

CALCULO DE ESFUERZOS EN PLACAS PLANAS SOMETIDAS A

FLUJO TURBULENTO

JULIO CESAR PABA BARBOSA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENACÃO DOS PROGRAMAS DE POS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSARIOS PARA A OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM CIENCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

José Masse'
Presidente
Rodrigo C. Ribeiro
Alvaro Calvo Cabral de Oliveira

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

AGRADECIMIENTOS

Para completar este trabajo he recibido colaboración de muchas personas y organizaciones y quiero expresar en esta página mi gratitud a:

Profesor Acher Mossé por su valiosa orientación en este trabajo, consejos y amistad.

Universidad Industrial de Santander, por su ayuda y sus palabras de estímulo.

Organización de los Estados Americanos (OEA) por la concesión de la beca que me permitió frecuentar el curso.

A todos los profesores del programa de Ingeniería Mecánica de COPPE, especialmente A. Ripper, G. de la Penha, L. Koval y R. Restrepo.

A mi querida esposa por la excelente datilografía, amor y comprensión.

Paba Barbosa

R E S U M E N

El problema principal abordado en este trabajo es la determinación de la respuesta de una placa plana rugosa rectangular simplemente apoyada, excitada por flujo de capa límite turbulentó.

Se encontró una solución general de la respuesta de desplazamiento para un sistema continuo linear cualquiera, excitado aleatoriamente.

El método utilizado hace uso del análisis armónico generalizado y de una expansión en términos del conjunto de funciones ortogonales asociadas con los modos normales de la vibración del sistema.

En base a los datos experimentales de Aupperle y Lambert y en la teoría generalizada se obtuvo la respuesta de desplazamiento, velocidad, momentos flectores, cargas de corte transversal y esfuerzos para una placa plana rugosa rectangular simplemente apoyada.

Los resultados son discutidos y comparados con los obtenidos por Strawderman para placas lisas. Finalmente, son presentadas sugerencias para futuras investigaciones.

S U M M A R Y

The objective of this work is the determination of the response of a rough, simply supported, rectangular plate excited by a turbulent boundary layer.

A general solution has been found for the displacement response of any randomly excited continuous linear system.

The method of solution makes use of the generalized harmonic analysis and series expansions in terms of the set of orthogonal functions associated with the normal modes of vibration of the system.

On the basis of experimental data of Aupperle and Lambert and of the generalized theory, responses were obtained for the displacement, velocity, bending moments, shear loads and stresses for a rough, simply supported, rectangular plate.

The results obtained are discussed and compared with the ones by Strawderman for smooth plates. Finally, some suggestions are made for future research on the subject.

I N D I C E

AGRADECIMIENTOS	ii
RESUMEN	iii
SUMARY	iv
INDICE	v
CAPITULO I - INTRODUCCION	1
1.1 Presentación del Problema	1
1.2 Revisión de la Literatura	2
CAPITULO II - CONSIDERACIONES TEORICAS	8
2.1 Respuesta de un Sistema Contínuo a. una Excitación Aleatoria	8
2.2 Solución de la Ecuación Diferencial	9
2.3 Análisis Armónico Generalizado	11
CAPITULO III - RESPUESTA DE UNA PLACA RECTANGULAR SIM- PLEMENTE APOYADA	15
3.1 Ecuación Dinámica de la Placa	15
3.2 Solución de la Ecuación Diferencial de la Placa	16
3.3 Densidad de Espectro del Desplaza- miento	17
3.4 Densidad de Espectro Cruzado de la Velocidad	18

3.5 Densidad de Espectro Cruzado de Movimientos Flectores, Fuerzas de Corte Transversal y Esfuerzos	18
 CAPITULO IV - CALCULOS Y RESULTADOS	24
4.1 Densidad de Espectro Cruzado de la Presión	24
4.2 Cálculo de la Densidad de Espectro de la Presión	24
4.3 Resultados del Espectro de Desplazamiento	26
4.4 Resultados del Espectro de Velocidad	28
4.5 Resultados de los Espectros de Movimientos Flectores y de Fuerzas de Corte Transversal	29
 CAPITULO V - PRESENTACION DE LOS RESULTADOS, DISCUSION Y CONCLUSIONES	31
5.1 Espectros Simples	32
5.2 Espectros Cruzados	32
 SUGERENCIAS	47
SIMBOLOS	48
BIBLIOGRAFIA	52
 APENDICE A - ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORIA CLASICA DE PLACAS	55

A-1 Ecuaciones Clásicas en Coordenadas Rectangulares	56
A-2 Solución	57
A-3 Modos Normales de una Placa Rectangular Simplemente Apoyada	58
APENDICE B - DENSIDAD DE ESPECTRO DE LA PRESION	60
APENDICE C - ESPECTRO DE VELOCIDAD PARA UNA PLACA PLANA LISA	66
APENDICE D - PROGRAMAS DE COMPUTADOR	68

C A P I T U L O I

INTRODUCCION

1.1 Presentación del Problema

El estudio de la respuesta de sistemas a fuerzas aleatorias es de considerable interés en mecánica estructural y ha sido bastante investigado en años recientes [20-21]. El conocimiento de la respuesta es deseado para ver como los sistemas responden a las fuerzas aleatorias y como estas fuerzas idealizadas según un modelo matemático están relacionadas a la respuesta.

En este trabajo se determina, en general, la respuesta de un sistema linear de cualquier forma excitado por una fuerza aleatoria, y en particular se obtiene la respuesta de una placa plana rugosa rectangular simplemente apoyada, excitada por flujo de capa límite turbulento.

La solución del problema se obtiene en función de los modos normales de la vibración de la placa y de la densidad de espectro de las fluctuaciones de la presión dentro de la capa límite turbulenta. Los cálculos de la densidad de espectro de la presión se basan directamente en los datos experimentales

*Los números entre corchetes se refieren a la Bibliografía listada al final de este trabajo.

de Aupperle y Lambert [11] e ilustrados según el modelo matemático propuesto por Corcos [4] .

1.2 Revisión de la Literatura

El conocimiento de las fluctuaciones de la presión dentro de una capa límite turbulenta es deseado para muchos problemas de mecánica de fluidos. Uno de estos problemas, es el ruido producido por la turbulencia en la capa límite adyacente a una superficie rugosa rígida. Otro tipo de problema surge cuando una capa límite turbulenta se desarrolla adyacente a una superficie flexible, y las fluctuaciones de la presión causan movimiento de la superficie, como es el caso de membranas y placas, etc. En adición, el conocimiento de las fluctuaciones de la presión turbulenta sobre una superficie puede conducir a un entendimiento mejor de la estructura de la capa límite turbulenta y a estudiar con suficiente aproximación los efectos de ruido y vibraciones que se producen sobre las superficies.

En la literatura han aparecido algunos estudios experimentales de las fluctuaciones de la presión sobre superficies rugosas [1-11], sin embargo, todos reportan medidas de la densidad de espectro y de la correlación espacio-temporal de la presión.

Harrison [1] midió la densidad de espectro de las fluctuaciones de la presión dentro de una capa límite turbulenta, causadas por el flujo de un fluido sobre una superficie plana.

Skudrzyk y Haddle [2] estudiaron los niveles de ruido en

la capa límite y el ruido producido por la superficie rugosa. Ellos determinaron el espectro de potencia del flujo de ruido como una función de la frecuencia, el espesor de la capa límite y la velocidad media del flujo y encontraron que el flujo de ruido es predominantemente generado por la superficie rugosa a grandes velocidades y a altas frecuencias.

Willmarth y Wooldridge [3], estudiaron experimentalmente el campo de presión dentro de una capa límite turbulenta producida por transición natural sobre una superficie lisa. Los datos incluyen la presión media cuadrada, el espectro de potencia de la presión, la correlación espacio temporal de la presión en las direcciones longitudinal y transversal.

Corcos [4], presenta una discusión de la habilidad de un transductor para resolver los detalles espaciales de un campo de presión turbulenta. Con la ayuda de un formalismo previamente discutido y con alguna información experimental acerca de la estructura del campo de presión turbulenta en la capa límite, el mapeo o distorsión de las cantidades estadísticas asociadas con el momento de segundo orden del campo de la presión, es dado. La atenuación de la densidad de espectro y del espectro cruzado de la frecuencia es dada explicitamente en forma de tabla y en forma asimptótica. Los resultados se aplican a una evaluación de las medidas del campo de presión en flujos de corte. Se demuestra que el tamaño del transductor introduce grandes errores indeseables en estas medidas, las

cuales hacen dudar acerca de la magnitud de la intensidad de las fluctuaciones de la presión turbulenta. Se obtienen expresiones asimptóticas para la atenuación de transductores grandes.

Corcos [5], hace una discusión de las medidas de las propiedades estadísticas del campo de presión en la pared ligadas a flujo de corte transversal. El demostró que las medidas de la densidad de espectro cruzado longitudinal conduce a variables de similaridad para la covariancia espacio temporal de la presión y para el espectro correspondiente. La densidad de espectro cruzado también conduce a variables de similaridad. Este mecanismo fué ilustrado por un modelo matemático.

Hedin [6] ilustró empíricamente algunos efectos de la rugosidad sobre la potencia irradiada. El midió la radiación emitida de paneles flexibles rugosos y observó que la potencia total radiada era dependiente de la medida de la rugosidad.

Otros trabajos, tales como los de Leibowitz [7] y Davies [8], indican que la densidad de espectro cruzado excibe una medida dependiente de la rugosidad y que el conocimiento de la densidad de espectro cruzado de las fluctuaciones de la presión en la pared es suficiente para predecir la radiación mecánica.

Schloemer y Recine [9], midieron la densidad de espectro cruzado de la presión en la pared sobre la superficie rugosa e indicaron que ésta difiere de la medida sobre la superficie

lisa.

Aupperle y Lambert [11], midieron la densidad de espectro cruzado de las fluctuaciones de la presión dentro de una capa límite turbulenta, sobre una placa plana para tres condiciones diferentes de rugosidad. La rugosidad consistió de partículas de arena, espaciadas uniformemente sobre la superficie. Los resultados revelan que solamente la densidad de espectro es fuertemente dependiente de la rugosidad, para las rugosidades examinadas. La densidad de espectro fue normalizada, usando un parámetro de rugosidad equivalente, la velocidad de fricción y el coeficiente local de fricción. También, para la superficie rugosa, las fluctuaciones de la presión en la vecindad de una partícula y la correlación de estas fluctuaciones con las fluctuaciones de la presión a alguna distancia de la partícula fueron examinadas para determinar cualquier efecto observable del flujo local alrededor de las partículas. Los resultados indican que el flujo local puede ser ignorado, considerándose que la medida de la rugosidad no es tan grande. Las medidas tomadas no revelan cualquier relación directa entre las densidades de espectro cruzado medidas sobre superficies rugosas con las medidas sobre superficies lisas.

Por otro lado, han tratado la excitación de placas planas, excitadas por flujo turbulento, usando la experiencia y basados en modelos matemáticos de la presión estadística turbulenta, para calcular la respuesta los siguientes investigadores:

Strasbert [12] , calculó la vibración de una placa plana y en una membrana extendida excitada por las fluctuaciones de la presión dentro de la capa límite turbulenta de un fluido que fluye de un lado de la superficie vibrante, utilizando los datos experimentales obtenidos por Harrison [1] . La densidad de espectro de la amplitud de la vibración es calculada en términos de los valores medidos del espectro de la presión usando una relación teórica. La presión del sonido resultante de la vibración es también calculada para puntos cercanos y alejados de la superficie vibrante.

Bull et al [13] , usó los resultados de su experiencia acerca de las fluctuaciones de la presión en la pared causadas por flujo turbulento y derivó un modelo matemático aproximado de la función correlación cruzada de la presión. Basado en este modelo encontró una solución teórica para la función correlación cruzada del desplazamiento de una placa simplemente apoyada.

White [14] , se basó en los resultados de Corcos [4-5] , para predecir la respuesta y la consecuente radiación de ruido en una placa plana rectangular. El investigó los efectos de la densidad modal y las características de la capa límite.

Strawderman [15] , presenta una solución teórica para la velocidad estadística de una placa plana lisa simplemente apoyada, excitada por flujo turbulento. La aproximación teórica es similar a la de Bull, es decir, preserva los detalles de la

velocidad estadística de la placa, pero el modelo matemático de la presión estadística debida a la turbulencia fue el desarrollado por Corcos [4-5]. Los datos experimentales de la densidad de espectro de la presión fueron los obtenidos por Skudrzyk y Haddle [2].

Strawderman [16], analisa las similaridades y diferencias en la vibración estadística entre placas planas finitas e infinitas, excitadas por flujo turbulento, teniendo idénticas propiedades físicas y espesor. El modelo matemático de la presión estadística de la excitación fue el propuesto por Corcos [4-5] y los datos experimentales de la densidad de espectro de la presión fueron los obtenidos por Skudrzyk y Haddle [2].

C A P I T U L O II

CONSIDERACIONES TEORICAS

2.1 Respuesta de un Sistema Contínuo a una Excitación aleatoria

La ecuación diferencial parcial, describiendo el movimiento de un sistema amortiguado puede ser escrita en la forma [18]

$$L[w(P,t)] + \frac{\partial}{\partial t} C[w(P,t)] + M(P) \frac{\partial^2}{\partial t^2}[w(P,t)] = f(P,t) \quad (1)$$

donde $f(P,t)$ denota una excitación aleatoria distribuida supuesta ergódica. El desplazamiento $w(P,t)$ debe satisfacer (1) através del dominio D , y las condiciones de contorno asociadas. L es un operador diferencial linear homogéneo auto-adjunto, consistiendo de derivadas del orden $2p$ con respecto a la coordenada espacial P , pero no con respecto al tiempo t . El operador L contiene la información concerniente a la rigidez. La distribución de masa del sistema está dada por la función $M(P)$. El operador C representa el sistema amortiguado y se asume que éste es una combinación linear del operador L y la distribución de masa M de tal manera que puede ser usado el análisis modal para obtener la solución de (1).

El análisis de los modos normales nos conduce para la solución del problema especial del autovalor consistiendo de la ecuación diferencial

$$L[w] = \lambda M[w] = \omega^2 M[w] \quad (2)$$

que debe satisfacerse sobre el dominio D y en donde w está sujeta a las condiciones de contorno

$$B_i[w] = 0, i = 1, 2, \dots, p \quad (3)$$

Donde B_i son operadores diferenciales lineares homogéneos conteniendo derivadas de orden $2p - 1$, normales al contorno y a lo largo del contorno. En el caso unidimensional el dominio D es un continuo dependiendo de una variable espacial solamente y el contorno del dominio son dos puntos extremos. En el caso bidimensional el dominio D es un continuo definido por dos variables espaciales y el contorno S consiste de una o más curvas cerradas.

2.2 Solución de la Ecuación Diferencial

La solución del problema especial del autovalor consiste de un conjunto infinito de auto-funciones $w_r(P)$ con respecto a las frecuencias naturales ω_r . Las auto-funciones son ortogonales, y si ellas son normalizadas tales que

$$\int_D M(P) w_r(P) w_s(P) dD(P) = \delta_{rs} \quad (4a)$$

se sigue

$$\int_D w_r(P) L[w_s(P)] dD(P) = \omega_r^2 \delta_{rs} \quad (4b)$$

$$\int_D w_r(P) C[w_s(P)] dD(P) = c_r \delta_{rs} \quad (4c)$$

Usando el teorema de expansión se puede escribir la solución de la ecuación (1) como una superposición de los modos normales $w_r(P)$ multiplicados por la correspondiente coordenada generalizada dependiente del tiempo $q_r(t)$. Por lo tanto

$$w(P,t) = \sum_r w_r(P)q_r(t) \quad (5)$$

Introduciendo (5) en (1) y recordando que los operadores L y C son lineales, se obtiene

$$\sum_r q_r(t)L[w_r(P)] + \sum_r \dot{q}_r(t)C[w_r(P)] + \sum_r \ddot{q}_r(t)M(P)w_r(P) = f(P,t) \quad (6)$$

Multiplicando (6) por $w_s(P)$ e integrando sobre el dominio D y teniendo en cuenta la ortogonalidad asumida resulta

$$\ddot{q}_r(t) + c_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = f_r(t), \quad r = 1, 2, \dots \quad (7)$$

donde la fuerza aleatoria generalizada está dada por

$$f_r(t) = \int_D w_r(P)f(P,t)dD(P), \quad r = 1, 2, \dots \quad (8)$$

La ecuación (7) representa un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias, así que, en general, el amortiguamiento produce acoplamiento de las coordenadas normales. En algunos casos especiales no hay acoplamiento introducido por amortiguamiento. Eso es cuando el operador C es una combinación lineal del operador L y la función masa M ,

$$C = a_1 L + a_2 M \quad (9)$$

donde a_1 y a_2 son coeficientes constantes, en cuyo caso el amortiguamiento no acopla las coordenadas normales, porque

$$c_r \delta_{rs} = 2\zeta_r \omega_r \delta_{rs} \quad r, s = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Generalmente el amortiguamiento es una cantidad muy pequeña y la notación (10) fue escogida para hacer (4c) similar en estructura a la ecuación de un sistema de un simple grado de libertad.

2.3 Análisis armónico generalizado

Sea $Q_x(w)$ la transformada de Fourier de $q_r(t)$ y sea

$$\begin{aligned} F_r(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_r(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_D w_r(P) f(P, t) dD(P) \right] e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_D w_r(P) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(P, t) e^{-i\omega t} dt \right] dD(P) = w_r(P) F(P, \omega) dD(P) \end{aligned} \quad (11)$$

la transformada de Fourier de la fuerza aleatoria generalizada $f_r(t)$, donde $F(P, \omega)$ es la transformada de Fourier de la fuerza aleatoria distribuida $f(P, t)$.

Definiendo la respuesta de frecuencia compleja para la coordenada normal $w_r(P)$ como

$$H_r(\omega) = \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2 + i(2\zeta_r \omega_r \omega)} \quad (12)$$

y tomando la transformada de Fourier de la ecuación (7) se

obtiene

$$(-\omega^2 + 2i\zeta_r \omega_r \omega + \omega_r^2) Q_r(\omega) = F_r(\omega)$$

o,

$$Q_r = H_r(\omega) F_r(\omega) \quad (13)$$

Las transformadas de Fourier de las respuestas en los puntos P y P' son

$$\begin{aligned} W(P, \omega) &= \sum_r w_r(P) Q_r(\omega) = \sum_r w_r(P) H_r(\omega) F_r(\omega) \\ W(P', \omega) &= \sum_s w_s(P') Q_s(\omega) = \sum_s w_s(P') H_s(\omega) F_s(\omega) \end{aligned} \quad (14)$$

En este análisis se considera que:

1. Los registros del desplazamiento y de la fuerza aleatoria distribuida son nulos fuera del intervalo de tiempo (-T, T).
2. El proceso aleatorio considerado posee las propiedades de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad por lo menos en el sentido del valor medio cuadrado. Así que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-T}^T |f(P, t)|^2 dt \quad (15)$$

existe para cualquier punto de interés del dominio D.

Para un movimiento cualquiera $w(P, t)$, la densidad de espectro cruzado se define por

$$S_{ww}(P, P', \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} W^*(P, \omega) W(P', \omega) \quad (16)$$

Siendo W^* el conjugado complejo de W .

La función correlación cruzada se define por

$$R_{WW}(P, P', t, t+\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T w(P, t)w(P', t+\tau) dt \quad (17)$$

Por el teorema de Parseval (17) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} R_{WW}(P, P', t, t+\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} W^*(P, \omega)W(P', \omega)e^{i\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{WW}(P, P')e^{i\omega\tau} d\omega \end{aligned} \quad (18)$$

De las ecuaciones (14) y (16), resulta

$$\begin{aligned} S_{WW}(P, P', \omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \sum_r w_r(P)H_r^*(\omega)F_r^*(\omega) \sum_s w_s(P')H_s(\omega)F_s(\omega) \\ &= \sum_r \sum_s w_r(P)w_s(P')H_r^*(\omega)H_s(\omega) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} F_r^*(\omega)F_s(\omega) \end{aligned} \quad (19)$$

Si se define la densidad de espectro cruzado de la excitación aleatoria generalizada como

$$\begin{aligned} S_{FF}(P, P', \omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} F_r^*(\omega)F_s(\omega) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \iint_D F^*(P, \omega)F(P', \omega)w_r(P)w_s(P')dD(P)dD(P') \\ &= \iint_D \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} F^*(P, \omega)F(P', \omega)w_r(P)w_s(P')dD(P)dD(P') \end{aligned}$$

$$S_{FF}(P, P', \omega) = \iint_D S_{ff}(P, P', \omega) w_r(P) w_s(P') dD(P) dD(P') \quad (20)$$

La función $S_{ff}(P, P', \omega)$ es la densidad de espectro de la excitación aleatoria. Substituyendo (20) en (19) se obtiene finalmente

$$S_{WW}(P, P', \omega) = \sum_r \sum_s w_r(P) w_s(P) H_r^*(\omega) H_s(\omega) \int_D S_{ff}(P, P', \omega) w_r(P) w_s(P') dD(P) dD(P') \quad (21)$$

Si los dos puntos coinciden, $P = P'$, se obtiene la densidad de espectro $S_W(P, \omega)$

$$S_W(P, \omega) = \sum_r \sum_s w_r(P) w_s(P) H_r^*(\omega) H_s(\omega) \int_D S_f(P, \omega) w_r(P) w_s(P) dD(P) \quad (22)$$

C A P I T U L O III

RESPUESTA DE UNA PLACA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA

3.1 Ecuación Dinámica de la Placa

Considérese una placa rectangular uniforme extendida a través del dominio $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, y simplemente apoyada a lo largo del contorno $x = 0, a$ e $y = 0, b$ (Fig. 1). La placa está sujeta a una distribución de presión de intensidad $p(x, y, t)$ causada por las fluctuaciones de un flujo turbulento en la pared.

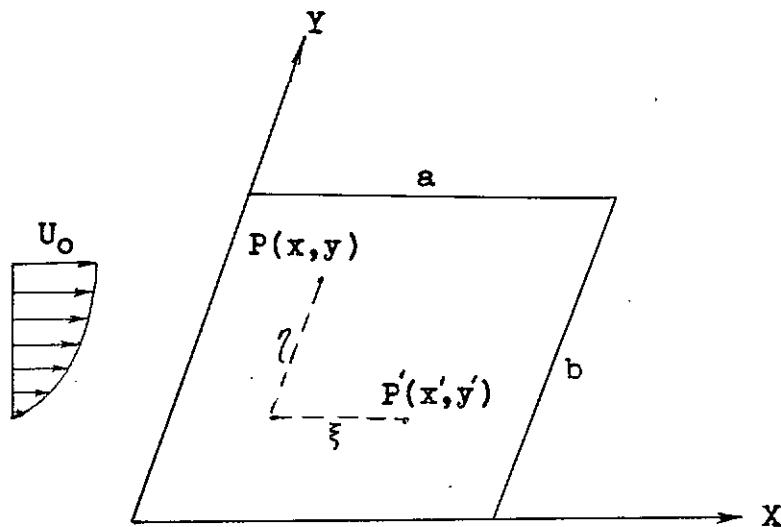


Fig. 1

La ecuación diferencial que gobierna el movimiento de la placa $w(x, y, t)$, en la dirección transversal a ésta, es tomada de la teoría clásica de placas delgadas y puede ser

escrita como

$$D_E^4 w(x,y,t) + c \frac{\partial}{\partial t} w(x,y,t) + \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x,y,t) = p(x,y,t) \quad (23)$$

en donde D_E es la rigidez a la flexión de la placa, c es el amortiguamiento y μ es la masa de la placa por unidad de área.

Comparando las ecuaciones (23) y (1) vemos que los operadores L y C tienen la forma

$$\begin{aligned} L[w(P,t)] &= D_E^4 w(x,y,t) \\ C[w(P,t)] &= cw(x,y,t) \end{aligned} \quad (24)$$

Los modos normales de una placa uniforme simplemente apoyada son

$$w_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab\mu}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, m,n = 1,2,\dots \quad (25)$$

con frecuencias naturales correspondientes

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D_E}{\mu}} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right], m,n = 1,2,\dots \quad (26)$$

3.2 Solución de la Ecuación Diferencial de la Placa

De acuerdo a (5), el desplazamiento transversal de la placa es

$$w(x,y,t) = \sum_{mn} w_{mn}(x,y) q_{mn}(t) \quad (27)$$

donde los modos normales $w_{mn}(x,y)$ son dados por (25) y $q_{mn}(t)$ son las correspondientes coordenadas generalizadas.

3.3 Densidad de Espectro del Desplazamiento

La densidad de espectro cruzado del desplazamiento puede ser obtenida siguiendo el procedimiento desarrollado en la sección 2.3. Definiendo la Densidad del Espectro cruzado del desplazamiento como

$$S_{WW}(x,y,x',y',\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} W^*(x,y,\omega)W(x',y',\omega) \quad (28)$$

y considerando los resultados generales obtenidos en la ecuación (21) se puede escribir para la placa

$$S_{WW}(x,y,x',y',\omega) = \sum_{mn} \sum_{qs} H_{mn}^*(\omega) H_{qs}(\omega) w_{mn}(x,y) w_{qs}(x',y') \\ \times \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b S_{pp}(x,y,x',y',\omega) w_{mn}(x,y) w_{qs}(x',y') dx dy dx' dy' \quad (29)$$

El cálculo de la integral depende de la forma precisa de la función densidad de espectro de la presión escogida para describir el proceso.

Se asume que las fluctuaciones de la presión debidas al flujo turbulento es un fenómeno aleatorio estacionario en el tiempo y homogéneo en el espacio, es decir, que la correlación espacial cruzada de la presión es función únicamente de la se-

paración de los puntos en el espacio y no de la localización específica de los puntos, entonces

$$R_{pp}(\xi, \eta, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\tau}^{\tau} p(x, y, t) p(x + \xi, y + \eta, t + \tau) dt \quad (30)$$

por tanto,

$$S_{pp}(\xi, \eta, \omega) = S'_{pp}(x, y, x', y', \omega)$$

3.4 Densidad de Espectro Cruzado de la Velocidad

Si se define la velocidad de la placa $u(x, y, t)$ en un punto cualquiera como

$$u(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} w(x, y, t) \quad (31)$$

entonces, la densidad de espectro cruzado de la velocidad es:

$$\begin{aligned} S_{uu}(x, y, x', y', \omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2iT} U^*(x, y, \omega) U(x', y', \omega) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2iT} (-i\omega) W^*(x, y, \omega) \cdot (i\omega) W(x', y', \omega) \\ &= \omega^2 S_W(x, y, x', y', \omega) \end{aligned} \quad (32)$$

3.5 Densidad de Espectro Cruzado de Momentos Flectores, Fuerzas de Corte Transversal y Esfuerzos

Las expresiones de momentos flectores y fuerzas de corte

transversal para placas planas delgadas son:

$$\begin{aligned}
 m_x &= -D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right)w(x, y, t) \\
 m_y &= -D\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\right)w(x, y, t) \\
 q_x &= -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right)w(x, y, t) \\
 q_y &= -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\right)w(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{33}$$

Las transformadas de Fourier de estas expresiones son:

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right)W(x, y, \omega) \\
 M_y &= -D\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\right)W(x, y, \omega) \\
 Q_x &= -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right)W(x, y, \omega) \\
 Q_y &= -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\right)W(x, y, \omega)
 \end{aligned} \tag{34}$$

La densidad de espectro cruzado de los momentos flectores y de las fuerzas de corte, son definidas similarmente a la del desplazamiento, como

$$S_{M_X M_X}(x, y, x', y', \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} M^*(x, y, \omega) M(x', y', \omega)$$

$$S_{M_X M_X}(x, y, x', y', \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} M_X^*(x, y, \omega) M_X(x', y', \omega) \quad (35)$$

$$S_{Q_X Q_X}(x, y, x', y', \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} Q_X^*(x, y, \omega) Q_X(x', y', \omega)$$

$$S_{Q_Y Q_Y}(x, y, x', y', \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} Q_Y^*(x, y, \omega) Q_Y(x', y', \omega)$$

y las correspondientes correlaciones espaciales cruzadas son:

$$\begin{aligned} R_{M_X M_X}(x, y, x', y', t, t+\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{M_X M_X}(x, y, x', y', \omega) e^{i\omega\tau} d\omega \\ R_{M_Y M_Y}(x, y, x', y', t, t+\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{M_Y M_Y}(x, y, x', y', \omega) e^{i\omega\tau} d\omega \\ R_{Q_X Q_X}(x, y, x', y', t, t+\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{Q_X Q_X}(x, y, x', y', \omega) e^{i\omega\tau} d\omega \\ R_{Q_Y Q_Y}(x, y, x', y', t, t+\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{Q_Y Q_Y}(x, y, x', y', \omega) e^{i\omega\tau} d\omega \end{aligned} \quad (36)$$

De las ecuaciones (34) y (35) podemos escribir:

$$\begin{aligned} S_{M_X M_X}(x, y, x', y', \omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D^2}{2\pi T} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) W^*(x, y, \omega) W(x', y', \omega) \\ &= D_\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} W^*(x, y, \omega) W(x, y, \omega) \\ &= D_\epsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) S_{WW}(x, y, x', y', \omega) \end{aligned} \quad (37)$$

Substituyendo el valor de $S_{WW}(x, y, x', y')$ dado por la ecuación (29), resulta

$$S_{M_x M_x}(x, y, x, y, \omega) = D_e^2 \sum_{mn} \sum_{qs} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w_{mn}(x, y) \right] \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) w_{qs}(x', y') \right] \\ \times H_{mn}^*(\omega) H_{qs}(\omega) \int \int \int \int \limits_{\text{o o o o}}^{a b a b} S_{pp}(x, y, x, y, \omega) w_{mn}(x, y) w_{qs}(x', y') dx dy dx' dy' \quad (38)$$

Similarmente obtenemos:

$$S_{M_y M_y}(x, y, x, y, \omega) = D_e^2 \sum_{mn} \sum_{qs} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w_{mn}(x, y) \right] \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) w_{qs}(x', y') \right] \\ \times H_{mn}^*(\omega) H_{qs}(\omega) \int \int \int \int \limits_{\text{o o o o}}^{a b a b} S_{pp}(x, y, x, y, \omega) w_{mn}(x, y) w_{qs}(x', y') dx dy dx' dy' \quad (39)$$

$$S_{Q_x Q_x}(x, y, x, y, \omega) = D_e^2 \sum_{mn} \sum_{qs} \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \gamma \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right) w_{mn}(x, y) \right] \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \gamma \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right) w_{qs}(x', y') \right] \\ \times H_{mn}^*(\omega) H_{qs}(\omega) \int \int \int \int \limits_{\text{o o o o}}^{a b a b} S_{pp}(x, y, x, y, \omega) w_{mn}(x, y) w_{qs}(x', y') dx dy dx' dy' \quad (40)$$

$$S_{Q_y Q_y}(x, y, x, y, \omega) = D_e^2 \sum_{mn} \sum_{qs} \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} + \gamma \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \right) w_{mn}(x, y) \right] \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} + \gamma \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \right) w_{qs}(x', y') \right] \\ \times H_{mn}^*(\omega) H_{qs}(\omega) \int \int \int \int \limits_{\text{o o o o}}^{a b a b} S_{pp}(x, y, x, y, \omega) w_{mn}(x, y) w_{qs}(x', y') dx dy dx' dy' \quad (41)$$

Para el análisis de esfuerzos, se toman como base los esfuerzos máximos; esto es:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{6 m_x}{h^2} & \sigma_y &= \frac{6 m_y}{h^2} \\ \tau_x &= \frac{3 q_x}{2h} & \tau_y &= \frac{3 q_y}{2h}\end{aligned}\tag{42}$$

Para el cálculo de la densidad de espectro cruzado entre los esfuerzos es suficiente conocer la densidad de espectro cruzado de los momentos flectores y de las fuerzas de corte transversal, ya que están relacionadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}s_{\sigma_x \sigma_x}(x, y, x', y', \omega) &= \frac{36}{h^4} s_{M_{xx} M_{xx}}(x, y, x', y', \omega) \\ s_{\sigma_y \sigma_y}(x, y, x', y', \omega) &= \frac{36}{h^4} s_{M_{yy} M_{yy}}(x, y, x', y', \omega) \\ s_{\tau_x \tau_x}(x, y, x', y', \omega) &= \frac{9}{4h^2} s_{Q_{xx} Q_{xx}}(x, y, x', y', \omega) \\ s_{\tau_y \tau_y}(x, y, x', y', \omega) &= \frac{9}{4h^2} s_{Q_{yy} Q_{yy}}(x, y, x', y', \omega)\end{aligned}\tag{43}$$

C A P I T U L O IV

CALCULOS Y RESULTADOS

4.1 Densidad de Espectro Cruzado de la Presión

El modelo matemático para la densidad de espectro cruzado de la presión en la pared usado en este análisis es el propuesto por Corcos [5] o sea

$$S_{pp}(\xi, \eta, \omega) = \phi_p(\omega) A\left(\frac{\omega\xi}{U_c}\right) B\left(\frac{\omega\eta}{U_c}\right) e^{-1\left(\frac{\omega\xi}{U_c}\right)} \quad (44)$$

En donde estas funciones representan:

$\phi_p(\omega)$: Densidad de espectro de las fluctuaciones de la presión en la pared.

$A\left(\frac{\omega\xi}{U_c}\right)$: Rata de pérdida de coherencia de las fuentes productoras de presión, o eddies.

$B\left(\frac{\omega\eta}{U_c}\right)$: Rango de influencia lateral de los eddies.

U_c es representativa de la rata de propagación de los eddies.

Estas funciones fueron obtenidas experimentalmente por Aupperle y Lambert [11] (Ver Apéndice B).

4.2 Cálculo de la Densidad de Espectro de la Presión

Con el fin de determinar la densidad de espectro de la presión normalizada, dada en la Fig. 3, se tomaron los datos co-

correspondientes a la rugosidad de grado 4 (Ver Tabla 2) y se ajustaron según un polinomio de tercer grado de la forma:

$$H\left(\frac{\omega K_s}{U^*}, U_o\right) = A_1 + A_2 \left(\frac{\omega K_s}{U^*}\right) + A_3 \left(\frac{\omega K_s}{U^*}\right)^2 + A_4 \left(\frac{\omega K_s}{U^*}\right)^3 \quad (45)$$

Ejecutando el cálculo de los coeficientes del polinomio que mejor se ajusta a la serie de valores dados en la Tabla 2, se obtuvo

$$A_1 = 13.706547$$

$$A_3 = 0.008225$$

$$A_2 = -0.579172$$

$$A_4 = -0.00003786$$

La función $H\left(\frac{\omega K_s}{U^*}, U_o\right)$ está graficada en la Fig. 2.

Teniendo en cuenta que la velocidad de fricción es

$$U^* = (\tau_w / \rho)^{1/2}$$

entonces la expresión de la densidad de espectro de la presión en la pared puede ser escrita:

$$\Phi_p\left(\frac{\omega K_s}{U^*}\right) = K_s U^{*3} \rho^2 c_f \left[A_1 + A_2 \left(\frac{\omega K_s}{U^*}\right) + A_3 \left(\frac{\omega K_s}{U^*}\right)^2 + A_4 \left(\frac{\omega K_s}{U^*}\right)^3 \right] \quad (46)$$

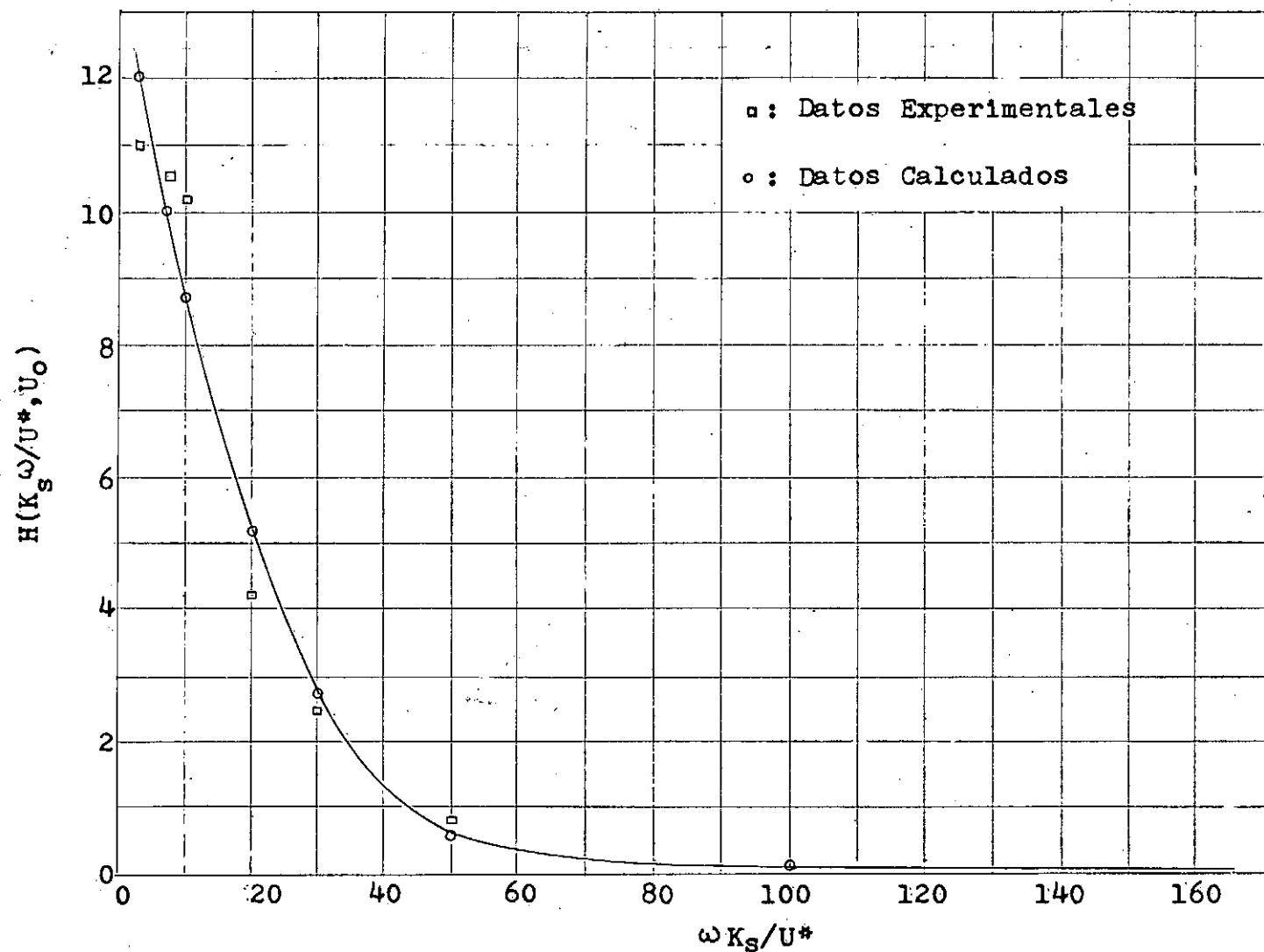


Fig. 2 Espectro ajustado según el polinomio de tercer grado:

$$A_1 + A_2 (\omega K_s / U^*) + A_3 (\omega K_s / U^*)^2 + A_4 (\omega K_s / U^*)^3.$$

4.3 Resultados del Espectro de Desplazamiento

Para las funciones $A\left(\frac{\omega\xi}{U_c}\right)$ y $B\left(\frac{\omega\eta}{U_c}\right)$ fueron seleccionadas las siguientes expresiones:

$$A\left(\frac{\omega\xi}{U_c}\right) = \text{Exp} \left(-0.26 \left| \frac{\omega\xi}{U_c} \right| \right) \quad (47)$$

$$B\left(\frac{\omega\eta}{U_c}\right) = \text{Exp} \left(-0.91 \left| \frac{\omega\eta}{U_c} \right| \right)$$

La velocidad convectiva fué tomada como constante

$$U_c = 0.7 U_0 \quad (48)$$

Considerando las Ecuaciones (43) y (47), entonces la densidad de espectro cruzado de la presión en la pared será dada por la siguiente expresión matemática:

$$S_{pp}(\xi, \eta, \omega) = \phi_p \left(\frac{\omega K_s}{U^*} \right) \text{Exp} \left(-0.26 \left| \frac{\omega\xi}{U_c} \right| \right) \text{Exp} \left(-0.91 \left| \frac{\omega\eta}{U_c} \right| \right) \text{Exp} \left(-\frac{i\omega\xi}{U_c} \right) \quad (49)$$

Substituyendo las ecuaciones (12), (48) y (49) en la ecuación (30) y ejecutando la integración requerida, la expresión para la densidad de espectro cruzado del desplazamiento de la placa será:

$$S_{ww}(x, \xi, y, \eta, \omega) = X(\omega) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_{mn}(x, y) w_{qs}(x+\xi, y+\eta) G_{ns}(\omega) V_{mnqs}(\omega)}{T_{mn}(\omega) T_{qs}(\omega) P_n(\omega) P_s(\omega) R_m(\omega) R_q(\omega)} \quad (50)$$

en donde,

$$X(\omega) = \frac{4}{ab} \phi_p \left(\frac{\omega K_s}{U^*} \right)$$

$$\phi_p \left(\frac{\omega K_s}{U^*} \right) = K_s U^{*3} \rho^2 c_f \left[A_1 + A_2 \left(\frac{\omega K_s}{U^*} \right) + A_3 \left(\frac{\omega K_s}{U^*} \right)^2 + A_4 \left(\frac{\omega K_s}{U^*} \right)^3 \right]$$

$$T_{mn}(\omega) = \left[(\omega_{mn}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_{mn}\omega)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$P_n(\omega) = \left(\frac{0,91\omega^2}{U_c} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

$$B_m(\omega) = \left\{ \left[\left(\frac{0,26\omega}{U_c} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a} - \frac{\omega}{U_c} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{0,26\omega}{U_c} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a} + \frac{\omega}{U_c} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$G_{ns}(\omega) = 0,455 \frac{\omega b}{U_c} \delta_{ns} \left[2 \left(\frac{0,91\omega}{U_c} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{b} \right)^2 \right] + \\ \frac{ns\pi^2}{b^2} [1 - \delta_{ns}] [(-1)^n (-1)^s - 1] + \frac{ns\pi^2}{b^2} [2 - [(-1)^n + (-1)^s]] \text{Exp} \left(- \frac{0,91\omega b}{U_c} \right)$$

$$V_{mnqs}(\omega) = W_{mnqs}(\omega) + iY_{mnqs}(\omega)$$

$$\lambda_{mn} = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta\omega\omega_{mn}}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} \right)$$

$$\psi_m = \tan^{-1} \left[\frac{0.52(\omega/U_c)^2}{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - 0,933(\omega/U_c)^2} \right]$$

$$W_{mnqs}(\omega) = 1.0338 \frac{\omega a}{U_c} \delta_{mq} B_m \cos(\psi_m - 0.693\pi) \cos(\lambda_{mn} - \lambda_{qs}) \\ + \frac{2 m q \pi^2}{a^2} \cos(\psi_m + \psi_q) \cos(\lambda_{mn} - \lambda_{qs})$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \delta_{mq}) \frac{mq\pi^2}{a^2} \frac{[(-1)^m (-1)^{q-1}]}{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{q\pi}{a}\right)^2\right]} [R_m \cos(\nu_q + \lambda_{mn} - \lambda_{qs}) - R_q \cos(\nu_m + \lambda_{qs} - \lambda_{mn})] \\
& - \frac{mq\pi^2}{a^2} \text{Exp}\left(-\frac{0.26\omega a}{U_c}\right) \left[(-1)^m \cos\left(\frac{\omega a}{U_c} + \nu_q + \nu_m + \lambda_{mn} - \lambda_{qs}\right) + \right. \\
& \quad \left. + (-1)^q \cos\left(\frac{\omega a}{U_c} + \nu_q + \nu_m + \lambda_{qs} - \lambda_{mn}\right) \right] \\
Y_{mnqs}(\omega) &= 1.0338 \frac{\omega a}{U_c} \delta_{mq} R_m \cos(\nu_m - 0.693\pi) \sin(\lambda_{mn} - \lambda_{qs}) \\
& + \frac{2mn\pi^2}{a^2} \cos(\nu_m + \nu_{qs}) \sin(\lambda_{mn} - \lambda_{qs}) \\
& + (1 - \delta_{mq}) \frac{mq\pi^2}{a^2} \frac{[(-1)^m (-1)^{q-1}]}{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{q\pi}{a}\right)^2\right]} [R_m \sin(\nu_q + \lambda_{mn} - \lambda_{qs}) - R_q \sin(\nu_m + \lambda_{qs} - \lambda_{mn})] \\
& - \frac{mq\pi^2}{a^2} \text{Exp}\left(-\frac{0.26\omega a}{U_c}\right) \left[(-1)^m \sin\left(\frac{\omega a}{U_c} + \nu_q + \nu_m + \lambda_{mn} - \lambda_{qs}\right) - \right. \\
& \quad \left. - (-1)^q \sin\left(\frac{\omega a}{U_c} + \nu_q + \nu_m + \lambda_{qs} - \lambda_{mn}\right) \right]
\end{aligned}$$

4.4 Resultado del Espectro de Velocidad

De la ecuación (19) tenemos que la densidad de espectro cruzado de la velocidad de la placa está dado por:

$$S_{uu}(x, \xi, y, \eta, \omega) = \omega^2 X(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{w_{mn}(x, y) w_{qs}(x+\xi, y+\eta) G_{ns}(\omega) V_{mnqs}(\omega)}{T_{mn}(\omega) T_{qs}(\omega) P_n(\omega) P_s(\omega) R_m(\omega) R_q(\omega)} \quad (51)$$

4.5 Resultados de los Espectros de Momentos Flectores y de Fuerzas de Corte Transversal

Derivando la expresión de los modos normales dada en la ecuación (25) resulta:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_{mn}(x, y) &= -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 w_{mn}(x, y) \\
 \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_{mn}(x, y) &= -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 w_{mn}(x, y) \\
 \frac{\partial^3}{\partial x^3} w_{mn}(x, y) &= -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 \operatorname{ctg}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) w_{mn}(x, y) \\
 \frac{\partial^3}{\partial y^3} w_{mn}(x, y) &= -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 \operatorname{ctg}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) w_{mn}(x, y) \\
 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} w_{mn}(x, y) &= -\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \operatorname{ctg}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) w_{mn}(x, y) \\
 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} w_{mn}(x, y) &= -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) w_{mn}(x, y)
 \end{aligned} \tag{52}$$

Si se substituyen estas expresiones en las correspondientes a las de los espectros de momentos flectores y cargas de corte transversal dadas por (37), (38), (39) y (40) se obtiene:

Para $S_{M_X M_X}$

$$S_{M_X M_X}(x, \xi, y, \eta, \omega) = D_X^2(\omega) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn} A_{qs} w_{mn}(x, y) w_{qs}(x+\xi, y+\eta) G_{ns} V_{mnqs}}{T_{mn}(\omega) T_{qs}(\omega) P_n(\omega) P_s(\omega) R_m(\omega) R_q(\omega)} \tag{53}$$

en donde,

$$A_{mn} = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}$$

Para $S_{M_y M_y}$:

$$S_{M_y M_y}(x, \xi, y, \eta, \omega) = D^2 X(\omega) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn} A_{sq} w_{mn}(x, y) w_{qs}(x+\xi, y+\eta) G_{ns}(\omega) V_{mnqs}}{T_{mn}(\omega) T_{qs}(\omega) P_n(\omega) P_s(\omega) R_m(\omega) R_q(\omega)}$$

en donde,

$$A_{nm} = \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2}$$

Para $S_{Q_x Q_x}$:

$$S_{Q_x Q_x}(x, \xi, y, \eta, \omega) = D^2 X(\omega) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{mn}(x) B_{qs}(x+\xi) W_{mn}(x, y) W_{qs}(x+\xi, y+\eta) G_{ns} V_{mnqs}}{T_{mn}(\omega) T_{qs}(\omega) P_n(\omega) P_s(\omega) R_m(\omega) R_q(\omega)}$$

en donde,

$$B_{mn}(x) = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} \right] \operatorname{ctg} \left(\frac{m\pi x}{a} \right)$$

Para $S_{Q_y Q_y}$:

$$S_{Q_y Q_y}(x, \xi, y, \eta, \omega) = D^2 X(\omega) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{nm}(y) B_{sq}(y+\xi) W_{mn}(x, y) W_{qs}(x+\xi, y+\eta) G_{ns} V_{mnqs}}{T_{mn}(\omega) T_{qs}(\omega) P_n(\omega) P_s(\omega) R_m(\omega) R_q(\omega)}$$

en donde,

$$B_{nm}(y) = \left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2} \right] \operatorname{ctg} \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

C A P I T U L O V

PRESENTACION DE LOS RESULTADOS, DISCUSION Y CONCLUSIONES

El fin de estos cálculos es comparar los espectros cruzados de los esfuerzos entre placas rugosas y lisas y determinar el efecto del amortiguamiento en los espectros de desplazamiento y velocidad en la placa rugosa.

Los resultados fueron obtenidos para una placa plana rectangular de aluminio cuyas dimensiones son $60 \times 10 \times 0.15$ cm, excitada por un flujo de aire a una velocidad de 50 m/seg. Las propiedades del material de la placa son:

$$D_E = 216.4 \text{ (Kp-cm)}$$

$$\mu = 4.13 \times 10^{-7} \text{ (Kp-seg}^2/\text{cm}^3\text{)}$$

$$\gamma = 0.30$$

Todos los cálculos se efectuaron para la rugosidad de grado comercial 4, por ser esta la mayor rugosidad examinada. De la tabla 1 tenemos:

$$U^* = 5.12 \text{ (m/seg)}$$

$$K_s = 1.19 \text{ (cm)}$$

$$\delta^* = 0.507 \text{ (cm)}$$

$$C_f = 0.021$$

Los espectros de las diferentes cantidades, para los datos seleccionados, fueron calculados de las ecuaciones correspondientes a cada espectro por el uso del computador digital. Las

frecuencias naturales estan dadas en la tabla 3.

5.1 Espectros Simples

Las densidades de espectro del desplazamiento y de la velocidad fueron calculadas para dos valores del amortiguamiento en el punto medio de la placa. Estos valores del amortiguamiento son $\zeta = 0.01$ y $\zeta = 0.05$. Los espectros resultantes del desplazamiento son presentados en las Figs. 8a y 9a y los de la velocidad son presentados en las Figs. 9a y 9b. O sea, estas Figs. muestran el efecto del amortiguamiento sobre las densidades de espectro del desplazamiento y de la velocidad. Como se observa tiene una gran influencia sobre la amplitud en las regiones de resonancia, es decir, es mas pronunciado en la vecindad de las frecuencias naturales de la placa.

5.2 Espectros Cruzados

Las Figs. 10-17 comparan las densidades de espectro cruzado de los momentos flectores (Figs. 10-11), cargas de corte transversal (Figs. 12-13), esfuerzos normales (Figs. 14-15) y esfuerzos de corte (Figs. 16-17) para placas lisas y rugosas. Como se puede observar de las ecuaciones de los diferentes espectros, éstos son estacionarios y dependientes de la separación y de la localización específica de los puntos en el espacio. El punto inicial de interés escogido, fue el centro de la placa (30,5) cm, y la separación (ξ, η) fué escogida $\frac{1}{4}$ de la longitud de la

placa en la dirección del flujo y cero en la dirección lateral; esto es, (15,0) cm. Estos puntos fueron seleccionados en la dirección longitudinal por considerar que la mayor contribución del movimiento ocurre a lo largo de la línea central de la placa.

Los cálculos para placas lisas se hicieron en base a los resultados obtenidos por Strawderman [16] , (Ver Apéndice C).

Los resultados indican que la contribución de los esfuerzos son comparables a bajas frecuencias; mientras que para las altas frecuencias, estos son mayores para las placas rugosas. Los resultados así obtenidos están en concordancia con los de Aupperle y Lambert, ya que la macroescala $L_x > K_s$, de los grandes eddies (baja frecuencia) retienen su coherencia y las correlaciones son reducidas, y para los pequeños eddies (alta frecuencia) $L_x < K_s$, no mantienen su coherencia y participan grandemente en la producción de fuentes de presión.

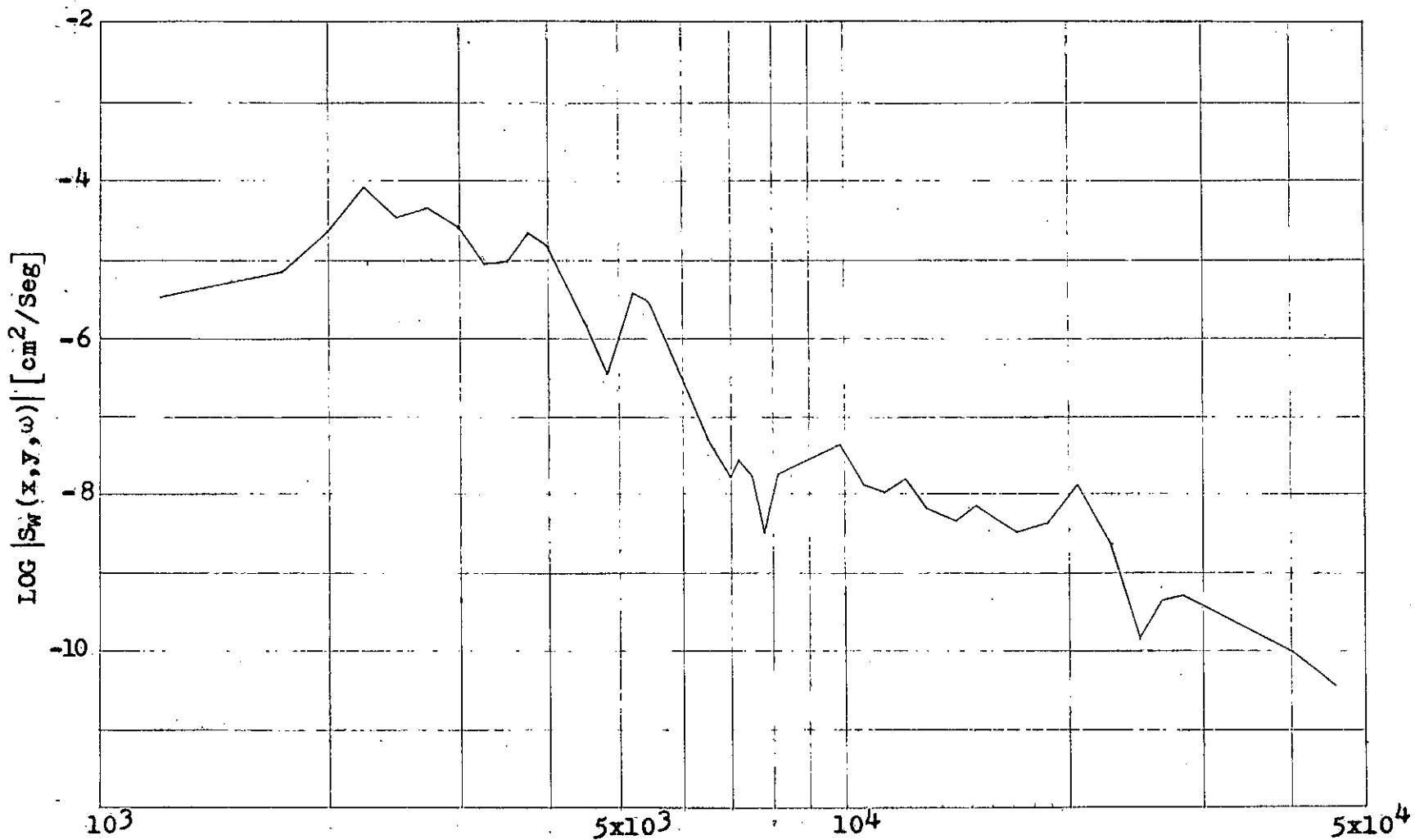


Fig. 8a. Densidad de espectro del desplazamiento, calculado en el centro de la placa (30,5) cm, para $\zeta = 0.05$

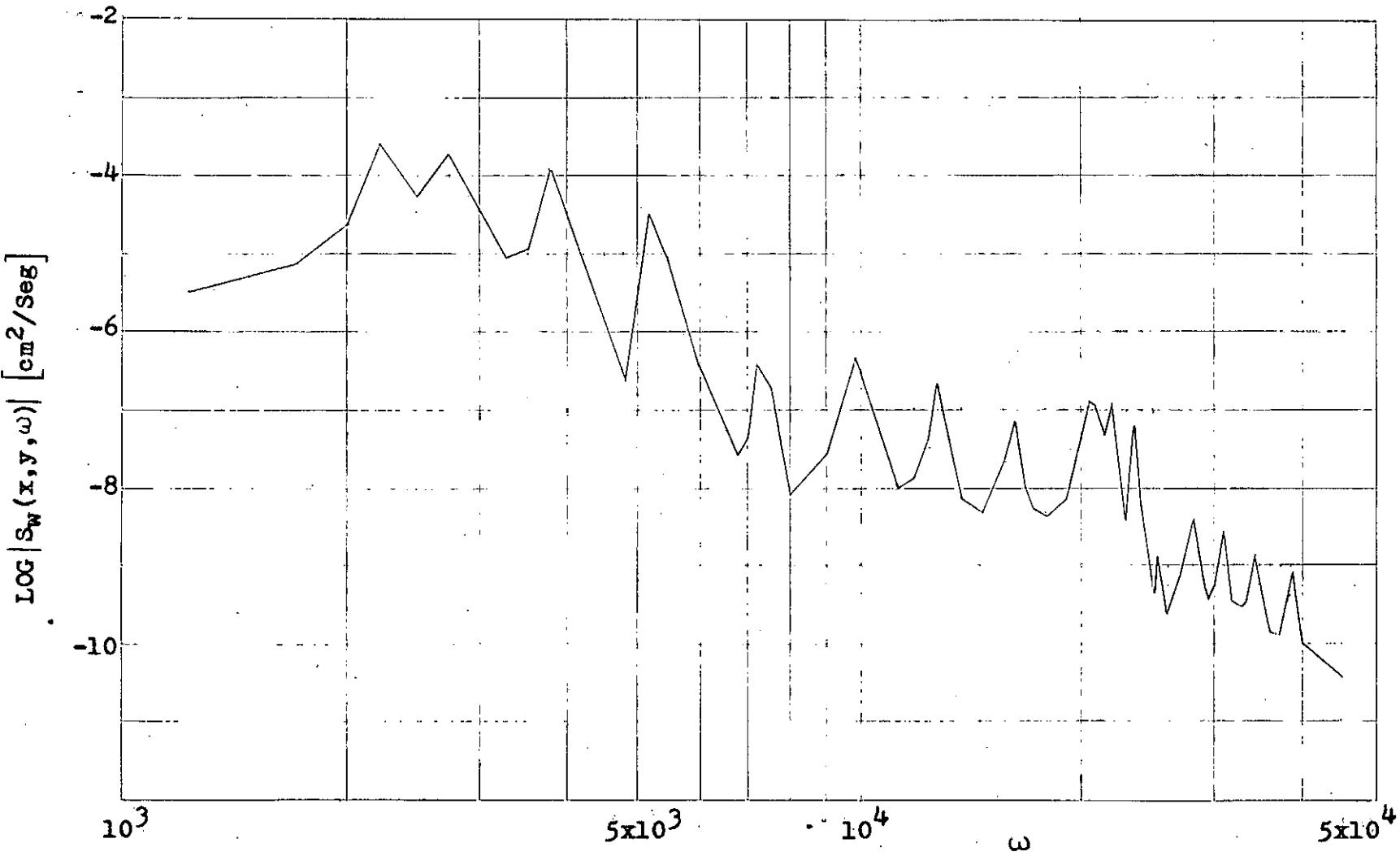


Fig. 8b. Densidad de espectro del desplazamiento, calculada en el centro de la placa (30,5) cm, para $\zeta = 0.01$

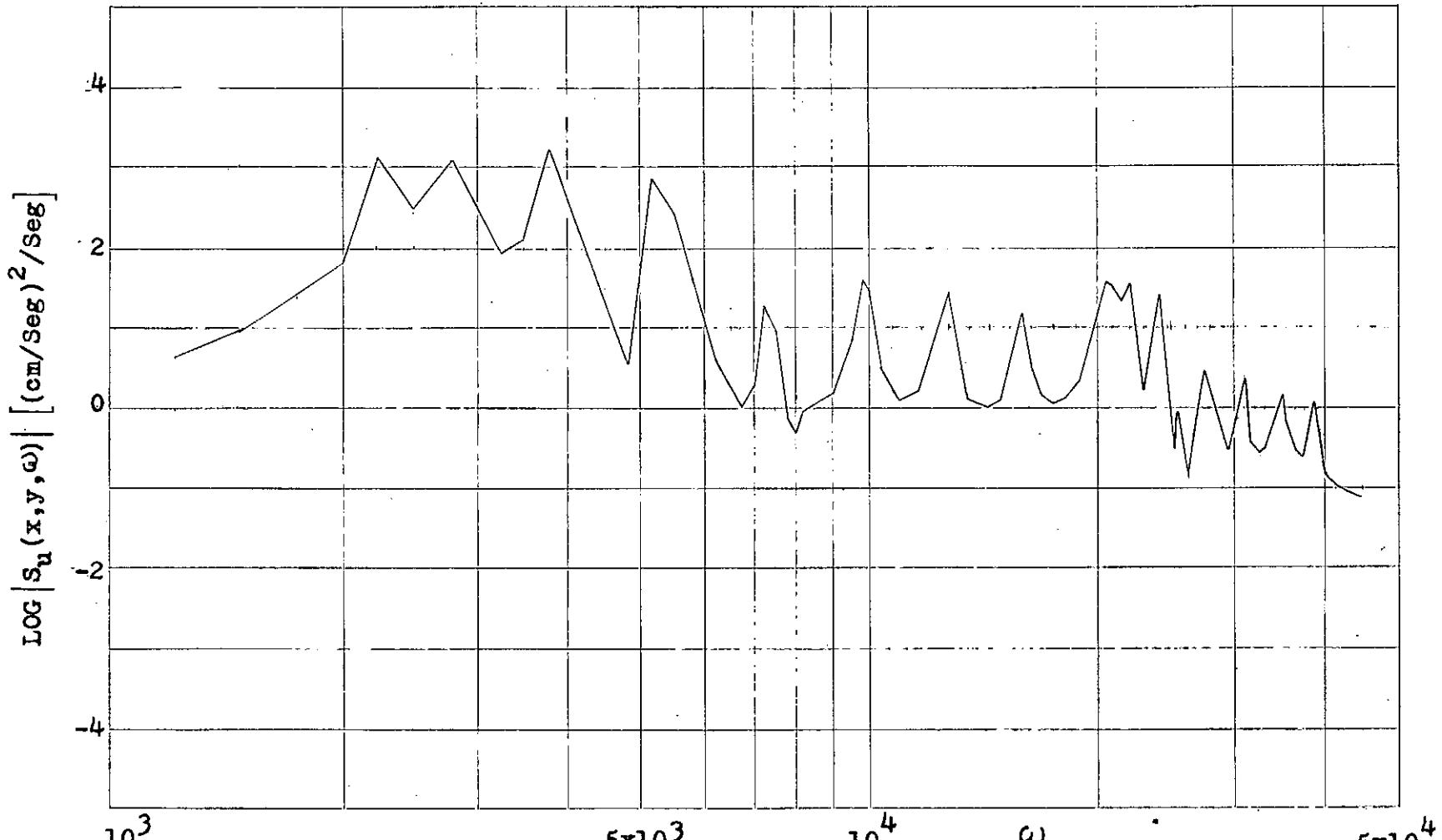


Fig. 9a. Densidad de espectro de la velocidad, calculada en el centro de la placa (30,5) cm, para $\zeta = 0.01$

ca (30,5) cm, para $\zeta = 0.01$

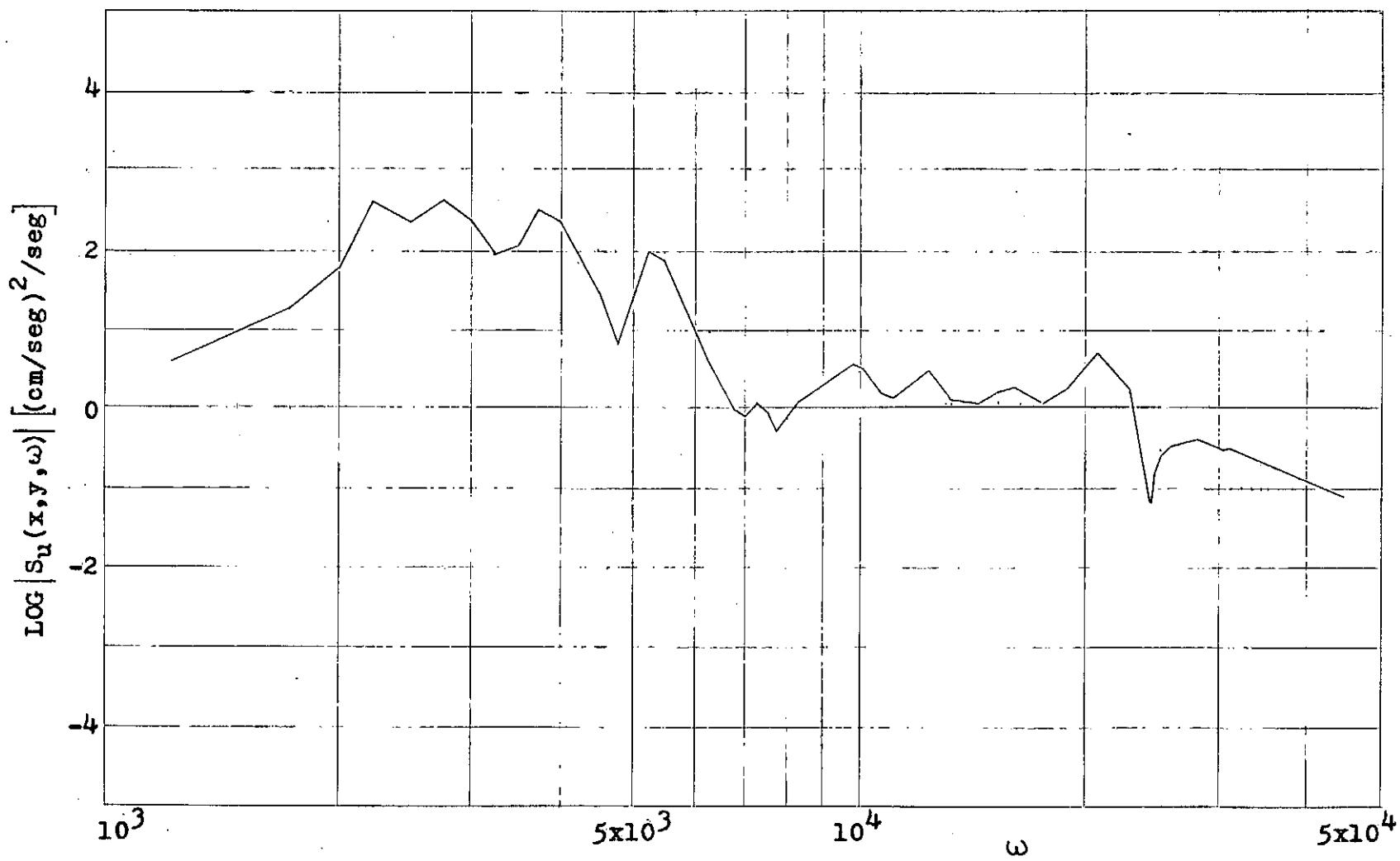


Fig. 9b. Densidad de espectro de la velocidad, calculada en el centro de la placa (30,5) cm, para $\zeta = 0.05$

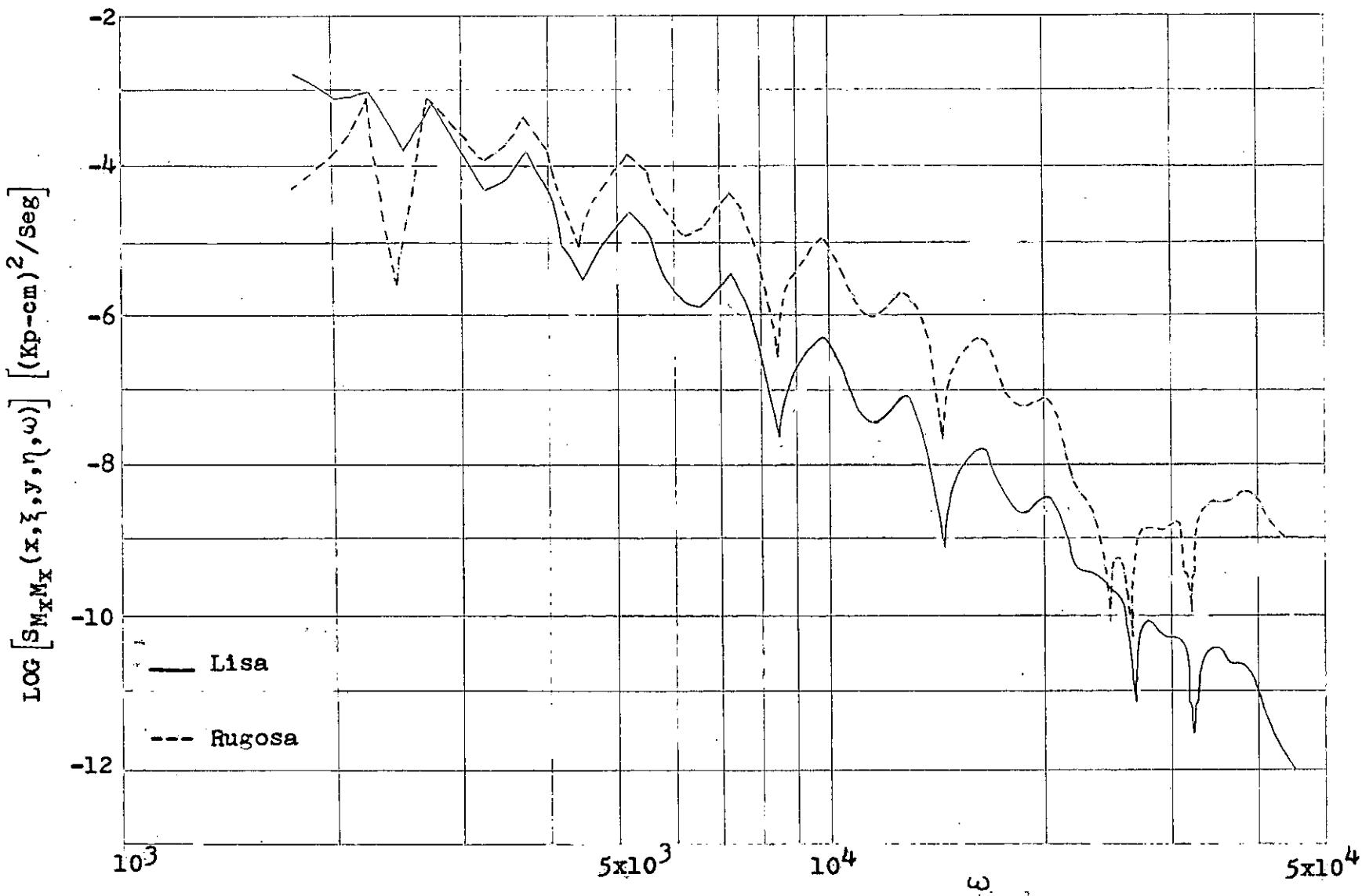


Fig. 10. Comparación del espectro cruzado del momento flector m_x , calculado en el centro de la placa ($x=30, y=5$)cm, separación ($\xi=15, \eta=0$)cm, $\zeta=0.05$.

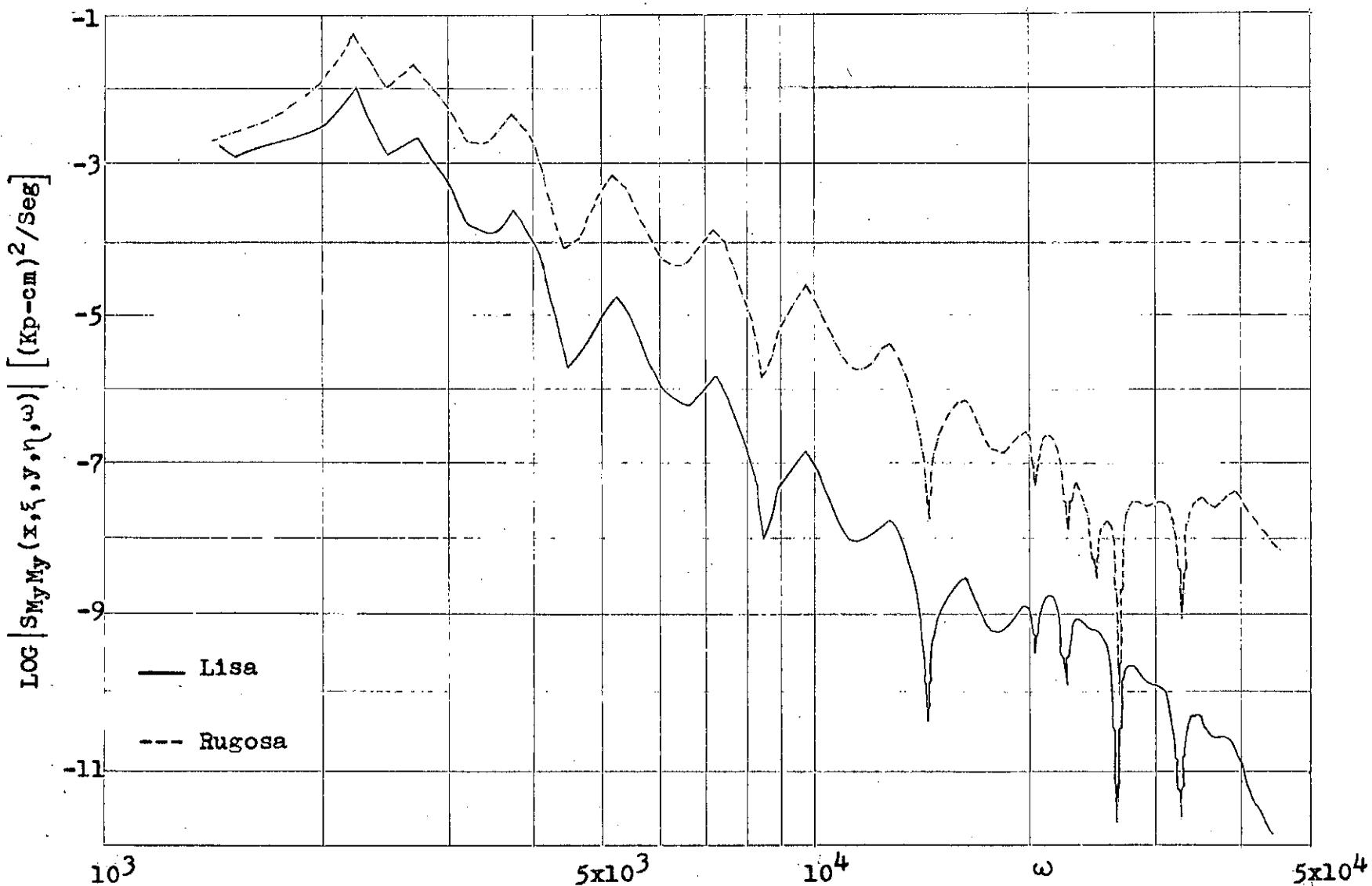


Fig. 11. Comparación del espectro cruzado del momento flector m_y , calculado en el centro de la placa ($x=30, y=5$)cm, separación ($\xi=15, \eta=0$)cm, $\zeta=0.05$

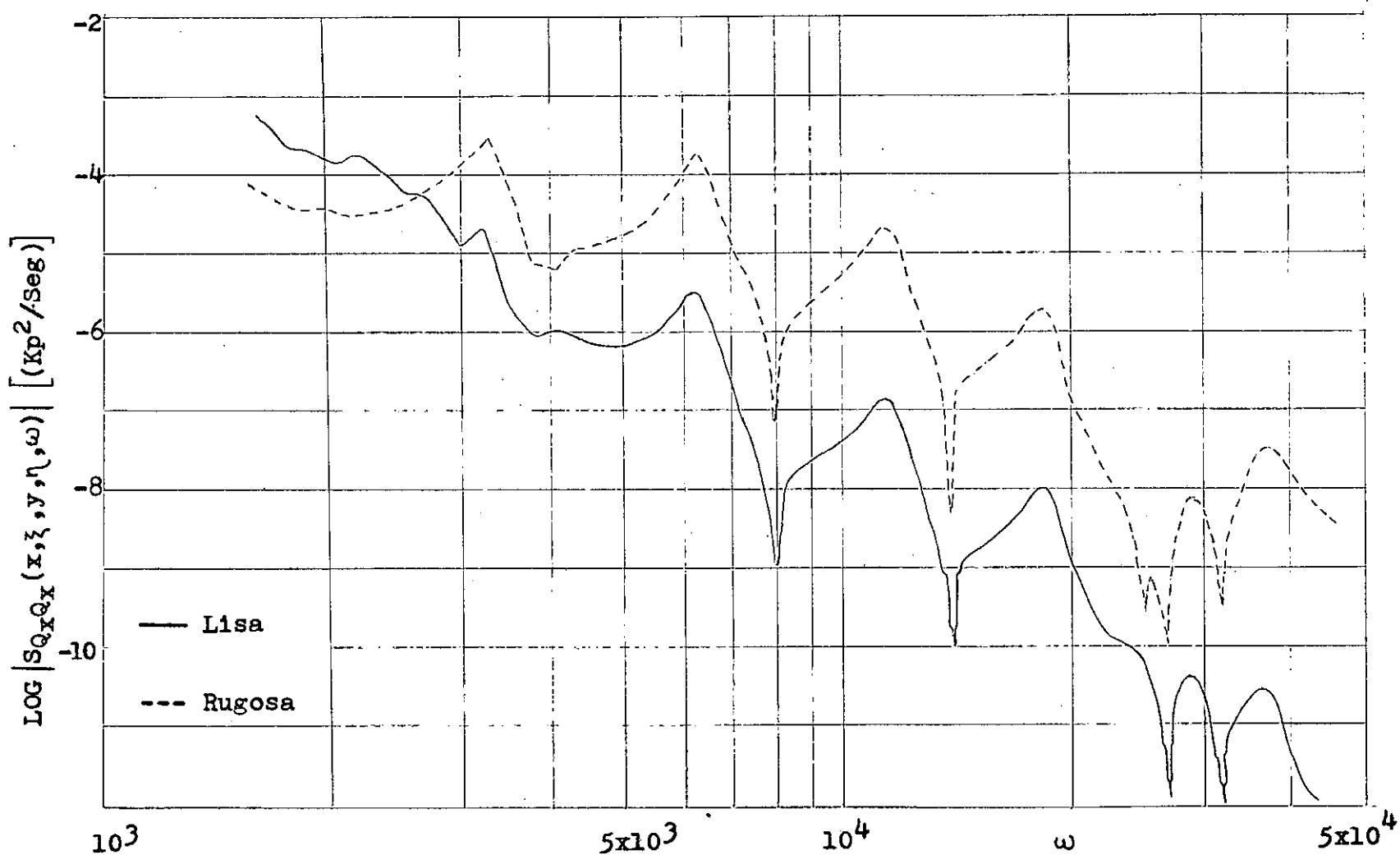


Fig. 12. Comparación del espectro cruzado de la carga de corte transversal q_x , calculado en el centro de la placa ($x=30, y=5$)cm, separación ($\zeta=15, \eta=0$)cm, $\zeta=0.05$

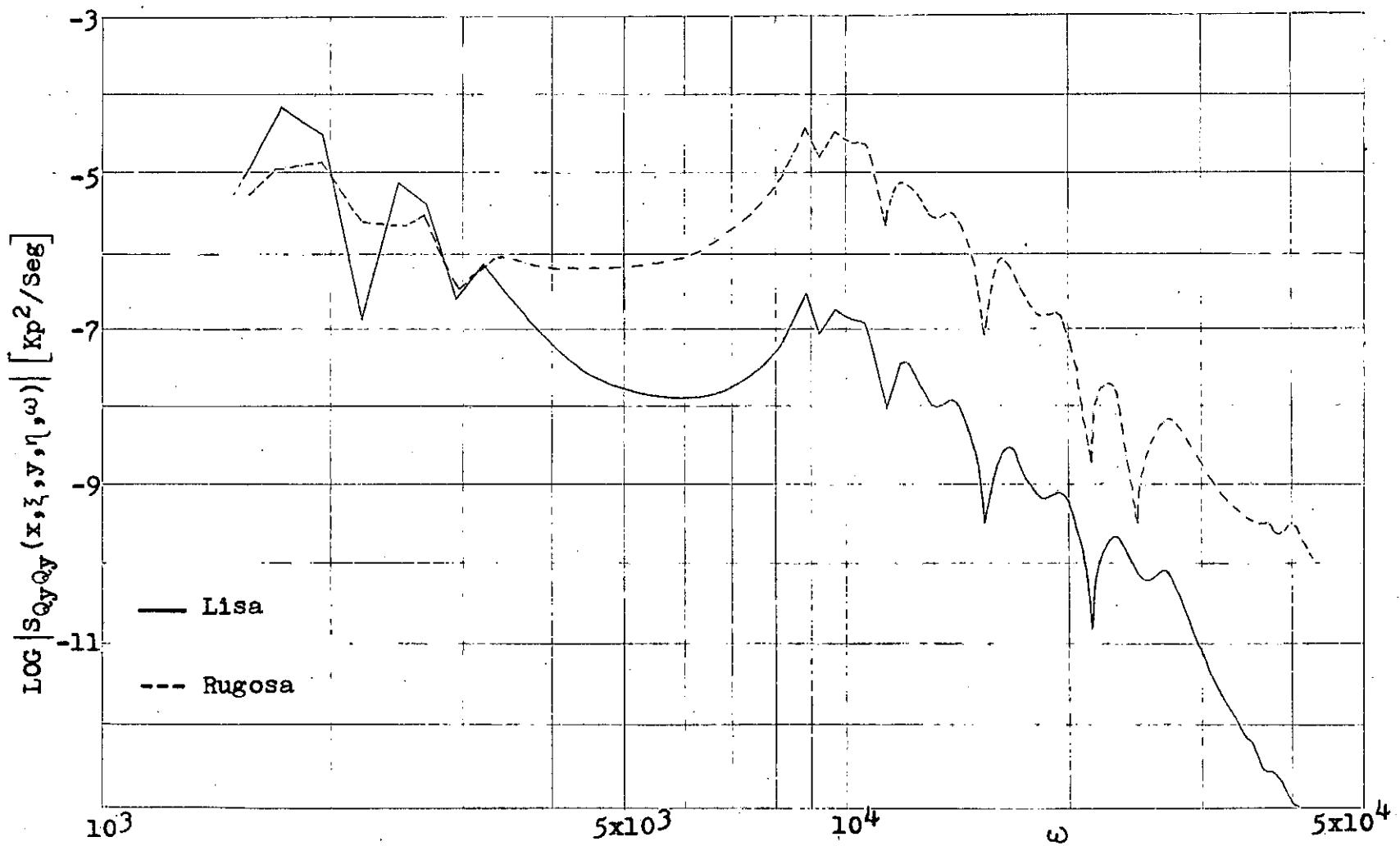


Fig. 13 Comparación del espectro cruzado de la carga de corte transversal q_y , calculado en el centro de la placa ($x=30, y=5$)cm, separación ($\xi=15, \eta=0$)cm, $\zeta=0.05$

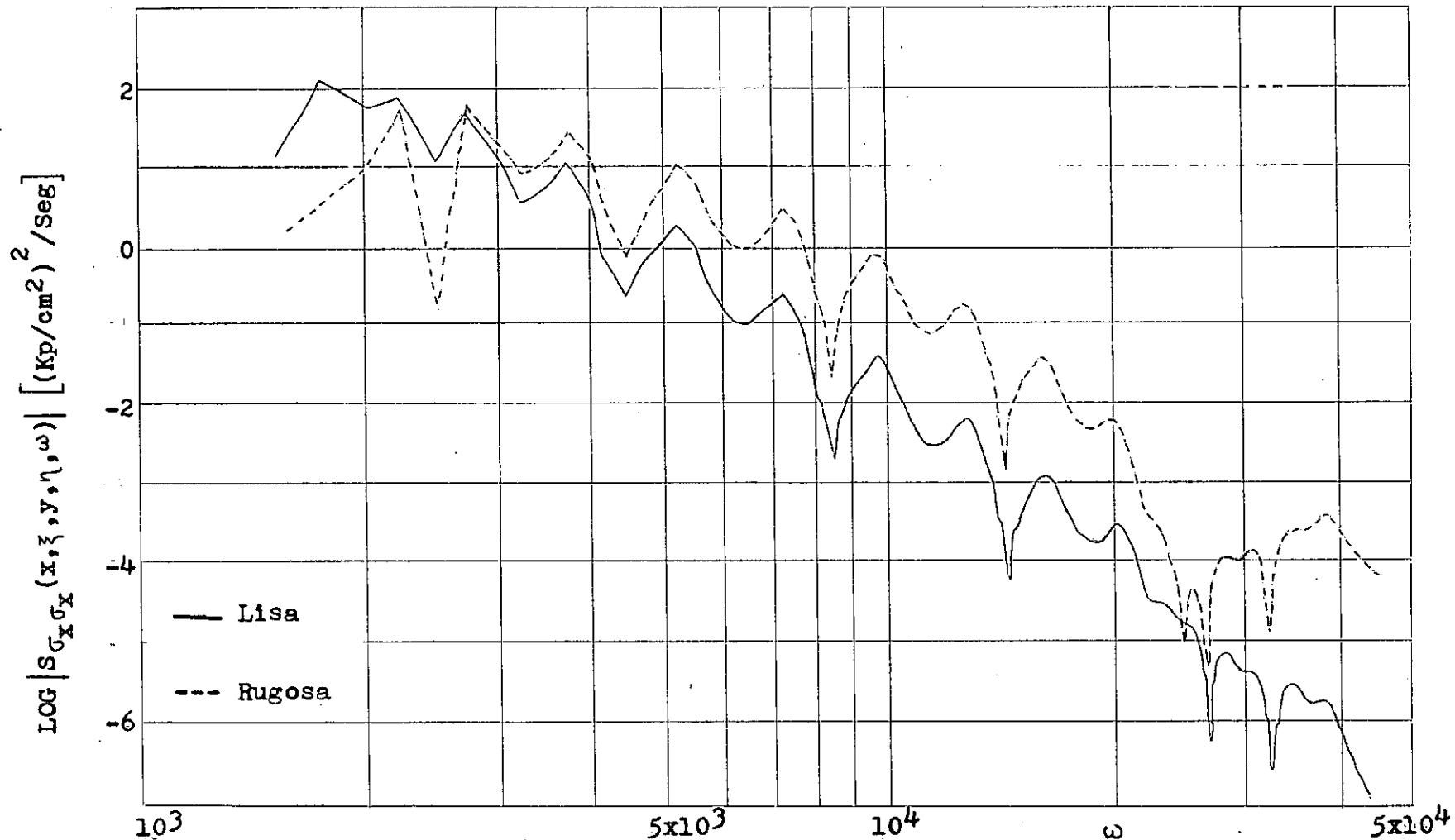


Fig. 14 Comparación del espectro cruzado del esfuerzo normal σ_x , calculado en el centro de la placa ($x=30, y=5$) cm, separación ($\xi=15, \eta=0$) cm, $\zeta=0.05$

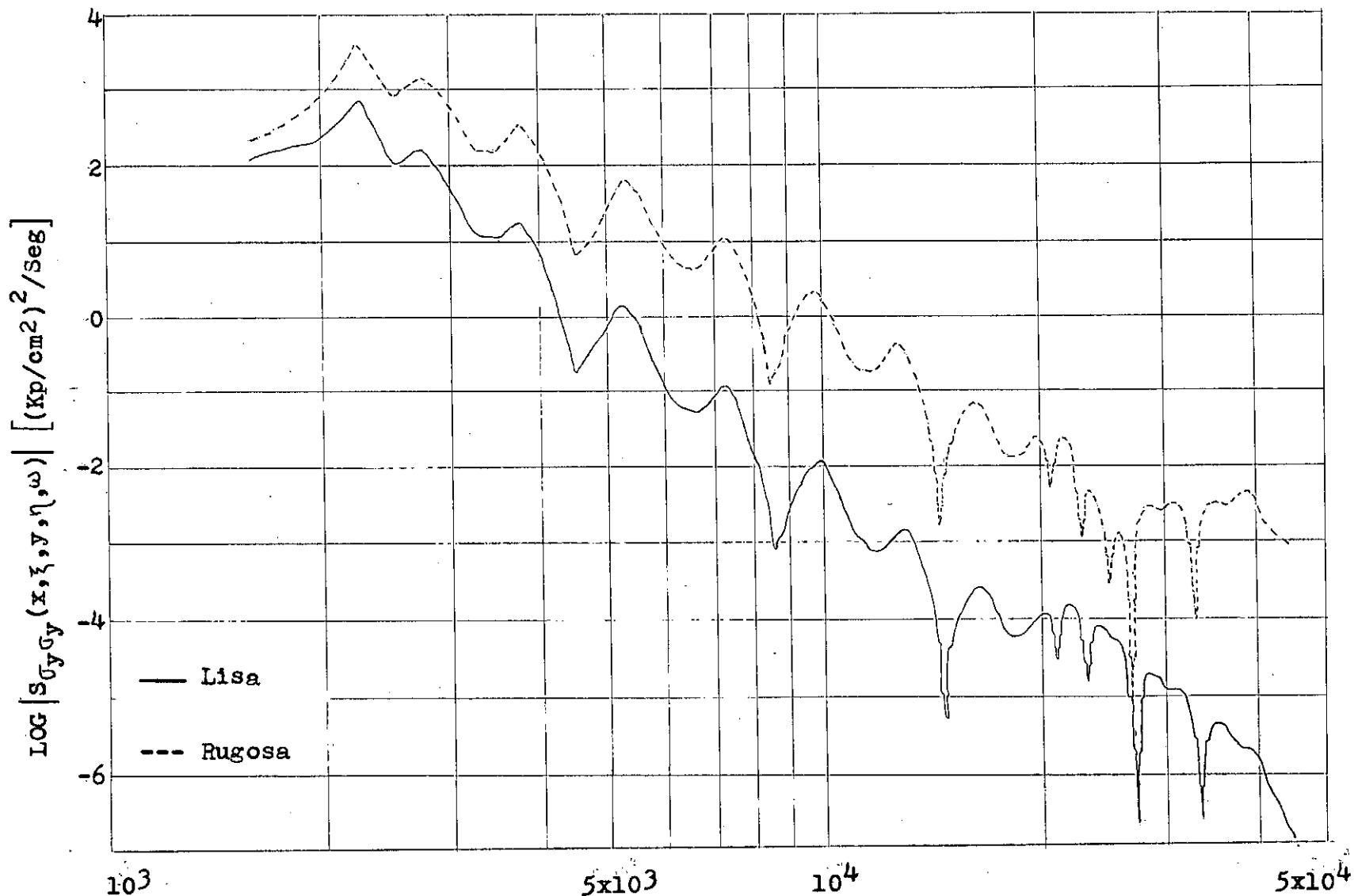


Fig. 15 Comparación del espectro cruzado del esfuerzo normal σ_y , calculado en el centro de la placa ($x=30, y=5$) cm, separación ($\xi=15, \eta=0$) cm, $\zeta=0.05$

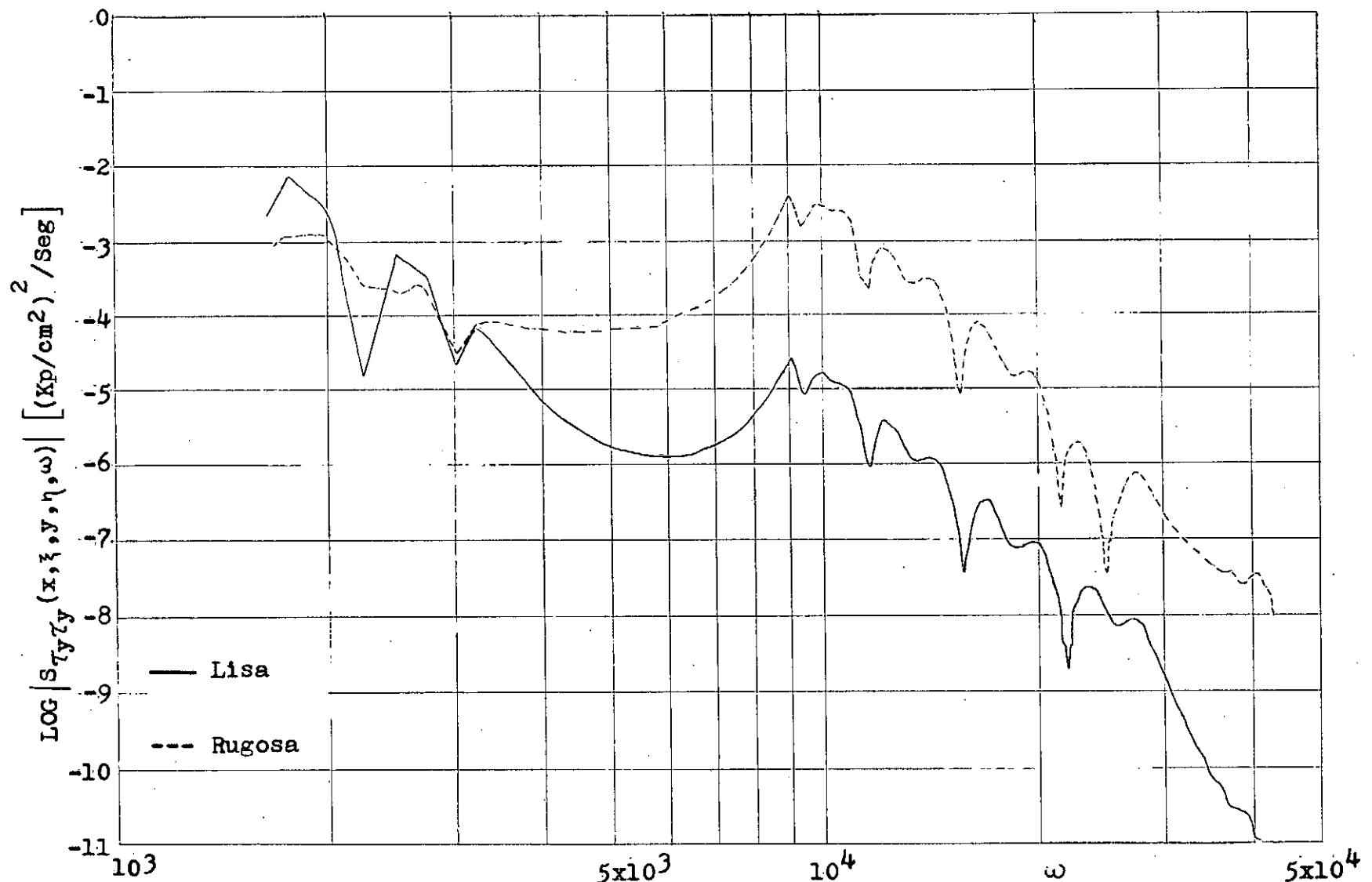


Fig. 16 Comparación del espectro cruzado del esfuerzo de corte τ_y , calculado en el centro de la placa ($x=30, y=5$)cm, separación ($\xi=15, \eta=0$)cm, $\zeta=0.05$

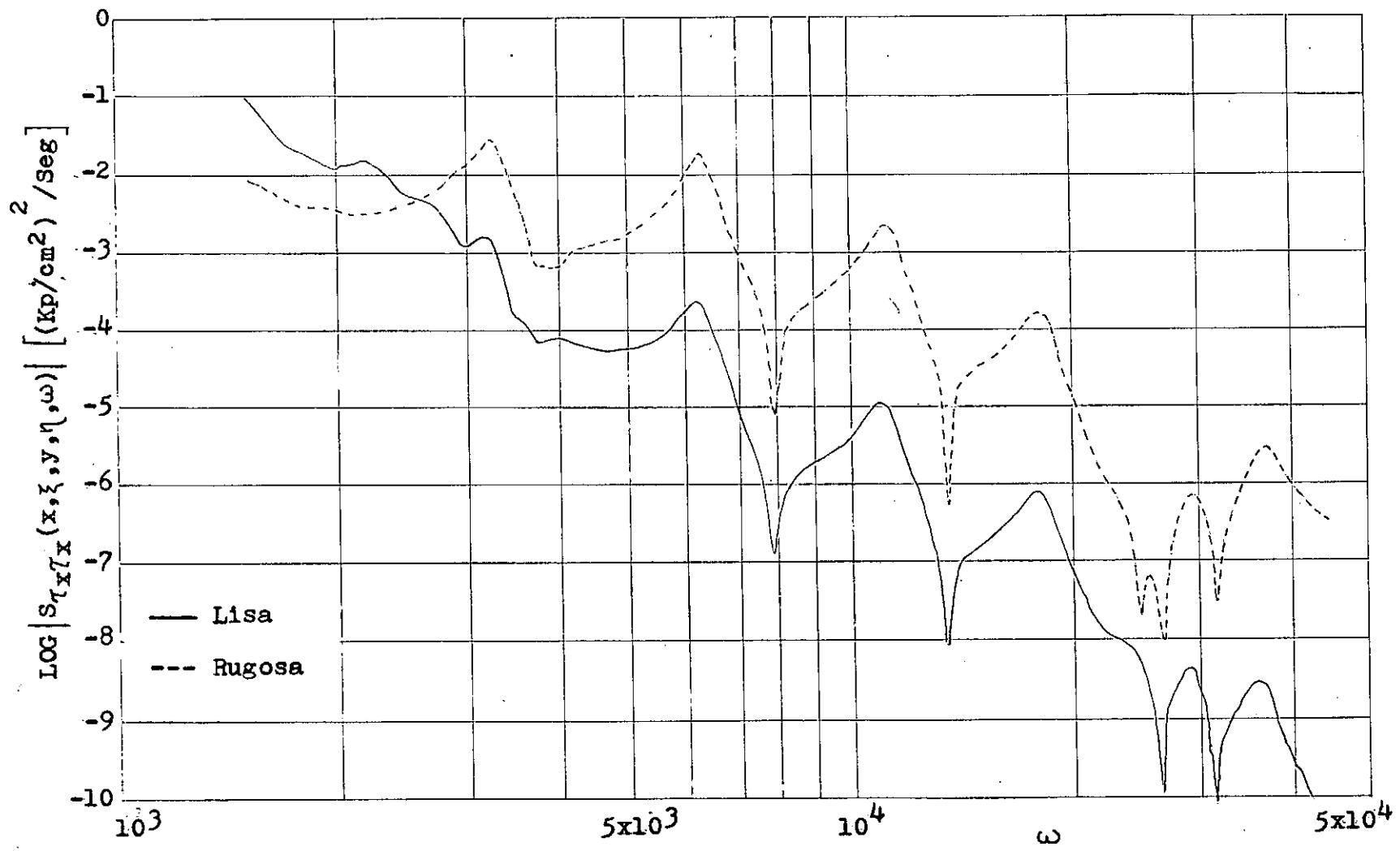


Fig. 17 Comparación del espectro cruzado del esfuerzo de corte T_x , calculado en el centro de la placa ($x=30, y=5$)cm, separación ($\xi=15, \eta=0$)cm, $\zeta=0.05$

Tabla 3. Frecuencias Naturales ω_{mn}

$m \backslash n$	1	2	3
1	2321.9	9099.5	20395.0
2	2510.2	9287.8	20583.0
3	2824.0	9601.6	20897.0
4	3263.2	10040.0	21336.0
5	3828.0	10605.0	21901.0
6	4518.4	11296.0	22592.0
7	5334.2	12111.0	23407.0
8	6275.5	13053.0	24349.0
9	7342.4	14120.0	25416.0
10	8534.7	15312.0	26608.0
11	9852.6	16630.0	27926.0
12	11296.0	18073.0	29369.0
13	12864.0	19642.0	30938.0
14	14559.0	21336.0	32632.0
15	16379.0	23156.0	34452.0
16	18324.0	25102.0	36398.0
17	20395.0	27173.0	38469.0
18	22592.0	29369.0	40665.0

S U G E R E N C I A S

Cuando sobre un sistema actúan cargas externas de carácter aleatorio, estas no son definitivamente conocidas. En gran parte de los casos se puede asociar a las cargas actuantes en el sistema, una dada distribución de probabilidad y se puede determinar la densidad de espectro teniendo por base datos experimentales. En este trabajo se determinaron las densidades de espectro cruzado del desplazamiento, de la velocidad, de los momentos flectores, de las cargas de corte transversal y de los esfuerzos de una placa plana rugosa rectangular simplemente apoyada, excitada por flujo turbulento, dando así una respuesta parcial a este problema. Para completar este estudio se sugiere en primer lugar hacer un análisis experimental que contenga la información detallada acerca de los diferentes espectros calculados para comparar la parte teórica con la experimental. En segundo lugar sería conveniente hacer el mismo análisis para placas de diferentes geometrías y bajo diferentes condiciones de contorno. Un buen ejemplo sería seleccionar una cáscara cilíndrica y estudiar cual es la influencia de la curvatura de la placa.

SIMBOLOS

- t = Tiempo
 $w(P,t)$ = Desplazamiento
 L = Operador linear homogéneo auto-adjunto
 D = Dominio
 $M(P)$ = Distribución de masa
 C = Operador representativo del sistema amortiguado
 λ = Autovalor
 $w_r(P)$ = Modo normal
 r = Frecuencia natural
 $q_r(t)$ = Coordenada generalizada
 $f(P,t)$ = Excitación aleatoria, distribución ergódica
 $f_r(t)$ = Fuerza aleatoria generalizada
 c = Amortiguamiento
 ζ = Factor de amortiguamiento
 δ_{rs} = Delta de Kronecker
 $Q_r(\omega)$ = Transformada de Fourier de la coordenada generalizada $q_r(t)$
 $F_r(\omega)$ = Transformada de Fourier de la fuerza aleatoria generalizada $f_r(t)$
 $F(P,\omega)$ = Transformada de Fourier de la fuerza aleatoria distribuida $f(P,t)$
 $H_r(\omega)$ = Respuesta de frecuencia compleja
 $H_r^*(\omega)$ = Conjugada compleja de $H_r(\omega)$

$W(P, \cdot)$	= Transformada de Fourier del desplazamiento $w(P, t)$
$W^*(P, \cdot)$	= Conjugado de $W(P, \cdot)$
$S_{WW}(P, P, \cdot)$	= Densidad de espectro cruzado de desplazamiento
$R_{WW}(P, P, t, t+ \cdot)$	= Función correlación cruzada del desplazamiento
$S_{FF}(P, P, \cdot)$	= Densidad de espectro cruzado de la excitación aleatoria generalizada
$S_{ff}(P, P, \cdot)$	= Densidad de espectro de la excitación aleatoria distribuida
$S_w(P, \cdot)$	= Densidad de espectro
$p(x, y, t)$	= Distribución de presión
$w(x, y, t)$	= Desplazamiento transversal de la presión
a	= Longitud de la placa
b	= Ancho de la placa
h	= Espesor de la placa
μ	= Masa por unidad de área de la placa
D_E	= Rígidez a la flexión de la placa
∇^2	= Laplaciano
E	= Módulo de elasticidad
ν	= Coeficiente de Poisson
(x, y)	= Coordenadas espaciales rectangulares
(ξ, η)	= Separación espacial
U_0	= Velocidad media del flujo

$u(x, y, t)$	= Velocidad de la placa
$U(x, y, \omega)$	= Transformada de Fourier de la velocidad $u(x, y, t)$
$U^*(x, y, \omega)$	= Conjugada de $U(x, y, \omega)$
$S_{M_x M_x}(x, y, x, y, \omega)$	= Densidad de espectro cruzado del momento flector m_x
$S_{M_y M_y}(x, y, x, y, \omega)$	= Densidad de espectro cruzado del momento flector m_y
$S_{Q_x Q_x}(x, y, x, y, \omega)$	= Densidad de espectro cruzado del momento flector q_x
$S_{Q_y Q_y}(x, y, x, y, \omega)$	= Densidad de espectro cruzado del momento flector q_y
σ_x, σ_y	= Esfuerzos normales
τ_x, τ_y	= Esfuerzos tangenciales
$S_{\sigma_x \sigma_x}(x, y, x, y, \omega)$	= Densidad de espectro cruzado del esfuerzo σ_x
$S_{\sigma_y \sigma_y}(x, y, x, y, \omega)$	= Densidad de espectro cruzado del esfuerzo σ_y
$S_{\tau_x \tau_x}(x, y, x, y, \omega)$	= Densidad de espectro cruzado del esfuerzo τ_x
$S_{\tau_y \tau_y}(x, y, x, y, \omega)$	= Densidad de espectro cruzado del esfuerzo τ_y
$S_{pp}(\xi, \eta, \omega)$	= Densidad de espectro cruzado de la presión
$\phi_p(\omega)$	= Densidad de espectro de las fluctuaciones de la presión en la pared
$A(\omega z/U_c)$	= Rata de pérdida de coherencia de las fuentes productoras de presión, o eddies
$B(\omega \eta/U_c)$	= Rango de influencia lateral de los eddies
U_c	= Velocidad convectiva

$$U^* = (\tau_w / \rho)^{\frac{1}{2}} = \text{Velocidad de fricción}$$

τ_w = Esfuerzo de corte en la pared

ρ = Densidad del flujo

K_s = Parametro de rugosidad equivalente

C_f = Coeficiente local de fricción.

Kg = Kilogramo masa

Kp = Kilogramo fuerza

B I B L I O G R A F I A

1. HARRISON, M. - Pressure Fluctuations on Wall Adyacent to a Turbulent Bounday Layer, David Taylor Model Basin, Rep. No. 1269, 1 - 13 (1958).
2. SKUDRZYK, E. J. and HADDLE, G. P. - Noise Production in a Turbulent Bounday Layer by Smooth and Rough Surfaces, J. Acoust. Soc. Amer. 32, 19 - 34 (1960).
3. WILLMARTH, W. W. and WOOLDRIDGE, C. E. - Meassurements of the Correlation Between the Fluctuating Velocitics and Fluctuating Wall Pressure in a Thick Turbulent Bonnday Layer, University of Michigan Col. Eng. Rep. No. 02920 - 2 - T, 1 - 126 (1962).
4. CORCOS, G.M., Resolution of Pressure in Turbulence, J. Acoust. Soc. Amer. 35, 192 - 199 (1963).
5. CORCOS, G. M. - The Structure of the Turbulent Pressure Field in Boundary Layer Flows, J. Fluid Mech. 18, 353 - 378 (1964).
6. HEDIN, E. T. Jr, - Effects of Surface Ronghness on Acoustic Noise Radiation from a Thin Panel under Turbulent Excitation, M.Sc Thesis, University of Minnesota (1966)
7. LEIBOWITZ, R. C. - Turbulence Induced Vibrations and Radiations - A Proyection of the State of the Art to Naval Research Needs, U. S. Naval Ship Res & Develop. Ctr. Acoust. & Vibration Lab. Tech. Note AVL - 185 - 942 (1967)

8. DAVIES, D. E. - The Radiation Sound Field of a Rectangular Panel Set in an Infinite Wall and Excited by a Turbulent Boundary Layer, Ministry Aviation, London, Aeron. Res. Counc. Reps. R & M 3491 (1967).
9. SCHLOEMER, H. H. and RECINE, C. E. - Some Effects of Surface Roughness on Turbulent - Boundary - Layer Wall - Pressure Fluctuations in Incompressible Pipe Flow, J. Acoust. Soc. Amer. 42, 1160 (A) (1967).
10. AUPPERLE, F. A. - A Formulation of the Acoustic Radiation from Smooth and Roughened Flexible Panels Excited by Turbulent Flow, M.Sc Thesis, University of Minnesota (1968).
11. AUPPERLE, F. A. and LAMBERT, R. F. - Effects of Roughness on Measured Wall - Pressure Fluctuations beneath a Turbulent Boundary Layer, J. Acoust. Soc. Amer. 47, 359 - 370 (1970).
12. STRABSSERT, M. - Response of Plates and Membranes to Pressure Fluctuations of a Turbulent Boundary Layer, J. Acoust. Soc. Amer. 30, 680 (A) (1958).
13. BULL, M. K. - Wal Pressure Fluctuations in Boundary Layer Flow and Response of Simple Structures to Random Pressure Field, Univ. Southampton, A. A. S. U, Rep No. 243, 1 - 29(1963).
14. WHITE, P. H. - Transduction of Boundary Layer Noise by a Rectangular Panel, J. Acoust. Soc. Amer. 40, 1354 - 1362 (1966).

15. STRAWDERMAN, W. A. - Turbulent-Flow-Excited Vibration of a Simply Supported, Rectangular Flat Plate, J. Acoust. Soc. Amer. 45, 177 - 192 (1969)
16. STRAWDERMAN, W. A. - Turbulence-Induced Plate Vibrations: an Evaluation of Finite - and Infinite - Plate Models, J. Acoust. Soc. Amer. 46, 1294 - 1307 (1969).
17. ROBSON, J. D. - An Introduction to Random Vibration, Edinburgh University Press (1964).
18. MEIROVITCH, L. - Analytical Methods in Vibrations, The Macmillan Co, (1967).
19. THOMSON, W. T. - Vibration Theory and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J, (1965).
20. CRANDALL, S. H. - Random Vibration, M. I. T. Press, Cambridge, Mass., (1958)
21. CRANDALL, S. H. and MARK, W. D. - Randon Vibration in Mechanical Systems, Academic Press, New York, (1963).
22. SCHLICHTING, H. - Boundary Layer Theory, Pergamon Press Ltda. London, (1955).

A P E N D I C E A

ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORIA CLASICA DE PLACAS

La ecuación diferencial clásica del movimiento para el desplazamiento transversal w de una placa es dado por

$$D_E \nabla^4 w + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

donde D es la rigidez a la flexión y es definida por

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.2)$$

cuando la vibración libre es asumida, el movimiento es expresado como

$$w = W \cos \omega t \quad (1.3)$$

donde ω es la frecuencia circular y W es una función solamente de la coordenada de posición. Substituyendo la ecuación (1.3) en la ecuación (1.1) se obtiene

$$(\nabla^4 - k^4)W = 0 \quad (1.4)$$

donde k es un parámetro de conveniencia definido como

$$k^4 = \frac{\mu \omega^2}{D} \quad (1.5)$$

Este es usualmente conveniente para factorizar la ecuación (1.4) en

$$(\nabla^2 + k^2)(\nabla^2 - k^2)W = 0 \quad (1.6)$$

Por la teoría de ecuaciones diferenciales lineales, la solución completa de la ecuación (1.6) puede ser obtenida por superposición de las soluciones de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla^2 W_1 + k^2 W_1 &= 0 \\ \nabla^2 W_2 - k^2 W_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

W_1 y W_2 son dos soluciones.

A-1 Ecuaciones Clásicas en Coordenadas Rectangulares

El operador Laplaciano en coordenadas rectangulares es

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Los momentos de flexión están relacionados al desplazamiento por

$$\begin{aligned} M_x &= -D_E \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D_E \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Las fuerzas de corte transversal son dadas por

$$\begin{aligned} Q_x &= -D_E \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ Q_y &= -D_E \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

A-2 Solución

La solución general de la ecuación (1.4) en coordenados rectangulares puede ser obtenida asumiendo series de Fourier en una de las variables, digamos x ; esto es,

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \alpha x + \sum_{m=0}^{\infty} Y_m^*(y) \cos \alpha x \quad (1.10)$$

Substituyendo la ecuación (1.10) en la ecuación (1.7) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y_{m1}}{dy^2} + (k^2 - \alpha^2) Y_{m1} &= 0 \\ \frac{d^2 Y_{m2}}{dy^2} - (k^2 + \alpha^2) Y_{m2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

y dos ecuaciones similares para Y_m^* , asumiendo que $k^2 > \alpha^2$, las soluciones de las ecuaciones (1.11) son bien conocidas como

$$Y_{m1} = A_m \sin \sqrt{k^2 - \alpha^2} y + B_m \cos \sqrt{k^2 - \alpha^2} y \quad (1.12)$$

$$Y_{m2} = C_m \sin h \sqrt{k^2 - \alpha^2} y + D_m \cos h \sqrt{k^2 - \alpha^2} y$$

donde A_m, \dots, D_m son coeficientes arbitrarios que se determinan de la forma de los modos y son obtenidos de las condiciones de contorno.

Si $k^2 < \alpha^2$, es necesario rescribir y_{ml} , como

$$y_{ml} = A_m \operatorname{sen} h \sqrt{\alpha^2 - k^2} y + B_m \cos h \sqrt{\alpha^2 - k^2} y \quad (1.13)$$

Esto es, la solución completa de la ecuación (1.4) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \sum_{m=1} (A_m \operatorname{sen} \sqrt{k^2 - \alpha^2} y + B_m \cos \sqrt{k^2 - \alpha^2} y + C_m \operatorname{sen} h \sqrt{k^2 - \alpha^2} y \\ & + D_m \cos h \sqrt{k^2 + \alpha^2} y) \operatorname{sen} \alpha x \\ & + \sum_{m=0} (A_m^* \operatorname{sen} \sqrt{k^2 - \alpha^2} y + B_m^* \cos \sqrt{k^2 - \alpha^2} y + C_m^* \operatorname{sen} h \sqrt{k^2 + \alpha^2} y \\ & + D_m^* \cos h \sqrt{k^2 + \alpha^2} y) \cos \alpha x \end{aligned} \quad (1.14)$$

A-3 Modos Normales de una Placa Rectangular Simplemente Apoyada

Consideremos una placa uniforme extendida sobre el dominio D definido por $0 \leq x \leq a$ y $0 \leq y \leq b$. Las condiciones de contorno son:

$$w = 0, M_x = 0, \text{ (para } x = 0, a)$$

$$w = 0, M_y = 0, \text{ (para } y = 0, b) \quad (1.15)$$

cuando las ecuaciones (1.8) son usadas se ve que

$$w_{mn} = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1.16)$$

satisface las condiciones de contorno, donde A_{mn} es un coeficiente de amplitud determinado de las condiciones iniciales del problema y m y n son enteros.

Substituyendo la ecuación (1.16) en la ecuación (1.4) da la frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{D_E}{\mu}} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (1.17)$$

Los modos normales son:

$$w_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1.18)$$

A P E N D I C E B

DENSIDAD DE ESPECTRO DE LA PRESION

Aquí se reportan las medidas de la densidad de espectro cruzado de las fluctuaciones de la presión dentro de una capa límite turbulenta para superficies rugosas. Los datos experimentales fueron obtenidos por Aupperle y Lambert [11].

Las medidas fueron tomadas sobre tres superficies rugosas con partículas de arena de grado comercial 36, 12 y 4 y sobre una superficie lisa para una velocidad de flujo de 50 m/seg. El panel de prueba fue de aluminio de 60 x 10 cm. y las partículas de arena fueron distribuidas espacialmente sobre este.

Para caracterizar el parámetro de rugosidad equivalente K_s , la medida de la rugosidad de las partículas de arena fue definida en términos de igual coeficiente de fricción local C_f , y relacionada con la normalizada [22], comparando la velocidad media medida, con la formulación desarrollada por Nikuradse para régimen de flujo completamente rugoso.

En la tabla 1 son dados los valores determinados de la velocidad de fricción U^* , el parámetro de rugosidad equivalente K_s , el coeficiente de fricción local C_f , así como los valores del espesor de desplazamiento δ^* y el espesor de la capa límite δ .

A la densidad de espectro $\Phi_p(\omega)$ de las fluctuaciones de la

presión en la pared, le fueron aplicados correcciones para el ruido ambiente y para los efectos promedios de los transductores de dimensión finita. Es decir, el espectro fué corregido substrayendo la contribución de ruido del espectro medido.

Las densidades de espectro corregidas medidas sobre las cuatro superficies están dadas en la Fig. 3 y son los promedios del espectro medido en varias posiciones relativas a las partículas rugosas.

Estas densidades de espectro corregidas fueron normalizadas de tal forma que la curva resultante fuera independiente de la medida de la rugosidad. La normalización puede ser escrita analíticamente como:

$$H\left(\frac{\omega k_s}{U^*}, U_o\right) = \frac{U^*}{k_s \tau_\omega^2 C_f} \phi\left(\frac{\omega k_s}{U^*}\right) \quad (1.19)$$

Esta función está graficada en la Fig. 4 para las tres rugosidades examinadas.

Las funciones $A\left(\frac{\omega \xi}{U_c}\right)$, $B\left(\frac{\omega \eta}{U_c}\right)$ y U_c determinados experimentalmente están graficadas en las Figs. 8, 9 y 10.

Se observó que las funciones A_{U_c} y B_{U} parecen ser funciones solamente de sus argumentos sobre el rango de frecuencia para el cual las medidas fueron hechas (520 - 7300 Hz). La velocidad convectiva U_c parece ser independiente de la frecuencia. En este caso ella se aproxima a $U_c = 0,70 U_o$.

Tabla 1: Parámetros de Flujo determinados para los cuatro paneles de interés:

$$U = 50 \text{ m/seg}, T = 368^\circ\text{K}, P = 745 \text{ mmHg}, \rho = 0,94 \text{ Kg/m}^3$$

Panel	U^* (m/seg)	K_s (cm)	C_f	δ^* (cm)	δ (cm)
Liso	2.14	---	0.0037	0.175	2.28
Grado 36	3.70 ± 0.11	0.25	0.0110	0.360	2.79
Grado 12	4.32 ± 0.14	0.61	0.0150	0.454	3.30
Grado 4	5.12 ± 0.45	1.19	0.0210	0.507	3.76

Tabla 2: Datos experimentales correspondientes a la Fig. 4

$\frac{\omega K_s}{U^*}$	$10 \log H \left[\frac{\omega K_s}{U^*}, U_o \right]$	$H \left[\frac{\omega K_s}{U^*}, U_o \right]$
3.0	14.0	11.00
5.0	12.5	10.60
7.0	12.0	10.50
10.0	10.5	10.20
20.0	6.2	4.20
30.0	4.0	2.50
50.0	-1.2	0.76
70.0	-4.0	0.40
100.0	-8.0	0.16
200.0	-18.0	0.06

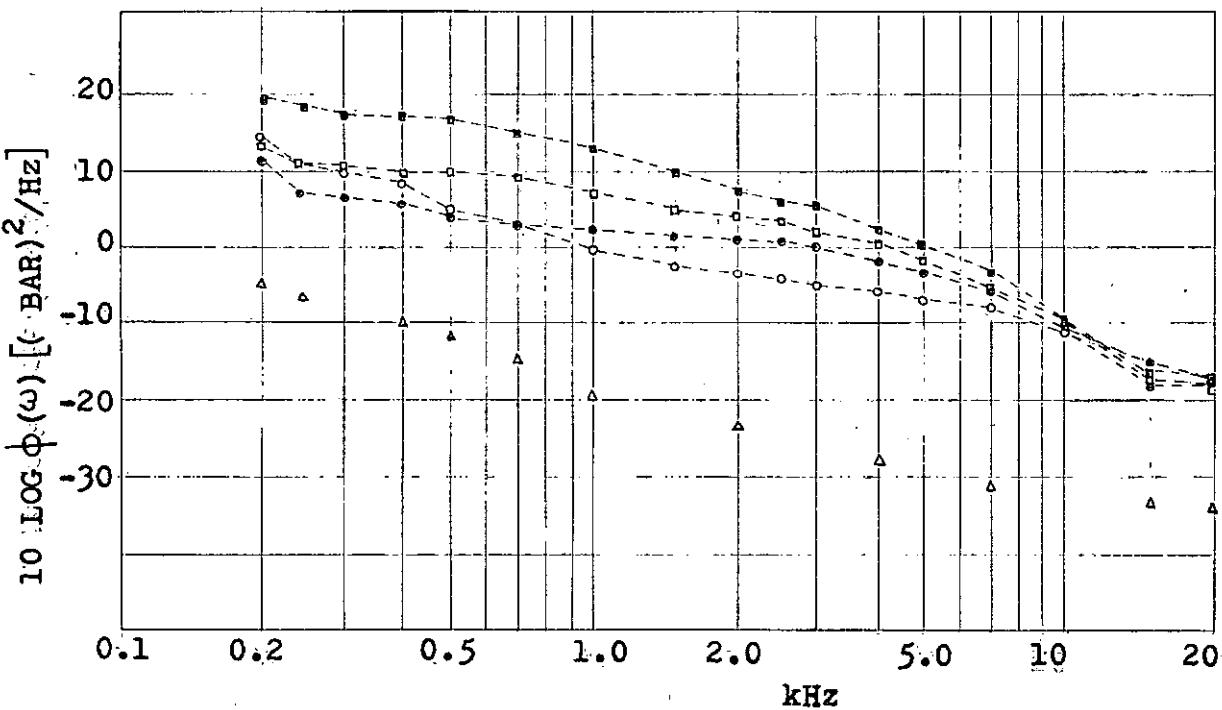


Fig. 3 Espectro corregido medido sobre las cuatro superficies examinadas. \circ : Lisa. \square : Grado 36. \square : Grado 12. \triangle : Grado 4.

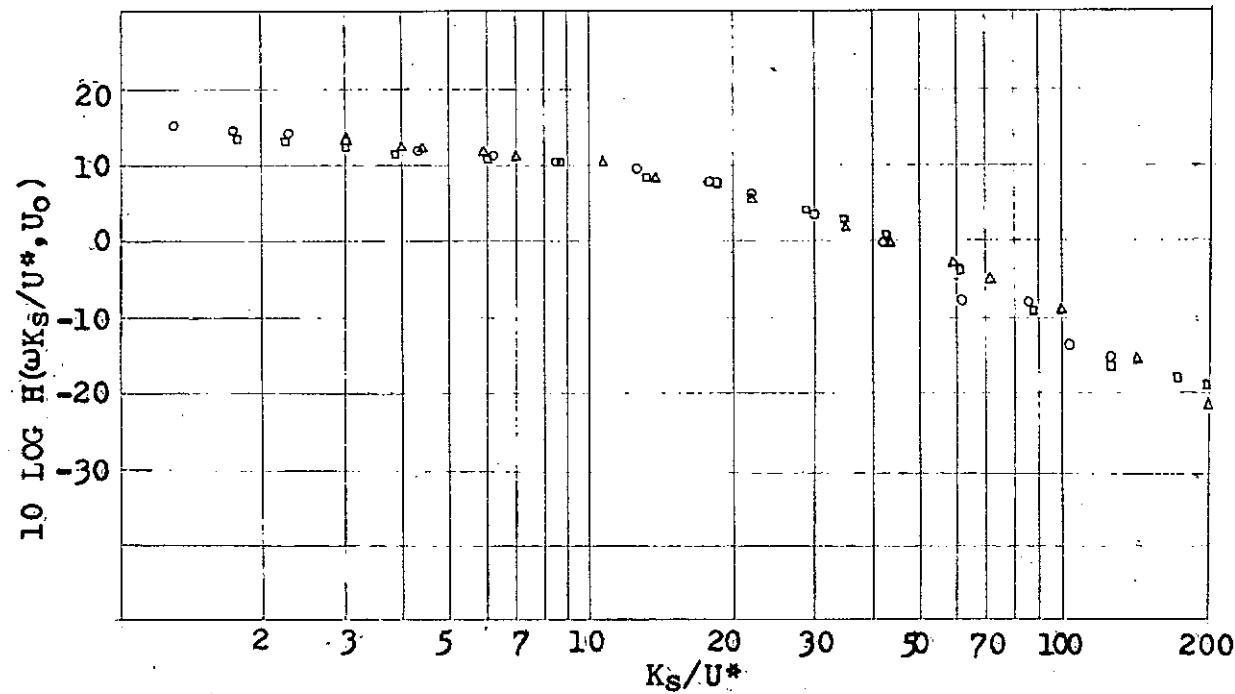


Fig. 4 Normalización del espectro medido sobre las 3 superficies rugosas. \circ : Grado 36. \square : Grado 12. \triangle : Grado 4.

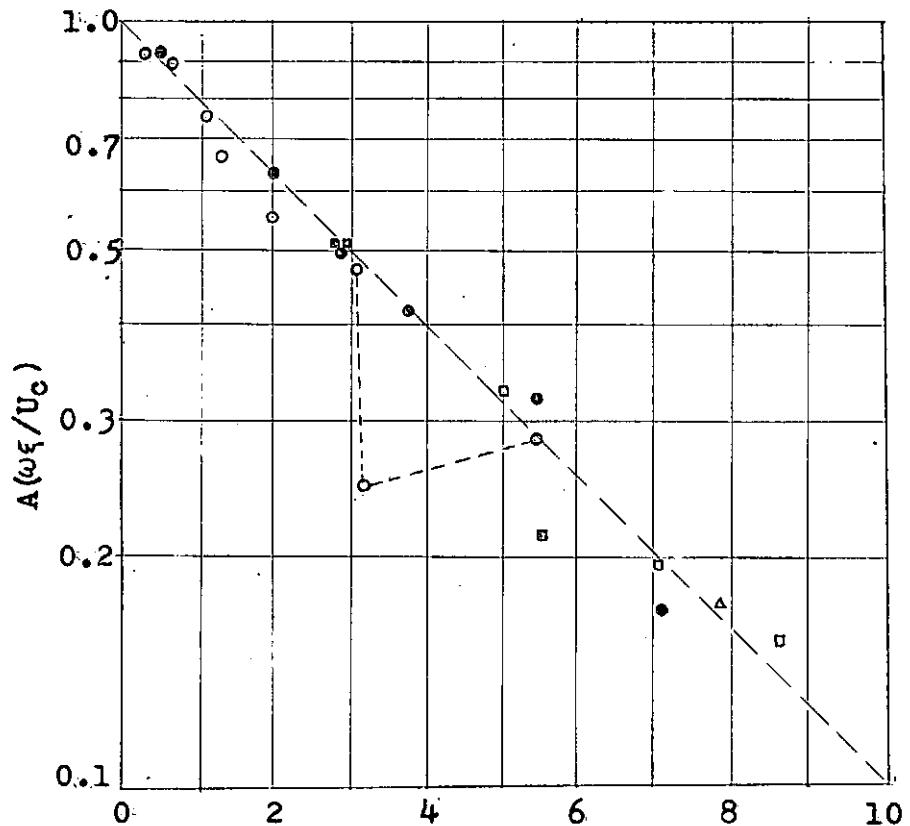


Fig. 5 $A(\omega \xi / U_c)$ medida sobre la superficie rugosa (grado comercial 4).

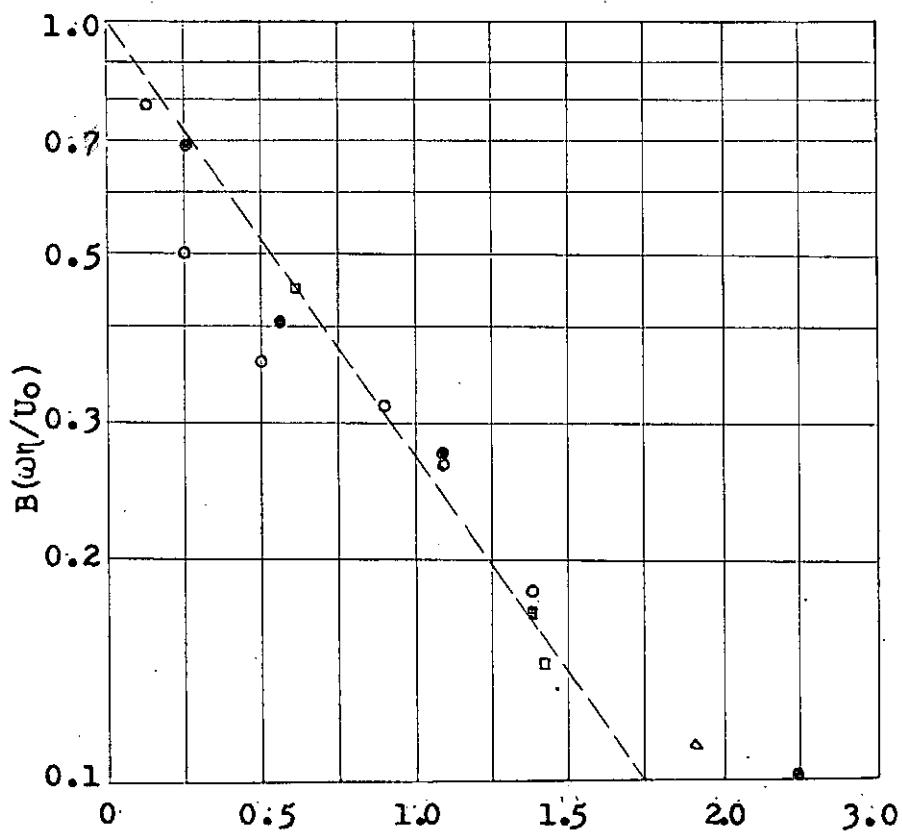


Fig. 6 $B(\omega \eta / U_o)$ medida sobre la superficie rugosa (grado comercial 4).

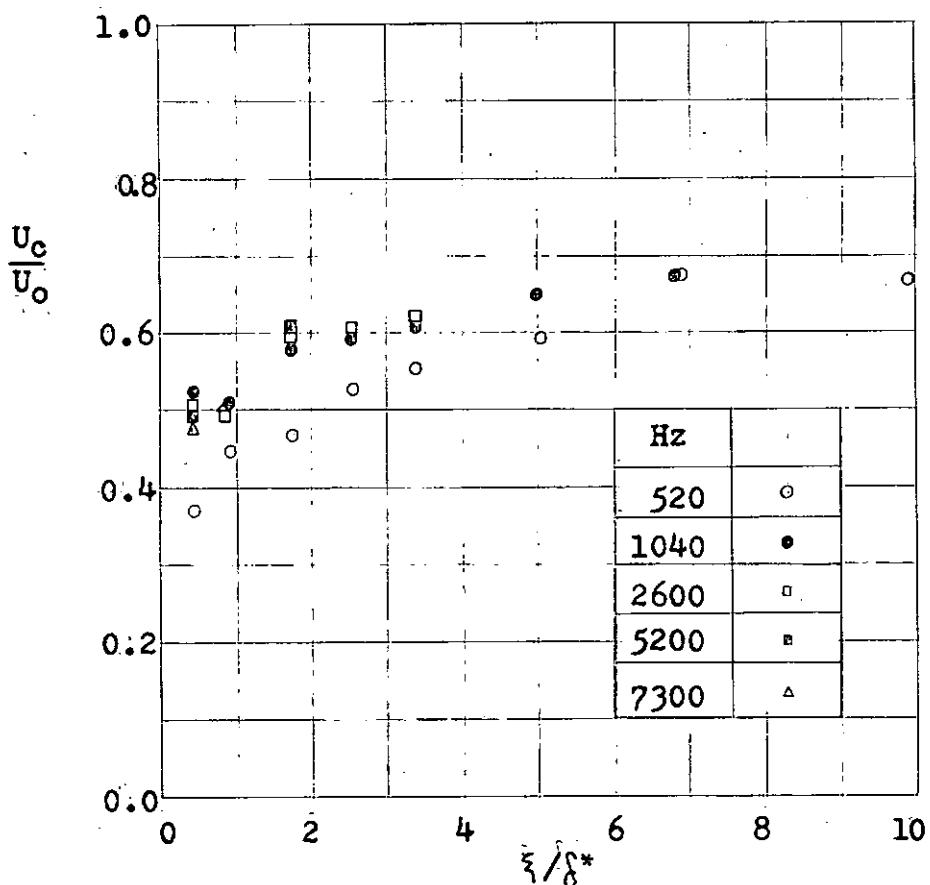


Fig. 7 Velocidad convectiva normalizada medida sobre la superficie rugosa (grado comercial 4).

A P E N D I C E C

VIBRACION DE PLACAS LISAS INDUCIDA POR TURBULENCIA

Strawderman [15] encontró la siguiente solución de la densidad de espectro cruzado de la velocidad para una placa lisa simplemente apoyada:

$$S_{uu}(x, \xi, y, \eta, \omega) = X(\omega) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{Sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{Sen} \frac{q\pi(x+\xi)}{a} \operatorname{Sen} \frac{s\pi(y+\eta)}{b}}{T_{mn} T_{qs} P_n R_m R_q} G_{ns} V_{mnqs}$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1.2 \times 10^{-4} \alpha^2 \rho^2 U_0^3 \delta^* \omega^2 / \mu^2 a^2 b^2, & 1.932 U_c / \delta^* \geq \omega \\ 2.4 \times 10^{-4} \alpha^2 \rho^2 U_0^6 / \mu^2 a^2 b^2 \omega \delta^* \omega^2, & 1.932 U_c / \delta^* < \omega \end{cases}$$

$$T_{mn} = \left[(\omega_{mn}^2 - \omega^2)^2 + (c\omega/\mu)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$P_n = (0.7\omega/U_c)^2 + (n\pi/b)^2$$

$$R_m = \left\{ \left[\left(\frac{0.115\omega}{U_c} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a} - \frac{\omega}{U_c} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{0.115\omega}{U_c} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a} + \frac{\omega}{U_c} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$G_{ns} = 0.35 \frac{\omega b}{U_c} \delta_{ns} \left[2 \left(0.7 \frac{\omega}{U_c} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{b} \right)^2 \right] + \\ + \frac{n s \pi^2}{b^2} \left[1 - \delta_{ns} \right] \left[(-1)^n (-1)^s - 1 \right] + \frac{n s \pi^2}{b^2} \left\{ 2 - \left[(-1)^n + (-1)^s \right] \operatorname{Exp} \left(\frac{0.7\omega b}{U_c} \right) \right\}$$

$$V_{mnqs} = W_{mnqs} + 1 Y_{mnqs}$$

$$\lambda_{mn} = \tan^{-1} \left\{ \frac{c\omega/\mu}{[\omega_{mn}^2 - \omega^2]} \right\}$$

$$\gamma_m = \tan^{-1} \left\{ \frac{0.23(\omega/U_c)^2}{[(m\pi/a)^2 - 0.987(\omega/U_c)^2]} \right\}$$

$$w_{mnqs} = 1.0066 \frac{\omega a}{U_c} \delta_{mq} R_m \cos(\gamma_m - 0.436\pi) \cos(\lambda_{mn} - \lambda_{qs}) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2mq\pi^2}{a^2} \cos(\gamma_m + \gamma_q) \cos(\lambda_{mn} - \lambda_{qs}) \\
 & + (1 - \delta_{mq}) \frac{mq\pi^2}{a^2} \frac{[(-1)^m (-1)^q - 1]}{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{q\pi}{a}\right)^2\right]} \left[R_m \cos(\gamma_q + \lambda_{mn} - \lambda_{qs}) - R_q \cos(\gamma_m + \lambda_{qs} - \lambda_{mn}) \right] \\
 & - \frac{mq\pi^2}{a^2} \text{Exp} \left(- \frac{0.115\omega a}{U_c} \right) \left[(-1)^m \cos \left(\frac{\omega a}{U_c} + \gamma_q + \gamma_m + \lambda_{mn} - \lambda_{qs} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + (-1)^q \cos \left(\frac{\omega a}{U_c} + \gamma_q + \gamma_m + \lambda_{qs} - \lambda_{mn} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$y_{mnqs}(\omega) = 1.0066 \frac{a}{U_c} \delta_{mq} R_m \cos(\gamma_m - 0.463\pi) \sin(\lambda_{mn} - \lambda_{qs})$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2mq\pi^2}{a^2} \cos(\gamma_q + \gamma_s) \sin(\lambda_{mn} - \lambda_{qs}) \\
 & + (1 - \delta_{mq}) \frac{mq\pi^2}{a^2} \frac{[(-1)^m (-1)^q - 1]}{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{q\pi}{a}\right)^2\right]} \left[R_m \sin(\gamma_q + \lambda_{mn} - \lambda_{qs}) - R_q \sin(\gamma_m + \lambda_{qs} - \lambda_{mn}) \right] \\
 & - \frac{mq\pi^2}{a^2} \text{Exp} \left(- \frac{0.115\omega a}{U_c} \right) \left[(-1)^m \sin \left(\frac{\omega a}{U_c} + \gamma_m + \gamma_q + \lambda_{mn} - \lambda_{qs} \right) - \right. \\
 & \quad \left. (-1)^q \sin \left(\frac{\omega a}{U_c} + \gamma_m + \gamma_q + \lambda_{qs} - \lambda_{mn} \right) \right]
 \end{aligned}$$

A P E N D I C E D

PROGRAMA PARA AJUSTAR LA FUNCION H(K_S/U^* , U_O) SEGUN UN POLINOMIO DE TERCER GRADO

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*IOCS(2501READER,1403PRINTER)

*ONE WORD INTEGERS

DIMENSION RW(7),RH(7),A(4)

READ (8,1) RW,RH

1 FORMAT (4F20.8)

CALL APOL (RH,RW,3,7,A)

DO 3 I=1,7

RHH=A(1)+A(2)*RW(I)+A(3)*RW(I)**2+A(4)*RW(I)**3

3 WRITE(5,4)RHH,RH(I)

4 FORMAT (2F20.8)

WRITE (5,5) A(1),A(2),A(3),A(4)

5 FORMAT(4F20.8)

CALL EXIT

END

// XEQ

PROGRAMA PARA DETERMINAR LAS FRECUENCIAS
NATURALES DE LA PLACA

```
//FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*I0CS(2501READER,1403PRINTER)
DIMENSION W(18,3)
READ(8,10)M,N
10 FORMAT(215)
D=216.4
UM=4.13E-7
A=60.
B=10.
PI=3.1416
WRITE(5,20)
20 FORMAT(//35X,'FRECUENCIAS NATURALES')
DO 1 I=1,M
DO 2 J=1,N
2 W(I,J)=SQRT(D/UM)*((I*PI/A)**2+(J*PI/B)**2)
1 WRITE(5,30)(W(I,J),J=1,N)
30 FORMAT(1X,3E20.5)
CALL EXIT
END
// XEQ
```

PROGRAMA BASE PARA DETERMINAR LOS ESPECTROS DE PLACAS LISAS

// JOB T 0OFF 1OFF

A 63

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0OFF	0OFF	0000
0001	1OFF	1OFF	0002
		2018	0001

V2 M05 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS

*IOCS(2501READER,1403PRINTER,PLOTTER)

DIMENSION WVAL(200),SVAL(200)

H=0.15

V=0.30

A=60.

B=10.

ALFA=1.

U0=5000.

UC=3500.

DELTA=0.507

SK=1.19

UF=512.

CF=0.021

RHO=0.94E-6

D=216.4

UM=4.13E-7

TAU=0.05

PI=3.1416

X=30.

Y=5.

EXI=15.

ETA=0.

AA1=SQRT(A*B)

AA2=2./AA1

AA3=PI*X/A

AA4=PI*Y/B

EE1=PI*(X+EXI)/A

EE2=PI*(Y+ETA)/B

B1=SQRT(D/UM)

B2=PI/A

B3=PI/B

T1=2.4E-4*(ALFA*RHO*U0/(UM*DELTA))**2

T2=U0**4/(A*B)

WFIN=45000.

DELW=250.

WINIC=1250.

NVEZ=(WFIN-WINIC)/DELW

PAGE 2 A 63

```

W=WINIC
DO 30 J=1,NVEZ
D1=W/UC
C1=(0.7*D1)**2
D2=(0.115*D1)**2
E1=0.7*D1*B
XW=T1*T2/W**3
SUMA=0.
DO 20 N=1,3
DO 20 M=1,18
WMN=B1*((M*B2)**2+(N*B3)**2)
S1=SIN(M*AA3)
S2=SIN(N*AA4)
PSIMN=AA2*S1*S2
S3=SIN(M*EE1)
S4=SIN(N*EE2)
PSIKJ=AA2*S3*S4
PN=C1+(N*B3)**2
RM=((D2+(M*B2-D1)**2)*(D2+(M*B2+D1)**2))**0.5
G1=EXP(-E1)
GNJ=E1*PN+2.*((N*B3)**2*(1-(-1)**N*G1))
TMN1=(WMN**2-W**2)
TMN2=2.*TAU*WMN*W
TMN=(TMN1**2+TMN2**2)**0.5
ALAMN=ATAN(TMN2/TMN1)
VM=ATAN(0.23*D1**2/((M*B2)**2-0.987*D1**2))
F1=2.*((M*B2)**2
F2=COS(VM-0.463*PI)
F3=COS(2.*VM)
F4=EXP(-0.115*D1*A)
F5=SIN(D1*A+2.*VM)
WMNKJ=1.0066*D1*A*RM*F2+F1*F3-(-1)**M*F1*F4*F5
QNM=((N*B3)**2+V*((M*B2)**2)
TERM=(QNM/(TMN*PN*RM))**2*PSIMN*PSIKJ*GNJ*WMNKJ
SUMA=SUMA+D**2*XW*TERM
20 CONTINUE
ABSUM=ABS(SUMA)
ALSUM=0.4343* ALOG(ABSUM)
WVAL(J)=W
SVAL(J)=ALSUM
WRITE(5,18)WVAL(J),SVAL(J),SUMA
W=W+DELW
30 CONTINUE
CALL SCALF(4.7,0.5,2.83,-11.)
CALL FGRID(1,3.,-10.,1.,20)
XI=3.
DO 40 I=1,13
AI=1
IF(I-9)2,2,3

```

PAGE 3 A 63.

```
2 ARG=(AI+1.)/AI
GO TO 4
3 ARG=(AI-8.)/(AI-9.)
4 U=0.4343*ALOG(ARG)
CALL FGRID(0,XI,0.,U,1)
XI=XI+U
40 CONTINUE
XP=0.4343*ALOG(WVAL(1))
YP=SVAL(1)
CALL FPLOT(-2,XP,YP)
DO 50 IJ=2,NVEZ
XQ=0.4343*ALOG(WVAL(IJ))
YQ=SVAL(IJ)
CALL FPLOT(0,XQ,YQ)
50 CONTINUE
CALL EXIT
18 FORMAT(5X,3E20.5)
END
```

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR

COMMON 0 VARIABLES

966 PROGRAM 1050

END OF COMPILATION

// XEG

PROGRAMA BASE PARA DETERMINAR LOS ESPECTROS DE PLACAS RUGOSAS

// JOB T 0OFF 1OFF

A 63

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0OFF	0OFF	0000
0001	1OFF	1OFF	0001
		2OFF	0002

V2 M05 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

```

*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(2501READER,1403PRINTER,PLOTTER)
C      VIBRACION DE PLACAS
      DIMENSION WVAL(200),SVAL(200)
      A1=13.70655
      A2=-0.57917
      A3=0.00823
      A4=-0.00004
      A=60.
      B=10.
      H=0.15
      UC=3500.
      SK=1.19
      UF=512.
      CF=0.021
      RHO=0.94E-6
      D=216.4
      UM=4.13E-7
      TAU=0.05
      PI=3.1416
      V=0.3
      X=30.
      Y=5.
      ETA=0.
      EXI=15.
      AA1=SQRT(A*B)
      AA2=2./AA1
      AA3=PI*X/A
      AA4=PI*Y/B
      B1=SQRT(D/UM)
      B2=PI/A
      B3=PI/B
      EE1=PI*(X+EXI)/A
      EE2=PI*(Y+ETA)/B
      T1=4./(A*B*UM**2)
      T2=SK*UF**3*RHO**2*CF
      WFIN=45000.
      DELW=250.

```

PAGE 2 A 63

```

WINIC=1250.
NVEZ=(WFIN-WINIC)/DElw
W=WINIC
DO 30 J=1,NVEZ
D1=W/UC
C1=(0.91*D1)**2
D2=(0.26*D1)**2
E1=0.91*D1*B
Z=W*SK/UF
PHIP=T2*(A1+A2*Z+A3*Z**2+A4*Z**3)
XW=T1*PHIP
SUMA=0.
DO 20 N=1,3
DO 20 M=1,18
WMN=B1*((M*B2)**2+(N*B3)**2)
S1=SIN(M*AA3)
S2=SIN(N*AA4)
S3=SIN(M*EE1)
S4=SIN(N*EE2)
PSIMN=A2*S1*S2
PSIKJ=AA2*S3*S4
PN=C1+(N*B3)**2
RM=((D2+(M*B2-D1)**2)*(D2+(M*B2+D1)**2))**0.5
G1=EXP(-E1)
GNJ=E1*PN+2.*((N*B3)**2*(1-(-1)**N*G1))
TMN1=(WMN**2-W**2)
TMN2=2.*TAU*WMN*W
TMN=(TMN1**2+TMN2**2)**0.5
ALAMN=ATAN(TMN2/TMN1)
VM=ATAN(0.52*D1**2/((M*B2)**2-0.933*D1**2))
F1=2.*((M*B2)**2
F2=COS(VM-0.693*PI)
F3=COS(2.*VM)
F4=EXP(-0.26*D1*A)
F5=SIN(D1*A+2.*VM)
WMNKJ=1.0338*D1*A*RM*F2+F1*F3-(-1)**M*F1*F4*F5
QNM=((N*B3)**2+V*(M*B2)**2)
TERM=(QNM/(TMN*PN*RM))**2*PSIMN*PSIKJ*GNJ*WMNKJ
SUMA=SUMA+D**2*XW*TERM
20 CONTINUE
ABSUM=ABS(SUMA)
ALSUM=0.4343* ALOG1(ABSUM)
WVAL(J)=W
SVAL(J)=ALSUM
WRITE(5,18)WVAL(J),SVAL(J),SUMA
W=W+DElw
30 CONTINUE
CALL SCALF(4.7,0.5,2.83,-11.)
CALL FGRID(1,3.,-10.,1.,20)

```

PAGE 3 A 63

```
XI=3.  
DO 40 I=1,13  
AI=I  
IF(I-9)2,2,3  
2 ARG=(AI+1.)/AI  
GO TO 4  
3 ARG=(AI-8.)/(AI-9.)  
4 U=0.4343* ALOG(ARG)  
CALL FGRID(0,XI,0.,U,1)  
XI=XI+U  
40 CONTINUE  
XP=0.4343* ALOG(WVAL(1))  
YP=SVAL(1)  
CALL FPLOT(-2,XP,YP)  
DO 50 IJ=2,NVEZ  
XQ=0.4343* ALOG(WVAL(IJ))  
YQ=SVAL(IJ)  
CALL FPLOT(0,XQ,YQ)  
50 CONTINUE  
CALL EXIT  
18 FORMAT(5X,3E20.5)  
END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
COMMON 0 VARIABLES 972 PROGRAM 1088

END OF COMPILEDATION

// XEQ