

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA
ELASTICIDADE LINEAR BIDIMENSIONAL

Márcio Sampaio Sarmet Moreira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:

Luiz Carlos Wrobel

Luiz Carlos Wrobel

(Presidente)

Andrés Ludovico Halbritter

Andrés Ludovico Halbritter

José Claudio de Faria Telles

José Claudio de Faria Telles

Francisco Brasiliense Fusco Jr.

Francisco Brasiliense Fusco Jr.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Fevereiro de 1983

MOREIRA, MÁRCIO SAMPAIO SARMET.

Método dos Elementos de Contorno para Elasticidade Linear Bidimensional, 'Rio de Janeiro' 1983.

IX, 179 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1983).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia.

I. Métodos Computacionais em Engenharia Civil. I.
COPPE/UFRJ II. Título (série).

À minha esposa e aos meus filhos, pais e irmãos pelas dificuldades, compreensão e ajuda ao longo de todo o trabalho.

AGRADECIMENTOS

Aos professores da COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Civil, pelos conhecimentos transmitidos no decorrer do curso. Especialmente, aos professores Fernando L.L.B. Carneiro, Agustín J. Ferrante e Roberto F. de Oliveira.

Ao professor Andrés Ludovico Halbritter pelo apoio ao longo do curso e na parte inicial do desenvolvimento da tese, onde foram definidos os objetivos do trabalho.

Ao professor Luiz Carlos Wrobel pela orientação da parte final do desenvolvimento da tese, cujo diálogo e sugestões foram fundamentais para a conclusão do trabalho.

Aos professores Webe J. Mansur, Nelson F.F. Ebecken, José Claudio F. Telles e Claudio L. Curotto pela colaboração.

Aos colegas do curso, cuja convivência e trabalho foram gratificantes.

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil da UFV, pelo apoio para conclusão da tese. Especialmente, aos professores José A. Comastri e José Antônio S. Prestes.

Ao NCE/UFRJ, pela possibilidade de trabalho.

Ao Sr. Paulo Afonso da Silva pelo difícil trabalho de datilografia.

A CNPq e CNEN pelo auxílio financeiro ao longo do curso e na parte inicial do trabalho da tese.

A UFV pelo apoio para a conclusão do trabalho de tese.

RESUMO

A partir do teorema da reciprocidade de Betti ou da aplicação do método dos resíduos ponderados e, adotando-se a solução fundamental de Kelvin, obtém-se a equação integral de contorno, a qual é discretizada, para implementação numérico-computacional, utilizando-se elementos isoparamétricos lineares.

Aplicando-se a equação integral discretizada nos pontos nodais do contorno, obtém-se um sistema de equações lineares cujas incógnitas são deslocamentos e/ou forças de superfície do contorno.

Considera-se a problemática da descontinuidade do campo de forças de superfície, introduzindo-se equações adicionais obtidas das propriedades dos invariantes elásticos para os casos de pontos angulosos com apenas deslocamentos prescritos.

Para forças de massa provenientes de um campo gravitacional fixo, utiliza-se duas formulações para transformação das integrais de domínio em integrais de superfície.

Desenvolve-se uma formulação que pode considerar o domínio dividido em sub-regiões alinhadas.

Efetua-se algumas aplicações para obtenção de resultados numéricos e avaliação da performance da formulação desenvolvida.

ABSTRACT

Starting from Betti's reciprocity theorem or from the application of the weighted residual method and using Kelvin's fundamental solution, a boundary integral equation is obtained, which is discretized, for computational implementation, using isoparametric linear elements.

Applying the discretized integral equation at the boundary nodal points, a system of linear equations is obtained, having boundary displacements and/or tractions as unknowns.

The traction discontinuity problem is considered by introducing additional equations obtained from the elastic invariant properties, for the cases of corner points with prescribed displacements only.

For body forces arising from a fixed gravitational field, two formulations are utilized for transforming the domain integrals into boundary integrals.

A formulation which can consider a domain divided into aligned sub-regions is derived.

Some applications are performed in order to obtain numerical results and to evaluate the performance of the formulation developed.

ÍNDICE

	Página
I - INTRODUÇÃO	1
I.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
- Resumo histórico do método	1
- Objetivos do trabalho	3
I.2 - TEORIA BÁSICA DA ELASTICIDADE LINEAR	7
- Introdução	7
- Equações básicas	8
- O problema geral da teoria da elasticidade	10
- Elasticidade plana	11
II - DESENVOLVIMENTO BÁSICO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL	14
II.1 - OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO	14
- Formulação básica para região homogênea e isotró- pica	14
- Equações integrais para pontos do interior	15
- Equações integrais para pontos do contorno	16
- Formulação alternativa	20
- A solução fundamental	23
- Deformações e tensões em pontos internos	26
- Tensões em pontos do contorno	28
II.2 - MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS	28
- Discretização das equações integrais de contorno	28
- Formação do sistema de equações algébricas	32
- Considerações sobre a implementação numérico-com- putacional do método	35
- Considerações sobre a avaliação das integrações	38
II.3 - ELEMENTO DE CONTORNO ISOPARAMÉTRICO LINEAR	41
- Representação do elemento	41

- Montagem e espalhamento das submatrizes	42
- Determinação das expressões para integrações numéricas.....	44
- Tensões em pontos internos	47
- Tensões em pontos do contorno	48
III - DESENVOLVIMENTOS ADICIONAIS	50
III.1 - AVALIAÇÃO DA DESCONTINUIDADE DO CAMPO REAL DAS FORÇAS DE SUPERFÍCIE (TRACTIONS)	50
- Considerações iniciais	50
- Condicionamento tradicional	52
- Formulação adotada	53
III.2 - TRANSFORMAÇÃO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO EM INTEGRAIS SOBRE O CONTORNO PARA FORÇAS DE MASSA GRAVITACIONAIS	57
- Introdução	57
- Transformação por processo semi-analítico	58
- Transformação utilizando o tensor de Galerkin aplicado ao teorema de Gauss	62
III.3 - DIVISÃO DO DOMÍNIO EM SUB-REGIÕES	64
- Análise da consistência do método aplicado a nós de interface	65
- Corpo dividido em duas sub-regiões	68
- Sub-regiões em fila	74
IV - RESULTADOS E COMPARAÇÕES	79
IV.1 - CHAPA SUBMETIDA À TRAÇÃO UNIFORME	79
IV.2 - BARRAGEM DE CONCRETO	89
IV.3 - VIGA EM BALANÇO	107
V - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	122
BIBLIOGRAFIA	124

APÊNDICE A - DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO - FORMULÁRIOS ..	128
A.1 - CÁLCULO DOS COEFICIENTES DAS SUBMATRIZES \underline{G}_{Ic} , \underline{H}_{Ic} E C_{ij} POR INTEGRAÇÃO ANALÍTICA	128
- Cálculo da submatriz \underline{G}_{Ic} para $I = N_1(I_c)$	128
- Cálculo dos elementos da submatriz \underline{H}_{Ic} para $I \in I_c$, situados fora das diagonais principais do sistema	129
- Cálculo dos coeficientes das diagonais principais da matriz \hat{H}	130
- Cálculo da matriz C_{ij}	133
A.2 - VERIFICAÇÃO DAS INTEGRAÇÕES DO CAMPO VIRTUAL DE DESLOCAMENTOS SOBRE A SUPERFÍCIE S_ϵ	135
A.3 - DETERMINAÇÃO DAS EXPRESSÕES DAS DEFORMAÇÕES E TENSÕES EM PONTOS INTERNOS	135
- Devido aos campos de deslocamentos e forças de superfície do contorno	135
- Devido às forças de massa gravitacionais	140
APÊNDICE B - FORMULAÇÃO COMPUTACIONAL - LISTAGEM DO PROGRAMA PARA REGIÃO ÚNICA	142

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

I.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Resumo Histórico do Método

Projetistas e engenheiros encontram-se, freqüentemente, frente a análises de uma ampla variedade de problemas que podem ser representados por um grupo de equações diferenciais, para os quais não são encontradas soluções analíticas na literatura existente, excetuando-se para alguns casos muito simples.

Com o advento dos computadores com grande capacidade de operação e memória, tem ocorrido um grande desenvolvimento nos métodos que empregam procedimentos numéricos. Entre estes, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é o que se encontra num estágio mais avançado, podendo ser utilizado na solução dos mais variados problemas de engenharia. O Método dos Elementos de Contorno (MEC) ou Método das Equações Integrais de Contorno, cujo desenvolvimento tem sido acelerado ao longo dos últimos dez anos, apresenta-se como uma interessante alternativa que pode apresentar vantagens em sua aplicação para alguns tipos de problemas até mesmo em relação ao poderoso Método dos Elementos Finitos.

As equações que governam o problema do comportamento do corpo em estudo são obtidas, em geral, pela aplicação de algum princípio energético ou variacional. Na formulação pelo MEF utiliza-se, geralmente, o método dos resíduos ponderados, sendo a solução obtida através da discretização do corpo em análise através de elementos e utilizando-se para cada elemento, aproximações na forma de polinômios relacionadas aos parâmetros nodais. O MEC apresenta como principal característica o fato de utilizar uma solução fundamental dada por um campo singular, solução exata das equações diferenciais no domínio do corpo, resultando uma equação integral apenas sobre o contorno, reduzindo o problema em uma dimensão. O sistema de equações é obtido discretizando-se o contorno em elementos e aplicando-se o método da colocação sobre determinados pontos em cada elemento.

Assim, além de uma maior simplicidade na discretização do corpo, o sistema de equações resultante é menor que o obtido pelo MEF; entretanto, a matriz final, além de ser totalmente ocupada, não se apresenta de forma simétrica. As componentes do campo singular podem ser escalares, tal como nos problemas de potencial ou torção, ou tensoriais, como em problemas de elasticidade.

Historicamente, as equações integrais são baseadas em formulações matemáticas efetuadas em datas anteriores a 1900, ver [21] e [22]. Entretanto, somente a partir dos últimos vinte anos, com a possibilidade de implementação numérica com uso de computadores, o método voltou a despertar o interesse de pesquisadores em todo o mundo.

Jaswon e Ponter [15] e Symm [16] utilizaram em 1963 o MEC para resolver problemas de potencial em duas dimensões governados pela equação de Laplace. Nestes trabalhos o contorno foi representado por segmentos retilíneos e sobre cada elemento a função incógnita foi considerada constante, sendo a equação integral gerada no centro de cada segmento. A primeira formulação para elasticidade foi efetuada por Rizzo [11] em 1967, utilizando um esquema similar, excetuando-se as integrações que foram efetuadas de forma numérica. Cruse [5] foi o primeiro a trabalhar com elasticidade tridimensional, sendo o contorno representado por triângulos planos, nos quais os deslocamentos e forças de superfície foram considerados constantes. Em 1972, Ricardella [8] apresentou uma formulação para elasticidade plana com variações lineares para os deslocamentos e forças de superfície, esquema adotado por Cruse [19], em 1974, para elasticidade tridimensional. Em 1975, Lachat [9] apresentou uma formulação para elasticidade bi e tridimensional utilizando-se de elementos curvos de segunda ordem, com opções de variação linear, quadrática e cúbica para os deslocamentos e forças de superfície.

Uma das principais dificuldades existentes para o desenvolvimento de uma formulação para a elasticidade, utilizando-se o MEC, consiste na avaliação da descontinuidade do campo de forças de superfície, o que tem sido responsável por resultados deficientes obtidos por alguns pesquisadores. Chaudonneret [12], em

1978, propôs uma solução para o maior problema relativo a descontinuidade do campo incógnito de forças de superfície, para problemas de elasticidade linear.

Para avaliação dos efeitos de forças de volume a formulação básica requer a discretização do domínio e integrações sobre o mesmo, o que a torna ineficiente. Rizzo e Shippy [23], Stippes e Rizzo [24], e Danson [14], apresentaram trabalhos sobre a transformação das integrais de domínio em integrais de contorno, para avaliação das forças de domínio.

Muitos outros problemas tem sido estudados pelo MEC, sendo que atualmente existem alguns livros escritos [3, 6, 25, 26, 27], e realizam-se congressos específicos sobre o método. No Brasil o primeiro trabalho apresentado foi em 1978, ver [28], seguindo-se [4], [29] e [30], entre outros.

Objetivos do trabalho

O presente trabalho tem por objetivo o desenvolvimento teórico e computacional de uma formulação para o Método dos Elementos de Contorno (MEC), para aplicações em problemas de elasticidade bidimensional.

No próximo item descreve-se um resumo da Teoria da Elasticidade Linear. No capítulo II apresenta-se o desenvolvimento básico do método, sendo a equação integral de contorno obtida através do teorema da reciprocidade de Betti, bem como utilizando-se o método dos resíduos ponderados aplicado às equações básicas de equilíbrio da elasticidade.

A solução fundamental utilizada é a de Kelvin, correspondendo aos campos de deslocamentos e forças de superfície gerados pela aplicação de uma carga concentrada de valor unitário em um meio infinito. Os deslocamentos de pontos internos são determinados

utilizando-se a identidade de Somigliana, sendo as deformações e tensões obtidas através das relações deslocamentos-deformações e relações constitutivas da elasticidade linear, aplicadas a esta identidade.

Para a implementação numérica-computacional o contorno é discretizado em elementos, os quais são definidos através de nós geométricos, sendo os campos reais (aproximados) de deslocamentos e forças de superfície definidos através de seus valores em determinados pontos dos elementos (nós funcionais) e funções de interpolação adequadas. O sistema de equações algébricas é obtido aplicando-se as equações discretizadas sobre cada nó funcional. Efetuam-se vários comentários e sugestões sobre os modelos que podem ser utilizados, bem como em relação aos procedimentos para avaliação dos coeficientes fornecidos pelas integrações sobre os elementos.

Por último, estudam-se as características do elemento isoparamétrico linear, utilizado nos programas computacionais desenvolvidos. Assim, determinam-se as expressões para integração numérica sobre o elemento e apresentam-se os algoritmos para montagem do sistema de equações. Tensões nos pontos internos dos elementos são determinados pelas condições de equilíbrio e empregando-se a lei de Hooke às deformações obtidas pela derivação dos deslocamentos nodais conhecidos.

No capítulo III estudam-se alguns tópicos de grande importância para a aplicação do método. Assim, desenvolve-se uma formulação que considera o domínio dividido em sub-regiões, através de fronteiras internas ou interfaces, de forma que seja possível trabalhar com problemas que envolvam materiais de características distintas. A possibilidade de se considerar o domínio subdividido pode ser utilizada em problemas de um único material, visando uma redução no trabalho computacional a ser dispendido na solução do sistema (pois a matriz resultante apresenta características de banda), bem como no cálculo dos valores dointerior. Para a parte relativa ao problema da descontinuidade do campo real das forças de superfície, utiliza-se uma formulação que considera todos os possíveis modos de prescrições de parâmetros

no contorno, inclusive para o caso em que se tenha apenas deslocamentos prescritos em nós sobre pontos angulosos, cuja solução é fundamental para possibilitar a utilização de interfaces não retilíneas. Por outro lado, não consideram-se os casos de prescrição de contorno mistas para elementos inclinados em relação ao eixo do sistema global de referência, que podem ser solucionados conforme [31].

Para o caso de forças de massa provocadas por um campo gravitacional constante, importante para consideração do peso próprio nas aplicações práticas, desenvolve-se uma formulação que considera o efeito destas forças utilizando-se de integrações no contorno, através da transformação das integrações sobre o domínio por procedimento semi-analítico [2]. Apresenta-se também uma formulação de maior amplitude para transformação das integrais de domínio em integrais sobre o contorno, através da utilização do tensor de Galerkin aplicado ao teorema de Gauss, conforme Danson [14].

Desenvolveram-se, basicamente, dois programas computacionais que podem ser facilmente acoplados, escritos em Fortran IV e utilizando o computador B-6700 do NCE/UFRJ, para implementação do método e obtenção de valores numéricos. O primeiro resolve problemas de região única e o segundo problemas tratados por sub-regiões em fila.

No programa desenvolvido para o caso de domínio constituído de uma única região, apresentado no Apêndice B, utiliza-se um único nó funcional sobre cada nó geométrico para definição e determinação dos parâmetros nodais dos campos reais no contorno. A avaliação do efeito das forças de massa pode ser feita através de integrações no contorno, utilizando-se a discretização inicial e a formulação semi-analítica, ou adotando-se uma discretização especial do contorno e utilizando-se um dos seguintes procedimentos: o semi-analítico ou através do tensor de Galerkin. A utilização de uma discretização especial visa uma redução no tempo computacional na montagem das equações e na determinação de valores no interior, especialmente para os casos em que a dis-

cretização inicial seja muito refinada, como se faz necessário em problemas com concentrações de tensões. Entretanto, uma vez que o programa encontra-se numa versão acadêmica, com reduzido grau de otimização, não foi possível uma avaliação em termos de gastos computacionais.

No programa desenvolvido para trabalhar-se com o domínio dividido em sub-regiões, considera-se a possibilidade de ocorrência de nós de contorno externo com apenas deslocamentos prescritos sobre pontos angulosos, bem como da utilização de interfaces com pontos angulosos. Entretanto, utilizam-se nestes casos dois nós funcionais sobre o ponto, pois limita-se aos casos em que a descontinuidade ocorra em ambas as direções coordenadas. A consideração das forças de massa é feita utilizando-se a discretização inicial do contorno e a formulação semi-analítica. Os valores de pontos internos são obtidos através de integrações no contorno de cada sub-região. Este programa não é apresentado, pois encontra-se numa versão preliminar, não sendo utilizados algoritmos adequados de armazenamento e solução do sistema de equações, que considerem a característica de banda apresentada pela matriz dos coeficientes, o que impossibilitou uma justa análise em relação aos gastos computacionais.

No capítulo IV apresentam-se os resultados de exemplos numéricos, para averiguação da performance da formulação desenvolvida para o método, incluindo a utilização de subregiões, e o efeito de forças de massa gravitacionais obtido por integrações no contorno.

Finalmente, no capítulo V apresentam-se algumas conclusões em função dos resultados obtidos no capítulo anterior e várias sugestões para desenvolvimentos futuros.

I.2 - TEORIA BÁSICA DA ELASTICIDADE LINEAR

Introdução

Um corpo elástico submetido a um sistema genérico de cargas, formado por forças de superfície (\bar{t} em S_t) e forças de volume (b em Ω), entra em estado de equilíbrio deformado compatível com os deslocamentos prescritos (\bar{w} em S_w).

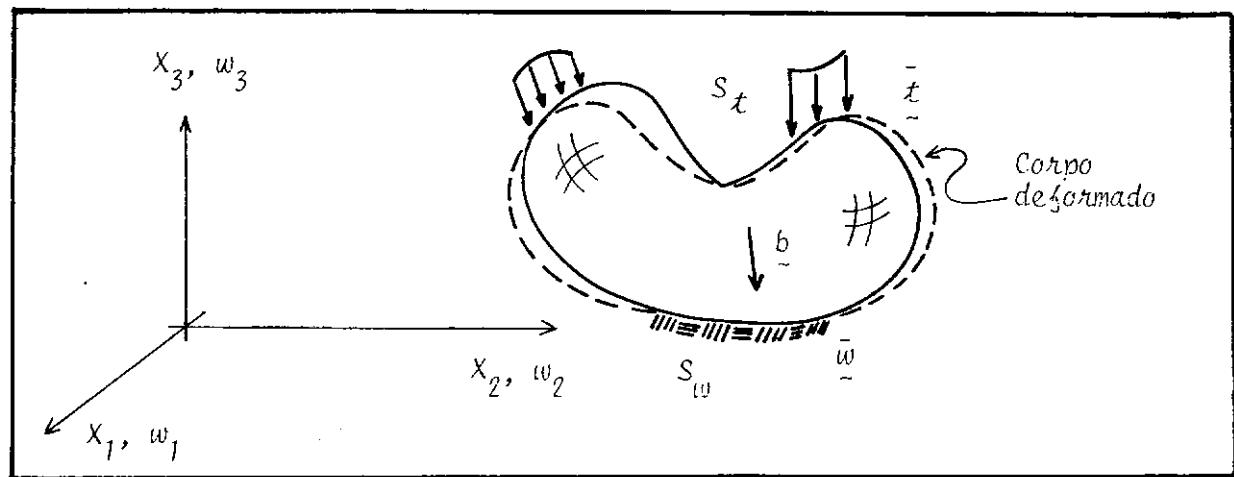


FIGURA I.1 - Corpo elástico submetido a um sistema genérico de forças.

Assim, pode-se distinguir as seguintes regiões no corpo:

- interior ou domínio (Ω), onde atuam as forças de volume b ;
- superfície ou contorno ($S = S_w + S_t$), sendo S_t a parte do contorno onde são aplicadas as forças externas \bar{t} e S_w a parte onde são prescritos os deslocamentos \bar{w} .

Uma análise linear do corpo, requer:

- que o corpo possua uma disposição geométrica adequada, onde a configuração de equilíbrio possa ser estudada desprezando-se as rotações e trabalhe em regime de pequenas deformações, podendo as equações de equilíbrio serem referidas à posição indefinida;
- o material constituinte tenha comportamento elástico linear, isto é, vale a lei de Hooke generalizada.

No caso mais geral de resolução de problemas elásticos são avalizadas 21 incógnitas, funções de x_1 , x_2 e x_3 , dadas por:

i) as três componentes de deslocamentos:

$$w_i, \quad i = 1, 3;$$

ii) as nove componentes do tensor de deformações:

$$\varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 3;$$

iii) as nove componentes do tensor de tensões:

$$\sigma_{ij}, \quad i, j = 1, 3.$$

Equações Básicas da Teoria da Elasticidade

As condições de equilíbrio estático fornecem as seguintes equações:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad i, j = 1, 3; \quad (I.1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i, j = 1, 3. \quad (I.2)$$

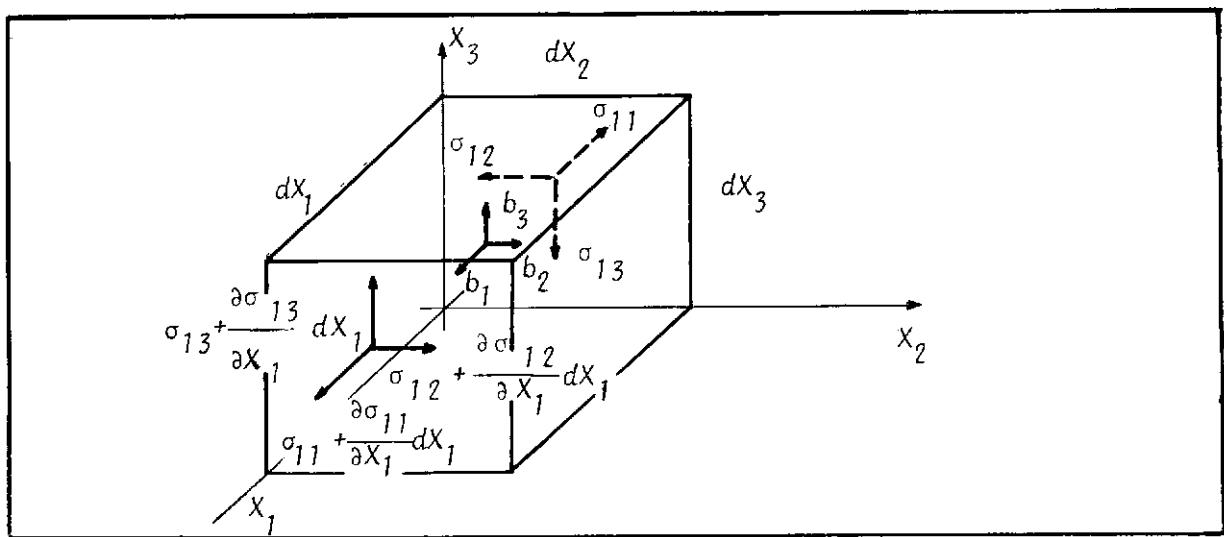


FIGURA I.2 - Variação de tensões em um elemento elástico infinitesimal (representadas apenas as tensões nas facetas normais ao eixo x_1 e as forças de massa).

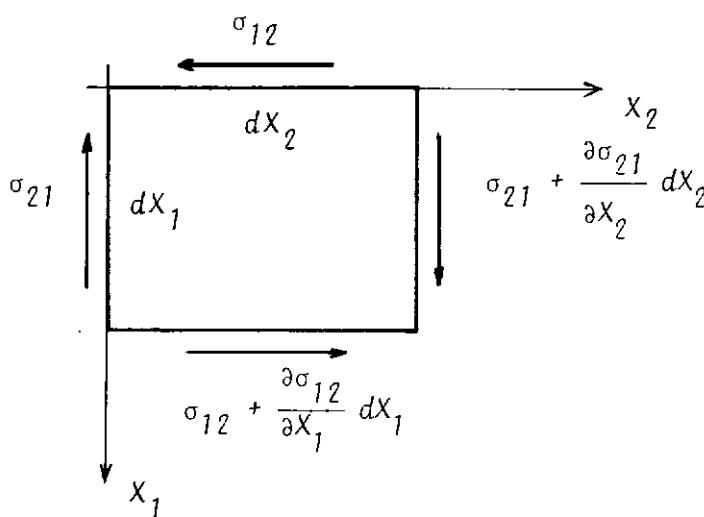


FIGURA I.3 - Projeção das tensões tangenciais que atuam nas facetas paralelas ao eixo X_3 .

As equações correspondentes às relações deslocamentos-deformações específicas, são dadas por:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 3. \quad (I.3)$$

Para material elástico isotrópico as equações constitutivas correspondentes às relações tensões-deformações têm a forma:

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \epsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk}, \quad i, j, k = 1, 3, \quad (I.4)$$

sendo:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j, \end{cases} \quad \text{é o delta de Kronecker;} \quad (I.5)$$

μ e λ as constantes de Lamé, valendo:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+v)} ; \quad (I.6)$$

$$\lambda = \frac{E v}{(1+v)(1-2v)}, \quad (I.7)$$

sendo: E o módulo de Young (elasticidade);
 ν o coeficiente de Poisson.

As relações inversas valem:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \delta_{ij} \frac{\nu}{E} \sigma_{kk}, \quad i, j, k = 1, 3. \quad (I.8)$$

O Problema Geral da Teoria da Elasticidade

O problema geral da teoria da elasticidade consiste em se resolver as equações de equilíbrio no interior do corpo, dadas por (I.1), determinando o campo de deslocamentos w_i ($i = 1, 3$) e o campo de tensões acoplado σ_{ij} [w] ($i, j = 1, 3$), satisfazendo as condições impostas no contorno, dadas por:

i) equilíbrio das forças em S_t :

$$t_i = \sigma_{ij} [w] n_j, \quad i, j = 1, 3 \quad (I.9)$$

sendo: n_j o cosseno diretor da normal à superfície em relação a x_j .

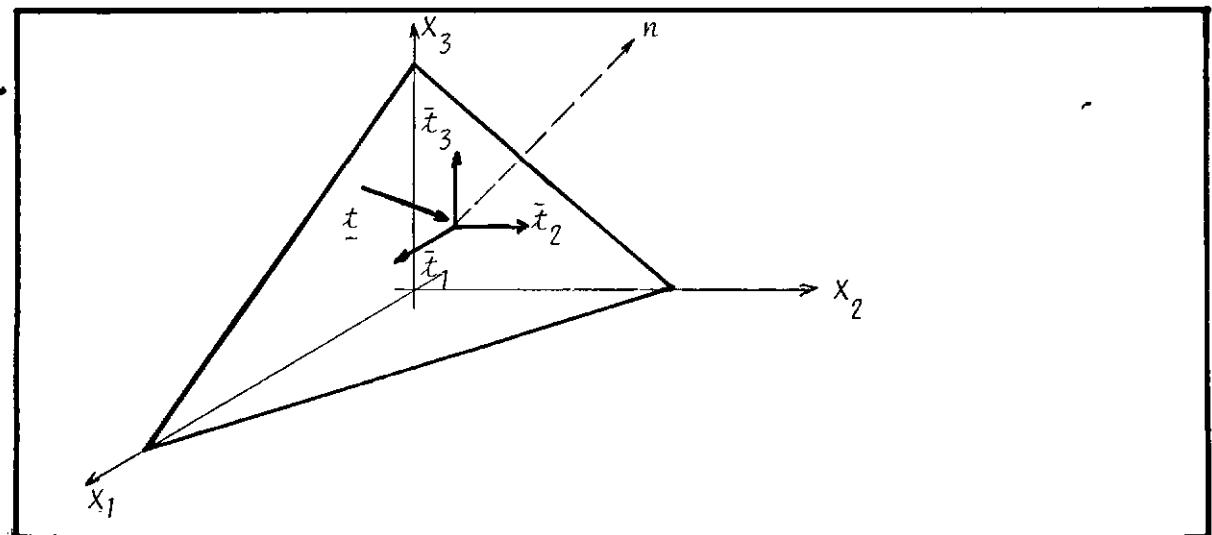


FIGURA I.4 - Superfície com forças prescritas em equilíbrio.

ii) compatibilidade de deslocamentos em S_w :

$$w_i = \bar{w}_i \quad , \quad i = 1, 3. \quad (\text{I.10})$$

Elasticidade Plana

São dois os tipos de problemas que podem ser tratados por uma mesma formulação bidimensional:

a) Estado Plano de Tensões

Ao analisar uma lâmina, como mostrado na Figura (I.5), pode-se considerar um estado plano de tensões, desde que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- i) a espessura e da chapa seja reduzida em relação as outras duas dimensões principais;
- ii) as forças de massa sejam independentes da coordenada X_3 , $\underline{b} = \delta_b(X_1, X_2)$, sendo nula sua componente nesta direção, $b_3 \equiv 0$;
- iii) as faces perpendiculares ao eixo X_3 não possuam cargas, $t_1 \equiv t_2 \equiv t_3 \equiv 0$ em $X_3 = \pm e/2$;
- iv) as forças de superfície atuem somente nas faces paralelas ao eixo X_3 , faces cilíndricas, sendo independentes da coordenada X_3 e possuam componentes nulas nesta direção, $t_3 \equiv 0$ e $t \equiv \delta_t(X_1, X_2)$.

Assim, o corpo entra em equilíbrio devido a um sistema de forças que atua paralelamente ao plano médio e ao longo de toda sua espessura. Como não se admitem forças atuando nas faces externas perpendiculares a X_3 , nem segundo esta direção, pode-se considerar $\sigma_3 \equiv 0$, e o mesmo para σ_{13} e σ_{23} . Desta forma, as funções com importância significativa, que por sua vez variam unicamente em relação a X_1 e X_2 , são dadas por:

$$\underline{w} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}, \quad \underline{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}^t$$

$$\underline{\sigma} = \left\{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} \right\}^t. \quad (I.11)$$

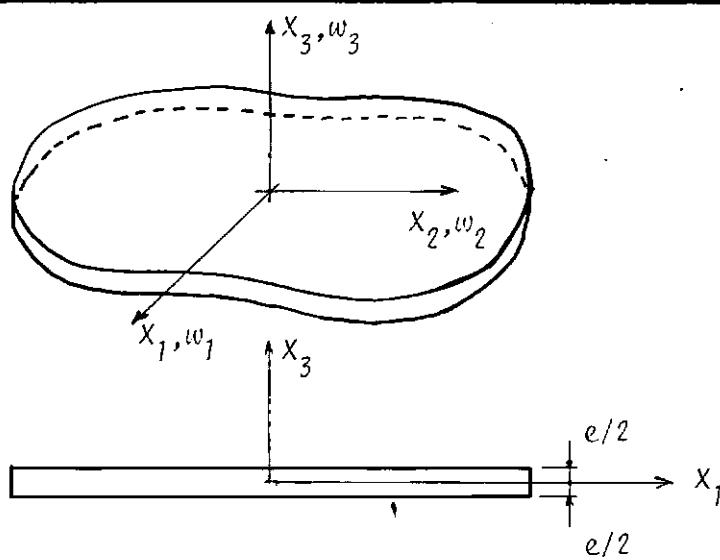


FIGURA I.5 - Chapa em estado plano de tensões.

Introduzindo-se estas simplificações, as relações constitutivas podem ser escritas na forma:

$$\underline{\sigma} = [\underline{\epsilon}] \underline{\varepsilon} \quad (I.12)$$

sendo:

$$[\underline{\epsilon}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{Sim.} & & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (I.13)$$

b) Estado Plano de Deformações

Em certos problemas em que se analizem corpos prismáticos de grande comprimento um estado plano de deformações pode ser assumido se as cargas atuantes são consideradas constantes para todas as seções transversais, sendo nulas as componentes na direção longitudinal. Assim, os deslocamentos w nesta direção são impedidos, resultando apenas deslocamentos no plano da seção transversal, que independem da coordenada no sentido do comprimento.

Desta forma, as únicas funções com valores significativo são as mesmas do caso anterior, sendo a matriz $[E]$ das relações constitutivas:

tivas no plano das deformações, dadas por:

$$[\underline{\underline{E}}] = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & 0 \\ & 1 & 0 \\ Sim. & & \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix} \quad (I.14)$$

As chapas e vigas compactas são exemplos usuais de estado plano de tensões; as barragens e túneis são estudados, basicamente, como problemas de estado plano de deformações. Muitos outros problemas práticos podem ser analisados, simplificadamente, considerando-se um estado plano, tais como vigas, pôrticos, consolos, ganchos, engrenagens, etc.

Observa-se que as relações constitutivas são diferentes caso se trate de problemas de estado plano de tensões ou deformações, entretanto, se na expressão $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\epsilon}}$ do caso de estado plano de deformações for utilizado $\tilde{E} = E(1+2v)/(1+v)^2$ e $\tilde{v} = v/(1+v)$ recai-se na expressão válida para o estado plano de tensões.

CAPÍTULO II - DESENVOLVIMENTO BÁSICO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
DE CONTORNO PARA ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

II.1 - Obtenção das Equações Integrais de Contorno

Formulação Básica para Região Homogênea e Isotrópica

A equação integral que traduz o problema do comportamento de um corpo em equilíbrio submetido a um sistema genérico de forças pode ser obtido por diversas formulações, ver [3, 11, 33]. Utilizando-se inicialmente o procedimento mais fácil de ser visualizado fisicamente, ou seja, o Teorema da Reciprocidade [Betti], válido para corpos elásticos de comportamento linear, que pode ser enunciado como: "Se existem dois estados de equilíbrio elásticos $(\underline{b}, \underline{t}, \underline{w})$ $(\underline{b}^*, \underline{t}^*, \underline{w}^*)$, sendo \underline{b} as forças no domínio, \underline{t} as forças de superfície (tractions) e \underline{w} o respectivo campo de deslocamentos, atuando em um corpo de comportamento linear, constituído de uma região com domínio Ω contornada pela superfície S , pode-se então afirmar que o trabalho efetuado pelas forças do primeiro sistema, para o campo de deslocamento gerado no sistema (*), é igual ao trabalho desenvolvido pelas forças do sistema (*) no campo de deslocamentos do primeiro sistema"; pode-se escrever:

$$\int_S \underline{t}^* \underline{w} \, ds + \int_{\Omega} \underline{b}^* \underline{w} \, d\Omega = \int_S \underline{t} \underline{w}^* \, ds + \int_{\Omega} \underline{b} \underline{w}^* \, d\Omega. \quad (\text{II.1})$$

Considerando-se agora, o primeiro sistema em equilíbrio elástico, como os deslocamentos (w_j) , as forças de superfície (t_j) e as forças de domínio (b_j) do problema a ser resolvido; e o sistema (*) correspondendo ao campo de deslocamentos (u_j^*) e forças de superfície (t_j^*) gerados por cargas virtuais, concentradas e de valores unitários atuando em um ponto do corpo, pode se reescrever (II.1) na forma indicial, como:

$$\begin{aligned} & \int_S t_j^*(x, y) w_j(y) \, ds(y) + \int_{\Omega} \Delta(x-z) \delta_{ij} w_j(z) e_i \, d\Omega(z) \\ &= \int_S u_j^*(x, y) t_j(y) \, ds(y) + \int_{\Omega} u_j^*(x, z) b_j(z) \, d\Omega(z) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Assim, $t_j^*(x, z)$ e $u_j^*(x, z)$ são as soluções fundamentais Kelvin para as equações de equilíbrio dadas por:

$$\frac{\partial \sigma_{ij} [w]}{\partial x_j} + \Delta(x) e_i = 0, \quad \text{sendo: } e_i = 1 \quad (\text{II.3})$$

Considerando-se o efeito de cada carga isoladamente, resultam $u_j^* = u_{ij} e_i$ e $t_j^* = T_{ij} e_i$, e a partir de (II.2) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & \int_S T_{ij}(x, y) w_j(y) ds(y) + \int_{\Omega} \Delta(x-z) \delta_{ij} w_j(z) d\Omega(z) \\ &= \int_S u_{ij}(x, y) t_j(y) ds(y) + \int_{\Omega} u_{ij}(x, z) b_j(z) d\Omega(z) \quad (\text{II.4}) \end{aligned}$$

Logo, $T_{ij}(x, y)$ e $u_{ij}(x, y)$ representam, respectivamente, os campos de forças de superfície e deslocamentos que surgem no ponto y , na direção j , devido a atuação de uma carga unitária e concentrada no ponto x , na direção i , considerando o corpo infinito. A carga virtual é representada nas equações de equilíbrio pela função delta de Dirac (Δ).

Equações Integrais para Pontos do Interior

Quando o ponto x pertence ao interior, a integral no domínio do produto do campo de forças virtuais (força unitária e concentrada) pelo campo de deslocamentos reais fornece o deslocamento no ponto, na direção da carga aplicada.

Este efeito é representado pelo segundo membro à esquerda na equação (II.2), que fornece a seguinte relação:

$$\int_{\Omega} \Delta(x-z) \delta_{ij} w_j(z) d\Omega = \alpha w_i(x), \quad (\text{II.5})$$

sendo:

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{para } x \text{ em } \Omega \\ 0 & \text{para } x \text{ fora de } \Omega. \end{cases}$$

Assim, para x (origem dos campos virtuais) pertencente ao domínio, tem-se:

$$w_i(x) = \int_S u_{ij}(x,y) t_j(y) ds(y) - \int_S T_{ij}(x,y) w_j(y) ds(y) + \\ + \int_{\Omega} u_{ij}(x,y) b_j(z) d\Omega(z). \quad (\text{II.6})$$

que é a conhecida identidade de Somigliana.

Deve-se observar que a função u_{ij} da integral sobre o domínio Ω é um campo fixo de deslocamentos com origem em x , devido à carga concentrada na direção i , sendo possível desta forma, em alguns casos simples, a transferência desta integral para o contorno através de um procedimento analítico, como demonstra-se no capítulo 3.

Equações Integrais para Pontos do Contorno

Quando x é ponto do contorno, a equação (II.2) assume a forma:

$$\int_S T_{ij}(x,y) w_j(y) ds(y) = \int_S u_{ij}(x,y) t_j(y) ds(y) + \\ + \int_{\Omega} u_{ij}(x,z) b_j(z) d\Omega(z). \quad (\text{II.7})$$

Para uma avaliação consistente do valor da integral dada por $\int_S T_{ij}(x,y) w_j(y) ds(y)$, devido a singularidade existente na função T_{ij} quando x tende para y ($\overline{xy} \rightarrow 0$), utiliza-se um artifício que consiste em se dividir o contorno em duas parcelas $S - \bar{S}_{\varepsilon}$ e S_{ε} , que serão avaliadas separadamente.

O contorno S_ε consiste de um círculo (caso bidimensional) de raio ε ($\varepsilon \rightarrow 0$) que envolve o ponto x (Figura II.1).

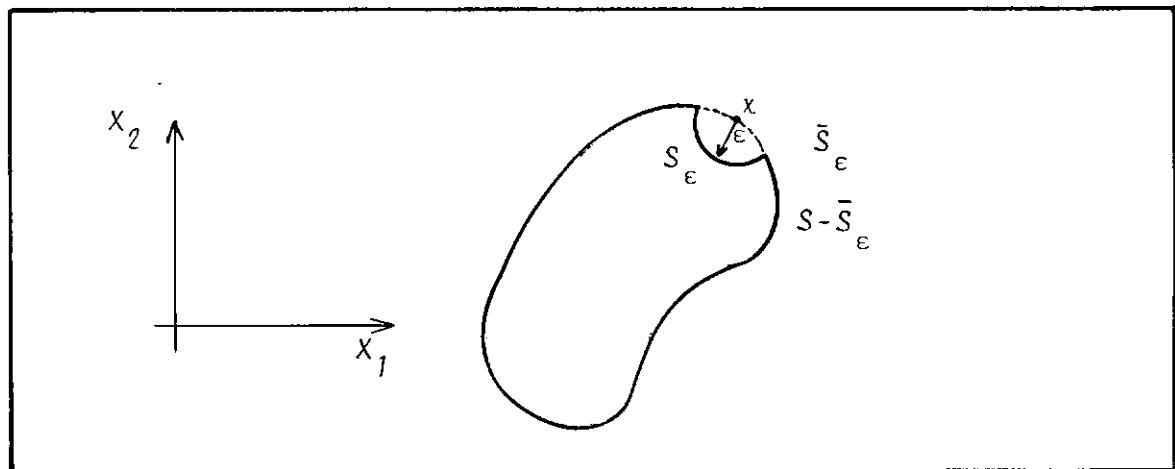


FIGURA II.1 - Divisão do Contorno nas Superfícies S_ε e $S - S_\varepsilon$ para Avaliação das Singularidades nas Equações para Pontos do Contorno.

Assim, a equação (II.6) assume a forma:

$$\begin{aligned} & \int_{S - S_\varepsilon + S_\varepsilon} \{ T_{ij}(x, y) w_j(y) - U_{ij}(x, y) t_j(y) \} ds(y) \\ &= \int_{\Omega} U_{ij}(x, z) b_j(z) d\Omega(z). \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Avaliando-se separadamente as integrais em $S - S_\varepsilon$ e S_ε , para $\varepsilon \rightarrow 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} T_{ij}(x, y) w_j(y) ds(y) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} T_{ij}(x, y) [w_j(y) - w_j(x)] ds(y) \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ w_j(x) \int_{S_\varepsilon} T_{ij}(x, y) ds(y) \}. \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Pela condição de continuidade de w_j , o primeiro termo à direita da equação (II.9) vale zero; ver [27]. No segundo membro pode-se fazer:

$$c_{ij}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} T_{ij}(x, y) ds(y) , \quad (\text{II.10})$$

resultando:

$$\begin{aligned} c_{ij}(x) w_j(x) &= \int_S u_{ij}(x, y) t_j(y) ds(y) + \\ &- \int_{S - S_\varepsilon} T_{ij}(x, y) w_j(y) ds(y) + \\ &+ \int_\Omega u_{ij}(x, z) b_j(z) d\Omega(z). \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Na equação (II.11), as integrais no contorno apesar de existirem e poderem ser avaliadas, apresentam singularidades quando o ponto y tende para o ponto x . A integral envolvendo a função u_{ij} apresenta singularidade logarítmica, podendo ser avaliada no sentido comum de integral imprópria. A integral envolvendo o tensor T_{ij} , que contém a função $1/r$, apresenta uma singularidade de ordem mais elevada, necessitando ser avaliada no sentido do valor principal, entretanto, após a discretização do contorno, os valores desta integral juntamente com os valores dos coeficientes c_{ij} , podem ser determinados pela consideração de movimentos de corpo rígido, conforme demonstra-se no item II.2.

No caso de contorno suave onde o plano tangente ao ponto x é contínuo (ver Apêndice A), obtém-se:

$$c_{ij} = \delta_{ij}/2 . \quad (\text{II.12})$$

Considerando-se o ponto x tendendo para o contorno por dentro do domínio (ver Figura II.2), tem-se:

$$c_{ij} - c'_{ij} = \delta_{ij} \rightarrow \begin{cases} c_{ij} = \delta_{ij} + c'_{ij} \\ c'_{ij} = -\delta_{ij} + c_{ij}, \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

pois sendo $T_{ij}(x, y)$ o campo gerado em y para uma carga concentrada atuando em x , ao integrar-se T_{ij} ao longo de um círculo fechado em x com o raio tendendo a zero, obtém-se δ_{ij} e para obter-se c'_{ij} integra-se numa região em excesso, onde na realidade o campo virtual não realiza trabalho. Como os sentidos de integração para obtenção de c_{ij} e c'_{ij} são contrários, pode-se obter c_{ij} somando algebraicamente c'_{ij} com δ_{ij} .

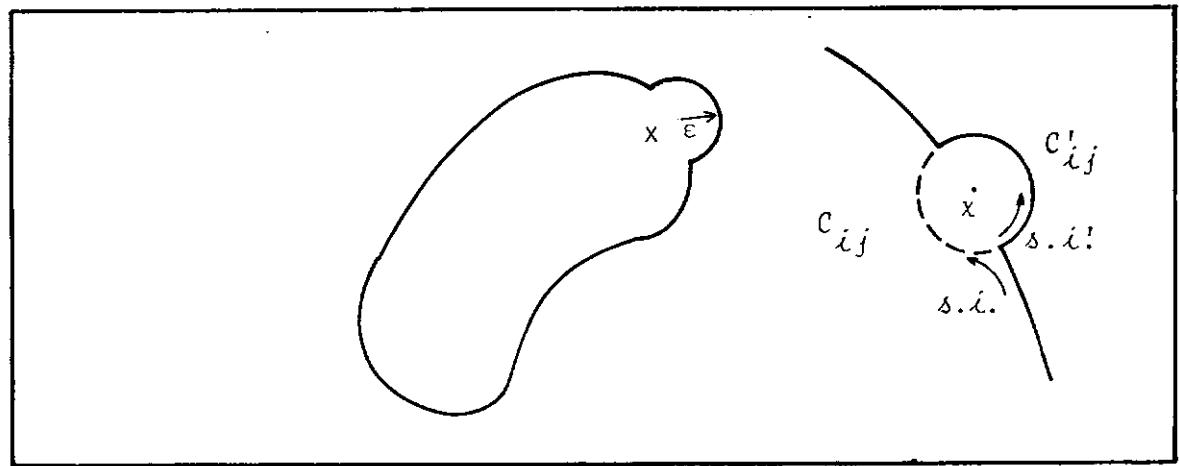


FIGURA II.2 - Esquemas para Determinação dos Coeficientes dos Termos Independentes dos Deslocamentos.

Na figura (II.2), s.i. é o sentido de integração adotado. Assim, percorre-se o contorno com o domínio situado à esquerda.

A integral de $u_{ij}(x, y) t_j(y) ds(y)$ pode ser dividida em duas parcelas, mas não introduz novos termos, pois obtém-se sempre $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} u_{ij}(x, y) ds(y) = 0$ (ver Apêndice A).

Formulação Alternativa

O problema básico ao analisar-se o comportamento de um sólido submetido a um sistema de forças e deslocamentos prescritos, consiste em determinar-se o campo real (aproximado) de deslocamentos w_i e o respectivo campo de tensões σ_{ij} quando o corpo entra em estado de equilíbrio deformado.

Assim, o tensor de tensões existente num ponto do interior do corpo deve satisfazer as equações de equilíbrio dadas por (I.1). As condições prescritas no contorno requerem que sejam satisfeitas, igualmente, as equações (I.9) e (I.10).

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados às equações do corpo, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + b_j \right) w_j^* d\Omega = \int_{S_w} (\bar{w}_j - w_j) t_j^* ds \\ + \int_{S_t} (t_j - \bar{t}_j) w_j^* ds , \quad (II.14)$$

sendo $t_j^* = \sigma_{jk} n_k$ as forças de superfície correspondentes ao campo da função de ponderação w_j^* , que é associada a um campo de deslocamentos virtuais.

Considerando-se as relações lineares deformações-deslocamentos para ambos os campos, o aproximado w e o da função peso w^* , dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_j} \right) \\ \epsilon_{jk}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_j^*}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k^*}{\partial x_j} \right) , \end{array} \right. \quad (II.15)$$

e integrando-se a equação (II.14) por partes (teorema de Gauss), resulta:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \epsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_j w_j^* d\Omega &= - \int_{S_t} \bar{x}_j w_j^* ds + \\ - \int_{S_w} \bar{x}_j w_j^* ds + \int_{S_w} (\bar{w}_j - w_j) t_j^* ds. & \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Integrando-se novamente o primeiro membro por partes, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{jk}^*}{\partial x_k} w_j d\Omega + \int_{\Omega} b_j w_j^* d\Omega &= \int_{S_w} \bar{w}_j t_j^* ds + \\ + \int_{S_t} w_j t_j^* ds - \int_{S_w} \bar{x}_j w_j^* ds + & \\ - \int_{S_t} \bar{x}_j w_j^* ds. & \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Para solucionar o problema através da formulação dos elementos de contorno é necessário restringir as incógnitas apenas ao contorno. Este objetivo é atingido ao se utilizar as soluções fundamentais, que satisfazem as equações de equilíbrio no interior, como funções de ponderação, já que o segundo membro à esquerda não introduz novas incógnitas.

Assim, as funções peso são as soluções do grupo de equações:

$$\frac{\partial \sigma_{jk}^*}{\partial x_k} + \Delta(x) e_j = 0. \quad (\text{II.18})$$

Observando-se que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma^*_{jk}}{\partial x_k} w_j^* d\Omega = - \int_{\Omega} b_j^* w_j^* d\Omega , \quad (\text{II.19})$$

sendo: $b_j^* = \Delta(x) e_j$; (II.20)

resulta

$$e_i w_i(x) + \int_S w_j t_j^* ds = \int_S t_j w_j^* ds + \int_{\Omega} b_j w_j^* d\Omega . \quad (\text{II.21})$$

Como w_j^* e t_j^* representam os deslocamentos e forças de superfície devido a cargas concentradas de valor unitário atuando no ponto x em cada direção, a identidade de Somigliana pode ser obtida aplicando-se a carga unitária, separadamente, em cada direção coordenada, resultando:

$$w_i(x) + \int_S w_j T_{ij} ds = \int_S t_j u_{ij} ds + \int_{\Omega} b_j u_{ij} d\Omega \quad (\text{II.22})$$

LACHAT [9] e WATSON [13] consideram interessante dividir a solução $w_i(x)$ em duas componentes: a solução particular $v_i(x)$ e a solução complementar $u_i(x)$, na forma:

$$w_i(x) = v_i(x) + u_i(x), \quad (\text{II.23})$$

sendo $v_i(x)$ uma função que satisfaz o equilíbrio no interior do corpo devido às forças do domínio, dado pelas equações:

$$\frac{\partial \sigma_{ij} \boxed{v}}{\partial x_j} + b_i(x) = 0 , \quad (\text{II.24})$$

e $u_i(x)$ uma função escolhida de forma que $w_i(x)$ satisfaça as condições prescritas no contorno S .

Um caminho natural para construir a solução particular é fazer:

$$v_i(x) = \int_{\Omega} u_{ji}(z, x) b_j(z) d\Omega(z) , \quad (\text{II.25})$$

sendo $u_{ij}(z, x)$ a solução fundamental de Kelvin representando o campo de deslocamentos gerado em x , na direção i , para uma força concentrada de valor unitário atuando em z , na direção j .

Como a função $u_{ij}(x, y)$ é simétrica tanto em relação a i e j , quanto em relação a x e y , a equação (II.25) pode ser reescrita como:

$$v_i(x) = \int_{\Omega} u_{ij}(x, z) b_j(z) d\Omega(z). \quad (\text{II.26})$$

Assim, o campo virtual para obtenção da solução particular é novamente um campo fixo gerado por uma força aplicada em x .

As equações envolvendo a satisfação das condições de contorno podem ser obtidas através do teorema de Betti, não considerando-se a presença das forças de massa.

A Solução Fundamental

A solução fundamental para um material homogêneo, elástico e isotrópico é dado pela solução de Kelvin para o grupo de equações referidas em (II.3), valendo:

$$u_{ij}(x, y) = \frac{1}{8\pi G(1-v)} \left[(3-4v) \delta_{ij} \ln (1/r) + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] \quad (\text{II.27})$$

$$= C_1 \left[-C_2 \delta_{ij} \ln r + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right], \quad (\text{II.28})$$

sendo:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{8\pi G(1-v)} \\ C_2 = (3 - 4v) \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

$$T_{ij}(x, y) = \frac{-1}{4\pi(1-v)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \{ (1-2v) \delta_{ij} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \} + \right. \\ \left. - (1-2v) \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} n_j - \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right) \right] \quad (\text{II.30})$$

$$= \frac{C_3}{r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} (C_4 \delta_{ij} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j}) + \right.$$

$$\left. - C_4 \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} n_j - \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right) \right], \quad (\text{II.31})$$

sendo:

$$\begin{cases} C_3 = \frac{-1}{4\pi(1-v)} \\ C_4 = (1 - 2v); \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

r = distância do ponto x onde é aplicada a carga ao ponto y em consideração;

n = normal ao contorno no ponto y .

As expressões acima são válidas para o caso de estado plano de deformações. Para estado plano de tensões basta substituir v por $\bar{v} = v/(1+v)$.

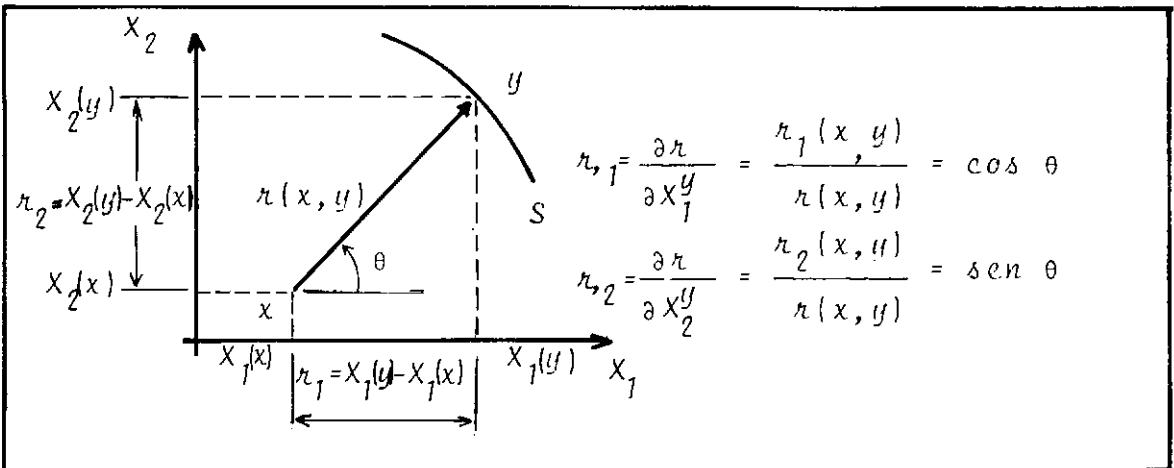
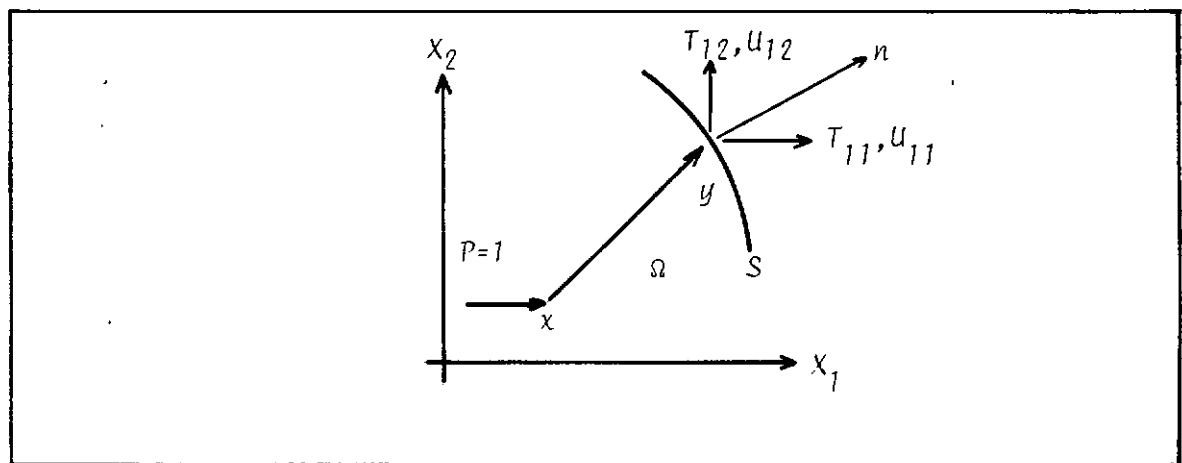


FIGURA II.3 - Definições Geométricas Básicas

FIGURA II.4 - Representações dos Campos de Deslocamentos e Forças de Superfície no Ponto y devido a uma carga unitária Atuando no Ponto x na Direção $i = 1$.

Deformações e Tensões em Pontos Internos

Partindo-se da equação (II.6) válida para pontos do interior, não considerando-se a presença de forças no domínio, tem-se:

$$u_i(x) = \int_S u_{ij}(x, y) t_j(y) ds(y) + \\ - \int_S T_{ij}(x, y) u_j(y) ds(y) . \quad (\text{II.33})$$

Utilizando-se as relações deslocamentos-deformações, obtém-se:

$$\varepsilon_{ij}(x) = \int_S B_{ijk}(x, y) t_k(y) ds(y) + \\ - \int_S C_{ijk}(x, y) u_k(y) ds(y) , \quad (\text{II.34})$$

sendo:

$$B_{ijk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}}{\partial x_i} \right] \quad (\text{II.35})$$

e

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \right] , \quad (\text{II.36})$$

Operando-se as derivações acima (ver Apêndice A), resultam:

$$B_{ijk} = \frac{c_1}{2\pi} \{ (c_2 - 1) (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) + \\ - 2\delta_{ij} r_{,k} + 4 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \} ; \quad (\text{II.37})$$

$$\begin{aligned}
 C_{ijk} = & \frac{C_3}{r^2} \{ C_4 ((r_i r_k - \delta_{ik}) n_j + (r_j r_k - \delta_{jk}) n_i + \\
 & - (2r_i r_j - \delta_{ij}) n_k) - r_k (r_i n_j + r_j n_i) + \\
 & + r_e n_e ((C_4 - 1) (\delta_{ik} r_j + \delta_{jk} r_i) + \\
 & + 8 r_i r_j r_k - 2\delta_{ij} r_k) \} . \quad (\text{II.38})
 \end{aligned}$$

Agora, utilizando-se as relações constitutivas, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}(x) = & \int_S D_{ijk}(x, y) t_k(y) ds(y) + \\
 & - \int_S E_{ijk}(x, y) u_k(y) ds(y) , \quad (\text{II.39})
 \end{aligned}$$

sendo:

$$D_{ijk} = \frac{2Gv}{(1-2v)} \delta_{ij} \frac{\partial u_{\ell k}}{\partial x_{\ell}} + G \left(\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}}{\partial x_i} \right) ; \quad (\text{II.40})$$

$$E_{ijk} = \frac{2Gv}{(1-2v)} \delta_{ij} \frac{\partial T_{\ell k}}{\partial x_{\ell}} + G \left(\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \right) . \quad (\text{II.41})$$

Operando-se as derivações (ver Apêndice A), resultam:

$$\begin{aligned}
 D_{ijk} = & \frac{-C_3}{r} \{ C_4 (\delta_{ik} r_j + \delta_{jk} r_i - \delta_{ij} r_k) + \\
 & + 2 r_i r_j r_k \} ; \quad (\text{II.42})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{ijk} = & \frac{-2Gc_3}{r^2} \{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[c_4 \delta_{ij} r_{,k} + v(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) + \right. \right. \\
 & - 4 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \left. \right] + 2v(r_{,i} r_{,k} n_j + r_{,j} r_{,k} n_i) + \\
 & + c_4 (2 r_{,i} r_{,j} n_k + \delta_{ik} n_j + \delta_{jk} n_i) - (1-4v)\delta_{ij} n_k \}.
 \end{aligned} \tag{II.43}$$

Nas expressões acima as derivações dos tensores são efetuadas em relação ao ponto fonte x , origem dos campos tensoriais (ver Apêndice A).

Tensões em Pontos do Contorno

Na maioria das aplicações é necessário para fins de projeto, avaliar o estado de tensão a que estão submetidos os pontos do contorno. Uma avaliação numérica utilizando as equações acima obtidas, no limite do contorno, em geral, não apresenta bons resultados, ver TELLES. [7]. A alternativa mais interessante consiste em se determinar diretamente parte do tensor de tensões pelas condições de equilíbrio no contorno, trabalhando-se com forças de superfície no sistema local do elemento e determinar o valor incógnito remanescente utilizando-se as deformações específicas, obtidas através da derivação dos deslocamentos nodais conhecidos, na expressão da lei de Hooke.

II.2 - Montagem do Sistema de Equações Algébricas

Discretização das Equações Integrais de Contorno

Trabalhando-se com vetores e matrizes ao invés da notação individual e considerando-se a presença das forças do domínio, a equação integral aplicada a pontos do contorno assume a forma:

$$\begin{aligned}
 C(x) \underline{w}(x) = & \int_S \underline{u}(x, y) \underline{t}(y) ds(y) - \int_S \underline{T}(x, y) \underline{w}(y) ds(y) + \\
 & + \int_{\Omega} \underline{u}(x, z) \underline{b}(z) d\Omega(z).
 \end{aligned} \tag{II.44}$$

Para uma implementação numérica computacional considera-se o contorno dividido em n segmentos, onde as funções \underline{w} e \underline{t} são aproximadas utilizando-se funções de interpolação adequadas \underline{N} , relacionadas aos parâmetros dos nós funcionais de cada elemento. Assim, para pontos y pertencentes a um elemento I_c , tem-se:

$$\underline{w}(y) = \underline{N}^w(y) \underline{w}(y_f^{I_c}) \quad (II.45)$$

e

$$\underline{t}(y) = \underline{N}^t(y) \underline{t}(y_f^{I_c}), \quad (II.46)$$

sendo:

$$y_f^{I_c} = \text{nós funcionais do elemento } I_c.$$

Para consideração das forças no domínio $\underline{b}(z)$, pode-se expressar o valor de \underline{b} como função dos valores nodais que definem células internas, através de funções de interpolação \underline{M} , do tipo das utilizadas em elementos finitos, resultando para pontos z pertencentes à célula ℓ :

$$\underline{b}(z) = \underline{M}(z) \underline{b}(z^\ell) \quad (II.47)$$

sendo: $z^\ell = \text{nós funcionais da célula } \ell$.

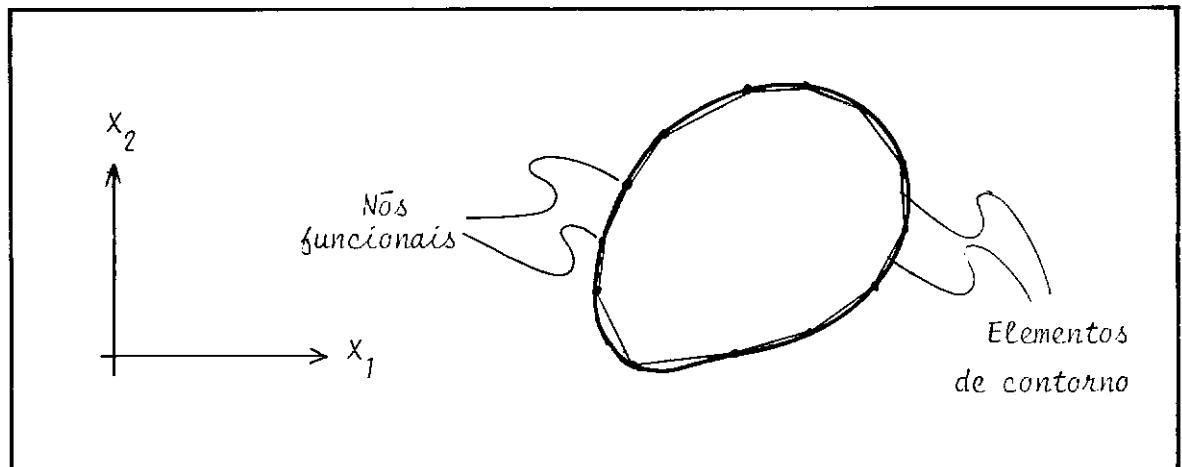


FIGURA II.5 - Discretização do Contorno de um Corpo Bidimensional em n Segmentos (Lineares).

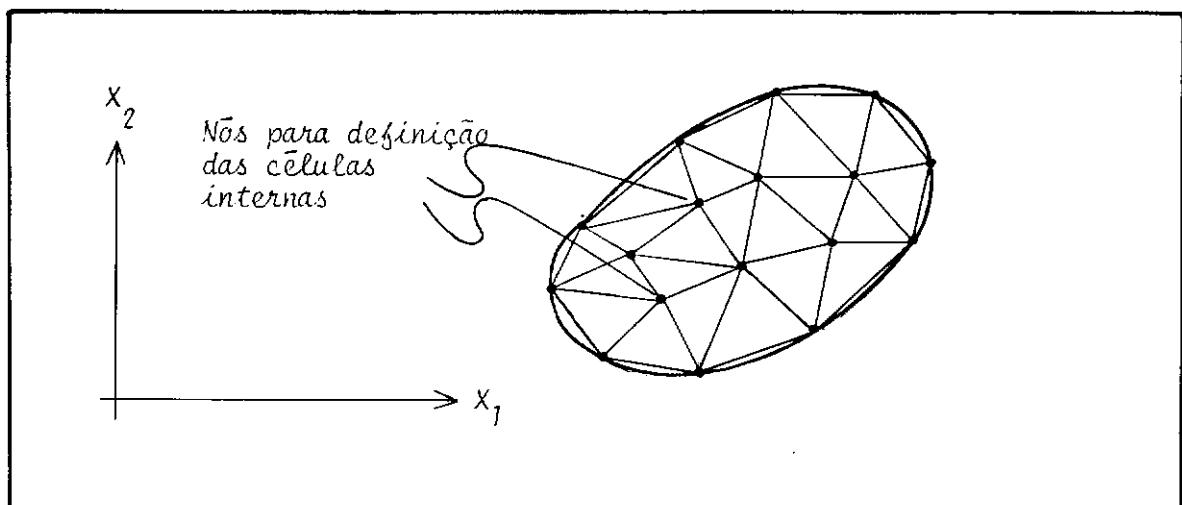


FIGURA II.6 - Corpo Bidimensional Dividido em m Células Internas Utilizadas para Definição das Forças de Domínio.

Após estas discretizações, lembrando que os nós y_f^{Ic} referem-se a nós funcionais, a equação (II.44) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned}
 \underline{c}(x) \underline{w}(x) &\approx \sum_{Ic=1}^n \left\{ \int_{S_{Ic}} \underline{u}(x, y) \underline{N}^t(y) ds(y) \right\} \underline{x}(y_f^{Ic}) + \\
 &- \sum_{Ic=1}^n \left\{ \int_{S_{Ic}} \underline{T}(x, y) \underline{N}^w(y) ds(y) \right\} \underline{w}(y_f^{Ic}) + \\
 &+ \sum_{\ell=1}^m \left\{ \int_{\Omega_\ell} \underline{u}(x, z) \underline{M}(z) d\Omega(z) \right\} \underline{b}(z^\ell). \tag{II.48}
 \end{aligned}$$

Além disso, as coordenadas de um ponto arbitrário do elemento Ic são definidas em termos das coordenadas dos nós geométricos, que simplesmente definem a geometria do elemento, por funções de interpolação que utilizam-se da coordenada intrínseca ao elemento, na forma:

$$\underline{x}(y) = \underline{N}^g(\xi) \underline{x}(y_g^{Ic}), \tag{II.49}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
 y_g^{Ic} &= \text{nós geométricos do elemento } Ic; \\
 \xi &= \text{coordenada intrínseca do elemento.}
 \end{aligned}$$

Assim, as equações acima fornecem a base necessária para que seja montado o sistema de equações algébricas, que interrelacionam o deslocamento do ponto x do contorno, onde é gerada a equação, com os deslocamentos e forças de superfície de todos

os nós funcionais do contorno, incluindo o efeito das forças de domínio.

Formação do Sistema de Equações Algébricas

Considerando-se o caso geral da existência de N nós funcionais por elemento e chamando y_k^{Ic} o k -ésimo nó funcional do elemento Ic , sendo então $w(y_k^{Ic})$ e $t(y_k^{Ic})$ os deslocamentos e forças de superfície deste nó e que além disso, as forças no domínio são convenientemente definidas sobre as células internas através de coordenadas triangulares intrínsecas (ξ_T), pode-se reescrever a equação (II.48) na forma indicial como:

$$\begin{aligned}
 c_{ij}(x) w_j(x) &\approx \sum_{Ic=1}^n \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{S(\xi)}^{Ic} u_{ij}(x, y(\xi)) N_k^t(\xi) J_\xi(Ic) d\xi \right\} t_j(y_k^{Ic}) + \\
 &- \sum_{Ic=1}^n \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{S(\xi)}^{Ic} T_{ij}(x, y(\xi)) N_k^w(\xi) J_\xi(Ic) d\xi \right\} w_j(y_k^{Ic}) + \\
 &+ \sum_{\ell=1}^m \left\{ \int_{\Omega_\ell(\xi_T)} u_{ij}(x, z^\ell(\xi_T)) M(\xi_T) J_{\xi_T}(\ell) d\xi_T \right\} b_j(z^\ell),
 \end{aligned} \tag{II.50}$$

sendo: $J_\xi(Ic)$ e $J_{\xi_T}(\ell)$ os Jacobianos $\frac{d S_{Ic}}{d\xi}$ e $\frac{d \Omega_\ell}{d\xi_T}$, da mudança de coordenadas.

Chamando-se NT o número total de nós funcionais e aplicando-se a equação acima sobre cada um destes nós, o seguinte sistema de equações algébricas é obtido:

$$\sum_{x=x_1}^{x_{NT}} \left[\text{equação (II.50)} \right] \quad i, j = 1, 2, \dots, \tag{II.51}$$

que é um sistema composto de $2 \cdot NT$ equações, relacionando

2. NT valores nodais de w e 2. NT valores nodais de t . Assim, uma vez que os 2. NT parâmetros nodais conhecidos de w e t tenham sido substituídos, os outros 2. NT parâmetros incôgnitos podem ser determinados pela resolução deste sistema.

Na equação (II.51) os termos $\int_{S(\xi)}^{Ic} u_{ij}(x, y|\xi)) N_k^w(\xi) J_\xi(Ic) d\xi$ e $\int_{S(\xi)}^{Ic} T_{ij}(x, y|\xi)) N_k^t(\xi) J_\xi(Ic) d\xi$ relacionam os deslocamentos do nó

$x(x = x_I, x_{NT})$ com os deslocamentos e forças de superfície do nó y_k^{Ic} de ordem J ($J = 1, NT$). Fazendo $i, j = 1, 2$, caso bidimensional, obtém-se destas integrais matrizes (2×2) , que são denominadas, respectivamente, de \underline{H}^{IJ} e \underline{G}^{IJ} . A integral sobre o domínio é um vetor (2×1) , denominado $\underline{b}_i(x)$.

Aplicando-se a equação sobre o nó funcional x de ordem $I (I=1, NT)$, obtém-se:

$$C_{ij}(x_I) w_j(x_I) + \sum_{J=1}^{NT} H_{ij} w_j(y_J) = \sum_{J=1}^{NT} G_{ij} t_j(y_J) + b_i(x_I). \quad (\text{II.52})$$

Nota-se que esta equação relaciona os valores de w no nó x_I com os valores de w e t de todos os nós funcionais do contorno, inclusive o próprio x_I . Assim, pode-se reescrever (II.52) na forma matricial como:

$$\underline{C}(x_I) \underline{w}(x_I) + \sum_{J=1}^{NT} \underline{H}^{IJ} \underline{w}(y_J) = \sum_{J=1}^{NT} \underline{G}^{IJ} \underline{t}(y_J) + \underline{b}(x_I) . \quad (\text{II.53})$$

Considerando-se que:

$$\begin{aligned} \underline{H}^{IJ} &= \underline{\hat{H}}^{IJ} && \text{para } I \neq J \\ \text{e} \quad \underline{H}^{IJ} &= \underline{\hat{H}}^{IJ} + \underline{C}(x_I) && \text{para } I = J , \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

tem-se:

$$\sum_{J=1}^{NT} \underline{H}^{IJ} \underline{w}(y_J) = \sum_{J=1}^{NT} \underline{G}^{IJ} \underline{t}(y_J) + \underline{b}(x_I) , \quad (\text{II.55})$$

que é válida para o nó x_1 , sendo o sistema obtido aplicando-se esta equação sobre os NT nós funcionais do contorno, podendo o sistema resultante ser expresso na forma:

$$\underline{H} \underline{w} = \underline{G} \underline{x} + \underline{B} \quad (\text{II.56})$$

sendo:

\underline{w} e \underline{x} = vetores ($2NT \times 1$) de valores nodais conhecidos e incógnitos de deslocamentos e forças de superfície sobre o contorno.

\underline{B} = vetor ($2NT \times 1$) que define a influência das forças no domínio sobre os campos reais incógnitos;

\underline{H} e \underline{G} = matrizes ($2NT \times 2NT$) de coeficientes conhecidos obtidos através da integração do produto das funções fundamentais (U_{ij} e T_{ij}) por função de forma (N^t e N^w).

Para o caso geral de condições de contorno prescritas mistas, tem-se N_1 valores nodais conhecidos de deslocamentos e N_2 valores nodais de forças de superfície prescritas ($N_1 + N_2 = 2.NT$) resultando:

$$\underline{H} \underline{w} - \alpha \underline{G} (1/\alpha) \underline{x} = \underline{B} , \quad (\text{II.57})$$

sendo α um fator escalar utilizado para tornar os coeficientes de \underline{G} da mesma ordem de grandeza dos coeficientes de \underline{H} . Se parando-se os valores conhecidos no lado direito (vetor $\underline{F_I}$), obtém-se:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{C} \underline{y} + \underline{B} = \underline{F_I} , \quad (\text{II.58})$$

sendo:

\underline{A} e \underline{C} = matrizes ($2NT \times 2NT$) de coeficientes mistos conhecidos;

\underline{x} e \underline{y} = vetores ($2NT \times 1$) mistos de w e x incógnitos e conhecidos, respectivamente.

\underline{F}_I = vetor ($2NT \times 1$) dos termos independentes do sistema final.

Deve-se observar que quando x_I se trata de nó extremo, conectando dois elementos adjacentes, os termos H^{IJ} e G^{IJ} referem-se a soma das contribuições das integrações sobre os dois elementos.

Considerações sobre a Implementação Numérica-Computacional do Método

A equação:

$$\begin{aligned}
 C_{ij}(x_I) w_j(x_I) &\approx \sum_{Ic=1}^n \sum_{k=1}^N \left\{ u_{ij}^{Ic}(x, y(\xi)) N_k^t(\xi) J_\xi(Ic) d\xi \right\} t_j(y_k^{Ic}) + \\
 &- \sum_{Ic=1}^n \sum_{k=1}^N \left\{ T_{ij}^{Ic}(x, y(\xi)) N_k^w(\xi) J_\xi(Ic) d\xi \right\} w_j(y_k^{Ic}) + \\
 &+ \sum_{\ell=1}^m \left[\int_{\Omega_\ell(\xi_T)}^{\ell} u_{ij}^{Ic}(x, z(\xi_T)) M(\xi_T) J_{\xi_T}(\ell) d\xi_T \right] b_j(z^\ell),
 \end{aligned} \tag{II.59}$$

é considerada como a equação discretizada de colocação nodal, base para uma determinada implementação numérica.

Para se obter uma formulação consistente, deve-se considerar a possibilidade de ocorrência de descontinuidade para o campo real de forças de superfície t , que pode ocorrer em nós com apenas forças de superfície prescritas e ocorrem sempre nos casos de nós que separam regiões do contorno com forças prescritas de regiões com deslocamentos prescritos (início ou fim de apoio), bem como nos casos em que se tenham apenas deslocamentos prescritos onde ocorra uma descontinuidade da normal à

superfície (pontos angulosos). Assim, os parâmetros que definem o valor do campo de forças de superfície sobre estes nós funcionais são diferentes caso refiram-se à esquerda ou à direita do nó. Um estudo detalhado desta problemática, incluindo uma formulação desenvolvida pelo autor, é apresentada no próximo capítulo.

Para uma implementação numérica-computacional, o modelo mais simples de ser tratado consiste na utilização de elementos constantes, os quais são constituídos de segmentos retilíneos onde as funções w e t são consideradas constantes sobre cada elemento, de valor igual ao do nó funcional que fica situado no ponto médio do elemento. Este modelo é o mais simples de ser implementado, principalmente porque foge do problema da descontinuidade do campo real das forças de superfície, além disso, a matriz $C(x_j)$ é constante para todos os nós, igual a $\delta_{ij}/2$. Entretanto, um grande número de elementos é necessário para produzir precisão razoável, além de fornecer um campo incompatível de deslocamentos descontínuos, ver [10].

Um modelo de melhor rendimento consiste na utilização de elementos lineares, onde as funções w e t são consideradas como variando linearmente sobre os elementos, constituídos por sua vez, de segmentos retos.

Podem ser empregados elementos de ordem superior onde a geometria e as funções w e t são consideradas em termos de funções de interpolação de forma quadrática ou cúbica. A utilização de elementos isoparamétricos apresenta-se mais eficiente uma vez que os nós funcionais são os mesmos que definem a geometria do elemento.

Assim, para definição aproximada dos campos reais de deslocamentos w e forças de superfície t no contorno, bem como da geometria do elemento, as seguintes funções de interpolação, podem ser utilizadas para problemas analisados em estado plano:

a) Variação linear

$$N_1(\xi) = (1 - \xi)/2$$

$$N_2(\xi) = (1 + \xi)/2$$

(II.60)

b) Variação quadrática

$$N_1(\xi) = (1 - \xi)\xi/2$$

$$N_2(\xi) = 1 - \xi^2$$

$$N_3(\xi) = (1 + \xi)\xi/2$$

(II.61)

c) Variação cúbica

$$N_1(\xi) = 9(1 - \xi)(\xi^2 + 1/9)/16$$

$$N_2(\xi) = 27(1/3 - \xi)(1 + \xi^2)/16$$

$$N_3(\xi) = 27(1/3 + \xi)(1 - \xi^2)/16$$

$$N_4(\xi) = 9(1 + \xi)(\xi^2 - 1/9)/16$$

(II.62)

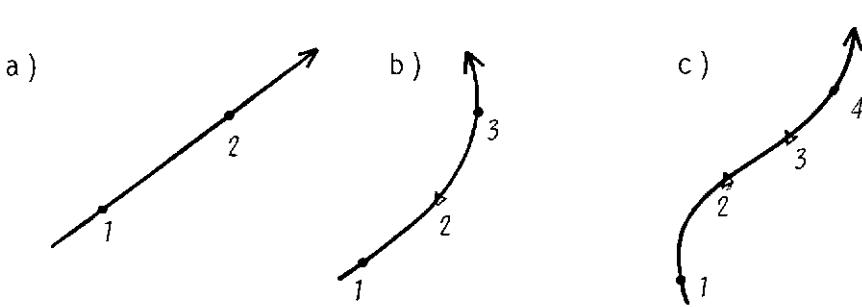


FIGURA II.7 - Elementos de Contornos Definidos Geometricamente por Funções de Forma Lineares, Quadráticas e Cúbicas, Respectivamente.

Considerações sobre a Avaliação das Integrações

Os coeficientes da equação discretizada de colocação nodal são integrais do produto das funções de forma com os tensores dos campos virtuais, efetuadas sobre a superfície do elemento. Estas integrais podem ser avaliadas numericamente providenciando-se uma precaução quando o integrando tende para o infinito.

Para integrais onde $x_I \notin S_{Ic}$, o integrando varia suavemente, podendo ser aproximado por um polinômio, logo podem ser avaliadas utilizando-se a fórmula de Gauss, na forma:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^m A_i^m f(\xi_i^m), \quad (\text{II.63})$$

sendo:

m o número de pontos de integração utilizados, em geral, 4 pontos;

A_i^m são os coeficientes de peso de cada ponto.

Quando $x_I \in S_{Ic}$ as integrações na forma (II.63) mostram-se inadequadas em função da existência de singularidades nas soluções fundamentais quando y tende a x . Para $y_k^{Ic} \neq x_I$, isto é, x_I e y_k^{Ic} pertencem ao mesmo elemento mas são nós funcionais distintos, embora $u_{ij}(x_I, y_k^{Ic})$ tendam para o infinito em x_I , as funções de forma $N_k(\xi)$ tendem para zero, resultando que o produto a ser integrado tende a um limite finito nas vizinhanças de x_I , podendo portanto ser aproximado razoavelmente por um polinômio.

Melhores resultados podem ser obtidos se na determinação dos coeficientes de G^{IJ} e H^{IJ} , para $I \neq J$, utiliza-se um esquema seletivo de integração numérica, que considere a distância relativa entre o ponto fonte e cada elemento na determinação

dos pontos de integração a serem utilizados. Este procedimento pode ser também utilizado para uma melhor avaliação das tensões em pontos internos.

Quando $y_k^{Ic} = x_I$, as funções de forma $N_k(\xi)$ tomam o valor da unidade em x_I , resultando que o produto a ser integrado tende para o infinito nas vizinhanças de x_I . Para avaliação dos coeficientes cujas integrais apresentem a função U_{ij} , pode-se trabalhar com um esquema de integração numérica utilizando-se as fórmulas de Gauss para integrando com singularidades. Por exemplo, para o caso de elasticidade plana, a função $\log r$ pertence ao núcleo do integrando quando $i = j$ e parte do produto dado por $U_{ij}(x, y(\xi)) N_k(\xi)$ pode ser aproximado de forma mais adequada, por um produto de um polinômio e a função $\log r$, podendo ser avaliada de acordo com a fórmula de Gauss para integrando com singularidade logarítmica, ver [3].

Embora a avaliação destas integrais possa ser efetuada da forma descrita, os coeficientes de G_{ij}^{II} podem ser calculados analiticamente de forma fácil para o caso isotrópico e elemento linear, constituindo-se numa melhor solução.

Os coeficientes H_{ij}^{II} dados pela integral de $T_{ij}(x, y(\xi)) N_k(\xi)$ sobre cada lado do elemento ou sobre cada elemento adjacente, para os casos de nós extremos, não existe quando $x_I = y_k^{Ic}$. A integral existe apenas quando avaliada simultaneamente sobre os dois lados do nó, no sentido de valor principal. Embora estes coeficientes, para o caso de elementos lineares, possam ser calculados analiticamente sem grandes dificuldades, ver [Apêndice A], esta avaliação não é necessária, pois estes coeficientes e os coeficientes $C_{ij}(x)$ que contribuem para a mesma sub-matriz situada na diagonal da matriz H , podem ser obtidos considerando-se uma translação de corpo rígido na direção dos eixos coordenados.

Assim, introduzindo-se um campo de deslocamentos de corpo ri-

gido resultam nulas as reações no contorno, obtendo-se para o caso bidimensional:

$$u_j(x) = \bar{u}_j(x) = \text{constante};$$

$$\bar{\tau}_j(x) = \tau_j(x) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (\text{II.64})$$

e o sistema dado em (II.51) pode ser escrito como:

$$\sum_{I=1}^{NT} \left[C_{ij}(x_I) u_j(x_I) + \sum_{Ic=1}^n \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{S(\xi)}^{Ic} T_{ij}(x_I, y(\xi)) N_k^w(\xi) J_\xi(Ic) d\xi \right\} u_j(y_k^{Ic}) \right] = 0 \quad (\text{II.65})$$

podendo ser reescrito na forma:

$$\sum_{I=1}^{NT} \left[C_{ij}(x_I) u_j + \sum_{J=1}^{NT} H_{ij}^{IJ} u_j \right] = 0, \quad (\text{II.66})$$

que fornecem as seguintes equações para o nó I :

$$C_{ij}(x_I) u_j + \sum_{J=1}^{NT} H_{ij}^{IJ} u_j = 0; \quad (\text{II.67})$$

cujo segundo membro pode ser desdoblado, resultando:

$$C_{ij}(x_I) u_j + H_{ij}^{II} u_j + \left(\sum_{J=1}^{I-1} + \sum_{J=I+1}^{NT} \right) H_{ij}^{IJ} u_j = 0, \quad (\text{II.68})$$

obtendo-se, finalmente, as seguintes relações:

$$C_{ij} + H_{ij}^{II} = - \sum_{J=1}^{NT} H_{ij}^{IJ}, \quad J \neq I \text{ e } i, j = 1, 2. \quad (\text{II.69})$$

II.3 - Elemento de Contorno Isoparamétrico Linear

Representação do Elemento

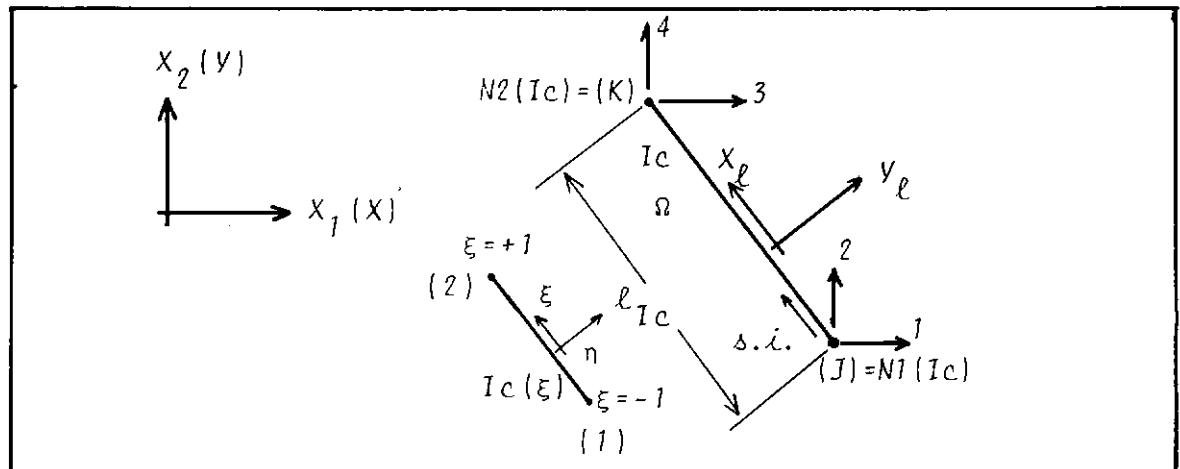


FIGURA II.8 - Representação Geométrica do Elemento Linear Definido Pelos Nós $J = N1(Ic)$ e $K = N2(Ic)$.

Na Figura II.8, tem-se:

x_1, x_2 = sistema global de referência;

x_ℓ, y_ℓ = sistema local;

ξ, η = sistema auxiliar;

l_{Ic} = comprimento do elemento.

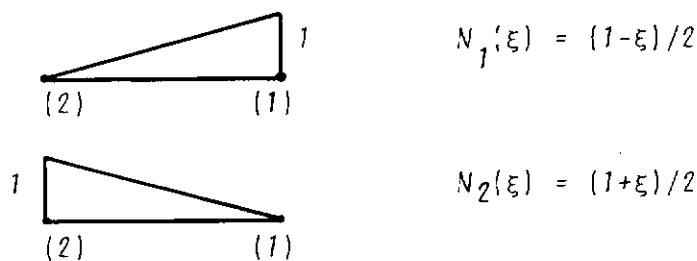


FIGURA II.9 - Interpolação Isoparamétrica Linear para os Campos Reais

Considerando-se as representações acima, pode-se escrever:

$$\underline{y} = \underline{y}^{Ic}(\xi) = \underline{N}(\xi) \begin{Bmatrix} \underline{x}(N1) \\ \underline{x}(N2) \end{Bmatrix} (Ic), \quad (II.70)$$

$$\underline{u} = \underline{u}^{Ic}(y(\xi)) = \underline{N}(\xi) \begin{Bmatrix} \underline{u}(N1) \\ \underline{u}(N2) \end{Bmatrix} (Ic), \text{ e} \quad (II.71)$$

$$\underline{x} = \underline{x}^{Ic}(y(\xi)) = \underline{N}(\xi) \begin{Bmatrix} \underline{x}(N1) \\ \underline{x}(N2) \end{Bmatrix} (Ic), \quad (II.72)$$

sendo:

$$\underline{N}(\xi) = \underline{N}(\xi) = \underline{N}(\xi) = \underline{N}(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} (\xi). \quad (II.73)$$

Montagem e Espalhamento das Sub-matrizes

As equações básicas do método, para problemas de elasticidade plana, não considerando-se a presença de forças no domínio, podem ser escritas como:

$$C_{ij}(x_I) u_j(x_I) \equiv \sum_{Ic=1}^{NE} \left\{ \int_{S(\xi)}^{\underline{Ic}} u_{ij}(x_I, y(\xi)) N_{jk}(\xi) J_\xi(Ic) d\xi \right\} x_k(Ic)$$

$$- \sum_{Ic=1}^{NE} \left\{ \int_{S(\xi)}^{\underline{Ic}} T_{ij}(x_I, y(\xi)) N_{jk}(\xi) J_\xi(Ic) d\xi \right\} u_k(Ic) \quad (II.74)$$

sendo: $i, j = 1, 2;$
 $k = 1, 4;$

I = nó do contorno onde estão sendo geradas as equações ($I = 1, NN$);

NN = número de nós do contorno;

I_c = elemento do contorno onde estão sendo efetuadas as integrações ($I_c = 1, NE$);

NE = número de elementos do contorno;

$J_\xi(I_c) = \ell_{I_c}/2$, é o Jacobiano da mudança de coordenada.

Para I_c fixo, considerando-se as seguintes igualdades:

$$\left\{ \begin{array}{l} GI_c(1,1) = \frac{\ell_{I_c}}{2} \int_{-1}^1 u_{11}(x_I, y(\xi)) N_1(\xi) d\xi \\ \vdots \\ GI_c(2,4) = \frac{\ell_{I_c}}{2} \int_{-1}^1 u_{22}(x_I, y(\xi)) N_2(\xi) d\xi \end{array} \right. \quad (II.75)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} HI_c(1,1) = \frac{\ell_{I_c}}{2} \int_{-1}^1 T_{11}(x_I, y(\xi)) N_1(\xi) d\xi \\ \vdots \\ HI_c(2,4) = \frac{\ell_{I_c}}{2} \int_{-1}^1 T_{22}(x_I, y(\xi)) N_2(\xi) d\xi , \end{array} \right. \quad (II.76)$$

tem-se:

$$C_{ij}(x_I) u_j(x_I) = \sum_{I_c=1}^{NE} GI_{ik} t_k(I_c) - \sum_{I_c=1}^{NE} HI_{ik} u_k(I_c) . \quad (II.77)$$

Agora, considerando-se as forças de superfície contínuas sobre os nós $N1(I_c)$ e $N2(I_c)$, o espalhamento dos coeficientes obtidos nas integrações sobre o elemento I_c é feito sob a forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} G(2*I-1, 2*I-1) = G(2*I-1, 2*I-1) + G_{I_c}(1,1) \\ \vdots \\ G(2*I, 2*I) = G(2*I, 2*I) + G_{I_c}(2,4) , \text{ e} \end{array} \right. \quad (II.78)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H(2*I-1, 2*I-1) = H(2*I-1, 2*I-1) + H_{Ic}(1,1) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ H(2*I, 2*I) = H(2*I, 2*I) + H_{Ic}(2,4) . \end{array} \right. \quad (\text{II.79})$$

Ao trabalhar-se com uma formulação compatível onde não se admite uma descontinuidade para o campo real de deslocamentos, os coeficientes da matriz H_{Ic} são distribuídos sempre segundo este algoritmo.

Determinação das Expressões para Integração Numérica

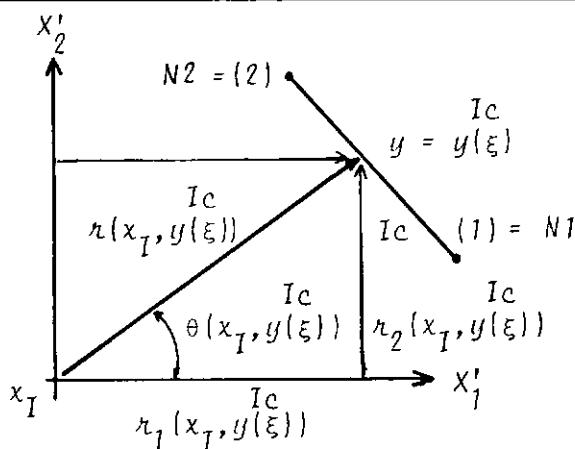


FIGURA II.10 - Definição Geométrica das Funções $r_1(x_I, y_Ic)$, $r_2(x_I, y_Ic)$ e $r_3(x_I, y_Ic)$.

Considerando-se as interpolações lineares para a geometria do elemento, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1(x_I, y_Ic) = N_1(\xi) X_1(N1) + N_2(\xi) X_1(N2) - X_1(I) \\ r_2(x_I, y_Ic) = N_1(\xi) X_2(N1) + N_2(\xi) X_2(N2) - X_2(I) , \end{array} \right. \quad (\text{II.80})$$

$$r(x_I, y_Ic) = (r_1(x_I, y_Ic)^2 + r_2(x_I, y_Ic)^2)^{1/2} , \quad (\text{II.81})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1(x_I, y(\xi)) = \frac{r_I(x_I, y(\xi))}{r(x_I, y(\xi))} = \cos\theta(x_I, y(\xi)) \\ n_2(x_I, y(\xi)) = \frac{r_2(x_I, y(\xi))}{r(x_I, y(\xi))} = \sin\theta(x_I, y(\xi)) \end{array} \right. . \quad (\text{II.82})$$

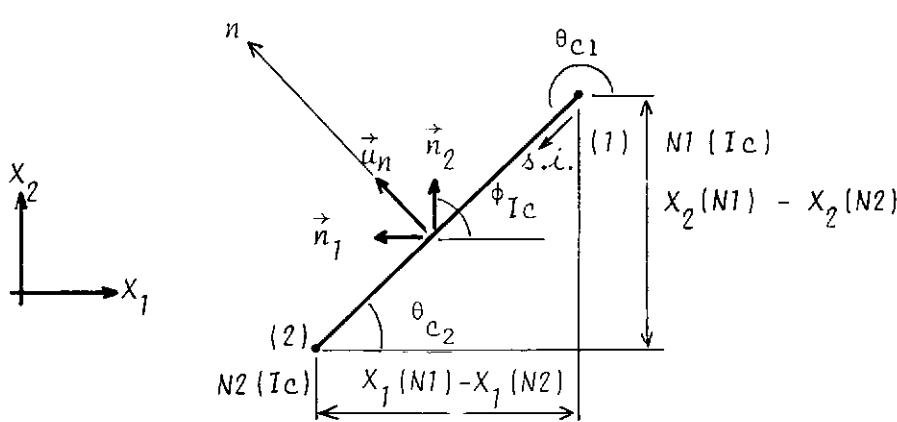


FIGURA II.11 - Determinação das Funções n_1 e n_2 .

Da Figura II.11, tem-se:

$$\begin{aligned} \theta_c &= \theta_{c2} & \rightarrow \begin{cases} \sin\theta_c = [(x_2(N1) - x_2(N2))/\ell] (Ic) \\ \cos\theta_c = [(x_1(N1) - x_1(N2))/\ell] (Ic) \end{cases} \\ \theta_{c1} &= \theta_{c2} + \pi \end{aligned} \quad (\text{II.83})$$

$$\phi_{Ic} = \theta_c + \pi/2 = \theta_{c1} - \pi/2, \quad (\text{II.84})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 = \cos\phi_{Ic} = \cos(\theta_c + \pi/2) = -\sin\theta_c \\ n_2 = \sin\phi_{Ic} = \sin(\theta_c + \pi/2) = \cos\theta_c \end{array} \right. \quad (\text{II.85})$$

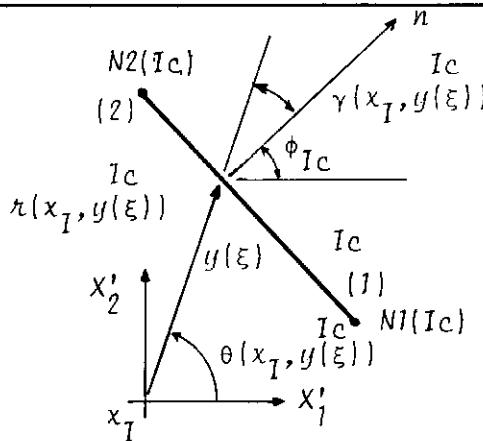


FIGURA II.12 - Determinação de $\frac{\partial r(x_I, y(\xi))}{\partial n}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(x_I, y(\xi))}{\partial n} &= \frac{\partial r}{\partial x_I^y} \frac{\partial x_I}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_2^y} \frac{\partial x_2}{\partial n} \\ &= r_{,1} n_1 + r_{,2} n_2 . \end{aligned} \quad (\text{II.86})$$

Na realidade, conforme a Figura II.12, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(x_I, y(\xi))}{\partial n} &= \cos \gamma(x_I, y(\xi)) = \cos(\theta(x_I, y(\xi)) - \phi_{Ic}) \\ &= \cos \theta(x_I, y(\xi)) \cdot \cos \phi_{Ic} + \sin \theta(x_I, y(\xi)) \sin \phi_{Ic} \\ &= r_{,1} n_1 + r_{,2} n_2 . \end{aligned} \quad (\text{II.87})$$

Tensões em Pontos Internos

As equações para determinação das tensões em pontos do domínio, considerando-se a simetria do tensor, podem ser escritas na forma matricial discretizada como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{array} \right\} (x_I) =$$

$$= \sum_{Ic=1}^{NE} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} D(1,1,1) & D(1,1,2) \\ D(1,2,1) & D(1,2,2) \\ D(2,2,1) & D(2,2,2) \end{array} \right] (x_I, y(\xi)) \\ S(\xi) \end{array} \right\}_{Ic} \left[\begin{array}{cccc} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{array} \right] (\xi) J_\xi (I_c) d\xi \left\{ \begin{array}{l} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{array} \right\} (I_c) +$$

$$- \sum_{Ic=1}^{NE} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} E(1,1,1) & E(1,1,2) \\ E(1,2,1) & E(1,2,2) \\ E(2,2,1) & E(2,2,2) \end{array} \right] (x_I, y(\xi)) \\ S(\xi) \end{array} \right\}_{Ic} \left[\begin{array}{cccc} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{array} \right] (\xi) J_\xi (I_c) d\xi \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \right\} (I_c). \quad (II.88)$$

Considerando-se as seguintes igualdades:

$$\left\{ \begin{array}{l} DT(1,1) = \frac{\ell_{Ic}}{2} \left[\begin{array}{l} D(1,1,1) (x_I, y(\xi)) N_1(\xi) d\xi \\ S(\xi) \end{array} \right]_{Ic} \\ \vdots \\ DT(3,4) = \frac{\ell_{Ic}}{2} \left[\begin{array}{l} D(2,2,2) (x_I, y(\xi)) N_2(\xi) d\xi \\ S(\xi) \end{array} \right]_{Ic} \end{array} \right. \quad (II.89)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} ET(1,1) = \frac{\ell_{Ic}}{2} \left[\begin{array}{l} E(1,1,1) (x_I, y(\xi)) N_1(\xi) d\xi \\ S(\xi) \end{array} \right]_{Ic} \\ \vdots \\ ET(3,4) = \frac{\ell_{Ic}}{2} \left[\begin{array}{l} E(2,2,2) (x_I, y(\xi)) N_2(\xi) d\xi \\ S(\xi) \end{array} \right]_{Ic} \end{array} \right. \quad (II.90)$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix} (x_I) &= \sum_{Ic=1}^{NE} \left[\begin{array}{cccc} DT(1,1) & DT(1,2) & DT(1,3) & DT(1,4) \\ DT(2,1) & DT(2,2) & DT(2,3) & DT(2,4) \\ DT(3,1) & DT(3,2) & DT(3,3) & DT(3,4) \end{array} \right] (x_I, Ic) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}_{\{Ic\}} + \\ - \sum_{Ic=1}^{NE} & \left[\begin{array}{cccc} ET(1,1) & ET(1,2) & ET(1,3) & ET(1,4) \\ ET(2,1) & ET(2,2) & ET(2,3) & ET(2,4) \\ ET(3,1) & ET(3,2) & ET(3,3) & ET(3,4) \end{array} \right] (x_I, Ic) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}_{\{Ic\}}. \end{aligned}$$

(II.91)

Tensões em Pontos do Contorno

Seja a Figura (II.13) representativa de um ponto do contorno, cujo estado de tensões necessita ser avaliado.

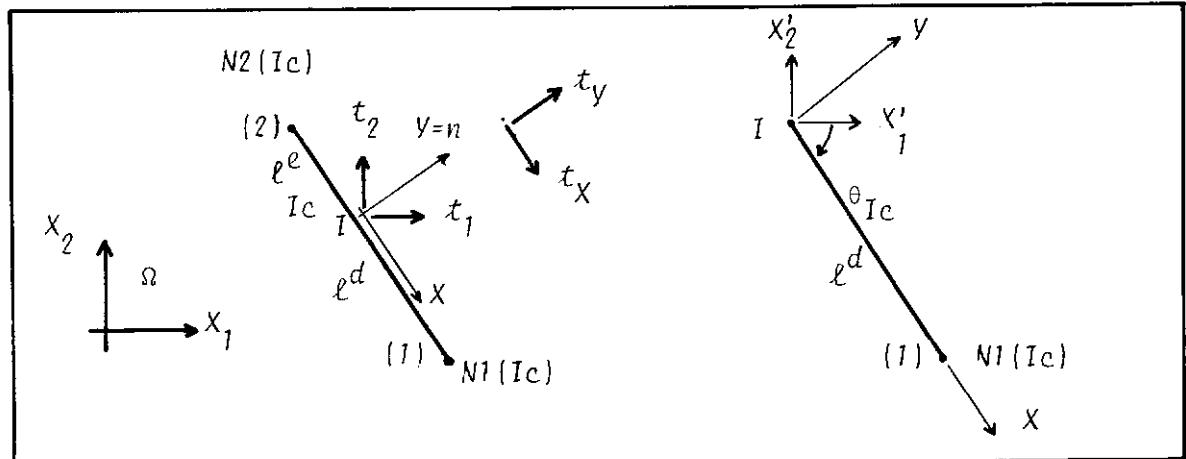


FIGURA II.13 - Representações no Elemento Linear para Determinação do Estado de Tensões Local.

Decompondo-se as forças de superfície sobre o ponto I nas direções locais do elemento Ic tem-se:

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = [Rot.] \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix}, \quad (II.92)$$

sendo:

$$[Rot.] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (II.93)$$

Utilizando-se as equações de equilíbrio no contorno, dados por (I.9), obtém-se:

$$\begin{cases} t_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y \\ t_y = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \end{cases}, \quad (II.94)$$

Como trabalha-se no sistema local do elemento, ver Figura (II.13), tem-se:

$$\begin{cases} n_x = 0 \\ n_y = 1 \end{cases}, \quad (II.95)$$

resultando:

$$\begin{cases} t_x = \sigma_{xy} \\ t_y = \sigma_{yy} \end{cases}, \quad (II.96)$$

O valor de σ_{xx} é obtido utilizando-se a lei de Hooke,

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{1-v} (\nu \sigma_{yy} + 2 G \epsilon_{xx}), \quad (II.97)$$

sendo:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{u_1(N1) - u_1(I)}{\ell^d} \cos\theta + \frac{u_2(N1) - u_2(I)}{\ell^d} \sin\theta. \quad (II.98)$$

CAPÍTULO III - DESENVOLVIMENTOS ADICIONAIS

III.1- Avaliação da Descontinuidade do Campo Real das Forças de Superfícies (TRACTIONS)

Considerações Iniciais

Para uma avaliação consistente do campo real de forças de superfície, deve-se adotar uma formulação que permita a consideração de descontinuidade dos valores nodais que interpolam este campo, que excetuando-se os casos de fratura, podem ocorrer nos seguintes casos:

- a) descontinuidade imposta no campo de forças de superfície conhecido (S_t), devido a prescrições nodais distintas em cada lado do nó;
- b) nós que separam regiões onde os deslocamentos são prescritos (S_w), das regiões onde as forças de superfície são prescritas (S_t);
- c) quando a superfície do contorno, com deslocamentos prescritos (S_w), apresenta uma descontinuidade geométrica da normal (ponto anguloso, com apenas deslocamentos prescritos);

Portanto, para cada nó x_I , e em cada direção coordenada, podem ocorrer três modos básicos de prescrição das condições de contorno, que considerando-se a utilização de elementos isoparamétricos lineares, assumem as seguintes configurações:

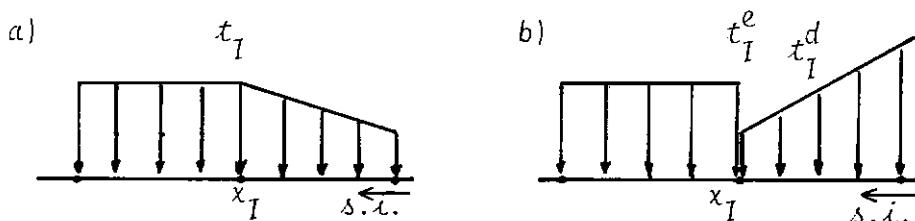


FIGURA III.1 - Nós Funcionais com Apenas Forças de Superfície Prescritas:
 1a) Força de Superfície Contínua,
 1b) Força de Superfície Descontínua.

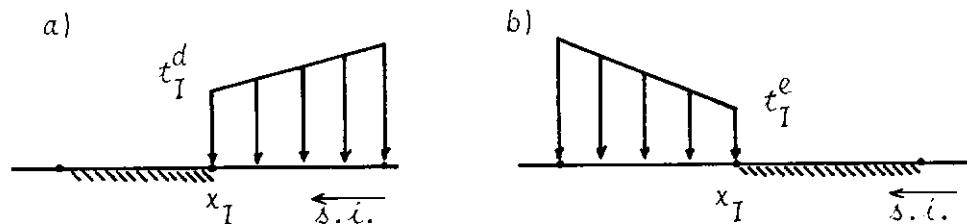


FIGURA III.2 - Deslocamentos e Forças de Superfície são Prescritos.
 2a) Força Incógnita à Esquerda do Nô (Início de Apoio),
 2b) Força Incógnita à Direita do Nô (Final do Apoio).

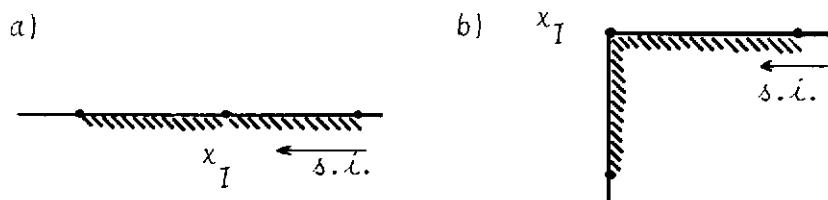


FIGURA III.3 - Apenas Deslocamentos são Prescritos.
 3a) Força de Superfície Contínua (Contorno Suave),
 3b) Força de Superfície Descontínua (Ponto Anguloso).

Assim, para os diferentes tipos de prescrições de contorno considerados, pode-se montar o quadro abaixo que fornece as características dos parâmetros conhecidos e incógnitos para cada caso, para uma dada direção coordenada.

QUADRO III.1 - Relação dos parâmetros conhecidos e incógnitos para os diferentes casos de prescrições de contorno

Caso	1a	1b	2a	2b	3a	3b
Parâmetros conhecidos	\$t\$	\$t^e\$ e \$t^d\$	\$w\$ e \$t^d\$	\$w\$ e \$t^e\$	\$w\$	\$w\$
Parâmetros incógnitos	\$w\$	\$w\$	\$t^e\$	\$t^d\$	\$t\$	\$t^e\$ e \$t^d\$

Analizando-se o quadro acima verifica-se que nos casos 1b, 2a, 2b e 3b, apresentam-se problemas de descontinuidade de forças de superfície, entretanto, apenas para o caso 3b o método apresenta uma formulação inconsistente, uma vez que é obtido apenas uma equação por direção coordenada e, neste caso, tem-se duas incógnitas relativas às forças de superfície.

Condicionamento Tradicional

Para os casos de descontinuidade dados por 1b, 2a e 2b, que podem ser designados como simples, é usualmente utilizada uma formulação de duplos nós quando se trabalha com elementos lineares ou de ordem superior. Este procedimento consiste em se designar dois nós funcionais com o mesmo posicionamento geométrico, sendo as prescrições de cada nó referentes ao do lado adjacente.

Após a montagem das matrizes \underline{G} e \underline{H} são introduzidas as equações de compatibilidade de deslocamentos, igualando-se os deslocamentos de ambos os nós. Isto é feito simplesmente somando-se os coeficientes de \underline{H} que multiplicam os referidos deslocamentos, eliminando-se uma das linhas. Em geral, a numeração de um destes nós é feita após a numeração de todos os nós, sendo eliminada a linha correspondente a este nó. As equações adicionais geradas pelo método são pseudo-equações, pois são idênticas às geradas nos nós adjacentes; assim elas são eliminadas do sistema e, em geral, nem mesmo são geradas.

Esta formulação apresenta a inconveniência da necessidade de serem usadas quatro colunas adicionais para armazenamento dos coeficientes de \underline{G} e \underline{H} , quando é necessário apenas duas, ou mesmo uma, coluna adicional na matriz \underline{G} .

Na realidade, numa formulação mais eficiente, é montada apenas a matriz final do sistema, sendo as sub-matrizes obtidas por integrações nos elementos distribuídas ou operadas logo após sua determinação, caso refiram-se, respectivamente, a pa-

râmetros incógnitos ou conhecidos.

Para o caso de descontinuidade dado por 3b, o qual passa a ser designado como de descontinuidade especial, pode-se utilizar equações complementares fornecidas pela teoria da elasticidade, proposto na referência [12] e utilizado na formulação apresentada no próximo item.

Outras ideias têm sido apresentadas, tal como a de se utilizar dois nós funcionais afastados de uma distância reduzida, sem que haja elemento entre os nós. Uma proposição mais interessante utiliza o procedimento de transportar o nó funcional para o interior do elemento, fugindo da problemática de descontinuidade, entretanto, obtém-se um campo incompatível de deslocamento sobre o nó geométrico com descontinuidade especial $\square \square$.

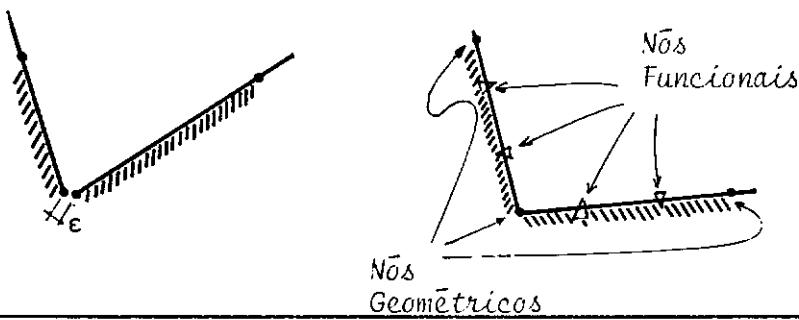


FIGURA III.4 - Procedimento para Consideração da Descontinuidade Especial do Campo de Forças de Superfície.

Formulação Adotada

No programa computacional desenvolvido é adotado uma formulação que consiste em se trabalhar por direção coordenada nodal. Assim, cada tipo de prescrição de contorno é identificado através de um índice código para cada direção coordenada de cada nó funcional.

Estes índices variam de 1 a 6, correspondendo aos diferentes tipos de prescrições conforme a ordem em que foram apresentados.

Para os casos de descontinuidade simples a idéia adotada consiste unicamente defazer-se uma decomposição da matriz \underline{G} , obtendo-se uma submatriz adicional $\underline{G}^{\mathcal{D}S}$, cujos coeficientes relacionam os deslocamentos nodais aos parâmetros de traction conhecidos ou em excesso, dos nós onde ocorram descontinuidade simples.

Assim, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \{w\} = \begin{bmatrix} G & \underline{G}^{\mathcal{D}S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ t^{\mathcal{D}S} \end{Bmatrix} + \{b\} , \quad (\text{III.1})$$

sendo:

$t^{\mathcal{D}S}$ = ao vetor que contém os valores de forças de superfície à esquerda do nó para o caso 1b e os valores conhecidos para os casos 2a e 2b.

A submatriz $\underline{G}^{\mathcal{D}S}$, que relaciona os parâmetros de forças de superfície $t^{\mathcal{D}S}$ (todos conhecidos) dos nós com descontinuidade simples, pode ser operada resultando um vetor de carga adicional, na forma:

$$\begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \{w\} = \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \{t\} + \{b + p\} , \quad (\text{III.2})$$

sendo:

$$\{p\} = \begin{bmatrix} \underline{G}^{\mathcal{D}S} \end{bmatrix} \{t^{\mathcal{D}S}\} . \quad (\text{III.3})$$

Para o caso de nós que apresentam descontinuidade especial dado por 3b, são utilizadas equações adicionais provenientes da consideração das propriedades dos invariantes de tensão e de formaçāo, proposta por [12].

Assim, considerando-se o esquema da figura (III.5), as equações adicionais são as seguintes:

$$n_1^d t_1^e - n_1^e t_1^d = n_2^e t_2^d - n_2^d t_2^e . \quad (\text{III.4})$$

$$\begin{aligned}
 & e \quad t_1^e \operatorname{sen} \alpha + t_1^d \operatorname{sen} \beta - t_2^e \cos \alpha - t_2^d \cos \beta = \\
 & = \frac{2v}{\ell_{Ic}^e} \cos \alpha u_1(N2) + 2v \left(\frac{\cos \alpha}{\ell_{Ic}^e} - \frac{\cos \beta}{\ell_{Ic}^d} \right) u_1(I) + \frac{2v}{\ell_{Ic}^d} \cos \beta u_1(N1) + \\
 & - \frac{2v}{\ell_{Ic}^d} \operatorname{sen} \alpha u_2(N2) + 2v \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\ell_{Ic}^e} - \frac{\operatorname{sen} \beta}{\ell_{Ic}^d} \right) u_2(I) + \frac{2v}{\ell_{Ic}^d} \operatorname{sen} \beta u_2(N1),
 \end{aligned}$$

(III.5)

sendo: v = coeficiente de Poisson;

$N1$ = nó inicial do lado à direita do nó x_I ;

$N2$ = nó final do lado à esquerda do nó x_I ;

α, β = ângulos formados pelos lados adjacentes em relação ao eixo x_1 e

ℓ_{Ic}^e e ℓ_{Ic}^d = comprimento dos lados adjacentes.

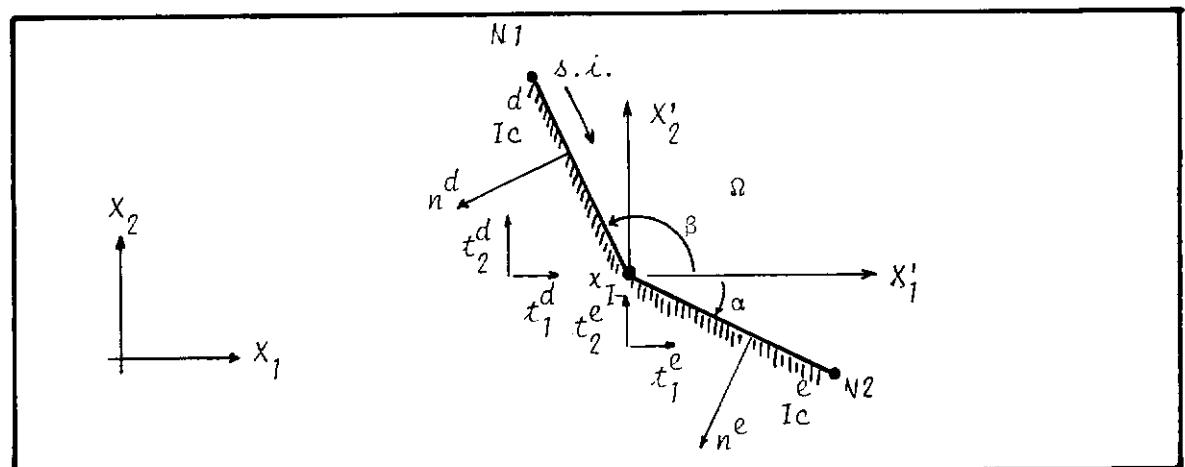


FIGURA III.5 - Definições dos Parâmetros Utilizados nas Equações Adicionais Aplicadas aos Nós com Descontinuidade Especial.

Agora, é necessário reservar colunas especiais para que sejam armazenados os parâmetros G_{ij} quando j designar uma direção coordenada nodal com descontinuidade especial, isto é, para armazenar as integrações sobre o lado à esquerda do nó, referentes aos valores t_1^e e t_2^e . É conveniente para o tratamento computacional que estas colunas sejam armazenadas imediatamente após as $2 \cdot NN$ colunas iniciais, sendo NN o número de nós do contorno, uma vez que estas colunas referem-se a parâmetros incógnitos e permanecem no sistema final a ser resolvido e devem estar situadas antes das colunas da submatriz $\underline{G}^{\partial S}$, relativo aos

parâmetros de tractions dos nós com descontinuidade simples, que é operada utilizando-se o vetor t^{DS} . Assim, é montado o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} \{w\} = \begin{bmatrix} G & G^{DE} & G^{DS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^{DE} \\ t^{DS} \end{Bmatrix} + \{b\} . \quad (\text{III.6})$$

Operando-se o vetor t^{DS} , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} \{w\} = \begin{bmatrix} G & G^{DE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ t^{DE} \end{Bmatrix} + \{P\} , \quad (\text{III.7})$$

sendo: $\{P\} = \begin{bmatrix} G^{DS} \end{bmatrix} \{t^{DS}\} + \{b\} . \quad (\text{III.8})$

Introduzindo-se as equações adicionais, tem-se:

$$\begin{bmatrix} H \\ O(A)^{DE} \end{bmatrix} \{w\} = \begin{bmatrix} G & G^{DE} \\ O(B)^{DE} & B^{DE, DE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ t^{DE} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} . \quad (\text{III.9})$$

Operando-se os valores conhecidos de t e w , resulta:

$$\begin{bmatrix} H(-G) & -G^{DE} \\ O(-B)^{DE} & -B^{DE, DE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(t) \\ t^{DE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} FI + P \\ FI^{DE} \end{Bmatrix} ; \quad (\text{III.10})$$

sendo: $\begin{Bmatrix} FI \\ FI^{DE} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G(-H) & H^{DE} \\ 0 & -A^{DE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t(w) \\ w^{DE} \end{Bmatrix} ; \quad (\text{III.11})$

A , B matrizes cujos coeficientes são obtidos pelas equações adicionais;

FI^{DE} termo independente dos nós com ambas as direções com descontinuidade especial, obtidos pela operação dos valores dos deslocamentos w^{DE} (conhecidos) não nulos, destes nós e dos nós adjacentes.

III.2- Transformação das Integrais de Domínio em Integrações sobre o Contorno para Forças de Massa Gravitacionais

Introdução

Uma das principais vantagens do Método dos Elementos de Contorno (BEM) consiste no fato de que, na formulação básica, o equilíbrio é efetuado considerando-se apenas as condições ao longo do contorno, reduzindo em uma dimensão a análise do problema. Entretanto, quando existem forças atuando no domínio, há necessidade da discretização de tal região, na forma apresentada no item II.2, tornando inconveniente esta formulação tradicional, exceto se tal formulação trabalha com campos iniciais de tensão ou deformação, caso em que é necessário a discretização do interior do domínio, mesmo para o caso linear.

No presente item são estudadas duas formulações que permitem a transformação das integrais de domínio em integrações sobre o contorno, para forças de massa provocadas por um campo gravitacional fixo.

A equação básica do método é dada por (II.6) e chamando-se as integrais de domínio de $B_i(x)$, tem-se:

$$B_i(x) = \int_{\Omega} u_{ij}(x, z) b_j(z) d\Omega(z), \quad i, j = 1, 2, \quad (\text{III.12})$$

sendo:

b_j = forças de massa provocadas por um campo gravitacional.

Ω = domínio do corpo em estudo.

Transformação por Processo Semi-Analítico

Para o caso mais comum de forças de massa gravitacionais (peso próprio) tem-se $b_j(z)$ constante sobre o domínio Ω constituído de um mesmo material (massa específica constante), sendo possível escrever:

$$B_i(x) = \left\{ \int_{\Omega} u_{ij}(x, z) d\Omega(z) \right\} b_j . \quad (\text{III.13})$$

Trabalhando-se com coordenadas polares ao invés das cartesianas, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{B_i(x)}{b_j} &= \int_{\Omega} u_{ij}(x, z) d\Omega(z) = \int_{\Omega(x_1, x_2)} u_{ij}(x, \zeta_x(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{\Omega(r, \theta)} u_{ij}(x, \zeta_\theta(r, \theta)) r dr d\theta . \quad (\text{III.14}) \end{aligned}$$

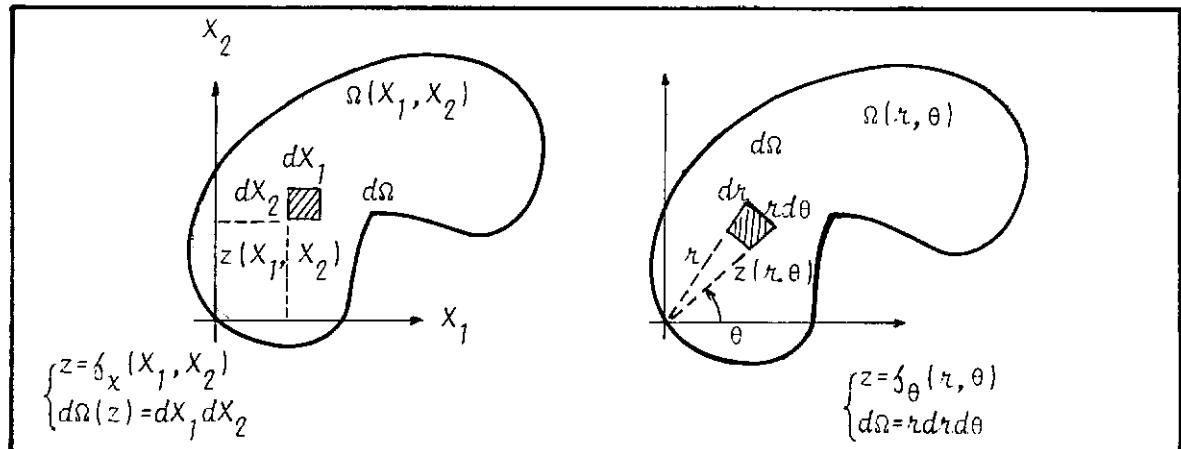


FIGURA III.6 - Elemento Infinitesimal em Coordenadas Cartesianas e em Coordenadas Polares de um Corpo Bidimensional.

Considerando-se o contorno discretizado em elementos, tem-se:

$$\frac{B_i(x)}{b_j} \equiv \sum_{IC=1}^{NE} \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{r_M(\theta)} u_{ij}(x, \xi_\theta(r, \theta)) r dr d\theta \right\}, \quad (\text{III.15})$$

substituindo-se o valor de u_{ij} , dado pela equação (II.28), obtém-se:

$$\frac{B_i(x)}{b_j} \equiv \sum_{IC=1}^{NE} \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{r_M(\theta)} C_1 \{-C_2 \delta_{ij} \ln r + r_i r_j\} r dr d\theta \right\}. \quad (\text{III.16})$$

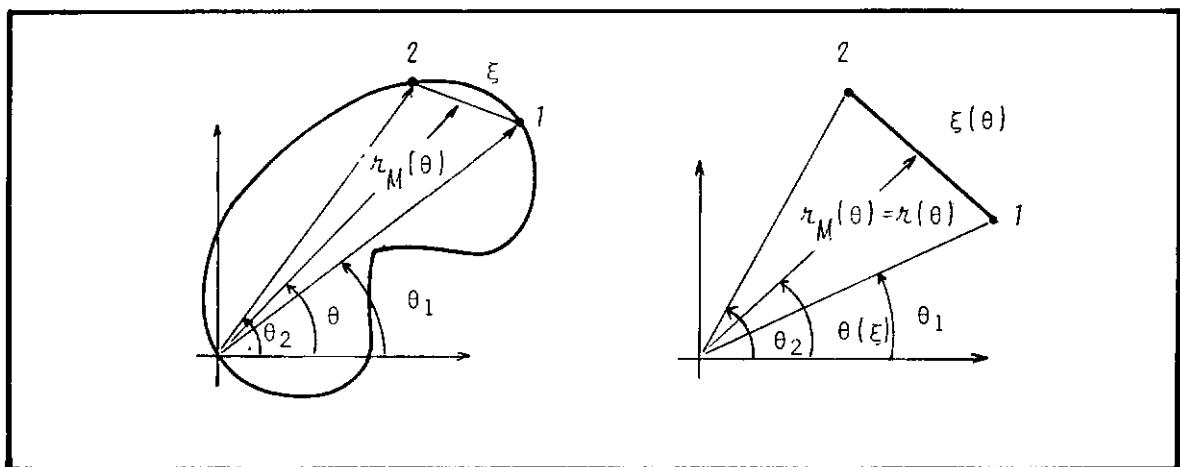


FIGURA III.7 - Definições Geométricas para Integração Analítica ao Longo da Coordenada r e Integração Numérica ao Longo da Coordenada θ .

Integrando-se analiticamente ao longo da coordenada r , resulta:

$$\frac{B_i(x)}{b_j} \equiv \sum_{IC=1}^{NE} \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} C_1 \frac{r_M^2(\theta)}{2} \{-C_2 \delta_{ij} (\ln r_M(\theta) - 1/2) + r_M(\theta) r_i r_M(\theta) r_j\} d\theta \right\}. \quad (\text{III.17})$$

Para efetuar-se as integrações, situadas agora sobre o contorno, por processo numérico, é conveniente utilizar-se as coordenadas intrínsecas do elemento, fazendo:

$$\xi(\theta) = \frac{2\theta - \theta_1 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \theta_1 & \rightarrow \xi = -1 \\ \theta = \theta_2 & \rightarrow \xi = 1 \\ \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} & \rightarrow \xi = 0 \end{cases}, \quad (\text{III.18})$$

$$\theta(\xi) = \frac{1}{2} [\xi \theta_0 (\theta_2 - \theta_1) + \theta_1 + \theta_2], \quad (\text{III.19})$$

$$\text{e } \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1) \quad (\text{III.20})$$

Substituindo-se (III.20) em (III.17) e considerando-se a figura (III.7), obtém-se:

$$\frac{B_i(x)}{b_j} \equiv \sum_{Ic=1}^{NE} \left\{ \int_{-1}^1 c_1 \frac{r^2(\xi)}{2} \left\{ -c_2 \delta_{ij} (\ln r(\xi)) - \frac{1}{2} \right\} + \right. \\ \left. + r(\xi),_i r(\xi),_j \right\} \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1) d\xi \quad (\text{III.21})$$

$$= \sum_{Ic=1}^{NE} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{r^2(\xi)}{2} \left[c_1 \left\{ -c_2 \delta_{ij} \ln (r(\xi)) + r(\xi),_i r(\xi),_j \right\} + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta_{ij} \frac{c_1 c_2}{2} \right] \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1) d\xi \right\}. \quad (\text{III.22})$$

$$= \sum_{Ic=1}^{NE} \left\{ J_\xi(\theta) \int_{-1}^1 uB_{ij}(x, y(\xi)) d\xi \right\} \quad (\text{III.23})$$

sendo:

$$J_\xi(\theta) = \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1) \quad (\text{III.24})$$

$$uB_{ij}(x, y(\xi)) = \frac{r^2(\xi)}{2} \left[u_{ij}(x, y(\xi)) + \delta_{ij} \frac{c_1 c_2}{2} \right] \quad (\text{III.25})$$

e

Fazendo-se $j = 1, 2$, resulta finalmente:

$$B_i(x) \approx \sum_{Ic=1}^{NE} \left\{ J_\xi(\theta) \int_{-1}^1 \frac{r^2(\xi)}{2} \left[u_{i1} b_1 + u_{i2} b_2 + \frac{c_1 c_2}{2} b_i \right] d\xi \right\} \quad (\text{III.26})$$

As deformações em pontos internos devido a atuação de forças de massa gravitacionais constantes (ver Apêndice A), são dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &\approx \sum_{Ic=1}^{NE} \left\{ J_\xi(\theta) \int_{-1}^1 \frac{c_1}{2} \left\{ (c_2 - 1)(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 2\delta_{ij} r_{,k} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} r d\xi \right\} b_k \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

As tensões valem:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} [v](x) &\approx \sum_{Ic=1}^{NE} \left\{ J_\xi(\theta) \int_{-1}^1 -C_3 \left\{ C_4 (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} r d\xi \right\} b_k \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Transformação Utilizando o Tensor de Galerkin Aplicado ao Teorema de Gauss

Para efetuar-se a transformação das integrais de volume para integrações no contorno nos casos de força de massa devido a um campo gravitacional constante (peso próprio), válido também para forças térmicas devido a um gradiente fixo de temperatura e forças centrífugas, pode ser utilizado o teorema de Gauss, ver [14], que pode ser escrito como:

Se $A_{jkl\dots}$ é um tensor representando um campo qualquer no sistema cartesiano que atua num corpo constituído de um domínio Ω e limitado por um contorno S , tem-se:

$$\int_{\Omega(z)} A_{jkl\dots, i} d\Omega(z) = \int_S A_{jkl\dots, i} n_i(y) dS(y). \quad (\text{III.29})$$

Definindo o tensor $G_{ij}(x, y)$, chamado tensor de Galerkin, de tal modo que o campo de deslocamento fornecido pelo tensor $u_{ij}(x, y)$ seja dado por:

$$u_{ij}(x, y) = G_{ij, kk}(x, y) - \frac{G_{ik, kj}(x, y)}{2(1-v)}. \quad (\text{III.30})$$

Assim, é possível escrever:

$$B_i(x) = \int_{\Omega} \left\{ G_{ij, kk}(x, z) - \frac{G_{ik, kj}(x, z)}{2(1-v)} \right\} b_j(z) d\Omega(z), \quad (\text{III.31})$$

da mesma forma, resulta:

$$B_i(x) = \int_S \left\{ G_{ij, k}(x, y) - \frac{G_{ik, j}(x, y)}{2(1-v)} \right\} n_k(y) b_j(y) dS(y). \quad (\text{III.32})$$

sendo:

$$G_{ij}(x, y) = \frac{(1+v)}{4\pi E} \delta_{ij} r^2 \ln(1/r), \quad (\text{III.33})$$

$$\begin{aligned} G_{ij,k}(x, y) - \frac{G_{ik,j}(x, y)}{2(1-v)} &= \\ = -\frac{(1+v)}{4\pi E} (2 \ln r + 1) (\delta_{ij} r_k - \frac{\delta_{ik}}{2(1-v)} r_j) , \quad e \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

$$\begin{aligned} G_{ij,kk}(x, y) - \frac{G_{ik,kj}(x, y)}{2(1-v)} &= \frac{1}{8\pi G(1-v)} \left[r_i r_j + \delta_{ij} \{- (3-4v) \ln r + \right. \\ \left. - \frac{7-8v}{2} \right] . \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Nota-se que ao utilizar esta formulação deve-se acrescentar o valor dado por $\frac{1}{8\pi G(1-v)} \delta_{ij} \frac{(8v-7)}{2}$, correspondente a um deslocamento de corpo rígido, à solução fundamental do campo de deslocamentos.

As tensões em pontos internos, ver [Apêndice A], são dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x) &= \int_S D_{kij}(x, y) t_k(y) ds(y) - \int_S E_{kij}(x, y) u_k(y) ds(y) \\ &+ \int_S D_{bij}(x, y) ds(y) , \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

sendo:

$$\begin{aligned} D_{bij}(x, y) &= \frac{1}{8\pi} \left[2 r_n \{ r_j b_i + r_i b_j + \right. \\ \left. + \frac{v}{1-v} \delta_{ij} (r_1 b_1 + r_2 b_2) \} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{(1-v)} (r_{11} b_1 + r_{12} b_2) (r_{jj} n_i + r_{ij} n_j) + \\
 & + \frac{(1-2v)}{(1-v)} (2 \ln r + 1) \{ n_j b_i + n_i b_j + \frac{2v}{(1-2v)} \delta_{ij} (n_1 b_1 + n_2 b_2) \} \quad] \\
 \end{aligned}$$

(III.37)

III.3 - Divisão do Domínio em Sub-Regiões

Introdução

O procedimento de utilizar-se o MEC considerando-se o domínio dividido em sub-regiões, tem basicamente as seguintes finalidades:

- a) solucionar problemas constituídos de materiais distintos;
- b) dar um melhor condicionamento a matriz do sistema de equações, de forma a obter-se características de banda, reduzindo-se o trabalho computacional na solução do sistema ;
- c) reduzir o trabalho computacional na determinação dos valores de pontos internos.

Ao utilizar-se a subdivisão para atender a um problema de redução do trabalho computacional, deve-se notar que este procedimento introduz erros na obtenção dos valores de \underline{u} e \underline{t} , devido a necessidade de realizarem-se integrações nas interfaces que separam duas regiões adjacentes, pois os resultados das integrações são, geralmente, apenas aproximados nos contornos externos e interface, onde são utilizadas avaliações numéricas. Por outro lado, trabalhando-se com algoritmos mais adequados, espera-se uma redução significativa no tempo de processamento computacional para solução do sistema de equações e nos cálculos de valores do interior, especialmente nos casos em que uma das dimensões principais seja significativamente maior que as outras. A utilização de interfaces possibilita também a consideração da aplicação de sobrecarga (forças de superfície) no interior do domínio.

Análise da Consistência do Método Aplicado a Nós de Interface

a) Nós Internos

Considerando-se o nó x_I em análise, pertencente a uma interface que separa duas sub-regiões e supondo-se inicialmente, que se trata de um nó sobre interface retilínea, sem sobrecargas, pode-se distinguir, basicamente, oito parâmetros incógnitos necessários para avaliar o comportamento do sólido em estudo, utilizando-se de sub-regiões.

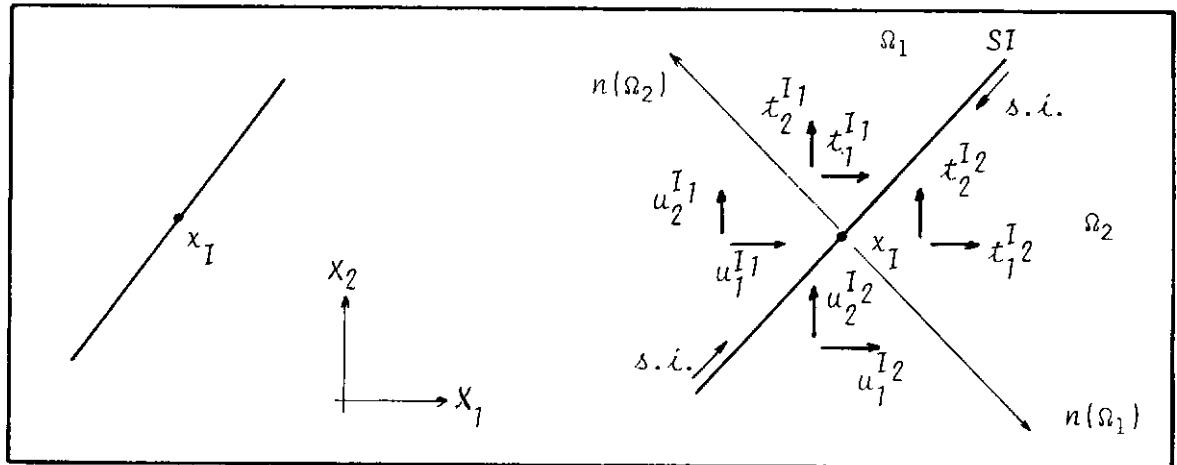


FIGURA III.8 - Definição dos Parâmetros Incôgnitos que Atuam em Nós Internos de Interface.

As condições de compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de forças sobre o nó x_I fornecem, respectivamente, as seguintes equações:

$$\begin{cases} u_I^I_1 = u_I^I_2 \\ u_2^I_1 = u_2^I_2 \end{cases}, \quad (\text{III.38})$$

e

$$\begin{cases} t_I^I_1 = -t_I^I_2 \\ t_2^I_1 = -t_2^I_2 \end{cases}. \quad (\text{III.39})$$

Assim, a aplicação do método sobre este nó apresenta-se consistente, pois obtém-se duas equações em cada sub-região, que relacionam os deslocamentos de x_1 aos deslocamentos e forças de superfície de todo o contorno de cada subregião.

No caso da interface apresentar um ponto anguloso sobre x_1 , são necessários dois parâmetros adicionais de forças de superfícies para cada lado da interface.

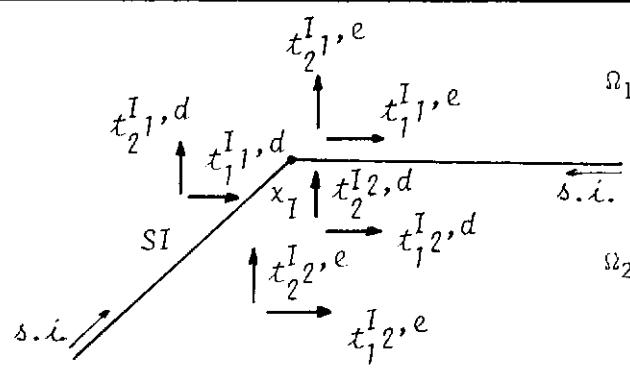


FIGURA III.9 - Parâmetros Incôgnitos para Definição do Campo Real de Forças de Superfície em Nós Internos de Interface sobre Pontos Angulosos.

As condições de equilíbrio fornecem mais duas equações e outras duas equações podem ser obtidas utilizando-se as propriedades de invariantes elásticos.

No caso de haver sobrecargas (forças de superfície) aplicadas à interface, estas podem ser consideradas como parâmetros adicionais relativos a casos de descontinuidade simples.

b) Nós Externos

Para estes nós, que interligam duas regiões pelo contorno externo, considerando-se uma análise individual para cada direção coordenada conforme o item III.1 e utilizando-se as equações de compatibilidade e equilíbrio dos nós de interface, tem-se:

Caso 1 - Apenas forças de superfície são prescritas.

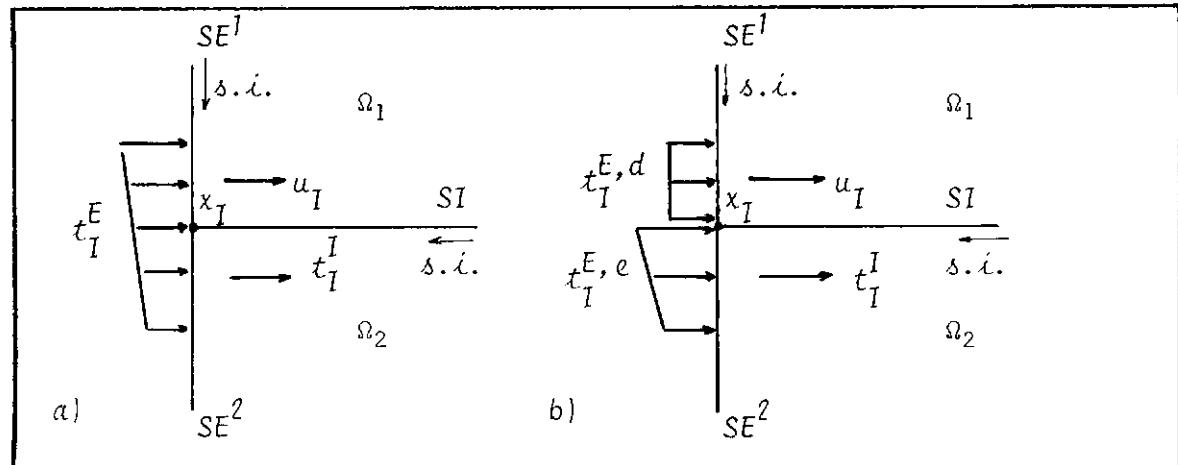


FIGURA III.10 - Definição dos Parâmetros Incôgnitos dos Nós Externos de Interface com Apenas Forças de Superfície Prescritas.

Nestes casos tem-se duas incógnitas de interface, uma de deslocamento e outra de força de superfície.

Caso 2 - Deslocamento e força de superfície são prescritos.

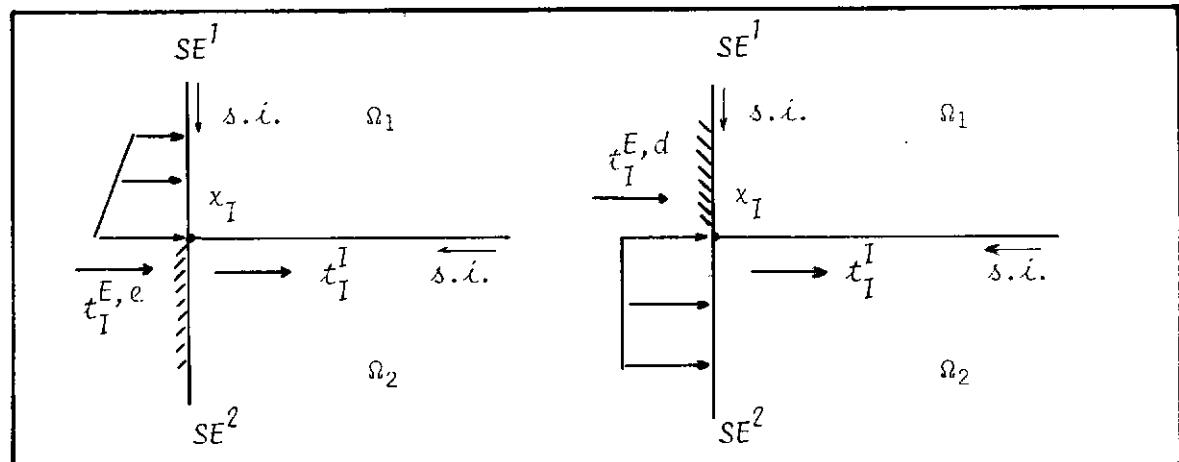


FIGURA III.11 - Nós Externos da Interface com Deslocamento e Força de Superfície Prescritos.

Nestes casos têm-se duas incógnitas de forças de superfície, uma de interface e outra de contorno externo relativo a uma das sub-regiões.

Caso 3 - Apenas deslocamentos são prescritos.

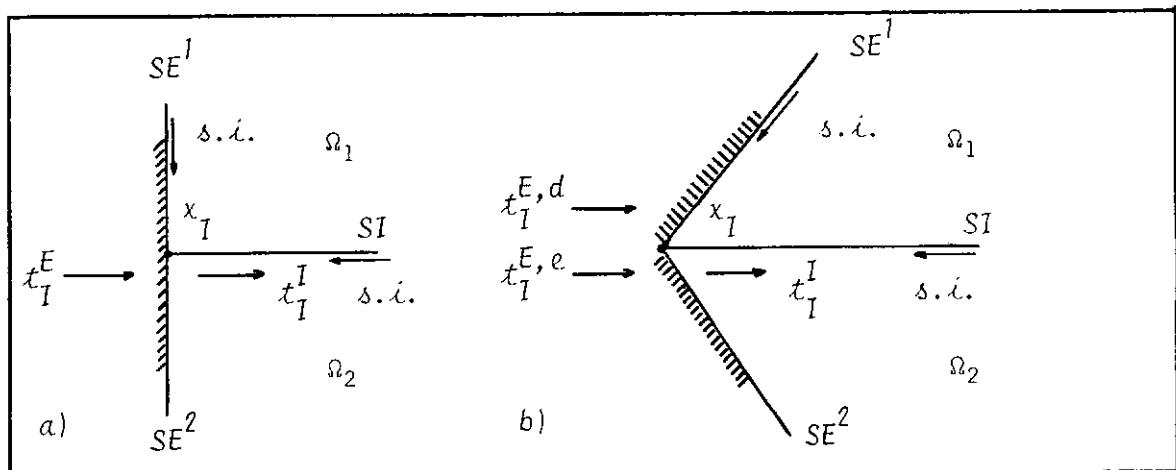


FIGURA III.12 - Nós Externos de Interface com Apenas Deslocamentos Prescritos.

No caso 3a tem-se duas incógnitas de forças de superfície, uma de interface e outra de contorno externo comum as duas sub-regiões.

No caso 3b tem-se três incógnitas de forças de superfície, uma de interface e duas de superfície externa; uma para cada sub-região.

Assim, verifica-se que apenas para o caso 3b a aplicação pura do MEC torna-se inconsistente, sendo necessário equações adicionais para solucionar o problema.

Corpo Dividido Em Duas Sub-Regiões

a) Sem a Presença de Forças de Domínio e Sem a Consideração da Descontinuidade das Forças de Superfície.

Considera-se inicialmente o caso mais simples de ser resolvido, que é de um corpo dividido em duas sub-regiões, como mostrado na figura III.13, onde não são considerados os possíveis modos de descontinuidade das forças de superfície nem o efeito das forças de domínio.

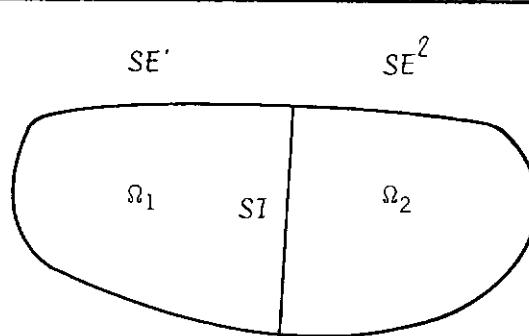


FIGURA III.13 - Corpo Bidimensional Dividido em Duas Regiões.

Aplicando-se o método sobre cada região isoladamente, podendo ser considerada características elásticas próprias na solução fundamental utilizada, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} H^{11} & H^{1I_1} \\ H^{I1} & H^{II_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^{I_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{11} & G^{1I_1} \\ G^{I1} & G^{II_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^1 \\ t^{I_1} \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.40})$$

$$\begin{bmatrix} H^{22} & H^{2I_2} \\ H^{I2} & H^{II_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^2 \\ u^{I_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{22} & G^{2I_2} \\ G^{I2} & G^{II_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^2 \\ t^{I_2} \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.41})$$

sendo os índices 1 e 2 relativos, respectivamente, aos parâmetros dos contornos externos SE_1 e SE_2 ; o índice I_j refere-se aos parâmetros da interface em relação a sub-região Ω_j .

Na interface SI, a satisfação das condições de compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de forças, nos fornece as seguintes relações:

$$\begin{cases} u_i^I = u_i^{I_1} = u_i^{I_2} \\ t_i^I = t_i^{I_1} = -t_i^{I_2} \end{cases} . \quad (\text{III.42})$$

Substituindo-se os valores de (III.42) em (III.40) e (III.41) e reordenando-se, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} G^{11} & G^{1I_1} & -H^{1I_1} \\ G^{II_1} & G^{II_1} & -H^{II_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^I \\ t^I \\ u^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{11} \\ H^{II_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^1 \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.43})$$

$$\begin{bmatrix} -G^{2I_2} & -H^{2I_2} & G^{22} \\ -G^{II_2} & -H^{II_2} & G^{I2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^I \\ u^I \\ t^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{22} \\ H^{I2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u^2 \\ u^2 \end{Bmatrix}. \quad (\text{III.44})$$

Acoplando-se os sistemas (III.43) e (III.44), resulta:

$$\begin{bmatrix} G^{11} & G^{1I_1} & -H^{1I_1} & 0 \\ G^{II_1} & G^{II_1} & -H^{II_1} & 0 \\ 0 & -G^{2I_2} & -H^{2I_2} & G^{22} \\ 0 & -G^{II_2} & -H^{II_2} & G^{I2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^I \\ t^I \\ u^I \\ t^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{11} & 0 \\ H^{II_1} & 0 \\ 0 & H^{22} \\ 0 & H^{I2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix}. \quad (\text{III.45})$$

Deve-se notar que os índices I_1 e I_2 apesar de se referirem agora aos mesmos valores nodais (t^I e u^I) são obtidos com sentido de integração invertido.

O sistema final é obtido operando-se os valores nodais conhecidos e reordenando-se as colunas dos parâmetros nodais incôgnitos do contorno externo ($SE = SE_1 + SE_2$).

b) Considerando-se a presença de forças de domínio e descontinuidade do campo de forças de superfície.

Considerando-se o corpo submetido a um sistema de forças de domínio e forças de superfície, ver [10], tem-se nas interfaces:

$$\begin{cases} u_i^{I_1} + v_i^{I_1} = u_i^{I_2} + v_i^{I_2} = w_i^I \\ t_i^{I_1} + \sigma_{ij} \begin{bmatrix} v^{I_1} \\ n_j^{I_1} \end{bmatrix} = - \left\{ t_i^{I_2} + \sigma_{ij} \begin{bmatrix} v^{I_2} \\ n_j^{I_2} \end{bmatrix} \right\} \end{cases} \quad (\text{III.46})$$

sendo $n_j^{I_k}$ o cosseno diretor da normal à superfície de $\Omega(k)$ e $t_i^{I_k}$ as forças de superfície correspondente a função complementar $u_i^{I_k}$.

Aplicando-se o método sobre a região Ω_1 e utilizando-se as equações adicionais, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} H^{I,1} & H^{I,I} \\ 0 & 0 \\ H^{I,1} & H^{I,I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w^I \\ w^I \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} G^{I,1} & G^{I,IDE} & G^{I,I} & G^{I,IDE} & G^{I,IDS} & G^{I,IDS} \\ G^{I,IDE} & G^{I,IDE} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G^{I,I} & G^{I,IDE} & G^{I,I} & G^{I,IDE} & G^{I,IDS} & G^{I,IDS} \\ 0 & 0 & B^{IDE,I} & B^{IDE,IDE} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^I \\ t^{IDE} \\ t^I \\ t^{IDE} \\ t^{IDS} \\ t^{IDS} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b^{I,1} \\ 0 \\ b^{I,1} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.47})$$

sendo:

- I = índice relativo aos parâmetros de contorno exterior da região Ω_1 ;
- I = índice relativo aos parâmetros de interface;
- DE = índice relativo aos nós com descontinuidade especial;
- DS = índice relativo aos nós com descontinuidade simples;
- $b^{i,1}$ = influência das forças de domínio da sub-região Ω_1 ;
- A, B = coeficientes obtidos pelas equações adicionais.

Operando-se os valores conhecidos e reordenando-se o sistema, tem-se:

$$\begin{bmatrix} H(-G)^{I,1} & -G^{I,1DE} & -G^{I,I} & -G^{I,IDE} & H^{I,I} \\ 0(B)^{1DE,1} & -B^{1DE,1DE} & 0 & 0 & 0 \\ H(-G)^{I,1} & -G^{I,1DE} & -G^{I,I} & -G^{I,IDE} & H^{I,I} \\ 0 & 0 & -B^{1DE,I} & -B^{1DE,IDE} & A^{IDE,I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(t)^1 \\ t^{1DE} \\ t^I \\ t^{IDE} \\ w^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P^{I,b^{I,1}} \\ P^{1DE} \\ P^{I,I+b^{I,1}} \\ 0 \end{Bmatrix}$$
(III.49)

sendo:

$$\begin{Bmatrix} P^I \\ P^{1DE} \\ P^{I,I} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{I,1DS} & G^{I,IDS} & G(-H)^{I,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A^{1DE,1} \\ G^{I,1DS} & G^{I,IDS} & G(-H)^{I,I} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^{1DS} \\ t^{IDS} \\ t^{(w)}^I \\ w^{1DE} \end{Bmatrix}$$
(III.49)

Aplicando-se o método sobre a região Ω_2 , de forma análoga, e utilizando-se as equações (III.46), o sistema final pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix}
 H(-G)^{1,1} & -G^{1,1DE} & -G^{1,I} & -G^{1,IDE} & H^{1,I} & 0 \\
 0(-B)^{1DE,1} & -B^{1DE,1DE} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 H(-G)^{I,1} & -G^{I,1DE} & -G^{I,I} & -G^{I,IDE} & H^{I,I} & t^{1DE} \\
 0 & 0 & -B^{1DE,I} & -A^{1DE,IDE} & B^{1DE,IDE} & t^I \\
 0 & G^{I,I} & G^{I,IDE} & H^{I,I} & H(-G)^{I,2} & -G^{I,2DE} \\
 0 & G^{2,I} & G^{2,IDE} & H^{2,I} & H(-G)^{2,2} & -G^{2,2DE} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0(-B)^{2DE,2} & -B^{2DE,2DE}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u(t)^1 \\
 t^I \\
 t^{1DE} \\
 u^I \\
 u(t)^2 \\
 t^{2DE}
 \end{bmatrix}
 = \begin{bmatrix}
 p^{1,b^1,1} \\
 p^{1DE} \\
 p^{I,1+b^I,1} \\
 0 \\
 p^{I,2+b^I,2} \\
 p^{2,b^2,2}
 \end{bmatrix}$$

Sub-Regiões em Fila

Devido as dificuldades existentes para desenvolver um programa computacional que considere o caso geral de sub-regiões, introduzem-se as seguintes simplificações visando facilitar o tratamento computacional:

- a) consideram-se apenas os casos em que as regiões encontram-se dispostas em forma alinhada, isto é, cada região pode estar conectada com no máximo duas regiões adjacentes, as quais devem estar isoladas entre si, como esquematizado nas figuras abaixo:

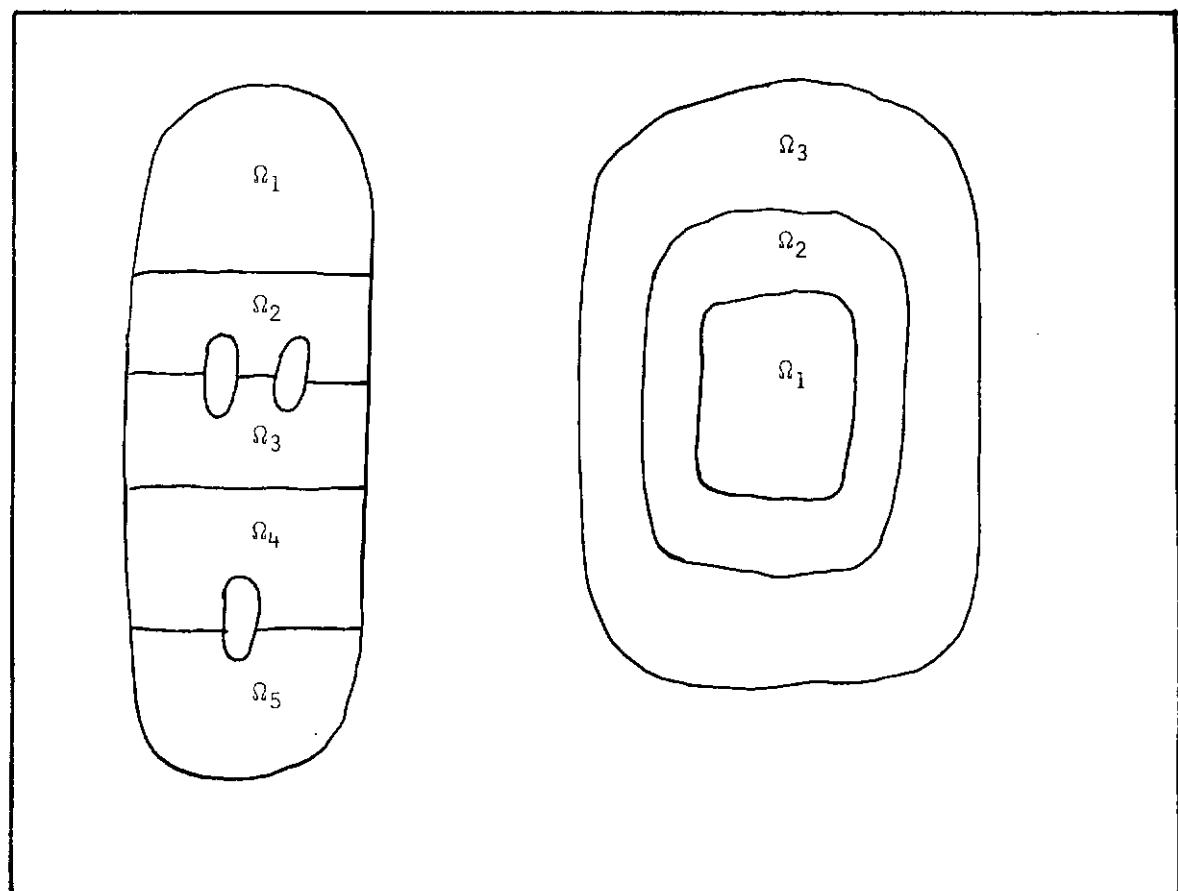


FIGURA III.14 - Corpos Bidimensionais Divididos em Subregiões Alinhadas ou em Fila.

- b) não considera-se a aplicação de sobrecarga às interfaces;
- c) não admite-se a utilização de nós que apresentem descontinuidade especial para iniciar ou findar uma interface pelo contorno externo;

d) admite-se os casos de descontinuidade especial para nós de contorno externo, apenas quando ocorrerem em ambas as direções. Nestes casos, para simplificar os algoritmos de armazenamento computacional, utilizam-se dois nós sobre o ponto. Da mesma forma são utilizados nós duplos em pontos angulosos de interface.

Assim, seja a figura (III.15) representativa de um corpo constituído de subregiões em fila, onde cada sub-região de ordem k é limitado pelo contorno externo SE^k e pelas interfaces $SI^{k-1}(SI^{ka})$ e $SI^k(SI^{kp})$.

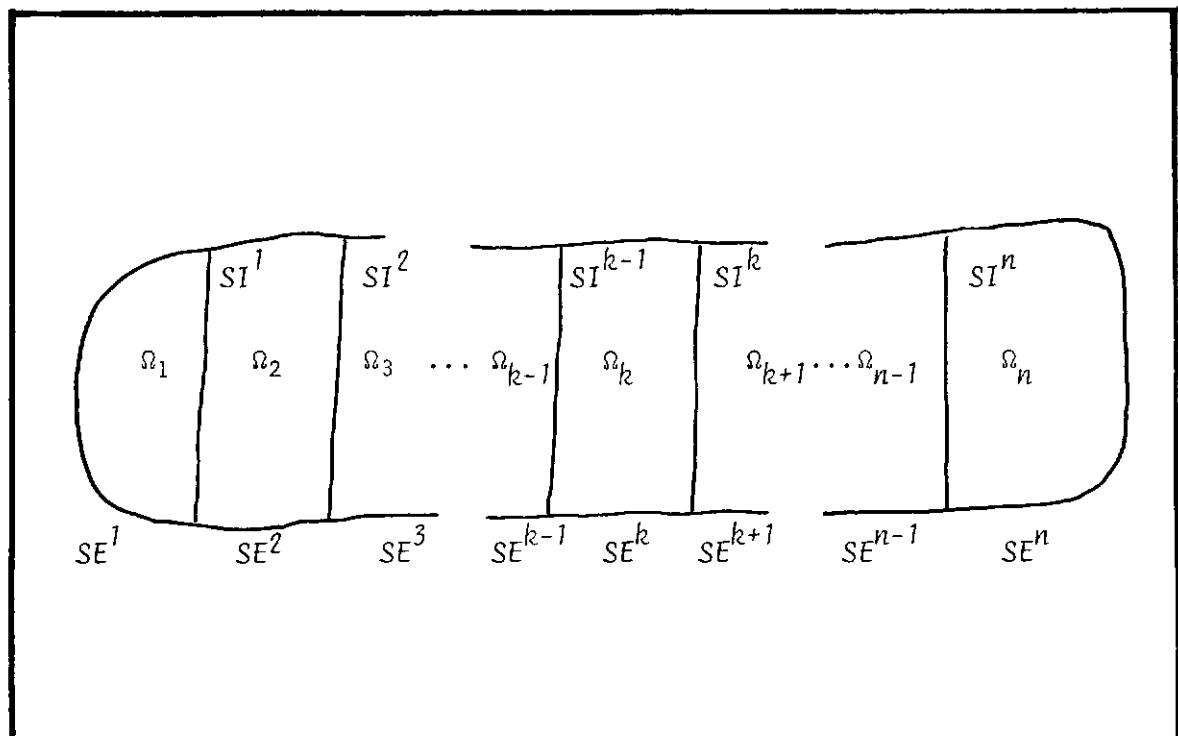


FIGURA III.15 - Corpo Bidimensional Dividido em n Subregiões em Fila.

Aplicando-se a formulação apresentada no item anterior sobre a região Ω_k , obtém-se:

$$\begin{bmatrix}
G^{I^{ka}, I^{ka}} & G^{I^{ka}, I^{ka}DE} & H^{I^{ka}, I^{ka}} & H(-G)^{I^{ka}, K} & -G^{I^{ka}, KDE} & -G^{I^{ka}, I^{kp}} & -G^{I^{ka}, I^{kp}DE} & H^{I^{ka}, I^{kp}} \\
G^{K, I^{ka}} & G^{K, I^{ka}DE} & H^{K, I^{ka}} & H(-G)^{K, K} & -G^{K, KDE} & -G^{K, I^{kp}} & -G^{K, I^{kp}DE} & H^{K, I^{kp}} \\
0 & 0 & 0 & 0(-B)^{KDE, K} & -B^{KDE, KDE} & 0 & 0 & 0 \\
G^{I^{kp}, I^{ka}} & G^{I^{kp}, I^{ka}DE} & H^{I^{kp}, I^{ka}} & H(-G)^{I^{kp}, K} & -G^{I^{kp}, KDE} & -G^{I^{kp}, I^{kp}} & -G^{I^{kp}, I^{kp}DE} & H^{I^{kp}, I^{kp}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B^{I^{kp}DE, I^{kp}} & -B^{I^{kp}DE, I^{kp}DE} & A^{I^{kp}DE, I^{kp}}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^{I^{ka}} \\ t^{I^{ka}DE} \\ w^{I^{ka}} \\ w(t)^K \\ t^{KDE} \\ t^{I^{kp}} \\ t^{I^{kp}DE} \\ w^{I^{kp}} \end{bmatrix}$$

76

$$\begin{bmatrix}
G^{I^{ka}, I^{ka}DS} & G^{I^{ka}, KDS} & G^{I^{ka}, I^{kp}DS} & 0 \\
G^{K, I^{ka}DS} & G^{K, KDS} & G^{K, I^{kp}DS} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -A^{KDE, KDE} \\
G^{I^{kp}, I^{ka}DS} & G^{I^{kp}, KDS} & G^{I^{kp}, I^{kp}DS} & 0
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^{I^{ka}DS} \\ t^{KDS} \\ t^{I^{kp}DS} \\ w^{KDE} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^{I^{ka}, K} \\ b^{K, K} \\ 0 \\ b^{I^{kp}, K} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{III.51})$$

sendo:

- I^{ka} = parâmetros da interface anterior (SI^{k-1}) à região k ;
- I^{kp} = parâmetros da interface posterior (SI^k) à região k ;
- K = parâmetros externos da região k ;
- DS = parâmetros conhecidos de descontinuidade simples de força de superfície;
- DE = parâmetros de descontinuidade especial de força de superfície;
- A, B = coeficientes relativos às equações adicionais;
- $b_{i,k}^{i,k}$ = influência das forças de massa sobre os nós do contorno i ;
- w^{KDE} = valores conhecidos dos deslocamentos sobre os nós onde ocorram descontinuidade especial, e nós adjacentes, do contorno externo da região k .

Os parâmetros de descontinuidade simples de interface são relativos apenas aos nós externos de interface, uma vez que não se considera a aplicação de sobrecargas nas interfaces.

Assim, trabalhando-se cada sub-região na forma indicada, tendo-se a precaução de operar-se inicialmente os nós externos de modo a posicionar de forma adequada os parâmetros incógnitos, obtém-se um sistema de equações cujos coeficientes formam uma matriz em banda com degraus variáveis, para o caso geral de sub-regiões em fila, como esquematizado na figura (III.16).

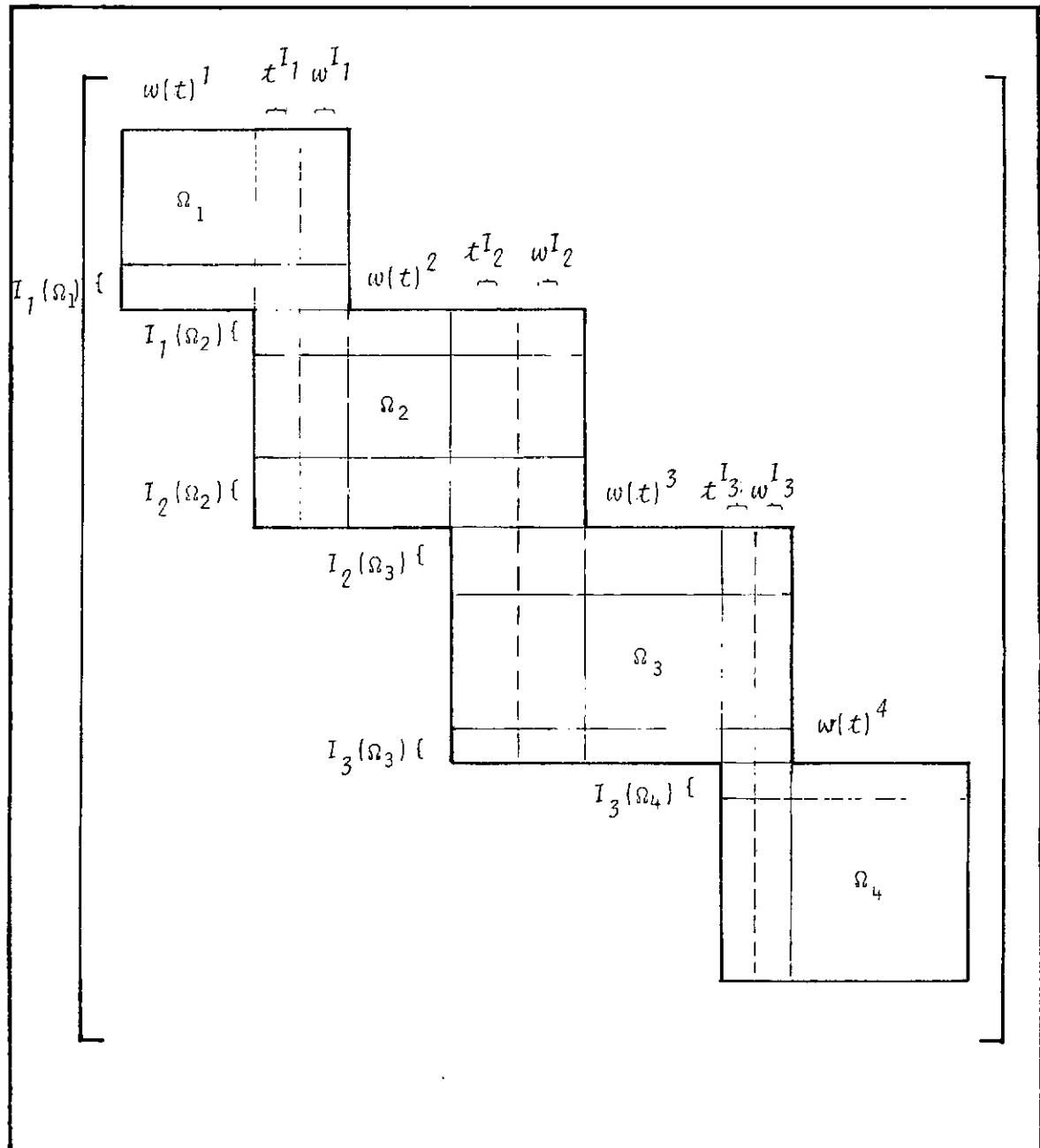


FIGURA III.16 - Matriz Final Básica para Quatro Subregiões em Fila.

CAPÍTULO IV - RESULTADOS E COMPARAÇÕES

Analisam-se, basicamente, três exemplos para obtenção de valores numéricos, a saber: chapa submetida à tração uniforme, barragem de concreto e viga em balanço.

IV-1 - Chapa Submetida à Tração Uniforme

1a - Chapa em Estado Uniaxial de Tensões

Definição do Exemplo

Este exemplo consiste na análise de uma chapa submetida à tensões uniaxiais, como esquematizado na figura (IV.1a). Utilizam-se cinco discretizações pelo MEC (figuras IV.2, IV.3, IV.4, IV.5 e IV.6) onde consideram-se as condições de simetria (figura IV.1b) e obtém-se valores em três pontos internos. Os resultados obtidos são comparados com a solução analítica, que fornece valores exatos.

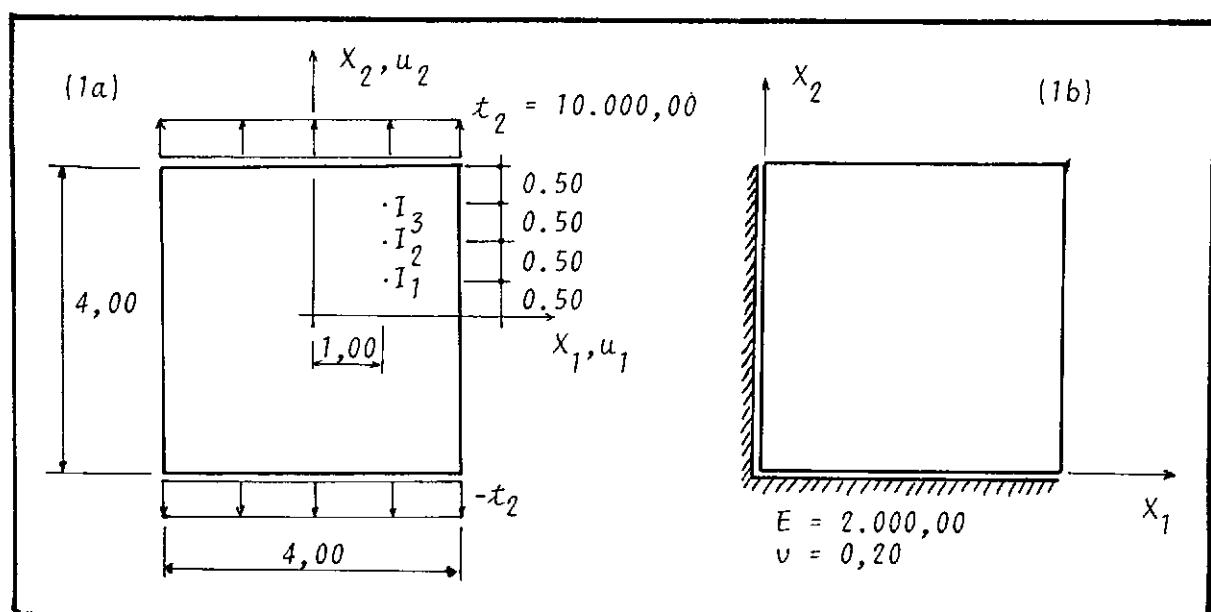


FIGURA IV.1 - Chapa em estado uniaxial de tensões: dados básicos.

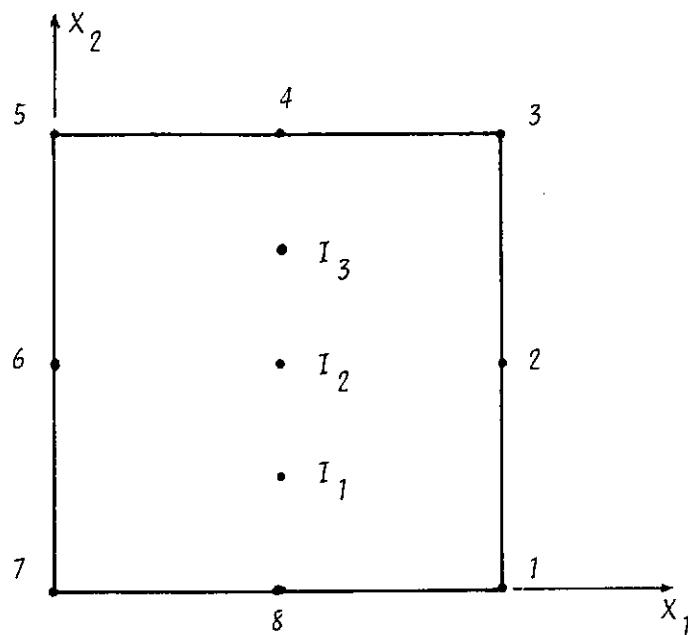


FIGURA IV.2 - Discretização 1: 8 nós de contorno, 3 pontos internos, 16 equações.

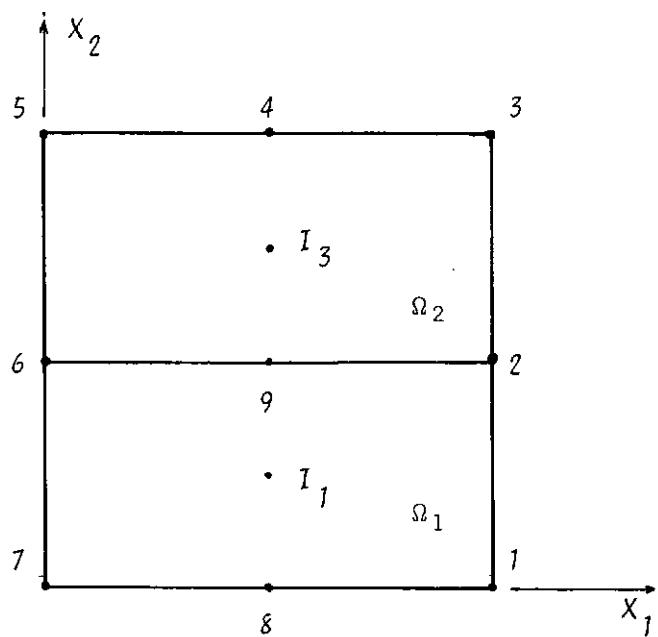


FIGURA IV.3 - Discretização 2: duas regiões, 8 nós de contorno externo, 3 nós de interface (dois externos), 2 pontos internos, 24 equações.

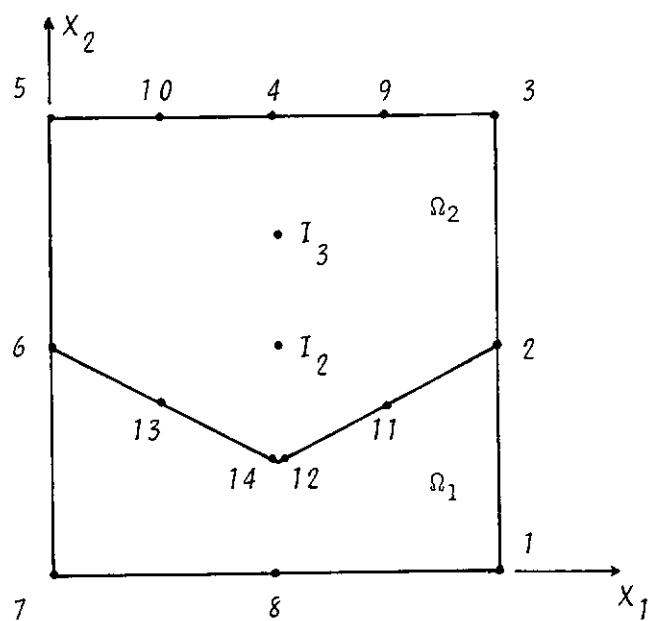


FIGURA IV.4 - Discretização 3: duas regiões, 10 nós de contorno externo, 6 nós de interface (dois nós externos e um ponto com descontinuidade especial), 2 pontos internos, 38 equações

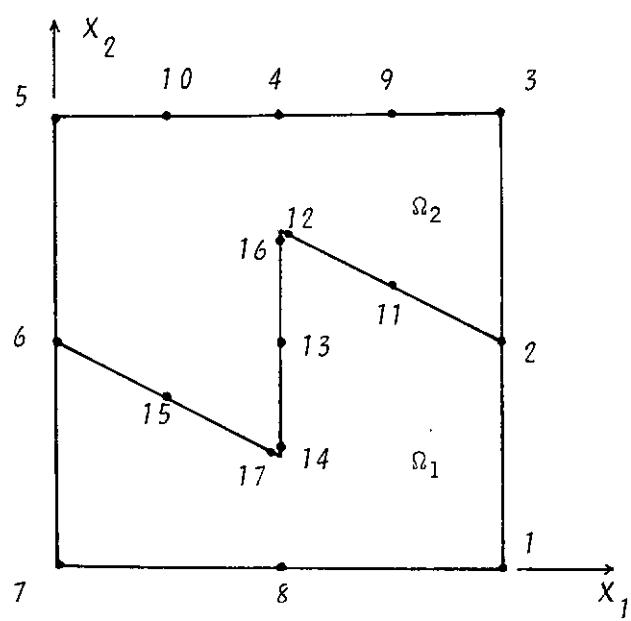


FIGURA IV.5 - Discretização 4: duas regiões, 10 nós de contorno externo, 9 nós de interface (dois nós externos e dois pontos com descontinuidade especial), 48 equações.

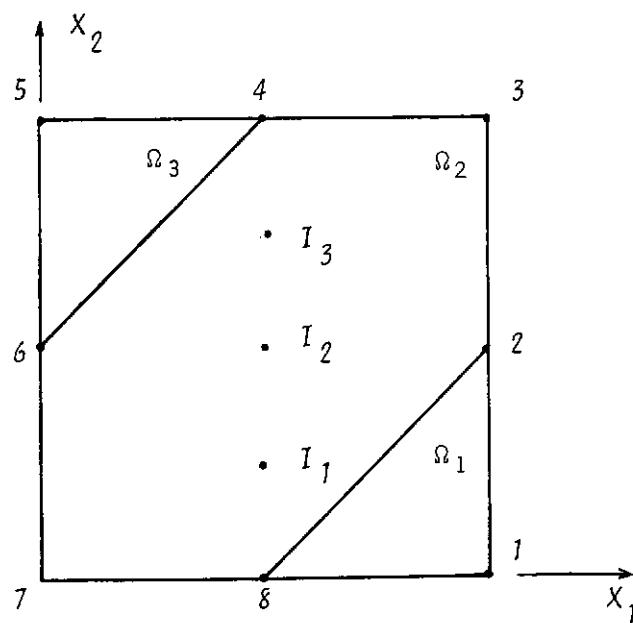


FIGURA IV.6 - Discretização 5: três regiões, 8 nós de contorno externo, duas interfaces com dois nós externos, 3 pontos internos, 24 equações.

Resultados Numéricos

QUADRO IV.1 - Deslocamentos (u_2) na direção x_2

Pontos	Discret.1	Discret.2	Discret.3	Discret.4	Discret.5	Sol. Exata
2	4,99999	4,99994	4,99051	5,00020	4,99047	5,00000
3	9,99994	9,99986	9,99189	10,00032	9,98991	10,00000
4	10,00009	9,99995	9,99201	10,00083	10,01067	10,00000
5	10,00002	9,99989	9,99197	10,00016	10,01250	10,00000
6	5,00003	4,99996	4,99596	5,00010	5,01457	5,00000
I_1	2,50061	2,49702	2,49921	2,50214	2,45367	2,50000
I_2	5,00006	4,99996	4,98393	5,00010	4,99867	5,00000
I_3	7,49363	7,49108	7,49112	7,50027	7,36078	7,50000

(*) Solução utilizando-se 10 pontos de integração coincidente com a solução exata, para todos os pontos e todas as discretizações, excetuando-se os pontos I_1 e I_3 da discretização 5; com 2,49995 e 7,49986, respectivamente.

QUADRO IV.2 - Deslocamentos (u_1) na Direção X_1

Pontos	Discret.1	Discret.2	Discret.3	Discret.4	Discret.5	Sol.Exata
1	-2,00002	-2,00015	-2,01712	-2,00002	-2,00714	-2,00000
2	-2,00011	-2,00014	-2,00244	-1,99997	-2,01076	-2,00000
3	-1,99995	-2,00010	-2,00863	-2,00010	-1,98913	-2,00000
4	-1,00000	-1,00006	-0,99891	-1,00008	-0,98819	-1,00000
8	-1,00004	-1,00007	-1,00612	-1,00004	-1,01466	-1,00000
I_1	-1,00035	-1,00073	-1,00517	-1,00001	-1,00981	-1,00000
I_2	-1,00004	-1,00007	-1,00257	-1,00008	-0,99052	-1,00000
I_3	-1,00033	-1,00072	-1,00046	-1,00014	-1,04250	-1,00000

(*) Solução utilizando-se 10 pontos de integração coincidente com a solução exata, para todos os pontos e todas as discretizações, excetuando-se os pontos I_1 e I_3 da discretização 5, com 1,00073.

QUADRO IV.3 - Tensões (σ_{11}) na direção X_1

Pontos	Discret.1	Discret.2	Discret.3	Discret.4	Discret.5
3-4	0,10	-0,09	4,25	-3,88	-1,88
4-5	0,01	-0,11	4,84	0,22	23,62
5-6	0,00	-0,01	-5,00	0,36	10,48
6-7	-0,01	0,01	4,89	0,03	-12,38
7-8	-0,07	-0,15	-11,33	0,01	-26,51
8-1	0,03	0,14	-23,30	0,09	12,60
I_1	6,68	41,27	---	-5,11	2891,86
I_2	-0,11	-0,14	0,36	-21,97	-165,77
I_3	65,39	41,27	-6,42	-81,98	2891,86

(*) Solução utilizando-se 10 pontos de integração coincidente com a solução exata, igual a 0,00, para todos os pontos e todas as discretizações, excetuando-se os pontos I_1 e I_3 da discretização 5, com 35,49.

QUADRO IV.4 - Tensões (σ_{22}) na direção X_2

Pontos	Discret.1	Discret.2	Discret.3	Discret.4	Discret.5
1-2	9.999,98	9.999,89	9.891,03	10.000,40	9.980,94
2-3	9.999,90	9.999,83	9.992,39	9.999,04	9.998,87
5-6	9.999,98	9.999,84	9.991,62	10.000,16	10.000,00
6-7	10.000,06	9.999,92	9.992,29	10.000,20	9.997,97
7-8	10.000,00	10.000,01	10.004,57	10.000,45	10.026,66
8-1	10.000,01	10.000,01	9.993,42	10.000,25	10.014,08
I_1	9.990,80	9.937,56	---	---	6.330,82
I_2	10.000,16	9.999,86	10.047,62	---	10.157,99
I_3	9.900,89	9.937,56	10.007,76	---	6.330,82

(*) Solução utilizando-se 10 pontos de integração coincidente com a solução exata, igual a 10.000,00, para todos os pontos e todas as discretizações, excetuando-se os pontos I_1 e I_3 da discretização 5, com 9967,57.

QUADRO IV.5 - Tensões cisalhantes (σ_{12})

Pontos	Discret.1	Discret.2	Discret.3	Discret.4	Discret.5
I_1	5,84	-0,00	---	1,43	1.777,31
I_2	0,00	0,00	0,22	8,69	40,98
I_3	-5,84	0,01	0,98	-41,69	1.777,31

(*) Solução utilizando-se 10 pontos de integração coincidente com a solução exata, igual a 0,00, para todos os pontos e todas as discretizações, excetuando-se os pontos I_1 e I_3 da discretização 5, com -9,40.

Discussão

O principal objetivo da análise deste exemplo simples é o de iniciar a avaliação dos resultados numéricos da formulação desenvolvida para o método, incluindo o tratamento por sub-regiões alinhadas com interfaces retilíneas ou poligonais.

Comparando-se os valores obtidos com o MEC com os valores da solução exata, os resultados podem ser considerados excelentes dentro do âmbito da engenharia, inclusive quando utiliza-se quatro pontos de integração, para todos os pontos e todas as discretizações. Como exceção, apenas as tensões dos pontos internos I_1 e I_3 da discretização 5 apresentam resultados deficientes, o que pode ser explicado pela proximidade destes pontos com o contorno, que possuem uma distância da ordem de 40 a 50% do comprimento dos elementos mais próximos, o que prejudica a avaliação numérica sobre estes elementos devido a elevada variação dos campos virtuais.

Ao utilizar-se dez pontos de integração os resultados passam a ser exatos, para todas as discretizações, excetuando-se apenas os casos acima referidos, que entretanto, passam a ter valores confiáveis.

Pode-se notar, pelos resultados das discretizações 3 e 4, a validade da utilização das equações adicionais sobre os pontos angulosos das interfaces.

IV.1b - Chapa com Orifício Circular

Definição do Exemplo

Neste exemplo, analisa-se o comportamento de uma chapa com orifício circular, com relação $\ell/d = 5$ (d = diâmetro do furo; ℓ = largura da chapa), submetida a um esforço de tração uniforme como esquematizado na figura IV.7a. Para a análise numérica utiliza-se duas discretizações pelo MEC (figuras IV.8 e IV.9), considerando-se as condições de simetria (figura IV.7b), sendo que no caso 2 da discretização 1 são prescritos apenas os deslocamentos obtidos para o caso 1, onde são prescritos deslocamentos e forças de superfície. A solução analítica foi obtida conforme [1], considerando-se a placa com largura infinita.

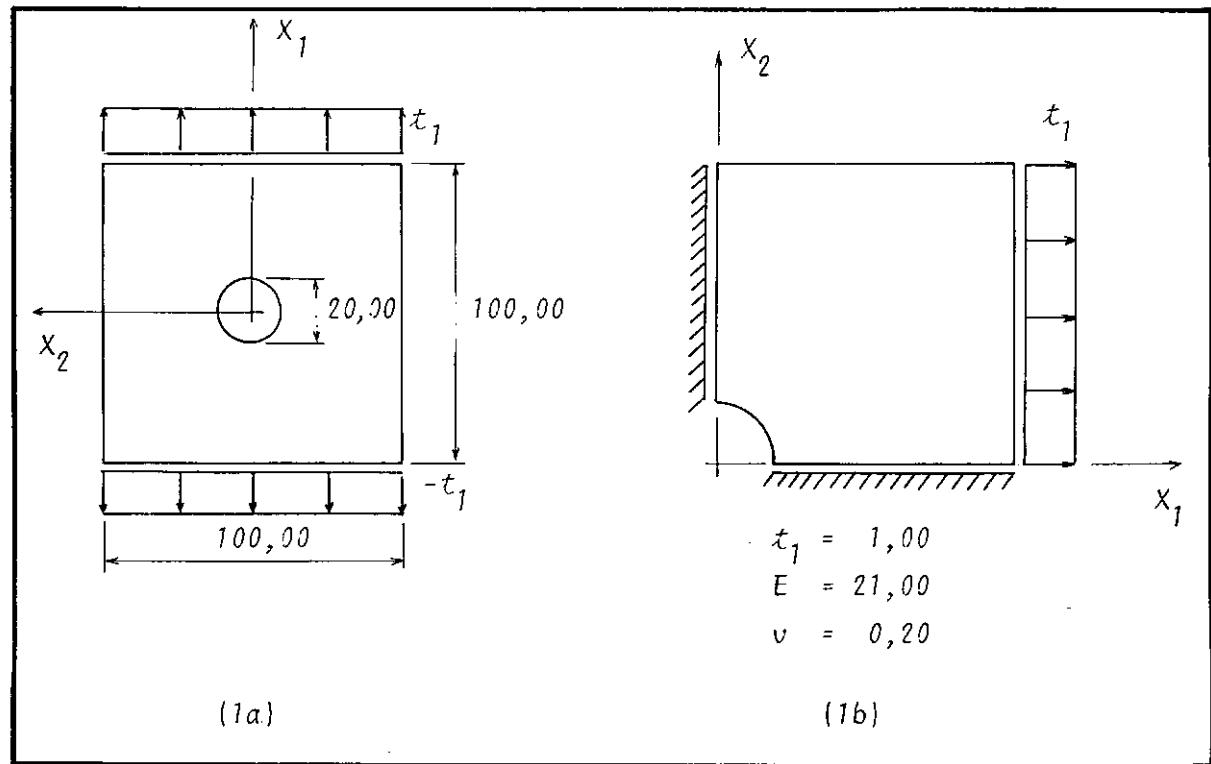


FIGURA IV.7 - Chapa com Orifício Circular: Dados Básicos.

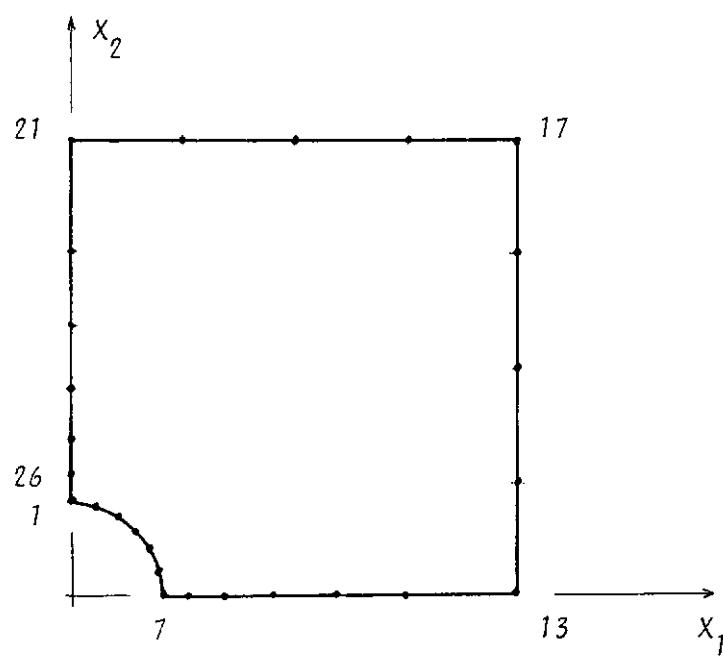


FIGURA IV.8 - Discretização 1: 26 nós.

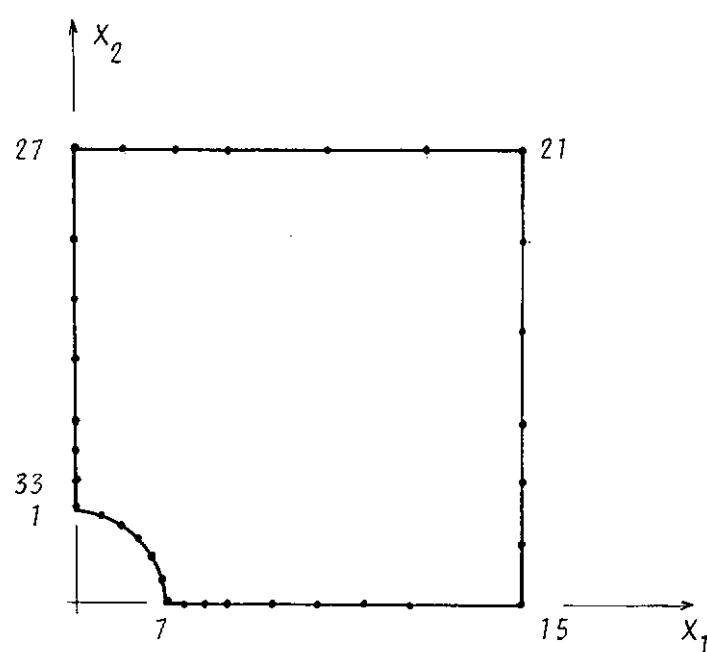


FIGURA IV.9 - Discretização 2: 33 nós.

Resultados Numéricos

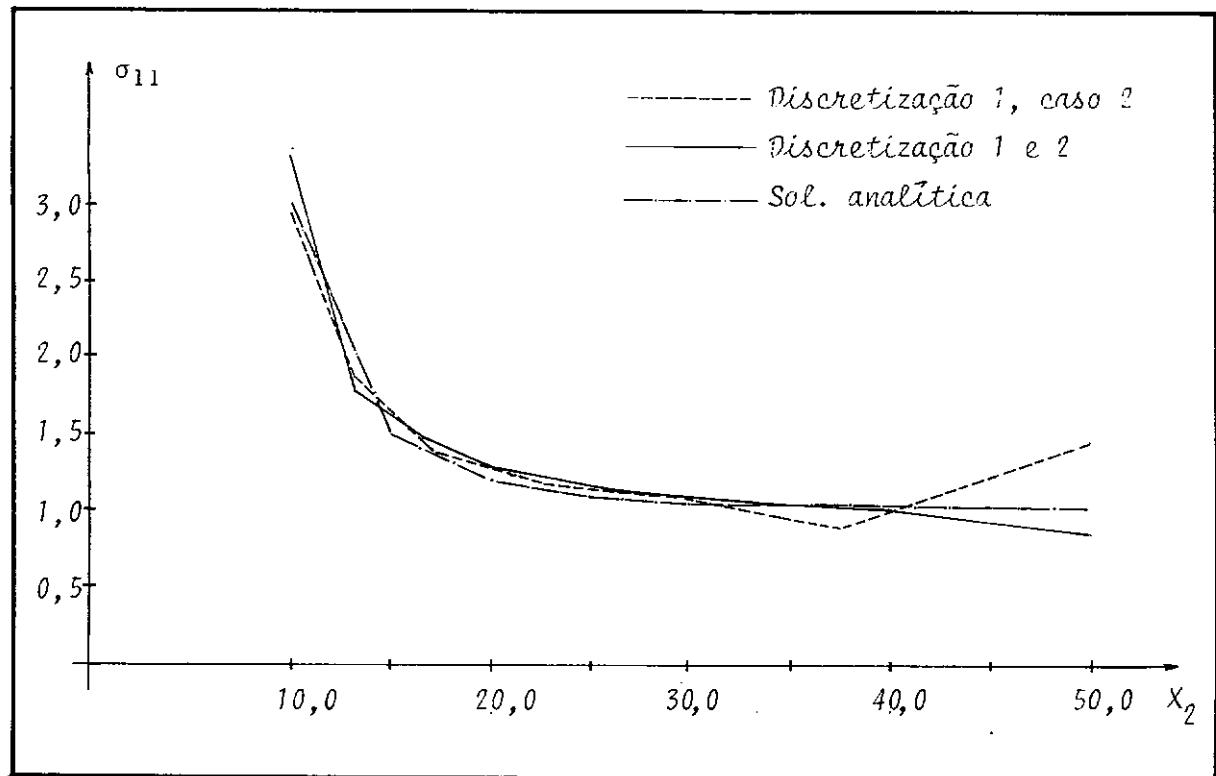


FIGURA IV.10 - Tensões normais (σ_{11}) na direção X_1 , ao longo do eixo X_2 .

(*) Para placas com relação $\ell/d \geq 4$, o erro admitido na solução analítica para o cálculo do valor da tensão máxima é inferior a 6%, ver [1]. Segundo [32], obtém-se 3,14 para o valor da tensão máxima.

Discussão

O presente exemplo vem confirmar a idéia geral de que o MEC apresenta-se de forma eficiente para obtenção de soluções de problemas que apresentem concentrações de tensões. Admitindo-se 3,14 como o valor correto para a tensão máxima, verifica-se que os resultados obtidos apresentam uma diferença inferior a 10%.

O caso 2 da discretização 1 confirma a validade das equações adicionais aplicadas em pontos do contorno externo.

IV.2 - Barragem de Concreto

Analisa-se dois exemplos de barragem em concreto, considerando-se a base engastada, submetidas a empuxo hidrostático e peso próprio.

2a- Barragem 1

Definição do Exemplo

Neste exemplo, a estrutura possui uma forma trapezoidal como apresentado na figura (IV.11). Estuda-se o problema pelo MEC através de três discretizações (figuras IV.12, IV.13 e IV.14) e com MEF utilizando-se duas malhas de elementos triangulares, uma com elementos lineares (figura IV.15) e outra com elementos quadráticos (figura IV.16). Para avaliação do peso próprio utiliza-se o procedimento semi-analítico e a formulação através do tensor de Galerkin.

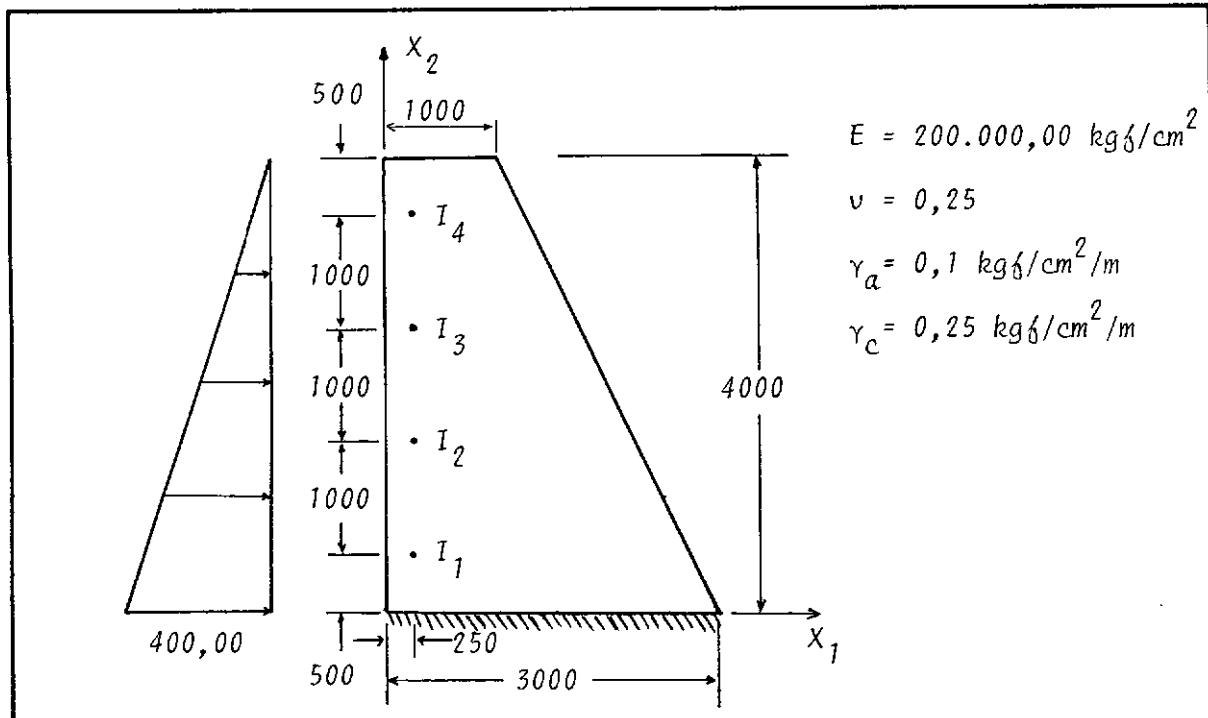


FIGURA IV.11 - Exemplo 2.a - Barragem simples: dados básicos.

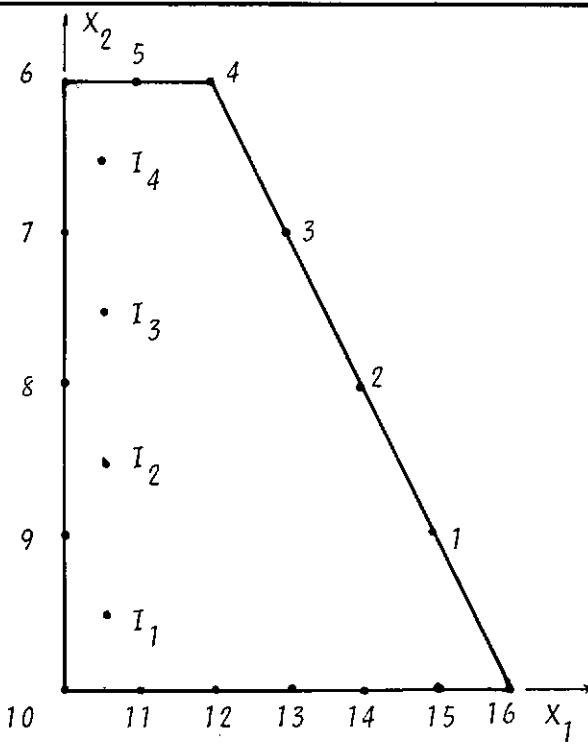


FIGURA IV.12- Barragem 1 - Discretização 1: 16 nōs.

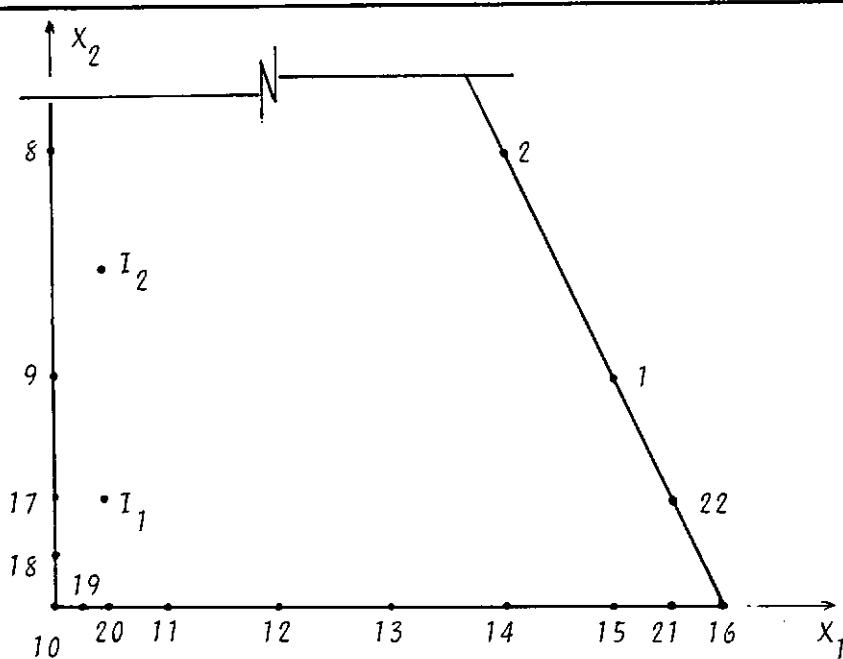


FIGURA IV.13- Barragem 1 - Discretização 2: 22 nōs (detalhe da base).

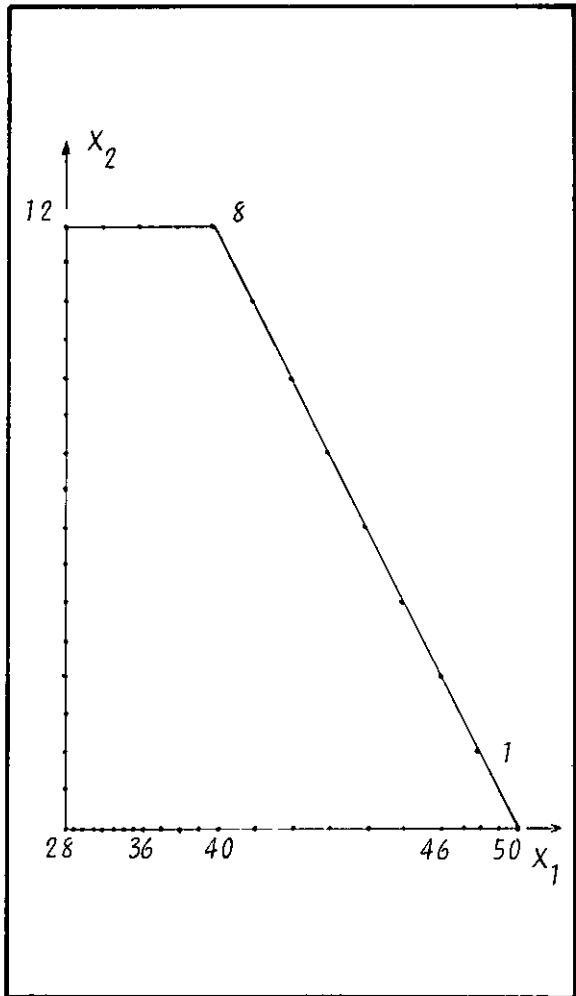


FIGURA IV.14 - Barragem 1 - Discretização 3: 50 nós.

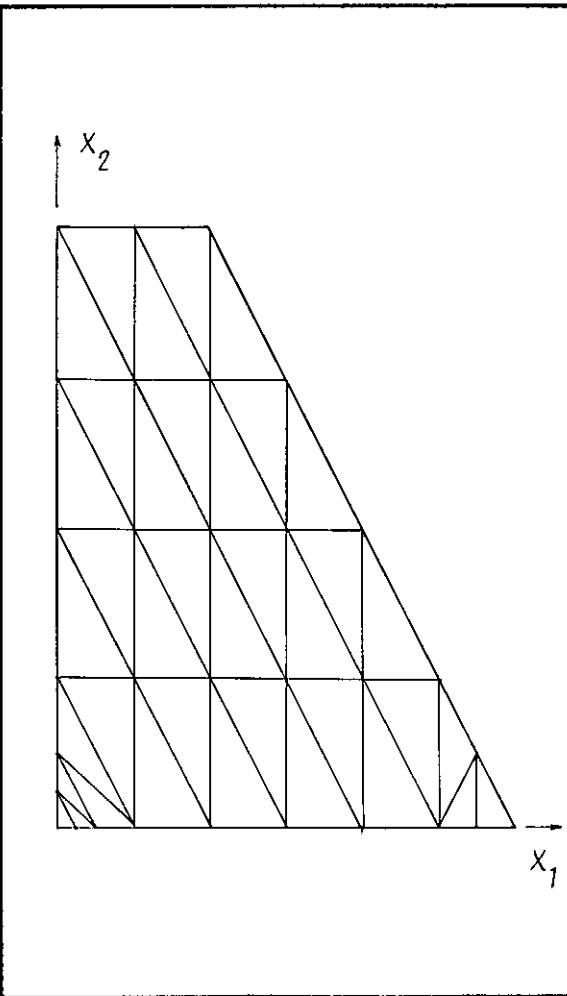


FIGURA IV.15 - Barragem 1 - Malha 1: 38 elementos "EPTTL", 31 nós.

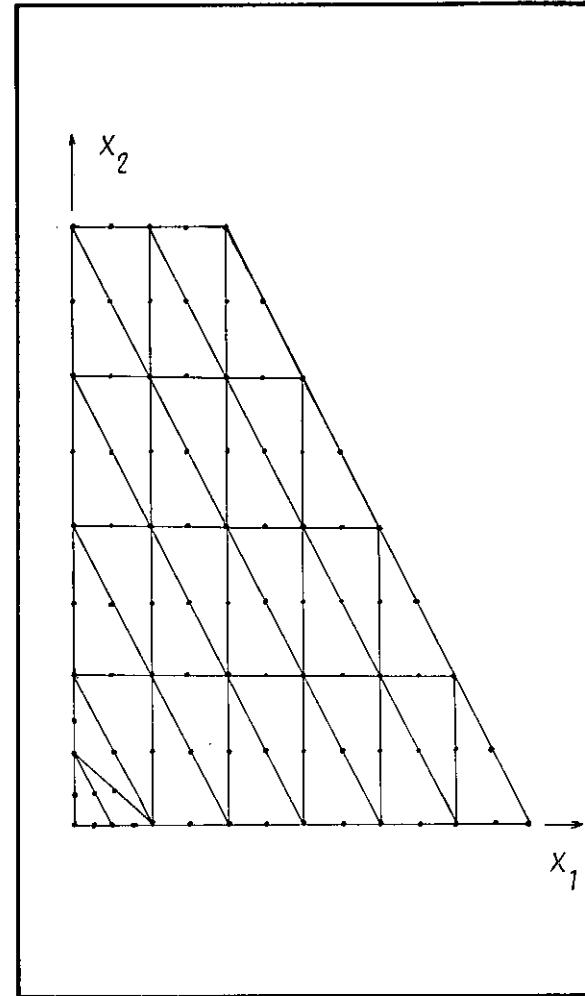


FIGURA IV.16 - Barragem 1 - Malha 2: 34 elementos "EPTTQ", 87 nós.

Resultados Numéricos

QUADRO IV.6 - Deslocamentos nodais para a pressão hidrostática

Pontos	MEC			MEF	
	Discret.1	Discret.2	Discret.3	Malha 1	Malha 2
IV.6a - Deslocamentos (u_1) na direção X_1					
6	17,9923	17,8157	18,4347	15,1816	17,4250
7	13,8392	13,7975	14,2472	11,7210	13,4613
8	9,6632	9,7117	9,9392	8,2593	9,3763
9	5,4881	5,6559	5,7107	4,7136	5,3967
I_1	2,3360	2,8295	2,8507	2,3568	2,5411
I_2	6,8449	6,9459	7,4422	6,1406	6,9918
I_3	10,9911	11,0036	11,8909	9,7437	11,2230
I_4	15,1158	15,0177	16,3007	13,3323	15,4097
IV.6b - Deslocamentos (u_2) na direção X_2					
6	5,7263	5,6392	5,8525	4,6512	5,5172
7	5,5843	5,5154	5,7471	4,4658	5,4257
8	5,0029	4,9607	5,1601	3,9126	4,8656
9	3,6878	3,6389	3,7461	2,6751	3,5571
I_1	1,3200	1,4916	1,5467	1,3375	1,40
I_2	3,4702	3,4852	3,5615	2,6401	3,3452
I_3	4,4059	4,3785	4,4805	3,3917	4,2238
I_4	4,7298	4,6833	4,7788	3,6984	4,5068

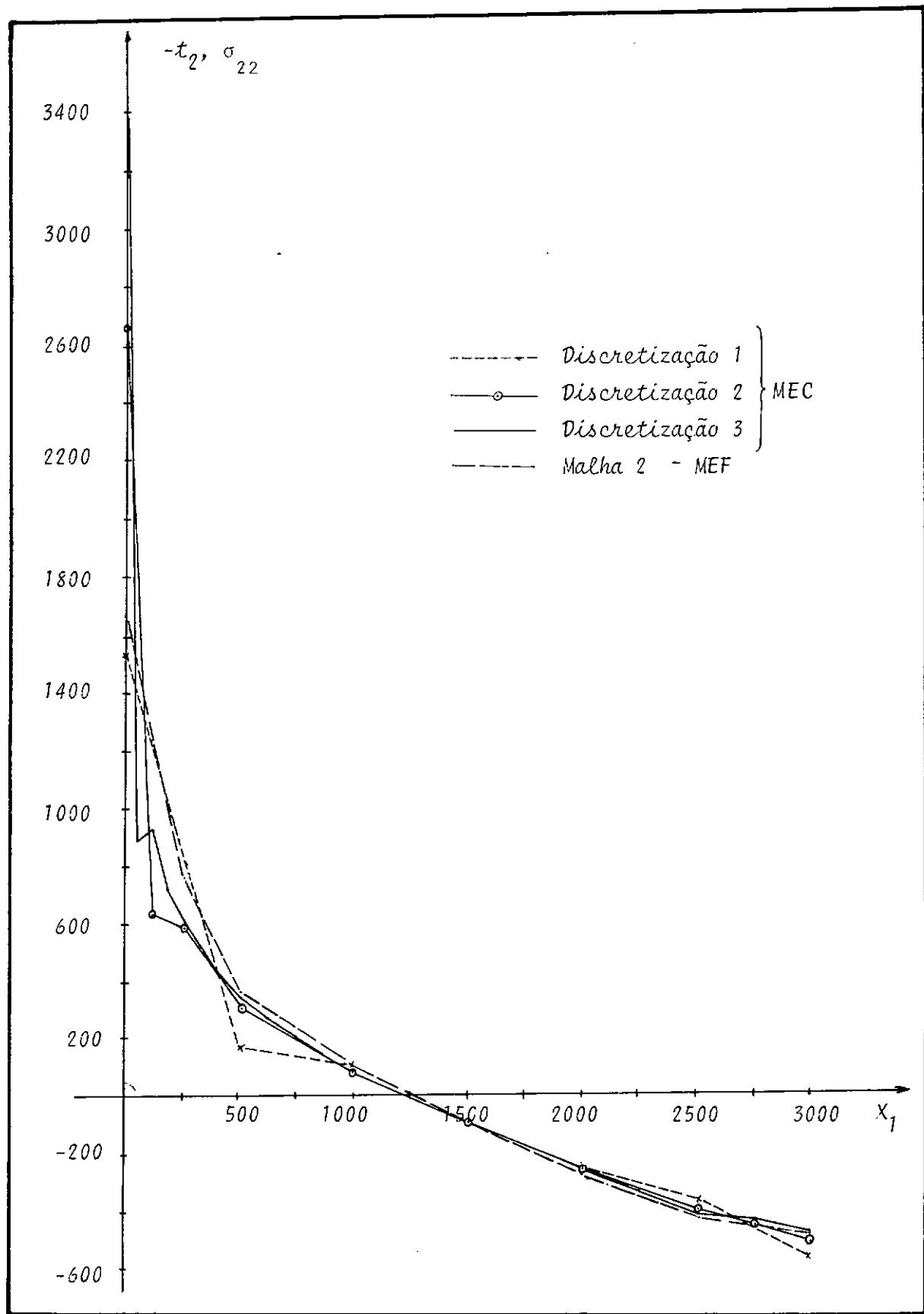


FIGURA IV.17 - Tensões normais (σ_{22}) e forças de superfície ($-t_2$) na base, para o empuxo hidrostático.

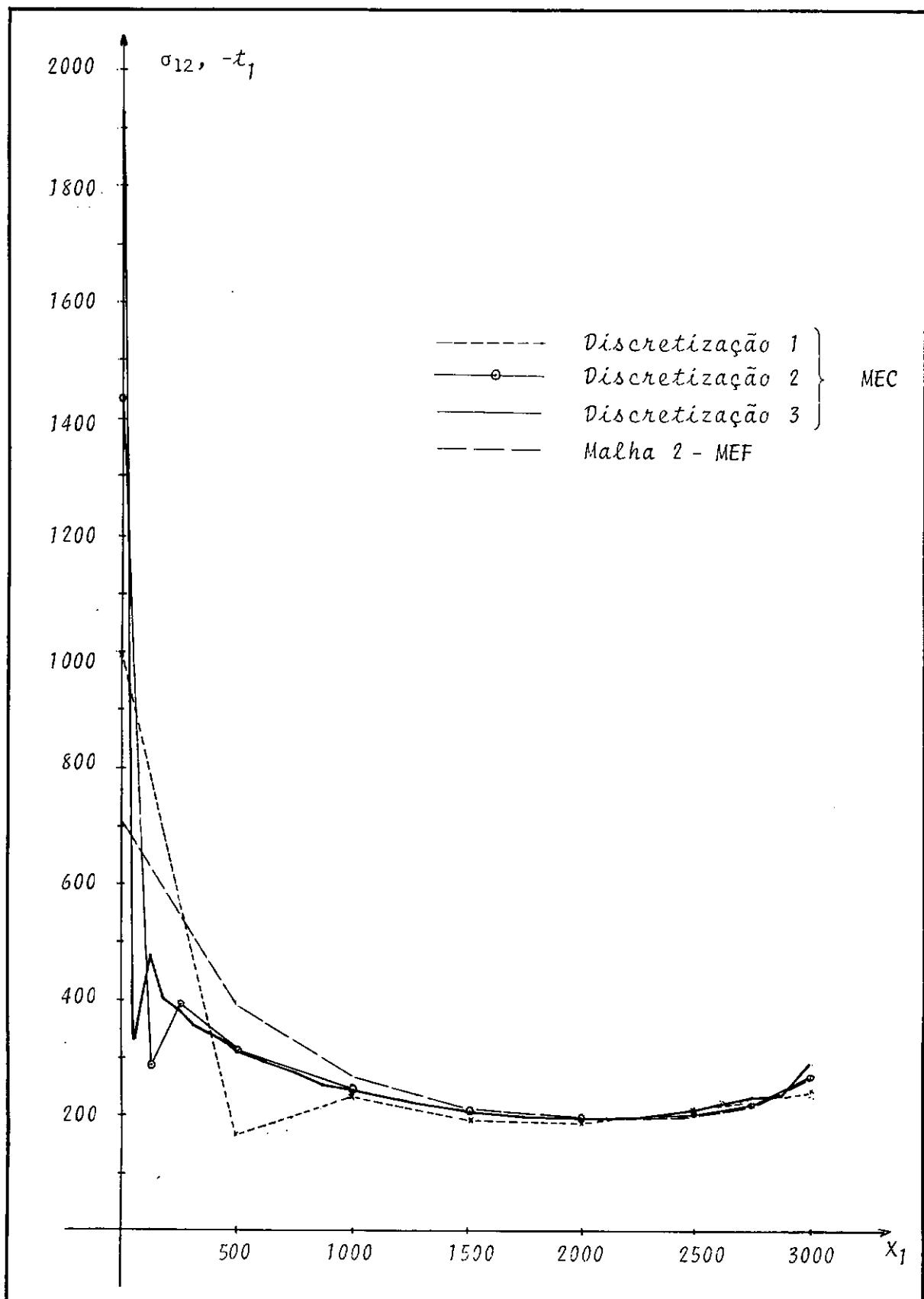


FIGURA IV. 18 - Tensões cisalhantes (σ_{12}) e forças de superfície ($-t_1$) na base, para o empuxo hidrostático.

QUADRO IV.7 - Tensões em pontos internos para a pressão hidrostática

	MEC				MEF			
	Discret. 1	Discret. 2	Discret. 3	EPTTL	EPTTQ			
Pontos	4 PI	10 PI	4 PI	10 PI	4 PI	10 PI	Malha 1	Malha 2
IV.7a - Tensões normais (σ_{11}) na direção x_1								
I_1	153,74	-204,04	-294,14	-296,51	-295,55	-295,54	-234,27	-315,16
I_2	612,72	-242,17	633,18	-233,68	-248,28	-248,21	-207,58	-254,55
I_3	1.167,57	-131,06	1.171,34	-127,34	-148,20	-148,10	-143,66	-146,95
I_4	1.724,51	- 20,83	1.714,38	- 19,28	- 47,45	- 47,31	- 68,68	- 47,33
IV.7b - Tensões normais (σ_{22}) na direção x_2								
I_1	339,50	544,11	508,21	509,35	528,31	528,28	301,40	548,87
I_2	-322,80	192,47	-344,05	178,51	204,74	204,68	176,94	208,99
I_3	-736,01	51,56	-740,82	47,03	68,21	68,15	62,45	70,22
I_4	-1.072,47	-11,49-1.067,30		-13,37	6,67	6,61	11,24	7,63
IV.7c - Tensões cisalhantes (σ_{12})								
I_1	128,27	189,77	165,89	170,41	168,59	168,56	168,15	170,14
I_2	-209,59	32,99	-202,43	38,65	43,83	43,82	62,68	48,97
I_3	-289,27	16,34	-285,06	17,96	26,73	26,72	23,14	26,26
I_4	-330,60	-1,19	-327,25	-1,41	5,73	5,71	2,55	6,46

QUADRO IV.8 - Deslocamentos para o peso próprio

MEC										MEF	
Discret. 1				Discret. 2			Discret. 3		EPTL	EPTTQ	
	S.A.	T.G.	S. Analítica		T.G.	S.A.	T.G.	M. 1	M. 2		
Pontos	10 PI	10 PI	4 PI	10 PI	10 PI	10 PI	10 PI	10 PI	10 PI		
IV.8a - Deslocamentos ($-v_1$) na direção X_1											
6	8,13	9,31	8,30	8,59	9,42	9,35	10,25	7,99	9,84		
7	5,55	6,34	5,75	5,90	6,46	6,47	6,93	5,26	6,63		
8	3,46	3,79	3,61	3,70	3,89	3,89	4,08	3,09	3,88		
9	1,91	2,03	2,06	2,11	2,14	2,12	2,17	1,62	2,06		
I_1	0,80	0,86	1,01	1,02	1,05	1,05	1,06	0,82	0,91		
I_2	2,39	2,58	2,38	2,59	2,68	2,63	2,72	2,10	2,57		
I_3	4,33	4,85	4,27	4,62	4,95	4,94	5,24	3,98	4,99		
I_4	6,71	7,77	6,59	7,13	7,89	7,86	8,53	6,53	8,16		
IV.8b - Deslocamentos ($-v_2$) na direção X_2											
6	10,16	10,65	10,15	10,47	10,67	10,56	11,00	9,79	10,48		
7	9,52	9,98	9,57	9,80	10,01	9,97	10,33	9,03	9,83		
8	7,78	7,97	7,86	8,04	8,01	8,02	8,22	7,12	7,82		
9	4,78	4,76	4,79	4,99	4,78	4,75	4,83	4,09	4,59		
I_1	2,03	2,22	2,19	2,31	2,32	2,31	2,36	2,05	2,21		
I_2	5,58	5,99	5,91	5,82	6,04	6,03	6,18	5,32	5,86		
I_3	7,85	8,46	8,18	8,10	8,49	8,48	8,73	7,61	8,30		
I_4	8,95	9,69	9,24	9,22	9,72	9,63	10,00	8,79	9,50		

* S.A. = Semi-Analítica; T.G. = Tensor de Galerkin.

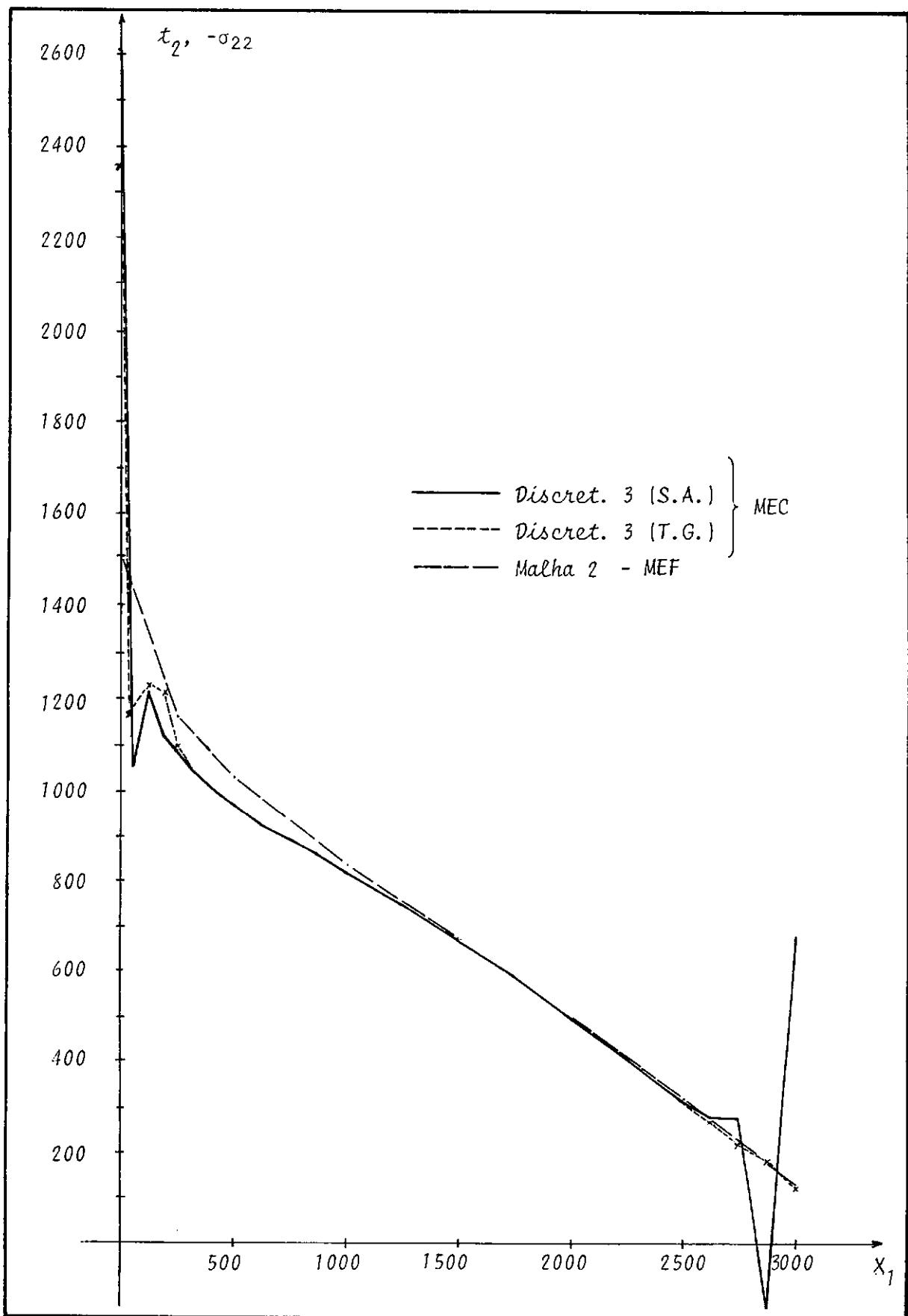


FIGURA IV.19 - Forças de superfície (t_2) e tensões normais (σ_{22}) na base para o peso próprio.

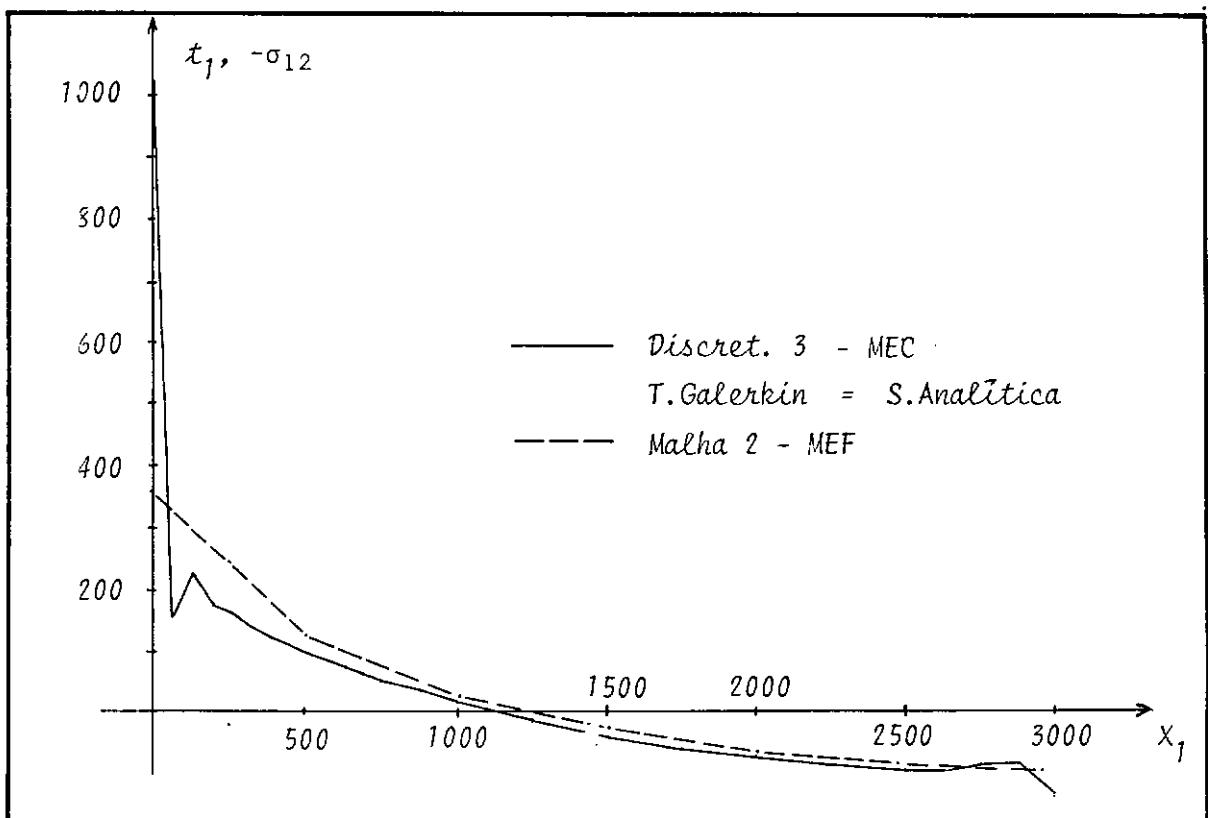


FIGURA IV.20 - Forças de superfície (t_1) e tensões cisalhantes (σ_{12}) na base para o peso próprio.

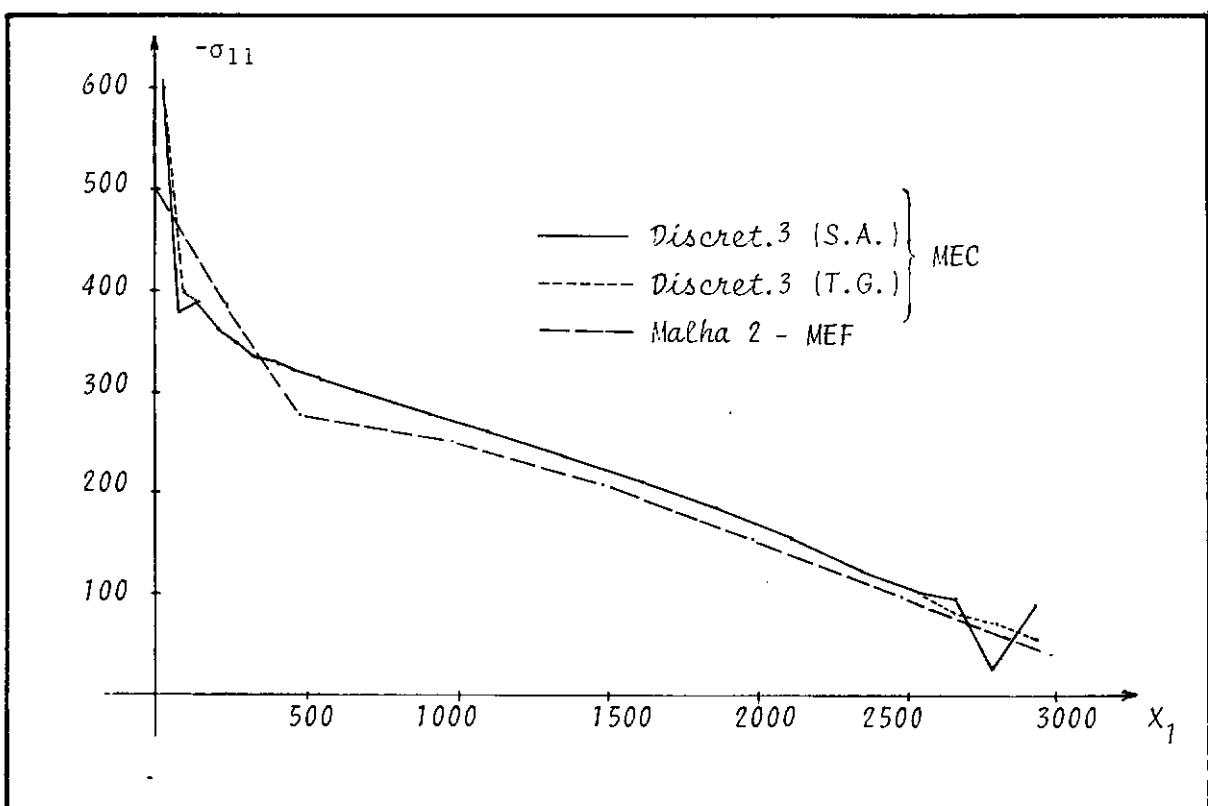


FIGURA IV.21 - Tensões normais ($-\sigma_{11}$) na direção X_1 , na base, para o peso próprio.

QUADRO IV.9 - Tensões em pontos internos para o peso próprio

	MEC (S.A.)			MEF		
	Discret.1	Discret.2	Discret.3	EPTTL	EPTTQ	
Pontos	10 PI	10 PI	T.G.	S.A.	Malha 1	Malha 2
IV.9a - Tensões normais (σ_{11}) na direção X_1 .						
I ₁	-277,13	-327,98	-22,32	-21,05	-50,67	-84,61
I ₂	-288,93	-223,69	2,75	3,94	-15,78	0,13
I ₃	-131,44	-129,59	1,10	2,00	31,97	0,67
I ₄	- 30,43	- 29,82	-1,30	-1,23	12,13	-1,48
IV.9b - Tensões normais (σ_{22}) na direção X_2 .						
I ₁	-434,16	-450,70	-975,27	-962,42	-846,76	-957,43
I ₂	-434,86	-449,48	-677,79	-659,92	-645,14	-688,35
I ₃	-301,07	-310,45	-408,67	-387,81	-422,55	-406,34
I ₄	- 83,36	- 88,40	-132,60	-114,21	-148,07	-128,76
IV.9c - Tensões cisalhantes (σ_{12}).						
I ₁	131,77	133,92	-34,53	- 34,05	- 25,22	- 51,15
I ₂	47,96	54,75	- 0,10	0,19	2,48	- 4,32
I ₃	24,72	26,74	-10,35	- 10,53	- 7,02	- 8,12
I ₄	27,20	28,12	- 9,28	- 3,78	- 7,42	- 7,29

* S.A. = Semi-Analítica; T.G. = Tensor de Galerkin.

Discussão

Os resultados dos deslocamentos para a pressão hidrostática obtidos com as discretizações 1 e 2, que podem ser considerados excessivamente pobres, mostram-se confiáveis até mesmo para os pontos internos, os quais encontram-se distante do contorno apenas 25% do comprimento dos elementos mais próximos; sendo pequena a diferença entre os resultados quando utilizam-se 4 ou 10 pontos de integração (PI).

Na análise dos resultados das tensões verifica-se a ocorrência de singularidades na extremidade esquerda da base, sendo os resultados obtidos com o MEC os que melhor representam tal fenômeno. Já os resultados obtidos para as tensões dos pontos internos revelam-se totalmente deficientes quando se utilizam as discretizações 1 e 2, excetuando-se as tensões no ponto I_1 obtidas com a discretização 2, cuja distância máxima ao contorno passa a ser de 50% do maior elemento das proximidades; sendo tais resultados influenciados pela melhoria da discretização na região, que por sua vez foi introduzida com o objetivo de caracterizar a presença das singularidades já referidas. Nota-se que a utilização de 10 pontos de integração altera completamente os resultados das tensões nestes pontos, que entretanto, continuam deficientes, excetuando-se o caso do nó I_1 também já mencionado.

Os resultados obtidos no contorno com o MEC para as forças de massa mostram-se bastante satisfatórios para ambas as formulações utilizadas, sendo que o procedimento semi-analítico acusa a presença de singularidade na extremidade direita da base, o que não ocorre com a utilização do tensor de Galerkin, cujos valores obtidos aproximam-se bastante da solução da malha 3 do MEF, nesta região.

Quando se utiliza a discretização 3 obtém-se bons resultados para os deslocamentos e as tensões, inclusive para os pontos internos, tanto para a pressão hidrostática quanto para as cargas de peso próprio. Estes resultados mostram-se bastante estabiliza-

dos, com pequena influência quando se utilizam 4 ou 16 pontos de integração, sendo neste caso a distância mínima até o contorno da ordem do comprimento dos maiores elementos das proximidades.

Para as forças de massa são traçados os gráficos das tensões no contorno obtidas com a utilização da lei de Hooke, sendo os resultados obtidos bastante próximos ao resultado da malha 3 do MEF, excetuando-se na extremidade já referida, pelo procedimento semi-analítico.

Neste exemplo, pode-se notar também a presença das "orelhas" nos resultados das tensões nas vizinhanças dos pontos que apresentam singularidade; o que é uma característica comumente presente nas soluções obtidas com o MEC nestas regiões com singularidade.

Os resultados para o MEF foram obtidos utilizando-se o sistema LORANE [18].

2b - Barragem 2

Definição do Exemplo

Neste exemplo, a estrutura possui a forma como esquematizado na figura(IV.22). Estuda-se o problema pelo MEC através de duas discretizações (figuras IV.25 e IV.26) com elementos lineares. Os resultados obtidos são comparados com o MEC utilizando-se elementos constantes (figuras IV.23 e IV.24) e com o MEF utilizando-se elementos triangulares lineares, resultados estes obtidos segundo a referência [20].

Para avaliação do efeito das forças de massa utiliza-se a formulação semi-analítica para a discretização 1 e 2 e a formulação pelo tensor de Galerkin para a discretização 1 (elementos lineares).

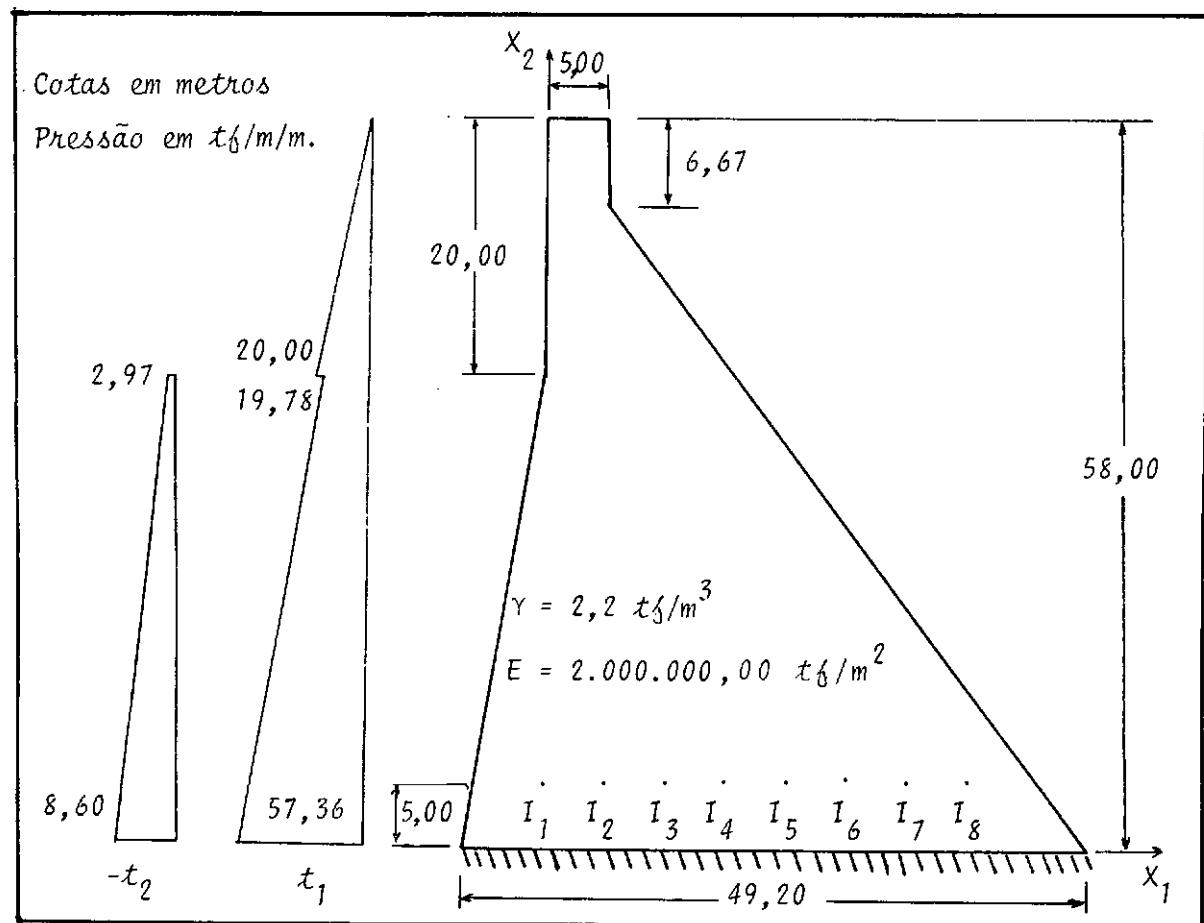


FIGURA IV. 22 - Barragem 2 - Dados gerais.

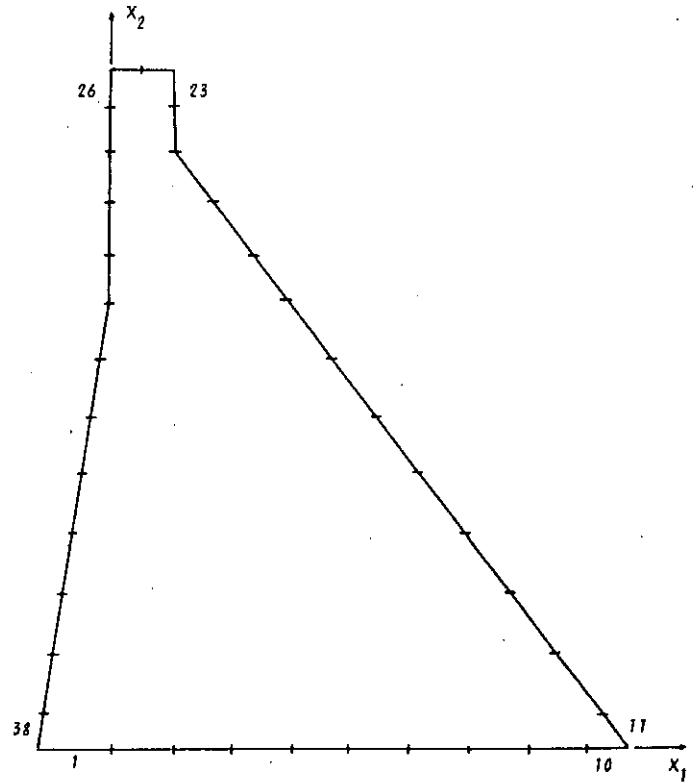


FIGURA IV.23 - MEC - Elementos constantes - discretização 1: 38 elementos.

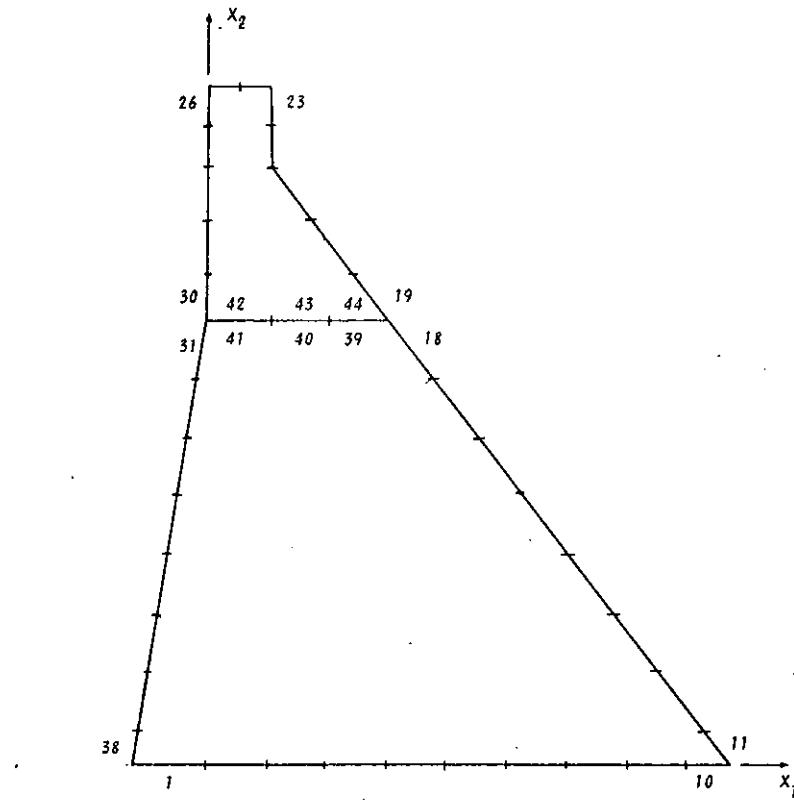


FIGURA IV.24 - MEC - Elementos constantes - discretização 2: 2 regiões, 38 elementos externos, 3 elementos de interface.

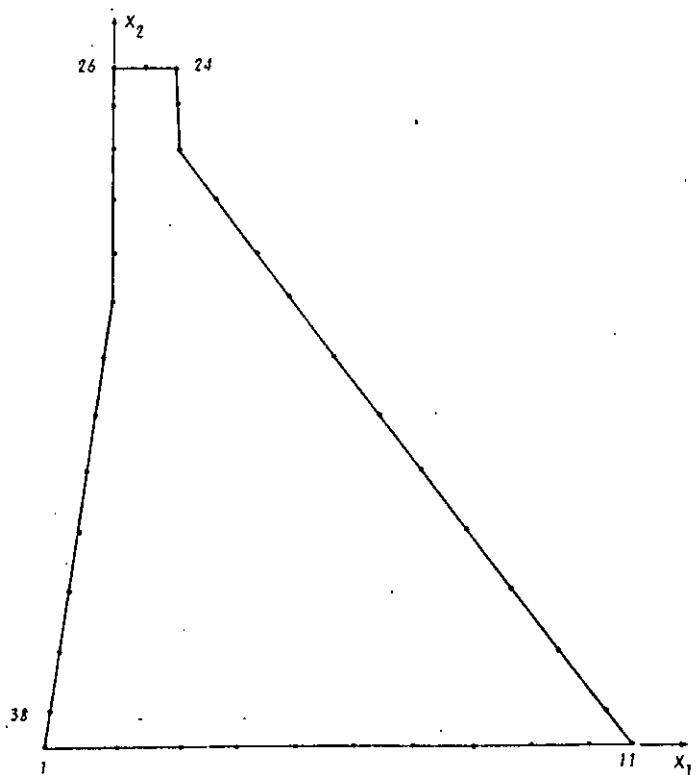


FIGURA IV.25 - MEC - Elementos lineares - discretização 1: 38 nós.

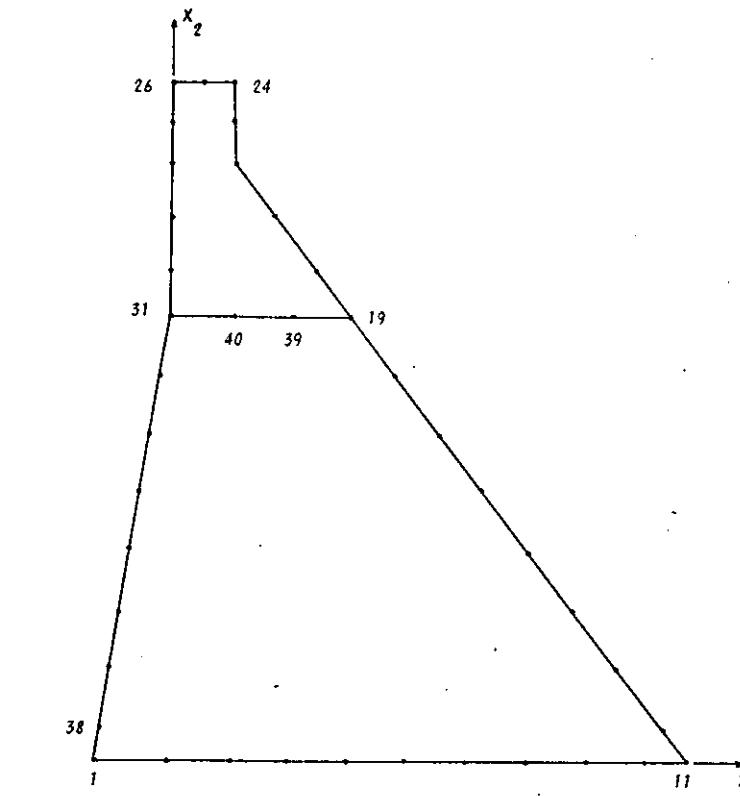


FIGURA IV.26 - MEC - Elementos lineares - discretização 2: 2 regiões, 38 nós externos e 4 nós de interface (2 externos).

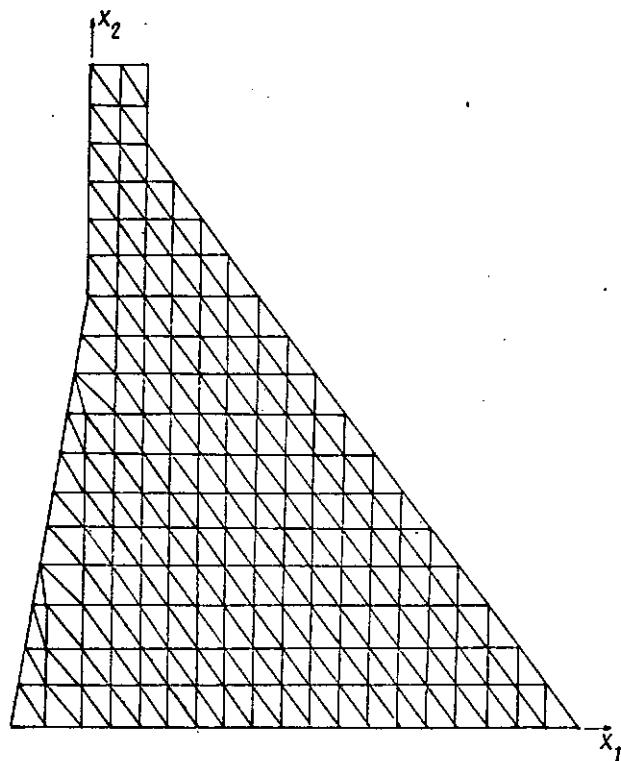


FIGURA IV.27 - MEF - Elementos triangulares lineares.

Resultados Numéricos

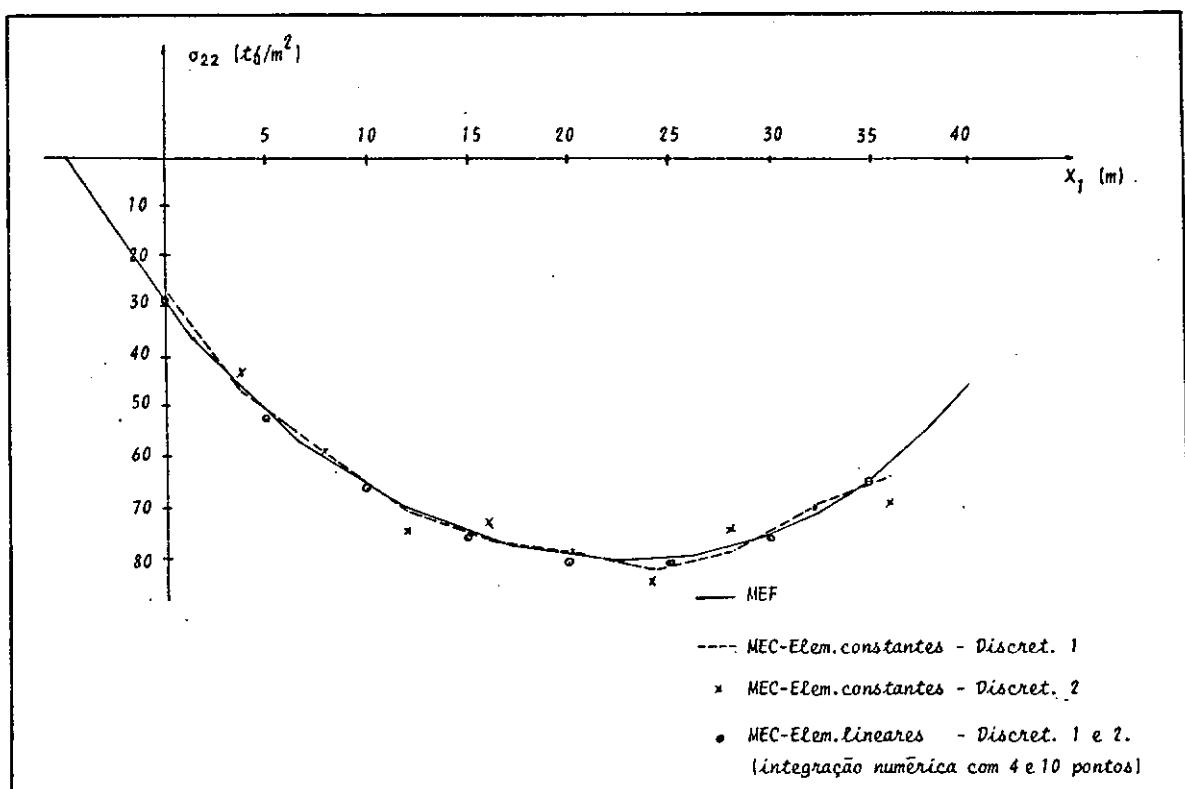


FIGURA IV.28 - Tensões normais (σ_{22}) na direção X_2 .

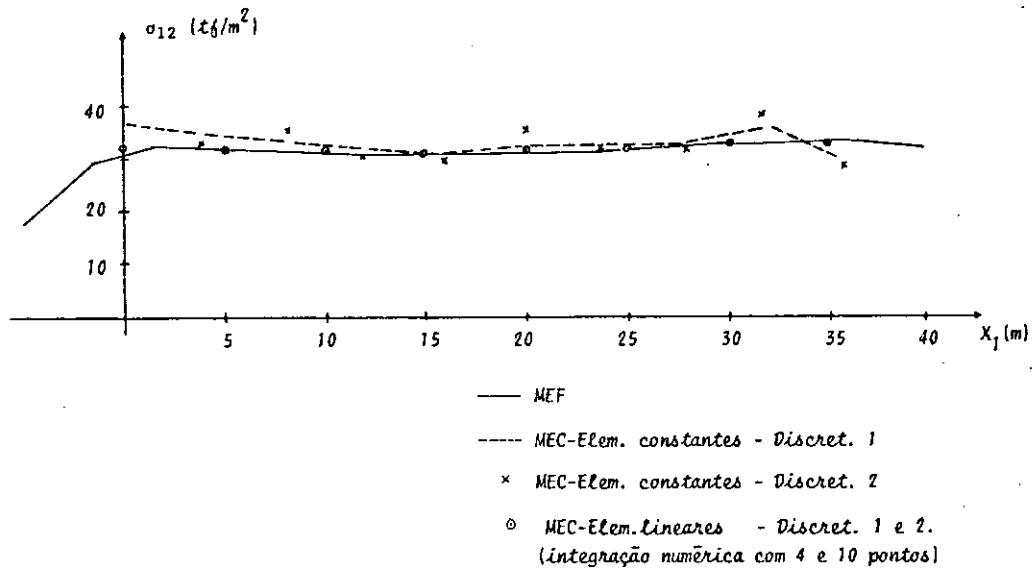


FIGURA IV.29 - Tensões cisalhantes (σ_{12}) para os pontos internos.

Discussão

Neste exemplo, são apresentados apenas os resultados das tensões em pontos internos, cuja distância até o contorno é da ordem do comprimento dos elementos desta região, que por sua vez possuem um campo impedido de deslocamentos e, consequentemente, tais resultados apresentam-se totalmente estabilizados quando se utiliza o MEC com elementos lineares, sem influência da alteração do número de pontos de integração utilizado ou da introdução da interface e sub-divisão do domínio na forma apresentada.

IV.3 - Viga em Balanço

Definição do Exemplo

Neste exemplo analisa-se o comportamento de uma viga de largura unitária em balanço, carregada na extremidade livre por uma carga concentrada, conforme figura IV.30. Os resultados pelo MEC são obtidos utilizando-se seis discretizações para o caso de uma região (figuras IV.33 a IV.38) e três discretizações para sub-regiões em fila (figuras IV.39 a IV.41). Os resultados pelo MEF são obtidos utilizando-se três malhas de elementos triangulares, sendo duas com elementos lineares (figura IV.42 e IV.43) e uma com elementos quadráticos (figura IV.44). Na face carregada adotou-se o esquema conforme figura IV.31.

As forças de peso próprio foram obtidas utilizando-se a formulação semi-analítica e a discretização quatro (figura IV.36), bem como uma discretização especial (figura IV.32) e ambas as formulações, a semi-analítica e através do tensor de Galerkin, formando-se as equações segundo a discretização quatro. Os resultados analíticos para a carga no balanço foram obtidos conforme [1], considerando-se a carga P' (figura IV.31).

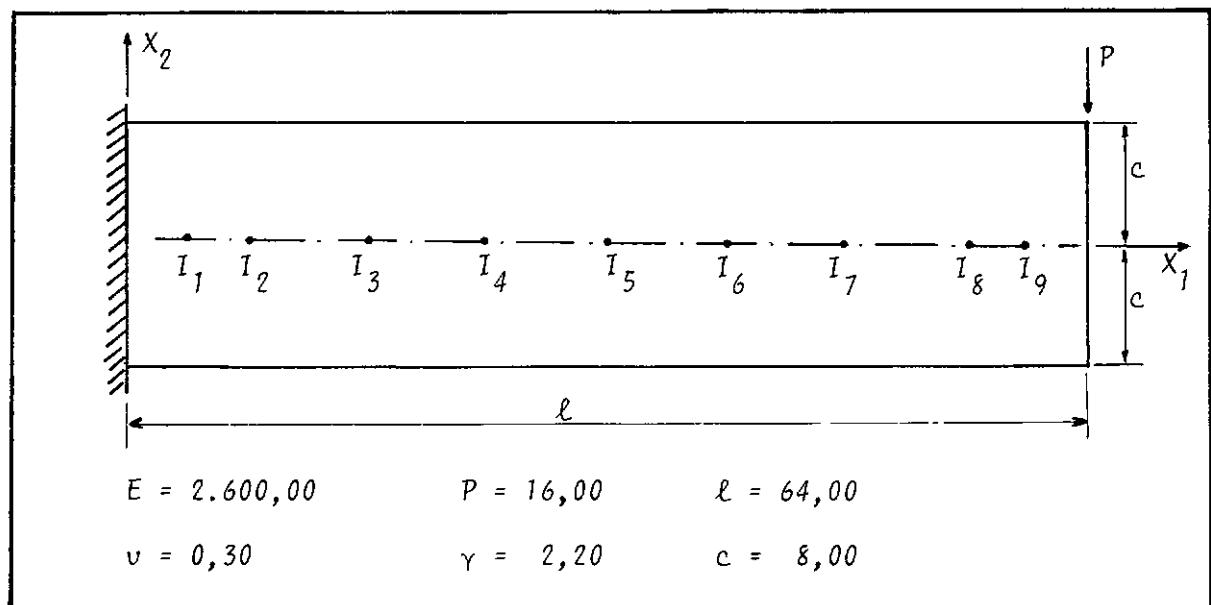


FIGURA IV.30 - Viga em balanço : dados gerais.

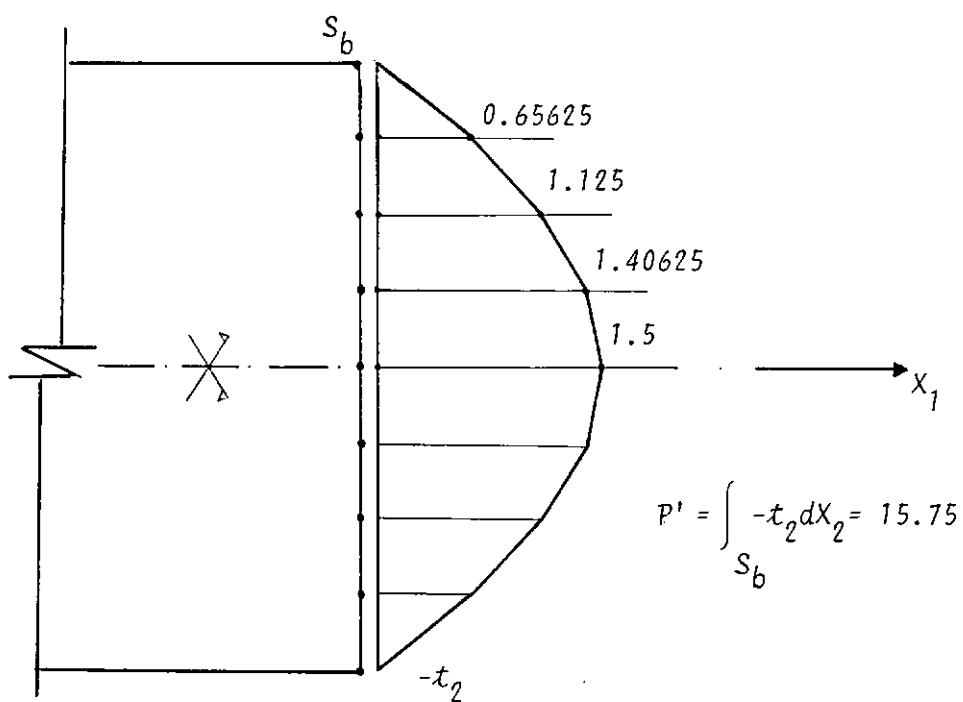


FIGURA IV.31 - Esquema da face carregada.

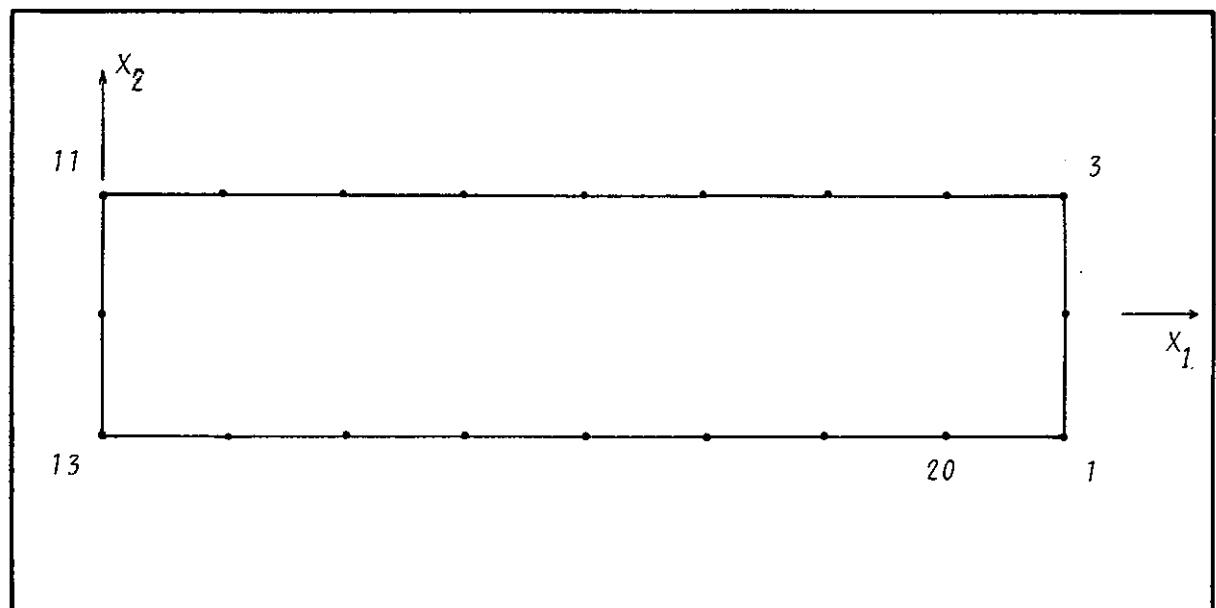


FIGURA IV.32 - Discretização especial para cálculo do efeito do peso próprio.

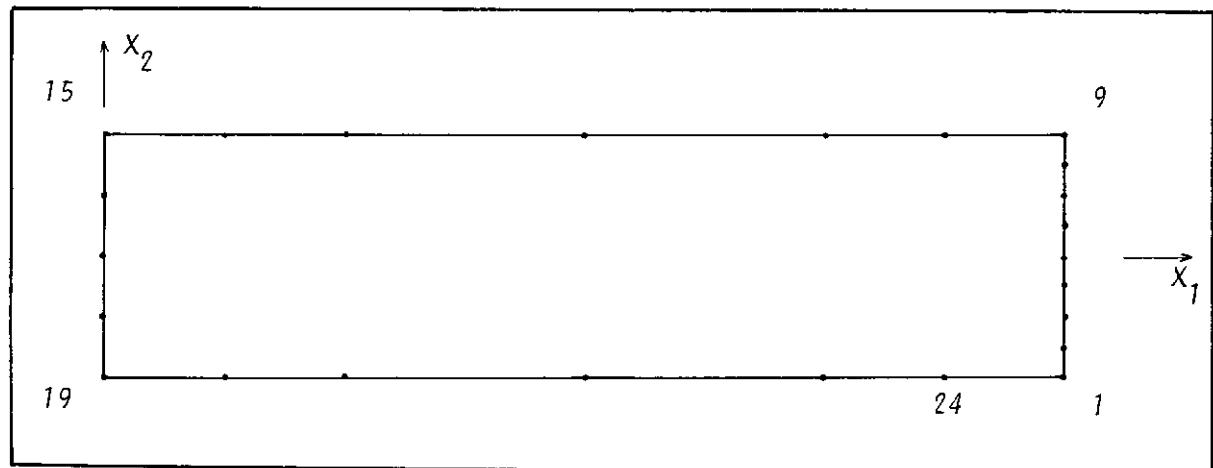


FIGURA IV.33 - Discretização 1: 1 região, 24 nós.

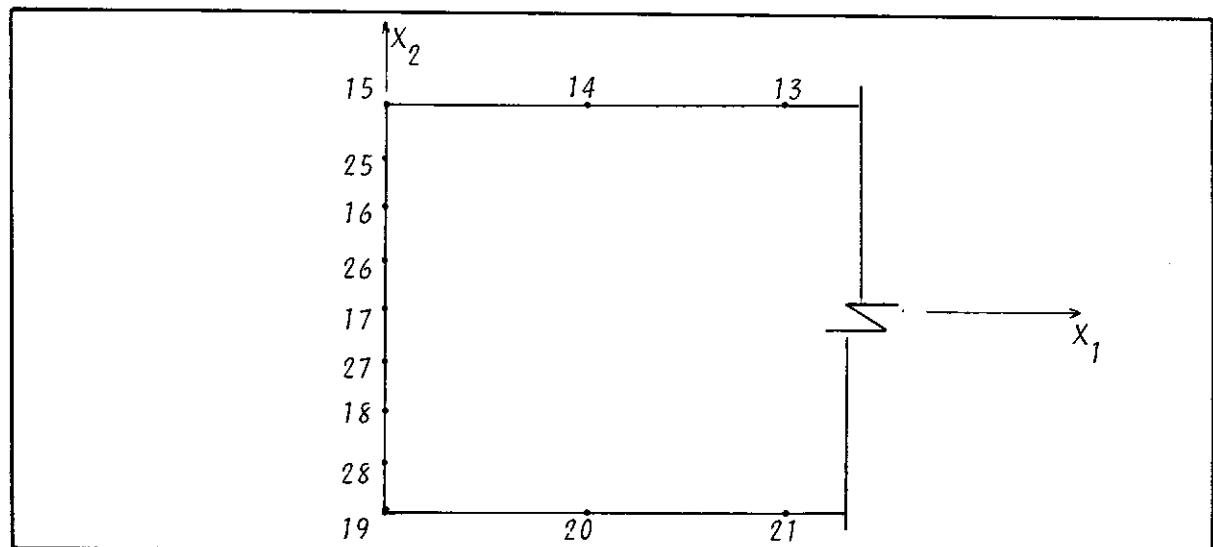


FIGURA IV.34 - Discretização 2: 1 região, 28 nós (Detalhe da face engastada).

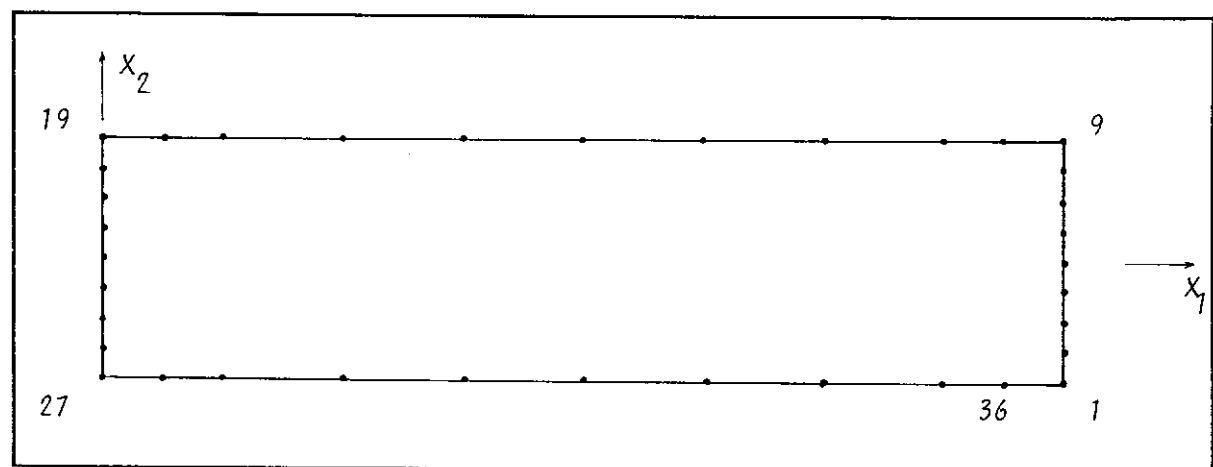


FIGURA IV.35 - Discretização 3: 1 região, 36 nós.

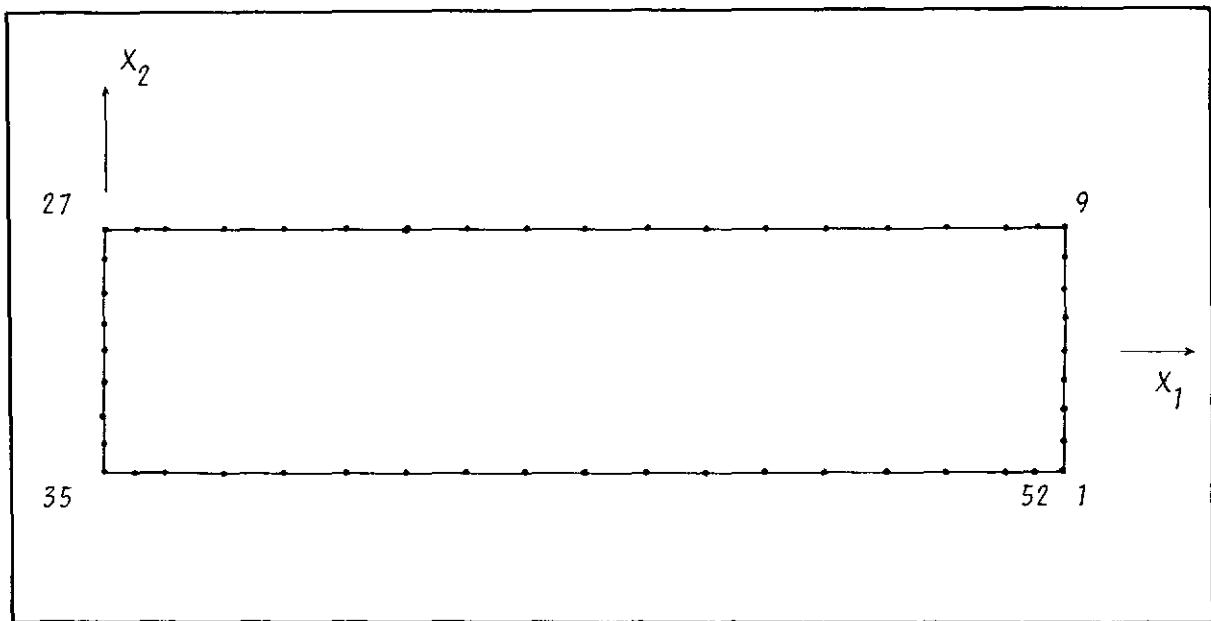


FIGURA IV.36 - Discretização 4: 1 região, 52 nós.

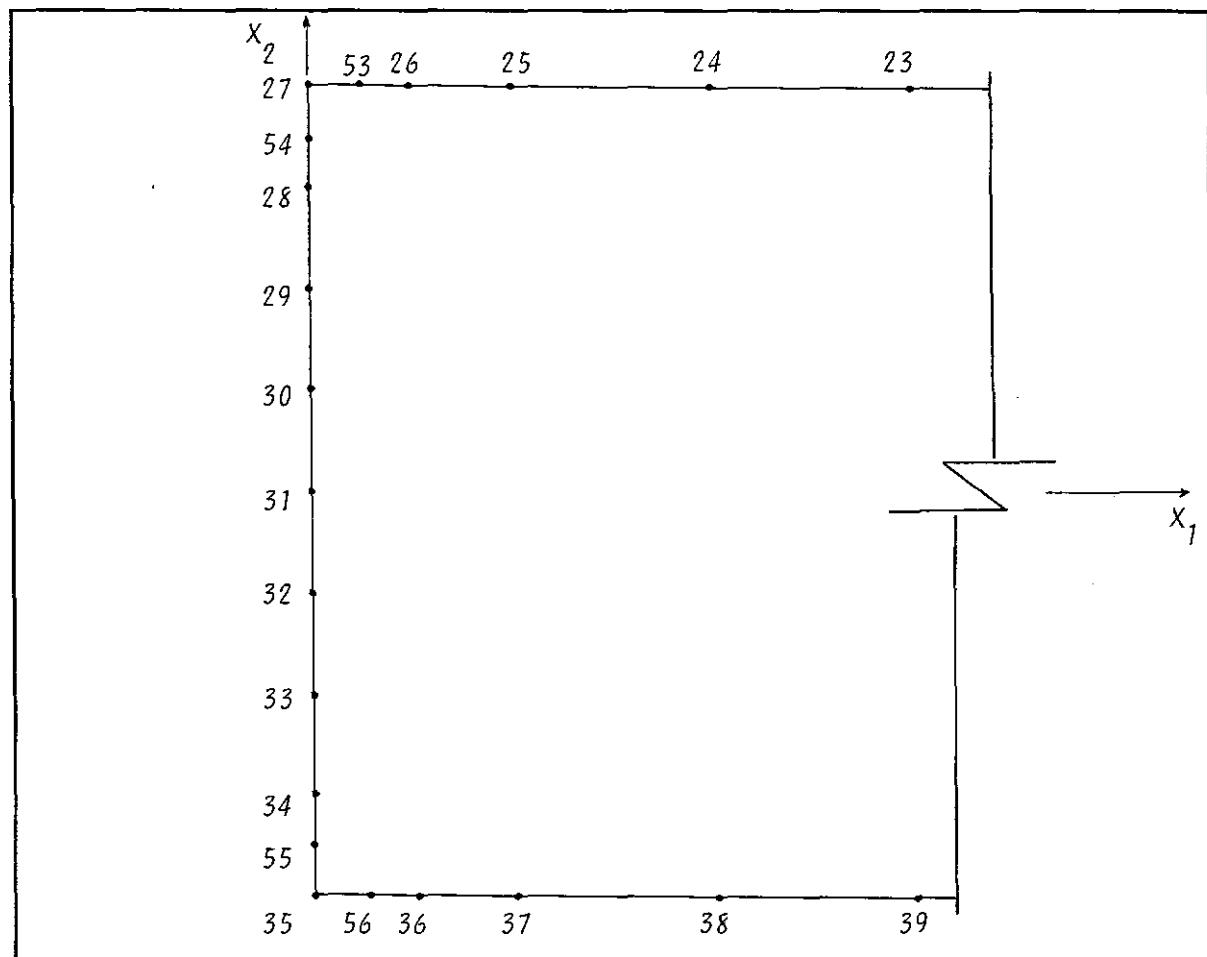


FIGURA IV.37 - Discretização 5: 1 região, 56 nós (detalhe da face engastada).

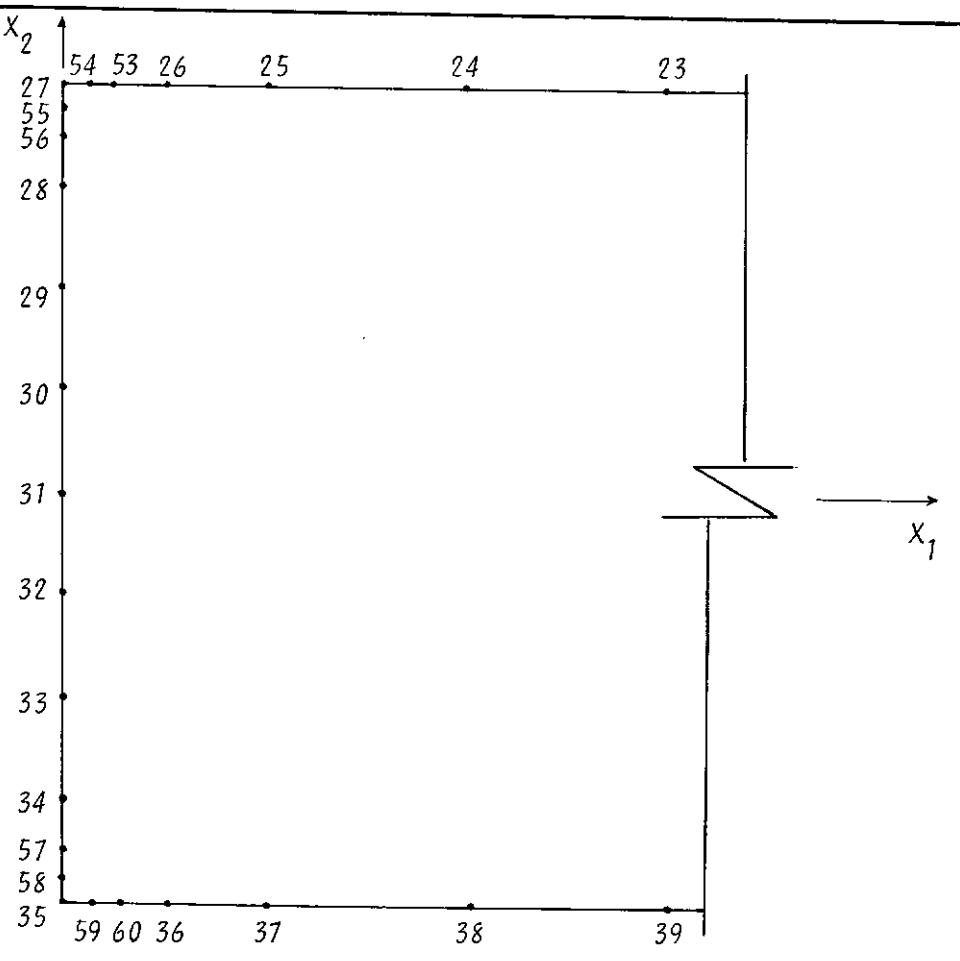


FIGURA IV.38 - Discretização 6: 1 região, 60 nós (detalhe da face engastada).

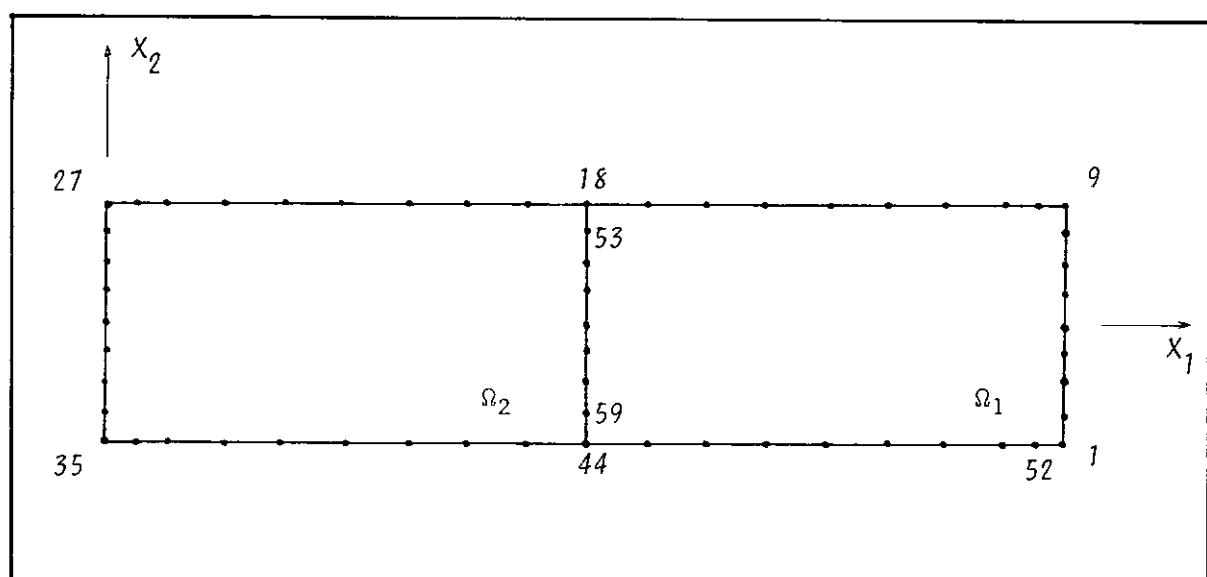


FIGURA IV.39 - Discretização 7: 2 regiões, 52 nós externos e uma interface de 9 nós (dois nós externos).

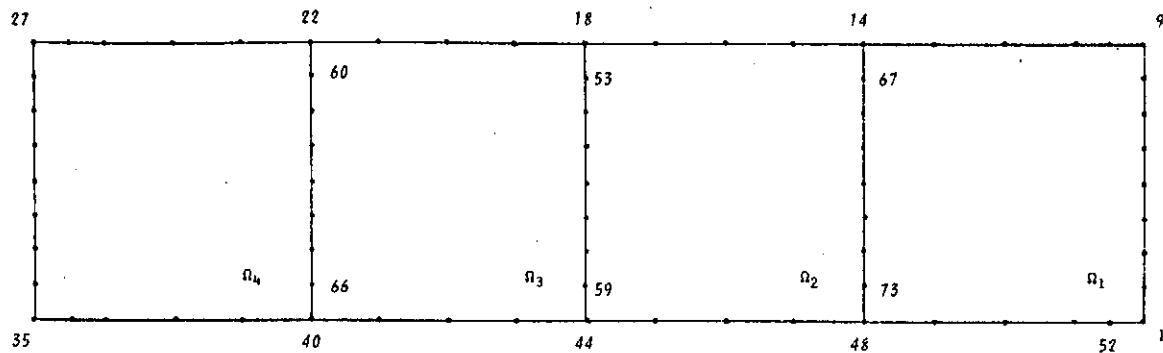


FIGURA IV. 40 - Discretização 8: 4 regiões, 52 nós externos e três interfaces de 9 nós (dois nós externos).

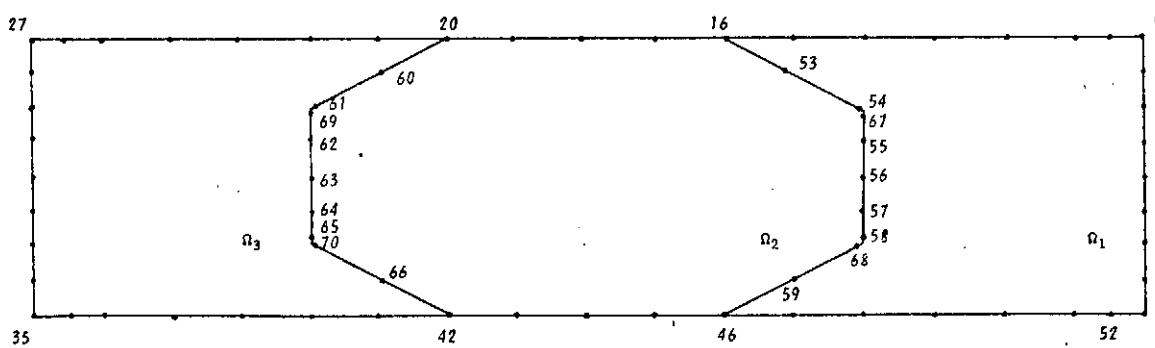


FIGURA IV. 41 - Discretização 9: 3 regiões, 52 nós externos e duas interfaces de 11 nós (dois nós externos e dois pontos com descontinuidade especial).

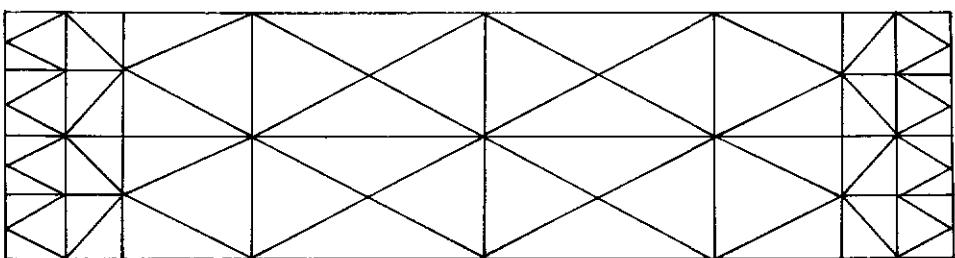


FIGURA IV.42 - Malha 1: 51 nós, 63 elementos "EPTTL".

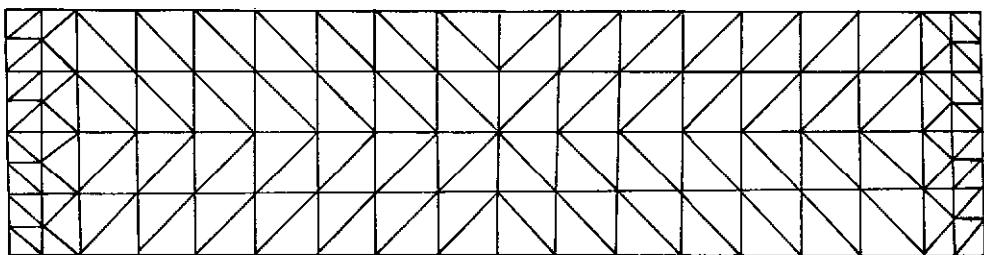


FIGURA IV.43 - Malha 2: 111 nós, 168 elementos "EPTTL".

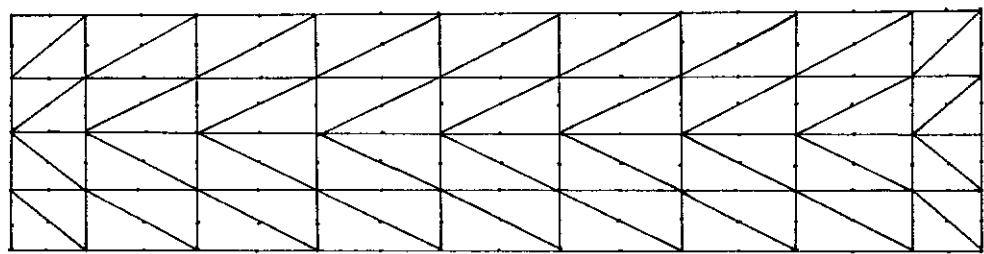


FIGURA IV.44 - Malha 3: 171 nós, 72 elementos "EPTTQ".

Resultados Numéricos

QUADRO IV.10 - Deslocamentos (u_2) do eixo da viga para a carga no balanço

Pontos Discret.	MEC - 52 nós externos				MEF	Solução Analítica
	4	7	8	9		
I ₅	-0,4881	-0,4912	-0,4841	-0,4867	-0,5234	-0,4846
I ₆	-0,7167	-0,7228	-0,7117	-0,7176	-0,7750	-0,7193
I ₇	-0,9707	-0,9803	-0,9645	-0,9746	-1,0453	-0,9813
I ₈	-1,2419	-1,2550	-1,2350	-1,2494	-1,3385	-1,2615
I ₉	-1,3813	-1,3962	-1,3740	-1,3906	-1,4890	-1,4056
5	-1,5220	-1,5382	-1,5142	-1,5331	-1,6408	-1,5508

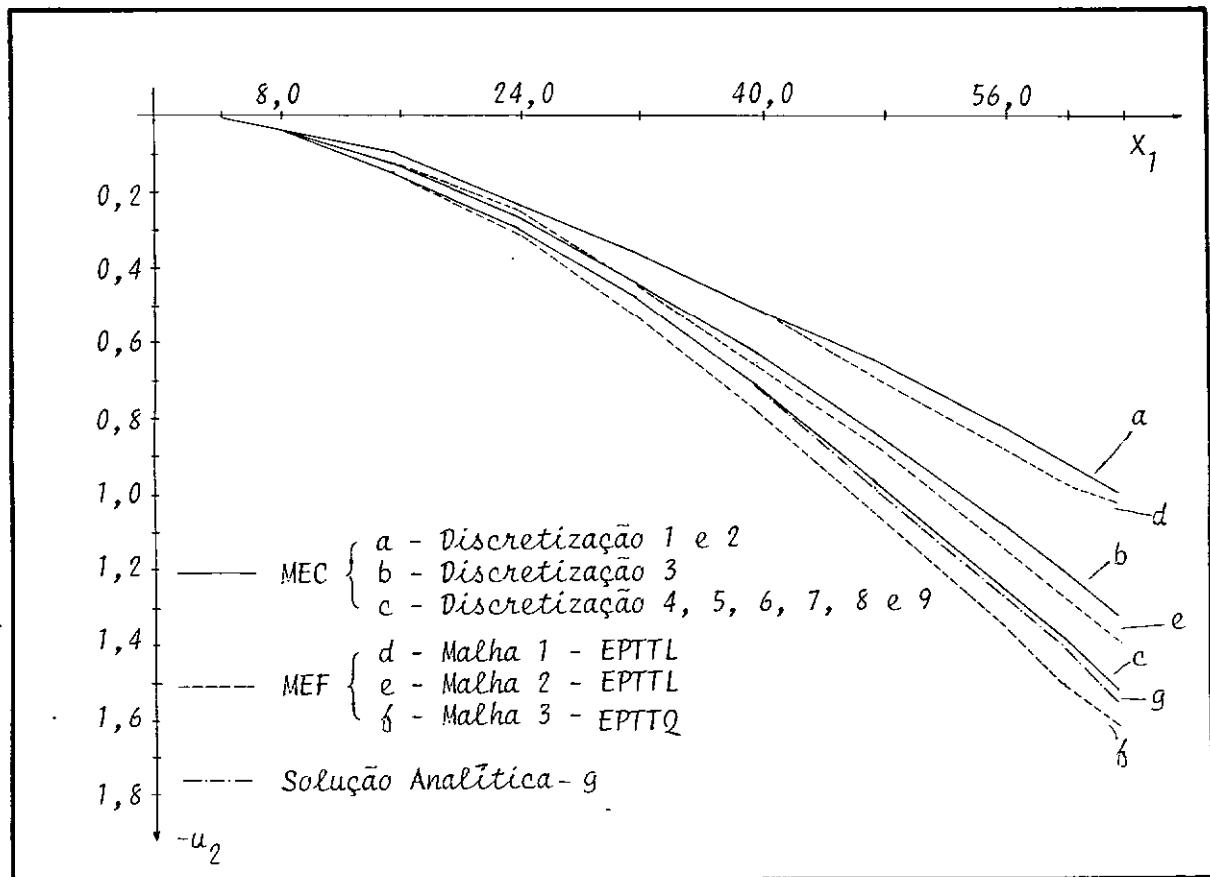


FIGURA IV.45 - Deslocamentos ($-u_2$) do eixo da viga para a carga no balanço.

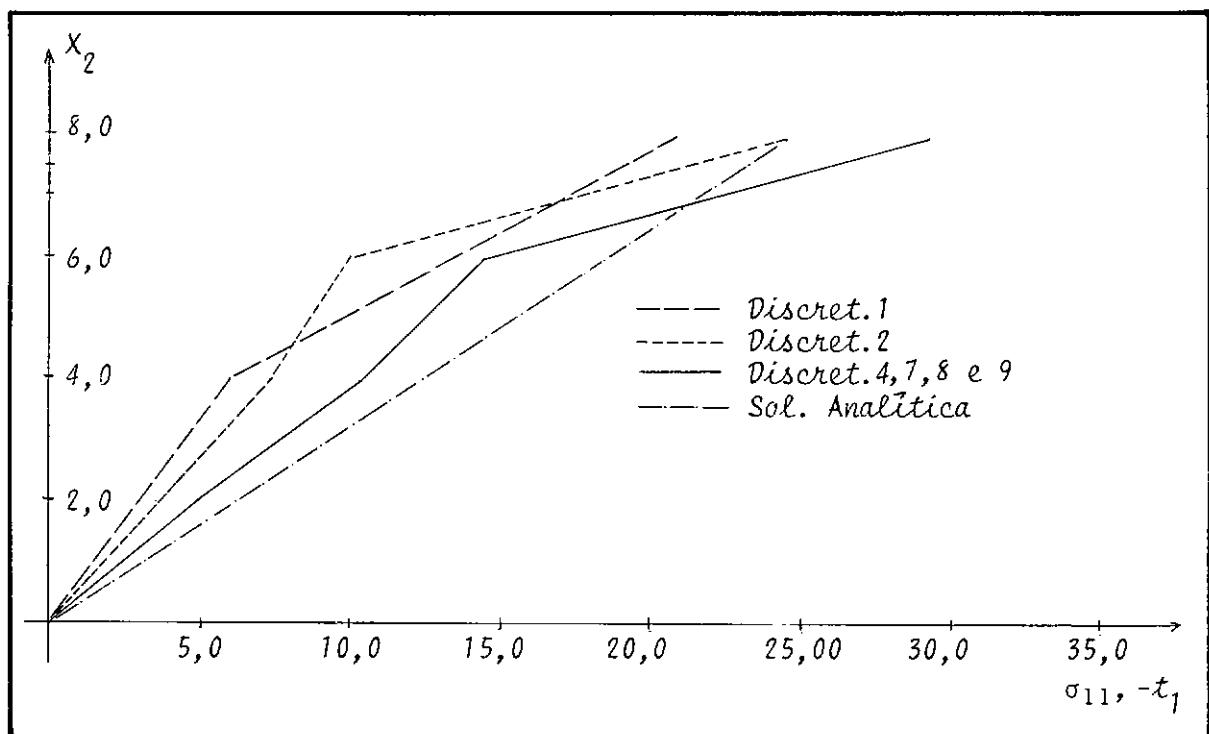


FIGURA IV.46a - Tensões normais (σ_{11}) e forças de superfície ($-t_1$) na extremidade engastada, na direção X_1 , para carga no balanço.

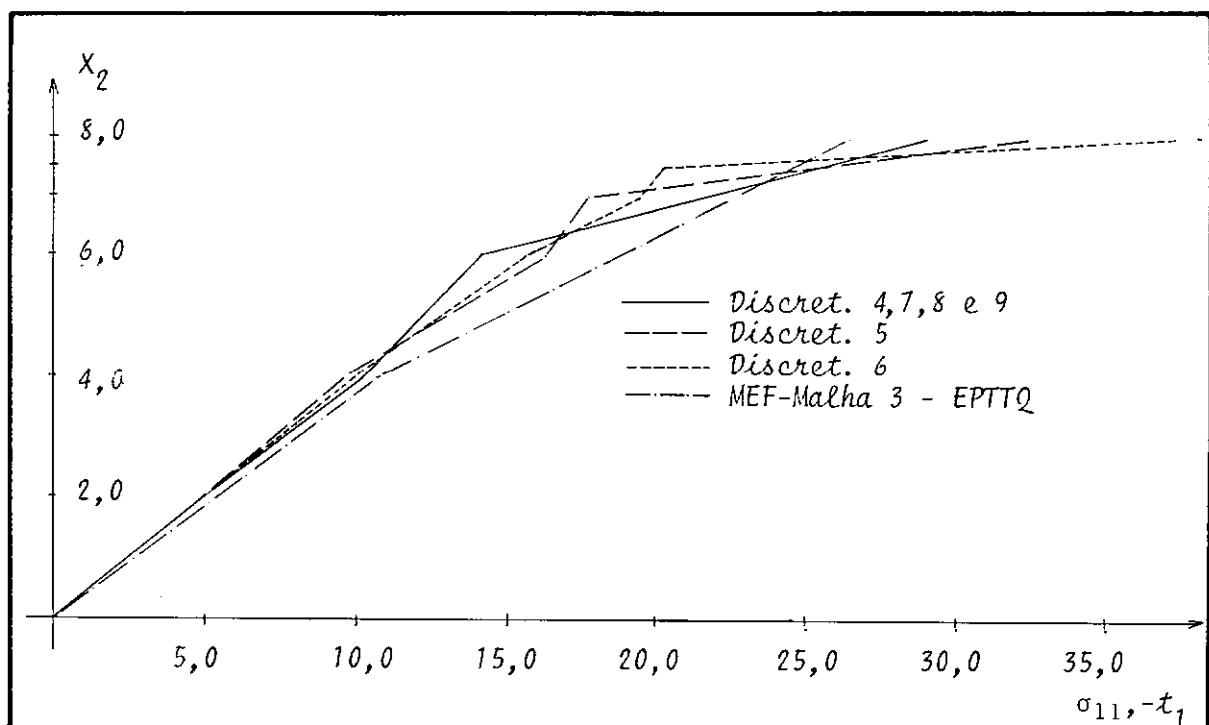


FIGURA IV.46b - Tensões normais (σ_{11}) e forças de superfície ($-t_1$) na extremidade engastada, na direção X_1 , para carga no balanço.

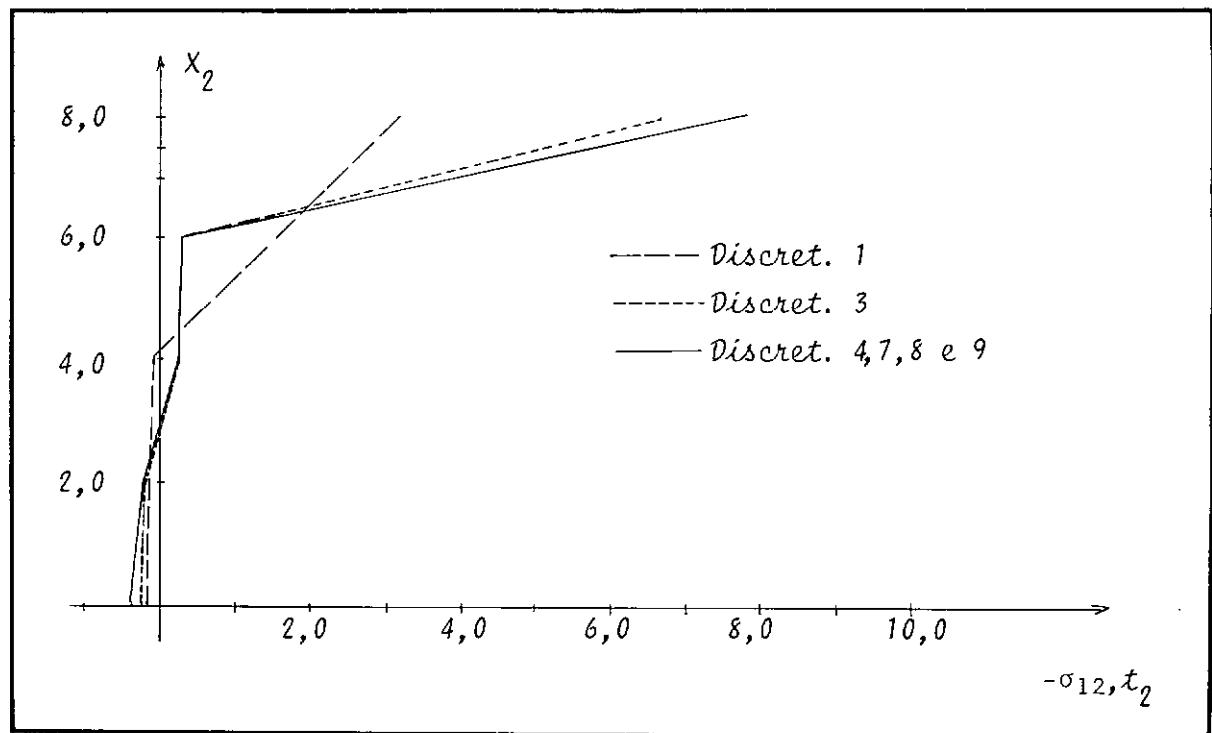


FIGURA IV.47a - Tensões cisalhantes ($-\sigma_{12}$) e forças de superfície (t_2) na extremidade engastada para carga no balanço.

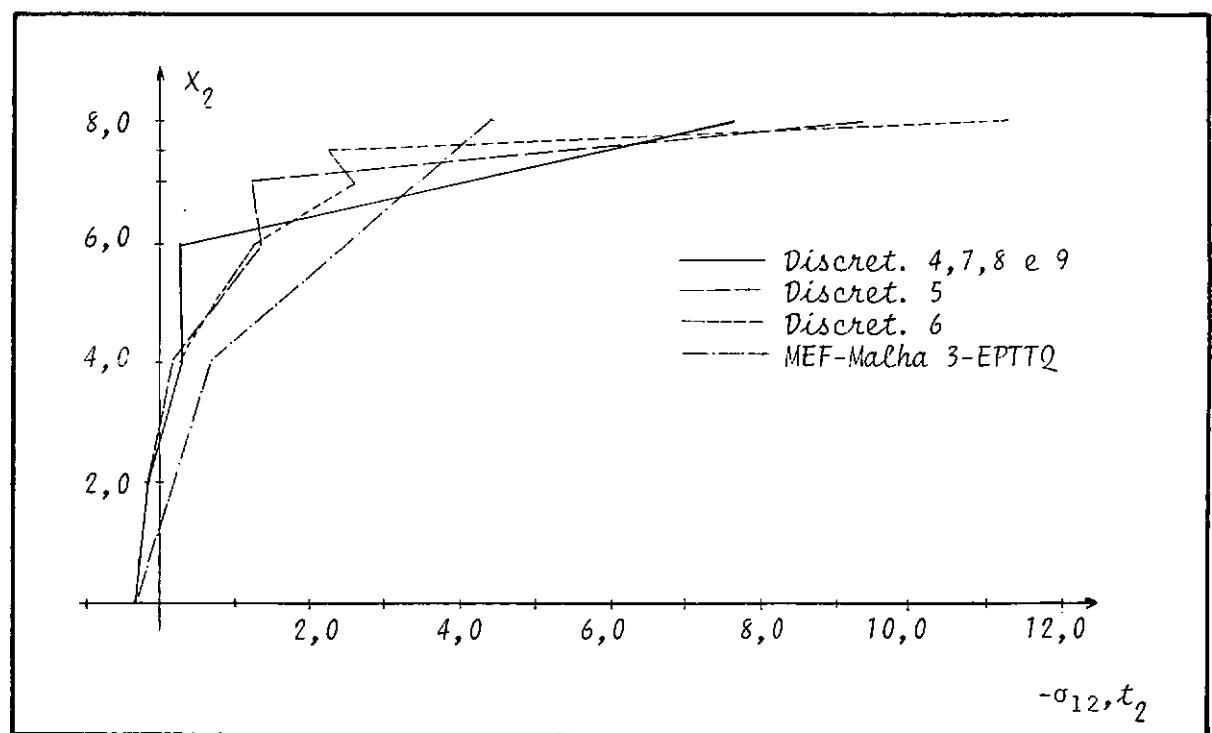


FIGURA IV.47b - Tensões cisalhantes ($-\sigma_{12}$) e forças de superfície (t_2) na extremidade engastada para carga no balanço.

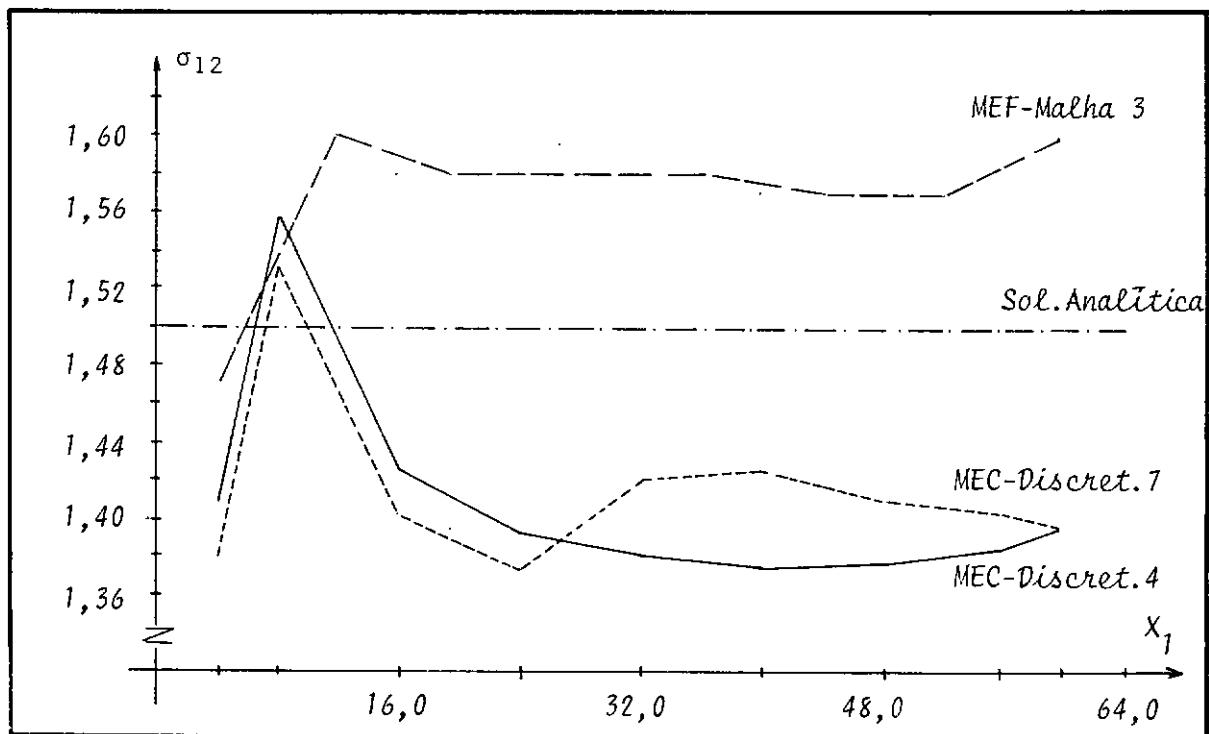


FIGURA IV.48 - Variação das tensões cisalhantes ($-\sigma_{12}$) ao longo do eixo da viga para carga no balanço.

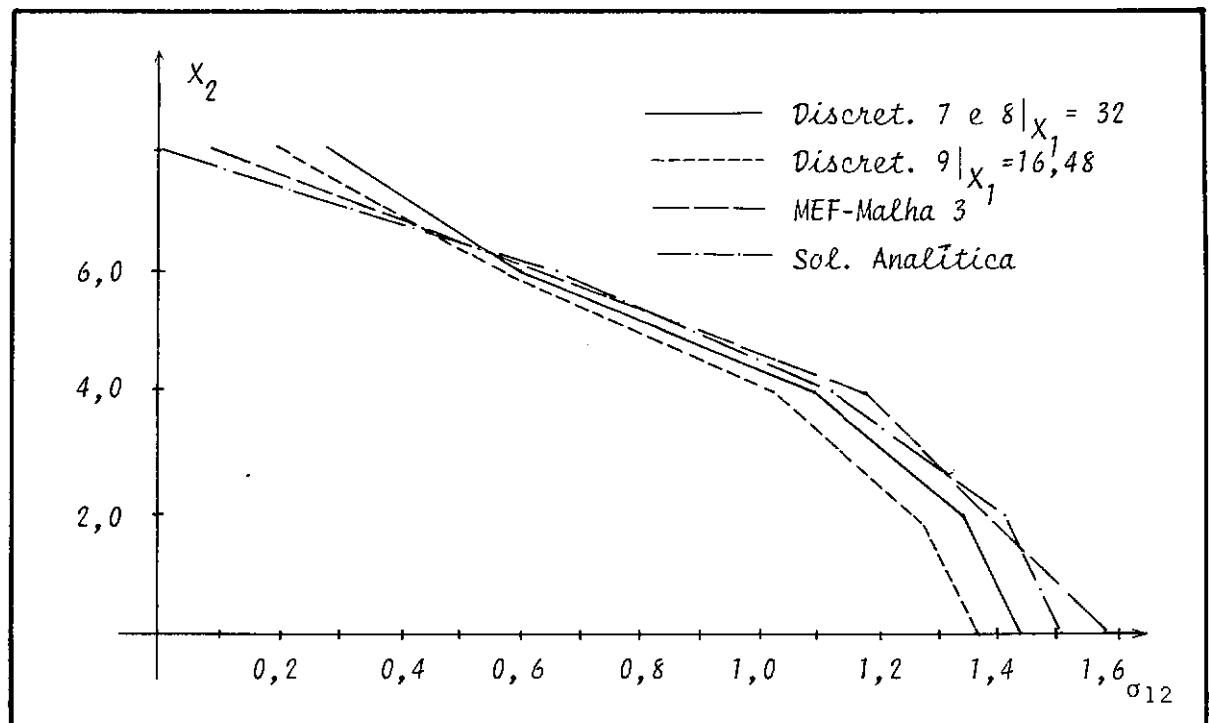
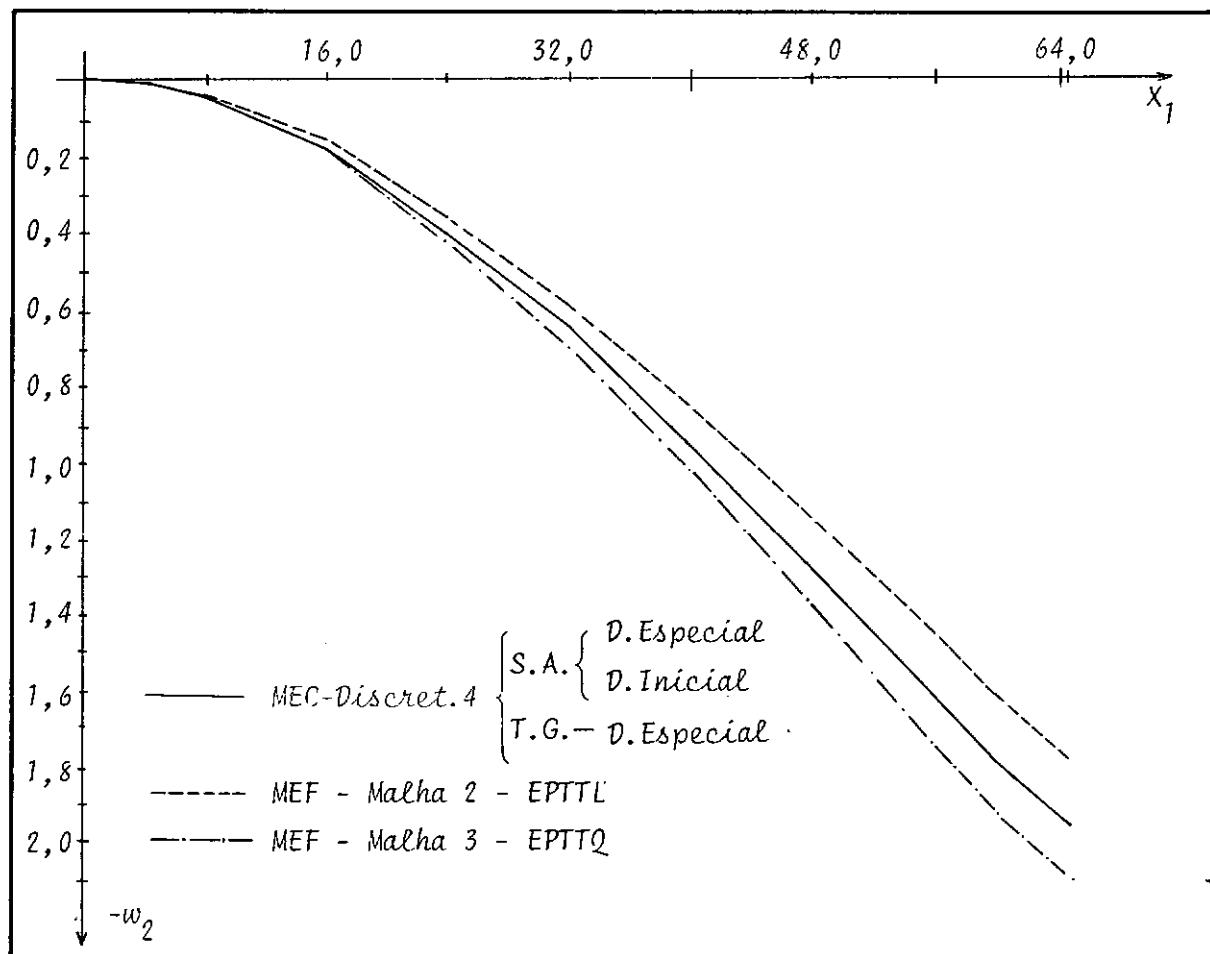


FIGURA IV.49 - Tensões cisalhantes (σ_{12}) em seções transversais para a carga no balanço.

QUADRO IV.11 - Deslocamento do eixo da peça ($-w_2$) para o peso próprio.

MEC-Discret. 4-52 nós			MEF		
Semi-Analítica		T. Galerkin	Malha 2	Malha 3	
	D. Inicial	D. Especial	D. Especial	EPTTL	EPTTQ
I ₅	-0,1787	-0,1801	-0,1784	-0,1623	-0,1875
I ₆	-0,2494	-0,2514	-0,2490	-0,2267	-0,2625
I ₇	-0,3232	-0,3257	-0,3226	-0,2933	-0,3408
I ₈	-0,3976	-0,4008	-0,3970	-0,3607	-0,4201
I ₉	-0,4348	-0,4382	-0,4340	-0,3607	-0,4596
5	-0,4716	-0,4753	-0,4709	-0,4276	-0,4989

FIGURA IV.50 - Deslocamentos no eixo da peça ($-w_2$) para carga no balanço mais peso próprio.

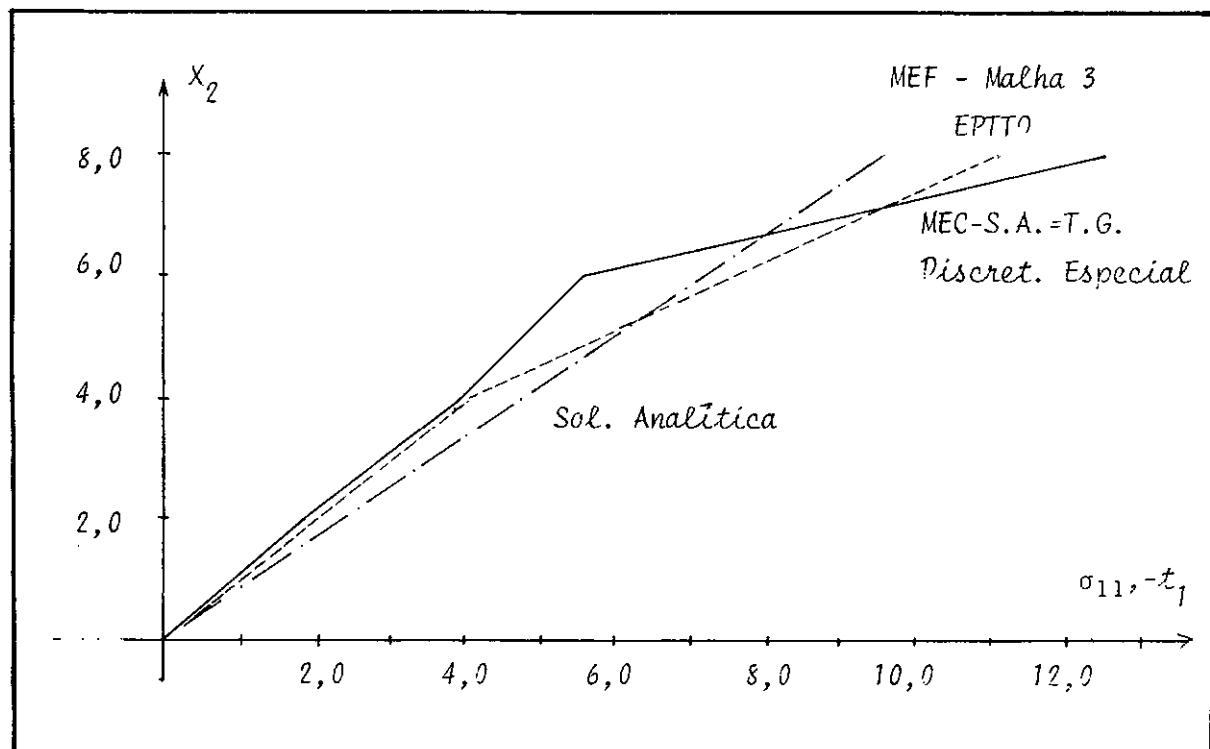


FIGURA IV.51 - Tensões normais (σ_{11}) e forças de superfície na extremidade engastada para o peso próprio.

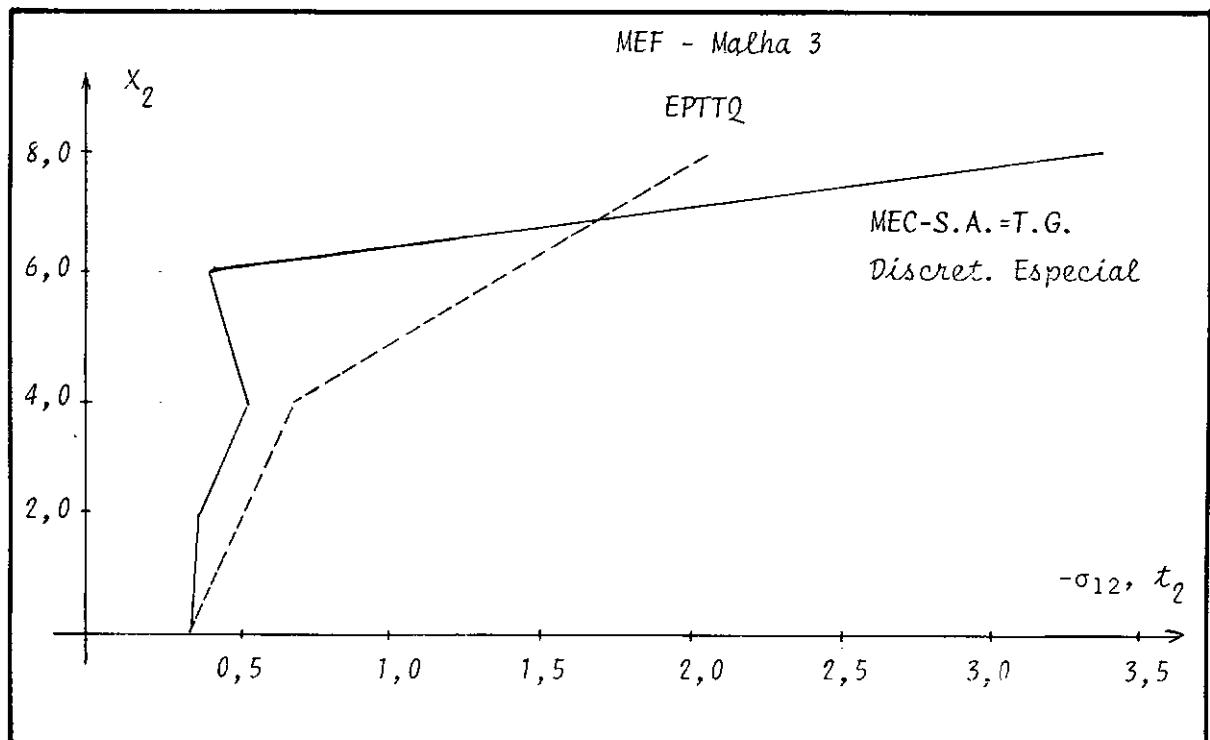


FIGURA IV.52 - Tensões cisalhantes ($-\sigma_{12}$) e forças de superfície (t_2), na extremidade engastada para o peso próprio.

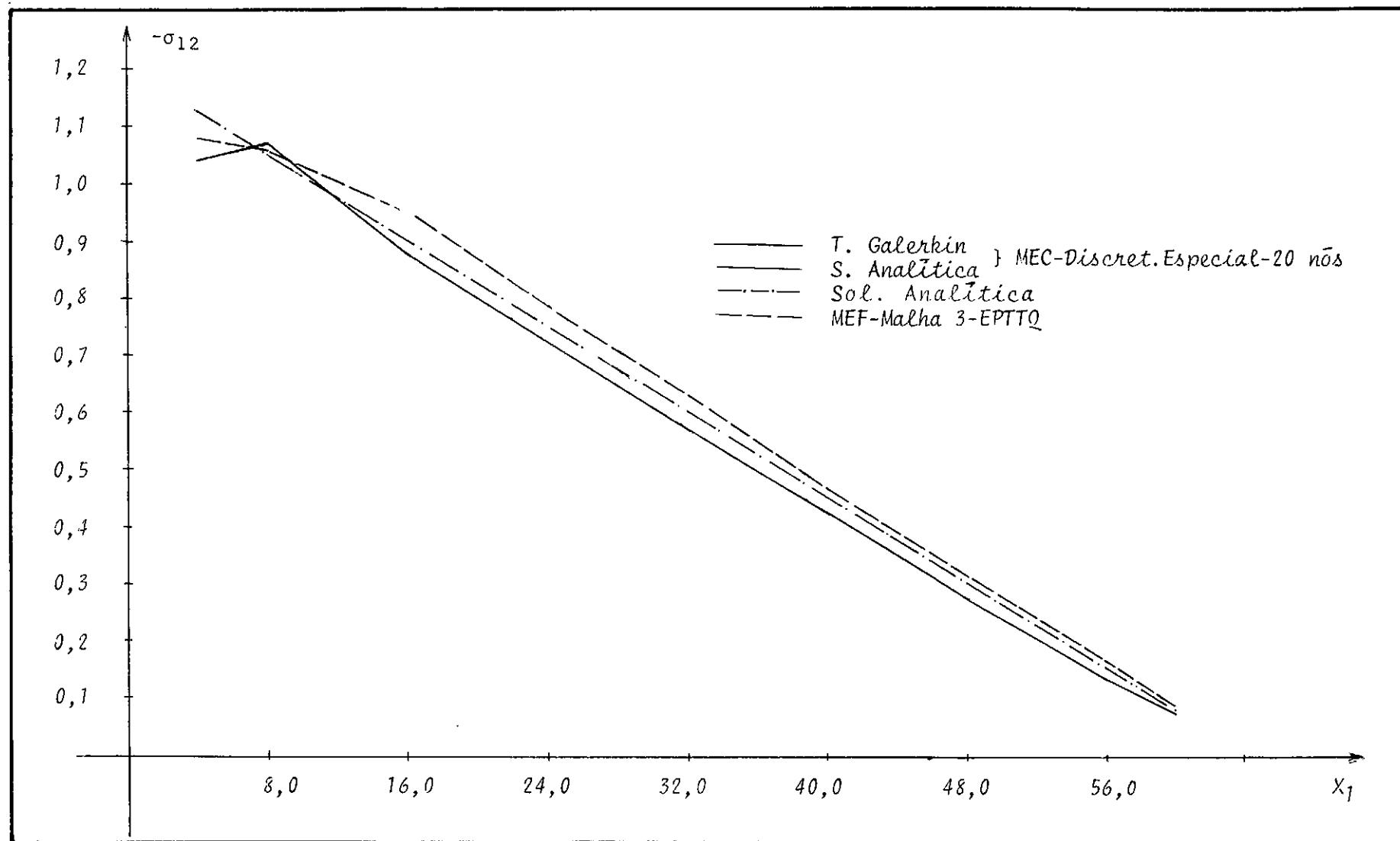


FIGURA IV.53 - Variação das tensões cisalhantes (σ_{12}) ao longo do eixo da viga, para o peso próprio.

Discussão

Neste exemplo, onde se utilizam várias discretizações para análise do problema pelo MEC, nota-se uma convergência dos deslocamentos para a solução analítica, à medida em que se melhoram as discretizações.

Verifica-se novamente a existência de singularidades nas soluções das tensões, bem como da presença das "orelhas" nos resultados obtidos com o MEC.

Os resultados no contorno obtidos com o MEC para as forças de massa (peso próprio) apresentam reduzida diferença caso utilize-se a formulação semi-analítica ou o tensor de Galerkin, o mesmo ocorrendo para as tensões cisalhantes nos pontos internos do eixo da viga ao longo de todo o seu comprimento. . A utilização da discretização especial para obtenção do efeito das forças de massa mostra-se eficiente, com variação reduzida em relação aos resultados obtidos com a discretização inicial, onde são obtidas as equações.

A introdução de interfaces praticamente não alteram os resultados, tanto para deslocamentos quanto para tensões. Nota-se também que na discretização 9 são utilizadas equações adicionais.

Os resultados para o MEF foram obtidos através dos sistema LORANE [18].

V - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Pela análise dos resultados obtidos e apresentados, chega-se às seguintes conclusões:

- i) A utilização do MEC com elementos lineares conduz a resultados bastantes confiáveis com discretizações não muito pobres, tanto para os pontos do contorno quanto para pontos internos não muito próximos ao contorno, especialmente para os deslocamentos;
- ii) Os resultados em pontos internos, especialmente as tensões, estão condicionados a relação entre a distância do ponto ao contorno e o comprimento dos elementos desta região. Para pontos situados a uma distância inferior ao comprimento dos elementos das proximidades os resultados são influenciados pelo número de pontos de integração utilizados, bem como pelas condições existentes no contorno. Para uma distância não inferior ao comprimento dos elementos os resultados obtidos nos exemplos estudados mostram-se estabilizados;
- iii) A utilização das equações adicionais mostra-se bastante confiável, tanto para o contorno externo quanto para o interior de interfaces. Este fato pode ser em parte explicado pelos bons resultados obtidos para os deslocamentos, em que pesem as complicações introduzidas na formulação computacional;
- iv) O emprego da formulação semi-analítica para avaliação das forças de massa gravitacionais conduziu a bons resultados tanto no contorno quanto no interior, para os problemas estudados considerando-se uma região ou sub-regiões em fila.
- v) A formulação através do vetor de Galerkin apresentou bons resultados para o contorno bem como para pontos internos nos problemas estudados com uma única região.
- vi) A utilização de interfaces e sub-divisão do domínio condu-

ziu a resultados muito bons, praticamente não influenciando os valores no contorno. Os resultados dos pontos internos foram também satisfatórios, tendo-se em vista a conclusão ii.

Para que possam ser obtidos melhores resultados, bem como visando uma ampliação do campo de utilização, os seguintes aspectos devem ser estudados e introduzidos numa futura formulação para elasticidade linear bidimensional pelo MEC:

- i) utilização de integração numérica seletiva, com 2, 4 ou 6 pontos de integração para geração das equações no contorno e 2, 4 ou 10 pontos de integração para obtenção dos valores no interior, para maior eficiência computacional;
- ii) utilização de elementos não-conformes, ou seja, elementos com nós funcionais apenas no seu interior, para facilitar o tratamento de problemas com descontinuidade especial e de nós externos de interfaces de sub-regiões;
- iii) utilização do tensor de Galerkin para a transformação dos efeitos de força centrífuga e força devida a temperatura para o contorno;
- iv) discretização do domínio para consideração de outras forças que aí atuem, bem como para consideração de estados iniciais de tensões ou deformações;
- v) utilização de condições de simetria sem a necessidade de integração dos eixos de simetria, para um melhor tratamento computacional bem como a consideração de domínio infinito e soluções fundamentais particulares;
- vi) para o caso de sub-regiões, um tratamento computacional eficiente deve ser implantado para o caso de sub-regiões em fila, bem como o desenvolvimento do caso geral de sub-regiões.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - TIMOSHENKO, S.P. and GOODIER, J.N. *Theory of Elasticity*, Tokio, McGraw-Hill, 1970.
- 2 - HALBRITTER, A.L. *Comunicação Particular*, 1978,
- 3 - BREBBIA, C.A. *The Boundary Element Method for Engineers*, London, UK, Pentech Press, 1978.
- 4 - MANSUR, W.J.; HALBRITTER, A.L. e TELLES, J.C.F. *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Elasticidade Bidimensional*, Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ-Programa de Engenharia Civil, 1978.
- 5 - CRUSE, T.A. *Application of the Boundary Integral Equation Method to Three Dimensional Stress Analysis*, Computer & Structures, Vol. 3, Num. 3, pgs. 509-527, 1973.
- 6 - BREBBIA, C.A. and WALKER, S. *Boundary Element Techniques in Engineering*, London, UK, Newnes-Butterworths, 1980.
- 7 - TELLES, J.C.F. *On the Application of the Boundary Element Method to Inelastic Problems*, Southampton University, Ph.D. Thesis, 1981.
- 8 - RICCARDELLA, P.C. *An Implementation of the Boundary Integral Technique for Planar Problems in Elasticity and Elastoplasticity*, Pittsburg, USA, Report No-SM-73-10, Dept. Mech. Engng., Carnegie Mellon Univ., 1973.
- 9 - LACHAT, J.A. *A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics*, Ph.D. Thesis, University of Southampton, UK, 1975.

- 10 - LACHAT, J.C. and WATSON, J.O. *Progress in the Use of Boundary Integral Equations, Illustrated by Examples*, Computer Meth. in Applied Mech. and Engng., North-Holland Publishing Company, Vol. 10, Num. 3, pgs. 273-289, 1977.
- 11 - RIZZO, F.J. *An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics*, Quart. Appl. Math., Vol. 25, pgs. 83-95, 1967.
- 12 - CHAUDONNERET, M. *On the Descontinuity of Stress Vector in the Boundary Integral Equation Method for Elastic Analysis*, Proc. 1st. Int. Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods (Brebbia Ed.), pgs. 185-194, 1978.
- 13 - WATSON, J.O. *Elastostatics, Course Notes on Boundary Element Methods*, Southampton University, 1977.
- 14 - DANSON, D.J. *A Boundary Element - Formulation of Problems in Linear Isotropic Elasticity with Body Forces*. California, USA, Proc. 3rd. Int. Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods (Brebbia Ed.), pgs. 105-122, 1981.
- 15 - JASWON, M.A. and PONTER, A.R. *An Integral Equation Solution of the Torsion Problem*, Proc. Roy. Soc. A, 273, 1963.
- 16 - SYMM, G.T. *Integral Equation Methods in Potential Theory*. Proc. Roy. Soc. A, 275, 1963.
- 17 - BESUNER, P.M. and SNOW, P.W. *Application of the Two-Dimensional Integral Equation Method to Engineering Problems*, New York, Appl. Mech. Div., ASME 11, pgs. 101-117, 1975.
- 18 - FERRANTE, A.J.; SANTOS, M.I.G.; CHAGAS, E.F. e FRANCO, J.S.G. *A Linguagem LORANE Linear para Análise Estrutural por computador*, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 1977.

- 19 - CRUSE, T.A. *An Improved Boundary - Integral Equation Method for Three-Dimensional Elastic Stress Analysis*, Computer Struct. 4, 741-754, 1974.
- 20 - SOBRAL, T.J. *O Método dos Elementos de Fronteira - Formulação e Aplicações*, Tese de Mestrado, EPUSP, 1982.
- 21 - BESUNER, P.M. *The Application of the Boundary - Integral Equation Method to the Solution of Engineering Stress Analysis and Fracture Mechanics Problems*, Nuclear Engng Design, 43, 161-173, 1977.
- 22 - CRUSE, T.A. *Application of the Boundary - Integral Equation Solution Method in Solid Mechanics*, Proc. Int. Conf. on Variational Methods in Engineering, Southampton, 1972.
- 23 - RIZZO, F.J. and SHIPPY, D.J. *An Advanced Boundary Integral Equation Method for Three - Dimensional Thermoelasticity*, Int. Journal for Numerical Methods in Engng, Vol.11, 1753-1768, 1977.
- 24 - STIPPES, M. and RIZZO, F.J. *A note on the Body Force Integral of Classical Elastostatics*, ZAMP, Vol. 28, 339- 341, 1977.
- 25 - JASWON, M.A. and SYMM, G.T. *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*, Academic Press, New York, 1977.
- 26 - BANERJEE, P.K. and BUTTERFIELD, R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, U.K., 1981.
- 27 - BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F. and WROBEL, L.C. *Boundary Elements: Fundamentals and Applications in Engineering*, Springer Verlag, New York, 1983.

- 28 - TELLES, J.C.F.; HALBRITTER, A.L. and MANSUR, W.J. *Aplicações do Método dos Elementos de Contorno a Problemas de Campo*, Conf. sobre Análise, Projeto e Construção de Estr. de Centrais Nucleares, UFRGS, Porto Alegre, 1978.
- 29 - SA, P.A.C.D. *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno a Problemas de Campo*, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1979.
- 30 - CUROTTTO, C.L. *Método dos Elementos de Contorno para Elastocidade Tridimensional*, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1981.
- 31 - NAKAGUMA, R.K. *Three Dimensional Elastostatics Using the Boundary Element Method*, Ph. D. Thesis, Southampton University, 1979.
- 32 - ROARK, R.J. and YOUNG, W. *Formulas for Stress and Strain*, 5th, Ed., McGraw-Hill, Tokyo, 1975.
- 33 - BANERJEE, P.K. *Analysis of Two Dimensional Problems of Elastostatics Involving Body Forces*, Course Notes on *Boundary Element Methods*, Southampton University, 1977.
- 34 - FERRANTE, A.J.; SANTOS, M.I.G. e CHAGAS, E.F. *Linguagem Orientada para Análise Estrutural - Sistema LORANE Linear*. UFRGS.

APÊNDICES

A - DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO-FORMULÁRIOS

A.1 - Cálculo dos Coeficientes das Submatrizes \underline{G}_{Ic} , \underline{H}_{Ic} e C_{ij} por Integração Analítica

- Cálculo da Submatriz \underline{G}_{Ic} , para $I = N1(Ic)$

a) Direção X_1

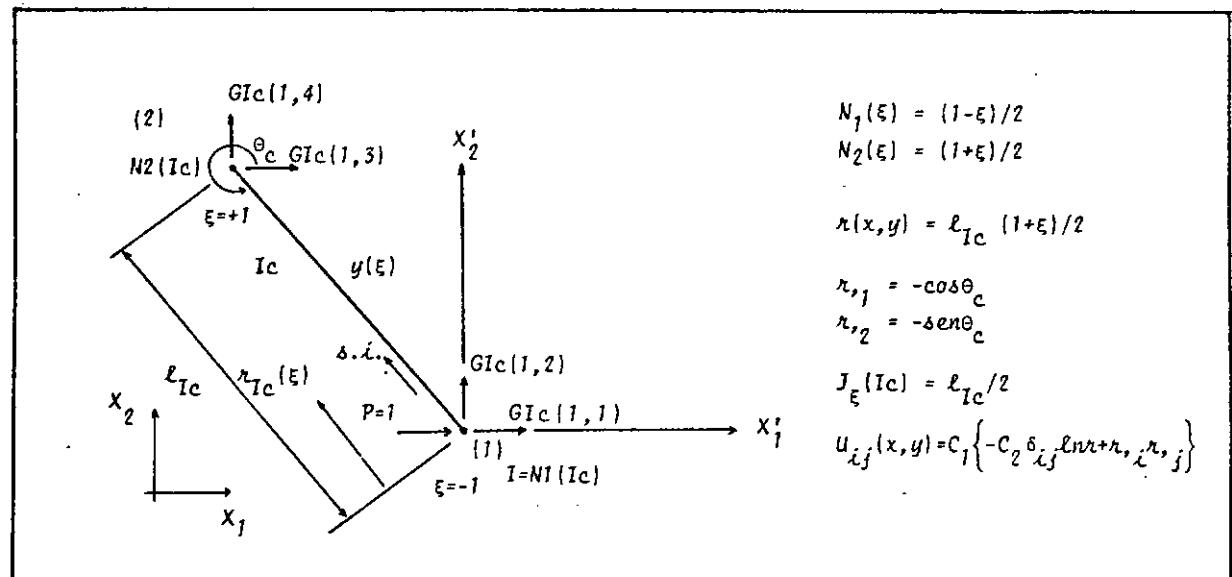


FIGURA A.1 - Representação dos coeficientes Gic devido a carga unitária atuando no nó inicial na direção X_1 .

$$\begin{aligned}
 Gic(1,1) &= \int_{-1}^1 u_{11} N_1 J_\xi d\xi = \int_{-1}^1 c_1 \left\{ -c_2 \ln(r) + r_{,1} r_{,1} \right\} ((1-\xi)/2)(\ell_{Ic}/2) d\xi \\
 &= c_1 (\ell_{Ic}/2) \left\{ -c_2 (\ln(\ell_{Ic}) - 3/2) + \cos^2 \theta_c \right\}. \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Gic(1,2) &= \int_{-1}^1 u_{12} N_1 J_\xi d\xi = \int_{-1}^1 c_1 r_{,1} r_{,2} ((1-\xi)/2)(\ell_{Ic}/2) d\xi \\
 &= c_1 (\ell_{Ic}/2) \sin \theta_c \cos \theta_c. \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Gic(1,3) &= \int_{-1}^1 u_{11} N_2 J_\xi d\xi = \int_{-1}^1 c_1 \left\{ -c_2 \ln(r) + r_{,1} r_{,1} \right\} ((1+\xi)/2)(\ell_{Ic}/2) d\xi \\
 &= c_1 (\ell_{Ic}/2) \left\{ -c_2 (\ln(\ell_{Ic}) - 1/2) + \cos^2 \theta_c \right\}. \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{Ic}(1,4) &= \int_{-1}^1 u_{12} N_2 J_\xi d\xi = \int_{-1}^1 c_1 r_{12} ((1+\xi)/2)(\ell_{Ic}/2) d\xi \\
 &= c_1 (\ell_{Ic}/2) \sin \theta_c \cos \theta_c = G_{Ic}(1,2). \quad (A.4)
 \end{aligned}$$

b) Direção X_2

$$G_{Ic}(2,1) = \int_{-1}^1 u_{21} N_1 J_\xi d\xi = c_1 (\ell_{Ic}/2) \sin \theta_c \cos \theta_c = G_{Ic}(1,2). \quad (A.5)$$

$$G_{Ic}(2,2) = \int_{-1}^1 u_{22} N_1 J_\xi d\xi = c_1 (\ell_{Ic}/2) \left\{ -c_2 (\ln(\ell_{Ic}) + 3/2) + \sin^2 \theta \right\}. \quad (A.6)$$

$$G_{Ic}(2,3) = \int_{-1}^1 u_{21} N_2 J_\xi d\xi = c_1 (\ell_{Ic}/2) \sin \theta_c \cos \theta_c = G_{Ic}(1,2). \quad (A.7)$$

$$G_{Ic}(2,4) = \int_{-1}^1 u_{22} N_2 J_\xi d\xi = c_1 (\ell_{Ic}/2) \left\{ -c_2 (\ln(\ell_{Ic}) - 1/2) + \sin^2 \theta \right\}. \quad (A.8)$$

- Cálculo dos Elementos da Sub-Matriz H_{Ic} , para $I = NI(Ic)$ Situados Fora das Diagonais Principais do Sistema Final

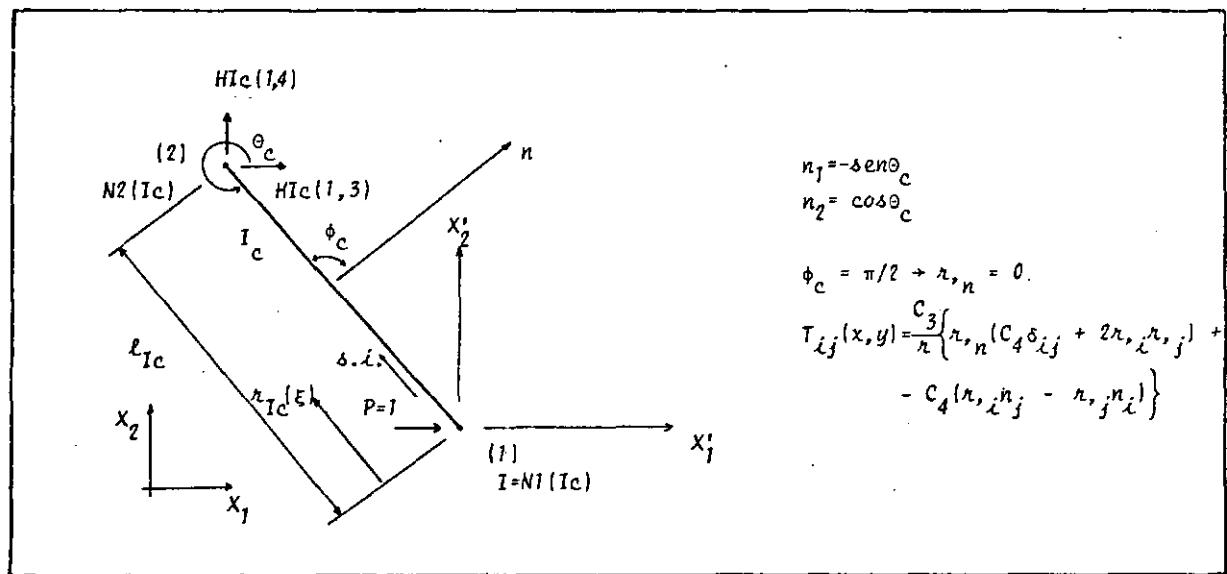


FIGURA A.2 - Representação dos coeficientes H_{Ic} situados fora da diagonal principal do sistema, para carga unitária atuando no nó inicial, na direção X_1 .

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{11}(x, y) = \frac{c_3}{\pi} \left\{ -c_4(r_{11}n_1 - r_{11}n_1) \right\} = 0 \\ T_{12}(x, y) = \frac{c_3}{\pi} \left\{ -c_4(r_{12}n_2 - r_{12}n_1) \right\} \\ T_{21}(x, y) = \frac{c_3}{\pi} \left\{ -c_4(r_{21}n_1 - r_{12}n_2) \right\} = -T_{12}(x, y) \\ T_{22}(x, y) = \frac{c_3}{\pi} \left\{ -c_4(r_{22}n_2 - r_{12}n_2) \right\} = 0 \end{array} \right. \quad (A.9)$$

a) Direção x_1

$$HIC(1,3) = \int_{-1}^1 T_{11} N_2 J_\xi d\xi = 0 \quad (A.10)$$

$$HIC(1,4) = \int_{-1}^1 T_{12} N_2 J_\xi d\xi = \int_{-1}^1 \frac{-c_3 c_4}{\frac{\ell_{IC}}{2}(1+\xi)} \left\{ (-\cos \theta_C)(\cos \theta_C) - (-\sin \theta_C)(-\sin \theta_C) \right\} \frac{\ell_{IC}}{2} \frac{1}{2}(1+\xi) d\xi \\ = c_3 c_4. \quad (A.11)$$

b) Direção x_2

$$HIC(2,3) = \int_{-1}^1 T_{21} N_2 J_\xi d\xi = -c_3 c_4 = -HIC(1,4) \quad (A.12)$$

$$HIC(2,4) = \int_{-1}^1 T_{22} N_2 J_\xi d\xi = 0 \quad (A.13)$$

- Cálculo dos Coeficientes das Diagonais Principais da Matriz \hat{H} .

a) Cálculo da Matriz \hat{H}_p

$$\hat{H}^d(2*I-1, 2*I-1) = \hat{H}_p(1,3) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{1-\epsilon} T_{11} N_2 J_\xi d\xi = 0 \quad (A.14)$$

$$\hat{H}^d(2*I-1, 2*I) = \hat{H}_p(1,4) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{1-\epsilon} T_{12} N_2 J_\xi d\xi$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{1-\epsilon} \frac{c_4}{\ell p \frac{1}{2}(1-\xi)} ((\cos \theta_c) (\cos \theta_c) - (\sin \theta_c) (-\sin \theta_c)) \frac{\ell_p}{2} \frac{1}{2}(1+\xi) d\xi \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{c_4}{2} \int_{-1}^{1-\epsilon} \frac{(1+\xi)}{(1-\xi)} d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{c_4}{2} \left\{ 2 \ln(2) - 2 + \epsilon - 2 \ln(\epsilon) \right\} \quad (A.15)
 \end{aligned}$$

$$\hat{H}^d(2^*I, 2^*I-1) = \hat{H}_p(2, 3) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{c_4}{2} \left\{ 2 \ln(2) - 2 + \epsilon - 2 \ln(\epsilon) \right\} = -\hat{H}^d(2^*I-1, 2^*I) \quad (A.16)$$

$$\hat{H}^d(2^*I, 2^*I) = \hat{H}_p(2, 4) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{1-\epsilon} T_{22} N_2 J_\xi d\xi = 0 \quad (A.17)$$

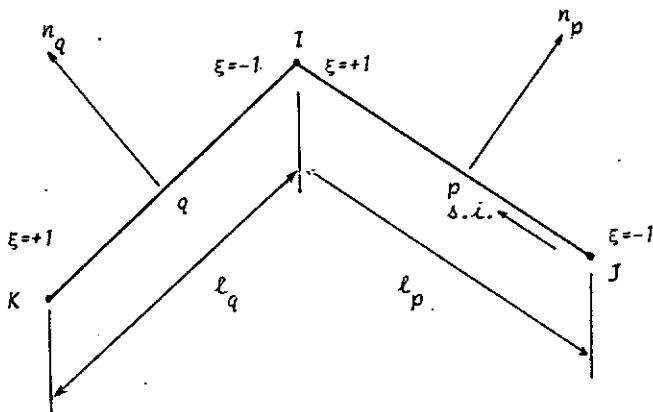


FIGURA A.3 - Esquema dos elementos adjacentes ao nó I.

b) Cálculo da Matriz \hat{H}_q

$$\hat{H}^e(2^*I-1, 2^*I-1) = \hat{H}_q(1, 1) = \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{-1+\epsilon'}^1 T_{11} N_1 J_\xi d\xi = 0 \quad (A.18)$$

$$\hat{H}^e(2^*I-1, 2^*I) = \hat{H}_q(1, 2) = \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{-1+\epsilon'}^1 T_{12} N_1 J_\xi d\xi =$$

$$= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \frac{c_4}{2} \int_{-1+\epsilon'}^1 \frac{(1-\xi)}{(1+\xi)} d\xi = \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} -\frac{c_4}{2} \left\{ 2 \ln(2) - 2 + \epsilon' - 2 \ln(\epsilon') \right\} \quad (A.19)$$

$$\hat{H}^e(2^{*I}, 2^{*I-1}) = \hat{H}_q(2, 1) = \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \frac{C_4}{2} \left\{ 2 \ln(2) - 2 + \epsilon' - 2 \ln(\epsilon') \right\} = - \hat{H}^e(2^{*I-1}, 2^{*I}) \quad (\text{A.20})$$

$$\hat{H}^e(2^{*I}, 2^{*I}) = \hat{H}_q(2, 2) = \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{-1+\epsilon}^1 T_{22} N_1 J_\xi d\xi = 0 \quad (\text{A.21})$$

c) Cálculo do Valor Principal da Integral

Considerando que:

$$\begin{cases} \frac{dS_p}{d\xi_p} = \frac{\ell_p}{2}, \quad \frac{dS_q}{d\xi_q} = \frac{\ell_q}{2} \\ dS_p = dS_q \end{cases} \Rightarrow d\xi_p \ell_p = d\xi_q \ell_q \quad \therefore \quad \frac{d\xi_q}{d\xi_p} = \frac{\ell_p}{\ell_q} = \frac{\epsilon}{\epsilon'} \Rightarrow \epsilon = \frac{\epsilon' \ell_p}{\ell_q} \quad (\text{A.22})$$

Assim, resulta:

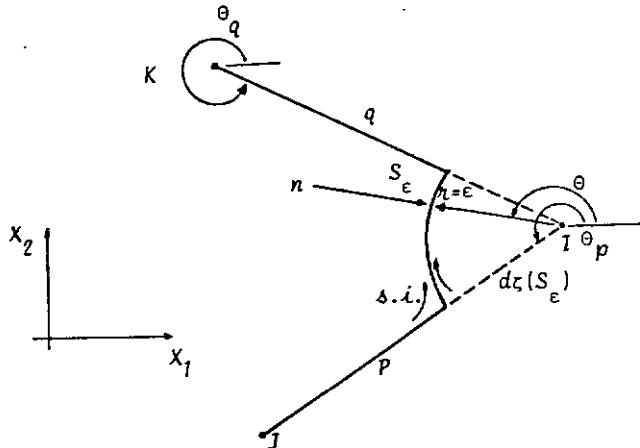
$$\hat{H}(2^{*I-1}, 2^{*I-1}) = \hat{H}(2^{*I}, 2^{*I}) = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$\hat{H}(2^{*I-1}, 2^{*I}) = \hat{H}^e(2^{*I-1}, 2^{*I}) + \hat{H}^d(2^{*I-1}, 2^{*I})$$

$$= \frac{C_4}{2} \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \left\{ 2 \ln(2) - 2 + \epsilon' - 2 \ln(\epsilon') - 2 \ln(2) + 2 - \epsilon' \cdot \frac{\ell_p}{\ell_q} + 2 \ln(\epsilon' \cdot \frac{\ell_p}{\ell_q}) \right\}$$

$$= C_4 \ln(\ell_p / \ell_q) = \begin{cases} \frac{(1-2v)}{4\pi(1-v)} \ln(\ell_p / \ell_q) & \text{para } \ell_p \neq \ell_q \\ 0 & \text{para } \ell_p = \ell_q \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

- Cálculo dos Coeficientes da Matriz $C_{ij}(x_I)$



$$\begin{aligned} r_{,1} &= \epsilon_{,1} = \cos\theta \\ r_{,2} &= \epsilon_{,2} = \sin\theta \\ r_{,n} &= \epsilon_{,n} = -1 \\ n_1 &= -\epsilon_{,1} = -\cos\theta \\ n_2 &= -\epsilon_{,2} = -\sin\theta \\ dS_\epsilon &= -rd\theta = -\epsilon d\theta \end{aligned}$$

$$C_{ij}(x_I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} T_{ij}(x_I, y) ds(y)$$

FIGURA A.4 - Representação da superfície S_ϵ para integração explícita.

$$\begin{aligned} T_{11}(x, y) &= \frac{C_3}{\pi} \left\{ -(C_4 + 2\cos^2\theta) - C_4((\cos\theta)(-\cos\theta) - (\cos\theta)(-\cos\theta)) \right\} = \\ &= -\frac{C_3}{\pi}(C_4 + 2\cos^2\theta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{12}(x, y) &= \frac{C_3}{\pi} \left\{ -(2\cos\theta \sin\theta) - C_4((\cos\theta)(-\sin\theta) - (\sin\theta)(-\cos\theta)) \right\} = \\ &= -\frac{C_3}{\pi} \sin 2\theta. \end{aligned}$$
(A.25)

$$\begin{aligned} T_{21}(x, y) &= \frac{C_3}{\pi} \left\{ -(2\sin\theta \cos\theta) - C_4((\sin\theta)(-\cos\theta) - (\cos\theta)(-\sin\theta)) \right\} \\ &= -\frac{C_3}{\pi} \sin 2\theta = T_{12}(x, y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{22}(x, y) &= \frac{C_3}{\pi} \left\{ -(C_4 + 2\sin^2\theta) - C_4((\sin\theta)(-\sin\theta) - (\sin\theta)(-\sin\theta)) \right\} \\ &= -\frac{C_3}{\pi}(C_4 + 2\sin^2\theta) \end{aligned}$$

Assim, tem-se:

$$C_{11}(x_I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_p}^{\theta_q - \pi} -\frac{c_3}{\pi} (C_4 + 2\cos^2 \theta)(-\epsilon) d\theta = C_3 \left\{ C_4 \theta \Big|_{\theta_p}^{\theta_q - \pi} + 2 \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right) \Big|_{\theta_p}^{\theta_q - \pi} \right\} \quad (A.26)$$

$$C_{12}(x_I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_p}^{\theta_q - \pi} -\frac{c_3}{\pi} \sin 2\theta (-\epsilon) d\theta = -\frac{c_3}{\pi} \cos 2\theta \Big|_{\theta_p}^{\theta_q - \pi} = C_{21}(x_I) \quad (A.27)$$

$$C_{22}(x_I) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_p}^{\theta_q - \pi} -\frac{c_3}{\pi} \left\{ (1-2v) + 2\sin^2 \theta \right\} (-\epsilon) d\theta = C_3 \left\{ C_4 \theta \Big|_{\theta_p}^{\theta_q - \pi} + 2 \left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta \right) \Big|_{\theta_p}^{\theta_q - \pi} \right\} \quad (A.28)$$

EXEMPLO: Superfície Retilínea

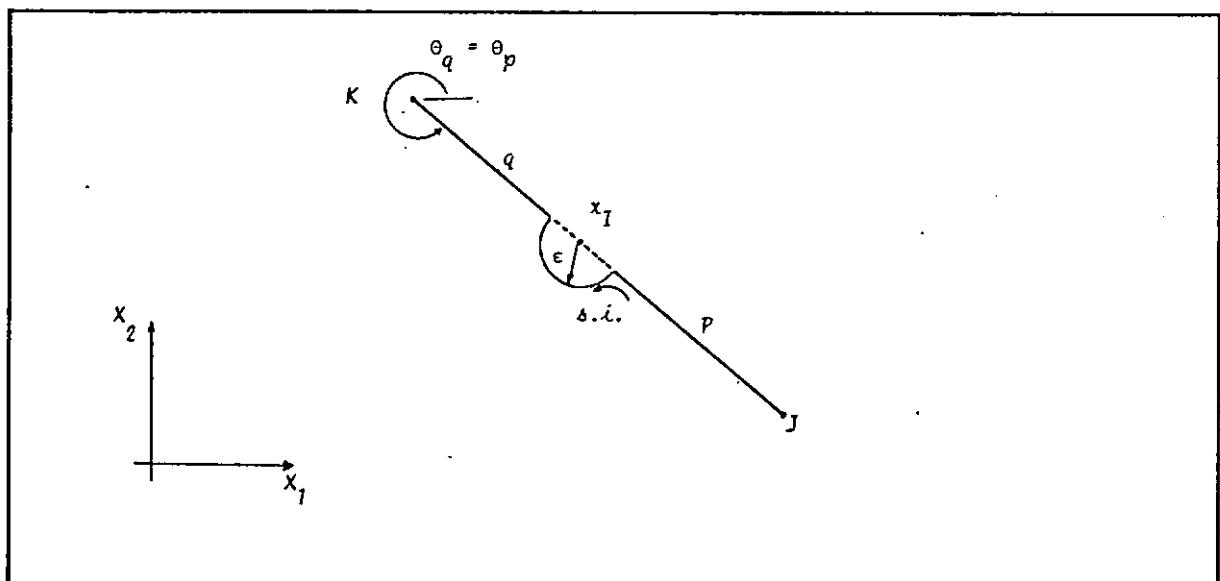


FIGURA A.5 - Nô x_I sobre superfície retilínea.

$$\begin{aligned} C_{11}(x_I) &= C_3 \left\{ C_4 \theta \Big|_{\theta_p}^{\theta_q - \pi} + 2 \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right) \Big|_{\theta_p}^{\theta_q - \pi} \right\} = C_3 \left\{ C_4(-\pi) + 2 \left(\frac{1}{2}(-\pi) + \frac{1}{4}(\sin(2\theta_p - 2\pi) - \sin 2\theta_p) \right) \right\} \\ &= C_3 \left\{ C_4(-\pi) - \pi \right\} = \frac{-1}{4\pi(1-v)} \left\{ (1-2v)(-\pi) - \pi \right\} = \frac{2\pi(1-v)}{4\pi(1-v)} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (A.29)$$

$$C_{12}(x_I) = C_{21}(x_I) = -\frac{c_3}{2} \cos 2\theta \Big|_{\theta_p}^{\theta_q - \pi} = -\frac{c_3}{2} \left\{ \cos(2\theta_p - 2\pi) - \cos \theta_p \right\} = 0. \quad (A.30)$$

$$C_{22}(x_I) = C_3 \left\{ C_4 \theta \Big|_{\theta_p}^{\theta_q - \pi} + 2 \left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta \right) \Big|_{\theta_p}^{\theta_q - \pi} \right\} = \frac{2\pi(1-v)}{4\pi(1-v)} = \frac{1}{2}. \quad (A.31)$$

A.2 - Verificação das Integrações dos Campos Virtuais de Deslocamentos sobre a Superfície S_ϵ

Considerando-se a figura A.4, tem-se:

$$\int_{S_\epsilon} u_{ij}(x_I, y) t_j(y) ds(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_\epsilon} u_{ij}(x_I, y_\epsilon) ds_\epsilon \right\} t_j . \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} \int_{S_\epsilon} u_{11}(x_I, y) t_j(y) ds(y) &= \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} C_1 \left\{ -C_2 \ln \epsilon + \cos^2 \theta \right\} - \epsilon d\theta &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} C_1 C_2 \epsilon \ln \epsilon d\theta - C_1 \int_{S_\epsilon} \epsilon \cos^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ C_1 C_2 \epsilon \ln \epsilon \theta \Big|_{\theta_p}^{\theta_q-\pi} - C_1 \epsilon \left(\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_{\theta_p}^{\theta_q-\pi} \right\} = 0 . \quad (\text{A.33})$$

$$\int_{S_\epsilon} u_{12}(x_I, y) t_j(y) ds(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{C_1}{2} \sin 2\theta - \epsilon d\theta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C_1}{2} \epsilon \int_{S_\epsilon} \sin 2\theta d\theta = 0 . \quad (\text{A.34})$$

Da mesma forma, obtém-se:

$$\int_{S_\epsilon} u_{21}(x_I, y) t_j(y) ds(y) = \int_{S_\epsilon} u_{22}(x_I, y) t_j(y) ds(y) = 0 . \quad (\text{A.35})$$

A.3 - Determinação das Expressões das Deformações e Tensões em Pontos Internos

- Devido aos Campos de Deslocamentos e Forças de Superfície do Contorno

As deformações de pontos internos devido aos campos de deslocamentos e forças de superfície do contorno, são dadas por:

$$\epsilon_{ij}(x) = \int_S B_{ijk}(x, y) t_k(y) ds(y) - \int_S C_{ijk}(x, y) u_k(y) ds(y) , \quad (\text{A.36})$$

sendo:

$$\begin{cases} B_{ijk}(x, y) = \frac{1}{2} [u_{ik,j} + u_{jk,i}] \\ C_{ijk}(x, y) = \frac{1}{2} [T_{ik,j} + T_{jk,i}] \end{cases} , \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{cases} u_{ij} = C_1 [-C_2 \delta_{ij} \ln r + r_i r_j] \\ T_{ij} = \frac{C_3}{r} \{r_n (C_4 \delta_{ij} + 2r_i r_j) - C_4 (r_i r_j - r_j r_i)\} \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

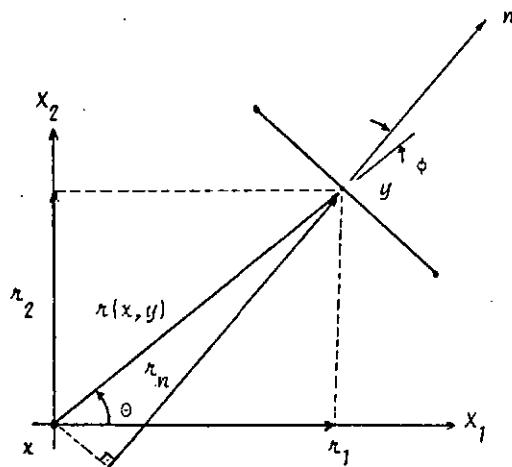


FIGURA A.6 - Representações geométricas.

$$r(x, y) = r = \left[(x_m - x_m)^2 + (y_m - y_m)^2 \right]^{1/2}, \quad m = 1, 2 \quad (\text{A.39})$$

$$r_{,i} = \partial r / \partial x_i = \frac{1}{2} \left[(x_m - x_m)^2 \right]^{-1/2} \cdot 2(x_i - x_i) = (x_i - x_i) / r = r_{,i} / r \quad (\text{A.40})$$

$$\partial(1/r) / \partial x_i = \partial \left[(x_m - x_m)^2 \right]^{-1/2} / \partial x_i = -\frac{1}{2} \left[(x_m - x_m)^2 \right]^{-3/2} \cdot -2(x_i - x_i) = r_{,i} / r^3 = r_{,i} / r^3 \quad (\text{A.41})$$

$$\partial(r_{,i}(1/r)) / \partial x_j = \partial(r_{,i}(1/r)) / \partial x_j = r_{,i}(1/r)_{,j} + (1/r) r_{,i,j} = r_{,i} r_{,j} / r^3 - (1/r) \delta_{ij} = \frac{1}{r} (r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}) \quad (\text{A.42})$$

$$\partial r / \partial x_i = -r_{,i} / r = -r_{,i} \quad (\text{A.43})$$

$$\{\ln r\}_{,i} = \partial \ln r / \partial x_i = 1/r \partial r / \partial x_i = -r_{,i} / r = -r_{,i} / r^2 \quad (\text{A.44})$$

$$\partial(1/r^2) / \partial x_k = 2 r_{,k} / r^3 = 2 r_k / r^4 \quad (\text{A.45})$$

$$\partial r / \partial n = (\partial r / \partial x_\ell)(\partial x_\ell / \partial n) = r_{,\ell} n_\ell = r_\ell n_\ell / r \quad (\text{A.46})$$

$$\partial(r_\ell n_\ell) / \partial x_i = r_\ell (\partial n_\ell / \partial x_i) + (\partial r_\ell / \partial x_i) n_\ell = -n_i \quad (\text{A.47})$$

$$\partial r_i / \partial x_j = -\delta_{ij} \quad (\text{A.48})$$

$$\partial X_i / \partial X_k = 0$$

(A.49)

$$\begin{aligned}
u_{ij,k} &= \partial u_{ij} / \partial X_k = \partial \left[C_1 \left\{ -C_2 \delta_{ij} \ln(r) + r_{,i} r_{,j} \right\} / \partial X_k \right] \\
&= C_1 \left\{ -C_2 \delta_{ij} (\ln r)_{,k} + r_{,i} (\partial r_{,j} / \partial X_k) + r_{,j} (\partial r_{,i} / \partial X_k) \right\} \\
&= C_1 \left\{ -C_2 \delta_{ij} r_{,k} / r + r_{,i} (r_{,j} r_{,k} - \delta_{jk}) + r_{,j} (r_{,i} r_{,k} - \delta_{ik}) \right\} \\
&= \frac{C_1}{r} \left\{ C_2 \delta_{ij} r_{,k} / r - r_{,i} \delta_{jk} - r_{,j} \delta_{ik} + 2 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\}
\end{aligned} \tag{A.50}$$

$$\begin{aligned}
T_{ij,k} &= \partial T_{ij} / \partial X_k = \partial \left[[C_3/n] \left\{ r_{,\ell} n_{\ell} (C_4 \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j}) - C_4 (r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right\} \right] / \partial X_k \\
&= \partial \left[C_3 \left\{ r_{,\ell} n_{\ell} (C_4 \delta_{ij} / r^2 + 2r_{,i} r_{,j} / r^4) - C_4 (r_{,i} n_j / r^2 - r_{,j} n_i / r^2) \right\} \right] / \partial X_k \\
&= C_3 \left\{ \partial (r_{,\ell} n_{\ell}) / \partial X_k (C_4 (\delta_{ij} / r^2) + (2r_{,i} r_{,j} / r^4)) + r_{,\ell} n_{\ell} \partial (C_4 (\delta_{ij} / r^2) + (2r_{,i} r_{,j} / r^2)) / \partial X_k + \right. \\
&\quad \left. - C_4 \left[(\partial (1/r^2) / \partial X_k) r_{,i} n_j + (n_j / r^2) \partial (r_i) / \partial X_k - (\partial (1/r^2) / \partial X_k) r_{,j} n_i - (n_i / r^2) \partial (r_j) / \partial X_k \right] \right\} \\
&= C_3 \left\{ -n_k (C_4 \delta_{ij} / r^2 + (2r_{,i} r_{,j} / r^4)) + r_{,\ell} n_{\ell} (2 C_4 \delta_{ij} r_{,k} / r^2 + 2r_{,i} r_{,j} (\partial (1/r^4) / \partial X_k) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{r^4} (r_{,i} (\partial r_j / \partial X_k) + r_{,j} \partial r_i / \partial X_k)) - C_4 \left[(2 r_{,k} / r^4) r_{,i} n_j - (\delta_{ik} n_j / r^2) - (2 r_{,k} r_{,j} n_i / r^4) + (\delta_{jk} n_i / r^2) \right] \right\} \\
&= [C_3/r^2] \left\{ -C_4 \delta_{ij} n_k - 2r_{,i} r_{,j} n_k / r^2 + r_{,\ell} n_{\ell} (2 C_4 \delta_{ij} r_{,k} / r^2 + 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} / r^4 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{r^2} (-r_i \delta_{jk} - r_j \delta_{ik})) - 2 C_4 r_{,i} r_{,k} n_j / r^2 + C_4 \delta_{ik} n_j + 2 C_4 r_{,j} r_{,k} n_i / r^2 - C_4 \delta_{jk} n_i \right\} \\
&= [C_3/r^2] \left\{ -C_4 (2r_{,i} r_{,k} n_j / r^2 - 2r_{,j} r_{,k} n_i / r^2 - \delta_{ik} n_j + \delta_{jk} n_i) - C_4 \delta_{ij} n_k - 2r_{,i} r_{,j} n_k / r^2 + \right. \\
&\quad \left. + (r_{,\ell} n_{\ell} / r^4) (2 C_4 \delta_{ij} r_{,k} / r + 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} / r^3 - 2r_{,i} \delta_{jk} / r - 2r_{,j} \delta_{ik} / r) \right\} \\
&= [C_3/r^2] \left\{ C_4 (2r_{,j} r_{,k} n_i - 2r_{,i} r_{,k} n_j - \delta_{jk} n_i + \delta_{ik} n_j - \delta_{ij} n_k) - 2r_{,i} r_{,j} n_k \right. \\
&\quad \left. + r_{,\ell} n_{\ell} (2 C_4 \delta_{ij} r_{,k} + 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} - 2 \delta_{jk} r_{,i} - 2 \delta_{ik} r_{,j}) \right\}
\end{aligned} \tag{A.51}$$

$$\begin{aligned}
B_{ijk} &= 1/2 \left[u_{ik,j} + u_{jk,i} \right] = [C_1/2r] \left\{ C_2 \delta_{ik} r_{,j} - r_{,i} \delta_{jk} - r_{,k} \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} + \right. \\
&\quad \left. C_2 \delta_{jk} r_{,i} - r_{,j} \delta_{ik} - r_{,k} \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \\
&= (C_1/2r) \left\{ (C_2 - 1) (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 2 \delta_{ij} r_{,k} + 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\}
\end{aligned} \tag{A.52}$$

$$\begin{aligned}
c_{ijk} &= 1/2 \left[T_{ik,j} + T_{jk,i} \right] = (C_3/2r^2) \left\{ C_4 (2r_{,j} r_{,k} n_i - 2r_{,i} r_{,j} n_k - \delta_{jk} n_i + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{ij} n_k - \delta_{ik} n_j + 2r_{,i} r_{,k} n_j - 2r_{,i} r_{,j} n_k - \delta_{ik} n_j + \delta_{ij} n_k - \delta_{jk} n_i) + \right. \\
&\quad \left. - 2r_{,i} r_{,k} n_j - 2r_{,j} r_{,k} n_i + r_{,\ell} n_\ell (2C_4 \delta_{ik} r_{,j} + 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} - 2\delta_{jk} r_{,i} - \right. \\
&\quad \left. + 2\delta_{ij} r_{,k} + 2C_4 \delta_{jk} r_{,i} + 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} - 2\delta_{ik} r_{,j} - 2\delta_{ij} r_{,k}) \right. \\
&= C_3/2r^2 \left\{ C_4 (2r_{,i} r_{,k} n_j + 2r_{,j} r_{,k} n_i - 4r_{,i} r_{,j} n_k - 2\delta_{ik} n_j - \delta_{jk} n_i + 2\delta_{ij} n_k) + \right. \\
&\quad \left. - 2r_{,i} r_{,k} n_j - 2r_{,j} r_{,k} n_i + r_{,\ell} n_\ell (2(C_4-1)(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) + 16r_{,i} r_{,j} r_{,k} - 4\delta_{ij} r_{,k}) \right\} \\
&= (C_3/r^2) \left\{ C_4 ((r_{,i} r_{,k} - \delta_{ik}) n_j + (r_{,j} r_{,k} - \delta_{jk}) n_i - (2r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}) n_k) - r_{,k} (r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) + \right. \\
&\quad \left. + r_{,\ell} n_\ell ((C_4-1)(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) + 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} - 2\delta_{ij} r_{,k}) \right\} \tag{A.53}
\end{aligned}$$

As tensões são obtidas utilizando-se relações constitutivas, na forma:

$$\sigma_{ij}(x) = \int_S D_{ijk}(x,y) t_k(y) ds(y) - \int_S E_{ijk}(x,y) u_k(y) ds(y) \tag{A.54}$$

sendo:
$$\begin{cases} D_{ijk} = (2Gu/(1-2v)) \delta_{ij} u_{,k,\ell} + G(u_{ik,j} + u_{jk,i}) \\ E_{ijk} = (2Gu/(1-2v)) \delta_{ij} T_{\ell k,\ell} + G(T_{ik,j} + T_{jk,i}) \end{cases} \tag{A.55}$$

$$\begin{aligned}
u_{\ell k,\ell} &= \partial u_{\ell k} / \partial x_\ell = \partial \left[C_1 \left\{ -C_2 \delta_{\ell k} \ln(r) + r_{,\ell} r_{,k} \right\} \right] / \partial x_\ell \\
&= (C_1/r) \left\{ C_2 \delta_{\ell k} r_{,\ell} - \delta_{\ell k} r_{,\ell} - \delta_{\ell \ell} r_{,k} + 2r_{,\ell}^2 r_{,k} \right\} \\
&= (C_1/r) \left\{ (C_2-1) \delta_{\ell k} r_{,\ell} + 2(r_{,\ell}^2 - 1)r_{,k} \right\} \\
&= (C_1/r)(C_2-1) \delta_{\ell k} r_{,\ell} = C_1/r(C_2-1)r_{,k} \tag{A.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{ijk} &= (2Gu/(1-2v)) \delta_{ij} (C_1/r)(C_2-1)r_{,k} + G \left[C_1/r \left\{ (C_2-1)(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 2\delta_{ij} r_{,k} + 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \right] \\
&= (2Gu/(1-2v) \delta_{ij}) [(3-4v-1)r_{,k} / 8\pi G(1-v)r] + G \left[1/8\pi G(1-v) \left\{ (3-4v-1)(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\delta_{ij} r_{,k} + 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \right] \\
&= (2v \delta_{ij} r_{,k} / 4\pi(1-v)r) + (1/4\pi(1-v)r) \left\{ (1-2v)(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - \delta_{ij} r_{,k} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \\
&= (1/4\pi(1-v)r) \left\{ (1-2v)(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \\
&= (-C_3/r) \left\{ C_4 (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \tag{A.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\ell k, \ell} &= \partial T_{\ell k} / \partial x_\ell = \partial \left[C_3 / r \left\{ r_m n_m (C_4 \delta_{\ell k} + 2r_{\ell} r_{k}) - C_4 (r_{\ell} n_k - r_k n_{\ell}) \right\} \right] / \partial x_\ell \\
&= (C_3 / r^2) \left\{ C_4 (2r_{\ell} r_k n_{\ell} - 2r_{\ell} r_{\ell} n_k - \delta_{\ell k} n_{\ell} + \delta_{\ell \ell} n_k - \delta_{\ell k} n_{\ell}) + \right. \\
&\quad \left. - 2r_{\ell} r_k n_{\ell} + r_m n_m (2C_4 \delta_{\ell k} r_{\ell} + \delta r_{\ell}^2 r_{k} - 2\delta_{\ell k} r_{\ell} - 2\delta_{\ell \ell} r_{k}) \right\} \\
&= (C_3 / r^2) \left\{ 2C_4 r_{\ell} r_k n_{\ell} - 2C_4 \delta_{\ell k} n_{\ell} - 2C_4 n_k (r_{\ell}^2 - 1) - 2r_{\ell} r_k n_{\ell} + \right. \\
&\quad \left. + r_m n_m (2\delta_{\ell k} r_{\ell} (C_4 - 1) + 4r_{\ell}^2 r_k + 4r_{\ell} r_k (r_{\ell}^2 - 1)) \right\} \\
&= (C_3 / r^2) \left\{ 2r_{\ell} r_k r_{\ell} n_{\ell} (C_4 - 1) - 2C_4 \delta_{\ell k} n_{\ell} + r_m n_m (2\delta_{\ell k} r_{\ell} (C_4 - 1) + 4r_{\ell}^2 r_k) \right\} \\
&= (C_3 / r^2) \left\{ 2r_{\ell} r_k r_{\ell} n_{\ell} (C_4 - 1) - 2C_4 \delta_{\ell k} n_{\ell} + (r_{\ell} r_1 n_1 + r_{\ell} r_2 n_2) (2\delta_{\ell k} r_{\ell} (C_4 - 1) + 4r_{\ell}^2 r_k) \right\} \\
&= (C_3 / r^2) \left\{ 2r_{\ell} r_k r_1 n_1 (C_4 - 1) - 2C_4 \delta_{\ell k} n_1 + 2r_{\ell} r_k r_2 n_2 (C_4 - 1) - 2C_4 \delta_{\ell k} n_2 + \right. \\
&\quad \left. + (r_{\ell} r_1 n_1 + r_{\ell} r_2 n_2) (2\delta_{\ell k} r_{\ell} (C_4 - 1) + 2\delta_{\ell k} r_2 (C_4 - 1) + 4r_{\ell}^2 r_k + 4r_{\ell} r_2 r_k) \right\} \\
&= (C_3 / r^2) \left\{ 2r_{\ell} r_k r_1 n_1 (C_4 - 1) + 2r_{\ell} r_k r_2 n_2 (C_4 - 1) - 2C_4 n_k + \right. \\
&\quad \left. + (r_{\ell} r_1 n_1 + r_{\ell} r_2 n_2) (2r_{\ell} r_k (C_4 - 1) + 4r_{\ell}^2 r_k + 4r_{\ell} r_2 r_k) \right\} \\
&= (C_3 / r^2) \left\{ 2r_{\ell} r_k (C_4 - 1) (r_{\ell} r_1 n_1 + r_{\ell} r_2 n_2) - 2C_4 n_k + (r_{\ell} r_1 n_1 + r_{\ell} r_2 n_2) (2r_{\ell} r_k (C_4 - 1) + 4r_{\ell} r_k (r_{\ell} r_1 + r_{\ell} r_2)) \right\} \\
&= (C_3 / r^2) \left\{ 4r_{\ell} r_k (C_4 - 1) (r_{\ell} r_1 n_1 + r_{\ell} r_2 n_2) - 2C_4 n_k + 4r_{\ell} r_k (r_{\ell} r_1 n_1 + r_{\ell} r_2 n_2) \right\} \\
&= (C_3 / r^2) \left\{ 4r_{\ell} r_k (r_{\ell} r_1 n_1 + r_{\ell} r_2 n_2) C_4 - 2C_4 n_k \right\} \\
&= (C_3 / r^2) \left\{ 2C_4 (2r_{\ell} r_k n_{\ell} - n_k) \right\} \tag{A.58} \\
E_{ijk} &= (2Gv/(1-2v)) \delta_{ij} (2C_3 C_4 / r^2) (2r_{\ell} r_k n_{\ell} - n_k) + G(2C_3 / r^2) \left\{ C_4 ((r_{\ell} r_k n_{\ell} - \delta_{ik} n_j) n_j + \right. \\
&\quad \left. + (r_{j} r_k - \delta_{jk}) n_i - (2r_{\ell} r_k n_{\ell} - \delta_{ij}) n_k) - (r_{\ell} r_j n_j + r_{j} r_k n_{\ell}) n_k + r_{\ell} r_k n_{\ell} ((C_4 - 1) (\delta_{ik} r_{j} + \delta_{jk} r_{i}) + \right. \\
&\quad \left. + 8r_{\ell} r_j r_k - 2\delta_{ij} r_k) \right\} \\
&= (2Gv/(1-2v)) \delta_{ij} 2 \left[-(1-2v)/4\pi(1-v)r^2 \right] (2r_{\ell} r_k n_{\ell} - n_k) + 2G(-1/4\pi(1-v)r^2) \left\{ (1-2v) (r_{\ell} r_k n_{\ell} - \delta_{ik} n_j) n_j + \right. \\
&\quad \left. + (r_{j} r_k - \delta_{jk}) n_i - 2r_{\ell} r_k n_{\ell} + \delta_{ij} n_k) - (r_{\ell} r_j n_j + r_{j} r_k n_{\ell}) n_i + n_{\ell} ((C_4 - 1) (\delta_{ik} r_{j} + \delta_{jk} r_{i}) + 8r_{\ell} r_j r_k + \right. \\
&\quad \left. - 2\delta_{ij} r_k) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-2Gv\delta_{ij}/2\pi(1-v)r^2)(2r_{in}r_{ik}n_k) - G\delta_{ij}/2\pi(1-v)r^2 \left\{ (-2v)n_k - 2r_{in}r_{ik}n_k \right\} - (G/2\pi(1-v)r^2) \left\{ (1-2v) \right. \\
&\quad \left. ((r_{ik}r_{jk}-\delta_{ik})n_j + (r_{jk}r_{ik}-\delta_{jk})n_i - 2r_{ik}r_{jk}n_k) - (r_{ik}r_{jk}+r_{jk}r_{ik})r_{ik} + r_{in}((C_4-1)\{\delta_{ik}r_j + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{jk}r_i\} + 8r_{ik}r_{jk}n_k) \right\} \\
&= (2G/4\pi(1-v)r^2) \left\{ 2r_{in} \left[(1-2v)\delta_{ij}r_{ik} + v(\delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i) - 4r_{ik}r_{jk}n_k \right] \right. \\
&\quad \left. + (1-2v)(2r_{ik}r_{jk} + \delta_{ik}n_j + \delta_{jk}n_i) - (1-4v)\delta_{ij}n_k - (1-2v)(r_{ik}r_{jk}n_j + r_{jk}r_{ik}n_i) + (r_{ik}r_{jk}n_j + r_{jk}r_{ik}n_i) \right\} \\
&= (2G/4\pi(1-v)r^2) \left\{ 2r_{in} \left[(1-2v)\delta_{ij}r_{ik} + v(\delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i) - 4r_{ik}r_{jk}n_k \right] \right. \\
&\quad \left. + (1-2v)(2r_{ik}r_{jk} + \delta_{ik}n_j + \delta_{jk}n_i) - (1-4v)\delta_{ij}n_k + (r_{ik}r_{jk}n_j + r_{jk}r_{ik}n_i)(2v) \right\} \\
&= (2G/4\pi(1-v)r^2) \left\{ 2r_{in} \left[(1-2v)\delta_{ij}r_{ik} + v(\delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i) - 4r_{ik}r_{jk}n_k + 2v(r_{ik}r_{jk} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + r_{jk}r_{ik}n_i) + (1-2v)(2r_{ik}r_{jk} + \delta_{ik}n_j + \delta_{jk}n_i) - (1-4v)\delta_{ij}n_k \right\} \tag{A.59}
\end{aligned}$$

- Devido às Forças de Massa Gravitacionais

i) Semi-Analítica

As deformações nos pontos internos para forças de massa provocadas por um campo gravitacional fixo, valem:

$$\varepsilon_{ij}(x) = \left\{ \int_{\Omega} B_{ijk}(x, z) d\Omega(z) \right\} b_k \tag{A.60}$$

Transportando esta integral para o contorno, conforme apresentado em (III2), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}(x) &= \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{r_M(\theta)} B_{ijk}(x, (r, \theta)) r dr d\theta \right\} b_k = \\
&= \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{r_M(\theta)} (C_1/2r) \left[(C_2-1)(\delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i) - 2\delta_{ij}r_k + 4r_{ik}r_{jk}n_k \right] r dr d\theta \right\} b_k \\
&= \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} (C_1/2) \left[(C_2-1)(\delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i) - 2\delta_{ij}r_k + 4r_{ik}r_{jk}n_k \right] r_M(\theta) dr \right\} b_k \\
&= \left\{ \int_{-1}^1 (C_1/2) \left[(C_2-1)(\delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i) - 2\delta_{ij}r_k + 4r_{ik}r_{jk}n_k \right] r(\xi) J_\xi(\theta) d\xi \right\} b_k \\
&= \left\{ \frac{C_1}{2} \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \int_{-1}^1 \left[(C_2-1)(\delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i) - 2\delta_{ij}r_k + 4r_{ik}r_{jk}n_k \right] r d\xi \right\} b_k \tag{A.61}
\end{aligned}$$

As tensões são dadas por:

$$\sigma_{ij}(x) = \left\{ \int_{\Omega} D_{ijk}(x, z) d\Omega(z) \right\} b_k \quad (\text{A.62})$$

Operando da mesma forma, tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x) &= \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{r_M(\theta)} D_{ijk}(x, (r, \theta)) r dr d\theta \right\} b_k \\ &= \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{r_M(\theta)} (-C_3/r) [C_4(\delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i - \delta_{ij}r_k) + 2r_i r_j r_k] r dr d\theta \right\} b_k \\ &= \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} -C_3 [C_4(\delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i - \delta_{ij}r_k) + 2r_i r_j r_k] r_M(\theta) d\theta \right\} b_k \\ &= \left\{ -C_3 \left[C_4(\delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i - \delta_{ij}r_k) + 2r_i r_j r_k \right] r(\xi) J_\xi(\theta) d\xi \right\} b_k \\ &= \left\{ -C_3 \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2} \int_{-1}^1 [C_4(\delta_{ik}r_j + \delta_{jk}r_i - \delta_{ij}r_k) + 2r_i r_j r_k] r d\xi \right\} b_k \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

ii) Tensor de Galerkin

$$v_i(x) = b_j \int_S u b_{ij}(x, y) ds(y) = b_j \int_S \{C_1 r(2\ell n r + 1) (\delta_{ij} r_n - \frac{n_i n_j}{2(1-v)})\} ds(y) \quad (\text{A.64})$$

$$\sigma_{ij}[v](x) = b_k \int_S D b_{ijk}(x, y) ds(y) \quad (\text{A.65})$$

sendo:

$$D b_{ijk} = \frac{2Gv}{(1-2v)} \delta_{ij} u b_{lk,l} + G(u b_{ik,j} + u b_{jk,i}) \quad (\text{A.66})$$

$$\begin{aligned} u b_{ij,k} &= \partial [u b_{ij}] / \partial x_k = \underbrace{\partial [C_1 r(2\ell n r + 1)] / \partial x_k}_{+} (\delta_{ij} r_n - r_j \frac{n_i}{2(1-v)}) + \\ &\quad + \underbrace{C_1 r(2\ell n r + 1) [\partial [\delta_{ij} r_n - r_j \frac{n_i}{2(1-v)}] / \partial x_k]}_{+} \\ &= C_1 (-r_k) (2\ell n r + 1) + C_1 r (2 - r_k / r) (\delta_{ij} r_n - r_j \frac{n_i}{2(1-v)}) + \\ &\quad + C_1 r (2\ell n r + 1) (\delta_{ij} (-r_k / r + r_n r_k / r) - \frac{n_i}{2(1-v)} (r_j r_k - \delta_{jk})) \\ &= C_1 \{2r_k (-\delta_{ij} r_n + r_j \frac{n_i}{2(1-v)}) + (2\ell n r + 1) (-\delta_{ij} r_k + \delta_{jk} \frac{n_i}{2(1-v)})\} \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

$$ub_{\ell k, \ell} = ub_{1k, 1} + ub_{2k, 2}$$

$$= -c_1 \frac{(1-2v)}{2(1-v)} \{2r_{,k}n_{,n} + (2\ell n r + 1)n_k\} \quad (A.68)$$

$$ub_{ik,j} + ub_{jk,i} = c_1 \{2r_{,n}(-\delta_{ik}r_{,j} - \delta_{jk}r_{,i}) + \frac{2r_{,k}}{2(1-v)}(r_{,j}n_i + r_{,i}n_j) - (2\ell n r + 1) \frac{(1-2v)}{2(1-v)}(\delta_{ik}n_j + \delta_{jk}n_i)\} \quad (A.69)$$

$$\partial b_{ijk} = \frac{1}{8} \left\{ 2r_{,n} \left[\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} + \frac{2v}{2(1-v)} \delta_{ij}r_{,k} \right] - \frac{2r_{,k}}{2(1-v)}(r_{,j}n_i + r_{,i}n_j) + (2\ell n r + 1)(-\delta_{ij}n_k + \delta_{ik}n_j + \delta_{jk}n_i) + \right.$$

$$\left. + \frac{(2\ell n r + 1)}{2(1-v)} (2\delta_{ij}n_k - \delta_{ik}n_j - \delta_{jk}n_i) \right\} \quad (A.70)$$

Fazendo-se $k = 1, 2$ e operando-se b_k , obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}|v|(x) &= \frac{1}{8} \left\{ 2r_{,n} \left[r_{,j}b_{,i} + r_{,i}b_{,j} + \frac{v}{(1-v)} \delta_{ij}(r_{,1}b_{,1} + r_{,2}b_{,2}) \right] - \frac{1}{(1-v)}(r_{,1}b_{,1} + r_{,2}b_{,2})(r_{,j}n_i + r_{,i}n_j) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2\ell n r + 1)}{2(1-v)} \left[(1-2v)(n_jb_{,i} + n_ib_{,j}) + 2v\delta_{ij}(n_1b_{,1} + n_2b_{,2}) \right] \right\} \quad (A.71) \end{aligned}$$

APÊNDICE B - FORMULAÇÃO COMPUTACIONAL - LISTAGEM DO PROGRAMA PARA REGIÃO ÚNICA

```

FILE 5=CARTOES,UNIT=READER
FILE 8=IMPRESS,UNIT=PRINTER
SUBROUTINE LIDA1
C
C      SUB=ROTINA DE LEITURA E IMPRESSAO DE DADOS PARA PROBLEMAS D
E
C      REGIAO UNICA
C
DIMENSION FS(50)
DIMENSION X1(125),X2(125),COMP(125),SENTET(125),COSTET(125)
*
*          AA(125),BB(125)
DIMENSION X1E(50),X2E(50),COMPE(50),SENTE(50),COSTE(50),
*          AAE(50),B8E(50)
DIMENSION XI1(50),XI2(50)
DIMENSION N1(125),N2(125),N1E(50),N2E(50)
DIMENSION GIC(2,4),HIC(2,4),TB(2,2),DT(3,4),ET(3,4),A(10),W
(10),
*          B(2),FBIC(2)
DIMENSION HH(250,250),GG(2,2),FSC(500),FSI(400)
DIMENSION KOD(250),KOD1(250)
COMMON/GRUPO1/Y,V,Z,C1,C2,C3,C4,C5
COMMON/GRUPO2/X1,X2,COMP,SENTET,COSTET,AA,BB
COMMON/GRUPO3/XI1,XI2
COMMON/GRUPO4/GIC,HIC,TB,DT,ET,A,W,B,FBIC
COMMON/GRUPO5/HH,GG,FSC,FSI
COMMON/GRUPO7/X1E,X2E,COMPE,SENTE,COSTE,AAE,B8E
COMMON/BLOCO1/NN,NE,NNE,NEE,NNI,NPI,IM,IP,NDS,NDE,NTI,NTT
,NO,IJ
COMMON/BLOCO2/KOD,KOD1
COMMON/BLOCO3/N1,N2,N1E,N2E
COMMON/BLOCO5/NS,NI,NTE,NTDS,IPA,IV
IR=5
IW=8
READ(IR,5)
5 FORMAT(
*           )
NEI=0

```

C CARTAO COM FORMATO LIVRE PARA LEITURA DO TITULO DO PROBLEMA

C

```
READ(IR,10) NN,NE,NCC,NNDN,NNP,NEI,NNI,NPI,IM,IP,Y,V
10 FORMAT(10I5,2F10.0)
```

C LEITURA DOS DADOS GERAIS DO PROBLEMA, SENDO:

C NN=NUMERO DE NOS DO CONTORNO;

C NE=NUMERO DE ELEMENTOS DE CONTORNO;

C NCC=NUMERO DE CARTOES PARA DEFINICAO DAS COORDENADAS DOS NO

S DO

C CONTORNO;

C NNDN=NUMERO DE NOS SOBRE SUPERFICIE RETILINEA COM APENAS DE

SLOCA-

C MENTOS PRESCRITOS NULOS;

C NNP=NUMERO DE NOS DO CONTORNO CUJAS PRESCRICOES NECESSITAM

SEREM

C FORNECIDAS EXPLICITAMENTE;

C NEI=NUMERO DE ELEMENTOS CUJAS INCIDENCIAS NECESSITAM SEREM

FORNE-

C CIDAS EXPLICITAMENTE;

C NNI=NUMERO DE NOS INTERNOS A SEREM ANALIZADOS;

C NPI=NUMERO DE PONTOS DE INTEGRACAO UTILIZADO (EM GERAL, NPI

=4);

C IM=INDICE CODIGO PARA CONSIDERACAO DE FORCAS DE MASSA PROVE

NIENTES

C DE UM CAMPO GRAVITACIONAL CONSTANTE, SENDO:

C IM=0, O EFEITO DAS FORCAS DE MASSA E OBTIDO POR INTEGRACAO

A0

C LONGO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO, ATRAVES DE UM PROCEDIMENTO

C SEMI ANALITICO;

C IM<0, AS FORCAS DE MASSA NAO SAO CONSIDERADAS;

C IM=1, O EFEITO DAS FORCAS DE MASSA E OBTIDO POR INTEGRACOES

A0

C LONGO DO CONTORNO, UTILIZANDO UMA DISCRETIZACAO ESPECIAL (EM

GERAL,

C HOMOGENEA E POUCO REFINADA) E A FORMULACAO SEMI ANALITICA;

C IM>1, O EFEITO DAS FORCAS DE MASSA E OBTIDO POR INTEGRACOES

A0

C LONGO DO CONTORNO, UTILIZANDO A DISCRETIZACAO ESPECIAL E UM

```

C      FORMULACAO ATRAVES DO VETOR DE GALERKIN, BASEADA NO TEOREMA
C      DE
C      GAUSS;
C      IP=INDICE CODIGO QUE DEFINE O TIPO DE PROBLEMA EM ANALISE,
C      SENDO:
C      IP<0, PROBLEMA DE ESTADO PLANO DE TENSÕES;
C      IP>-1,PROBLEMA DE ESTADO PLANO DE DEFORMAÇOES;
C      Y=MODULO DE YOUNG ;
C      V=COEFICIENTE DE POISSON.
C
C      ND=2*NN
C      NDDS=0
C      NDDE=0
C
C      GERACAO/LEITURA DAS COORDENADAS DOS NOS DO CONTORNO
C
C      I=1
DO 25 J=1,NCC
IA=I
READ(IR,15) I,X1(I),X2(I)
15 FORMAT(I5,2F10.0)
I1=I-IA
IF(I1.LE.1) GO TO 25
XA=(X1(I)-X1(IA))/I1
YA=(X2(I)-X2(IA))/I1
J1=I1-1
DO 20 K=1,J1
X1(IA+K)=X1(IA)+K*XA
20 X2(IA+K)=X2(IA)+K*YA
25 CONTINUE
DO 30 I=1,NN
DO 30 JJ=1,2
II=2*I-2+JJ
KOD(II)=1
KOD1(II)=0
FSI(II)=0.
30 FSC(II)=0.
C
C      LEITURA DAS PRESCRICOES DO CONTORNO

```

C

```

IF(NNDN,EQ.0) GO TO 38
CC=NNDN/16.
IA=CC
WRITE(IW,26) CC,IA
IF((CC-IA),GT,0) IA=IA+1
WRITE(IW,26) CC,IA
26 FORMAT(F10.2,2I10)
IF((IA-1),LE,0) GO TO 35
DO 34 J1=1,IA-1
READ(IR,31) (N1(I1),I1=1,16)
31 FORMAT(16I5)
DO 33 I1=1,16
I=N1(I1)
DO 32 J=1,2
II=2*I-2+J
32 KOD(II)=5
33 CONTINUE
34 CONTINUE
35 CONTINUE
K1=NNDN-(IA-1)*16
WRITE(IW,26) CC,IA,K1
READ(IR,31) (N1(I1),I1=1,K1)
DO 37 I1=1,K1
I=N1(I1)
DO 36 J=1,2
II=2*I-2+J
36 KOD(II)=5
37 CONTINUE
38 CONTINUE
C
DO 70 J=1,NNP
READ(IR,39) I,KOD(2*I-1),FSC(2*I-1),KOD(2*I),FSC(2*I)
39 FORMAT( I5,2(I5,F10.0))
DO 70 JJ=1,2
II=2*I-2+JJ
GO TO (70,40,40,40,70,60) KOD(II)
40 NDDS=NDDS+1
KOD1(II)=NDDS

```

```

      READ(IR,50) FS(NODS)
50 FORMAT(F10.0)
      GO TO 70
60 NDDE=NDDE+1
      NDE=ND+NDDE
      KOD1(II)=NDE
70 CONTINUE

```

C

C OBSERVACAO:

C OS TIPOS DE PRESCRICOES IMPOSTAS AOS NOS DO CONTORNO SAO DE

FINIDOS

C ATRAVES DE UM INDICE CODIGO (KOD) PARA CADA DIRECAO NODAL,

SENDO:

C KOD=1, FORCAS DE SUPERFICIE PRESCRITAS CONTINUAS;

C KOD=2, FORCAS DE SUPERFICIE PRESCRITAS DESCONTINUAS;

C KOD=3, INICIO DE ELEM. COM DESL. PRESCRITO (INICIO DE APOIO)

);

C KOD=4, FINAL DE ELEM. COM DESL. PRESCRITO (FINAL DE APOIO)

;

C KOD=5, DESLOCAMENTO PRESCRITO SOBRE ELEMENTOS ALINHADOS;

C KOD=6, DESLOCAMENTO PRESCRITO SOBRE QUINA DO CONTORNO.

C --NO CASO DE OCORREREM FORCAS PRESCRITAS CONTINUAS E NULAS.

SOBRE

C AS DUAS DIRECOES COORDENADAS (KOD=1 E FSC=0.), NAO E NECESS

ARIO

C FORNECER TAIS DADOS.

C --NOS CASOS DE DESCONTINUIDADE SIMPLES DAS FORCAS DE SUPERF

ICIE

C (KOD= 2, 3 OU 4), TEMOS DOIS PARAMETROS CONHECIDOS NESTA

DIRECAO

C COORDENADA, PORTANTO, DEVE-SE FORNECER O OUTRO PARAMETRO CO

NHECIDO

C E O SEGUINTE PROCEDIMENTO DEVE SER ADOTADO:

C KOD=2, INICIALMENTE E FORNECIDO O PARAMETRO CONHECIDO SITUA

DO A

C DIREITA DO NO (REFERENCIA NO INTERIOR DO DOMINIO),

C KOD=3 OU 4, O PARAMETRO FORNECIDO INICIALMENTE E O VALOR DO

DESLO-

C CAMENTO.

C -- O PARAMETRO EM EXCESSO E DADO POR UM CARTAO ADICIONAL, R
 ESPEI-

C TANDO-SE A ORDEM NATURAL, NO CASO DE DESCONTINUIDADE EM AMB
 AS AS

C DIRECOES,

C --NOS CASOS DE NOS COM APENAS DESLOCAMENTOS PRESCRITOS SOBR
 E SUPER

C FICIE RETILINEA, BASTA FORNECER O VALOR DO NO, SENDO O VALO
 R TOTAL

C DESTES NOS DEFINIDO NOS DADOS GERAIS DO PROBLEMA.

C

C GERACAO/LEITURA DAS INCIDENCIAS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

C

C OBSERVACOES:

C _O PROGRAMA CONTEM UMA GERACAO AUTOMATICA DAS INCIDENCIAS D
 OS ELE-

C MENTOS, SENDO VALIDA A SEGUINTE REGRAS, PARA UM ELEMENTO DE
 ORDEM

C IC:

C N1(IC)=IC

C N2(IC)=IC+1

C PARA O CASO MAIS COMUM DE NUMERACAO SEQUENCIAL, ONDE O ULTI
 MO ELE=

C MENTO UNE O ULTIMO NO(DE ORDEM NN) AO NO 1, AS INCIDENCIAS
 SAO

C TOTALMENTE GERADAS DE FORMA AUTOMATICA.

C

```

NE1=NE=1
DO 74 IC=1,NE1
N1(IC)=IC
N2(IC)=IC+1
74 CONTINUE
N1(NE)=NN
N2(NE)=1
IF(NEI.EQ.0) GO TO 76
DO 76 J=1,NEI
READ(IR,75) IC,N1(IC),N2(IC)
75 FORMAT(3I5)
76 CONTINUE

```

```

C IF(IM)115,80,90
C
C LEITURA DO VALOR DAS FORCAS DE MASSA PARA UM CAMPO GRAVITAC
IONAL
C CONSTANTE
C
80 READ(IR,85) B(1),B(2)
85 FORMAT(2F10.0,4I5)
GO TO 115
NEEI=0

C
C LEITURA DOS DADOS GERAIS DE UMA DISCRETIZACAO ESPECIAL DO C
ONTORNO
C UTILIZADA PARA AVALIAR OS EFEITOS DAS FORCAS DE MASSA, SEND
O:
C NNE=NUMERO DE NOS ESPECIAIS;
C NEE=NUMERO DE ELEMENTOS ESPECIAIS;
C NCCE=NUMERO DE CARTOES UTILIZADOS PARA LEITURA DAS
COORDENADAS DOS NOS ESPECIAIS;
C NEEI=NUM. DE ELEMENTOS ESPECIAIS CUJAS INCIDENCIAS NECESSIT
AM SE-
C REM FORNECIDAS EXPLICITAMENTE.
C
90 READ(IR,85) B(1),B(2),NNE,NEE,NCCE,NEEI

C
C GERACAO/LEITURA DAS COORDENADAS DOS NOS DA DISCRETIZACAO ES
PECIAL
C
IE=1
DO 110 J=1,NCCE
IA=IE
READ(IR,15) IE,X1E(IE),X2E(IE)
I1=IE-IA
IF(I1.LE.1) GO TO 110
XEA=(X1E(IE)-X1E(IA))/I1
YEA=(X2E(IE)-X2E(IA))/I1
J1=I1-1
DO 100 K=1,J1
X1E(IA+K)=X1E(IA)+K*XEA

```

```

100 X2E(IA+K)=X2E(IA)+K*YEA
110 CONTINUE
C
C      GERACAO/LEITURA DAS INCIDENCIAS DOS ELEMENTOS ESPECIAIS
C
    NEE1=NEE=1
    DO 114 ICE=1,NEE1
    N1E(ICE)=ICE
    N2E(ICE)=ICE+1
114 CONTINUE
    N1E(NEE)=NNE
    N2E(NEE)=1
    IF(NEEI.EQ.0) GO TO 115
    DO 116 J=1,NEEI
    READ(IR,75) ICE,N1E(ICE),N2E(ICE)
116 CONTINUE
115 CONTINUE
    IF(NNI)125,125,120
C
C      LEITURA DAS COORDENADAS DOS NOS INTERNOS
C
120 READ(IR,15)(II,XI1(II),XI2(II),J=1,NNI)
125 CONTINUE
    CALL DECE1
    NTI=NDDE+ND
    NTT=NTI+NDD
    WRITE(IW,130)
130 FORMAT(//,15X,'*** B.E.M. - ELASTICIDADE PLANA - REGIAO'
UNICA *
    '***',//)
    WRITE(IW,135)
135 FORMAT(//,15X,'*** DADOS GERAIS DO PROBLEMA ***',//)
    WRITE(IW,5)
    WRITE(IW,145) IPA,NN,NE,NCC,NNDN,NNP,NEI,NNI,NPI,IM,IP,Y,V,
NDD,
    *NDDE,NTI
    145 FORMAT(//,15X,'INDICE DO PROBLEMA EM ANALISE (IPA)=',I5,///
,15X,'NUMERO DE NOS DO CONTORNO (NN)=',I5,/,15X,'NUMERO DE ELEMEN

```

```

*CONTORNO (NE)='15,/,15X,'NUMERO DE CARTOES PARA DEFINICAO
DAS CO
*ORDENADAS DOS NOS DO CONTORNO (NCC)='15,/,15X,'NUMERO DE
NOS SOB
<RE SUPERFICIE RETILINEA COM APENAS DESLOCAMENTOS PRESCRITOS
NULOS
*(NNDN)='15,/,15X,'NUMERO DE NOS CUJAS PRESCRICOES NECESSI
TAM SER
* DEFINIDAS EXPLICITAMENTE (NNP)='15,/,15X,'NUMERO DE ELEM
ENTOS C
*UJAS INCIDENCIAS NECESSITAM SER DEFINIDAS EXPLICITAMENTE (N
EI)='1
*5,/,15X,'NUMERO DE NOS INTERNOS (NNI)='15,/,15X,'NUMERO
DE PONT
*OS DE INTEGRACAO (NPI)='15,/,15X,'INDICE DAS FORCAS DE MA
SSA (IM
*)='15,/,15X,'INDICE DO TIPO DE PROBLEMA (IP)='15,/,15X,
'MODULO
*DE ELASTICIDADE (Y)='F12.2,/,15X,'COEFICIENTE DE POISSON
(V)=',
*F5.2,/,15X,
*      'NUMERO DE DIRECOES NODAIS COM DESCONTINUIDADE SIMPLE
S (NDDO
*)='15,/,15X,'NUMERO DE DIRECOES COM DESCONTINUIDADE ESPEC
IAL (NO
*DE)='15,/,15X,'NUMERO TOTAL DE INCOGNITAS (NTI)='15,/,/
IF(IP)140,150,150
140 Y=Y*(1.+2*V)/(1.+V)**2
V=V/(1.+V)
WRITE(IW,155)
155 FORMAT(15X,' PROBLEMA DE ESTADO PLANO DE TENSÕES ',/)
GO TO 160
150 WRITE(IW,165)
165 FORMAT(//,15X,' PROBLEMA DE ESTADO PLANO DE DEFORMACOES ',/
)
160 CONTINUE
WRITE(IW,170)
170 FORMAT(//,15X,'**** DADOS DO CONTORNO ****',//,22X,'COORD
ENADAS

```

```

*NODAIS',23X,'PRESCRICOES NO CONTORNO')
  WRITE(IW,180)
180 FORMAT(//,8X,'NO',13X,'X1',13X,'X2',13X,'KOD(X1)',8X,'FSC(X
1)',3X,
     *'KOD(X2)',8X,'FSC(X2)',/)
  WRITE(IW,190) (I,X1(I),X2(I),KOD(2*I-1),FSC(2*I-1),KOD(2*I)
,FSC(2*
     *I),I=1,NN)
190 FORMAT(/,I10,2F15.5,10X,I10,F15.5,I10,F15.5)
  WRITE(IW,200)
200 FORMAT(//,10X,'NOS COM DESCONTINUIDADE SIMPLES',7X,' NOS CO
M DESCOS
     *NTINUIDADE ESPECIAL',//,8X,'NO      DIR.      KOD1
FSC
     *           NO      DIR.      KOD1',/)
  DO 240 I=1,NN
  DO 240 JJ=1,2
    II=2*I-2+JJ
    IF(KOD(II).EQ.6) GO TO 220
    IF(KOD1(II).EQ.0) GO TO 240
    NA=KOD1(II)
    KOD1(II)=NA+NTI
    NDS=KOD1(II)
    FSC(NDS)=FS(NA)
    WRITE(IW,210)I,JJ,KOD1(II),FSC(NDS)
210 FORMAT(3I10,3X,F12.7)
    GO TO 240
220 WRITE(IW,230)I,JJ,KOD1(II)
230 FORMAT(54X,I5,2I10)
240 CONTINUE
    WRITE(IW,250)
250 FORMAT(///,15X,'INCIDENCIAS DOS ELEMENTOS',//,5X,'ELEM.',5X
,'NO IN
     *ICIAL',7X,'NO FINAL',4X,'COMPRIMENTO',/)
    WRITE(IW,260)(IC,N1(IC),N2(IC),COMP(IC),IC=1,NE)
260 FORMAT(/,I10,2I15,F15.5)
    IF(IM)280,280,265
265 CALL DECEE1
    WRITE(IW,266)

```

```

266 FORMAT(//,15X,'**** DADOS DA DISCRETIZACAO ESPECIAL ****')
      WRITE(IW,270)NNE,NEE,NCCE,NEEI
270 FORMAT(//,15X,'NUM. DE NOS ESPECIAIS (NNE) = ',I5,//,15X,'
NUM. DE
* ELEMENTOS ESPECIAIS (NEE) = ',I5,//,15X,'NUMERO DE CARTOES
PARA
*LEITURA DAS COORDENADAS (NCCE) = ',I5,//,15X,'NUM. DE ELEM.
CUJAS
*INCIDENCIAS NECESSITAM SEREM FORNECIDAS (NEEI) = ',I5,///
,15X,'COORDENADAS NODA
IS',//,
*8X,'NO',13X,'X1',13X,'X2',//)
      WRITE(IW,305) (IE,X1E(IE),X2E(IE),IE=1,NNE)
      WRITE(IW,275)
275 FORMAT(//,15X,'INCIDENCIAS DOS ELEMENTOS ESPECIAIS',//,5X,'
ELEM.
*      NO INICIAL          NO FINAL',4X,'COMPRIMENTO',//)
      WRITE(IW,260) (ICE,N1E(ICE),N2E(ICE),COMPE(ICE),ICE=1,NEE)
280 CONTINUE
      WRITE(IW,285)
285 FORMAT(//,15X,'**** DADOS DO INTERIOR ****',//)
      IF(NNI)300,300,290
290 WRITE(IW,295)
295 FORMAT(/,15X,'COORD. DOS NOS INTERNOS',//,8X,'NO',13X,'X1'
,13X,'X
*2',//)
      WRITE(IW,305) (II,X1I(II),X12(II),II=1,NNI)
305 FORMAT(/,I10,2F15.5)
300 CONTINUE
      IF(IM)320,310,310
310 WRITE(IW,315) B(1),B(2)
315 FORMAT(//,15X,'FORCAS DE MASSAS GRAVITACIONAIS',//,10X,'CO
MP. X1'
*,8X,'COMP. X2',//,13X,F12.5,3X,F12.5)
320 CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE DECE1

```

```

C      SUB=ROTINA PARA DETERMINACAO DAS PROPRIEDADES FIXAS DOS ELE
MENTOS
C      DE CONTORNO
C
DIMENSION X1(125),X2(125),COMP(125),SENTET(125),COSTET(125)
'
*          AA(125),BB(125)
DIMENSION N1(125),N2(125),N1E(50),N2E(50)
COMMON/GRUP02/X1,X2,COMP,SENTET,COSTET,AA,BB
COMMON/BLOCO1/NN,NE,NNE,NEE,NNI,NPI,IM,IP,NODS,NDDE,NTI,NTT
,NO,IJ
COMMON/BLOCO3/N1,N2,N1E,N2E
DO 20 IC=1,NE
N1IC=N1(IC)
N2IC=N2(IC)
X1N1=X1(N1IC)
X2N1=X2(N1IC)
X1N2=X1(N2IC)
X2N2=X2(N2IC)
IF(IM,NE,0) GO TO 10
IF(X1N1,EQ,X1N2) GO TO 10
AA(IC)=(X2N1-X2N2)/(X1N1-X1N2)
BB(IC)=0.5*((X2N1+X2N2)-AA(IC)*(X1N1+X1N2))
10 COMP(IC)=SQRT((X2N1-X2N2)**2+(X1N1-X1N2)**2)
SENTET(IC)=(X2N1-X2N2)/COMP(IC)
COSTET(IC)=(X1N1-X1N2)/COMP(IC)
20 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE DECEE1
C
C      SUB=ROTINA PARA DETERMINACAO DAS PROPRIEDADES FIXAS DOS ELE
MENTOS
C      ESPECIAIS DE CONTORNO
C
DIMENSION X1E(50),X2E(50),COMPE(50),SENTE(50),COSTE(50),
*          AAE(50),BBE(50)
DIMENSION N1(125),N2(125),N1E(50),N2E(50)
COMMON/GRUP07/X1E,X2E,COMPE,SENTE,COSTE,AAE,BBE

```

```

COMMON/BLOCO1/NN,NE,NNE,NEE,NNI,NPI,IM,IP,NODS,NODE,NTI,NTT
,NO,IJ
COMMON/BLOCO3/N1,N2,N1E,N2E
DO 20 ICE=1,NEE
N1ICE=N1E(ICE)
N2ICE=N2E(ICE)
X1N1E=X1E(N1ICE)
X2N1E=X2E(N1ICE)
X1N2E=X1E(N2ICE)
X2N2E=X2E(N2ICE)
IF(IM.GT.1) GO TO 10
IF(X1N1E.EQ.X1N2E) GO TO 10
AAE(ICE)=(X2N1E-X2N2E)/(X1N1E-X1N2E)
BBE(ICE)=0.5*((X2N1E+X2N2E)-AAE(ICE)*(X1N1E+X1N2E))
10 COMPE(ICE)=SQRT((X2N1E-X2N2E)**2+(X1N1E-X1N2E)**2)
SENTE(ICE)=(X2N1E-X2N2E)/COMPE(ICE)
COSTE(ICE)=(X1N1E-X1N2E)/COMPE(ICE)
20 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE FBXII
C
C      SUB-ROTINA PARA CALCULO DA INFLUENCIA DAS FORCAS DE MASSA P
ARA UM
C      CAMPO GRAVITACIONAL CONSTANTE; POR INTEGRACAO NO CONTORNO,
C      UTILIZANDO UMA DISCRETIZACAO ESPECIAL E A FORMULACAO SEMI
C      ANALITICA
C
DIMENSION D(2,2,2),E(2,2,2),DB(2,2,2),DN(2),AN(2),DR(2)
DIMENSION UB(2,2)
DIMENSION X1E(50),X2E(50),COMPE(50),SENTE(50),COSTE(50),
*           AAE(50),BBE(50)
DIMENSION GIC(2,4),HIC(2,4),TB(2,2),DT(3,4),ET(3,4),A(10),W
(10),
*           B(2),FBIC(2)
DIMENSION N1(125),N2(125),N1E(50),N2E(50)
COMMON/GRUPO1/Y,V,Z,C1,C2,C3,C4,C5
COMMON/GRUPO4/GIC,HIC,TB,DT,ET,A,W,B,FBIC
COMMON/GRUPO6/X1I,X2I,X1N1,X2N1,X1N2,X2N2,COMPIC,SET,COT,

```

```

*
      AAIC,BBIC,DJ,RG,PI
      COMMON/GRUP07/X1E,X2E,COMPE,SENTE,COSTE,AAE,BBE
      COMMON/BLOCO1/NN,NE,NNE,NEE,NNI,NPI,IM,IP,NODS,NODE,NTI,NTT
,ND,IJ
      COMMON/BLOCO3/N1,N2,N1E,N2E
      ID(IN,JN)=1-ABS(IN-JN)
      DO 10 JJ=1,2
      FBIC(JJ)=0,
      DO 10 II=1,2
 10  TB(JJ,II)=0.
      DO 100 ICE=1,NEE
      N1ICE=N1E(ICE)
      N2ICE=N2E(ICE)
      X1N1E=X1E(N1ICE)
      X2N1E=X2E(N1ICE)
      X1N2E=X1E(N2ICE)
      X2N2E=X2E(N2ICE)
      IF(IJ,GE,0) GO TO 30
      IF(X1N1E,NE,X1N2E) GO TO 20
      IF(X1N1E,EQ,X1I) GO TO 100
      GO TO 30
 20  YI=AAE(ICE)*X1I+BBE(ICE)
      IF(ABS(YI-X2I),LT,1,E-6) GO TO 100
 30  X1N1=X1N1E
      X2N1=X2N1E
      X1N2=X1N2E
      X2N2=X2N2E
      CALL JACTET
      DO 90 K=1,NPI
      AN(1)=0.5*(1.-A(K))
      AN(2)=0.5*(1.+A(K))
      R1XY=AN(1)*X1N1E+AN(2)*X1N2E-X1I
      R2XY=AN(1)*X2N1E+AN(2)*X2N2E-X2I
      RXY=(R1XY**2+R2XY**2)**0.5
      DR(1)=R1XY/RXY
      DR(2)=R2XY/RXY
      IF(IJ)40,40,60
 40  DO 50 II=1,2
      DO 50 JJ=1,2

```

```

UB(II,JJ)=(RXY**2/2)*C1*(-C2*ID(II,JJ)*(ALOG(RXY)=0.5)+DR(I
I)*DR(J
*J)-C5*ID(II,JJ))*W(K)
50 FBIC(II)=FBIC(II)+UB(II,JJ)*B(JJ)*DJ
60 IF(IJ)90,70,70
70 DO 80 KK=1,2
   DO 80 II=1,2
   DO 80 JJ=II,2
   DB(KK,II,JJ)=-C3*RXY*(C4*(ID(II,KK)*DR(JJ)+ID(JJ,KK)*DR(II)
-ID(II,
*JJ)*DR(KK))+2.*DR(II)*DR(JJ)*DR(KK))*W(K)
80 TB(II,JJ)=TB(II,JJ)+DB(KK,II,JJ)*B(KK)*DJ
90 CONTINUE
100 CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE FBX12

```

```

C
C      SUB-ROTINA PARA CALCULO DA INFLUENCIA AOS FORCAS DE MASSA P
ARA UM
C      CAMPO GRAVITACIONAL CONSTANTE; POR INTEGRACAO NUMERICA NO
C      CONTORNO, UTILIZANDO UMA DISCRETIZACAO ESPECIAL E A FORMULA
CAO
C      BASEADA NO TEOREMA DE GAUSS E NO VETOR DE GALERKIN
C
C      DIMENSION D(2,2,2),E(2,2,2),DB(2,2,2),DN(2),AN(2),DR(2)
C      DIMENSION X1E(50),X2E(50),COMPE(50),SENTE(50),COSTE(50),
*                  AAE(50),BBE(50)
C      DIMENSION GIC(2,4),HIC(2,4),TB(2,2),DT(3,4),ET(3,4),A(10),W
(10),
*                  B(2),FBIC(2)
C      DIMENSION N1(125),N2(125),N1E(50),N2E(50)
COMMON/GRUPO1/Y,V,Z,C1,C2,C3,C4,C5
COMMON/GRUPO4/GIC,HIC,TB,DT,ET,A,W,B,FBIC
COMMON/GRUPO6/X1I,X2I,X1N1,X2N1,X1N2,X2N2,COMPIC,SET,COT,
*                  AAIC,BBIC,DJ,RG,PI
COMMON/GRUPO7/X1E,X2E,COMPE,SENTE,COSTE,AAE,BBE
COMMON/BLOCO1/NN,NE,NNE,NEE,NNI,NPI,IM,IP,NODE,NDDE,NTI,NTT
,ND,IJ

```

```

COMMON/BLOCO3/N1,N2,N1E,N2E
ID(IN,JN)=I=ABS(IN-JN)
C1E=-1.+V)/(4*PI*Y)
DO 10 JJ=1,2
FBIC(JJ)=0,
DO 10 II=1,2
10 TB(JJ,II)=0,
DO 80 ICE=1,NEE
DN(1)=-SENTE(ICE)
DN(2)=COSTE(ICE)
CAJE=COMPE(ICE)/2
N1ICE=N1E(ICE)
N2ICE=N2E(ICE)
X1N1E=X1E(N1ICE)
X2N1E=X2E(N1ICE)
X1N2E=X1E(N2ICE)
X2N2E=X2E(N2ICE)
DO 70 K=1,NPI
AN(1)=0.5*(1.-A(K))
AN(2)=0.5*(1.+A(K))
R1XY=AN(1)*X1N1E+AN(2)*X1N2E-X1I
R2XY=AN(1)*X2N1E+AN(2)*X2N2E-X2I
RXY=(R1XY**2+R2XY**2)**0.5
DR(1)=R1XY/RXY
DR(2)=R2XY/RXY
DRN=DR(1)*DN(1)+DR(2)*DN(2)
RB12=DR(1)*B(1)+DR(2)*B(2)
IF(IJ)20,20,40
20 DO 30 II=1,2
30 FBIC(II)=FBIC(II)+(C1E*RXY*(2*ALOG(RXY)+1.)*(DRN*B(II)-(DN(
II)/(2*
*(1.-V)))*RB12))*CAJE+W(K)
40 IF(IJ)70,50,50
50 RB21=DN(1)*B(1)+DN(2)*B(2)
DO 60 II=1,2
DO 60 JJ=II,2
60 TB(II,JJ)=TB(II,JJ)+ (2*DRN*(DR(JJ)*B(II)+DR(I
I)*B(JJ)
*I)+ID(II,JJ)*(V/(1.-V))*RB12)- (1./(1.-V))*RB12*(DR(JJ)*DN

```

```

*DR(II)*DN(JJ))+(2.* ALOG(RXY)+1.)*(1./(1.-V))+(((1.-2*V)/2.)
*(DN
*(JJ)*B(II)+DN(II)*B(JJ))+ID(II,JJ)*V*RB21))*CAJE/(8*PI))*W
(K)
70 CONTINUE
80 CONTINUE
RETURN
END

C
SUBROUTINE GAUSS
C SUB-ROTANA DETERMINACAO DAS ABCISSAS E DOS COEFICIENTE
S DE
C PESO PARA INTEGRACAO NUMERICA PELO METODO DE GAUSS
C
DIMENSION GIC(2,4),HIC(2,4),TB(2,2),DT(3,4),ET(3,4),A(10),W
(10),
* B(2),FBIC(2)
COMMON/GRUPO4/GIC,HIC,TB,DT,ET,A,W,B,FBIC
COMMON/BLOCO1/NN,NE,NNE,NEE,NNI,NPI,IM,IP,NDDN,NDDE,NTI,NTT
,ND,IJ
IF(NPI=10)15,14,15
15 CONTINUE
GO TO (1,2,3,4,5,6),NPI
1 A(1)=0.0
W(1)=2.0
GO TO 10
2 A(1)=-0.577350269189626
A(2)=-A(1)
W(1)=1.
W(2)=1.
GO TO 10
3 A(1)=-0.774596669241483
A(2)=0.
A(3)=-A(1)
W(1)=0.5555555555555556
W(2)=0.8888888888888889
W(3)=W(1)
GO TO 10
4 A(1)=-0.861136311594053

```

A(2)=-0.339981043584856
A(3)=-A(2)
A(4)=-A(1)
W(1)=0.347854845137454
W(2)=0.652145154862546
W(3)=W(2)
W(4)=W(1)
GO TO 10

5 A(1)=-0.906179845938664
A(2)=-0.538469310105683
A(3)=0,
A(4)=-A(2)
A(5)=-A(1)
W(1)=0.236926885056189
W(2)=0.478628670499366
W(3)=0.5686888888888889
W(4)=W(2)
W(5)=W(1)
GO TO 10

6 A(1)=-0.932469514203152
A(2)=-0.661209386466265
A(3)=-0.238619186083197
A(4)=-A(3)
A(5)=-A(2)
A(6)=-A(1)
W(1)=0.171324492379170
W(2)=0.360761573048139
W(3)=0.467913934572691
W(4)=W(3)
W(5)=W(2)
W(6)=W(1)
GO TO 10

14 CONTINUE
A(1)=-.973906528517172
A(2)=-.865063366688985
A(3)=-.679409568299024
A(4)=-.433395394129247
A(5)=-.148874338981631
A(6)=-A(5)

```

A(7)=-A(4)
A(8)=-A(3)
A(9)=-A(2)
A(10)=-A(1)
W(1)=.066671344308688
W(2)=.149451349150581
W(3)=.219086362515982
W(4)=.269266719309996
W(5)=.295524224714753
W(6)=W(5)
W(7)=W(4)
W(8)=W(3)
W(9)=W(2)
W(10)=W(1)

```

```

10 RETURN
END
SUBROUTINE DETRG

```

```

C
C      SUB-ROTTINA PARA DETERMINACAO DA DISTANCIA MAXIMA ENTRE UM N
O FIXO
C      ALEATORIO (POR EXEMPLO, O NO MEDIO) E O PONTO MEDIO DOS ELE
MENTOS
C      DE CONTORNO; UTILIZADO PARA MELHORAR O CONDICIONAMENTO DO S
ISTEMA
C      DE EQUACOES
C

```

```

COMMON/GRUP06/X1I,X2I,X1N1,X2N1,X1N2,X2N2,COMPIC,SET,COT,
★          AAIC,BBIC,DJ,RG,PI
R1=((X2N1-X2I)**2+(X1N1-X1I)**2)**0.5
R2=((X2N2-X2I)**2+(X1N2-X1I)**2)**0.5
RM=(R1+R2)/2
IF(RG>RM)10,20,20

```

```

10 RG=RM
20 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE GHICNU

```

```

C
C      SUB-ROTTINA PARA CALCULO DAS SUBMATRIZES GIC E HIC POR INTEG

```

```

C      NUMERICA SOBRE OS ELEMENTOS DE CONTORNO
C
DIMENSION UB(2,2)
DIMENSION U(2,2),T(2,2)
DIMENSION D(2,2,2),E(2,2,2),DB(2,2,2),DN(2),AN(2),DR(2)
DIMENSION GIC(2,4),HIC(2,4),TB(2,2),DT(3,4),ET(3,4),A(10),W
(10),
*           B(2),FBIC(2)
COMMON/GRUPO1/Y,V,Z,C1,C2,C3,C4,C5
COMMON/GRUPO4/GIC,HIC,TB,DT,ET,A,W,B,FBIC
COMMON/GRUPO6/X1I,X2I,X1N1,X2N1,X1N2,X2N2,COMPIC,SET,COT,
*           AAIC,BBIC,DJ,RG,PI
COMMON/BLOCO1/NN,NE,NNE,NEE,NNI,NPI,IM,IP,NODS,NDDE,NTI,NTT
,ND,IJ
ID(IN,JN)=1-ABS(IN-JN)
DO 10 K=1,2
DO 10 L=1,4
GIC(K,L)=0.
10 HIC(K,L)=0.
IMI=IM
IF(IM)50,20,50
20 DO 25 K=1,2
FBIC(K)=0.
DO 25 L=1,2
25 TB(K,L)=0.
IF(IJ.GE.0) GO TO 35
IF(X1N1.NE.X1N2) GO TO 30
IF(X1I.EQ.X1N1) GO TO 40
GO TO 35
30 YI=AAIC*X1I+BBIC
IF(ABS(YI-X2I),LT.1.E-6) GO TO 40
35 CALL JACTET
GO TO 50
40 IM=IM+1
50 DN(1)=-SET
DN(2)=COT
CAJ=COMPIC/2
DO 170 K=1,NPI
AN(1)=0.5*(1.-A(K))

```

```

AN(2)=0.5*(1.+A(K))
R1XY=AN(1)*X1N1+AN(2)*X1N2=X1I
R2XY=AN(1)*X2N1+AN(2)*X2N2=X2I
RXY=(R1XY**2+R2XY**2)**0.5
DR(1)=R1XY/RXY
DR(2)=R2XY/RXY
DRN=DR(1)*DN(1)+DR(2)*DN(2)
DO 60 II=1,2
DO 60 JJ=1,2
U(II,JJ)=C1*(-C2*ID(II,JJ)*ALOG(RXY)+DR(II)*DR(JJ)-C5*ID(II
,JJ))
60 T(II,JJ)=C3*(DRN*(C4*ID(II,JJ)+2*DR(II)*DR(JJ))-C4*(DR(II)*
DN(JJ)-
*DR(JJ)*DN(II)))/RXY
IF(IM)90,70,90
70 DO 80 II=1,2
DO 80 JJ=1,2
UB(II,JJ)=(RXY**2/2)*(U(II,JJ)+ID(II,JJ)*C1*C2/2)*W(K)
80 FBIC(II)=FBIC(II)+UB(II,JJ)*B(JJ)*DJ
90 DO 100 IA=1,2
IN=0
DO 100 II=1,2
DO 100 JJ=1,2
IN=IN+1
GIC(IA,IN)=GIC(IA,IN)+U(IA,JJ)*AN(II)*W(K)*CAJ
100 HIC(IA,IN)=HIC(IA,IN)+T(IA,JJ)*AN(II)*W(K)*CAJ
IF(IJ)170,120,120
120 DO 130 KK=1,2
DO 130 II=1,2
DO 130 JJ=II,2
D(KK,II,JJ)=-C3*(C4*(ID(II,KK)*DR(JJ)+ID(JJ,KK)*DR(II)-ID(I
I,JJ)*D
*R(KK))+2*DR(II)*DR(JJ)*DR(KK))/RXY
E1=2*DRN*(C4*ID(II,JJ)*DR(KK)+V*(ID(II,KK)*DR(JJ)+ID(JJ,KK)
*DR(II)
*)-4*DR(II)*DR(JJ)*DR(KK))
E2=2*V*(DR(II)*DR(KK)*DN(JJ)+DR(JJ)*DR(KK)*DN(II))
E3=C4*(2*DR(II)*DR(JJ)*DN(KK)+ID(II,KK)*DN(JJ)+ID(JJ,KK)*DN
(II))

```

```

E(KK,II,JJ)=(E1+E2+E3-(1.-4*V)*ID(II,JJ)*DN(KK))*2*Z/(4*PI*
(1.-V)*
  *RXY**2)
130 CONTINUE
  IF(IM)155,140,155
140 CONTINUE
  DO 150 KK=1,2
  DO 150 II=1,2
  DO 150 JJ=II,2
  DB(KK,II,JJ)=RXY**2*D(KK,II,JJ)*W(K)
150 TB(II,JJ)=TB(II,JJ)+DB(KK,II,JJ)*B(KK)*DJ
155 IL=0
  DO 160 II=1,2
  DO 160 JJ=II,2
  IL=IL+1
  IN=0
  DO 160 IA=1,2
  DO 160 JA=1,2
  IN=IN+1
  DT(IL,IN)=DT(IL,IN)+AN(IA)*D(JA,II,JJ)*W(K)*CAJ
160 ET(IL,IN)=ET(IL,IN)+AN(IA)*E(JA,II,JJ)*W(K)*CAJ
170 CONTINUE
  IF(IMI)190,180,190
180 IF(IM.NE.IMIT) IM=IMIT
190 CONTINUE
  RETURN
END
SUBROUTINE JACTET

```

C
C SUB-ROTONDA PARA CALCULO DO JACOBIANO DA TRANSFORMACAO DE
C COORDENADA PARA INTEGRACAO DAS FORCAS DE MASSA PELO
C PROCESSO DE TRANSFORMACAO SEMI ANALITICO

C
COMMON/GRUPO6/X1I,X2I,X1N1,X2N1,X1N2,X2N2,COMPIC,SET,COT,
* AAIC,BBIC,DJ,RG,PI
DJ=0.
R1=((X2N1-X2I)**2+(X1N1-X1I)**2)**0.5
R2=((X2N2-X2I)**2+(X1N2-X1I)**2)**0.5
R1X2=(X2N1-X2I)/R1

```

R2X2=(X2N2-X2I)/R2
TETA1=AR SIN(R1X2)
TETA2=AR SIN(R2X2)
IF(X2N1=X2I)50,70,70
50 IF(X1N1=X1I)80,80,60
60 TETA1=2*PI+TETA1
GO TO 90
70 IF(X1N1=X1I)80,90,90
80 TETA1=PI-TETA1
90 CONTINUE
IF(X2N2=X2I)100,120,120
100 IF(X1N2=X1I)130,130,110
110 TETA2=2*PI+TETA2
GO TO 140
120 IF(X1N2=X1I)130,140,140
130 TETA2=PI-TETA2
140 CONTINUE
IF(TETA2-TETA1)150,190,170
150 TETA2P=TETA2+PI
IF(TETA1-TETA2P)190,190,160
160 TETA2=TETA2+2*PI
GO TO 190
170 TETA1P=TETA1+PI
IF(TETA2-TETA1P)190,190,180
180 TETA2=TETA2+2*PI
190 DJ=0.5*(TETA2-TETA1)
200 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE GHICAN

```

```

C
C      SUB-ROTANA PARA CALCULO DA SUB-MATRIZ GIC E PARTE DE MIC PO
R
C      INTEGRACAO ANALITICA
C
DIMENSION GIC(2,4),MIC(2,4),TB(2,2),DT(3,4),ET(3,4),A(10),W
(10),
*           B(2),FBIC(2)
COMMON/GRUPO1/Y,V,Z,C1,C2,C3,C4,C5

```

```

COMMON/GRUPO4/GIC,HIC,TB,DT,ET,A,W,B,FBIC
COMMON/GRUPO6/X1I,X2I,X1N1,X2N1,X1N2,X2N2,COMPIC,SET,COT,
*           AAIC,BBIC,DJ,RG,PI
COMMON/BLOCO4/I,N1IC,N2IC
CAJ=COMPIC/2
C1SECO=C1*CAJ*SET*COT
DO 10 K=1,2
DO 10 L=1,4
GIC(K,L)=C1SECO
10 HIC(K,L)=0.
ALOGIC=ALOG(COMPIC)
GIC(1,1)=C1*CAJ*(-C2*(ALOGIC-1.5)+COT**2)-C1*C5*CAJ
GIC(1,3)=C1*CAJ*(-C2*(ALOGIC-0.5)+COT**2)-C1*C5*CAJ
GIC(2,2)=C1*CAJ*(-C2*(ALOGIC-1.5)+SET**2)-C1*C5*CAJ
GIC(2,4)=C1*CAJ*(-C2*(ALOGIC-0.5)+SET**2)-C1*C5*CAJ
IF(I,EQ.N1IC) GO TO 20
GICAX=GIC(1,1)
GIC(1,1)=GIC(1,3)
GIC(1,3)=GICAX
GICAX=GIC(2,2)
GIC(2,2)=GIC(2,4)
GIC(2,4)=GICAX
HIC(1,2)=-C3*C4
HIC(2,1)=-HIC(1,2)
GO TO 30
20 HIC(1,4)=C3*C4
HIC(2,3)=-HIC(1,4)
30 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE SLNPD(A,B,N)

```

C SUB-ROTA^INA PARA SOLUC^OA DO SISTEMA DE EQUAC^OEIS LINEARES
C PELO M^ETODO DE ELIMINAC^OA DE GAUSS

```

DIMENSION A(250,250),B(250)
N1=N+1
DO 100 K=1,N1
K1=K+1

```

```

C=A(K,K)
IF(ABS(C))1,1,3
1 DO 7 J=K1,N
  IF(ABS(A(J,K)))7,7,5
5 DO 6 L=K,N
  C=A(K,L)
  A(K,L)=A(J,L)
6 A(J,L)=C
  C=B(K)
  B(K)=B(J)
  B(J)=C
  C=A(K,K)
  GO TO 3
7 CONTINUE
3 C=A(K,K)
  DO 4 J=K1,N
4 A(K,J)=A(K,J)/C
  B(K)=B(K)/C
  DO 10 I=K1,N
  C=A(I,K)
  DO 9 J=K1,N
9 A(I,J)=A(I,J)-C*A(K,J)
10 B(I)=B(I)-C*B(K)
100 CONTINUE
  B(N)=B(N)/A(N,N)
  DO 200 L=1,N1
  K=N-L
  K1=K+1
  DO 200 J=K1,N
200 B(K)=B(K)-A(K,J)*B(J)
  RETURN
  END
  SUBROUTINE DETEA1

```

C SUB-ROTINA PARA DETERMINACAO DAS EQUACOES ADICIONAIS PARA OS NOS
 C COM DESCONTINUIDADE ESPECIAL. ESTAS EQUACOES FORAM OBTIDAS ATRAVES
 C DA CONSIDERACAO DAS PROPRIEDADES DE INVARIANTES ELASTICOS

```

C
DIMENSION X1(125),X2(125),COMP(125),SENTET(125),COSTET(125)
'
*          AA(125),BB(125)
DIMENSION N1(125),N2(125),N1E(50),N2E(50)
DIMENSION HH(250,250),GG(2,2),FSC(500),FSI(400)
DIMENSION KOD(250),KOD1(250)
COMMON/GRUPO1/Y,V,Z,C1,C2,C3,C4,C5
COMMON/GRUPO2/X1,X2,COMP,SENTET,COSTET,AA,BB
COMMON/GRUPO5/HH,GG,FSC,FSI
COMMON/BLOCO1/NV,NE,NNE,NEE,NNI,NPI,IM,IP,NODE,NTI,NTT
,ND,IJ
COMMON/BLOCO2/KOD,KOD1
COMMON/BLOCO3/N1,N2,N1E,N2E
NODE=0
DO 110 I=1,NN
IA=2*I
IA1=IA+1
II=0
IF(KOD(IA),NE,6) GO TO 10
II=II+1
NODE=NODE+1
10 IF(KOD(IA1),NE,6) GO TO 20
II=II+1
NODE=NODE+1
20 IF(II,EQ,0) GO TO 110
IC=0
LEI=0
LDI=0
30 IC=IC+1
IF(I,NE,N1(IC)) GO TO 40
LEI=IC
40 IF(I,NE,N2(IC)) GO TO 50
LDI=IC
50 IF(LEI,EQ,0,OR,LDI,EQ,0) GO TO 30
K1=KOD1(IA1)
KI1=IA1
K2=KOD1(IA)
KI2=IA

```

```

IF (II.EQ.1) GO TO 60
HH(K1,KI1)=HH(K1,KI1)-SENTET(LEI)
HH(K1,K1) =HH(K1,K1) +SENTET(LDI)
HH(K1,KI2)=HH(K1,KI2)+COSTET(LEI)
HH(K1,K2) =HH(K1,K2) -COSTET(LDI)
SENOB=SENTET(LDI)
COSEB=COSTET(LDI)
SENOA=-SENTET(LEI)
COSEA=-COSTET(LEI)
N1L1I=N1(LDI)
N2L2I=N2(LEI)
N1L1=2*N1L1I+1
N1L2=2*N1L1I
N2L1=2*N2L2I+1
N2L2=2*N2L2I
CLDI=COMP(LDI)
CLEI=COMP(LEI)
CBL=COSEB/CLDI
SBL=SENOB/CLDI
CAL=COSEA/CLEI
SAL=SENOA/CLEI
HH(K2,KI1)=HH(K2,KI1)-SENOB
HH(K2,K1)=HH(K2,K1)-SENOA
HH(K2,KI2)=HH(K2,KI2)+COSEB
HH(K2,K2)=HH(K2,K2)+COSEA
FSI(K2)=FSI(K2)-(2*Z*CBL)*FSC(N1L1)-(2*Z*SBL)*FSC(N1L2)+(2*
Z*CAL)*
  *FSC(N2L1)+(2*Z*SAL)*FSC(N2L2)-(2*Z*(CAL-CBL))*FSC(KI1)-(2*Z*
*(SAL-S
  *BL))*FSC(KI2)
GO TO 100
60 IF (KOD(IA1).NE.6) GO TO 80
HH(K1,KI1)=HH(K1,KI1)-SENTET(LEI)
HH(K1,K1)=HH(K1,K1)+SENTET(LDI)
IF (KOD(IA).EQ.3) GO TO 70
HH(K1,KI2)=HH(K1,KI2)+COSTET(LEI)
FSI(K1)=FSI(K1)+COSTET(LDI)*FSC(K2)
GO TO 100
70 HH(K1,KI2)=HH(K1,KI2)-COSTET(LDI)

```

```

FSI(K1)=FSI(K1)-COSTET(LEI)*FSC(K2)
GO TO 100
80 HH(K2,KI2)=HH(K2,KI2)+COSTET(LEI)
HH(K2,K2)=HH(K2,K2)-COSTET(LDI)
IF(KOD(IA1).EQ.3) GO TO 90
HH(K2,KI1)=HH(K2,KI1)-SENTET(LEI)
FSI(K2)=FSI(K2)-SENTET(LDI)*FSC(K1)
GO TO 100
90 HH(K2,KI1)=HH(K2,KI1)+SENTET(LDI)
FSI(K2)=FSI(K2)+SENTET(LEI)*FSC(K1)
100 IF(NDE.EQ.NDDE) GO TO 120
110 CONTINUE
120 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE IMRE1

```

C

C SUB-ROTINA PARA IMPRESSAO DE RESULTADOS

C

```

DIMENSION HH(250,250),GG(2,2),FSC(500),FSI(400)
DIMENSION KOD(250),KOD1(250)
COMMON/GRUPO5/HH,GG,FSC,FSI
COMMON/BLOCO1/NN,NE,NNE,NEE,NNI,NPI,IM,IP,NODES,NDDE,NTI,NTT
,ND,IJ
COMMON/BLOCO2/KOD,KOD1
IW=8
WRITE(IW,10)
10 FORMAT(////,15X,'**** RESULTADOS DA ANALISE ****',//7//,15X
,'****'
      *VALORES NO CONTORNO ****',//,25X,'VALORES NODAIS',49X,'VALO
RES NOS
      * PONTOS MEDIOS DOS ELEMENTOS')
      WRITE(IW,15)
15 FORMAT(///,10X,'DESLOCAMENTOS',19X,'FORCAS DE SUPERFICIE',1
8X,'TEN
      *SOES SISTEMA LOCAL',11X,'TENSOES PRINCIPAIS',/)
      WRITE(IW,20)
20 FORMAT(//,1X,'NO/ELEM.',3X,'U(X1)',5X,'V(X2)',7X,
      *                      'FS(X1)',3X,'FSE

```

```

      *X,'FS(X2)',3X,'FSE(X2)',9X,'TXX',7X,'TXY',7X,'TYY',9X,'T11'
,7X,'T2
      *2',2X,'TETAP',/)
      DO 80 I=1,NN
      II=2*I
      III=2*I-1
      KII=KOD1(II)
      KIII=KOD1(III)
      GO TO (25,50,50,50,25,50) KOD(III)
25     GO TO (30,40,40,40,30,40) KOD(II)
30     WRITE(IW,35)I,FSI(III),FSI(II),FSC(III),
                           FSC(II)
      *,HH(III,9),HH(III,10),HH(III,11),HH(II,9),HH(II,10),HH(II,1
1)   35 FORMAT(/,I9,2F10.5,2X,F10.2,10X,F10.2,12X,3F10.2,2X,2F10.2,
F7.2)
      GO TO 80
      40 WRITE(IW,45)I,FSI(III),FSI(II),FSC(III),
                           FSC(II),F
SC(KII)
      *,HH(III,9),HH(III,10),HH(III,11),HH(II,9),HH(II,10),HH(II,1
1)   45 FORMAT(/,I9,2F10.5,2X,F10.2,10X,2F10.2,2X,3F10.2,2X,2F10.2,
F7.2)
      GO TO 80
      50 GO TO (55,65,65,65,55,65) KOD(II)
      55 WRITE(IW,60)I,FSI(III),FSI(II),FSC(III),FSC(KIII),FSC(II)
      *,HH(III,9),HH(III,10),HH(III,11),HH(II,9),HH(II,10),HH(II,1
1)   60 FORMAT(/,I9,2F10.5,2X,3F10.2,12X,3F10.2,2X,2F10.2,F7.2)
      GO TO 80
      65 WRITE(IW,70)I,FSI(III),FSI(II),FSC(III),FSC(KIII),FSC(II),F
SC(KII)
      *,HH(III,9),HH(III,10),HH(III,11),HH(II,9),HH(II,10),HH(II,1
1)   70 FORMAT(/,I9,2F10.5,2X,4F10.2,2X,3F10.2,2X,2F10.2,F7.2)
80     CONTINUE
      IF(NNI)105,105,85
85     WRITE(IW,90)
90     FORMAT(///,15X,'**** VALORES NO INTERIOR ****',/)
      WRITE(IW,95)

```

```

95 FORMAT(///,15X,'DESLOCAMENTOS NODAIS',16X,'TENSOES SISTEMA
GLOBAL'
      *,26X,'TENSOES PRINCIPAIS',///,8X,'NO',6X,'U(X1)',10X,'V(X2)
',12X,
      *'TX1',11X,'TX12',12X,'TX2',12X,'T11',12X,'T22',10X,'TETAP',/
)
      WRITE(IW,100) (II,HH(II,1),HH(II,2),HH(II,3),HH(II,4),HH(II
,5),
      *HH(II,6),HH(II,7),HH(II,8),II=1,NNI)
100 FORMAT(/,I10,8F15.5)
105 CONTINUE
      RETURN
      END

C
C      PROGRAMA PRINCIPAL PARA PROBLEMAS DE REGIAO UNICA
C
      DIMENSION X1(125),X2(125),COMP(125),SENTET(125),COSTET(125)
,
      *          AA(125),BB(125)
      DIMENSION X1E(50),X2E(50),COMPE(50),SENTE(50),COSTE(50),
      *          AAE(50),BBE(50)
      DIMENSION XI1(50),XI2(50)
      DIMENSION N1(125),N2(125),N1E(50),N2E(50)
      DIMENSION GIC(2,4),HIC(2,4),TB(2,2),DT(3,4),ET(3,4),A(10),W
(10),
      *          B(2),FBIC(2)
      DIMENSION HH(250,250),GG(2,2),FSC(500),FSI(400)
      DIMENSION KOD(250),KOD1(250)
      COMMON/GRUPO1/Y,V,Z,C1,C2,C3,C4,C5
      COMMON/GRUPO2/X1,X2,COMP,SENTET,COSTET,AA,BB
      COMMON/GRUPO3/XI1,XI2
      COMMON/GRUPO4/GIC,HIC,TB,DT,ET,A,W,B,FBIC
      COMMON/GRUPO5/HH,GG,FSC,FSI
      COMMON/GRUPO6/X1I,X2I,X1N1,X2N1,X1N2,X2N2,COMPIC,SET,COT,
      *          AAIC,BBIC,DJ,RG,PI
      COMMON/GRUPO7/X1E,X2E,COMPE,SENTE,COSTE,AAE,BBE
      COMMON/BLOCO1/NN,NE,NNE,NEE,NNI,NPI,IM,IP,NDDS,NODE,NTI,NTT
,ND,IJ
      COMMON/BLOCO2/KOD,KOD1

```

```
IF(I,EQ,N1IC,OR,I,EQ,N2IC) GO TO 50
IF(I,EQ,IME) CALL DETRG
CALL GHICNU
GO TO 60
50 CALL GHICAN
IF(IM,NE,0) GO TO 60
FBIC(1)=0,
FBIC(2)=0,
60 CONTINUE
DO 70 K=1,2
DO 70 L=1,2
70 GG(K,L)=GG(K,L)+HIC(K,L)+HIC(K,L+2)
DO 180 JJ=1,2
IH=2*N1IC-2+JJ
GO TO (80,90,80,90,80,90) KOD(IH)
80 IG=IH
GO TO 100
90 IG=KOD1(IH)
100 DO 180 J=1,2
II=2*I-2+J
IF(N1IC,EQ,I) GO TO 150
GO TO (110,110,120,130,120,120) KOD(IH)
110 FSI(II)=FSI(II)+GIC(J,JJ)*FSC(IG)
HH(II,IH)=HH(II,IH)+HIC(J,JJ)
GO TO 140
120 FSI(II)=FSI(II)-HIC(J,JJ)*FSC(IH)
HH(II,IG)=HH(II,IG)-GIC(J,JJ)
GO TO 140
130 FSI(II)=FSI(II)+GIC(J,JJ)*FSC(IG)-HIC(J,JJ)*FSC(IH)
140 CONTINUE
GO TO 180
150 GO TO (160,160,170,160,170,170) KOD(IH)
160 FSI(II)=FSI(II)+GIC(J,JJ)*FSC(IG)
GO TO 180
170 HH(II,IG)=HH(II,IG)-GIC(J,JJ)
180 CONTINUE
DO 270 JJ=3,4
IH=2*N2IC-4+JJ
IF(KOD(IH),EQ,3) GO TO 190
```

```
COMMON/BLOC03/N1,N2,N1E,N2E
COMMON/BLOC04/I,N1IC,N2IC
COMMON/BLOC05/NS,NI,NTE,NTDS,IPA,IV
CALL LIDA1
IME=NN/2
DO 10 I=1,NTI
FSI(I)=0.
DO 10 J=1,NTI
10 HH(I,J)=0.
PI=3.141592654
Z=Y/(2.* (1.+V))
C1=1./(8*PI*Z*(1.-V))
C2=3.*4.*V
C3=-1./(4*PI*(1.-V))
C4=1.-2*V
C5=(7.-8*V)/2
CALL GAUSS
IJ=-1
RG=0.
DO 340 I=1,NN
DO 20 K=1,2
DO 20 L=1,2
20 GG(K,L)=0.
X1I=X1(I)
X2I=X2(I)
DO 285 IC=1,NE
N1IC=N1(IC)
N2IC=N2(IC)
X1N1=X1(N1IC)
X2N1=X2(N1IC)
X1N2=X1(N2IC)
X2N2=X2(N2IC)
SET=SENTET(IC)
COT=COSTET(IC)
COMPIC=COMP(IC)
IF(IM)40,30,40
30 AAIC=AA(IC)
BBIC=BB(IC)
40 CONTINUE
```

```
IG=IH
GO TO 200
190 IG=KOD1(IH)
200 CONTINUE
DO 270 J=1,2
II=2*I-2+J
IF(N2IC.EQ.I) GO TO 250
GO TO (210,210,220,230,230,230) KOD(IH)
210 FSI(II)=FSI(II)+GIC(J,JJ)*FSC(IH)
HH(II,IH)=HH(II,IH)+HIC(J,JJ)
GO TO 240
220 FSI(II)=FSI(II)+GIC(J,JJ)*FSC(IG)-HIC(J,JJ)*FSC(IH)
GO TO 240
230 FSI(II)=FSI(II)-HIC(J,JJ)*FSC(IH)
HH(II,IH)=HH(II,IH)-GIC(J,JJ)
240 CONTINUE
GO TO 270
250 IF(KOD(IH).GT.3) GO TO 260
FSI(II)=FSI(II)+GIC(J,JJ)*FSC(IG)
GO TO 270
260 HH(II,IH)=HH(II,IH)-GIC(J,JJ)
270 CONTINUE
IF(IM)285,280,285
280 FSI(2*I-1)=FSI(2*I-1)+FBIC(1)
FSI(2*I)=FSI(2*I)+FBIC(2)
285 CONTINUE
IF(IM-1)305,290,295
290 CALL FBXI1
GO TO 300
295 CALL FBXI2
300 FSI(2*I-1)=FSI(2*I-1)+FBIC(1)
FSI(2*I)=FSI(2*I)+FBIC(2)
305 CONTINUE
DO 335 K=1,2
IK=2*I-2+K
IF(KOD(IK).LE.2) GO TO 320
DO 310 L=1,2
IL=2*I-2+L
310 FSI(IL)=FSI(IL)+GG(L,K)*FSC(IK)
```

```
      GO TO 335
320 DO 330 L=1,2
      IL=2*I-2+L
330 HH(IL,IK)=-GG(L,K)
335 CONTINUE
340 CONTINUE
      IF(NDDE,NE,0) CALL DETEA1
      DO 375 J=1,ND
      GO TO (360,360) KOD(J)
      DO 350 I=1,NTI
350 HH(I,J)=HH(I,J)*Z
      GO TO 375
360 DO 370 I=1,NTI
370 HH(I,J)=HH(I,J)*RG
375 CONTINUE
      IF(NTI=ND) 400,400,380
380 ND1=ND+1
      DO 390 I=1,NTI
      DO 390 J=ND1,NTI
390 HH(I,J)=HH(I,J)*Z
400 CONTINUE
      CALL SLNPD(HH,FSI,NTI)
      DO 430 I=1,ND
      GO TO (410,410,420) KOD(I)
      AUX=FSI(I)*Z
      FSI(I)=FSC(I)
      FSC(I)=AUX
      GO TO 430
410 FSI(I)=FSI(I)*RG
      GO TO 430
420 AUX=FSI(I)*Z
      FSI(I)=FSC(I)
      K1=KOD1(I)
      FSC(I)=FSC(K1)
      FSC(K1)=AUX
430 CONTINUE
      IF(NTI=ND) 460,460,440
440 DO 450 I=ND1,NTI
450 FSC(I)=FSI(I)*Z
```

```
460 CONTINUE
    IF (NNI) 690, 690, 470
470 IJ=0
    DO 690 II=1, NNI
        X1I=XI1(II)
        X2I=XI2(II)
        DO 480 JJ=1, 8
480 MH(II,JJ)=0.
    DO 650 IC=1, NE
    DO 490 K=1, 3
    DO 490 L=1, 4
        DT(K,L)=0.
490 ET(K,L)=0.
    N1IC=N1(IC)
    N2IC=N2(IC)
    X1N1=X1(N1IC)
    X2N1=X2(N1IC)
    X1N2=X1(N2IC)
    X2N2=X2(N2IC)
    SET=SENTET(IC)
    COT=COSTET(IC)
    COMPIC=COMP(IC)
    CALL GHICNU
    DO 620 ID=1, 3
    DO 620 IT=1, 4
        GO TO (500, 510, 550, 560) IT
500 IH=2*N1IC-1
    GO TO 520
510 IH=2*N1IC
520 GO TO (530, 540, 540, 540, 530, 540) KOD(IH)
530 IG=IH
    GO TO 590
540 IG=KOD1(IH)
    GO TO 590
550 IH=2*N2IC-1
    GO TO 570
560 IH=2*N2IC
570 IG=IH
590 CONTINUE
```

```

      IF(ID=3)600,610,610
600  HH(II, ID)=HH(II, ID)+HIC(ID, IT)*FSI(IH)*GIC(ID, IT)*FSC(IG)
610  HH(II, ID+2)=HH(II, ID+2)+ET(ID, IT)*FSI(IH)*DT(ID, IT)*FSC(IG)
620  CONTINUE
      IF(IM)650,630,650
630  IL=0
      DO 640 K=1,2
      HH(II,K)=HH(II,K)+FBIC(K)
      DO 640 J=K,2
      IL=IL+1
640  HH(II,IL+2)=HH(II,IL+2)+TB(K,J)
650  CONTINUE
      IF(IM=1)680,655,660
655  CALL FBXI1
      GO TO 665
660  CALL F8XI2
665  IL=0
      DO 670 K=1,2
      HH(II,K)=HH(II,K)+FBIC(K)
      DO 670 J=K,2
      IL=IL+1
670  HH(II,IL+2)=HH(II,IL+2)+TB(K,J)
680  CONTINUE
      HH(II,6)=(HH(II,3)+HH(II,5))/2+(HH(II,4)**2+(HH(II,3)-HH(I
I,5))/2
      * )**2)**0.5
      HH(II,7)=(HH(II,3)+HH(II,5))/2-(HH(II,4)**2+(HH(II,3)-HH(I
I,5))/2
      * )**2)**0.5
      IF(ABS( HH(II,5)-HH(II,3)),LE.1.E-6) GO TO 681
      HH(II,8)=ATAN(2*HH(II,4)/(HH(II,5)-HH(II,3)))/2,
      GO TO 690
681  IF(HH(II,4),GT,0) GO TO 682
      HH(II,8)=PI/4,
      GO TO 683
682  HH(II,8)=-PI/4,
683  CONTINUE
690  CONTINUE
      DO 720 IC=1,NE

```

```

N1IC=N1(IC)
N2IC=N2(IC)
I1=2*IC-1
I=2*IC
IF1=2*N2IC-1
IF=2*N2IC
III=2*N1IC-1
IT=2*N1IC
FSCII1=FSC(II1)
IF(KOD1(II1).EQ.0) GO TO 700
KODIII=KOD1(II1)
FSCII1=FSC(KODIII)
700 FSCII=FSC(II)
IF(KOD1(II).EQ.0) GO TO 710
KODIII=KOD1(II)
FSCII=FSC(KODIII)
710 CONTINUE
FSCII1=(FSCII1+FSC(IF1))/2
FSCII=(FSCII+FSC(IF))/2
HH(I1,10)=FSCII1*COSTET(IC)+FSCI*SENTET(IC)
HH(I1,11)=-(FSCII*SENTET(IC)+FSCI*COSTET(IC))
HH(I1,9)=(1./(1.-V))*(V*HH(I1,11)+2*Z*((FSI(II1)-FSI(IF1))
/COMP(I
    *C))*COSTET(IC)+((FSI(II)-FSI(IF))/COMP(IC))*SENTET(IC)))
HH(I,9)=(HH(I1,9)+HH(I1,11))/2+SQRT(HH(I1,10)**2+(HH(I1,9)
-HH(I1,
    *11))/2)**2)
HH(I,10)=(HH(I1,9)+HH(I1,11))/2-SQRT(HH(I1,10)**2+((HH(I1,9
)-HH(I1
    *,11))/2)**2)
IF(ABS(HH(I1,11)-HH(I1,9)).LE.1.E-6) GO TO 711
HH(I,11)=ATAN(HH(I1,10)/((HH(I1,11)-HH(I1,9))/2.))/2.
GO TO 720
711 IF(HH(I1,10),GT,0) GO TO 712
HH(I,11)=PI/4.
GO TO 720
712 HH(I,11)=-PI/4.
720 CONTINUE
CALL IMRE1

```

```

1000 STOP
END

```