo de movimentos especiais combinando parafusos, culminando com a solução de um problema através do método, é a parte final do estudo.

Uma extensão do método já adotado para os mecanismos planos foi apontada para os tri-dimensionais.

## BIBLIOGRAFIA

- 1- HARTENBERG, Richard S. & DENAVIT, Jacques- Kinematic Synthesis of Linkages, McGraw Hill, N.Y., 1964. 435p.
- 2- EDWARDS, Joseph- A Treatise on the Integral Calculus , Chelsea, N.Y., 1930, volume II. 980p.
- 3- FRAZER, R.A. & DUNCAN, W.J. & COLLAR, A.R.- Elementary Matrices, Cambridge, Reprinted U.S.A, 1965. 416p.
- 4- SEMPLE, J.G. & ROTH, L.- Introduction to Algebraic Geometry, Oxford, 1949. 446p.
- 5- FREUDENSTEIN, Ferdinand- Approximate Synthesis of Four - Bar Linkages, Transactions of the A.S.M.E., Vol 11, agosto de 1965. pp 853/861.
- 6- BUSSEL, W.H. & MARTIN, G.H.- An Analytical Method of Synthesizing Mechanisms Based on Roulette Theory, Transactions of the A.S.M.E, J.E.I., Vol 89, Series E, nº 1, fevereiro de 1967. pp 77/83.
- 7- DENAVIT, J. & HARTENBERG, R.S.- Approximate Synthesis of Spatial Linkages, Transactions of the A.S.M.E., J.A.M. , março de 1960. pp 201/206
- 8- ROTH, Bernard- The Kinematics of Motion Trough Finitely Separated Positions, Transactions of the A.S.M.E., J.A.M. setembro de 1964. pp 591/598.
- 9- ROTH, Bernard- Finite Position Theory Applied to Mechanisms Synthesis, Transactions of the A.S.M.E., J.A.M., setembro de 1964. pp 599/605

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 10- LEAL, Idio Ferreira- Apostila do Curso de Mecânica Aplicada às Máquinas, Escola Nacional de Engenharia, 1949.
- 11- HAIN, Kurt- Applied Kinematics, McGraw Hill, 1967. 727p.
- 12- LENT, Deane- Analysis and Design of Mechanisms, Prentice Hall, 1961. 328p.
- 13- HINKLE, Roland T.- Kinematics of Machines, Prentice Hal, 1960. 353p.
- 14- SHIGLEY, Joseph Edward- Theory of Machines, McGraw Hill, 1961. 658p.
- 15- PRIMROSE, J.A.- Plane Algebraic Curves, London, 1955. 111p.
- 16- SERRET, J.A.- Traité de Trigonometrie, Paris, 1916. 336p
- 17- WALKER, Robert J.- Algebraic Curves, Princeton, 1950. 201 p.
- 18- HARRISBERGER, Lee- Mechanization of Motion, J.W., 1961 . 363p.
- 19- HENRIOT, G.- Traité Theorique et Pratique des Engrenages Dunod, 1960. 443p.
- 20- SUH, C.H. & RADCLIFFE, C.W.- Synthesis of Spherical Linkages With Use of the Displacement Matrix, Transactions of the A.S.M.E., J.A.M., 1967. pp 215/222.
- 21- UICKER, J.J. & DENAVIT, J. & HARTENECK, R.S.- An Iterative Method for the Displacement Analysis of Spatial Mechanisms, Transactions of the A.S.M.E., J.E.I., junho de 1964. pp 309/314.
- 22- FREUDENSTEIN, F. & PRIMROSE, E.J.F.- Geared Five Bar Motion, Transaction of the A.S.M.E., J.A.M., junho de 1963 pp 161/175.
- 23- JOHNSON, R.C. & TOWFIGH, K.- Creative Design of Epicyclic Gear Trains Using Number Synthesis, Transactions of the A.S.M.E., J.E.I., maio de 1967. pp 309/314

- 24- TESAR, D. & SPARKS, J.W.- Conditions for Symetry of Multiplly Separated Positions in Coplanar Motio, Transactions of the A.S.M.E., J.A.M., dezembro de 1968. pp 706/712.
- 25- PRIMROSE, E.J.F. & FREUDENSTEIN, F. & SANDOR, G.N.- Finite Burmester Theory in Plane Kinematics, Transactions of the A.S.M.E., J.A.M., dezembro de 1964. pp 683/693.
- 26- SANDOR, George N.- On the Existence of a Cycloidal Burmester Theory in Planar Kinematics, Transactions of the A.S.M.E., J.A.M., dezembro de 1964. pp 694/699.
- 27- ROTH, Bernard- On the Screw Axes and Other Special Lines Associated With Spatial Displacement of a Rigid Body , papper nº 66, Mech 7, Transactions of the A.S.M.E., J.E.I.
- 28- WILSON, J.T.- Analytical Kinematics Synthesis by finite Displacement, Transactions of the A.S.M.E., J.E.I., maio de 1965. pp 161/169.
- 29- FREUDENSTEIN, F. & SANDOR, G.- On the Burmester Points of a Plane. Transactions of the A.S.M.E., J.A.M, março de 1961. pp 41/49.