APLICABILIDADE DE UMA MÁQUINA TESTE ELETRODINÂMICA A MOLAS NÃO LINEARES

LEOPOLDO EURICO GONÇALVES BASTOS

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M. Sc.)

Aprovada por :

Presidente

Leslie R. Koval

RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

OUTUBRO DE 1969

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Arthur Palmeira Ripper Neto pela escolha e orientação dêste trabalho.

Aos Professôres Luiz F. L. Legey e Jean Miral pela assistência na computação analógica.

Ao BNDE e CAPES pelas bolsas concedidas.

Leopoldo Enrico Gonçalves Bastos

RESUMO

Um sistema eletrodinâmico para teste de fadiga de molas é representado por um modêlo com dois graus de liberdade.

A simulação da máquina teste por um sistema com dois graus de liberdade e fôrça restauradora $F = (\alpha + \beta x^2)x$ é feita com auxílio do computador analógico, EAI-TR48 DES - 30.

São determinados para execução do teste os valores favoráveis da razão de deflexão das molas $|y_1| / |y_2 - y_1|$, a frequência da fôrça excitadora e $|y_2|$ amplitude de movimento da massa m_2, em função da relação de massas m_2/m_1.

Os resultados são comparados com os da solução analítica para o caso de mola linear $(\beta = 0)$.

ABSTRACT

An eletrodynamic system for testing fatigue in springs is represented by a model which has two degrees of freedom.

The simulation of the tester by a two degrees of freedom system with restoring force $F = (\alpha + \beta x^2) x$, is made on an analog computer EAI - TR48 DES - 30.

The favorable values of the spring deflection ratio $|y_1|/|y_2 - y_1|$, the frequency of the exciting force, and $|y_2|$ the amplitude of motion of the mass m_2, as function of the mass ratio m_2/m_1, are determined to the execution of the test.

The results are compared with those of the analytic solution for the case of linear springs ($\beta = 0$).

ÍNDICE

CAPÍTULO

1. INTRODUÇÃO 1
2. TEORIA 4
3. SIMULAÇÃO ANALÓGICA 19
4. APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS 31
5. CONCLUSÕES 38

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 40

APÊNDICE

1. EQUAÇÕES ADIMENSIONAIS DE MOVIMENTO 43
2. SOLUÇÃO PELO MÉTODO DAS PERTURBAÇÕES 49
3. LISTA DE FIGURAS 63
4. SIMBOLOGIA 64

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Um dos métodos empregados para ensaios acelerados de fadiga consiste basicamente de um excitador eletrodinâmico de vibrações, acoplado a um dispositivo de fixação do corpo de prova.

A máquina é operada na frequência natural do sistema mecânico formado pelo corpo de prova agindo como elemento elástico, uma massa oscilante constituída do elemento móvel do excitador (1) e de discos adicionais (2), conforme figura (1). Em função da rigidez (K) do corpo de prova é determinado o número de discos (2) a ser empregado, a fim de se ter a ressonância do sistema dentro da faixa de frequência de operação do excitador. De acôrdo com a expressão conhecida : $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$

O emprêgo de dispositivos de fixação adequados permite teste de corpos de prova à tração-compressão, flexão, torção, etc.

A amplitude da fôrça atuante no especimem é medida por meio de um dinamômetro ótico (3), através do qual o corpo de prova é fixado à base da máquina (4).

O teste de elementos de baixa rigidez tais como molas, não pode ser executado por métodos convencionais devido à limitação de curso do excitador eletrodinâmico. A fim de manter o curso do excitador (y_2) na figura(2) dentro de limites especificados e simultâneamente obter-se grandes deflexões no elemento elástico, introduz-se a massa adicional (m_1) entre dois elementos idênticos a testar conforme o diagrama da figura (2). Resulta assim um sistema com dois graus de liberdade.

Queremos determinar os parâmetros para os quais obtem-se u

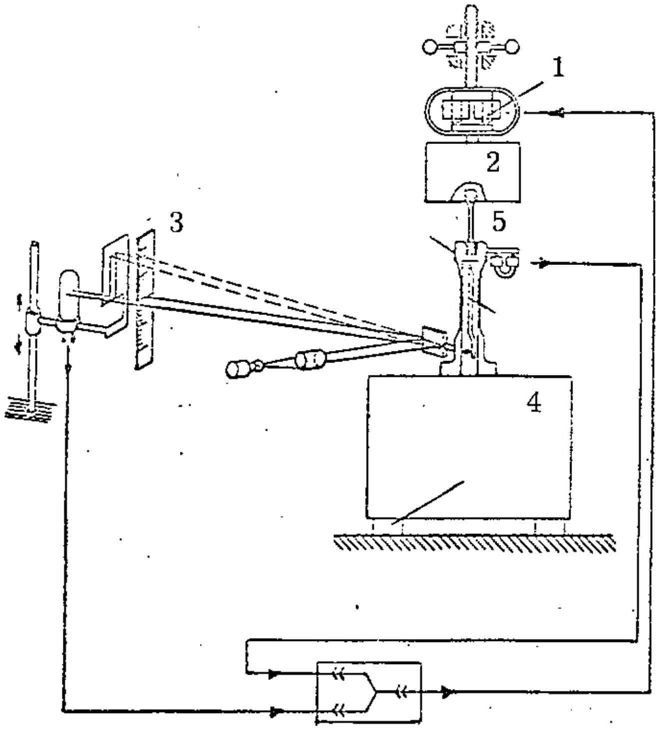


Fig. (1) - Máquina-teste

Legenda :

1. Excitador eletrodinâmico
2. Discos adicionais
3. Dinamômetro ótico
4. Base da máquina
5. Especimen

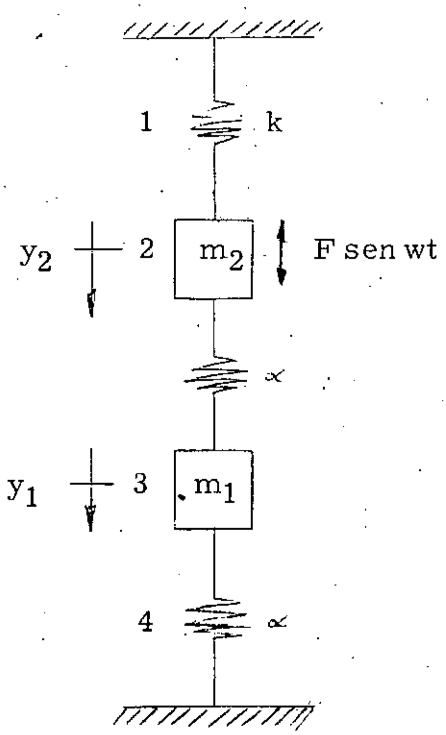


Fig. (2) - Modêlo matemático

Legenda :

1. Mola linear constituinte da máquina
2. Massa variável (discos)
3. Massa adicional
4. Mola a testar

ma ressonância na qual a deflexão $|y_2|$ é pequena, e também que a amplitude de deflexão do especimen inferior $|y_1|$, seja maior ou igual àquela do especimen intermediário $|y_2 - y_1|$. Isto devido a amplitude da fôrça indicada no dinamômetro ser relacionada com a deflexão $|y_1|$ do elemento inferior.

O objetivo da tese é a determinação dêstes parâmetros para o teste de molas lineares e não lineares.

CAPÍTULO 2

TEORIA

Molas não lineares são aquelas em que o valor absoluto da razão fôrça sôbre deflexão não é constante. Com o aumento da deflexão se a razão cresce, a mola sofre um endurecimento (hardening). Se a razão decresce, a mola sofre um amolecimento (softening).

Os diagramas fôrça-deformação para estas molas são representados na fig. (3).

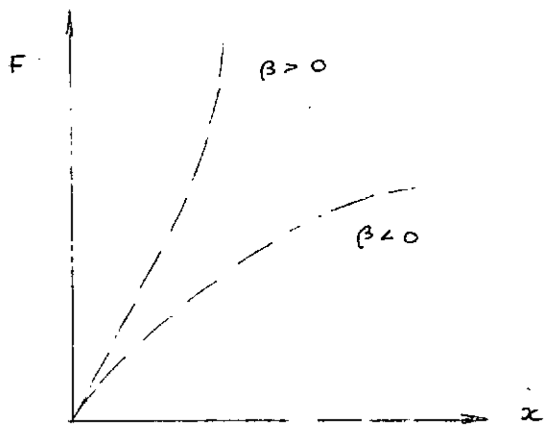


Fig (3) - Características das molas não lineares.

A classe de molas cuja relação deflexão-fôrça restauradora é representada pela expressão $F = (\alpha + \beta x^2) x$ engloba não só as molas lineares ($\beta = 0$) assim como as molas com endurecimento ($\beta > 0$) e as molas com amolecimento ($\beta < 0$).

As equações de movimento do modêlo, fig (2), têm respostas do tipo transitório e permanente. Ao teste de fadiga sòmente haverá interêsse na última solução. Para o sistema em questão há necessidade de intro duzir amortecimento para extinção da resposta transitória. O que será conseguido pela adoção de um critério quantitativo de amortecimento. Por analogia a um sistema de um grau de liberdade, definimos um coeficiente de amortecimento de referência C_r da forma seguinte :

$C_r = 2\sqrt{\alpha m_1}$, e um fator de amortecimento ζ :

$$\zeta = \frac{c}{C_r} = \frac{c}{2\sqrt{\alpha m_1}}$$

C_r é definido nestes têrmos em vista de se prever operação com oscilações maiores de m_1. Para obtenção de um sistema oscilatório com pequeno amortecimento, adota-se $\zeta = 5\%$, então :

$$c = 0.1\sqrt{\alpha m_1}$$

2.1 - MOLA LINEAR

A solução analítica para o modêlo fig. (4) no caso de molas lineares é exata, SETO[1], e as equações de movimento serão :

$$m_1 \ddot{y}_1 + \alpha(2y_1 - y_2) + c(2\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + \alpha(y_2 - y_1) + k y_2 + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = F \operatorname{sen} \omega t \qquad (1)$$

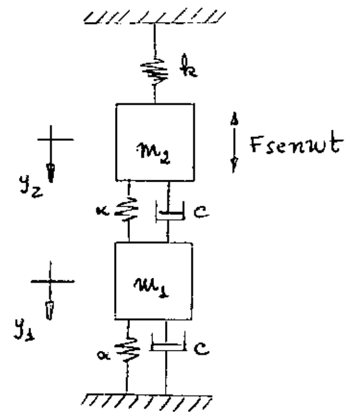


Fig. (4) - Modêlo linear com amortecimento

Supondo-se soluções harmônicas para os deslocamentos $y_1 = \bar{Y}_1 \, e^{iwt}$ e $y_2 = \bar{Y}_2 \, e^{iwt}$, e substituindo nas equações (1), resulta :

$$(2\alpha - m_1 w^2 + i2cw)\,\bar{Y}_1 - (\alpha + icw)\,\bar{Y}_2 = 0$$

$$-(\alpha + icw)\,\bar{Y}_1 + (\alpha + k - m_2 w^2 + icw)\,\bar{Y}_2 = F$$

Resolvendo-se o sistema pela regra de Cramer :

$$\Delta \bar{Y}_1 = F\alpha + iFcw$$

$$\Delta \bar{Y}_2 = F(2\alpha - m_1 w^2) + i2Fcw$$

$$\Delta = m_1 m_2 w^4 - w^2 \left[\alpha\,(2m_2 + m_1) + m_1 k + c^2\right] + \alpha^2 + 2\alpha k +$$

$$+\, i\left[2\,(\alpha + k) - w^2\,(m_1 + 2m_2)\right] cw$$

seja

$$\Delta = X + Yi$$

$$\Delta \bar{Y}_1 = A + Bi$$

$$\Delta \bar{Y}_2 = C + Di$$

teremos então, se $\Delta \neq 0$

$$\bar{Y}_1 = \frac{(AX + BY) + (BX - AY)i}{X^2 + Y^2} = A' + B'i$$

$$\overline{Y}_2 = \frac{(CX + DY) + (DX - CY)\,i}{X^2 + Y^2} = C' + D'i$$

$$\overline{Y}_1 = |y_1|\, e^{i\phi_1} = |y_1| \; (\cos\phi_1 + i \operatorname{sen}\phi_1)$$

$$\overline{Y}_2 = |y_2|\, e^{i\phi_2} = |y_2| \; (\cos\phi_2 + i \operatorname{sen}\phi_2)$$

considerando a fôrça excitadora senoidal:

$$F \operatorname{sen} wt = \operatorname{Im} \; (F e^{iwt})$$

As respostas y_1, y_2 serão:

$$y_1 = \operatorname{Im} \left[\, |y_1| \, e^{i(wt + \phi_1)} \right] = |y_1| \operatorname{sen}(wt + \phi_1) \qquad (1.a)$$

$$y_2 = \operatorname{Im} \left[\, |y_2| \, e^{i(wt + \phi_2)} \right] = |y_2| \operatorname{sen}(wt + \phi_2) \qquad (1.b)$$

$$\phi_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{B'}{A'}$$

$$\phi_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{D'}{C'}$$

$$|y_1| = \sqrt{A'^2 + B'^2}$$

$$|y_2| = \sqrt{C'^2 + D'^2}$$

O movimento relativo das duas massas y_2-y_1 é a deflexão da mola intermediária e é dado por:

$$\bar{Y}_1 = |y_1| \left(\cos\phi_1 + i\,\mathrm{sen}\,\phi_1\right)$$

$$\bar{Y}_2 = |y_2| \left(\cos\phi_2 + i\,\mathrm{sen}\,\phi_2\right)$$

$$\bar{Y}_2-\bar{Y}_1 = \left[\,|y_2|\cos\phi_2 - |y_1|\cos\phi_1\,\right] + i\left[\,|y_2|\,\mathrm{sen}\,\phi_2 - |y_1|\,\mathrm{sen}\,\phi_1\,\right]$$

$$|\bar{Y}_2-\bar{Y}_1| = \sqrt{u^2+v^2}$$

$$u = |y_2|\cos\phi_2 - |y_1|\cos\phi_1$$

$$v = |y_2|\,\mathrm{sen}\,\phi_2 - |y_1|\,\mathrm{sen}\,\phi_1 \qquad (1.c)$$

Análise do sistema linear para a amplitude do deslocamento $|Y_2|$ ser nula:

Seja a resposta $\bar{Y}_2$: $\bar{Y}_2 = \dfrac{CX+DY}{X^2+Y^2} + i\,\dfrac{DX-CY}{X^2+Y^2}$

se $|\bar{Y}_2| = 0$

$\rightarrow \bar{Y}_2 = 0$ $\qquad CX+DY=0$

$$DX-CY=0$$

$$CX = -DY \qquad , \qquad DX = CY$$

dividindo membro a membro, pois $XY \neq 0$

$$\frac{C}{D} = -\frac{D}{C} \rightarrow C^2 + D^2 = 0 = |\Delta \overline{Y}_2|$$

$$|\Delta \overline{Y}_2| = |C + Di| = 0 \rightarrow C = 0 \; , \; D = 0$$

mas $C = 2\alpha - m_1 w^2$

$D = 2 F c \omega$

Se o sistema tem frequência $f_0 \neq 0$ para a fôrça excitadora então :

\- D=0 $\longleftrightarrow$ c=0 , caso em que o amortecimento é nulo e

$f_0 = 1/2\pi \sqrt{2\alpha/m_1}$

Um sistema linear ($\beta = 0$) com dois graus de liberdade conforme esquema, figs. (2) e (4), apresenta as curvas resposta-frequência com as características mostradas nas figuras (5. a) e (5. b).

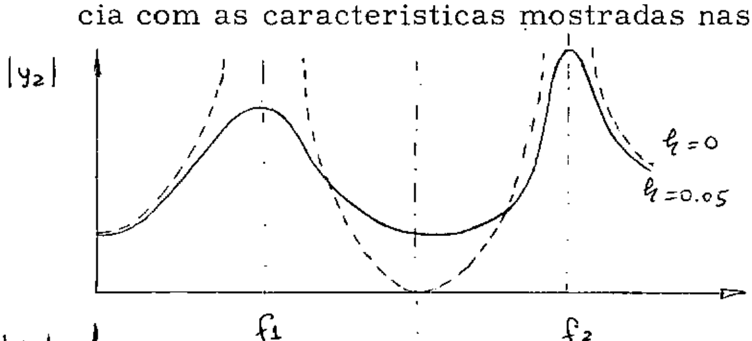


Fig. (5. a)

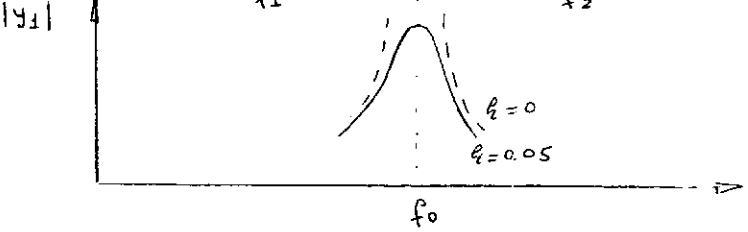


Fig. (5. b)

No caso de amortecimento nulo (- - -) e amortecimento fraco (———) a amplitude do movimento da massa m_2 , apresenta máximos nas frequências f_1 , f_2 e um mínimo na frequência f_0 . A esta amplitude mínima ou antiressonância da massa m_2 , corresponde uma amplitude máxima de movimento da massa m_1 .

Na frequência f_0 a maior parte da energia do sistema é absorvida no movimento da massa m_1 .

No caso das frequências f_1 e f_2 estiverem suficientemente afastadas de f_0 , o amortecimento sendo baixo, o movimento da massa m_2 torna-se desprezível em comparação com o de m_1 , em uma faixa de frequência em têrno de f_0 .

Nesta faixa o comportamento da massa m_1 pode ser aproximado como de um sistema com um grau de liberdade e frequência natural f_0 , fig. (5. b).

A frequência f_0 será aquela em que a deflexão da mola testada é máxima, sendo a deflexão do excitador eletrodinâmico mínima.

Conforme teoria de sistemas lineares de dois graus de liberdade desenvolvida, $|y_2|$ será nulo em f_0 , sòmente quando o amortecimento fôr nulo.

Tendo o amortecimento efeito de transferência de energia da massa m_1 para m_2 , o sistema amortecido fig. (5. b) tem em f_0 uma ressonância para $|y_1|$, porém a amplitude $|y_2|$ não é nula.

Considerando o sistema linear não amortecido, vemos que o conjunto massa-molas (m_1, α) funciona como absorvedor dinâmico de vibrações. O ponto de máxima absorção de energia será aquêle em que a frequência natural do absorvedor se iguala a do conjunto massa-mola (m_2, k) .

$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\alpha}{m_1}} = f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_2}}$ Para tanto a razão das massas deverá satisfazer à relação : $m_2/m_1 = k/2\alpha$.

2. 2 - MOLA NÃO LINEAR

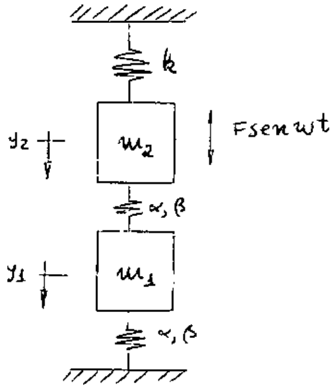


FIG. (6) - modêlo com fôrças restauradoras não lineares.

As equações de equilíbrio do modêlo, fig. (6), com fôrças restauradoras não lineares, constituirão um sistema de duas equações diferenciais não lineares de segunda ordem.

$$m_1 \ddot{y}_1 + \alpha (2y_1 - y_2) + \beta y_1^3 + \beta (y_1 - y_2)^3 = 0$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + \alpha (y_2 - y_1) + k y_2 + \beta (y_2 - y_1)^3 = F sen wt \qquad (2)$$

As equações (2) apresentam acoplamento linear e não linear. Para a aplicação de métodos analíticos é vantajoso proceder-se ao desacoplamento dos têrmos lineares das equações de movimento, quando não é possível obter-se um desacoplamento total.

O método que segue é uma extensão para vibrações forçadas do método de HENRY e TOBIAS[2] para vibrações livres.

As expressões das energias potencial e cinética, são :

$$S = \alpha y_1^2 - \alpha y_1 y_2 + \frac{1}{2}(\alpha + k) y_2^2 + \beta/2\, y_1^4 - \beta y_1^3 y_2 + \frac{3}{2}\beta y_1^2 y_2^2 - \beta y_1 y_2^3 + \frac{\beta}{4} y_2^4 - y_2 F \operatorname{sen} \omega t$$

(3)

$$T = 1/2\ m_1 \dot{y}_1^2 + 1/2\ m_2 \dot{y}_2^2$$

onde o têrmo ($-y_2 F \operatorname{sen} \omega t$) na energia potencial é associado com a fôrça excitadora, LANDAU[3] .

A transformação das coordenadas inerciais y_1 , y_2 em coordenadas normais Q_1 , Q_2 é obtida fazendo-se a substituição :

$$y_1 = Q_1 \cos\phi - Q_2 \operatorname{sen}\psi$$

$$y_2 = Q_1 \operatorname{sen}\phi + Q_2 \cos\psi$$

, nas equações (3) e escolhendo-se ϕ e ψ tais que os coeficientes dos têrmos $Q_1 Q_2$, $\dot{Q}_1 \dot{Q}_2$ se anulem.

$$S = A_0 Q_1^2 + A_2 Q_2^2 + B_0 Q_1^4 + B_1 Q_1^3 Q_2 + B_2 Q_1^2 Q_2^2 + B_3 Q_1 Q_2^3 + B_4 Q_2^4 + B_5 Q_1 + B_6 Q_2$$

(4)

$$T = C_0 \dot{Q}_1^2 + C_2 \dot{Q}_2^2$$

, os coeficientes $A_0,..,A_2$, $B_0, \ldots, B_6$, C_0, C_2 são determinados no apêndice (1).

Equações de movimento: aplicando-se a equação de Lagrange ao sistema de eq(4), resulta :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_n}\right) + \frac{\partial S}{\partial Q_n} = 0 \quad , n = 1, 2$$

$$2 C_0 \ddot{Q}_1 + 2A_0 Q_1 + 4 B_0 Q_1^3 + 3 B_1 Q_1^2 Q_2 + 2 B_2 Q_1 Q_2^2 + B_3 Q_2^3 + B_5 = 0$$
$$2 C_2 \ddot{Q}_2 + 2A_2 Q_2 + 4 B_4 Q_2^3 + 3 B_3 Q_2^2 Q_1 + 2 B_2 Q_2 Q_1^2 + B_1 Q_1^3 + B_6 = 0 \qquad (5)$$

Colocando a equação (5) sob forma adimensional , para tanto introduzimos as variáveis :

$$\tau = \left[1/2 \quad (A_0/C_0 + A_2/C_2) \right]^{1/2} . t$$

$$p = \frac{Q_1}{L} , \qquad q = \frac{Q_2}{L}$$

onde L é a unidade de comprimento dada por $L = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$. Demais constantes estão representadas no apêndice (1). Teremos então :

$$\ddot{p} + \omega_1^2 p + \epsilon_1 \omega_1^2 \left(p^3 + m_1'' p^2 q + n_1' p q^2 + s_1' q^3 \right) = A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau$$

$$\ddot{q} + \omega_2^2 q + \epsilon_2 \omega_2^2 \left(q^3 + m_2'' q^2 p + n_2' q p^2 + s_2' p^3 \right) = A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau$$

Seja $\epsilon_1 = \epsilon \, l_1$, $\epsilon_2 = \epsilon \, l_2$ então l_1, l_2 serão tais que satisfaçam a razão ϵ_1 / ϵ_2 ; substituindo-se no sistema precedente, teremos ϵ representando a não linearidade para as duas equações :

$$\ddot{p} + \omega_1^2 p + \epsilon \omega_1^2 \left(l_1 p^3 + m_1' p^2 q + n_1 p q^2 + s_1 q^3 \right) = A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau$$

$$\ddot{q} + \omega_2^2 q + \epsilon \omega_2^2 \left(l_2 q^3 + m_2' q^2 p + n_2 q p^2 + s_2 p^3 \right) = A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau \qquad (6)$$

A equação (6) está sob forma conveniente para a aplicação de métodos analíticos. Quando a não linearidade é pequena, pode-se aplicar o método das perturbações, desenvolvido para vibrações forçadas de sistemas com dois graus de liberdade, por BYCROFT[4].

Para a análise de vibrações forçadas por êste método, quando se tem interêsse em examinar o comportamento do sistema na faixa de frequências próximas a ressonância, há conveniência de associar-se o parâmetro ϵ à fôrça excitadora (ver exemplo CUNNINGHAM[5] pág. 190). Para isto torna-se conveniente introduzir a transformação de coordenadas, BYCROFT[4], :

$$p = x - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - \omega_1^2} \quad , \quad \Omega_1 \neq \omega_1$$

$$q = y - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - \omega_2^2} \quad , \quad \Omega_1 \neq \omega_2$$

do que resultam as equações :

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x + \epsilon \omega_1^2 \left[l_1 \left\{ x - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - \omega_1^2} \right\}^3 + m_1' \left\{ x - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - \omega_1^2} \right\} \left\{ y - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - \omega_2^2} \right\}^2 + \right.$$

$$\left. + n_1 \left\{ x - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - \omega_1^2} \right\} \left\{ y - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - \omega_2^2} \right\}^2 + s_1 \left\{ y - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - \omega_2^2} \right\}^3 \right] = 0$$

(7. a)

$$\ddot{y} + \omega_2^2 y + \epsilon \omega_2^2 \left[l_2 \left\{ y - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - \omega_2^2} \right\}^3 + m_2' \left\{ y - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - \omega_2^2} \right\}^2 \left\{ x - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - \omega_1^2} \right\} + \right.$$

$$\left. + n_2 \left\{ y - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - \omega_2^2} \right\} \left\{ x - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - \omega_1^2} \right\}^2 + s_2 \left\{ x - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - \omega_1^2} \right\}^3 \right] = 0$$

(7. b)

O método das perturbações consiste em procurar uma solução em série de potências de ϵ da forma :

$$x = x_0(\xi) + \epsilon x_1(\xi) + \epsilon^2 x_2(\xi) + \cdots$$

$$y = y_0(\eta) + \epsilon y_1(\eta) + \epsilon^2 y_2(\eta) + \cdots$$

Devido à natureza oscilatória do sistema, quando se substitui estas expressões nas equações (7. a) e (7. b) aparecem têrmos seculares, isto é, a amplitude é crescente com o tempo. Êstes têrmos não são compatíveis com a solução desejada.

É com a finalidade de eliminar êstes têrmos seculares que o tempo (τ) é expressado em forma das séries :

$$\tau = \xi + \epsilon u_1(\xi) + \epsilon^2 u_2(\xi) + \cdots$$

$$\tau = \eta + \epsilon v_1(\eta) + \epsilon^2 v_2(\eta) + \cdots$$

possibilitando assim a eliminação pela escolha adequada dos coeficientes $u_1, u_2, \ldots, v_1, v_2, \ldots$.

Esta última modificação do método clássico das perturbações foi introduzida por Lighthill, ARIARATNAM[6] , e maiores detalhes podem ser vistos no apêndice (2).

Introduzindo as expansões nas equações (7.a) e (7.b), teremos no apêndice (2) o desenvolvimento das soluções, que são apresentadas em forma compacta, a seguir:

$$x(\xi) = \frac{A_1' \Omega_1}{w_1(\Omega_1^2 - w_1^2)} \operatorname{sen} w_1 \xi + \epsilon \left[- \frac{A_1' \Omega_1}{w_1(\Omega_1^2 - w_1^2)} \left\{ \frac{3 l_1 k_1^2 \Omega_1^2}{8 w_1^2} + \frac{3 l_1 k_1^2}{4} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{n_1(\Omega_1^2 + w_2^2) k_2^2}{4 w_2^2} \right\} \operatorname{sen} w_1 \xi - \frac{1}{w_1} \sum_{n=1}^{N} \frac{P_n \phi_n}{w_1^2 - \phi_n^2} \operatorname{sen} w_1 \xi + \sum_{u=1}^{N} \frac{P_u \operatorname{sen} \phi_n \xi}{w_1^2 - \phi_n^2} \right]$$

$$y(\eta) = \frac{A_2' \Omega_1}{w_2(\Omega_1^2 - w_2^2)} \operatorname{sen} w_2 \eta + \epsilon \left[- \frac{A_2' \Omega_1}{w_2(\Omega_1^2 - w_2^2)} \left\{ \frac{3 l_2 k_2^2 \Omega_1^2}{8 w_2^2} + \frac{3 l_2 k_2^2}{4} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{n_2(\Omega_1^2 + w_1^2) k_1^2}{4 w_1^2} \right\} \operatorname{sen} w_2 \eta - \frac{1}{w_2} \sum_{u=1}^{N} \frac{Q_u \phi_u'}{w_2^2 - \phi_u'^2} \operatorname{sen} w_2 \eta + \sum_{u=1}^{N} \frac{Q_n \operatorname{sen} \phi_u' \eta}{w_2^2 - \phi_u'^2} \right]$$

$$\tau = \left[1 - \epsilon \left\{ \frac{3 l_1 k_1^2 \Omega_1^2}{8 w_1^2} + \frac{3 l_1 k_1^2}{4} + \frac{u_1(\Omega_1^2 + w_2^2) k_2^2}{4 w_2^2} \right\} \right] \xi$$

$$\tau = \left[1 - \epsilon \left\{ \frac{3 l_2 k_2^2 \Omega_1^2}{8 w_2^2} + \frac{3 l_2 k_2^2}{4} + \frac{u_2(\Omega_1^2 + w_1^2) k_1^2}{4 w_1^2} \right\} \right] \eta$$

Se $\epsilon = 0$ o sistema terá as soluções:

$$x = \frac{A_1' \Omega_1}{w_1(\Omega_1^2 - w_1^2)} \operatorname{sen} w_1 \tau$$

$$y = \frac{A_2' \Omega_1}{w_2(\Omega_1^2 - w_2^2)} \operatorname{sen} w_2 \tau$$

caracterizando soluções de sistema linear forçado.
O método das perturbações para a simulação do modêlo, é longo, trabalhoso precisando serem as soluções determinadas para cada valor do tempo até alcance da solução permanente.

A introdução de amortecimento também dificulta bastante a solução.

CAPÍTULO 3

SIMULAÇÃO ANALÓGICA

As equações de movimento do modêlo representado na figura (7) são :

$$m_1 \ddot{y}_1 + \alpha (2y_1 - y_2) + \beta y_1^3 + \beta (y_1 - y_2)^3 + 0.1\sqrt{\alpha m_1}\,(2\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + \alpha (y_2 - y_1) + k y_2 + \beta (y_2 - y_1)^3 + 0.1\sqrt{\alpha m_1}\,(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = F \operatorname{sen} \omega t$$

(12)

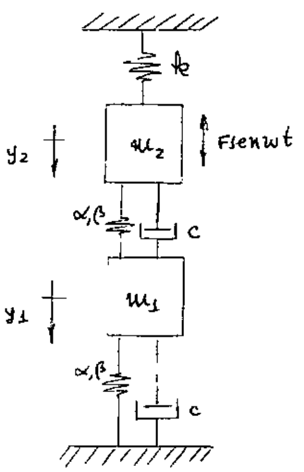
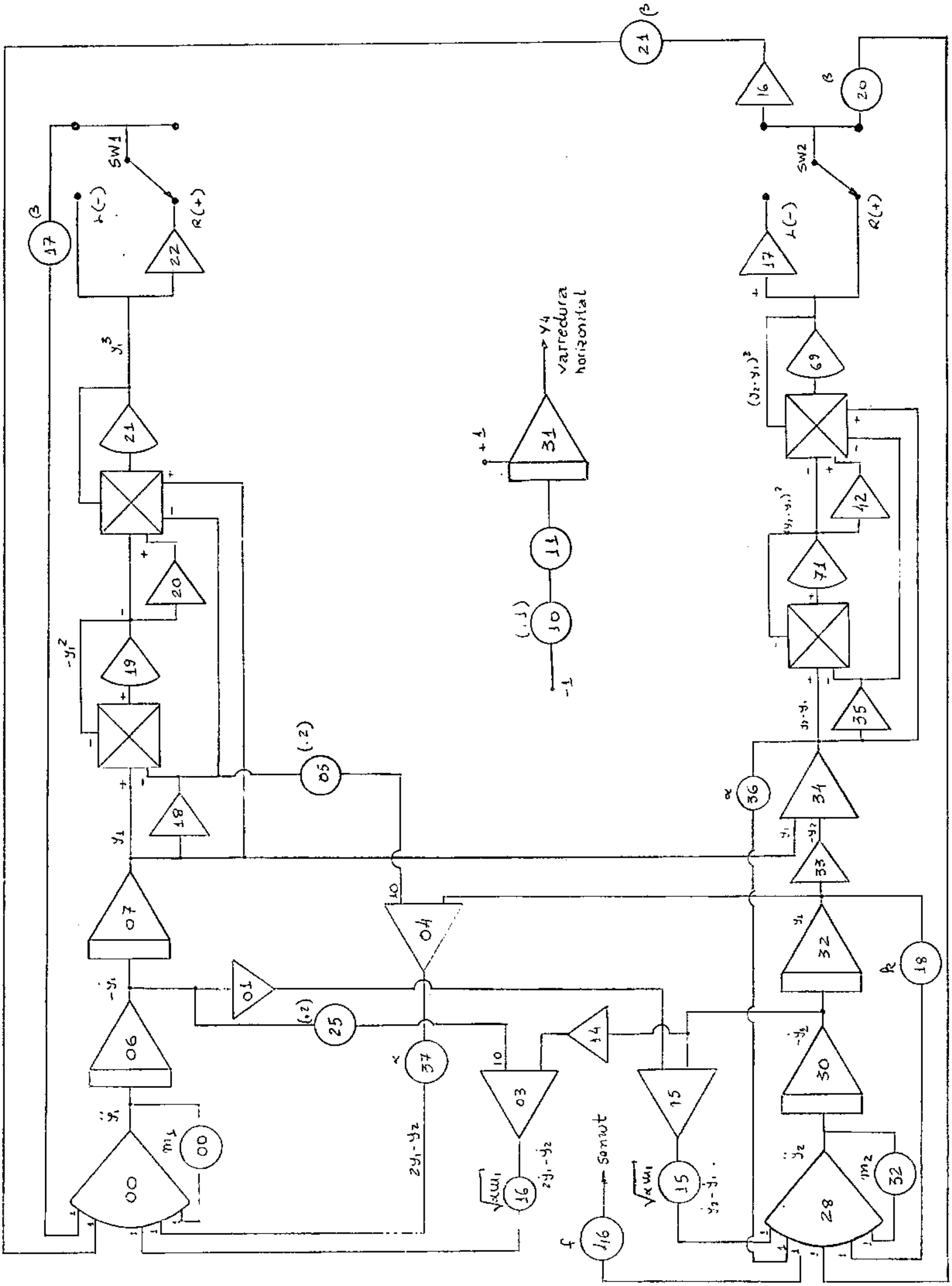


FIG. (7) - Modêlo não linear com amortecimento.

O diagrama analógico não escalado é apresentado nas figuras (8) e (9). As variáveis foram escaladas para manter as saídas dos amplificadores dentro do valor máximo de 1 volt.

3.1 - DETERMINAÇÃO DA TABELA DE ESCALA.

No sistema fig (7) , a mola linear constituinte tem constante (k) de valor 8000 kgf/cm. As massas têm as variações : m_1 $[10, 100]$ kg, m_2 $[100, 300]$ kg.



SW1
SW2
Y4
varredura
horizontal

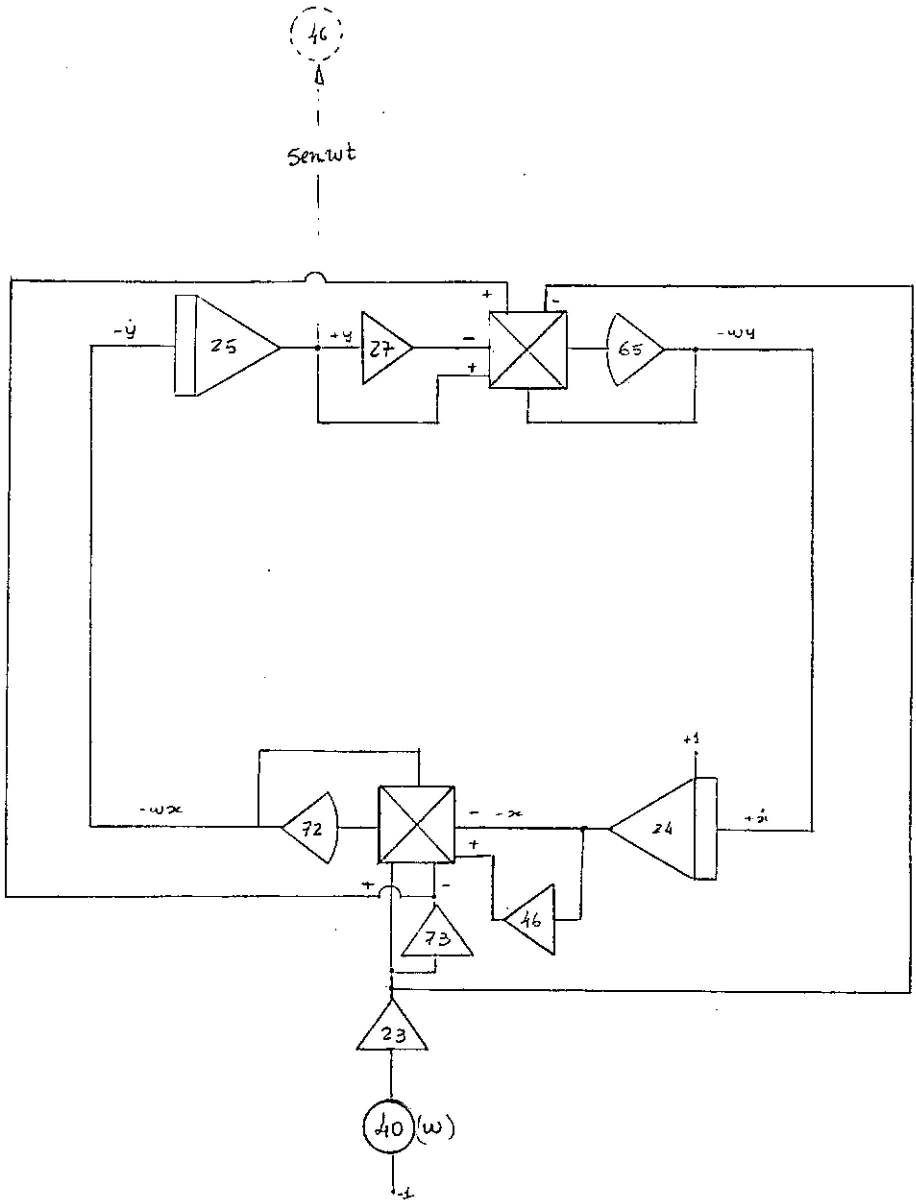


Fig. (9) - Diagrama Não Escalado de sen wt

O fator de não linearidade β terá seu valor limitado, CUNNINGHAM[5] pág. 76.

$$F = (\alpha + \beta x^2)x \geq 0$$

quando $\beta < 0$, $|\beta\ \text{máx}| = \left|\dfrac{\alpha\ \text{máx}}{x^2\ \text{max}}\right|$,

adotando-se α máx = 200kgf/cm e x máx = 1 cm

β máx = 200kgf/cm^3

A fôrça atuante máxima é limitada em 100kgf. Utilizando o sistema C. G. S. , os valôres máximos das diversas variáveis,saídas dos amplificadores, estão representados na tabela (1). Os valôres máximos das acelerações foram obtidos por meio da equação (12) com todos os valôres máximos.

TAB. (1) - VARIÁVEIS ESCALADAS

VARIÁVEIS	VALÔRES MÁXIMOS	VARIÁVEIS ESCALADAS
y_1 , y_2	1	$\left[\frac{y_1}{1}\right]$, $\left[\frac{y_2}{1}\right]$
$2y_1 - y_2$	3	$\left[\frac{2y_1 - y_2}{3}\right]$
y_1^3	1	$\left[\frac{y_1^3}{1}\right]$
$(y_1 - y_2)^3, (y_2 - y_1)^3$	8	$\left[\frac{(y_1 - y_2)^3}{8}\right]$, $\left[\frac{(y_2 - y_1)^3}{8}\right]$
$\dot{y}_1$, $\dot{y}_2$	800	$\left[\frac{\dot{y}_1}{800}\right]$, $\left[\frac{\dot{y}_2}{800}\right]$
$(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$	1600	$\left[\frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{1600}\right]$
$(2\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$	2400	$\left[\frac{2\dot{y}_1 - \dot{y}_2}{2400}\right]$
$\ddot{y}_1$	3.5×10^4	$\left[\frac{\ddot{y}_1}{3.5\times10^4}\right]$
$\ddot{y}_2$	4×10^4	$\left[\frac{\ddot{y}_2}{4\times10^4}\right]$

A equação (12) escalada, para uso no computador analógico será :

$$\left[\frac{\ddot{y}_1}{3,5\times 10^4}\right] = -\frac{1}{(3.5\,m_1/10^6)}\left\{\left(\frac{3\alpha}{10^{10}}\right)\left[\frac{2y_1-y_2}{3}\right]+\left(\frac{\beta}{10^{10}}\right)\left[\frac{y_1^{\,3}}{1}\right]\right.$$

$$\left.+\left(\frac{8\beta}{10^{10}}\right)\left[\frac{(y_1-y_2)^3}{8}\right]+\left(\frac{24\sqrt{\alpha m_1}}{10^9}\right)\left[\frac{2\dot{y}_1-\dot{y}_2}{2400}\right]\right\}$$

$$\left[\frac{\ddot{y}_2}{4\times 10^4}\right] = -\frac{1}{(4m_2/10^7)\times 10}\left\{\left(\frac{2\alpha}{10^{10}}\right)\left[\frac{y_2-y_1}{2}\right]+\left(\frac{k}{10^{10}}\right)\left[\frac{y_2}{1}\right]+\left(\frac{8\beta}{10^{10}}\right)\left[\frac{(y_2-y_1)^3}{8}\right]\right.$$

$$\left.+\left(\frac{16\sqrt{\alpha m_1}}{10^9}\right)\left[\frac{\dot{y}_2-\dot{y}_1}{1600}\right]-\left(\frac{F}{10^{10}}\right)\left[\frac{\operatorname{sen}\,(w/500)\,t}{1}\right]\right\}$$

(13)

3.2 - ESCALA DO TEMPO.

O processo escala de amplitudes garante que tôdas as saídas dos amplificadores tenham variações apropriadas. Porém é necessário também que a razão de variação das variáveis do computador esteja de acôrdo com as propriedades dinâmicas do computador e que a solução seja obtida em tempo razoável. Para tanto o tempo de computação foi escolhido como 500 vêzes o tempo real.

O diagrama escalado eq. (13) com a correção do tempo para uso no computador é mostrado nas figs. (10) e (11). Com auxílio dêste diagrama é montado um circuito de blocos.

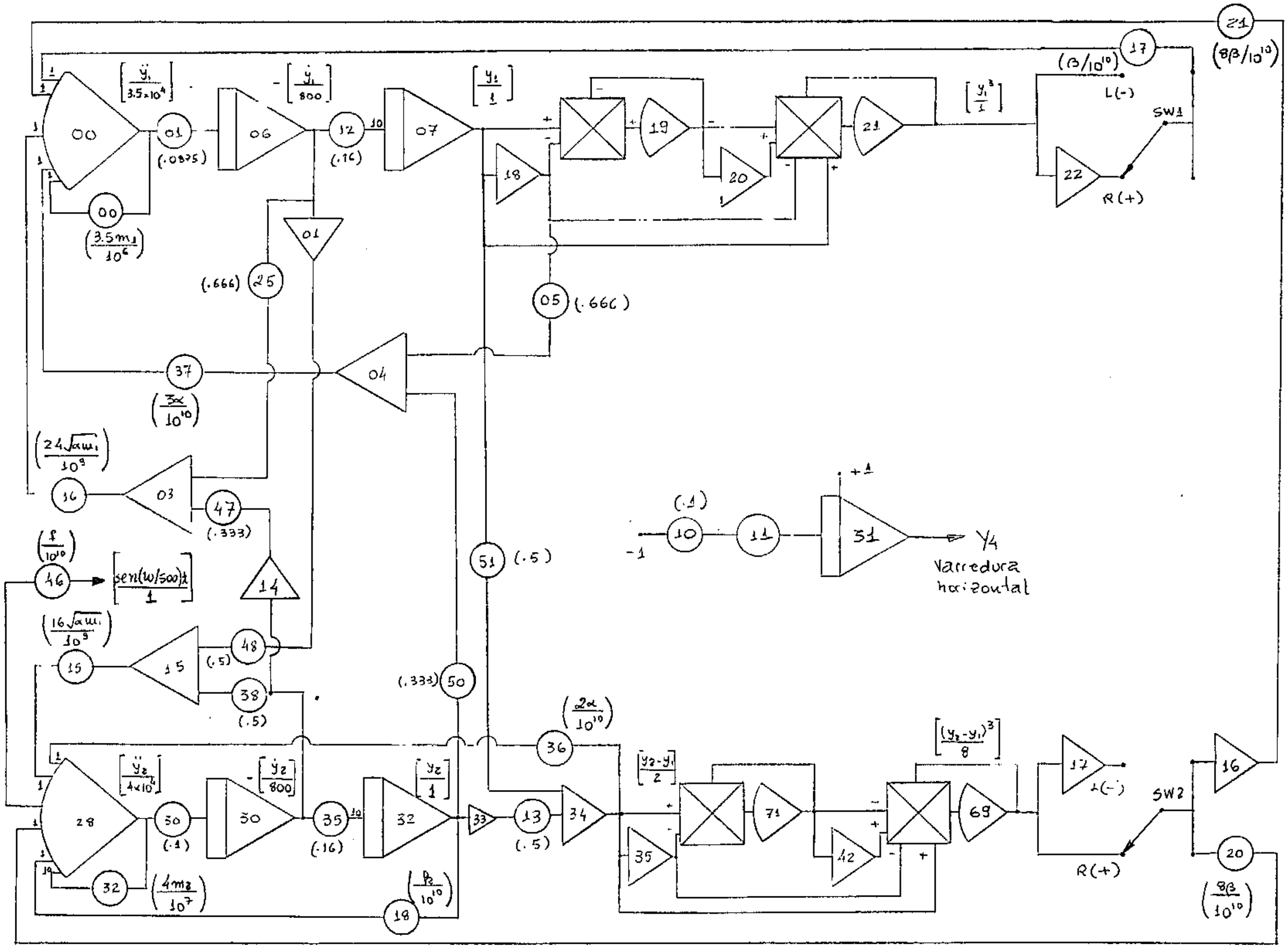


Fig. (10) - Diagrama Escalado das eq. de movimento

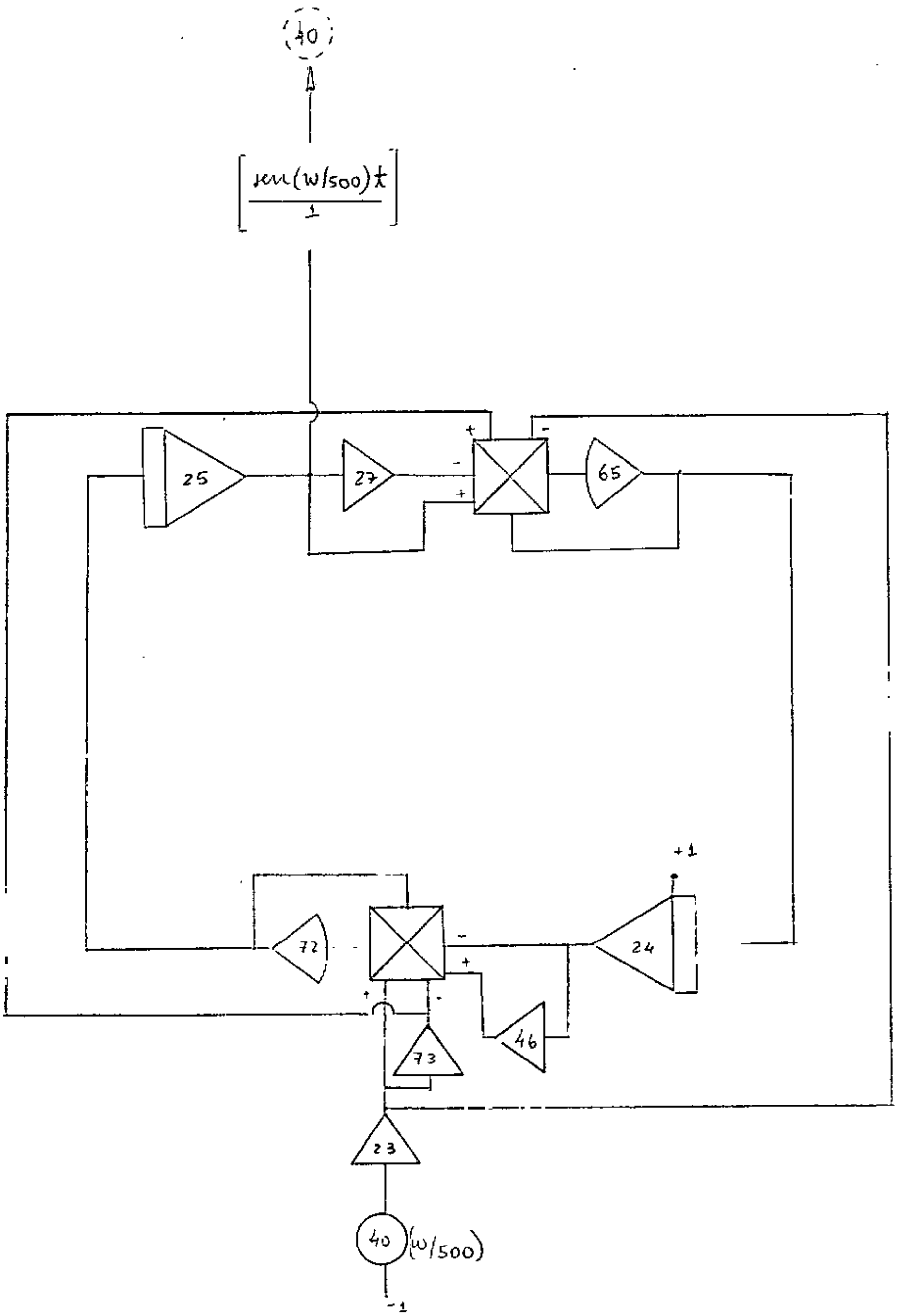


Fig. (11) - Diagrama Escalado de sen wt

A geração da função sen wt com o argumento (w) variável por meio de um atenuador, só foi conseguida satisfatòriamente no computador pelo circuito da fig. (11).

O contrôle das operações dos integradores foi feito por intermédio da unidade DES-30, sendo o diagrama de operação repetitiva representado na fig. (12).

As respostas y_1 e $(y_2 - y_1)$ serão obtidas nas saídas dos amplificadores nºs. 07 e 34, com precisão de ± 0. 005 v.

A precisão de leitura no atenuador(w) é de 0. 0005rd/s.

3. 3 - PROCEDIMENTO PARA OBTENÇÃO DAS RESPOSTAS.

O computador analógico utilizado foi um EAI-TR48 com sistema expansão digital DES-30 (Eletronic Associates, INC, Princeton, New Jersey). Como unidades acessórias : osciloscópio com memória (TEKTRONIX, 564).

O objetivo é obtenção da resposta permanente operando na ressonância. Manter um nível de fôrça variando a relação de massas, obter-se as diferentes frequências de ressonâncias.

3. 4 - DETALHES DE OPERAÇÃO.

a) Com o computador em POT SET são ajustados os atenuadores (potenciômetros) do circuito nos diversos valôres fixados.

b) O computador em HOLD, a unidade DES-30 é ligada, tocando-se os comandos : CLEAR, FAST, 1 KCS, RUN. Por meio de um seletor, escolhe-se o amplificador para o qual é desejada representação na tela do osciloscópio do computador. Observa-se na tela a curva saída amplificador-tempo.

Conectando-se a saída dêste amplificador ao osciloscópio com memória, teremos fixada a imagem dessa curva na tela.

Assim procedendo, obtivemos fotografias que são apresentadas na fig. (13).

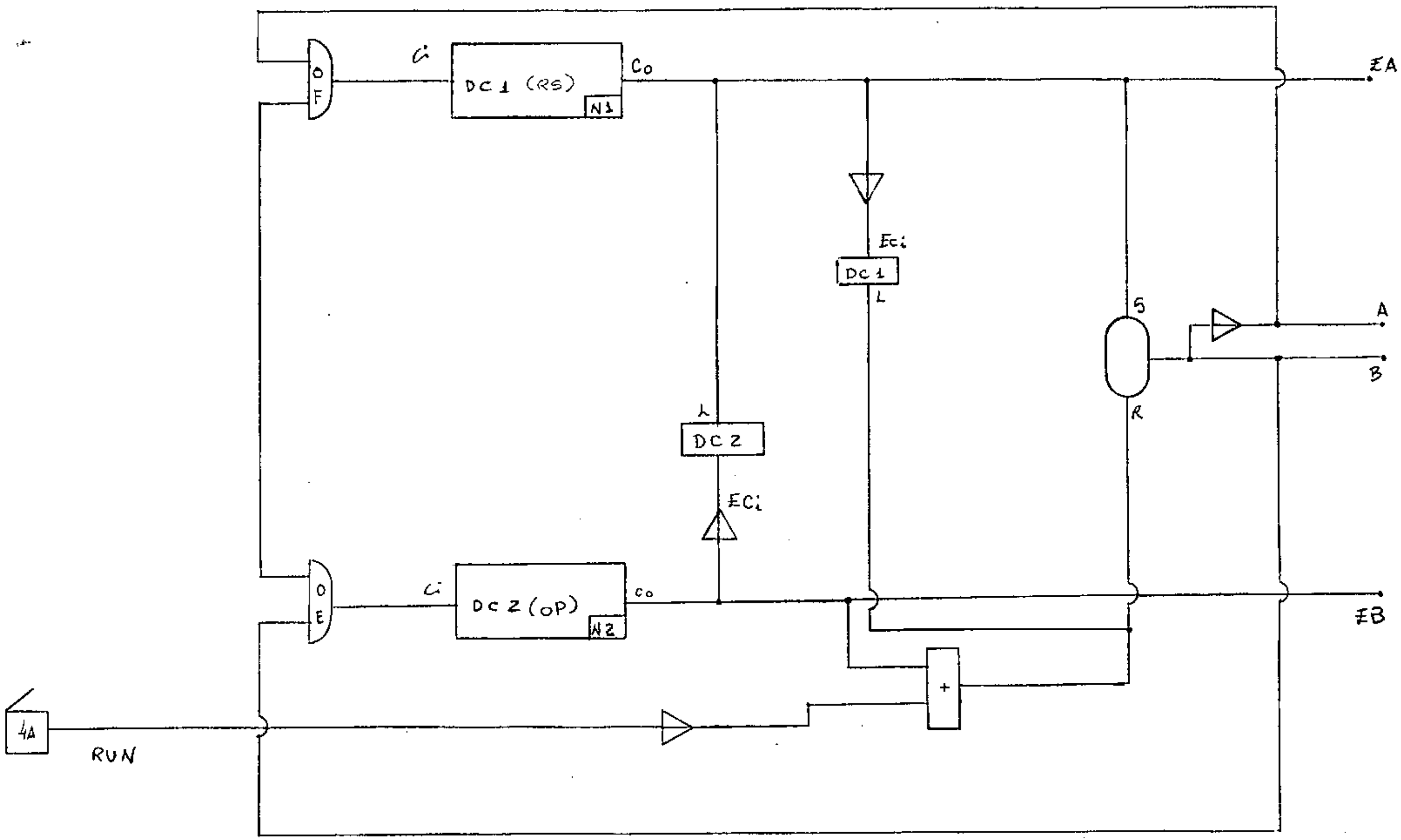


Fig. (12) - Circuito de Comando de Operação Repetitiva (TIMER)

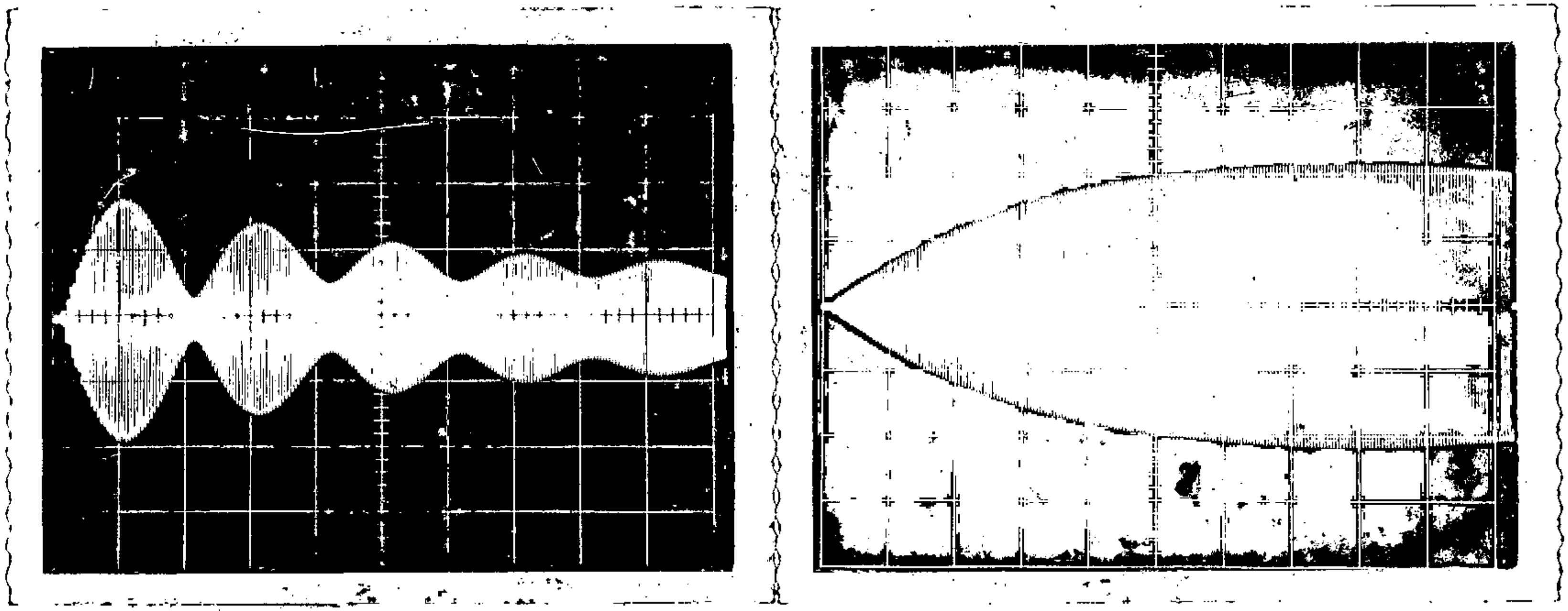


Fig. (13) - Resposta Amplificador nº 34 ($m_2/m_1 = 15$)

$$\frac{y_2 - y_1}{2} \times \text{tempo}$$

Fora da ressonância

Escala.5

Ressonância

Escala 1.

c) Determinado o valor da amplitude de ressonância em unidades de volt , coloca-se o computador em POT SET, desligando-se a unidade DES-30. Lê-se o valor do potenciômetro nº (40) obtendo-se a frequência de ressonância do sistema (w/500).

No diagrama da figura (10) observamos a existência das chaves SW1 e SW2. Na posição RIGHT (+) testamos sistemas com $\beta > 0$, LEFT (−) sistemas com $\beta < 0$ e posição intermediária, $\beta = 0$ (sistemas lineares).

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Na determinação das frequências de ressonâncias no caso não linear, em computador analógico, verificou-se um desvio em frequência no ponto de amplitude máxima. Quando êste era aproximado no sentido das frequências crescentes ou decrescentes. O desvio notado foi da ordem de $\pm$ 0.005rd/s, não sendo observável variação de amplitude nesta faixa de frequência.

O gráfico da figura (14) apresenta as frequências de ressonâncias em função das razões de massas, para as molas de características aí indicadas. Observa-se o pequeno efeito da não linearidade nas frequências, para o nível de fôrça excitadora utilizado. Também a partir da razão de massas $m_2/m_1 = 20$ as frequências f_0 e f_2 se identificam. Para $m_2/m_1 > 20$ a frequência de ressonância será f_2.

Ainda na figura (14) estão representadas as frequências naturais do sistema linear sem amortecimento, para diferentes razões de massas, calculadas em computador digital por intermédio da expressão:

$$\omega^4 - \omega^2 \left[\frac{\alpha}{m_1 . m_2} (2 m_2 + m_1) + \frac{k}{m_2} \right] + \frac{\alpha^2 + 2\alpha k}{m_1 . m_2} = 0$$

A faixa de m_2/m_1 (20, 30) fornece para os casos de não linearidade, frequências de ressonâncias mais altas ($\beta > 0$) que linear, e mais baixas ($\beta < 0$) que linear, confirmando comportamento bem conhecido para sistemas não lineares de um grau de liberdade.

No gráfico da figura (15) está representada a relação de deflexões $|y_1| / |y_2 - y_1|$ em função da razão de massas m_2/m_1, determinadas em computador analógico. Para $m_2/m_1 > 20$ observa-se um aumento progressivo desta relação notadamente quando $\beta = 0$ e principalmente quando $\beta > 0$.

Na figura (16) está o gráfico em que a amplitude $|y_2|$ é função da razão de massas m_2/m_1, resultados obtidos em computador analógico.

As figuras (17) e (18) apresentam as curvas de comparação entre valôres obtidos em computador analógico e analíticos para o caso linear, à mesma frequência de ressonância.

Na solução dos modelos em computador analógico foi pesquisada a faixa de frequências $[0, 2000]$ rd/s, sendo sòmente observadas ressonâncias na faixa $[0, 500]$ rd/s.

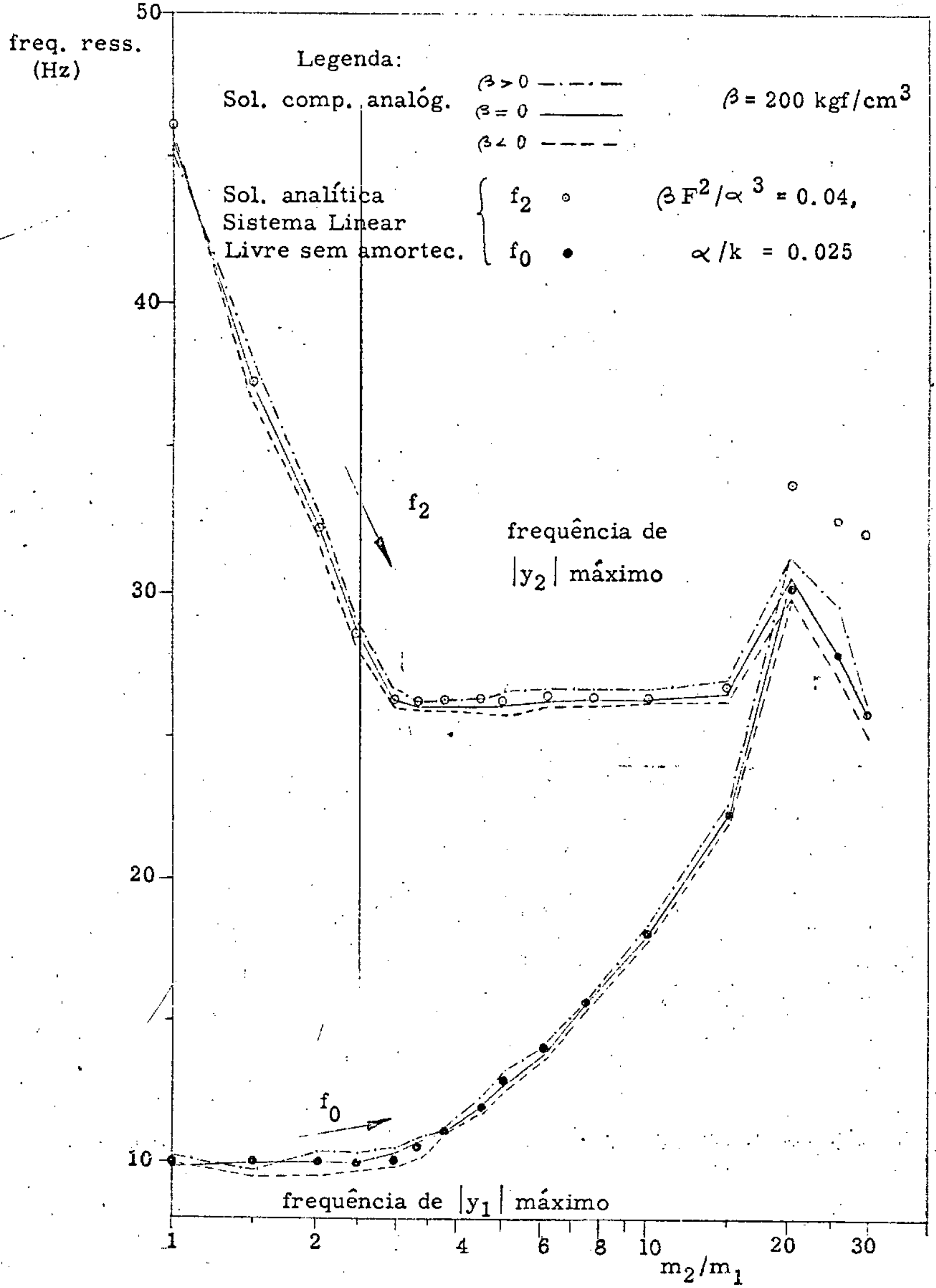


Fig. (14). Frequência de ressonância em função da relação de massas.

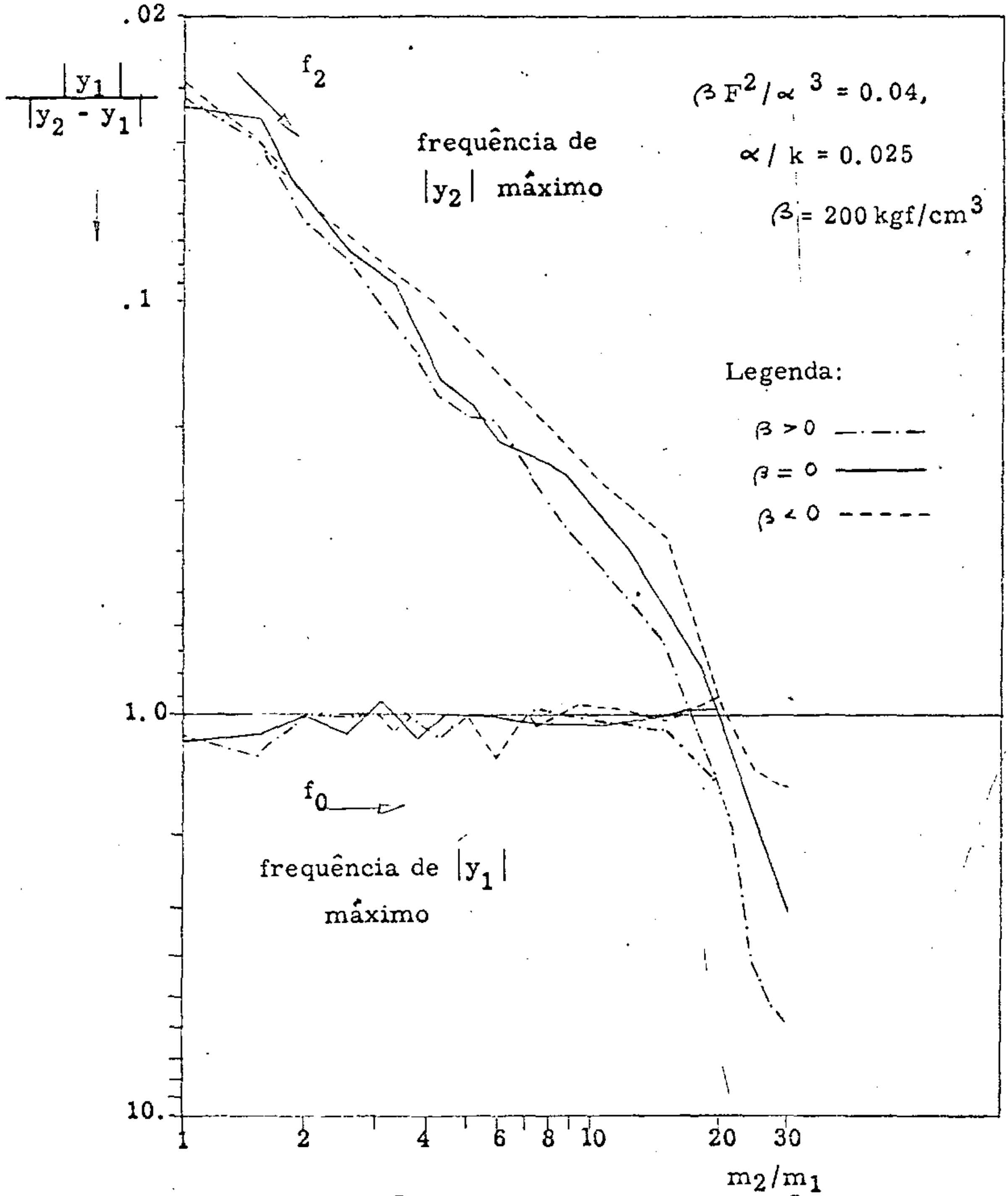


Fig. (15). Razão entre amplitudes de deflexão das molas em função da relação de massas.

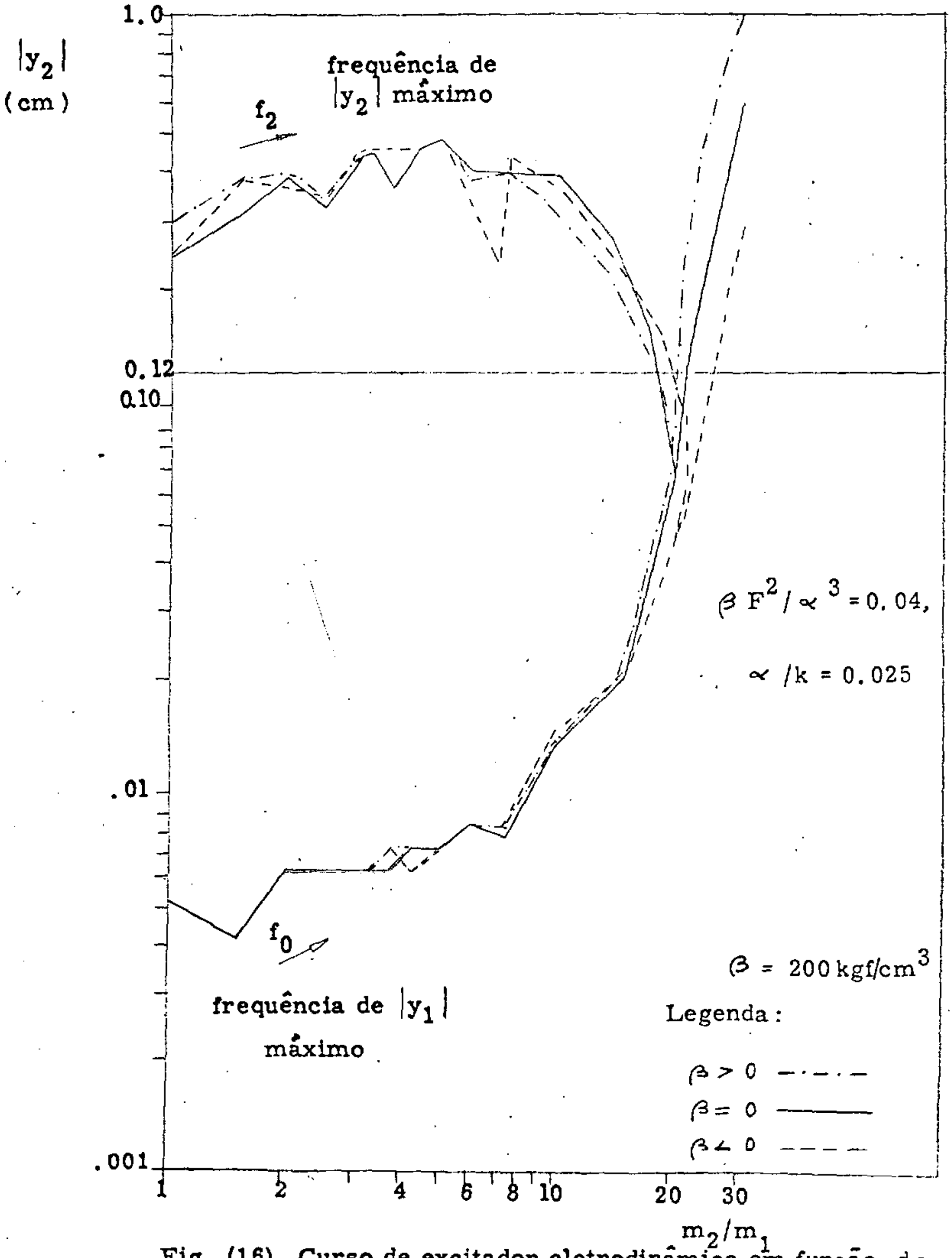


Fig. (16). Curso de excitador eletrodinâmico em função da relação de massas.

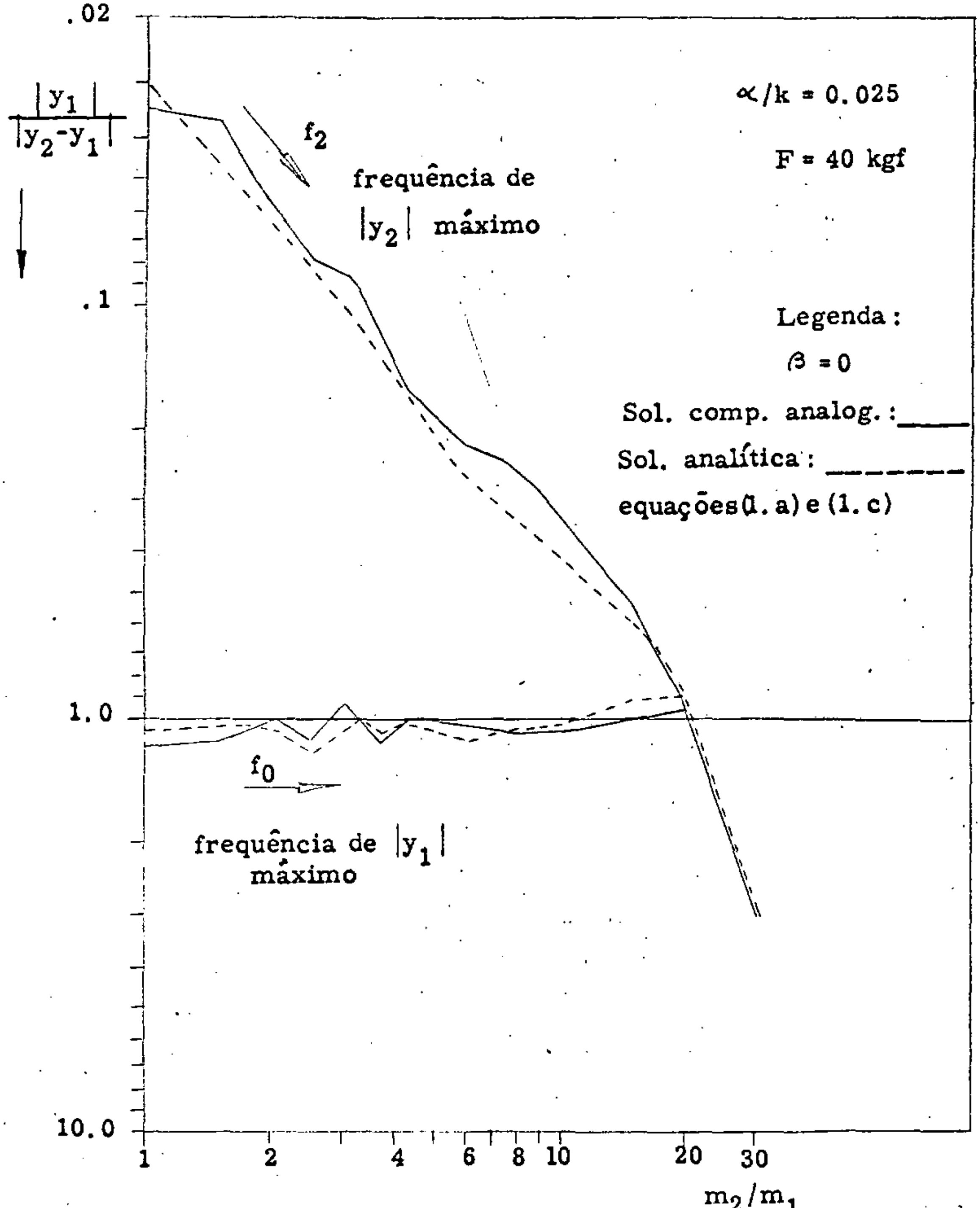


Fig. (17). Razão entre amplitudes de deflexão das molas em função da relação de massas (caso linear).

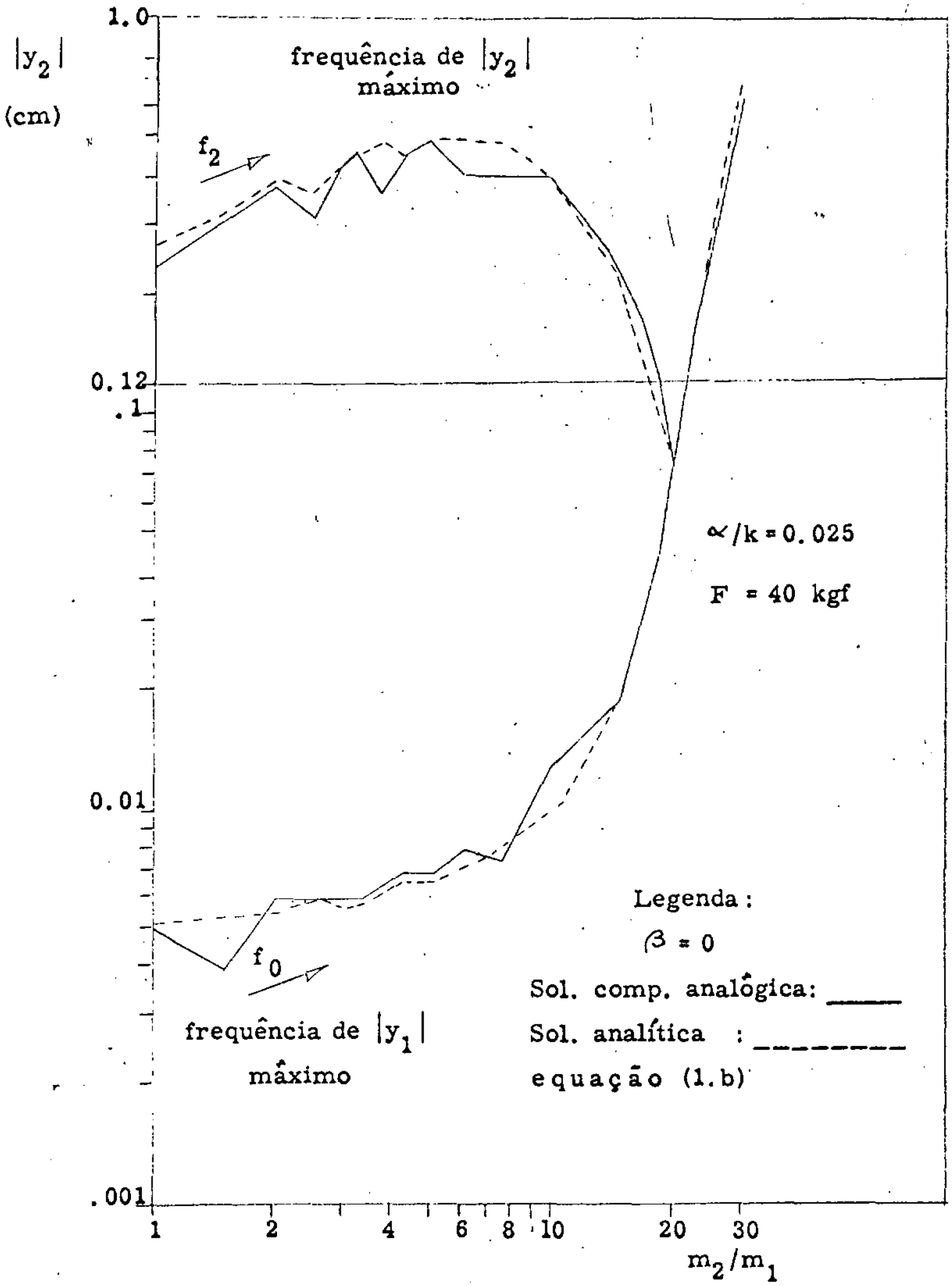


Fig. (18). Curso do excitador eletrodinâmico em função da relação de massas (caso linear).

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

A máquina teste de fadiga deverá operar numa frequência de ressonância que satisfaça às condições de $|y_1| / |y_2-y_1| \geq 1$ e $|y_2| \leq 0.12$ cm, especificada por AMSLER[7].

O gráfico da figura (14) indica que para o nível de fôrça utilizado, a não linearidade pouco afetou às frequências de ressonâncias.

No gráfico da figura (15), vê-se para os casos não linear e linear que até $m_2/m_1 = 20$, sòmente sistemas operando à frequência de ressonância f_0 satisfazem a relação de deflexões requerida.

Para $m_2/m_1 > 20$, a única frequência de ressonância existente, também satisfaz à condição $|y_1|/|y_2-y_1| \geq 1$.

Da figura (16) conclui-se que para as molas testadas, a um nível de fôrça pré-fixado, fica satisfeita a condição de $|y_2| \leq 0.12$ para $m_2/m_1 \leq 20$ operando-se à frequência f_0.

A operação à frequência de ressonância f_2 não satisfaz à condição $|y_2| \leq 0.12$ para os seguintes intervalos de relações de massas: mola linear, $\frac{m_2}{m_1} > 21$ e $\frac{m_2}{m_1} < 18$ ($\beta = 0$), molas não lineares, $\frac{m_2}{m_1} > 20$ e $\frac{m_2}{m_1} < 18$ ($\beta > 0$), $\frac{m_2}{m_1} > 25$ e $\frac{m_2}{m_1} < 20$ ($\beta < 0$).

Para modelos com as características estudadas a frequência a ser utilizada no teste de fadiga deverá ser f_0. Notadamente o ponto onde a relação de massas $m_2/m_1 = 20$ deverá ser escolhido. Isto em virtude de haver uma só frequência de ressonância e serem satisfeitas as condições exigidas.

Por intermédio de simulação em computador analógico, da máquina teste de fadiga, vimos que para casos de não linearidades de molas, o teste é adequado. Em virtude das condições de trabalho especificados por AMSLER[7] serem satisfeitas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. SETO, W. William - Mechanical vibrations, New York, Shaum Publishing Co., 1964, capítulos 2, 6.
2. HENRY, R. F. e TOBIAS, S. A. - Modes at rest and their stability in coupled non-linear systems. Journal Mechanical Engng. Sci, 1961. 3 (nº), 163 - 173.
3. LANDAU et LIFCHITZ - Mécanique, Moscu, Éditions Mir, 1966 2ª edition, capítulo V, páginas 85, 86.
4. BYCROFT, G. N. - Forced oscillations of non-linear two degrees of freedom systems. Journal Mech. Engng. Sci., 1966.8 (nº 3), 252-258
5. CUNNINGHAM, W. J. - Introduction to non-linear analysis, New York MC Graw-Hill Book Company, Inc., 1958, capítulos 4, 6, 7.
6. ARIARATNAM, S. T. - Response of a non-linear system to pulse excitation. Journal Mechanical Engng. Sci. 1964. 6 (nº 1), 26-31
7. AMSLER 1. 13/422 - High Frequency Vibrophores, Alfred y Amsler & Co. Schaffhausen - Switzerland.

REFERÊNCIAS ADICIONAIS

ATKINSON, C. P. - Eletronic analog computer solutions of non-linear vibrations systems of two degrees of freedom. Journal of Applied Mechanics, Dec., 1956, p. 629-634

HARTOG, J. P. Den - Mechanical vibrations, New York, Mc Graw-Hill Book company Inc. 1962, capítulo 2.

Handbook of Analog Computations, Eletronics Associates, Inc. EAI. Princeton, New Jersey, 1965, 2ª edition.

VERNON, B. James - Linear vibration theory: Generalized properties and numerical methods, New York, John Wiley & Sons, INC., 1967, capítulos 1, 2, 3, 6.

Reference Handbook, EAI TR-48, Eletronic Associates, INC EAI, Princeton, New Jersey, 1967. Publ. nº 00800.2008-1.

Digital Expansion System, DES-30, Eletronic Associates, Inc. EAI. 1967. Publ. nº 00800.2042-1.

PACITI, Tercio - Fortran-Monitor Princípios, Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S.A., 1967.

APÊNDICES

APÊNDICE 1

Dedução das equações adimensionais de movimento em função das coordenadas normais lineares .

Sejam
$$y_1 = Q_1 \cos\phi - Q_2 \,\mathrm{sen}\,\psi$$

$$y_2 = Q_1 \,\mathrm{sen}\,\phi + Q_2 \cos\psi$$
, substituindo-se na equação (3) obtém-se :

$$S = A_0 Q_1^2 + A_1 Q_1 Q_2 + A_2 Q_2^2 + B_0 Q_1^4 + B_1 Q_1^3 Q_2 + B_2 Q_1^2 Q_2^2 + B_3 Q_1 Q_2^3 + B_4 Q_2^4 + B_5 Q_1 + B_6 Q_2$$

$$T = C_0 \dot{Q}_1^2 + C_2 \dot{Q}_2^2 \qquad (4)$$

onde $A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots, C_2$ e o coeficiente do têrmo $\dot{Q}_1 \dot{Q}_2$ que é nulo (C_1) , são dados por :

$$A_0 = \alpha \cos^2\phi - \alpha \cos\phi \,\mathrm{sen}\,\phi + 1/2\,(\alpha + k)\,\mathrm{sen}^2\phi$$

$$A_1 = -2\alpha \cos\phi \,\mathrm{sen}\,\psi - \alpha \cos(\phi + \psi) + (\alpha + k)\,\mathrm{sen}\,\phi \cos\psi$$

$$A_2 = \alpha \,\mathrm{sen}^2\psi + \alpha \,\mathrm{sen}\,\psi \cos\psi + 1/2\,(\alpha + k) \cos^2\psi$$

$$B_0 = 1/2\,\beta \cos^4\phi - \beta \cos^3\phi \,\mathrm{sen}\,\phi + 3/2\,\beta \cos^2\phi \,\mathrm{sen}^2\phi + $$
$$- \beta \cos\phi \,\mathrm{sen}^3\phi + 1/4\,\beta \,\mathrm{sen}^4\phi$$

$$B_1 = -2\beta\cos^3\phi\,\mathrm{sen}\,\psi + \beta\cos^2\phi\,(3\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\psi - \cos\phi\cos\psi) + \\ + 3\beta\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi\cos(\phi+\psi) - \beta\,\mathrm{sen}^2\phi\,(3\cos\phi\cos\psi - \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\psi) + \\ + \beta\,\mathrm{sen}^3\phi\cos\psi$$

$$B_2 = +3\beta\cos^2\phi\,\mathrm{sen}^2\psi + 3\beta\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\psi\cos(\phi+\psi) + \\ + 3/2\,\beta\,(\mathrm{sen}^2\phi\,\mathrm{sen}^2\psi - 4\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\psi + \cos^2\phi\cos^2\psi) + \\ - 3\beta\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\psi\cos(\phi+\psi) + 3/2\,\beta\,\mathrm{sen}^2\phi\cos^2\psi$$

$$B_3 = -2\beta\cos\phi\,\mathrm{sen}^3\psi - \beta\,\mathrm{sen}^2\psi\,(3\cos\phi\cos\psi - \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\psi) + \\ - 3\beta\,\mathrm{sen}\,\psi\cos\psi\cos(\phi+\psi) + \beta\cos^2\psi\,(3\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\psi - \cos\phi\cos\psi) + \\ + \beta\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\psi$$

$$B_4 = 1/2\,\beta\,\mathrm{sen}^4\psi + \beta\,\mathrm{sen}^3\psi\cos\psi + 3/2\,\beta\,\mathrm{sen}^2\psi\cos^2\psi + \\ + \beta\,\mathrm{sen}\,\psi\cos\psi + 1/4\,\beta\cos^4\psi$$

$$B_5 = -F\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$B_6 = -F\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$C_0 = 1/2\,m_1\cos^2\phi + 1/2\,m_2\,\mathrm{sen}^2\phi$$

$$C_1 = -m_1\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\psi + m_2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\psi$$

$$C_2 = 1/2\,m_1\,\mathrm{sen}^2\psi + 1/2\,m_2\cos^2\psi$$

A fim de eliminar o têrmo em Q_1Q_2 para desacoplar o sistema linearmente, faz-se $A_1 = 0$, como o têrmo em $\dot{Q}_1\dot{Q}_2$ inexiste, $C_1 = 0$, o que estipula :

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\left[\frac{1}{4} m_1(\alpha+k) - \frac{1}{2} m_2\alpha\right] \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4} m_1(\alpha+k) - \frac{1}{2} m_2\alpha\right]^2 + m_1 m_2 \alpha^2/4}}{-\frac{1}{2} m_2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{m_2}{m_1}\operatorname{tg}\phi$$

As expressões das energias, eq. (4) ficam então definidas para o modêlo em estudo e aplicando a equação de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_r}\right) + \frac{\partial S}{\partial Q_r} = 0 \quad , r = 1, 2$$

teremos determinadas as equações de movimento

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_1} = 2C_0\dot{Q}_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_1}\right) = 2C_0\ddot{Q}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_2} = 2C_2\dot{Q}_2 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_2}\right) = 2C_2\ddot{Q}_2$$

$$2C_0\ddot{Q}_1 + 2A_0Q_1 + 4B_0Q_1^3 + 3B_1Q_1^2Q_2 + 2B_2Q_1Q_2^2 + B_3Q_2^3 + B_5 = 0$$

$$2C_2\ddot{Q}_2 + 2A_2Q_2 + 4B_4Q_2^3 + 3B_3Q_2^2Q_1 + 2B_2Q_2Q_1^2 + B_1Q_1^3 + B_6 = 0 \qquad (5)$$

A fim de adimensionalizar estas equações, introduzimos as novas variáveis:

$$\tau = \left[1/2 \, (A_0/C_0 + A_2/C_2) \right]^{1/2} . t$$

$$p = \frac{Q_1}{L} \qquad\qquad q = \frac{Q_2}{L}$$

onde L é a unidade de comprimento dada por: $L = \sqrt{\alpha/\beta}$

$$B_5 = B_5' \operatorname{sen} \left\{ \frac{\omega}{\left[1/2 \, (A_0/C_0 + A_2/C_2) \right]^{1/2}} \right\} \tau$$

$$B_6 = B_6' \operatorname{sen} \left\{ \frac{\omega}{\left[1/2 \, (A_0/C_0 + A_2/C_2) \right]^{1/2}} \right\} \tau$$

$$B_5' = - F \operatorname{sen} \phi$$

$$B_6' = - F \cos \psi$$

Substituindo êstes valôres na eq. (5) teremos :

$$\ddot{p} + \frac{2 A_0/c_0}{A_0/c_0 + A_2/c_2}\, p + \frac{4 B_0 L^2/c_0}{A_0/c_0 + A_2/c_2}\, p^3 + \frac{3 B_1 L^2/c_0}{A_0/c_0 + A_2/c_2}\, p^2 q +$$

$$+ \frac{2 B_2 L^2/c_0}{A_0/c_0 + A_2/c_2}\, p q^2 + \frac{B_3 L^2/c_0}{A_0/c_0 + A_2/c_2}\, q^3 + \frac{B_5'/L c_0}{A_0/c_0 + A_2/c_2}\, \mathrm{sen} \left\{ \frac{w}{\left[1/2 (A_0/c_0 + A_2/c_2\right]^{1/2}} \right\} \tau$$

$$= 0$$

$$\ddot{q} + \frac{2 A_2/c_2}{A_0/c_0 + A_2/c_2}\, q + \frac{4 B_4 L^2/c_2}{A_0/c_0 + A_2/c_2}\, q^3 + \frac{3 B_3 L^2/c_2}{A_0/c_0 + A_2/c_2}\, q^2 p +$$

$$+ \frac{2 B_2 L^2/c_2}{A_0/c_0 + A_2/c_2}\, q p^2 + \frac{B_1 L^2/c_2}{A_0/c_0 + A_2/c_2}\, p^3 + \frac{B_6'/L c_2}{A_0/c_0 + A_2/c_2}\, \mathrm{sen} \left\{ \frac{w}{\left[1/2 (A_0/c_0 + A_2/c_2\right]^{1/2}} \right\} \tau$$

$$= 0$$

(5. a)

Fazendo-se $$w_1 = \left[\frac{2 A_0/c_0}{A_0/c_0 + A_2/c_2} \right]^{1/2} , \qquad w_2 = \left[\frac{2 A_2/c_2}{A_0/c_0 + A_2/c_2} \right]^{1/2}$$

onde w_1 e w_2 seriam as frequências naturais do primeiro e segundo sistemas em vibrações lineares, desprezando os têrmos não lineares.

Seja Ω_1 uma frequência circular adimensional da fôrça excitadora :

$$\Omega_1 = \frac{w}{\left[1/2\left(A_0/C_0 + A_2/C_2\right)\right]^{1/2}} \quad , \text{ e}$$

$$m_1'' = \frac{3B_1}{4B_0} \quad , \quad n_1' = \frac{2B_2}{4B_0} \quad , \quad s_1' = \frac{B_3}{4B_0} \quad ,$$

$$m_2'' = \frac{3B_3}{4B_4} \quad , \quad n_2' = \frac{2B_4}{4B_4} \quad , \quad s_2' = \frac{B_1}{4B_4} \quad ,$$

$$A_1' = \frac{B_6' / LC_2}{A_0/C_0 + A_2/C_2} \quad , \quad A_2' = \frac{B_5' / LC_0}{A_0/C_0 + A_2/C_2} \quad ,$$

$$\epsilon_1 = \frac{2B_0 L^2}{A_0} \quad , \quad \epsilon_2 = \frac{2B_4 L^2}{A_2}$$

Substituindo-se êstes valôres na equação (5. a) teremos :

$$\ddot{p} + w_1^2 p + \epsilon_1 w_1^2 \left(p^3 + m_1'' p^2 q + n_1' p q^2 + s_1' q^3 \right) = A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau$$

$$\ddot{q} + w_2^2 q + \epsilon_2 w_2^2 \left(q^3 + m_2'' q^2 p + n_2' q p^2 + s_2' p^3 \right) = A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau$$

sendo $\epsilon_1 = \epsilon\, l_1$, $\epsilon_2 = \epsilon\, l_2$ então l_1, l_2 serão tais que : $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{l_1}{l_2}$

logo ϵ representará então a não linearidade para as duas equações, e o sistema de equações precedente ficará :

$$\ddot{p} + w_1^2 p + \epsilon w_1^2 \left(l_1 p^3 + m_1' p^2 q + n_1 p q^2 + s_1 q^3 \right) = A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau$$
$$\ddot{q} + w_2^2 q + \epsilon w_2^2 \left(l_2 q^3 + m_2' q^2 p + n_2 q p^2 + s_2 p^3 \right) = A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau$$

(6)

APÊNDICE 2

Solução pelo método das perturbações, BYCROFT [4].

A equação (7. a) com a introdução das expansões se torna:

$$\frac{x_0'' + \epsilon x_1'' + \cdots}{[1+\epsilon u_1' + \cdots]^2} - \frac{[x_0' + \epsilon x_1' + \cdots][\epsilon u_1'' + \cdots]}{[1+\epsilon u_1' + \cdots]^3} + \omega_1^2 x_0 + \epsilon \omega_1^2 x_1 + \epsilon^2 \omega_1^2 x_2 + \cdots$$

$$+ \epsilon \omega_1^2 \times \left[l_1 \left\{ x_0 + \epsilon x_1 - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 (\xi + \epsilon u_1 + \cdots)}{\Omega_1^2 - \omega_1^2} \right\}^3 + \right.$$

$$+ m_1' \left\{ x_0 + \epsilon x_1 - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 (\xi + \epsilon u_1 + \cdots)}{\Omega_1^2 - \omega_1^2} \right\}^2 \times \left\{ y_0 + \epsilon y_1 + \right.$$

$$\left. - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 (\eta + \epsilon v_1 + \cdots)}{\Omega_1^2 - \omega_2^2} \right\} + u_1 \left\{ x_0 + \epsilon x_1 - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 (\xi + \epsilon u_1 + \cdots)}{\Omega_1^2 - \omega_1^2} \right\} \times$$

$$\times \left\{ y_0 + \epsilon y_1 - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 (\eta + \epsilon v_1 + \cdots)}{\Omega_1^2 - \omega_2^2} \right\}^2 + s_1 \left\{ y_0 + \epsilon y_1 + \cdots + \right.$$

$$\left. \left. - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 (\eta + \epsilon v_1 + \cdots)}{\Omega_1^2 - \omega_2^2} \right\}^3 \right] = 0$$

onde $x = x(\xi)$

$y = y(\eta)$, Entretanto para 1a. ordem :

$$y(\eta) = y(\xi)$$

Igualando à zero os coeficientes de ϵ dos graus zero e um teremos :

$$x_0'' + w_1^2 x_0 = 0 \qquad (8.\,a)$$

$$x_1'' + w_1^2 x_1 = 2u_1' x_0'' + u_1'' x_0' - w_1^2 \left[l_1 \left\{ x_0 - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - w_1^2} \right\}^3 + \right.$$

$$+ m_1' \left\{ x_0 - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - w_1^2} \right\}^2 \left\{ y_0 - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - w_2^2} \right\} +$$

$$\left. + n_1 \left\{ x_0 - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - w_1^2} \right\} \left\{ y_0 - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - w_2^2} \right\}^2 + s_1 \left\{ y_0 - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - w_2^2} \right\}^3 \right]$$

(8. b)

Similarmente (7. b) resultará :

$$y_0'' + w_2^2 y_0 = 0 \qquad (9.\,a)$$

$$y_1'' + w_2^2 y_1 = 2 v_1' y_0'' + v_1'' y_0' - w_2^2 \left[l_2 \left\{ y_0 - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - w_2^2} \right\}^3 + \right.$$

$$+ m_2' \left\{ y_0 - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - w_2^2} \right\}^2 \left\{ x_0 - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - w_1^2} \right\} +$$

$$+ n_2 \left\{ y_0 - \frac{A_2' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - w_2^2} \right\} \left\{ x_0 - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - w_1^2} \right\}^2 +$$

$$+ s_2 \left\{ x_0 - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - w_1^2} \right\}^3 \Bigg] \tag{9.b}$$

condições iniciais:

$$\tau = 0 \rightarrow \qquad p = q = \frac{dp}{d\tau} = \frac{dq}{d\tau} = 0$$

Cálculo de x_0 (ξ): eq (8. a), $x_0'' + w_1^2 x_0 = 0$

$$x_0(\xi) = \frac{x_a'}{w_1} \operatorname{sen} w_1 \xi + x_a \cos w_1 \xi$$

$$p = x - \frac{A_1' \operatorname{sen} \Omega_1 \tau}{\Omega_1^2 - w_1^2}$$

1º têrmo: $\tau = \xi$

$\tau = 0 \rightarrow \xi = 0$

$p = 0 \rightarrow x = 0$

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{dx}{d\xi} - \frac{A_1' \Omega_1}{\Omega_1^2 - w_1^2} \cos \Omega_1 \xi$$

$$\xi = 0 \rightarrow \frac{dp}{d\xi} = 0 \rightarrow x_a' = \frac{A_1' \Omega_1}{\Omega_1^2 - w_1^2} \quad , x_a = 0$$

então : $x_0(\xi) = \dfrac{A_1' \Omega_1}{w_1(\Omega_1^2 - w_1^2)} \operatorname{sen} w_1 \xi$

anàlogamente : eq. (9. a) , $\ddot{y}_0 + w_2^2 y_0 = 0$, resulta :

$$y_0(\eta) = \frac{A_2' \Omega_1}{w_2(\Omega_1^2 - w_2^2)} \operatorname{sen} w_2 \eta$$

Por conveniência Seja

$$K_1 = \frac{A_1'}{\Omega_1^2 - w_1^2} \qquad K_2 = \frac{A_2'}{\Omega_1^2 - w_2^2}$$

$$x_0 = \frac{\Omega_1 K_1}{w_1} \operatorname{sen} w_1 \xi \qquad y_0 = \frac{\Omega_1 K_2}{w_2} \operatorname{sen} w_2 \eta$$

Substituindo-se êsses valôres na eq. (8. b) teremos :

$$x_1'' + w_1^2 x_1 = -2 u_1' w_1 \Omega_1 K_1 \operatorname{sen} w_1 \xi + u_1'' \Omega_1 K_1 \cos w_1 \xi \; +$$

$$- \frac{l_1 K_1^3}{w_1} \Big[\frac{3}{4} \Omega_1^3 \operatorname{sen} w_1 \xi - \frac{\Omega_1^3}{4} \operatorname{sen} 3 w_1 \xi - \frac{3}{2} \Omega_1^2 w_1 \operatorname{sen} \Omega_1 \xi \; +$$

$$+ \frac{3}{4} \Omega_1^2 w_1 \operatorname{sen} (\Omega_1 + 2 w_1) \xi + \frac{3}{4} \Omega_1^2 w_1 \operatorname{sen} (\Omega_1 - 2 w_1) \xi \; +$$

$$+ \frac{3}{2} w_1^2 \Omega_1 \operatorname{sen} w_1 \xi - \frac{3}{4} w_1^2 \Omega_1 \operatorname{sen} (w_1 + 2 \Omega_1) \xi \; +$$

$$- \frac{3}{4} w_1^2 \Omega_1 \, \text{sen} \, (w_1 - 2\Omega_1) \xi \, +$$

$$- \frac{3}{4} w_1^3 \, \text{sen} \, \Omega_1 \xi + \frac{w_1^3}{4} \, \text{sen} \, 3\Omega_1 \xi \Bigg] +$$

$$- \frac{m_1' k_1^2 k_2}{w_2} \Bigg[\Omega_1 \frac{(\Omega_1^2 + w_1^2)}{2} \, \text{sen} \, w_2 \xi - \frac{\Omega_1^3}{4} \, \text{sen} \, (w_2 + 2w_1) \xi \, +$$

$$- \frac{\Omega_1^3}{4} \, \text{sen} \, (w_2 - 2w_1) \xi - \frac{\Omega_1 w_1^2}{4} \, \text{sen} \, (w_2 + 2\Omega_1) \xi \, +$$

$$- \frac{\Omega_1 w_1^2}{4} \, \text{sen} \, (w_2 - 2\Omega_1) \xi - \frac{\Omega_1^2 w_1}{2} \, \text{sen} \, (w_2 + w_1 - \Omega_1) \xi \, +$$

$$- \frac{\Omega_1^2 w_1}{2} \, \text{sen} \, (w_2 - w_1 + \Omega_1) \xi + \frac{\Omega_1^2 w_1}{2} \, \text{sen} \, (w_2 + w_1 + \Omega_1) \xi \, +$$

$$+ \frac{\Omega_1^2 w_1}{2} \, \text{sen} \, (w_2 - w_1 - \Omega_1) \xi - \frac{w_2 (\Omega_1^2 + w_1)^2}{2} \, \text{sen} \, \Omega_1 \xi \, +$$

$$+ \frac{w_2 \Omega_1^2}{4} \, \text{sen} \, (\Omega_1 + 2w_1) \xi + \frac{w_2 \Omega_1^2}{4} \, \text{sen} \, (\Omega_1 - 2w_1) \xi \, +$$

$$+ \frac{w_2 w_1^2}{4} \, \text{sen} \, 3\Omega_1 \xi - \frac{w_2 w_1^2}{4} \, \text{sen} \, \Omega_1 \xi + \frac{w_2 w_1 \Omega_1}{2} \, \text{sen} \, w_1 \xi \, +$$

$$+ \frac{w_2 w_1 \Omega_1}{2} \, \text{sen} \, (2\Omega_1 - w_1) \xi \, +$$

$$- \frac{w_2 w_1 \Omega_1}{2} \, \text{sen} \, (2\Omega_1 + w_1) \xi \, +$$

$$+ \frac{w_2 w_1 \Omega_1}{2} \, \text{sen} \, w_1 \xi \Bigg] +$$

$$-\frac{u_1 w_1 k_1 k_2^2}{w_2^2}\left[\frac{\Omega_1(\Omega_1^2+w_2^2)}{2}\operatorname{sen} w_1\xi+\right.$$

$$-\frac{\Omega_1^3}{4}\operatorname{sen}(w_1+2w_2)\xi-\frac{\Omega_1^3}{4}\operatorname{sen}(w_1-2w_2)\xi+$$

$$-\frac{\Omega_1 w_2^2}{4}\operatorname{sen}(w_1+2\Omega_1)\xi-\frac{\Omega_1 w_2^2}{4}\operatorname{sen}(w_1-2\Omega_1)\xi+$$

$$-\frac{\Omega_1^2 w_2}{2}\operatorname{sen}(w_1+w_2-\Omega_1)\xi-\frac{\Omega_1^2 w_2}{2}\operatorname{sen}(w_1-w_2+\Omega_1)\xi+$$

$$+\frac{\Omega_1^2 w_2}{2}\operatorname{sen}(w_1+w_2+\Omega_1)\xi+\frac{\Omega_1^2 w_2}{2}\operatorname{sen}(w_1-w_2-\Omega_1)\xi+$$

$$-\frac{w_1(\Omega_1^2+w_2^2)}{2}\operatorname{sen}\Omega_1\xi+\frac{w_1\Omega_1^2}{4}\operatorname{sen}(\Omega_1+2w_2)\xi+$$

$$+\frac{w_1\Omega_1^2}{4}\operatorname{sen}(\Omega_1-2w_2)\xi+\frac{w_1 w_2^2}{4}\operatorname{sen}3\Omega_1\xi+$$

$$-\frac{w_1 w_2^2}{4}\operatorname{sen}\Omega_1\xi+\frac{w_1 w_2\Omega_1}{4}\operatorname{sen} w_2\xi+$$

$$-\frac{w_1 w_2\Omega_1}{2}\operatorname{sen} w_2\xi+$$

$$-\frac{w_1 w_2\Omega_1}{2}\operatorname{sen}(2\Omega_1+w_2)\xi+$$

$$\left.+\frac{w_1 w_2\Omega_1}{2}\operatorname{sen} w_2\xi\right]+$$

$$- \frac{S_1 w_1^2 K_2^3}{w_2^3} \Bigg[\frac{3}{4} \Omega_1^3 \operatorname{sen} w_2 \xi - \frac{\Omega_1^3}{4} \operatorname{sen} 3 w_2 \xi +$$

$$- \frac{3}{2} \Omega_1^2 w_2 \operatorname{sen} \Omega_1 \xi + \frac{3}{4} \Omega_1^2 w_2 \operatorname{sen} (\Omega_1 + 2 w_2) \xi +$$

$$+ 3/4 \; \Omega_1^2 w_2 \operatorname{sen} (\Omega_1 - 2 w_2) \xi +$$

$$+ \frac{3}{2} w_2^2 \Omega_1 \operatorname{sen} w_2 \xi - \frac{3}{4} w_2^2 \Omega_1 \operatorname{sen} (w_2 + 2 \Omega_1) \xi +$$

$$- \frac{3}{4} w_2^2 \Omega_1 \operatorname{sen} (w_2 - 2 \Omega_1) \xi +$$

$$- \frac{3}{4} w_2^3 \operatorname{sen} \Omega_1 \xi + \frac{w_2^3}{4} \operatorname{sen} 3 \Omega_1 \xi \Bigg]$$

(10)

Se os têrmos com freqüência angular w1 na equação (10) são agrupados e igualados a zero, resultará a equação diferencial seguinte:

$$u_1'' \Omega_1 k_1 \cos w_1 \xi - 2u_1' w_1 \Omega_1 k_1 \operatorname{sen} w_1 \xi = \left[\frac{3 l_1 k_1^3 \Omega_1^3}{4 w_1} + \frac{3 l_1 k_1^3 w_1^2 \Omega_1}{2 w_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{n_1 w_1 k_1 k_2^2}{w_2^2} \cdot \frac{\Omega_1 (\Omega_1^2 + w_2^2)}{2} \right] \operatorname{sen} w_1 \xi$$

Esta equação poderá ser resolvida formalmente ou por inspeção resultando

$$u_1(\xi) = -\left[\frac{3 l_1 k_1^2 \Omega_1^2}{8 w_1^2} + \frac{3 l_1 k_1^2}{4} + \frac{u_1 (\Omega_1^2 + w_2^2) k_2^2}{4 w_2^2} \right] \xi$$

Cálculo de x_1 (ξ): A equação (10) sem os têrmos seculares terá seus têrmos à direita da forma: $\sum_{n=1}^{N} P_n \operatorname{sen} \phi_n \xi$. Então terá solução do tipo

$$x_1(\xi) = A \operatorname{sen} w_1 \xi + B \cos w_1 \xi + \sum_{u=1}^{N} \frac{P_u \operatorname{sen} \phi_u \xi}{w_1^2 - \phi_u^2} \qquad \phi_u \neq w_1$$

onde A e B são constantes, introduzindo as condições iniciais

$$\tau = 0 \quad , \xi = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0$$

$$x_1'(0) = A w_1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{P_n \phi_n}{w_1^2 - \phi_n^2}$$

No caso de sistema com um grau de liberdade, a eq (8.b) resultante terá solução:

$$x_1(\xi) = \frac{u_1(\xi) A_1' \Omega_1 \operatorname{sen} w_1 \xi}{(\Omega_1^2 - w_1^2) w_1}$$

$$\rightarrow \quad x_1'(0) = \frac{u_1'(0) A_1' \Omega_1}{\Omega_1^2 - w_1^2}$$

Igualando as duas expressões obtidas para x_1' (0), teremos:

$$A = \frac{A_1' \Omega_1 u_1'(0)}{w_1(\Omega_1^2 - w_1^2)} - \frac{1}{w_1} \sum_{n=1}^{N} \frac{P_n \phi_n}{w_1^2 - \phi_n^2}$$

$$x_1(\xi) = \frac{A_1' \Omega_1 u_1'(0)}{w_1(\Omega_1^2 - w_1^2)} \operatorname{sen} w_1 \xi - \frac{1}{w_1} \sum_{n=1}^{N} \frac{P_n \phi_n}{w_1^2 - \phi_n^2} \operatorname{sen} w_1 \xi +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \frac{P_n \operatorname{sen} \phi_n \xi}{w_1^2 - \phi_n^2}$$

A resposta x (ξ) terá então a expressão:

$$x(\xi) = \left[\frac{-A_1' \Omega_1}{w_1(\Omega_1^2 - w_1^2)} \left\{ \frac{3 l_1 k_1^2 \Omega_1^2}{8 w_1^2} + \frac{3 l_1 k_1^2}{4} + \frac{n_1(\Omega_1^2 + w_2^2) k_2^2}{4 w_2^2} \right\} \operatorname{sen} w_1 \xi + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{w_1} \sum_{n=1}^{N} \frac{P_n \phi_n}{w_1^2 - \phi_n^2} \operatorname{sen} w_1 \xi + \sum_{n=1}^{N} \frac{P_n \operatorname{sen} \phi_n \xi}{w_1^2 - \phi_n^2} \right] \epsilon + \frac{A_1' \Omega_1}{w_1(\Omega_1^2 - w_1^2)} \operatorname{sen} w_1 \xi$$

com o tempo adimensional dado por:

$$\tau = \left[1 - \epsilon \left\{ \frac{3 l_1 k_1^2 \Omega_1^2}{8 w_1^2} + \frac{3 l_1 k_1^2}{4} + \frac{n_1(\Omega_1^2 + w_2^2) k_2^2}{4 w_2^2} \right\} \right] \xi$$

Adotando idêntico procedimento à coordenada y_1 (η), como foi feito a x_1 (ξ), a equação (9.b) resulta:

$$y_1'' + w_2^2 y_1 = -2 v_1' w_2 \Omega_1 k_2 \operatorname{sen} w_2 \eta + v_1'' \Omega_1 k_2 \cos w_2 \eta +$$

$$- \frac{l_2 k_2^3}{w_2} \left[3/4\, \Omega_1^3 \operatorname{sen} w_2 \eta - \Omega_1^3/4 \operatorname{sen} 3 w_2 \eta - 3/2\, \Omega_1^2 w_2 \operatorname{sen} \Omega_1 \eta + \right.$$

$$+\frac{3}{4}\Omega_1^2 w_2 \operatorname{sen}(\Omega_1+2w_2)\eta+\frac{3}{4}\Omega_1^2 w_2 \operatorname{sen}(\Omega_1-2w_2)\eta+$$

$$+\frac{3}{2} w_2^2\Omega_1 \operatorname{sen} w_2\eta-\frac{3}{4}w_2^2\Omega_1 \operatorname{sen}(w_2+2\Omega_1)\eta+$$

$$-\frac{3}{4}w_2^2\Omega_1 \operatorname{sen}(w_2-2\Omega_1)\eta+$$

$$\left.-\frac{3}{4}w_2^3 \operatorname{sen}\Omega_1\eta+\frac{w_2^3}{4}\operatorname{sen} 3\Omega_1\eta\right]+$$

$$-\frac{m_2^1 k_2^2 k_1}{w_1}\left[\Omega_1\frac{(\Omega_1^2+w_2^2)}{2}\operatorname{sen} w_1\eta+\right.$$

$$-\frac{\Omega_1^3}{4}\operatorname{sen}(w_1+2w_2)\eta-\frac{\Omega_1^3}{4}\operatorname{sen}(w_1-2w_2)\eta+$$

$$-\frac{\Omega_1 w_2^2}{4}\operatorname{sen}(w_1+2\Omega_1)\eta-\frac{\Omega_1 w_2^2}{4}\operatorname{sen}(w_1-2\Omega_1)\eta+$$

$$-\frac{\Omega_1^2 w_2}{2}\operatorname{sen}(w_1+w_2-\Omega_1)\eta-\frac{\Omega_1^2 w_2}{2}\operatorname{sen}(w_1-w_2+\Omega_1)\eta+$$

$$+\frac{\Omega_1^2 w_2}{2}\operatorname{sen}(w_1+w_2+\Omega_1)\eta+\frac{\Omega_1^2 w_2}{2}\operatorname{sen}(w_1-w_2-\Omega_1)\eta+$$

$$-\frac{w_1(\Omega_1^2+w_2^2)}{2}\operatorname{sen}\Omega_1\eta+\frac{w_1\Omega_1^2}{4}\operatorname{sen}(\Omega_1+2w_2)\eta+$$

$$+\frac{w_1\Omega_1^2}{4}\operatorname{sen}(\Omega_1-2w_2)\eta+\frac{w_1 w_2^2}{4}\operatorname{sen} 3\Omega_1\eta+$$

$$-\frac{w_1 w_2^2}{4}\operatorname{sen}\Omega_1\eta+\frac{w_1 w_2\Omega_1}{2}\operatorname{sen} w_2\eta+\frac{w_1 w_2\Omega_1}{2}\operatorname{sen}(2\Omega_1-w_2)\eta+$$

$$\left.-\frac{w_1 w_2\Omega_1}{2}\operatorname{sen}(2\Omega_1+w_2)\eta+\frac{w_1 w_2\Omega_1}{2}\operatorname{sen} w_2\eta\right]+$$

$$-\frac{n_2 w_2 k_2 k_1^2}{w_1^2}\left[\frac{\Omega_1(\Omega_1^2+w_1^2)}{2}\,\mathrm{sen}\, w_2\eta\; + \right.$$

$$-\frac{\Omega_1^3}{4}\,\mathrm{sen}\,(w_2+2w_1)\eta-\frac{\Omega_1^3}{4}\,\mathrm{sen}\,(w_2-2w_1)\eta +$$

$$-\frac{\Omega_1 w_1^2}{4}\,\mathrm{sen}\,(w_2+2\Omega_1)\eta-\frac{\Omega_1 w_1^2}{4}\,\mathrm{sen}\,(w_2-2\Omega_1)\eta +$$

$$-\frac{\Omega_1^2 w_1}{2}\,\mathrm{sen}\,(w_2+w_1-\Omega_1)\eta-\frac{\Omega_1^2 w_1}{2}\,\mathrm{sen}\,(w_2-w_1+\Omega_1)\eta +$$

$$+\frac{\Omega_1^2 w_1}{2}\,\mathrm{sen}\,(w_2+w_1+\Omega_1)\eta+\frac{\Omega_1^2 w_1}{2}\,\mathrm{sen}\,(w_2-w_1-\Omega_1)\eta +$$

$$-\frac{w_2(\Omega_1^2+w_1^2)}{2}\,\mathrm{sen}\,\Omega_1\eta+\frac{w_2\Omega_1^2}{4}\,\mathrm{sen}\,(\Omega_1+2w_2)\eta +$$

$$+\frac{w_2\Omega_1^2}{4}\,\mathrm{sen}\,(\Omega_1-2w_1)\eta+\frac{w_2 w_1^2}{4}\,\mathrm{sen}\,3\Omega_1\eta +$$

$$-\frac{w_2 w_1^2}{4}\,\mathrm{sen}\,\Omega_1\eta+\frac{w_2 w_1\Omega_1}{2}\,\mathrm{sen}\,w_1\eta +$$

$$+\frac{w_1 w_2\Omega_1}{2}\,\mathrm{sen}\,(2\Omega_1-w_1)\eta +$$

$$-\frac{w_1 w_2\Omega_1}{2}\,\mathrm{sen}\,(2\Omega_1+w_1)\eta +$$

$$\left.+\frac{w_1 w_2\Omega_1}{2}\,\mathrm{sen}\,w_1\eta\right] +$$

$$
-\frac{S_2 w_2^2 K_1^3}{w_1^3}\Big[\ \frac{3}{4}\Omega_1^3 \operatorname{sen} w_1\eta - \frac{\Omega_1^3}{4} \operatorname{sen} 3w_1\eta +
$$

$$
-\frac{3}{2}\Omega_1^2 w_1 \operatorname{sen}\Omega_1\eta + \frac{3}{4}\Omega_1^2 w_1 \operatorname{sen}(\Omega_1 + 2w_1)\eta +
$$

$$
+\frac{3}{4}\Omega_1^2 w_1 \operatorname{sen}(\Omega_1 - 2w_1)\eta +
$$

$$
+\frac{3}{2} w_1^2 \Omega_1 \operatorname{sen} w_1\eta - \frac{3}{4} w_1^2 \Omega_1 \operatorname{sen}(w_1 + 2\Omega_1)\eta +
$$

$$
-\frac{3}{4} w_1^2 \Omega_1 \operatorname{sen}(w_1 - 2\Omega_1)\eta +
$$

$$
-\frac{3}{4} w_1^3 \operatorname{sen}\Omega_1\eta + \frac{w_1^3}{4} \operatorname{sen} 3\Omega_1\eta \Big]
$$

(11)

Cálculo de $v_1(\eta)$.

Eliminando os têrmos seculares da equação precedente teremos :

$$v_1'' \Omega_1 k_2 \cos w_2\eta - 2 v_1' w_2 \Omega_1 k_2 \operatorname{sen} w_2\eta = \left[\frac{3 l_2 k_2^3 \Omega_1^3}{4 w_2} + \frac{3 l_2 k_2^3 w_2^2 \Omega_1}{2 w_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{n_2 w_2 k_2 k_1^2}{w_1^2} \cdot \frac{\Omega_1(\Omega_1^2 + w_1^2)}{2} \right] \operatorname{sen} w_2\eta$$

Esta equação resolvida fornece :

$$v_1(\eta) = -\left[\frac{3 l_2 k_2^2 \Omega_1^2}{8 w_2^2} + \frac{3 l_2 k_2^2}{4} + \frac{n_2(\Omega_1^2 + w_1^2) k_1^2}{4 w_1^2} \right] \eta$$

Cálculo de $y_1(\eta)$: A equação (11) terá têrmos à direita da forma :

$$\sum_{n=1}^{N} Q_n \operatorname{sen} \phi_n' \eta$$

terá solução do tipo :

$$y_1(\eta) = A' \operatorname{sen} w_2\eta + B' \cos w_2\eta + \sum_{n=1}^{N} \frac{Q_n \operatorname{sen} \phi_n' \eta}{w_2^2 - \phi_n'^2} \qquad \phi_n' \neq w_2$$

Introduzindo as condições iniciais obtemos:

$$\tau = 0 \quad , \eta = 0 \quad \rightarrow \quad B' = 0$$

$$y_1'(0) = A' w_2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{Q_n \phi_n'}{w_2^2 - \phi_n'^2}$$

No caso de sistema com um gráu de liberdade, a eq (9.b) tem solução:

$$y_1(\eta) = \frac{v_1(\eta) A_2' \Omega_1 \operatorname{sen} w_2 \eta}{(\Omega_1^2 - w_2^2) w_2}$$

$$y_1'(0) = \frac{v_1'(0) A_2' \Omega_1}{\Omega_1^2 - w_2^2}$$

Igualando-se as duas expressões obtidas para $y_1'(0)$, teremos:

$$A' = \frac{A_2' \Omega_1 v_1'(0)}{w_2(\Omega_1^2 - w_2^2)} - \frac{1}{w_2} \sum_{n=1}^{N} \frac{Q_n \phi_n'}{w_2^2 - \phi_n'^2}$$

A resposta y (η) terá a expressão:

$$y(\eta) = \left[\frac{-A_2' \Omega_1}{w_2(\Omega_1^2 - w_2^2)} \left\{ \frac{3\ell_2 k_2^2 \Omega_1^2}{8 w_2^2} + \frac{3\ell_2 k_2^2}{4} + \frac{n_2(\Omega_1^2 + w_1^2) k_1^2}{4 w_1^2} \right\} \operatorname{sen} w_2 \eta + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{w_2} \sum_{n=1}^{N} \frac{Q_n \phi_n'}{w_2^2 - \phi_n'^2} \operatorname{sen} w_2 \eta + \sum_{n=1}^{N} \frac{Q_n \operatorname{sen} \phi_n' \eta}{w_2^2 - \phi_n'^2} \right] \epsilon + \frac{A_2' \Omega_1}{w_2(\Omega_1^2 - w_2^2)} \operatorname{sen} w_2 \eta$$

e o tempo será dado por:

$$\tau = \left[1 - \epsilon \left\{ \frac{3\ell_2 k_2^2 \Omega_1^2}{8 w_2^2} + \frac{3\ell_2 k_2^2}{4} + \frac{n_2(\Omega_1^2 + w_1^2) k_1^2}{4 w_1^2} \right\} \right] \eta$$

APÊNDICE 3

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
(1)	Máquina - Teste	2
(2)	Modêlo Matemático	2
(3)	Características das molas não lineares	4
(4)	Modêlo linear com amortecimento	5
(5. a, b)	Curvas resposta-frequência para sistema de dois graus de liberdade	9
(6)	Modêlo com fôrças restauradoras não lineares ...	12
(7)	Modêlo não linear com amortecimento	19
(8)	Diagrama não escalado das equações de movimento	20
(9)	Diagrama não escalado de Senwt	21
(10)	Diagrama escalado das equações de movimento ..	25
(11)	Diagrama escalado de Senwt	26
(12)	Circuito de comando de operação repetitiva, Timer	28
(13)	Resposta amplificador nº 34	29
(14)	Frequências de ressonâncias em função da relação de massas	33
(15)	Razão entre amplitudes de deflexão das molas, em função da relação de massas	34
(16)	Curso do excitador eletrodinâmico em função da relação de massas	35
(17)	Razão entre amplitudes de deflexão das molas, em função da relação de massas (caso linear)	36
(18)	Curso do excitador eletrodinâmico em função da relação de massas (caso linear)	37

APÊNDICE 4

SIMBOLOGIA

A, A'	real de $\Delta \overline{Y}_1$, $\overline{Y}_1$
A_0, A_1, A_2	coeficientes das expressões das energias, apêndice (1).
B, B'	imaginário de $\overline{Y}_1$, $\overline{Y}_1$
B_0, ..., B_6	coeficientes das expressões das energias, apêndice (1).
c	coeficiente de amortecimento.
C, c'	real de $\Delta \overline{Y}_2$, $\overline{Y}_2$
C_r	coeficiente de amortecimento de referência
C_0, C_1, C_2	coeficientes das expressões das energias, apêndice (1).
D, D'	imaginário de $\Delta \overline{Y}_2$, $\overline{Y}_2$
F	fôrça excitadora
f_0, f_1, f_2	frequências definidas no cap. (2)
k	constante da mola constituinte da máquina
L	unidade de comprimento, $L = \sqrt{\alpha / \beta}$
m_1, m_2	massas
$''$, m_2'', m_1', m_2'	coeficientes determinados no apêndice (1)
, n_2', n_1, n_2	
p, q	coordenadas adimensionais
$\dot{p}$, $\dot{q}$	velocidade
$\ddot{p}$, $\ddot{q}$	acelerações
Q_1, Q_2	coordenadas normais
$\dot{Q}_1$, $\dot{Q}_2$	velocidades
$\ddot{Q}_1$, $\ddot{Q}_2$	acelerações
S	energia potencial
$_1'$, S_2', S_1, S_2	coeficientes determinados no apêndice (1)

T	energia cinética
t	tempo
u	real de $\overline{Y}_2 - \overline{Y}_1$
$u_1(\xi), u_2(\xi), \ldots$	funções com objetivo de anular os têrmos seculares
v	imaginário de $\overline{Y}_2 - \overline{Y}_1$
$v_1(\eta), v_2(\eta), \ldots$	funções com objetivo de anular os têrmos seculares
X	real de Δ
x	variável obtida por transformação de coordenadas na eq (6).
$x_0(\xi), x_1(\xi), \ldots$	funções definidas no cap. (2)
Y	imaginário de Δ
y	variável obtida por transformação de coordenadas na eq (6).
$\overline{Y}_1, \overline{Y}_2$	deslocamentos sob forma de nº complexo
y_1, y_2	coordenadas inerciais de movimento
$\dot{y}_1, \dot{y}_2$	velocidades
$\ddot{y}_1, \ddot{y}_2$	acelerações
$y_0(\eta), y_1(\eta), \ldots$	funções definidas no cap. (2)
$\lvert y_1 \rvert, \lvert y_2 \rvert$	amplitudes de y_1, y_2
w	frequência de excitação
w_1, w_2	frequências definidas no apêndice (1)
α	constante da mola a testar
β	fator de não linearidade
Δ	determinante principal sistema linear
$\Delta\overline{Y}_1, \Delta\overline{Y}_2$	determinantes do sistema, cap. (2)
ϵ	coeficiente representante da não linearidade, apêndice (1).
ϵ_1, ϵ_2	coeficientes representando não linearidade, apêndice (1).
ξ	fator de amortecimento

η, ξ	variáveis ligados ao tempo τ em forma de séries, cap. (2)
τ	tempo adimensional
ϕ	argumento de transformação de coordenadas inerciais em normais
ϕ_1, ϕ_2	ângulos de fase.
ψ	argumento de transformação de coordenadas inerciais em normais.
Ω_1	frequência circular.