

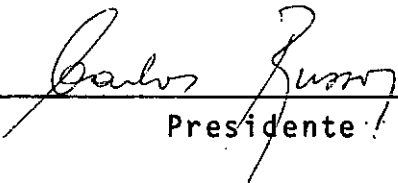
EFEITOS VISCOSOS EM CILINDROS IMERSOS

EM FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS

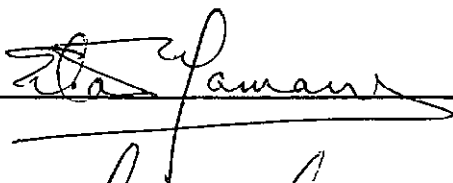
FABRICIO DA SILVA NEVES

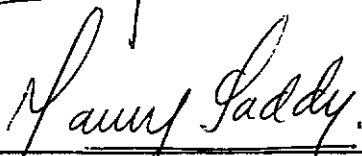
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).


Aprovada por:



Presidente







RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
JUNHO DE 1972

À Thais,
meus pais e irmãos

AGRADECIMENTOS

Aos Professores CARLOS RUSSO e MAURY SADDY pela escolha e orientação deste trabalho.

Ao Professor MARTIN SCHMAL pela valiosa colaboração.

À CAPES e COPPE pelo apoio financeiro.

À Sra. WANDA F. ROCHA pela datilografia.

À DINÁ e EDUARDO pelos desenhos.

SUMÁRIO

A aproximação dada por Pohlhausen para o perfil de velocidade dentro da camada limite, foi usada para resolver o problema de uma interface bidimensional imersa num fluido não-Newtoniano, descrito pelo modelo "power law".

Diversos valores do índice de comportamento do escoamento foram considerados e resultados para três valores diferentes são apresentados, incluindo o caso de fluidos Newtonianos ($n=1$). Foi imposta a condição de deslizamento na interface. Esta condição, foi introduzida através do parâmetro adimensional k , que é a razão entre a velocidade de deslizamento e a velocidade do escoamento externo. Resultados foram também obtidos para o escoamento em torno de um corpo sólido, onde não temos a condição de deslizamento ($k=0$).

Grandezas importantes de camada limite tais como espessura de deslocamento, espessura da quantidade de movimento e coeficiente de arraste foram determinadas, como função dos parâmetros do escoamento.

Valores extrapolados do ângulo de separação, para o caso de fluidos Newtonianos, estão bem de acordo com os valores encontrados na literatura e situam-se em torno de 108° . Sob as mesmas condições, os resultados para fluidos não-Newtonianos estão em torno de 119° , mostrando a influência da natureza reológica do fluido.

SUMMARY

The approximation due to Pohlhausen for the velocity profile within the boundary layer was used to solve the problem of a bi-dimensional interface immersed in a non-Newtonian fluid, whose rheological behaviour can be described by the power law model.

Arbitrary values of the flow behaviour index (n) were considered and results for three different values are presented, including the case of a Newtonian fluid ($n=1$). It was assumed that a slip condition can occur at the interface. The slip condition at the interface was introduced through a dimensionless parameter, k , which is defined as the ratio between the slip velocity and the free stream velocity.

Results were also obtained for the flow past a solid surface where no-slip condition is assumed.

Relevant physical quantities of the boundary layer such as displacement thickness, momentum thickness and drag

coefficient were calculated as functions of the various flow parameters.

Extrapolated values of the angle of separation for the case of a Newtonian fluid, showed excellent agreement with the literature, namely, the values are around 108° , for all values of k considered. Under the same conditions, the results for non-Newtonian fluids are around 119° , thus showing the influence of the rheological behaviour of the fluid.

ÍNDICE

Capítulos:		Páginas:
I	<u>INTRODUÇÃO</u>	1
	1. APRESENTAÇÃO E MODELO FÍSICO	1
	2. REVISÃO DA LITERATURA	6
II	<u>TEORIA</u>	9
	1. EQUAÇÕES BÁSICAS	9
	1.1 Estudo do Modelo	10
	2. EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE	14
	2.1 Condições de Contorno	15
	2.2 Limitações da Teoria da Camada Limite para Fluidos Não-Newtoni- anos	16
	3. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA	19
	3.1 Integração da Equação de <u>Movi-</u> mento	20
	3.2 Espessuras de Deslocamento e da Quantidade de Movimento	21
	3.3 Perfil de Velocidades	22
	3.4 Determinação das Constantes do Perfil de Velocidades	23

Capítulos:	Páginas:
3.5 Cálculo das Espessuras de Deslocamento e da Quantidade de Movimento	27
4. SOLUÇÃO NUMÉRICA	32
4.1 Condições Iniciais	32
4.1.1 Cálculo de $Z_0 = Z _{x=0}$	33
4.1.2 Cálculo de $Z'_0 = \left. \frac{dZ}{dx} \right _{x=0}$	34
4.2 Considerações Gerais	36
4.3 Determinação das Grandezas da Camada Limite	37
4.3.1 Determinação da Espessura da Quantidade de Movimento	38
4.3.2 Determinação da Espessura de Deslocamento	39
4.3.3 Cálculo do Coeficiente de Arraste	40
III <u>APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.</u>	42
IV <u>CONCLUSÕES E SUGESTÕES</u>	57
APÊNDICE I: <u>INTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO</u>	61
APÊNDICE II: <u>CÁLCULO DAS CONSTANTES DO PERFIL</u> .	65

Capítulos:

Páginas:

APÊNDICE III:	<u>REGRA DE L'HOSPITAL PARA LEVANTAR</u> <u>A INDETERMINAÇÃO</u> $\frac{dZ}{dx} \Big _{x=0} = \frac{F(\Gamma)}{U} \Big _{x=0} = \frac{0}{0}$	67
APÊNDICE IV:	<u>EXPRESSÕES ADIMENSIONAIS DE θ, δ^*</u> <u>E C_f</u>	70
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	73
<u>SIMBOLOGIA</u>	76

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1. APRESENTAÇÃO E MODELO FÍSICO

O estudo de bolhas de gás e outros tipo de interfaces, têm atraído um grande número de pesquisadores, em virtude de sua grande aplicação na Engenharia. Podemos citar, por exemplo, alguns campos da indústria, tais como: alimentação, concentração de minérios e na indústria química de um modo geral, onde é comum o uso de processos e equipamentos, nos quais as operações são diretamente ligadas às leis que governam o movimento de bolhas de gás ou vapor através de fluidos.

Mais diretamente ligado ao nosso trabalho, podemos citar o aparecimento de bolhas de gás bidimensionais nos espaçamentos estreitos, entre placas paralelas de trocadores de calor, entre placas de eletrodos, etc, como focalizado por Lindt ¹.

Cabe-nos ainda ressaltar, a grande importância que representa para a indústria moderna, o estudo de fluidos, cujo comportamento reológico, não segue a lei de Newton da viscosidade, os chamados fluidos não-Newtonianos. Como por exemplo: polímeros fundidos, suspensões de sólidos em líquidos, emulsões, etc.

Vamos então, examinar o movimento de uma bolha de gás num fluido. Consideremos o sistema em que a bolha esteja em repouso e o fluido escoando com velocidade constante U_{∞} . Dessa maneira, podemos fazer o estudo, tanto para a interface líquido-gás, quanto para corpos sólidos e a respectiva analogia entre ambos.

No caso de corpo sólido, segundo Prandtl², a grandes números de Reynolds, teremos o aparecimento de uma fina camada junto à superfície do corpo, onde os efeitos viscosos são importantes e devem ser levados em consideração. Devendo ainda, considerar, que, na fronteira sólida a velocidade tangencial é zero.

O escoamento em torno de uma bolha, parece-nos à primeira vista, que ocorre da mesma maneira, como para um corpo imerso num fluido ideal em escoamento. Entretanto,

isso não acontece pois na interface líquido gás, a componente tangencial do tensor tensão deve permanecer contínua na interface. Então, as condições são diferentes das observadas no corpo sólido, isto é, há um movimento tangencial na interface líquido-gás, o que torna a velocidade tangencial aí, não nula.

É claro que, apesar do líquido escoar (deslizar) na interface, não podemos deixar de considerar os efeitos viscosos numa fina camada próxima à superfície, ou seja, temos segundo a teoria de Prandtl ², uma camada limite peculiar, próxima à interface, na qual a manifestação dos efeitos viscosos deve ser levada em conta, embora a influência dessas forças não seja tão acentuada, como no escoamento em torno de corpos sólidos.

Isto nos permite dizer que, comparativamente, a distribuição de velocidades em torno de uma bolha é mais aproximada do escoamento ideal do que a mesma distribuição no caso de um fluido real em torno de um corpo sólido.

Do exposto, podemos esquematizar o nosso modelo físico, do seguinte modo: Consideramos um fluido escoando em torno de uma superfície cilíndrica, que pode ser um ou

tro fluido (como por exemplo: uma bolha de gás), ou um corpo sólido. Forma-se uma camada limite de espessura δ com o perfil de velocidades esquematizado na figura (I). Além das forças viscosas, não podemos, devido à curvatura da superfície, deixar de considerar as forças de pressão.

Quanto à influência das forças de inércia e de campo, vamos supor que U_∞ seja tal que o número de Froude, $Fr = \frac{U_\infty^2}{gx} > 2000$ e, neste caso, podemos desprezar as forças de campo, mas levando em conta as forças de inércia, de acordo com a análise qualitativa de Schmal³ que estabeleceu as seguintes relações:

$Fr > 2000$ Forças de campo podem ser desprezadas, considerando-se apenas as de inércia.

$1 < Fr < 2000$ Devemos levar em conta tanto as forças de campo, quanto as de inércia.

$Fr < 1$ Podemos desprezar as forças de inércia, considerando apenas as de campo.

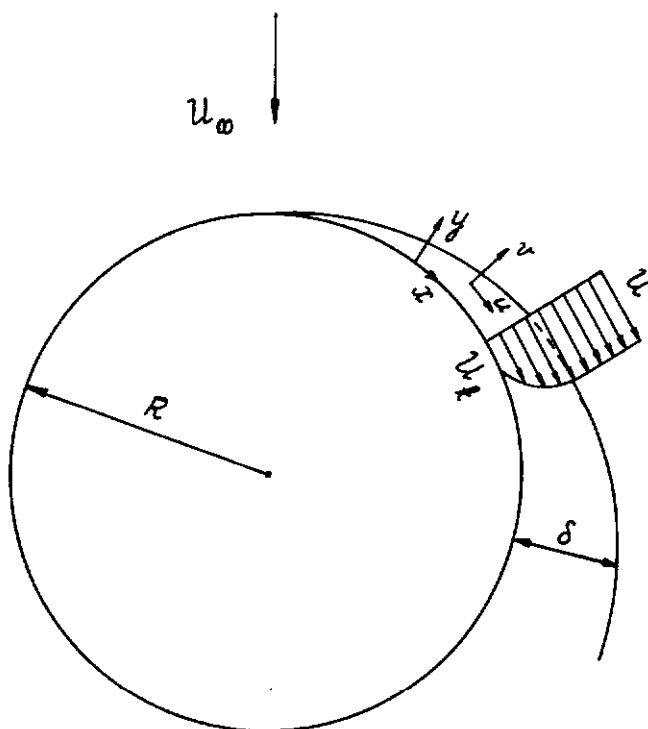


Fig. I - Esquema do modelo físico

2. REVISÃO DA LITERATURA

Levich ⁴, baseado em argumentos de dissipação viscosa no escoamento potencial, dada por uma pequena perturbação na configuração do escoamento, em torno de uma bolha de gás, supõe que se forma uma fina camada limite, onde são levados em consideração os efeitos viscosos, desprezando as forças de campo.

Para resolver o problema, admite, então, a distribuição de velocidades e pressão no fluido escoando em torno de uma bolha de gás da forma:

$$V = v_0 + v'$$

$$p = p_0 + p'$$

onde: v_0 velocidade do fluido ideal.
 p_0 pressão do fluido ideal.
 v' perturbação da velocidade do escoamento ideal.
 p' perturbação de pressão causada pela variação desta distribuição de velocidades.

Determina as distribuições de velocidade e pressão para o escoamento ideal e substitui as relações citadas nas equações de movimento e continuidade. Desta forma, Levich calcula o valor da força de arraste: $F = 12\pi R U \mu$ e a partir desta, determina o valor do coeficiente de arraste $C_f = \frac{48}{Re}$.

Moore⁵ estuda a ascensão de uma bolha de gás num líquido viscoso a altos números de Reynolds, mostrando que a solução irrotacional do escoamento em torno de uma bolha, dá um resultado aproximado para o campo de velocidades. Chega no entanto, ao valor do coeficiente de arraste $C_f = \frac{32}{Re}$, valor este que não concorda com o de Levich e, esta discrepância é explicada, por terem sido desprezadas as forças de pressão na camada limite. O próprio Moore⁶ num trabalho seguinte, contesta estes resultados e determina equações de camada limite para uma bolha elevando-se vagarosamente num fluido Newtoniano de baixa viscosidade. Ele faz uma análise da ordem de grandeza dos termos das equações de movimento, mostrando que não pode, como no seu trabalho anterior, desprezar as forças de pressão, além de considerar também as forças de inércia e viscosas. Calcula o valor do coeficiente de arraste e este está de acordo com o valor já determinado por Levich, isto é, $C_f = \frac{48}{Re}$.

Em fluidos não Newtonianos, Astarita ⁷ obteve expressões do coeficiente de arraste de bolhas de gás, tanto para o "creeping flow", quanto para altos números de Reynolds, baseado em argumentos semi-quantitativos. Bizzel ⁸ aplica o método aproximado de Pohlhausen, para a solução de camada limite numa esfera sólida, para fluidos não-Newtonianos e determina o ponto de separação para diversos tipos de fluido, dados pela variação do índice de comportamento na expressão do modelo.

CAPÍTULO II

TEORIA

1. EQUAÇÕES BÁSICAS

As equações de movimento e continuidade, podem ser escritas na seguinte forma tensorial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^j)_{,j} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j v^i_{,j} \right) = - p_{,i} - \tau^{ij}_{,j} + \rho f^i \quad (2)$$

Devemos ainda, apresentar uma relação entre o tensor tensão τ_j^i e o tensor taxa de deformação d_j^i .

Para fluidos, cujas características reológicas, são invariantes com o tempo, uma expressão simples e usada com bons resultados, é a do modelo empírico de Ostwald-De-Waele, ou modelo "power law", dado pela relação ¹⁷:

$$\tau_j^i = - 2m(2II) \frac{n-1}{2} d_j^i \quad (3)$$

1.1 ESTUDO DO MODELO.

Os fluidos reais, costumam ser divididos em duas categorias: Newtonianos e não-Newtonianos. Esta classificação, é baseada na natureza da tensão de cisalhamento e na sua relação com a taxa de deformação.

Fluidos Newtonianos, são aqueles para os quais, a tensão de cisalhamento é proporcional à taxa de deformação, ou seja, usando uma notação mais compacta temos:

$$\tau = \mu D \quad (4)$$

onde μ é uma constante de proporcionalidade e, é conhecida como viscosidade do fluido e, D é a taxa de deformação.

A viscosidade, é uma propriedade inerente ao fluido e independe da taxa de deformação, sendo função apenas de pressão e temperatura.

A classificação de fluidos não-Newtonianos, engloba, todos aqueles que não seguem a lei de Newton da viscosidade, representada pela equação (4). Para estes fluidos, a tensão de cisalhamento aplicada e a correspondente taxa de deformação, não são diretamente proporcionais.

Podemos representar os fluidos não-Newtonianos pela expressão:

$$\tau = \beta D \quad (5)$$

onde β é uma função de τ e D , bem como da temperatura e pressão.

Por analogia com os fluidos Newtonianos, podemos definir "viscosidade aparente" do fluido ⁹ como:

$$\beta_a = \frac{\tau}{D} \quad (6)$$

Para fluidos não-Newtonianos, o termo viscosidade, só tem sentido, se relacionado a um valor específico da taxa de deformação.

Vários autores tem tentado determinar uma expres

são que represente perfeitamente o comportamento reológico destes fluidos, no entanto, até hoje, todos os trabalhos têm sido baseados em modelos empíricos.

Levando em conta, a representação matemática bastante simples e, a grande aplicação na prática, escolhemos o modelo empírico de Ostwald-De-Waele ou "power law", representado pela equação (3) para representar o nosso fluido não-Newtoniano.

Representando a equação (3) em coordenadas cartesianas, temos:

$$\tau_{xy} = m \left(- \frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \quad \text{ou} \quad \tau = m (-D)^n \quad (7)$$

onde n e m são parâmetros característicos do fluido, denominados respectivamente, "índice de comportamento do escoamento" e índice de consistência do fluido¹⁰. O expoente n mede o afastamento das características do escoamento de um fluido Newtoniano. Para um dado valor de n e D , quanto maior o valor de m , mais viscoso será o fluido.

Os valores de $n=1$ e $m=\mu$ correspondem ao fluido Newtoniano. Para $n>1$ o fluido é denominado dilatante e

para $n < 1$ é dito pseudo plástico.

Segundo Metzner ¹¹, o modelo "power law" representa, bastante bem, as características de escoamento dos fluidos não-Newtonianos, no entanto, é incapaz de descrever o comportamento reológico em regiões de muito alta ou muito baixa taxa de deformação. Experimentalmente, é conhecido que nestas regiões, soluções poliméricas, polímeros fundidos e muitas lamelas de concentração limitada, comportam-se como fluidos Newtonianos e, portanto, o modelo "power law" não pode ser usado para representar o comportamento reológico destes materiais.

Isto pode ser mostrado, se considerarmos a expressão matemática da viscosidade aparente. Para este modelo, temos:

$$\beta_a = \frac{\tau}{D} = \frac{mD^n}{D} = mD^{n-1}$$

Se $n < 1$, então $(n-1) < 0$ e $\lim_{D \rightarrow 0} \beta_a = \infty$

$n > 1$, então $(n-1) > 0$ e $\lim_{D \rightarrow 0} \beta_a = 0$

Físicamente, estes resultados são absurdos, pois a viscosidade de um fluido real, tem um valor finito, i.e., uma resistência finita ao cisalhamento. Da mesma maneira, poderíamos mostrar que o modelo prevê valores absurdos para a viscosidade aparente, para valores grandes da taxa de cisalhamento.

Outra grande restrição ao modelo, é que o índice de consistência m , depende do valor de n . No entanto, apesar de todas restrições, este modelo tem dado resultados satisfatórios, em comparação com trabalhos experimentais.

2. EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE

Tendo em vista que as equações de camada limite para fluidos Newtonianos, foram deduzidas a partir da equação de Navier Stokes, Schowalter ¹², baseado no método clássico de avaliação da ordem de grandeza, mostrou que as equações de movimento e continuidade, recaem nas equações de camada limite para fluidos não-Newtonianos. Resultando daí, as equações de camada limite para fluidos descritos pelo modelo "power law":

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

$$\rho \left| u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right| = - \frac{dp}{dx} - \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} \quad (9)$$

onde: $\tau_{xy} = m \left(- \frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \quad (10)$

Para o estabelecimento das equações acima, foram feitas as seguintes restrições: escoamento laminar, incompressível, bidimensional, além de considerarmos as propriedades físicas constantes.

2.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO.

Para o estabelecimento das condições de contorno, vamos levar em conta, dois fatos importantes: o primeiro, é a consideração de deslizamento na interface e o segundo, é a continuidade do campo de velocidades, na fronteira da camada limite com o escoamento externo.

Temos então:

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad u = U_K, \quad v = 0 \\ y = \delta & \quad u = U \end{aligned} \quad (11)$$

2.2 LIMITAÇÕES DA TEORIA DA CAMADA LIMITE PARA FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS.

Definimos:

$$x^* = \frac{x}{R}; \quad y^* = \frac{y}{R}; \quad u^* = \frac{u}{U_\infty}; \quad v^* = \frac{v}{U_\infty}; \quad p^* = \frac{p}{\rho U_\infty^2} \quad (12)$$

onde R é o raio da superfície cilíndrica.

Substituindo as equações (10) e (12) na equação (9) obtemos a seguinte equação adimensional.

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{dp^*}{dx^*} + \frac{m}{R^n U_\infty^{2-n} \rho} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^n$$

Verifica-se facilmente que o grupamento $\frac{m}{R^n U_\infty^{2-n} \rho}$ é adimeno

sional.

Por analogia, com o estudo feito para fluidos New
tonianos, podemos definir um número de Reynolds para flui
dos descritos pelo modelo "power law" como:

$$Re_m = \frac{R^n U_\infty^{2-n} \rho}{m} \quad (13)$$

No caso particular, em que $n=1$ e $m=\mu$, a expres
são acima leva à definição clássica do número de Reynolds:

$$Re = \frac{R U_\infty \rho}{\mu}$$

Seria agora de grande interesse, examinar sob que
condições, escoamentos do tipo camada limite laminar, seri
am esperados ocorrer, lembrando que as equações de camada
limite, não são exatas, mas sim formas assintóticas de rela
ções hidrodinâmicas básicas, quando o número de Reynolds é
alto.

Este estudo foi feito por Acrivos, Shah e Peter
sen¹³, resultando daí, as seguintes conclusões:

- 19) Todos os fluidos de comportamento aproximadamente Newtoniano, se U_∞ é suficientemente pequeno e, de acordo com a solução de Stokes, os termos inerciais da equação de movimento devem ser desprezados.
- 20) Para $n < 2$, escoamento do tipo camada limite, pode ser obtido se U_∞ é grande e, portanto, o número de Reynolds é feito suficientemente grande.
- 30) Para $n > 2$ e moderados valores de U_∞ , as aproximações da camada limite devem ser introduzidas, desde que $Re_m \gg 1$. Para altos valores de U_∞ , os termos inerciais devem novamente ser desprezados quando $Re_m \rightarrow 0$. Além disso, embora a expressão do número de Reynolds nos diga que $Re_m \rightarrow \infty$, quando $U_\infty \rightarrow 0$, escoamento de camada limite não ocorre, quando a velocidade característica do fluido é pequena, por causa do modelo "power law", que só é válido para valores moderados do gradiente de velocidade, $\frac{\partial u}{\partial y}$, conforme mostrado por Metzner¹¹.

É evidente, portanto, que quando $n > 2$ a camada limite não é uma condição assintótica de movimento laminar, que é aproximado, quando U_∞ é feito suficientemente grande. Quando muito, deve haver um estado intermediário, onde aproximações de camada limite são válidas, que caem entre regiões caracterizadas pelo fato que os termos inerciais nas equações de movimento devem ser desprezados. Isto mostra, que quando $n > 2$, escoamento de camada limite laminar, não são de grande interesse prático, porque seu limite de validade parece ser bastante restrito.

3. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Com o conceito de Prandtl da camada limite, puderam ser apresentadas soluções exatas das equações de movimento e continuidade para um grande número de problemas. No entanto, para algumas geometrias, a solução dessas equações, envolvia tais dificuldades matemáticas, que tornou-se necessário determinar um método aproximado que desse resultados satisfatórios e fôsse de aplicação simples.

De acordo com Von Karman e Pohlhausen é possível

idealizar um método simplificado, para satisfazer as equações diferenciais do escoamento de camada limite numa média, ao invés de satisfazer as condições de contorno para todas as partículas individuais do fluido.

Esta função do valor médio, pode ser obtida pelo teorema da quantidade de movimento, integrando-se as equações de movimento para a espessura da camada limite.

Nosso problema está agora bem definido, isto é, temos as equações e suas respectivas condições de contorno. Nosso propósito, é então aplicar a solução integral, para resolver o problema geral de camada limite bidimensional, com gradiente de pressão.

O método que vamos empregar, é uma forma aperfeiçoada do método de Pohlhausen ² apresentada por Holstein e Bohlen ².

3.1 INTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO.

Integrando a equação de movimento em relação a y e eliminando a componente v da velocidade, com auxílio da e

quação da continuidade, conforme dedução no apêndice I, obtemos a seguinte equação:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} u [(1-k)U - u] dy + \frac{dU}{dx} \int_0^{\infty} [U - (1-k)u] dy = - \frac{\tau_0}{\rho} \quad (14)$$

onde o valor $k = \frac{U_k}{U}$ é discutido no parágrafo 3.3.

3.2 ESPESSURAS DE DESLOCAMENTO E DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO.

Vamos agora, introduzir as espessuras de deslocamento δ^* e de quantidade de movimento θ , definidas de maneira análoga às definidas por Schlichting ²:

$$U\delta^* = \int_0^{\infty} [U - (1-k)u] dy \quad (15)$$

$$U^2\theta = \int_0^{\infty} u [(1-k)U - u] dy \quad (16)$$

Fisicamente, podemos dizer, que essas espessuras, nos dão o deslocamento das linhas de fluxo, devido à camada limite, ou seja, representam a massa de fluido e a quantidade

de movimento que deixam de passar numa espessura δ^* e θ respectivamente, devido ao atrito.

Substituindo as relações (15) e (16) em (14) obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} (U^2 \theta) + \frac{dU}{dx} (U \delta^*) = - \frac{\tau_0}{\rho}$$

ou numa outra forma:

$$U^2 \frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta^*) U \frac{dU}{dx} = - \frac{\tau_0}{\rho} \quad (17)$$

Esta equação é denominada "equação integral da quantidade de movimento", sua aplicação é bastante grande, tendo em vista que pode ser usada tanto para escoamento laminar, quanto para turbulento, dependendo da expressão da tensão de cisalhamento.

3.3 PERFIL DE VELOCIDADES.

A essência do método aproximado consiste em supor uma expressão particular para a distribuição de velocidades

na camada limite, função de um ou mais parâmetros livres e, que seja consistente com as condições de contorno.

Não podemos utilizar perfis já postulados por alguns autores tais como Geropp ¹⁴ e Schmal ³, porque as condições de contorno do nosso problema são diferentes, principalmente no que se refere à condição de deslizamento na interface.

De acordo com Pohlhausen, vamos supor, para o perfil de velocidades, um polinômio de 4º grau, função da variável adimensional $\eta = \frac{y}{\delta(x)}$, da forma:

$$\frac{u}{U} = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\eta^4 \quad (18)$$

3.4 DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DO PERFIL DE VELOCIDADES.

As constantes do perfil de velocidades, devem ser determinadas, a partir das seguintes condições de contorno:

$$1a.) \quad \eta = 0 \quad u = kU$$

Esta condição, representa a nossa hipótese de deslizamento na interface. Para isso, estamos supondo que $k = \text{constante}$, isto é, admitimos que a velocidade de deslizamento na interface é proporcional à velocidade do escoamento externo.

Devemos fazer algumas considerações a respeito desta hipótese.

Em princípio, $k = \frac{U_k}{U}$ deveria ser uma função de x , porém baseados nos estudos de Sparrow ¹⁵, que para vapor saturado em placa plana, admitiu $k=0$, Koh ¹⁶ que para camada limite térmica, determinou de maneira análoga um fator constante k_0 em torno de 0,046 e no trabalho de Schmal ³, que a partir da mesma hipótese, chegou a valores de k em torno de 0,05 para o estudo de condensação de vapor saturado com gradiente de pressão sobre um cilindro, podemos supor o valor de k como sendo constante.

$$2a.) \quad \eta = 0 : \quad \frac{nm}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - (1-k^2) U \frac{dU}{dx} =$$

$$= \frac{1-k^2}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

pois por Bernouilli:
$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx} .$$

Esta condição é obtida diretamente da equação de movimento, substituindo as velocidades na direção x e y pelos seus valores na interface, isto é, $u = kU$ e $v = 0$. Esta é a condição de compatibilidade na parede e, nos mostra a relação entre o gradiente de pressão e a distribuição de velocidades.

3a.) $\eta = 1: \quad u = U.$

A 3a. condição, vem da continuidade do campo de velocidades, na fronteira da camada limite com o escoamento externo.

4a.) $\eta = 1: \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 .$

Da mesma forma, a 4a. condição é obtida diretamente da hipótese de continuidade, tendo em vista que, no escoamento potencial, não levamos em conta o atrito.

5a.) $\eta = 1: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$

A 5a. condição, vem assegurar que o nosso perfil

seja exato até 2a. ordem.

Aplicando as condições de contorno, podemos determinar então, as constantes do perfil de velocidades. Da dedução no apêndice II obtemos:

$$a = k$$

$$b = \frac{12 - 12k + E}{6}$$

$$c = -\frac{E}{2} \quad (19)$$

$$d = \frac{12k - 12 + 3E}{6}$$

$$e = \frac{6 - 6k - E}{6}$$

onde:

$$E = \frac{(1-k^2)\delta^{n+1} U^{1-n} U' b^{1-n}}{n\gamma}$$

Substituindo na equação (18) obtemos:

$$\frac{u}{U} = f(\eta) = k + \frac{12-12k+E}{6} \eta - \frac{E}{2} \eta^2 + \frac{12k-12+3E}{6} \eta^3 + \frac{6-6k-E}{6} \eta^4 \quad (20)$$

É fácil verificar que o perfil de velocidades expresso em termos de $\eta = \frac{y}{\delta(x)}$, constitui uma família de curvas dependentes do parâmetro E. Sendo E um fator de forma.

3.5 CÁLCULO DAS ESPESSURAS DE DESLOCAMENTO E DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO.

Definido o perfil, podemos agora determinar os valores δ^* e θ . Para resolver o problema, vamos defini-las numa outra forma:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 \left[1 - (1-k) \frac{u}{U} \right] d\eta \quad (21)$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{U} \left[(1-k) - \frac{u}{U} \right] d\eta \quad (22)$$

Substituindo a expressão do perfil e integrando em relação a η obtemos:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{3+4k+3k^2}{10} + \frac{(k-1)E}{120} = G \quad (23)$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{37-200k-152k^2}{315} - \frac{E}{945} - \frac{118kE}{7560} - \frac{E^2}{9072} = H \quad (24)$$

Da mesma forma, podemos determinar uma nova expressão em função da tensão de cisalhamento na parede.

$$\tau_o = m \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n = \frac{m U^n b^n}{\delta^n}$$

logo:

$$- \frac{\tau_o \delta^n}{m U} = b^n = \left(\frac{12-12k+E}{6} \right)^n \quad (25)$$

Podemos agora, expressar o fator de forma E em termos de uma equação diferencial. Inicialmente, vamos adimensionalizar a equação integral da quantidade de movimento. Multiplicando ambos os membros desta equação por $\frac{\theta^n}{\gamma U^n}$, temos:

$$\frac{U^{2-n} \theta^n \theta'}{\gamma} + \left(2 + \frac{\delta^*}{\theta} \right) \frac{\theta^{n+1} U^{1-n} U'}{\gamma} = - \frac{\tau_o \theta^n}{m U^n}$$

(26)

Apesar de a espessura δ não aparecer explicitamente na equação, notamos que esta contém grandezas importantes tais como a espessura de deslocamento δ^* , a espessura de quantidade de movimento θ e a tensão de cisalhamento na interface τ_0 .

Por conveniência, analogamente a Holstein e Bohlen², vamos definir um novo fator de forma:

$$\Gamma = \frac{\theta^{n+1} U^{1-n} U'}{\gamma} \quad (27)$$

Das relações (19), (27), (23) e (24), verificamos que os fatores de forma E e Γ satisfazem a relação:

$$\Gamma = \frac{n}{1-k^2} \cdot E \cdot H^{n+1} b^{n-1} \quad (28)$$

Podemos dizer que o fator de forma Γ é relacionado à espessura de quantidade de movimento θ , da mesma maneira que E foi relacionado à espessura da camada limite δ .

Analogamente a Schlichting², definimos ainda:

$$Z = \frac{\theta^{n+1} U^{1-n}}{\gamma} \quad (29)$$

de tal forma que:

$$\Gamma = ZU' \quad (30)$$

Fazendo:

$$\frac{\delta^*}{\Theta} = \frac{G}{H} = f_1(\Gamma)$$

$$e - \frac{\tau_0 \Theta^n}{m U^n} = - \frac{\tau_0 \delta^n}{m U^n} \cdot \left(\frac{\Theta}{\delta}\right)^n = b^n H^n = f_2(\Gamma) \quad (31)$$

e derivando a equação (29) em relação a x:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{(n+1)\Theta^n \Theta' U^{1-n}}{\gamma} + \frac{(1-n)\Theta^{n+1} U^{-n} U'}{\gamma}$$

ou:

$$\frac{\Theta^n \Theta' U^{2-n}}{\gamma} = \frac{U}{n+1} \frac{dZ}{dx} - \frac{(1-n)\Theta^{n+1} U^{1-n} U'}{(n+1)\gamma}$$

e substituindo esta relação na equação (26) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{U}{n+1} \frac{dZ}{dx} - \frac{(1-n)\Theta^{n+1} U^{1-n} U'}{(n+1)\gamma} + \left(2 + \frac{\delta^*}{\Theta}\right) \frac{\Theta^{n+1} U^{1-n} U'}{\gamma} &= \\ &= - \frac{\tau_0 \Theta^n}{m U^n} \end{aligned}$$

Assim temos:

$$\frac{U}{n+1} \frac{dZ}{dx} - \frac{(1-n)\Gamma}{n+1} + \left[2 + f_1(\Gamma) \right] \cdot \Gamma = f_2(\Gamma)$$

Definindo

$$F(\Gamma) = - (3n+1)\Gamma - (n+1)\Gamma f_1(\Gamma) + (n+1) f_2(\Gamma)$$

podemos escrever a equação (26) numa forma bem mais compacta, ou seja:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F(\Gamma)}{U} \tag{32}$$

$$\Gamma = ZU'$$

Estamos agora em face de uma equação diferencial não linear de 1ª. ordem para $Z = \frac{\Theta^{n+1} U^{1-n}}{\gamma}$, como função da coordenada x .

4. SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para a solução da equação (32) vamos aplicar o método numérico de Runge Kutta.

4.1 CONDIÇÕES INICIAIS.

Primeiramente, vamos supor, de acordo com Schlichting², a seguinte distribuição de velocidades para o escoamento externo.

$$U = 2 U_{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{R}\right)$$

Para aplicação do método numérico de Runge Kutta, precisamos de condições de contorno apropriadas, ou seja, precisamos conhecer os valores de Z e $\frac{dZ}{dx}$ em $x = 0$.

Estas condições podem ser estabelecidas de uma maneira direta. Para que $\frac{dZ}{dx}$ em $x=0$, seja finito, tendo em vista que

$$\frac{dZ}{dx} = f\left[\frac{d\theta}{dx}, \frac{du}{dx}\right],$$

que são finitos e sabendo que $U = 0$ em $x = 0$, devemos ter a condição $F(\Gamma) = 0$ em $x=0$.

Esta condição fixa E em $x=0$, i.e., especifica Z em $x=0$.

Passemos, então, ao cálculo dos valores iniciais.

4.1.1 Cálculo de $Z_0 = Z \Big|_{x=0}$

Para $n=1$, o valor de Z_0 é bem definido, pois baseados na condição acima, $F(\Gamma) = 0$, podemos determinar os valores de Γ_0 e E_0 , e da equação (30) determinamos o valor de Z_0 , ou seja:

$$x = 0 : \quad \Gamma_0 = Z_0 U'_0 \quad \therefore \quad Z_0 = \frac{\Gamma_0}{U'_0}, \quad n = 1.$$

Para $n \neq 1$, o valor de Z_0 é determinado diretamente da equação (29):

$$x = 0 : \quad Z_0 = 0, \quad n \neq 1.$$

4.1.2 Cálculo dos valores de $Z'_0 = \left. \frac{dZ}{dx} \right|_{x=0}$

Para determinarmos os valores de $\frac{dZ}{dx}$ em $x=0$, precisamos agora, levantar a indeterminação:

$$\left. \frac{dZ}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{F(\Gamma)}{U} \right|_{x=0} = \frac{0}{0}$$

Por facilidade, vamos escrever $F(\Gamma)$ numa nova expressão, em função de E e k , substituindo Γ , $f_1(\Gamma)$ e $f_2(\Gamma)$ pelas suas respectivas expressões.

$$F(\Gamma) = b^{n-1} H^n \left[\frac{(3n+1)n}{k^2 - 1} \cdot E.H. + \frac{(n+1)n}{k^2 - 1} E.G + (n+1)b \right]$$

Levantamos a indeterminação, aplicando a regra de L'Hospital (dedução no apêndice II):

$$\left. \frac{dZ}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{F'(\Gamma)}{U'} \right|_{x=0}$$

obtemos:

$$\left. \frac{dZ}{dx} \right|_{x=0} = Z'_0 = \left. \frac{\frac{\partial F}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial \Gamma} (Z' U' + Z U'')}{U'} \right|_{x=0}$$

Logo:

$$Z' \left(1 - \frac{\partial F}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \Gamma} \right) \Big|_{x=0} = \frac{Z U''}{U'} \cdot \frac{\partial F}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial \Gamma} \Big|_{x=0}$$

Para $n=1$, substituindo $Z_0 \frac{\Gamma_0}{U'_0}$, na expressão acima temos:

$$Z'_0 = \frac{\frac{\partial F}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial \Gamma} \cdot \Gamma \Big|_{x=0}}{1 - \frac{\partial F}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial \Gamma} \Big|_{x=0}} \cdot \frac{U''_0}{U'^2_0} = C_0 \frac{U''_0}{U'^2_0}$$

Para $n \neq 1$, temos que $Z_0 = 0$, logo:

$$Z'_0 = 0.$$

Resumindo temos as seguintes condições:

$$n = 1 \quad Z_0 = \frac{\Gamma_0}{U'_0} \quad \frac{dZ}{dx} \Big|_{x=0} = C_0 \frac{U''_0}{U'^2_0} \quad (34)$$

$$n \neq 1 \quad Z_0 = 0 \quad \frac{dZ}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

4.2 CONSIDERAÇÕES GERAIS.

Restam ainda, algumas considerações a fazer, com respeito a solução deste problema. A primeira delas, refere-se à separação.

Podemos calcular o valor do fator de forma E , para o qual ocorre a separação, isto é, ponto em que é satisfeita a equação:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

No caso mais geral será função do parâmetro k , pois:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{12 - 12k + E}{6} = 0$$

obtida da expressão do perfil de velocidades.

$$\text{Logo: } E = 12k - 12.$$

Se não levarmos em conta a condição de deslizamento na interface, ($k=0$, superfície sólida), a separação se

darã para o valor $E = -12$, tanto para fluidos Newtonianos⁶, quanto para não-Newtonianos², estando perfeitamente de a cordo com os resultados jã obtidos pelos mesmos.

Outra consideração importante, vem trazer uma grande restrição ao nosso problema. Verificamos que para $x=0$, sendo $U=0$, as equações (27) e (29) são indefinidas para valores de n maiores que 1. Por esse motivo, o nosso estudo, resume-se em determinar soluções para fluidos pseudo plãsticos.

4.3 DETERMINAÇÃO DAS GRANDEZAS DA CAMADA LIMITE.

Para simplificar a solução, vamos adimensionalizar as nossas equações:

Definimos:

$$Z^* = \frac{ZU_{\infty}}{R}$$

$$x^* = \frac{x}{R}$$

$$U^* = \frac{U}{U_{\infty}}$$

Substituindo essas relações na equação (32) e operando, obtemos:

$$\frac{dZ^*}{dx^*} = \frac{F(\Gamma)}{U^*}$$

$$\Gamma = Z^* U^*$$

com as respectivas condições de contorno:

$$n = 1 \quad Z_0^* = \frac{\Gamma_0}{U_0^*} \quad \left. \frac{dZ^*}{dx^*} \right|_{x^*=0} = C_0 \frac{U_0^{*n}}{(U_0^{*'})}$$

$$n \neq 1 \quad Z_0^* = 0 \quad \left. \frac{dZ^*}{dx^*} \right|_{x^*=0} = 0$$

4.3.1 Determinação da espessura de quantidade de movimento.

Da equação (29) temos:

$$Z = \frac{\Theta^{n+1} \cdot U^{1-n}}{\gamma}$$

Adimensionalizando (apendice V) obtemos:

$$Z^* = \left(\frac{\Theta}{R}\right)^{n+1} U^{*1-n} Re_m$$

ou

$$\frac{\Theta}{R} \sqrt[n+1]{Re_m} = \sqrt[n+1]{Z^* U^{*(n-1)}} \quad (35)$$

4.3.2 Determinação da espessura de deslocamento.

Temos que:

$$\frac{\delta^*}{\Theta} = \frac{G}{H} = f_1(\Gamma)$$

adimensionalizando vem:

$$\frac{\delta^*}{R} \sqrt[n+1]{Re_m} = \frac{\Theta}{R} \cdot \sqrt[n+1]{Re_m} \cdot f_1(\Gamma) \quad (36)$$

4.3.3 Cálculo do coeficiente de arraste.

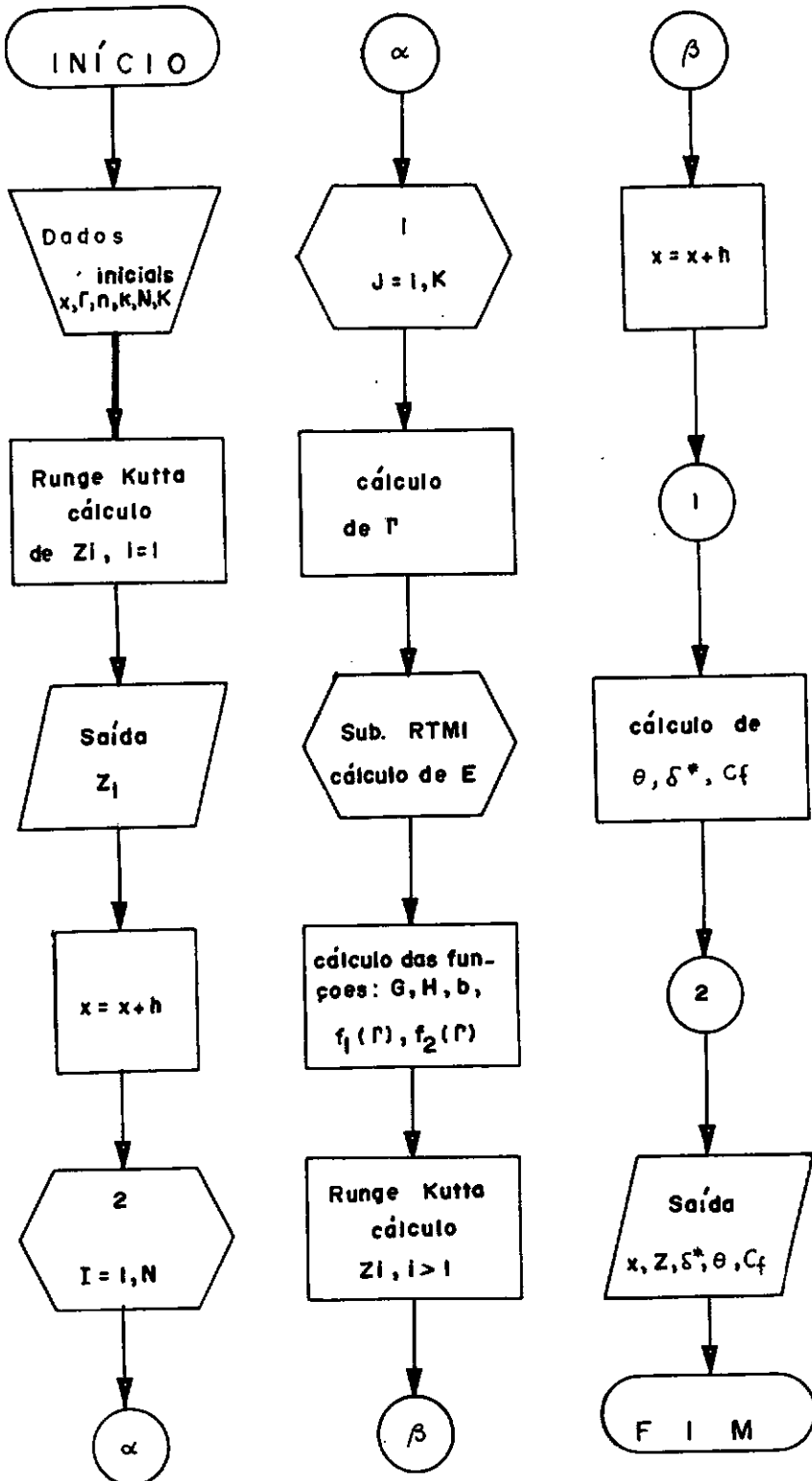
Da equação (31)

$$-\frac{\tau_o \cdot \theta^n}{m U^n} = f_2(\Gamma)$$

Adimensionalizando (apendice V) obtemos:

$$-\frac{\tau_o}{\rho U_\infty^2} \sqrt[n+1]{Re_m} = f_2(\Gamma) \cdot \frac{(U^*)^n}{\left[\frac{\theta}{R} \sqrt[n+1]{Re_m} \right]^n} \quad (37)$$

Os valores das expressões (35), (36) e (37) foram determinadas num computador digital /360, segundo o programa a seguir esquematizado.



CAPÍTULO III

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Inicialmente, faremos uma pequena discussão a respeito do valor de k .

Como foi visto, fizemos a hipótese de k =constante, baseados nos trabalhos encontrados na literatura.

Teoricamente, o valor de k deveria admitir valores na faixa compreendida entre 0 e 1, pois este parâmetro deveria ter os seguintes limites:

$k = 0$ escoamento em torno de corpos sólidos.

$k = 1$ escoamento ideal.

No entanto, para valores de k superiores a 0,046, a solução matemática, apresentou instabilidade. Resultado plenamente esperado, pois além de justificar a nossa hipótese, isto é, de que o valor de k é muito pequeno e pode

ser admitido como constante, está bem de acordo com o nosso problema físico, pois confirma que a velocidade na interface é bastante pequena, no máximo, em torno de 4,6% da velocidade do escoamento externo.

A apresentação dos valores das grandezas de camda limite, tais como espessura de deslocamento, espessura da quantidade de movimento e coeficiente de arraste, em função do ângulo ϕ , dado pela relação $\phi = \frac{x}{R}$, é feita em forma de gráficos, abordando os casos em que $n=1$, fluidos Newtonianos e $n=0,5$, fluidos pseudo plásticos e, ainda o caso em que $n=0$, representando um caso particular de fluidos não-Newtonianos, em que a tensão de cisalhamento é constante, pois:

$$\tau_{xy} = m \left(- \frac{\partial u}{\partial y} \right)^n$$

$$n = 0 \quad \therefore \quad \tau_{xy} = m.$$

Todos os valores foram calculados para k variando entre 0 e 0,04.

Passemos então, à análise dos gráficos. Inicialmente verificamos que para fluidos Newtonianos, escoando em

torno de corpos s\u00f3lidos ($k=0$) os valores de θ , δ^* e C_f es
t\u00e3o de acordo com os valores determinados por Schlichting².

An\u00e1lise dos gr\u00e1ficos das espessuras da quantidade
de movimento.

Das figuras (1,4,7), verificamos inicialmente, que
aumentando o valor de k , diminuem os correspondentes valo
res de θ . Fisicamente estes resultados s\u00e3o os esperados,
pois um acr\u00e9scimo no valor de k , corresponde a um aumento
da velocidade dentro da camada limite e, conseq\u00fcentemente,
a quantidade de movimento aumenta. Com isso, a espessura
de quantidade de movimento, θ , definida pela quantidade de
movimento que deixa de passar numa camada de espessura θ
por causa do atrito, tende a diminuir.

Outro fato importante a registrar, \u00e9 que para fluiu
dos n\u00e3o-Newtonianos, os valores de θ s\u00e3o bastante grandes
perto do ponto de estagna\u00e7\u00e3o; diminuem de valor, passam
por um m\u00ednimo e depois crescem como no caso dos fluidos
Newtonianos.

Uma poss\u00edvel explica\u00e7\u00e3o desses resultados, pode
ser dada, lembrando que o modelo "power law" para valores

baixos da taxa de cisalhamento, falha na representação das características dos fluidos não-Newtonianos.

Sabemos que a espessura da camada limite é diretamente proporcional à raiz quadrada da viscosidade e do comprimento. A viscosidade aparente de um fluido pseudo plástico, i.e., $n < 1$ é definida por $\beta_a = \frac{\eta}{D^{1-n}}$

Como próximo do ponto de estagnação, os valores da taxa de deformação, D , são muito pequenos, vemos da expressão da viscosidade aparente que os valores β_a tornam-se bastante grandes. Neste caso, para valores de x pequeno, a espessura θ , sofre uma grande influência desses altos valores da viscosidade e apresenta valores bastante altos, de cresce com o aumento de D e para valores moderados da taxa de deformação, a viscosidade apresenta uma pequena variação, havendo então, a influência mais acentuada do valor de x na espessura da camada limite, fazendo com que θ cresça com o aumento da distância x .

Como para fluidos Newtonianos, a viscosidade é constante, a espessura θ varia apenas como função de x , conforme apresentada na figura 1.

Análise da espessura de deslocamento δ^* .

Das figuras (2,5,8) verificamos que os resultados obtidos não estão de acordo com a definição clássica de δ^* . Precisamos, então, conceituar melhor, fisicamente a nossa espessura de deslocamento definida pela equação (15). A definição clássica nos diz que:

$$U\delta^* = \int_0^{\infty} (U-u)dy = \int_0^{\infty} Udy - \int_0^{\infty} udy$$

em que o 2º membro representa a massa de fluido relativa ao escoamento potencial, menos a massa de fluido relativa ao escoamento de camada limite.

No nosso caso, da equação (15) temos:

$$U\delta^* = \int_0^{\infty} Udy + \int_0^{\infty} kudy - \int_0^{\infty} udy$$

onde o termo $\int_0^{\infty} kudy$, representa a massa de fluido que escoa devido ao deslizamento. Logo, a equação (15) que define a nossa espessura de deslocamento, representa a diferença entre a vazão do escoamento potencial e a vazão do escoamento de camada limite, mais a contribuição da condição de deslizamento, na camada limite. Verificamos, que essa con

tribuição será nula, quando $k=0$ (superfície sólida) recaindo então na definição clássica de δ^* . Para $k=1$ (escoamento ideal), $\delta^* \rightarrow \infty$, i.e., seria a própria espessura do escoamento potencial.

Desta forma, os valores encontrados, estão de acordo com a expressão da espessura de deslocamento definida pela equação (15), pois quanto maior o valor de k maior será a contribuição do termo de deslizamento, fazendo com que aumentem os valores de δ^* .

Análise das curvas do coeficiente de arraste.

Das figuras (3,6,9) observamos que para $n=1$ e $n=0,5$, a variação dos valores correspondentes de C_f é inversamente proporcional à variação do valor de k , isto mostra que aumentando o valor de k , i.e., diminuindo o atrito, os valores do coeficiente de arraste tendem a diminuir, resultado este, plenamente justificado.

Para $n=0$, o coeficiente de arraste, apresenta um valor constante, tendo em vista que a tensão de cisalhamento é constante para qualquer valor de x .

Um dado importante que podemos determinar a partir

dos gráficos do coeficiente de arraste, é sem dúvida o ponto em que ocorre a separação, i.e., ponto em que o coeficiente de arraste se anula.

Para $n=1$, encontramos o ponto de separação em torno de 108° , resultado este que concorda com os valores encontrados na literatura ^{2,8}.

Para fluidos não-Newtonianos, ($n \neq 1$) a faixa de valores do ponto de separação está em torno de 119° , valores estes que, ressalvadas as diferentes condições, apresentam-se numa faixa de valores bastante aproximada dos resultados obtidos por Bizzel ⁸.

Vale ainda lembrar que aumentando o valor de k , tendem a aumentar os valores do ângulo em que se dá a separação, pois quanto maior a velocidade de deslizamento, mais aproximado será o escoamento, do escoamento potencial, fazendo com que o ponto de separação, se afaste cada vez mais. Isto é verificado nos gráficos, pela inversão das curvas na região próxima aos pontos de separação.

Devemos frisar, ainda, que a faixa de valores acima apresentados, dá apenas uma idéia qualitativa, tendo em vista que a determinação individual dos pontos de separação para cada curva, seria meramente um trabalho exaustivo de computação.

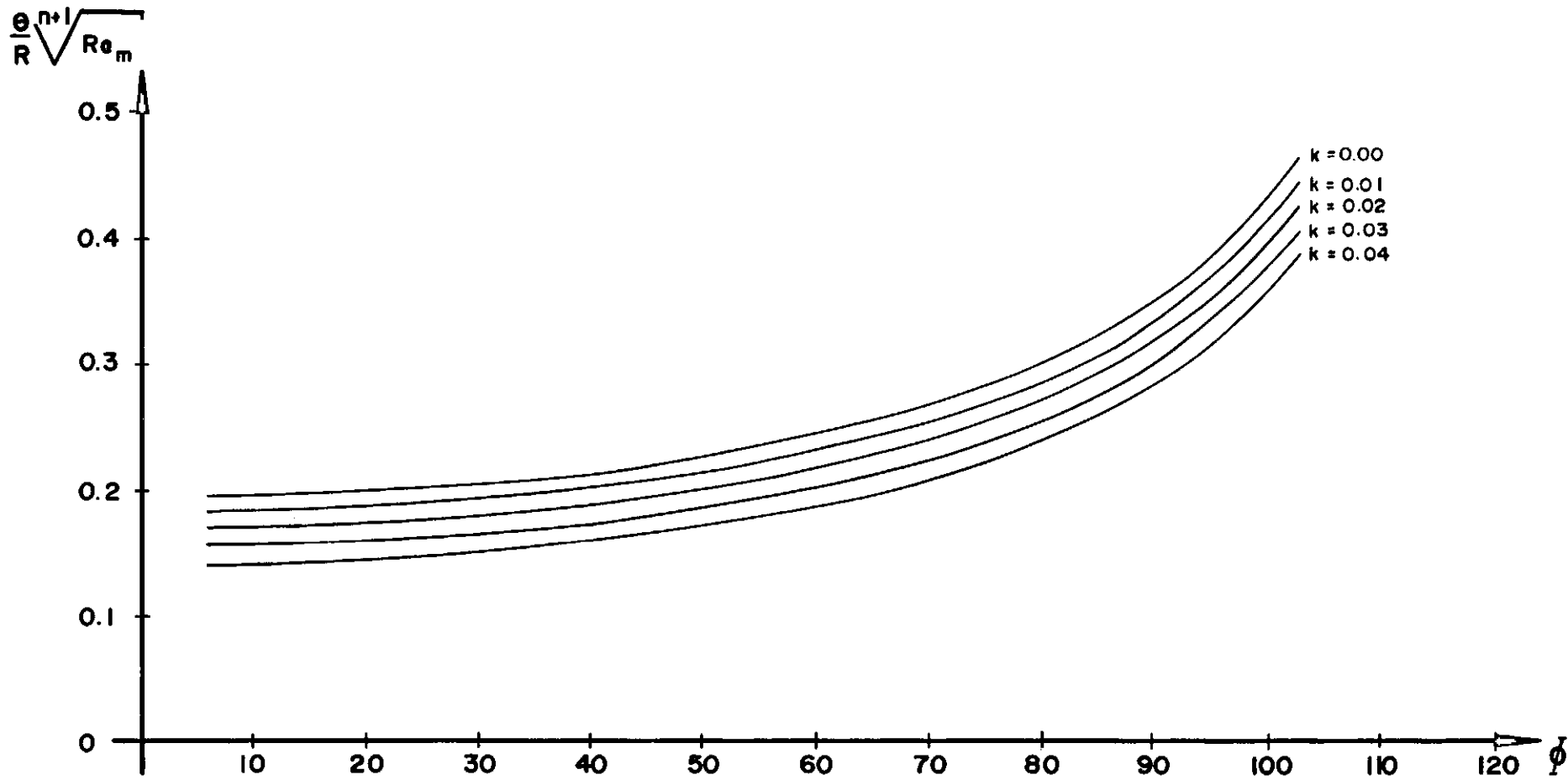


FIG. 1 : Espessura de Quantidade de Movimento $n = 1$

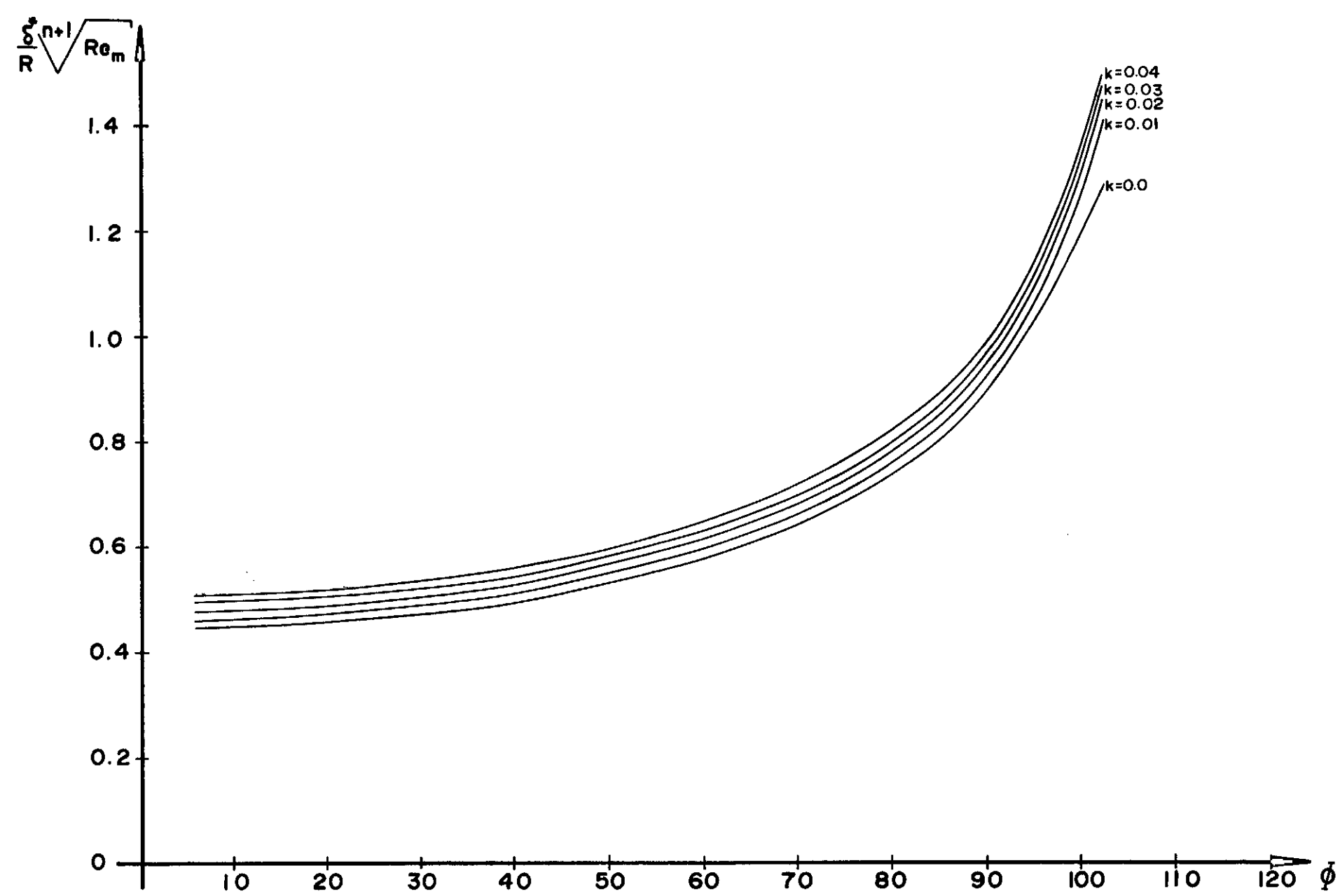


FIG. 2: Espessura de deslocamento $n=1$

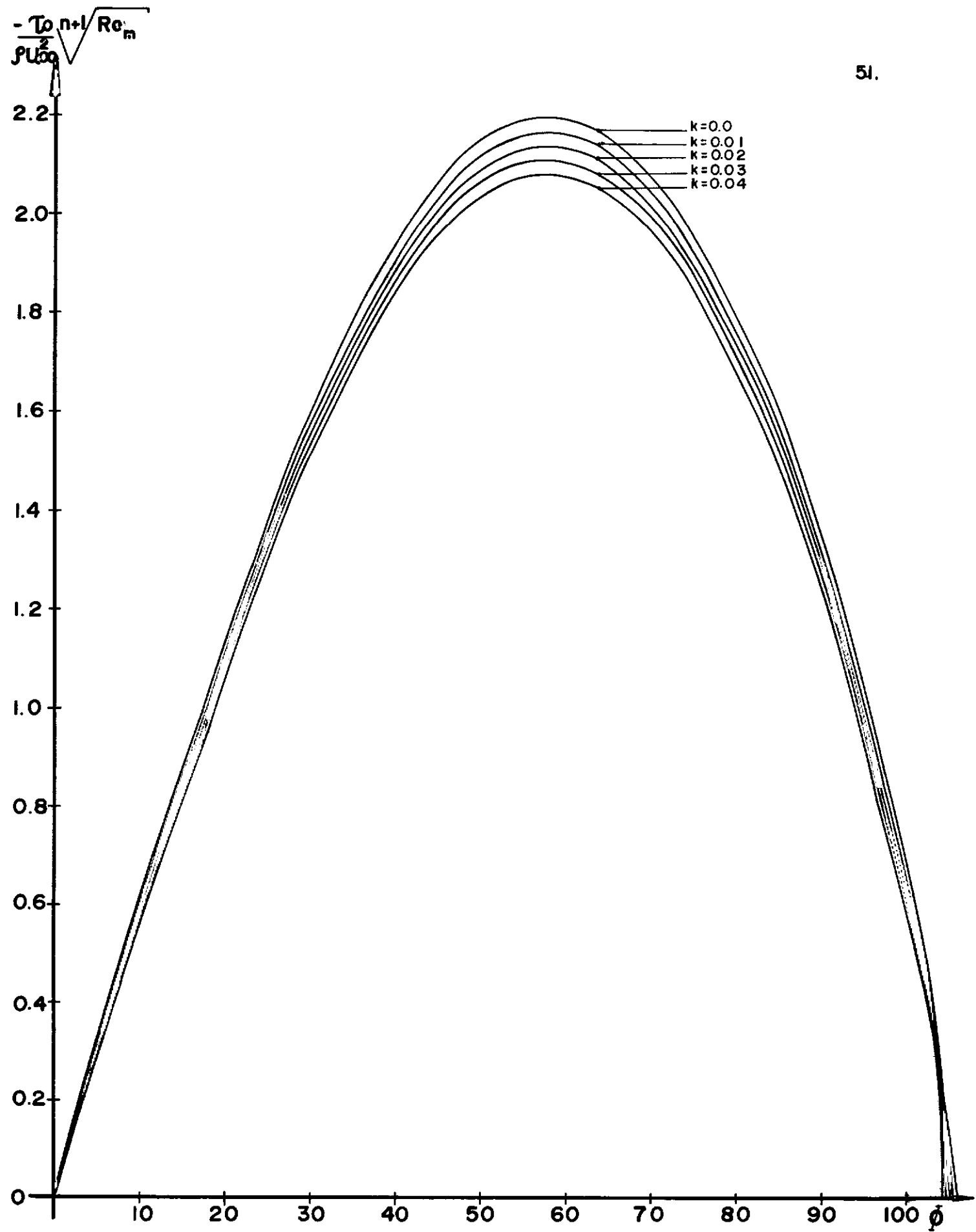


FIG. 3: Coeficiente de arraste $n=1$

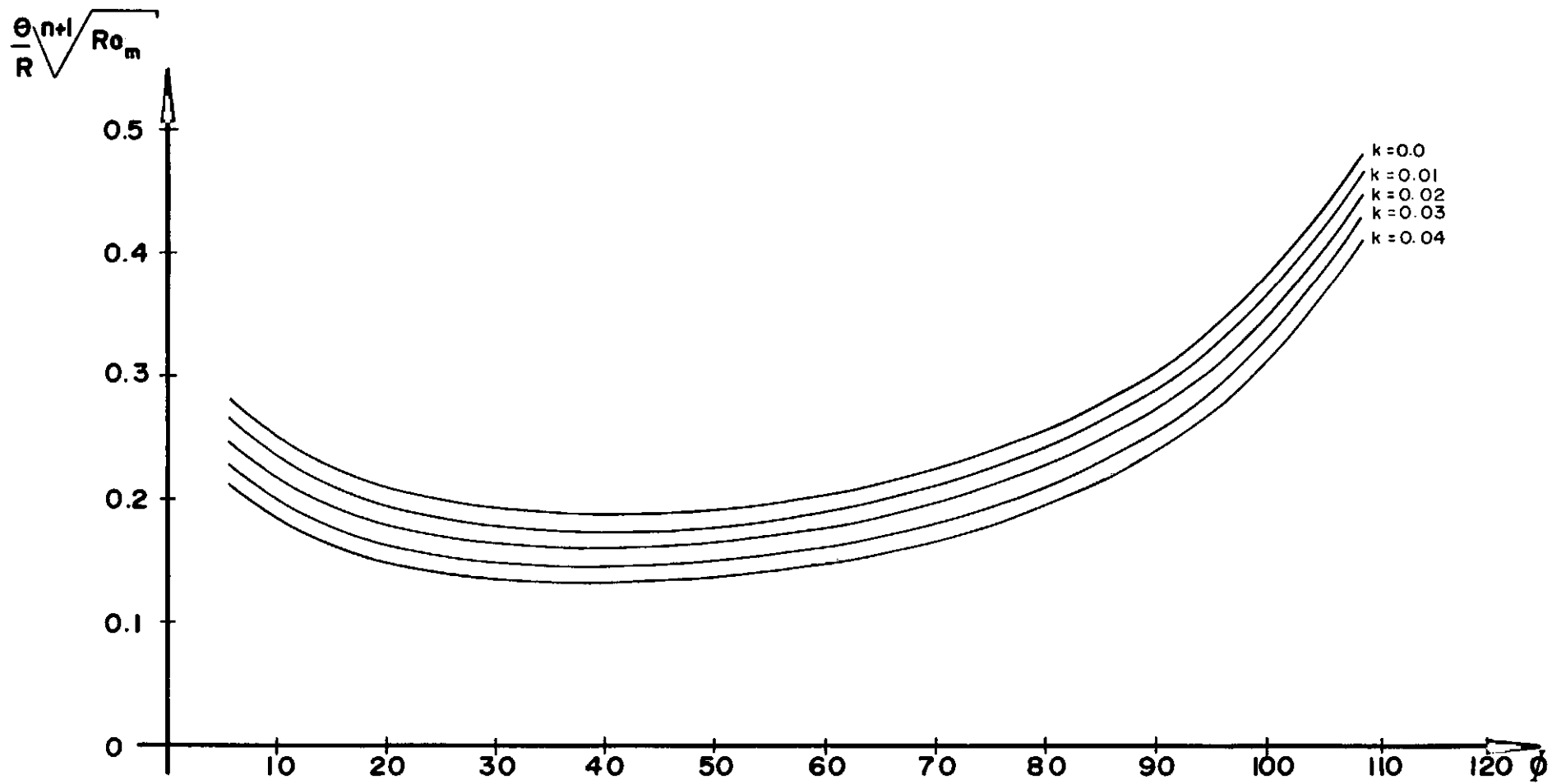


FIG. 4: Espessura de Quantidade de Movimento $n=0.5$

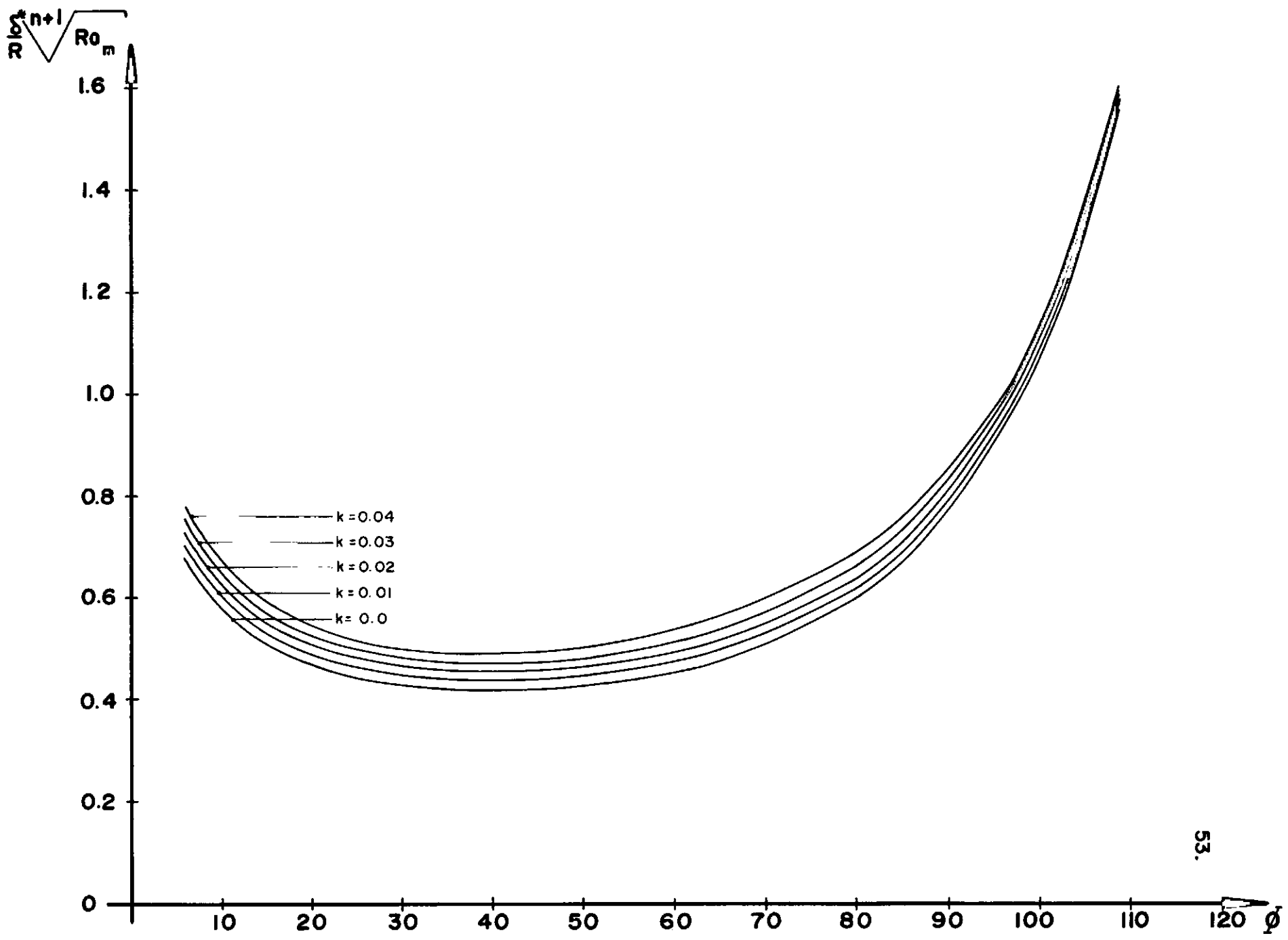


FIG. 5 : Espessura de deslocamento $n=0.5$

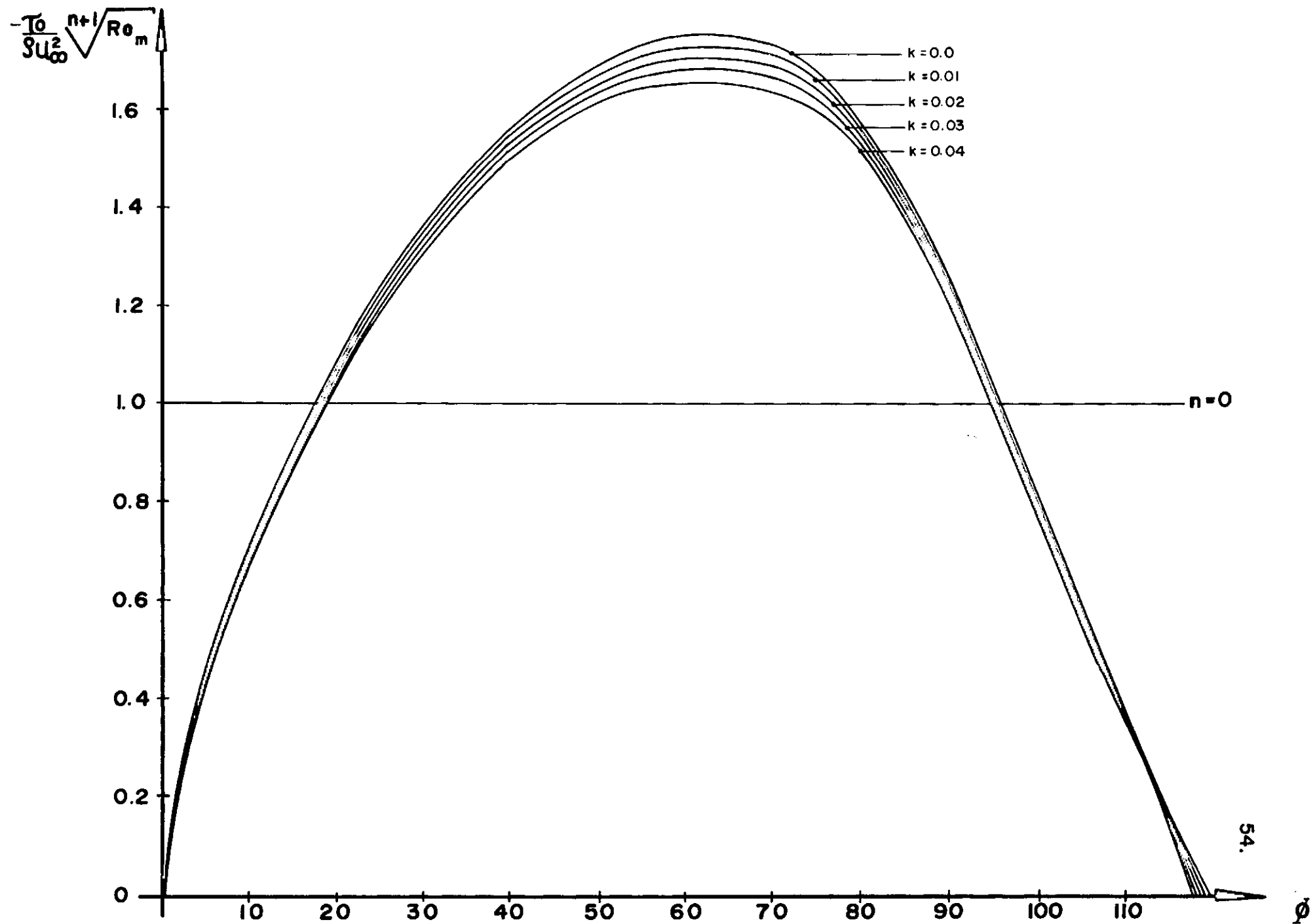


FIG. 6 : Coeficiente de arrasto $n=0.5$ e $n=0$

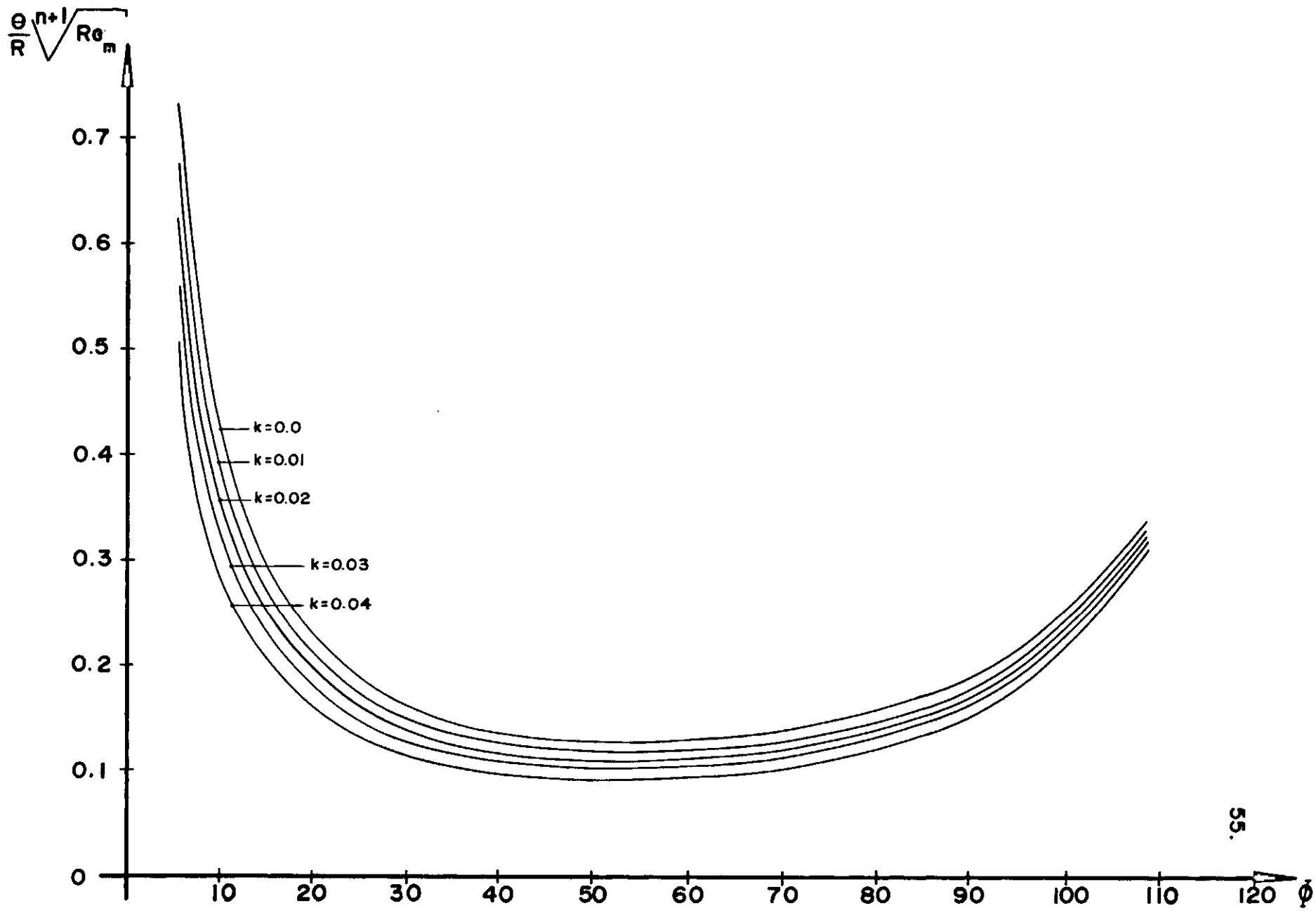


FIG. 7 : Espessura de Quantidade de Movimento $n=0$

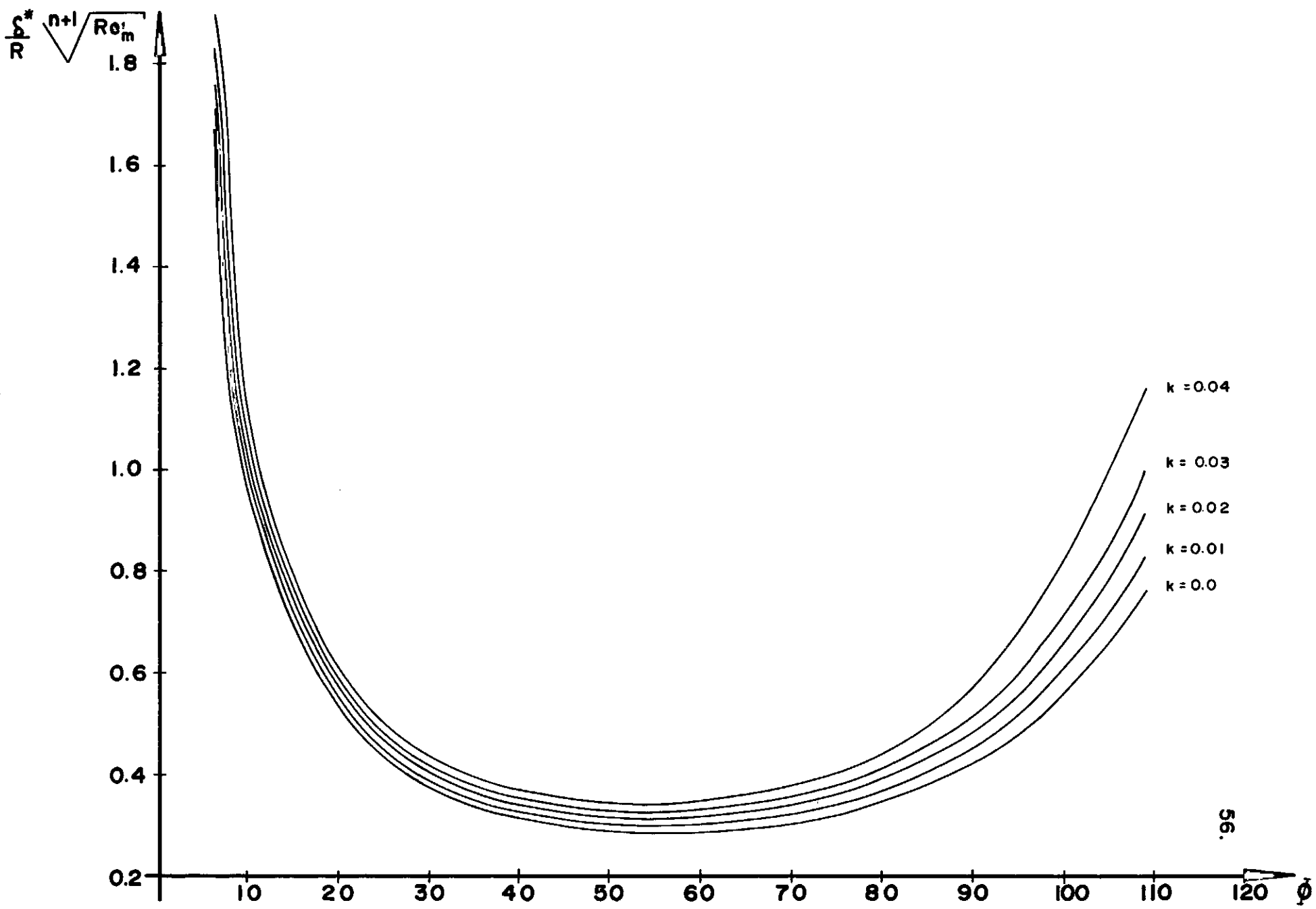


FIG. 8 : Espessura de deslocamento $n=0$

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A solução das equações de camada limite em torno de uma interface cilíndrica, foi obtida através do método aproximado de Pohlhausen. Determinamos valores da espessura de deslizamento (δ^*), da espessura de quantidade de movimento (θ) e do coeficiente de arraste (C_f), para fluidos Newtonianos ($n=1$) e para fluidos pseudo plásticos ($n=0,5$ e $n=0$). A condição de deslizamento na interface, foi levada em conta, como uma grandeza cujo valor é proporcional (constante k) ao valor da velocidade tangencial no escoamento exterior à camada limite. Verificamos que para valores de k acima de 0,04 a solução matemática apresenta instabilidade, mostrando que a velocidade na interface pode ser no máximo em torno de 4% da velocidade do escoamento externo.

Verificamos, ainda, que as grandezas da camada limite, sofrem a influência de dois parâmetros principalmente: o valor de n (índice de consistência do fluido) e do parâ

metro k .

Para $n=1$ e $k=0$ (fluido Newtoniano sem deslizamento), os valores estão de acordo com os resultados já obtidos na literatura ². Quanto menor o valor de n , mais as características do escoamento se afastam das características do escoamento de fluidos Newtonianos ($n=1$) tomados como referência.

O parâmetro k , contribui também decisivamente, na mudança das características do escoamento. O cálculo das grandezas para alguns valores de k (0; 0,01; 0,02; 0,03 e 0,04) mostrou que, quanto maior o valor de k , mais o escoamento se aproxima do escoamento de um fluido ideal. Isto pode ser comprovado pela análise dos pontos em que se dá a separação, nos gráficos do coeficiente de arraste. Aumentando-se o valor de k , a separação tende a ocorrer cada vez mais afastada do ponto de estagnação. A faixa de valores do ângulo ϕ em que se dá a separação, é da ordem de 108° para fluidos Newtonianos e para não-Newtonianos em torno de 119° .

SUGESTÕES PARA PRÓXIMOS TRABALHOS

Levando em conta que o presente trabalho é uma pequena parte deste fascinante estudo, deixamos aqui algumas sugestões para próximos trabalhos:

- 1a.) Resolução do mesmo problema expregando o método de Walz.

Esta primeira sugestão, seria de um trabalho relativamente simples, mas que viria, talvez, simplificar a solução matemática do presente estudo. Consistiria na aplicação do método de Walz, ou seja, a redução da equação (32) a uma simples quadratura pela introdução da seguinte aproximação ²:

$$F(\Gamma) = a - b\Gamma.$$

- 2a.) Mesmo estudo ou resolução através do método de Walz, para interfaces esféricas, ou ainda para o estudo de escoamento em torno de gotas.

- 3a.) Trabalho experimental, que consistiria em me
dir a velocidade terminal de bolhas elevan-
do-se em fluidos não-Newtonianos e o respec
tivo cálculo do coeficiente de arraste.
- 4a.) Outro problema interessante, seria a resolu
ção do mesmo problema, utilizando o modêlo
empírico de Ellis, pois este modêlo é bem
mais elaborado, prevendo inclusive o compor
tamento Newtoniano para valores bastante pe
quenos de taxa de deformação.

APÊNDICE I

INTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Para a integração da equação de movimento, vamos fazer um pequeno artifício. Integramos a equação entre os limites $y=0$ e $y = h(x)$, onde a espessura $y = h(x)$ é em todos os pontos fora da camada limite.

Temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n$$

e ainda pela equação de Bernonilli temos:

$$- \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx}$$

Integrando a equação de movimento:

$$\int_0^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \int_0^h u \frac{dU}{dx} dy + \int_0^h \frac{m}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n dy$$

(I)

Da equação da continuidade:

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Substituindo em (I):

$$\int_0^h \left[u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy - u \frac{dU}{dx} \right] dy = \frac{m}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \Big|_0^h$$

onde:

$$m \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \Big|_0^h = 0 - m \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \Big|_0 = \tau_{xy} \Big|_0 = \tau_0$$

Integrando por partes o 2º termo:

$$\int_0^h \left[\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right] dy = u \Big|_0^y \cdot \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Aplicando as condições de contorno:

$$y = 0 \quad u = kU, \quad v = 0$$

$$y = \delta \quad u = U$$

$$\int_0^h \left[\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right] dy = (1 - k) U \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

(II)

Substituindo (II) em (I):

$$\int_0^h \left[2u \frac{\partial u}{\partial y} - (1 - k) U \frac{du}{dx} - U \frac{dU}{dx} \right] dy = \frac{\tau_0}{\rho}$$

Observamos que: $\int_0^{\infty} = \int_0^h + \int_h^{\infty}$

Como a integral \int_h^{∞} se anula, podemos estender o limite superior até ∞ .

Somando e subtraindo $(1-k) u \frac{dU}{dx}$ e reagrupando ob

temos:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \{u [(1-k) U - u]\} dy + \frac{dU}{dx} \int_0^{\infty} [U - (1-k)u] dy = - \frac{\tau_0}{\rho}$$

(III)

APÊNDICE II

CÁLCULO DAS CONSTANTES DO PERFIL

Temos:

$$\frac{u}{U} = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\eta^4$$

com as condições de contorno:

$$\eta = 0 \quad u = kU ; \quad \frac{\eta m}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - (1-k^2) U \frac{dU}{dx}$$

$$\eta = 1 \quad u = U ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Do perfil de velocidades obtemos:

$$u = U \left[a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\eta^4 \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U \left[\frac{b}{\delta} + \frac{2c\eta}{\delta} + \frac{3d\eta^2}{\delta} + \frac{4e\eta^3}{\delta} \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U \left[\frac{2c}{\delta^2} + \frac{6d\eta}{\delta^2} + \frac{12e\eta^2}{\delta^2} \right]$$

1º cc: $\eta = 0 \quad u = kU \quad \therefore \quad a = k$

2º cc: $\eta = 0 \quad \frac{nm}{\rho} \left(\frac{Ub}{\delta} \right)^{n-1} U \cdot \frac{2c}{\delta^2} = -(1-k^2) U \frac{dU}{dx}$

$$\therefore -2c = \underbrace{\frac{(1-k^2) \delta^{n+1} U^{1-n} U' b^{1-n}}{n\gamma}}_E \quad \text{onde } \gamma = \frac{m}{\rho}$$

Logo:

$$c = -\frac{E}{2}$$

3º cc: $\eta = 1 \quad u = U \quad \therefore \quad a + b + c + d + e = 1$

4º cc: $\eta = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \therefore \quad b + 2c + 3d + 4e = 0$

5º cc: $\eta = 1 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \therefore \quad 2c + 6d + 12e = 0$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$b = \frac{12-12k+E}{6} \quad d = \frac{12k-12+3E}{6} \quad e = \frac{6-6k-E}{6}$$

APÊNDICE III

REGRA DE L'HOSPITAL PARA LEVANTAR A INDETERMINAÇÃO

$$\left. \frac{dZ}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{F(\Gamma)}{U} \right|_{x=0} = \frac{0}{0}$$

Por L'Hospital:

$$\left. \frac{dZ}{dx} \right|_0 = \left. \frac{F'(\Gamma)}{U'} \right|_0$$

Temos ainda que: $F'(\Gamma) = \frac{\partial F}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x}$.

Cálculo de $\frac{\partial F}{\partial E}$:

Da equação (33) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial E} &= \frac{n-1}{6} b^{n-2} H^n \left[\frac{(3n+1)n}{k^2-1} \cdot E \cdot H + \frac{(n+1)n}{k^2-1} EG + (n+1)b \right. \\ &- b^{n-1} H^n \frac{(3n+1)n}{k^2-1} \frac{37-200k-152k^2}{315} - \frac{2E}{945} - \frac{2 \times 118kE}{7560} \\ &\left. - \frac{3E^2}{9072} + \frac{(n+1)n}{k^2-1} \frac{3+4k+3k^2}{10} + \frac{2(k-1)E}{120} + \frac{n+1}{6} \right] \end{aligned}$$

Cálculo de $\frac{\partial E}{\partial \Gamma}$:

$$\text{Temos: } = \frac{n}{1-k^2} E H^{n+1} b^{n-1}$$

$$\text{ou: } f(E, \Gamma) = \frac{n}{1-k^2} E H^{n+1} b^{n-1} - \Gamma = 0$$

$$\text{e, } \frac{\partial E}{\partial \Gamma} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \Gamma}}{\frac{\partial f}{\partial E}} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial E}}$$

$$\text{onde: } \frac{\partial f}{\partial E} = \frac{n}{1-k^2} E H^{n+1} b^{n-1} - \frac{n(n+1)}{1-k^2} E H^n b^{n-1} \cdot \left[\frac{1}{945} + \frac{118k}{7560} + \frac{2E}{9072} \right] + \frac{n(n-1)}{6(1-k^2)} \cdot E \cdot H^{n+1} \cdot b^{n-2}$$

Cálculo de $\frac{d\Gamma}{dx}$

$$\Gamma = ZU'$$

$$\frac{d\Gamma}{dx} = Z'U' + ZU''$$

Substituindo, obtemos:

$$F'(\Gamma) = \frac{\partial F}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial \Gamma} \cdot (Z'U' + ZU'')$$

Logo:

$$\frac{dZ}{dx} \Big|_0 = \frac{\frac{\partial F}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \Gamma} (Z'U' + ZU'') \Big|_0}{U' \Big|_0} .$$

APÊNDICE IV

EXPRESSÕES ADIMENSIONAIS DE θ , δ^* E C_f

a) Espessura da quantidade de movimento.

Da equação (29):

$$Z = \frac{\theta^{n+1} U^{1-n}}{\gamma}$$

ou:

$$Z = \frac{\theta^{n+1} U^{1-n}}{\gamma} \cdot \frac{U_\infty^{2-n}}{U_\infty^{1-n} U_\infty} \cdot \frac{R^n \cdot R}{R^{n+1}}$$

$$\therefore \frac{Z U_\infty}{R} = \left(\frac{\theta}{R}\right)^{n+1} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{1-n} \frac{U_\infty^{2-n} R^n}{\gamma}$$

$$\therefore Z^* = \left(\frac{\theta}{R}\right)^{n+1} U_*^{1-n} Re_m$$

finalmente:

$$\frac{\theta}{R} \sqrt[n+1]{\text{Re}_m} = \sqrt[n+1]{Z^* U^{*n-1}}$$

b) Espessura de deslocamento δ^* .

Temos que:

$$\frac{\delta^*}{\theta} = \frac{G}{H} = f_1(\Gamma).$$

Logo:

$$\frac{\delta^*}{R} \sqrt[n+1]{\text{Re}_m} = \frac{\theta}{R} \sqrt[n+1]{\text{Re}_m} ; f_1(\Gamma).$$

c) Coeficiente de arraste.

Da equação (31):

$$-\frac{\tau_o \theta^n}{m U^n} = f_2(\Gamma)$$

adimensionalizando:

$$\frac{-\tau_0 \left[\frac{\theta}{R} \sqrt[n+1]{\text{Re}_m} \right]^n U_\infty^2 R^n}{\left[\sqrt[n+1]{\text{Re}_m} \right]^n \frac{m}{\rho} \cdot \rho \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^n U_\infty^n U_\infty^2} = f_2(\Gamma)$$

$$\therefore \frac{-\tau_0 \sqrt[n+1]{\text{Re}_m}}{\rho U_\infty^2} = f_2(\Gamma) \frac{U^{*n}}{\left[\frac{\theta}{R} \sqrt[n+1]{\text{Re}_m} \right]^n}$$

BIBLIOGRAFIA

1. LINDT, J.T., "Note on the wake behind a two dimensional bubble", Chem. Eng. Sci., 26, 1776, (1971).
2. SCHLICHTING, H., "Boundary layer theory", McGraw-Hill, New York, (1960).
3. SCHMAL, M., "Eine Näherungslösung für die Kondensation von laminar strömendem Dampf mit beliebigen Druckgradienten bei kleiner Mach-Zahl und konstanten Stoffwerten", Dissertation T.U. Berlin, (1970).
4. LEVICH, V.G., "Physico-Chemical Hydrodynamics", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1964).
5. MOORE, D.W., "The rise of a gas bubble in a viscous liquid", J. Fluid Mech., 6, 113, (1959).
6. MOORE, D.W., "The boundary layer on a spherical gas bubble", J. Fluid Mech., 16, 161 (1963).

7. ASTARITA, G. e APUZZO, G., "Motion of gas bubbles in non-Newtonian liquids", AICHE J., 11, 815 (1965).
8. BIZZEL, G.D. e SLATERRY, J.C., "Non-Newtonian Boundary layer flow", Chem. Eng. Sci., 17, 777 (1962).
9. SKELLAND, A.H.P., "Non-Newtonian Flow and Heat-Transfer", John Wiley & Sons Inc., New York (1967).
10. METZNER, A.B. e REED, J.C., "Flow of non-Newtonian fluids-correlation of the laminar, transition and turbulent flow regions", AICHE J., 1, 434 (1955).
11. METZNER, A.B., em "Handbook of Fluid Dynamics", editado por V.L. Streeter, Seção 7, McGraw-Hill Book Co., New York (1961).
12. SCHOWALTER, W.R., "The application of boundary layer to power law pseudoplastic fluids: similar solutions", AICHE J., 6, 24 (1960).
13. ACRIVOS, A., SHAH, M.J e PETERSEN, E.E., "Momentum and heat transfer in laminar boundary layer flows of non-Newtonian fluids past external surfaces", AICHE J., 6, 312 (1960).

14. GEROPP, D., Dissertation, Karlsruhe (1963) (como citado em 3).
15. SPARROW, E.M., KOH, J.C.Y. e HARTNETT, J.P., "The two phase boundary layer in laminar film condensation", Int. J. Heat Mass Transfer, 2, 69 (1961).
16. KOH, J.C.Y., "Film condensation in a forced-convection boundary layer flow", Int. J. Heat Mass Transfer, 5, 941 (1962).
17. BIRD, R.B., STEWART, W.E. e LIGHTFOOT, E.N., "Transport Phenomena", Wiley, New York (1960).

SIMBOLOGIA

a, b, c, d, e → coeficientes do perfil de velocidades.

C_f → coeficiente de arraste.

d_j^i → tensor taxa de deformação.

$D = \frac{\partial u}{\partial y}$ → componente da taxa de deformação.

E → fator de forma definido pela equação (19).

f^i → forças de campo.

$f_1(\Gamma) = \frac{G}{H}$ → função de Γ .

$f_2(\Gamma)$ → definida pela equação (31).

$F(\Gamma)$ → função de Γ .

F_r → número de Froude.

g → aceleração da gravidade.

G → definido pela equação (23).

H → definido pela equação (24).

k → coeficiente de deslizamento.

m → índice de consistência do fluido.

n → índice de comportamento do escoamento.

- p → pressão.
- R → raio da superfície cilíndrica.
- Re → número de Reynolds.
- Re_m → número de Reynolds para fluidos "power law".
- t → tempo
- u → componente longitudinal da velocidade na C.L.
- U → velocidade do escoamento potencial.
- U_∞ → velocidade característica.
- U_k → velocidade de deslizamento na interface.
- v → componente normal da velocidade na C.L.
- x → coordenada longitudinal.
- y → coordenada normal.
- Z → função definida pela equação (29).