

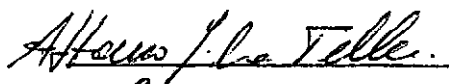
ESTUDO ANALÍTICO DA CONVECÇÃO NATURAL
JUNTO A UMA PLACA INCLINADA PARA NÚMEROS
DE PRANDTL BAIXOS

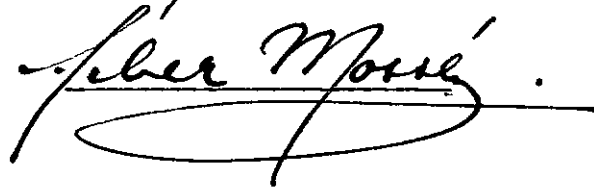
HAMILTON LOURENÇO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:


Presidente





RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
ABRIL DE 1971

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Luiz de Mello F. Guinle pela dedicação e segura orientação d'êste trabalho. Pelos seus sacrifícios de ordem pessoal estamos profundamente agradecidos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior pela ajuda financeira que possibilitou a realização do meu curso de Mestrado na COPPE.

Aos Departamentos de Cálculo Científico da COPPE e da Universidade de Brasília pelo auxílio nos trabalhos de computação.

RESUMO

O trabalho apresenta uma análise de perturbação para a convecção natural laminar junto a uma placa inclinada isotérmica, utilizando a solução clássica da camada limite como aproximação de ordem zero. A análise é estendida para perturbações até segunda ordem, de tal forma que maior número de termos das equações de conservação são considerados e seus efeitos analisados separadamente. Todas as equações de perturbação foram resolvidas numericamente para os números de Prandtl 0.733 e 0.03 e ângulos de inclinação 0,30,45 e 60°. As distribuições das componentes do campo de velocidade e o campo de temperatura foram comparados com os resultados experimentais existentes na literatura. Traçaram-se as curvas do número de Nusselt em função do número de Grashof e determinaram-se os números de Grashof limites para os quais as correções do fluxo térmico são iguais a 5%.

ABSTRACT

The present work performs a perturbation analysis of laminar free convection about an inclined isothermal plate, using the classical boundary layer solution as the zeroth-order perturbation. The analysis is extended to second-order perturbations and the effects of the additional terms considered in the conservation equations are investigated separately. The perturbation equations were solved numerically for Prandtl numbers 0.733 and 0.03 and inclination angles of 0,30,45 and 60°. Velocity and temperature profiles are compared to the experimental results existing in the literature. Nusselt number versus Grashof number curves are plotted. Limiting Grashof numbers corresponding to heat flux corrections of 5 percent are presented.

ÍNDICE

RESUMO.....	ii
INTRODUÇÃO.....	1
ANÁLISE.....	6
RESULTADOS.....	15
DISCUSSÃO.....	27
CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	31
SIMBOLOGIA.....	32
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	34
APÊNDICE A.....	35
APÊNDICE B.....	41

INTRODUÇÃO

O estudo da convecção natural junto a superfícies de várias formas e sob diversas condições tem interessado a diversos pesquisadores na busca de soluções analíticas que mais se aproximem dos resultados experimentais encontrados na literatura.

Os primeiros estudos analíticos a respeito do assunto utilizam as equações da camada limite laminar, as quais fornecem soluções assintóticas das equações de Navier-Stokes, continuidade e energia para o número de Grashof tendendo ao infinito.

A solução das equações da camada limite laminar para placa vertical isotérmica foi primeiramente determinada por E. Pohlhausen que a obteve por meio de uma transformação de similaridade que reduz o sistema de equações de derivadas parciais a um sistema de derivadas totais. Esta transformação de similaridade está indicada por ECKERT-DRAKE¹. Posteriormente, OSTRACH² analisou o problema supondo inicialmente a viscosidade e a condutividade térmica como funções só da temperatura e mostrou que realmente os termos de dissipação viscosa e trabalho de compressão podiam ser desprezados na equação da energia e que portanto a simultaneidade entre as equações da quantidade de movimento e da energia era devida somente ao termo de empuxo na equação da quantidade de movimento. Embora chegando às mesmas equações de Pohlhausen, Ostrach mostrou claramente o significado de todos os parâmetros importantes e das hipóteses simplificadoras, contribuindo para um melhor entendimento deste tipo de escoamento e das limitações da teoria.

Os resultados obtidos pela integração das equações da camada limite eram satisfatórios apenas para altos números de Grashof. Os resultados experimentais mostravam que para a faixa de números de Grashof pequenos ou moderados era necessário introduzir-se novas técnicas de análise.

O primeiro desenvolvimento analítico nesse sentido foi realizado por YANG-JERGER³ que utilizaram um método de perturbação até primeira ordem, onde a solução clássica da camada limite era a aproximação de

ordem zero. Entretanto, pelo método utilizado, as equações de quantidade de movimento e de energia na aproximação de primeira ordem são homogêneas. Se fossem introduzidas as condições físicas de contorno usuais junto a placa e no escoamento livre, que também são homogêneas, obter-se-ia apenas a solução trivial. Esta dificuldade foi contornada pelos autores através a introdução de uma condição de contorno no escoamento livre proveniente do escoamento potencial. Para tal foi considerado que o limite externo da camada limite comportava-se como um plano sumidouro de potência proporcional à componente de velocidade na direção normal a placa. Os resultados obtidos para o perfil de velocidade são melhores que o determinado pela solução clássica, quando comparados com os resultados experimentais. Entretanto, o fluxo de calor encontrado é menor que o obtido pela solução clássica, enquanto que os resultados experimentais mostram que o fluxo é maior que o obtido pela solução clássica. Os autores embora partindo das equações de conservação, só estabeleceram as equações de perturbação até primeira ordem, com o que deixaram de considerar vários termos das equações, entre os quais o termo da condução longitudinal na equação da energia. Os autores sugerem que a discrepância observada no valor do fluxo de calor deveria ser proveniente do fato de se ter desprezado o efeito de condução junto a extremidade da placa.

SURIANO-YANG-DONLON⁴ utilizando uma análise de perturbação da equação da condução, onde a equação de Laplace da condução era a aproximação de ordem zero, estudaram o problema para números de Grashof extremamente pequenos, $0 < Gr < 1$. Para tal a análise foi estendida para perturbações até segunda ordem, e os sistemas de equações foram resolvidos pelo método de relaxação. Os autores mostram que a componente de velocidade na direção normal a placa é consideravelmente menor que a componente de velocidade na direção da placa, mas que não deve ser desprezada nessa região. Essa desigualdade cresce com o aumento do número de Grashof até atingir eventualmente a ordem de grandeza de $Gr^{-1/4}$ estabelecida pela solução clássica. Os autores estendem seus resultados para altos Grashof e indicam que a correção devida ao efeito de extremidade é mais significativa que as obtidas por perturbação da solução clássica dadas por Yang-Jerger, mostrando assim que

o efeito da condução longitudinal embora seja de segunda ordem não pode ser desprezado.

Recentemente SPARROW-GUINLE⁵ analisaram o problema em placas verticais por meio de uma análise de perturbação da solução clássica, onde outros termos das equações de conservação foram considerados e seus efeitos analisados separadamente. Os resultados obtidos mostraram uma correção positiva para o fluxo de calor dado pela solução clássica e portanto são melhores que os de Yang-Jerger. Pelo método utilizado os autores chegaram a equações de perturbação não homogêneas, que foram resolvidas sem a necessidade de se introduzir qualquer modelo para o escoamento potencial. Os autores verificaram que as correções sobre a solução clássica se tornavam maiores para números de Prandtl mais baixos.

Para o caso de placas inclinadas, podem ser encontrados na literatura alguns resultados experimentais e apenas uma análise teórica. As dificuldades experimentais parecem decorrer da instabilidade do escoamento laminar devido à inclinação da placa. As análises teóricas necessitam, como no caso de placas verticais, de técnicas que permitam o estudo das equações de conservação com maior número de termos. Observe-se que neste caso temos que adicionar o termo de empuxo na direção normal a placa, e que será a excitação para a componente do gradiente de pressão naquela direção.

O desenvolvimento do estudo da convecção natural em placas inclinadas isotérmicas inicia-se com o trabalho experimental de RICH⁶. Os resultados experimentais foram obtidos por meio de um interferômetro Mach-Zehnder. O fluido ensaiado foi o ar e os dados obtidos na faixa de números de Grashof de 10^6 a 10^9 que corresponde à região de transição. Os perfis de temperatura foram determinados para vários ângulos de inclinação. O autor indica que para superfícies moderadamente inclinadas, o número de Nusselt podia ser calculado multiplicando-se o valor obtido para placa vertical pelo coeficiente $(\cos \phi)^{1/4}$ onde ϕ é o ângulo entre a direção da superfície e a vertical. Esta correção também é indicada por KREITH⁷.

Recentemente KIERKUS⁸ analisou o problema do ponto de vista teórico e também realizou os levantamentos experimentais para a determinação do campo de temperatura e dos perfis de velocidade.

A análise teórica segue exatamente o mesmo procedimento de Yang-Jerger através de um método de perturbação da solução clássica. O autor considera também as perturbações até primeira ordem, com o que não considera vários termos das equações de conservação, encontrando como Yang-Jerger as mesmas dificuldades de interpretação dos resultados e já citadas anteriormente. Análogamente à referência 3, o autor introduz uma condição de contorno no escoamento livre proveniente do escoamento potencial, que é tomado de modo que o limite externo da camada limite se comporte como um plano sumidouro de potência proporcional à componente de velocidade na direção normal à placa. Os perfis de velocidade e temperatura foram medidos experimentalmente para ar, por meio de interferômetro Mach-Zehnder.

YUNG-OETTING⁹ utilizando termopares determinaram experimentalmente, para o ar, o campo de temperatura para a face inferior da placa. Os autores tomam para correção da solução clássica o fator $(1+\cos \phi)/2$ em lugar do fator $(\cos \phi)^{1/4}$ sugerido por Rich e Kreith.

O presente trabalho segue o método apresentado por Sparrow-Guinle que oferece a vantagem, com relação ao da referência 3, de introduzir correções positivas para o número de Nusselt da solução clássica, e portanto no sentido indicado pelos resultados experimentais. Por outro lado, os autores da referência 5, verificaram que as correções eram maiores para números de Prandtl mais baixos, e que este comportamento era devido ao espessamento da camada limite. Estas constatações incentivaram a aplicação do método para placas inclinadas onde o espessamento da camada limite é devido à inclinação da placa. O método utilizado elimina a pressão das equações de quantidade de movimento por diferenciação e subtração. O parâmetro de perturbação tem inicialmente uma forma genérica que é posteriormente determinada, de tal forma que torne possível o estabelecimento das equações diferenciais totais de perturbação. As equações de perturbação foram estabelecidas até segunda ordem, ou seja, tomando-se três termos em todas as expansões em série das variáveis dependentes, de modo que grande número de termos das equações de conservação foram considerados. As equações diferenciais totais de perturbação foram resolvidas numericamente para os números de Prandtl 0.733 e 0.03 e ângulos de 0,30,45 e 60°. Os efei

tos de $\partial p / \partial y$, $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^2 T / \partial x^2$ foram calculados separadamente a fim de determinar-se a predominância e influência de cada um na solução das equações de conservação. Os desvios entre a presente solução e a solução clássica modificada pelo fator $(\cos \phi)^{1/4}$ foram calculados para vários números de Grashof. Determinaram-se os números de Grashof limites correspondentes a um desvio de 5% em relação a solução clássica modificada. Os perfis de velocidade e o campo de temperatura foram computados e comparados com os resultados experimentais. Levantou-se a variação do número de Nusselt local contra o número de Grashof local para os números de Prandtl 0.733 e 0.03 considerando-se todos os ângulos de inclinação. A comparação entre a presente análise e os resultados experimentais para baixos números de Prandtl não pode ser realizada devido a inexistência de dados na literatura nessa faixa de números de Prandtl.

ANÁLISE

O estudo de convecção natural em regime permanente numa placa inclinada, semi-infinita, isotérmica pode ser convenientemente descrito pelas seguintes equações de conservação

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g\beta(T_w - T_\infty)(\cos\phi)\theta + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g\beta(T_w - T_\infty)(\sin\phi)\theta + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

As equações acima são estabelecidas para propriedades do fluido constantes, excepto para a densidade no termo da força de empuxo causadora do movimento. Dissipação viscosa e trabalho de compressão são desprezados. O termo $\partial^2 v / \partial x^2$ na equação (3) não influi nas equações de perturbação até segunda ordem, como será indicado posteriormente.

O sistema de coordenadas utilizado está indicado na Fig.1. A validade para ambos os casos apresentados, ou seja, $T_w > T_\infty$ e $T_w < T_\infty$ está claramente discutida na referência 2. Analisa-se apenas o caso em que a temperatura da placa é maior que a do ambiente, sendo os resultados aplicáveis no caso contrário.

As condições de contorno do problema são

$$\left. \begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \\ \theta = 1 \end{array} \right\} y = 0 \quad \left. \begin{array}{l} u \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow 0 \end{array} \right\} y \rightarrow \infty \quad (5)$$

Derivando-se a equação (2) em relação a y , a equação (3) em

relação a x e subtraindo os resultados obtém-se a seguinte forma compacta das equações (2) e (3)

$$\begin{aligned} u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = g\beta(\cos\phi)(T_w - T_\infty) \frac{\partial \theta}{\partial y} - g\beta(\sin\phi)(T_w - T_\infty) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \\ + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

O procedimento acima elimina a pressão das equações (2) e (3) obtendo-se uma única equação de quantidade de movimento de ordem mais alta. Este método foi utilizado por Sparrow-Guinle.

A solução da equação (1) pode ser escrita em termos da função fluxo ψ definida pelas relações

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

Introduzindo a função fluxo ψ nas equações (6) e (4) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} = g\beta(\cos\phi)(T_w - T_\infty) \frac{\partial \theta}{\partial y} - \\ - g\beta(\sin\phi)(T_w - T_\infty) \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \left(2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

Faz-se

$$\psi = 4\nu(Gr_x/4)^{1/4}(\cos\phi)^{1/4}f(\xi, \eta) = 4\nu Cx^{3/4}f(\xi, \eta) \quad (10)$$

onde

$$\eta = \frac{y}{x} (Gr_x/4)^{1/4} (\cos\phi)^{1/4} = C_{yx}^{-1/4}$$

$$\xi = Ax^n \quad (11)$$

$$C = (g\beta(T_\omega - T_\infty)\cos\phi/4\nu^2)^{1/4}$$

Esta transformação é semelhante a usada por Pohlhausen e indicada por Eckert-Drake, ressalvado que no presente caso a função f da equação (10) possui duas variáveis adimensionais independentes, sendo η a variável usual de similaridade e ξ o parâmetro de perturbação. A variável ξ tem inicialmente a forma arbitrária estabelecida na equação (11), sendo que as constantes A e n serão determinadas a posteriori de tal forma que torne possível o estabelecimento das equações diferenciais totais de perturbação.

A equação (10) com a mudança de variáveis indicada pela equação (11) fornece

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 4\nu C^2 x^{1/2} \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (12)$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \nu C x^{-1/4} \left(-3f + n \frac{\partial f}{\partial \eta} - 4n\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (13)$$

e as seguintes condições de contorno correspondentes às indicadas em (5)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \\ f = 0 \\ \theta = 1 \end{array} \right\} \eta = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow 0 \\ \\ \theta \rightarrow 0 \end{array} \right\} \eta \rightarrow \infty \quad (14)$$

Introduzindo a equação (10) com a mudança de variáveis indicada em (11) nas equações (8) e (9) e agrupando os termos com a mesma potência de x , verifica-se por inspeção que é possível uma solução de similaridade

dade, bastando tomar-se

$$(x^{-3/4})/\sqrt{2C} = (Gr_x \cos\phi)^{-1/4} = \xi$$

e portanto as constantes A e n estão determinadas.

Introduzindo as expansões

$$f(\xi, n) = f_0(n) + \xi f_1(n) + \xi^2 f_2(n) + \dots \quad (15)$$

$$\theta(\xi, n) = \theta_0(n) + \xi \theta_1(n) + \xi^2 \theta_2(n) + \dots \quad (16)$$

e agrupando as parcelas com a mesma potência de ξ obtém-se as equações de perturbação

Equação de ordem zero

$$f_0'''' + 3f_0 f_0'''' - f_0' f_0'' + \theta_0' = 0$$

$$\theta_0'' + 3Pr f_0' \theta_0' = 0$$

Equação de ordem um

$$f_1'''' + 3f_0 f_1'''' + 2f_0' f_1'' - f_0'' f_1' + \theta_1' + \frac{\sqrt{2}}{4} \theta_0' \operatorname{tg}\phi = 0$$

$$\theta_1'' + 3Pr f_0' \theta_1' + 3Pr f_0'' \theta_1 = 0$$

Equação de ordem dois

$$f_2'''' + 3f_0 f_2'''' + 5f_0' f_2'' - f_0'' f_2' - 3f_0''' f_2 + \theta_2' = F$$

$$\theta_2'' + 3Pr f_0' \theta_2' + 6Pr f_0'' \theta_2 - 3Pr \theta_0' f_2 = G$$

onde $F = \text{função}(f_0, f_0', f_0'', f_1', f_1'', \theta_0, \theta_0', n)$

$G = \text{função}(\theta_0', \theta_0'', n)$

A forma das funções F e G depende dos termos considerados nas equações (2) e (3) ou (4), e que serão indicados adiante para 4 casos

Observando que

$$f_0'''' + 3f_0' f_0'''' - f_0' f_0'' + \theta_0' = \frac{d}{dn} (f_0'''' + 3f_0' f_0'' - 2f_0'^2 + \theta_0)$$

$$f_1'''' + 3f_0' f_1'''' + 2f_0' f_1'' - f_0'' f_1' + \theta_1' = \frac{d}{dn} (f_1'''' + 3f_0' f_1'' - f_1' f_0' + \theta_1)$$

$$f_2'''' + 3f_0' f_2'''' + 5f_0' f_2'' - f_0'' f_2' - 3f_0'' f_2 + \theta_2' =$$

$$\frac{d}{dn} (f_2'''' + 3f_0' f_2'' + 2f_0' f_2' - 3f_0'' f_2 + \theta_2)$$

obtem-se

Equação de ordem zero

$$f_0'''' + 3f_0' f_0'' - 2f_0'^2 + \theta_0' = 0 \quad (17)$$

$$\theta_0'' + 3Pr f_0' \theta_0' = 0$$

com as seguintes condições de contorno

$$\left. \begin{array}{l} f_0 = 0 \\ f_0' = 0 \\ \theta_0 = 1 \end{array} \right\} \eta = 0 \quad \left. \begin{array}{l} f_0' \rightarrow 0 \\ \theta_0 \rightarrow 0 \end{array} \right\} \eta \rightarrow \infty \quad (18)$$

A equação (17) com as condições de contorno (18) representa a solução clássica da camada limite, e independe do ângulo de inclinação.

Equação de ordem um

$$f_1'''' + 3f_0' f_1'' - f_0'' f_1' + \theta_1' = \frac{\tau_0}{\eta} \frac{\sqrt{2}}{4} n \theta_0' \operatorname{tg} \phi \, dn \quad (19)$$

$$\theta_1'' + 3Pr f_0' \theta_1' + 3Pr f_0'' \theta_1 = 0$$

com as seguintes condições de contorno

$$\left. \begin{array}{l} f = 0 \\ f_1' = 0 \\ \theta_1 = 0 \end{array} \right\} \eta = 0 \qquad \left. \begin{array}{l} f_1' \rightarrow 0 \\ \theta_1 \rightarrow 0 \end{array} \right\} \eta \rightarrow \infty \quad (20)$$

Equação de ordem dois

$$f_2'''' + 3f_0 f_2'' + 2f_0' f_2' - 3f_0'' f_2 + \theta_2 = \int_0^{\infty} F dn \quad (21)$$

$$\theta_2'' + 3Pr f_0' \theta_2' + 6Pr f_0'' \theta_2 - 3Pr \theta_2' f_2 = G$$

com as seguintes condições de contorno

$$\left. \begin{array}{l} f_2 = 0 \\ f_2' = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{array} \right\} \eta = 0 \qquad \left. \begin{array}{l} f_2' \rightarrow 0 \\ \theta_2 \rightarrow 0 \end{array} \right\} \eta \rightarrow \infty \quad (22)$$

Note-se que as equações (17), (19) e (21) são simultâneas como é característico dos problemas de convecção natural. Por outro lado a solução da equação (19) necessita da solução da equação (17), enquanto que a equação (21) necessita das soluções das equações (17) e (19).

A equação homogênea

$$\theta_1'' + 3Pr f_0' \theta_1' + 3Pr f_0'' \theta_1 = 0$$

com as condições de contorno $\theta_1(0) = \theta_1(\infty) = 0$ também homogêneas, tem apenas a solução trivial, ou seja, $\theta_1 = 0$.

Os sistemas de equações foram resolvidos numericamente num computador digital IBM 1130 para 4 casos, a saber:

caso 1 - desprezando os termos $\partial^2 u / \partial x^2, \partial^2 T / \partial x^2$ respectivamente nas equações (2) e (4), a fim de verificar a influência do gradiente transversal de pressão. Neste caso determina-se para as funções F e G

$$F_1 = 2f_1' f_1'' + (-27f_0' f_0'' - 3f_0''^2 + \eta(f_0'^2 - 6f_0' f_0'' - 3\theta_0)) + (6f_0' f_0'' - \theta_0')/8$$

$$G_1 = 0$$

caso 2 - desprezando o termo $\partial^2 T / \partial x^2$ na equação (4) e o gradiente transversal de pressão, ou seja, a equação (3), a fim de verificar a influência de $\partial^2 u / \partial x^2$. Neste caso determina-se para as funções F e G

$$\int F_2 d\eta = (4f_0' - \eta f_0'' - \eta^2(2f_0'^2 - 3f_0' f_0'' - \theta_0))/8$$

$$G_2 = 0$$

caso 3 - desprezando o termo $\partial^2 u / \partial x^2$ na equação (2) e a equação (3), a fim de verificar-se a influência de $\partial^2 T / \partial x^2$. Neste caso determina-se para as funções F e G

$$F_3 = 0$$

$$G_3 = -(5\eta\theta_0' + \eta^2\theta_0'')/8$$

caso 4 - considerando todos os termos presentes, a fim de determinar a solução total do problema. Neste caso determina-se para as funções F e G

$$F_4 = F_1 + F_2 + F_3$$

$$G_4 = G_1 + G_2 + G_3$$

A solução dos sistemas de equações para os quatro casos foram encontradas numericamente para os números de Prandtl 0.733 e 0.03, para os ângulos de inclinação 0,30,45 e 60°.

Os perfis das componentes de velocidade são determinados a partir das equações (12) e (13) obtendo-se na forma adimensional

$$u \frac{L}{\nu} (4\chi Gr_L)^{-1/2} = \frac{\partial f}{\partial \eta} = f_0' + \xi f_1' + \xi^2 f_2' \quad (23)$$

$$-v \frac{L}{\nu} (Gr_L/4\chi)^{-1/4} = 3f - \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - 3\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} = 3f_0 - \eta f_0' - \xi \eta f_1' - \xi^2(3f_2 + f_2')$$

onde

$$\xi = (Gr_x \cos \phi)^{-1/4} = (Gr_L \cos \phi)^{-1/4} x^{-3/4} \quad (24)$$

$$x = \frac{x}{L}$$

As equações (23) são colocadas em função de Gr_L e x a fim de comparar-se os resultados da presente análise com os resultados experimentais da referência 8.

O perfil de temperatura é determinado a partir da equação (16)

$$\theta = \theta_0 + \xi^2 \theta_2 \quad (25)$$

onde ξ é dado em (24).

Para a análise dos resultados é muito importante determinar-se a quantidade de calor transferida por unidade de área, o número de Nusselt e as relações entre estas grandezas com as correspondentes da solução clássica modificada.

A lei de Fourier fornece

$$q = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -\kappa (T_w - T_\infty) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Tendo em vista as transformações indicadas em (11) vem

$$q = -\kappa (T_w - T_\infty) C x^{-1/4} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}$$

Substituindo o valor de C e tendo em vista a equação (16) vem

$$q = -\kappa (T_w - T_\infty) (Gr_x / 4)^{1/4} \frac{1}{x} \theta'_0(0) \left(1 + \xi^2 \frac{\theta'_2(0)}{\theta'_0(0)} \right) (\cos \phi)^{1/4} \quad (26)$$

A solução clássica das equações da camada limite com a modificação indicada por Rich fornece

$$q_0 = -\kappa(T_\omega - T_\infty)(Gr_x/4)^{1/4} \frac{1}{x} \theta'_0(0) (\cos\phi)^{1/4}$$

Levando êsse valor em (26) vem

$$q = q_0 \left(1 + \xi^2 \frac{\theta'_0(0)}{2} \right) \quad (27)$$

Portanto, o desvio da presente solução em relação a solução clássica modificada é dado por

$$D = \frac{q - q_0}{q_0} = \frac{\xi^2 \frac{\theta'_0(0)}{2}}{\theta'_0(0)} = (Gr_x \cos\phi)^{-1/2} \frac{\theta'_0(0)}{2} \quad (28)$$

Para o número de Nusselt local tem-se

$$Nu_x = \frac{qx}{\kappa(T_\omega - T_\infty)} = -(Gr_x/4)^{1/4} \theta'_0(0) \left(1 + \xi^2 \frac{\theta'_0(0)}{2} \right) (\cos\phi)^{1/4}$$

Lembrando que $\xi = (Gr_x \cos\phi)^{-1/4}$ obtém-se a relação entre o número de Nusselt local e o número de Grashof local

$$Nu_x = -(Gr_x/4)^{1/4} \theta'_0(0) \left(1 + (Gr_x \cos\phi)^{-1/2} \frac{\theta'_0(0)}{2} \right) (\cos\phi)^{1/4} \quad (29)$$

É evidente que o desvio entre o número de Nusselt local calculado pela presente análise e o calculado pela solução clássica modificada é dado pela equação (28). Convém indicar que o número de Nusselt da solução clássica modificada é dado por

$$Nu_x = -(Gr_x/4)^{1/4} \theta'_0(0) (\cos\phi)^{1/4} \quad (30)$$

RESULTADOS

A integração das equações (17), (19) e (21) com as condições de contorno (18), (20) e (22) foi executada numericamente para os números de Prandtl 0.733 e 0.03 para os quatro casos já mencionados. O método numérico utilizado foi o Runge-Kutta de 4 termos.

O procedimento utilizado para solução das equações de perturbação, bem como o método iterativo necessário à determinação dos valores de $f''(0)$ e $\theta'(0)$ em cada equação de perturbação estão indicados nos Apêndices A e B.

Os valores iniciais das derivadas acima na equação de ordem zero, que independe do ângulo de inclinação, estão indicados na Tabela 1.

Tabela 1 - valores iniciais de θ' e f'' da equação de ordem zero

	$\theta'_0(0)$	$f''_0(0)$
Pr = 0.733	-0.50790	0.67418
Pr = 0.03	-0.13464	0.93840

Para a equação de ordem um obteve-se os valores indicados na Tabela 2.

Tabela 2 - valor inicial de f'' da equação de ordem um

	$f''_1(0)$		
	$\phi=30$	$\phi=45$	$\phi=60$
Pr = 0.733	0.26357	0.45651	0.79071
Pr = 0.03	1.53797	2.66385	4.61392

Para $\phi=0$ a equação (19) é homogênea com condições de contorno homogêneas e portanto só apresenta solução trivial. Os casos 2 e 3 desprezam a equação de quantidade de movimento na direção y tornando homogênea a

equação (19) e análogamente s̄ possui solução trivial. O caso 4 sendo combinação linear dos casos 1, 2 e 3, dado que as equações de perturbação de ordem um e dois são lineares, torna-se idêntico ao caso 1 para a equação de perturbação de primeira ordem. Portanto os valores apresentados na Tabela 2 são válidos para os casos 1 e 4, enquanto que os casos 2 e 3 tem solução trivial.

Para a equação de ordem dois obteve-se os valores indicados nas Tabelas 3 e 4

Tabela 3 - valor inicial de f'' da equação de ordem dois

		$f''(0)$			
		$\phi=0$	$\phi=30$	$\phi=45$	$\phi=60$
caso 1	Pr = 0.733	0.29723	0.29776	0.29882	0.30200
	Pr = 0.03	18.13027	18.99829	20.73433	25.94242
caso 2	Pr = 0.733	-0.05718	-0.05718	-0.05718	-0.05718
	Pr = 0.03	-0.32887	-0.32887	-0.32887	-0.32887
caso 3	Pr = 0.733	0.13009	0.13009	0.13009	0.13009
	Pr = 0.03	6.75886	6.75886	6.75886	6.75886
caso 4	Pr = 0.733	0.37014	0.37067	0.37173	0.37491
	Pr = 0.03	24.56026	25.42828	27.16432	32.37242

Nas Tabelas 3 e 4 os valores dos casos 2 e 3 independem do ângulo de inclinação, como já foi citado anteriormente.

Com os resultados obtidos constroem-se as Tabelas 5, 6, 7 e 8 - que fornecem os desvios entre a presente solução (caso 4) e a solução clássica modificada em função do número de Grashof local, conforme estabelecido na equação (28)

$$D = (Gr_x \cos \phi)^{-1/2} \frac{\theta'_2(0)}{\theta'_0(0)}$$

Constroi-se ainda a Tabela 9 que fornece os valores limites do

número de Grashof correspondentes a um desvio de 5% em relação a solução clássica modificada.

Tabela 4 - valor inicial de θ' na equação de ordem dois

		$\theta'(0)$			
		$\phi=0$	$\phi=30$	$\phi=45$	$\phi=60$
caso 1	Pr = 0.733	-0.04159	-0.05610	-0.08513	-0.17221
	Pr = 0.03	-0.22489	-0.29164	-0.42513	-0.82560
caso 2	Pr = 0.733	0.04594	0.04594	0.04594	0.04594
	Pr = 0.03	0.00523	0.00523	0.00523	0.00523
caso 3	Pr = 0.733	-0.23573	-0.23573	-0.23573	-0.23573
	Pr = 0.03	-0.76850	-0.76850	-0.76850	-0.76850
caso 4	Pr = 0.733	-0.23137	-0.24589	-0.27491	-0.36200
	Pr = 0.03	-0.98815	-1.05490	-1.18839	-1.58886

Tabela 5 - desvios para $\phi=0$

Gr_x	D	
	Pr=0.733	Pr=0.03
10	0.144	2.320
10^2	0.045	0.734
10^3	0.014	0.232
10^4	0.004	0.073
10^5	0.001	0.023

Tabela 6 - desvios para $\phi=30$

Gr_x	D	
	Pr=0.733	Pr=0.03
10	0.164	2.660
10^2	0.052	0.842
10^3	0.016	0.266
10^4	0.005	0.084
10^5	0.001	0.026

Tabela 7 - desvios para $\phi=45$

Gr_x	D	
	Pr=0.733	Pr=0.03
10	0.203	3.320
10^2	0.064	1.050
10^3	0.020	0.332
10^4	0.006	0.105
10^5	0.002	0.033

Tabela 8 - desvios para $\phi=60$

Gr_x	D	
	Pr=0.733	Pr=0.03
10	0.318	5.280
10^2	0.101	1.670
10^3	0.031	0.528
10^4	0.010	0.167
10^5	0.003	0.052

Tabela 9 - valores limites do número de Grashof correspondentes a um desvio de 5% (caso 4)

	Número de Grashof	
	Pr=0.733	Pr=0.03
$\phi=0$	83.0	2.1×10^4
$\phi=30$	108.2	2.8×10^4
$\phi=45$	165.7	4.4×10^4
$\phi=60$	406.4	1.1×10^5

As Figuras 2,3 e 4 mostram os perfis das componentes de velocidade calculados por meio da equação (23), bem como os resultados experimentais e teórico de Kierkus. Os perfis foram calculados para Pr=0.733, ângulos de 0,30 e 45° tomando $\chi=1/24$ e $(Gr_L)^{-1/4}=0.01235$ que é a condição estabelecida nos resultados de Kierkus.

A Figura 5 mostra o perfil de temperatura calculado por meio da equação (25) para Prandtl 0.733 e ângulo de inclinação de 45° nas mesmas condições estabelecidas acima. Indicam-se ainda os resultados experimentais e teórico da referência 8.

Na Figura 6 estão indicados os perfis de temperatura para o número de Prandtl 0.03 e ângulos de 0,30,45 e 60° calculados nas condições anteriormente descritas. As curvas correspondentes para Pr=0.733 embora fossem calculadas, não foram plotadas por serem muito próximas para todos os ângulos de inclinação, e que já está indicada na Figura 5 para o ângulo de 45°

As Figuras 7 e 8 são traçadas respectivamente para Prandtl 0.733 e 0.03 e mostram a relação entre o número de Nusselt local e o número de Grashof local para os ângulos de 0,30,45 e 60°. Para o número de Prandtl 0.03 não foram traçadas as curvas para ângulos de 30 e 45° por motivo de clareza da Figura 8.

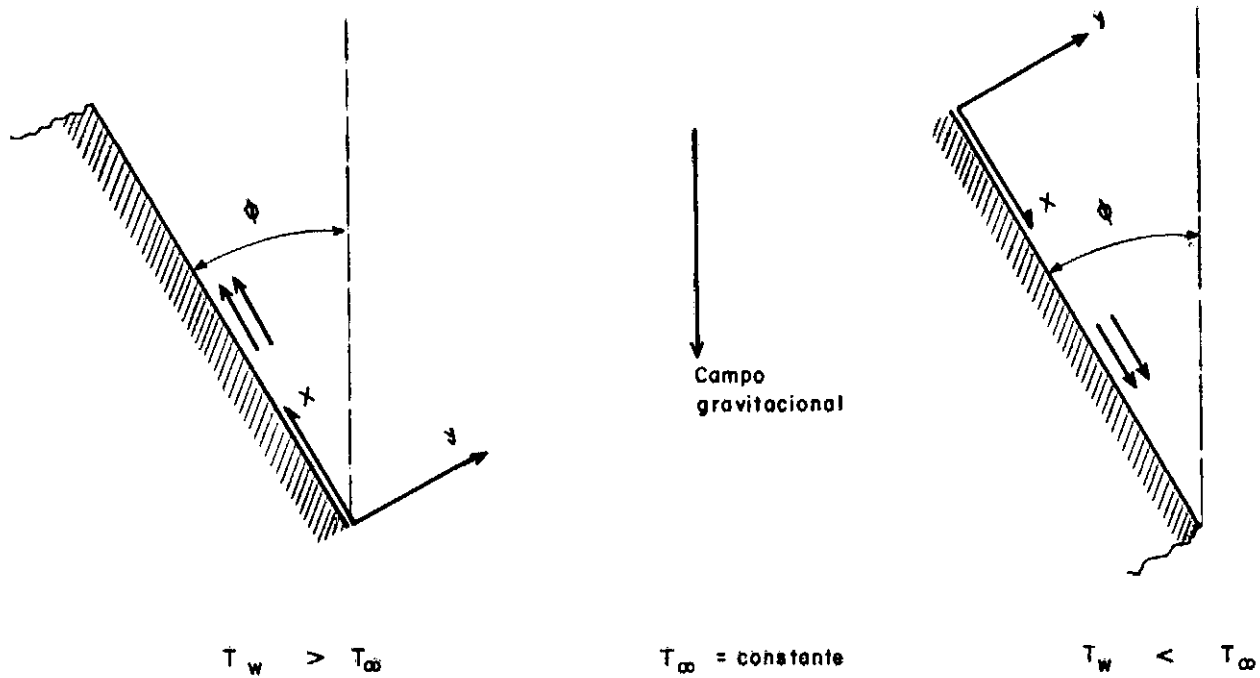


FIG. 1 - SISTEMA DE COORDENADAS

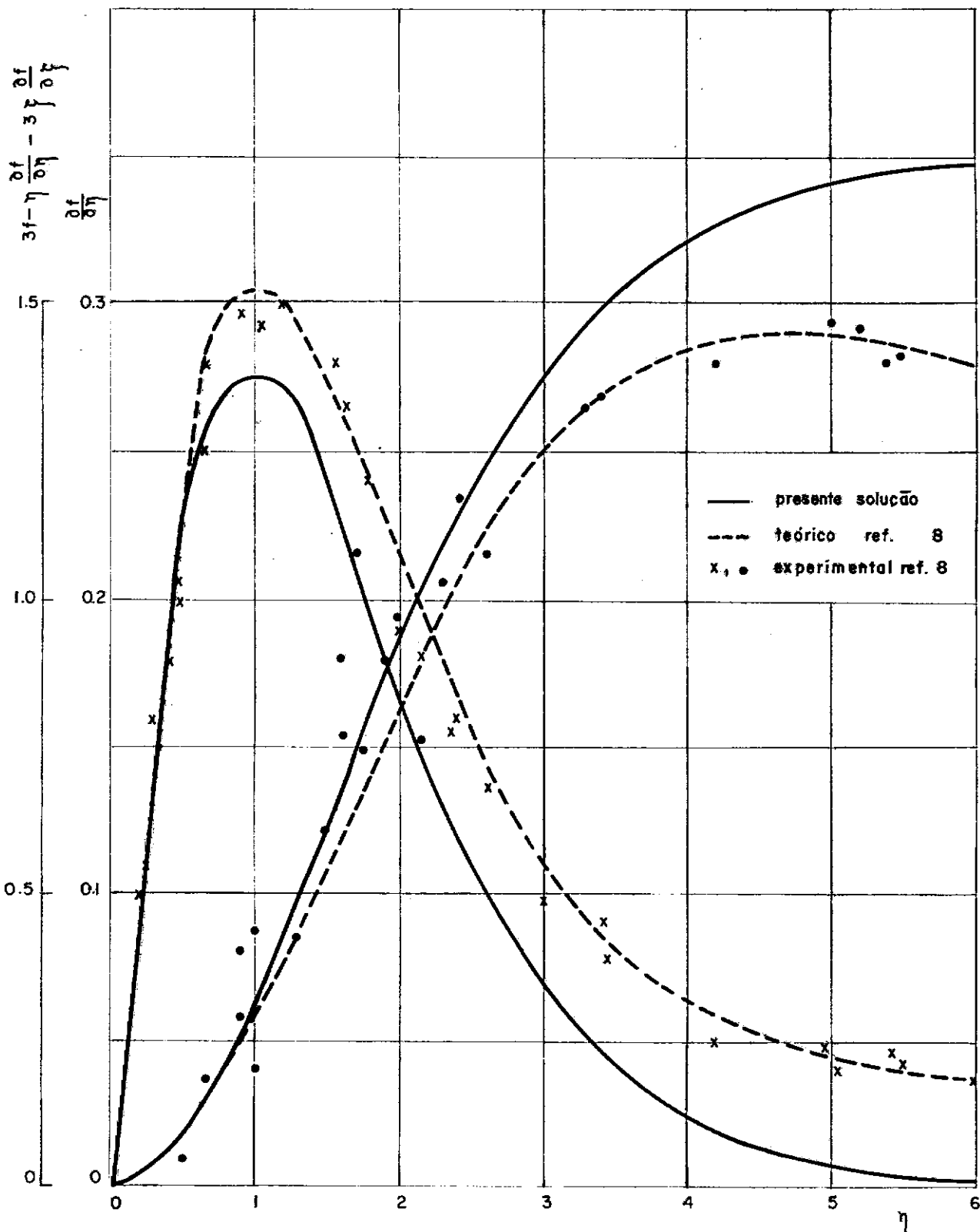


FIG. 2 - PERFIS ADIMENSIONAIS DAS COMPONENTES DE VELOCIDADE PARA
 $\phi = 0^\circ$, $Pr = 0.733$ e $\chi = 1/24$

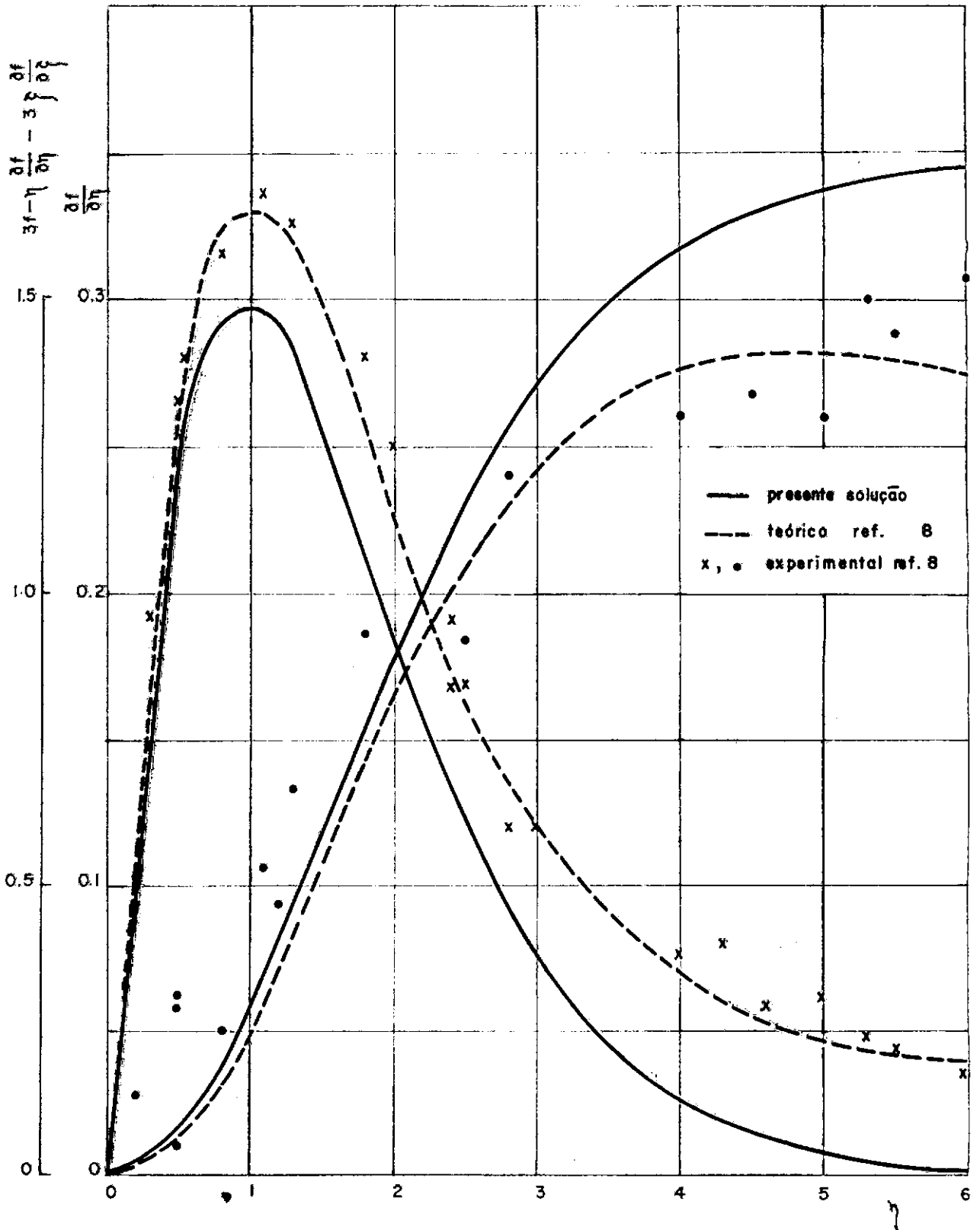


FIG. 3 - PERFIS ADIMENSIONAIS DAS COMPONENTES DE VELOCIDADE PARA
 $\phi = 30^\circ$, $Pr = 0.733$ e $\alpha = 1/24$

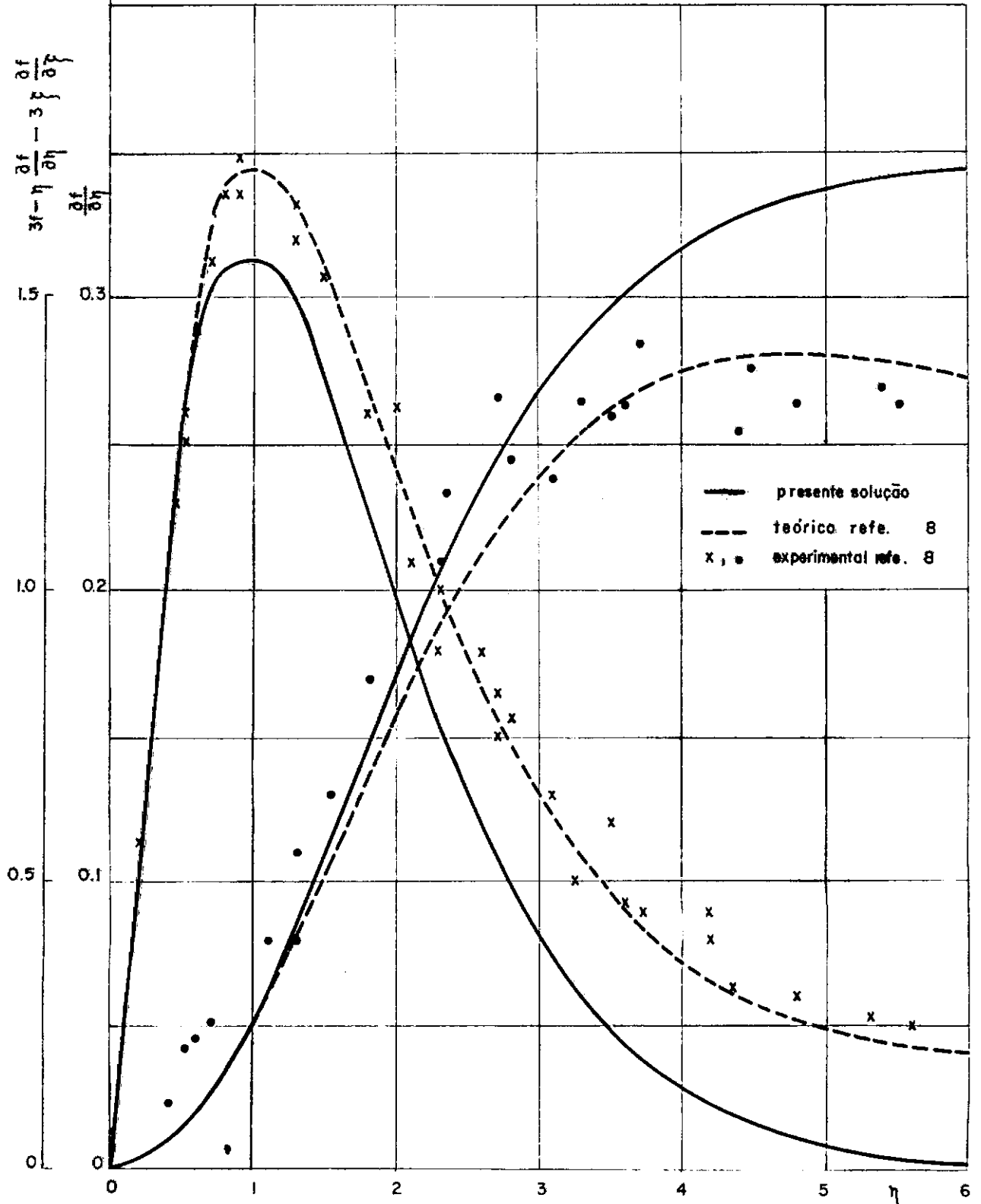


FIG.4- PERFIS ADIMENSIONAIS DAS COMPONENTES DE VELOCIDADE PARA $\phi = 45^\circ$, $Pr = 0.733$ e $\alpha = 1/24$

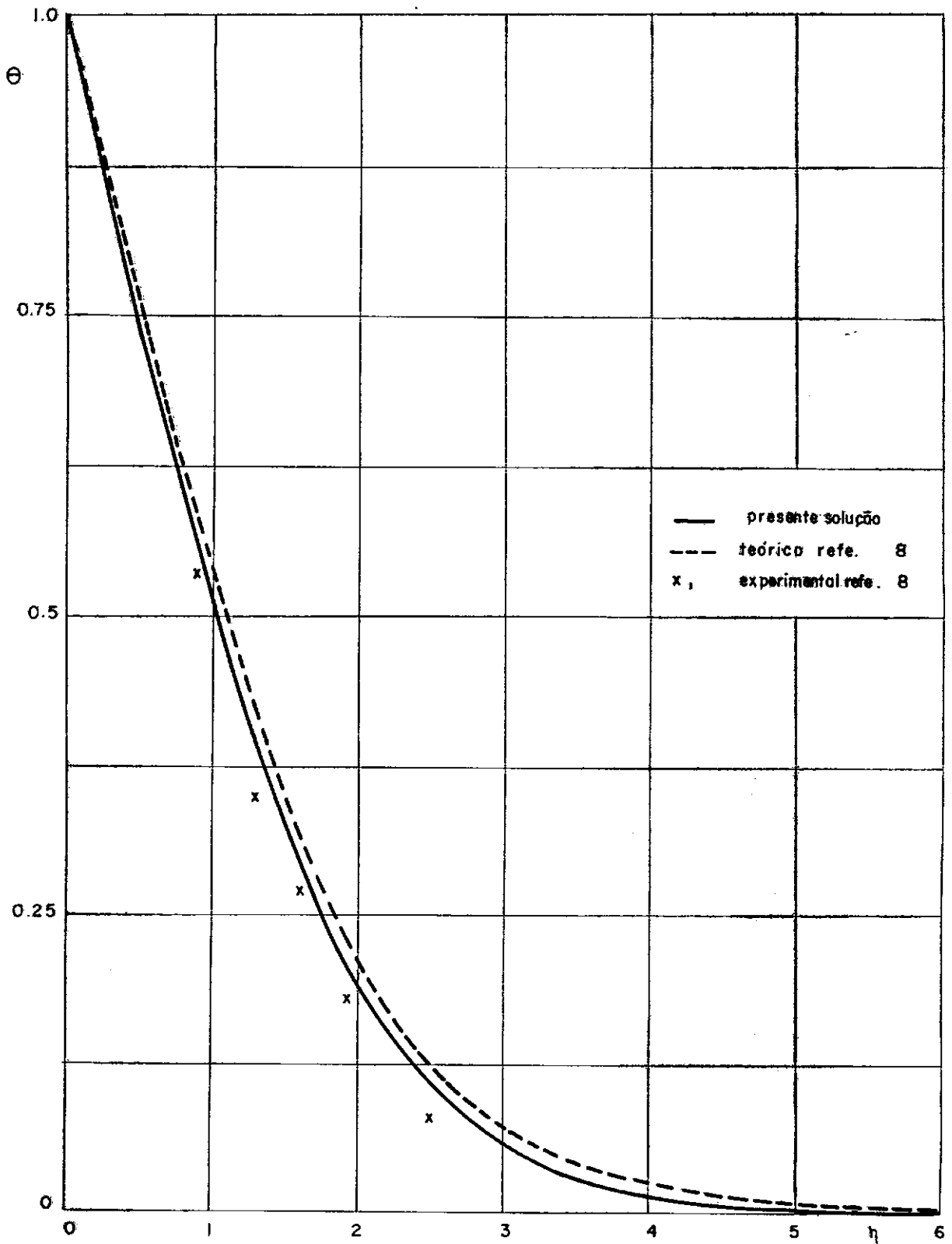


FIG. 5 - PERFIL ADIMENSIONAL DE TEMPERATURA PARA $\phi = 45^\circ$, $Pr = 0.733$ e $\chi = 1/24$

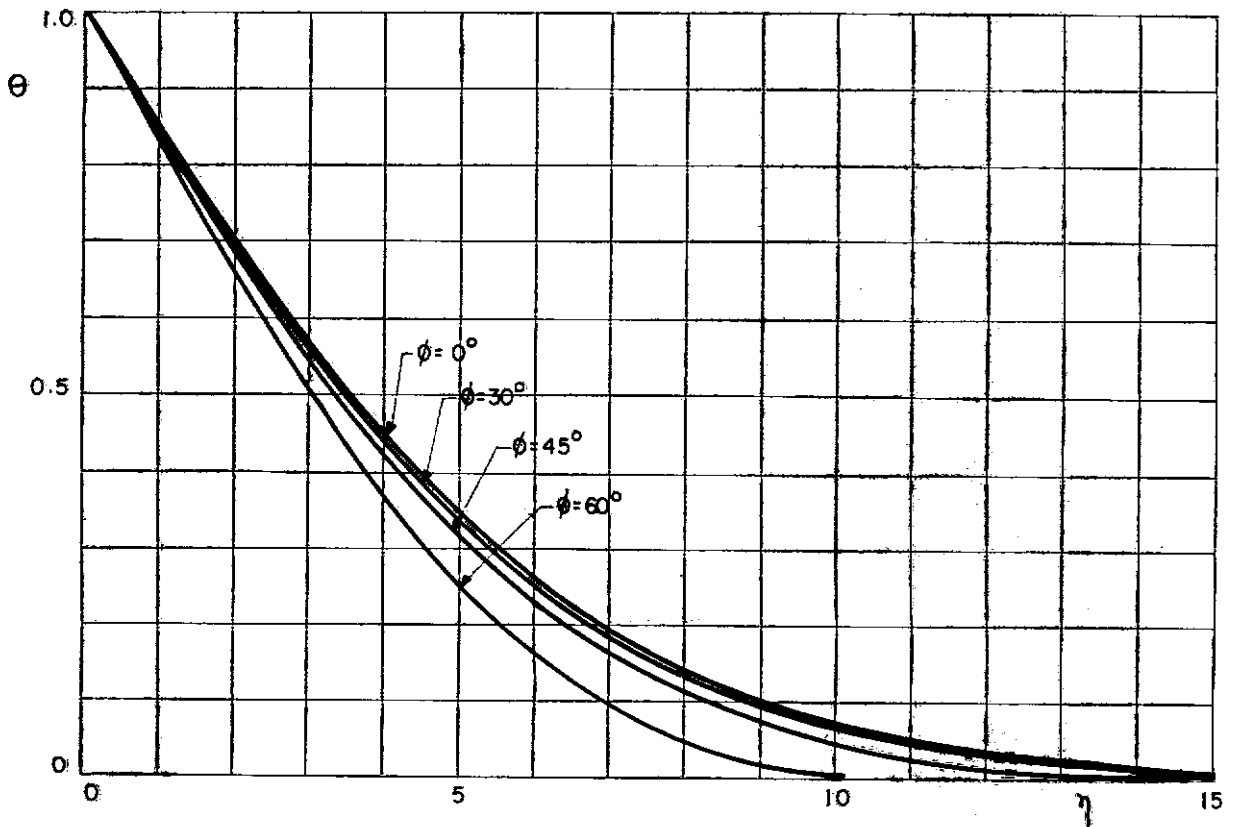


FIG. 6 - PERFIS ADIMENSIONAIS DE TEMPERATURA PARA $Pr = 0.03$, $\chi = 1/24$
ÂNGULOS DE INCLINAÇÃO 0,30, 45 e 60°

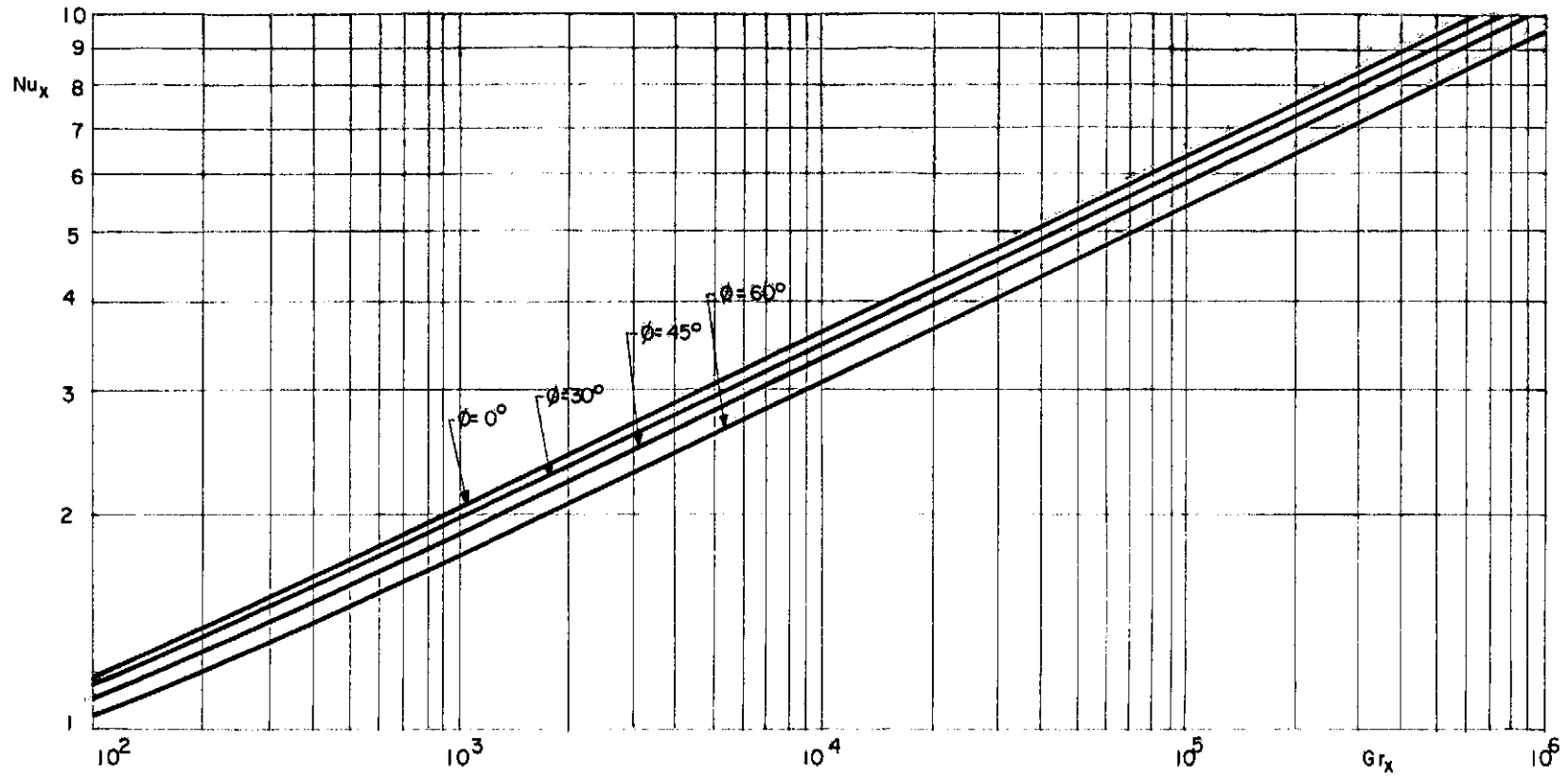


FIG. 7 - RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO DE NUSSOLT LOCAL E O NÚMERO DE GRASHOF LOCAL.
 PARA $Pr = 0.733$ e ÂNGULOS DE INCLINAÇÃO $0, 30, 45$ e 60°

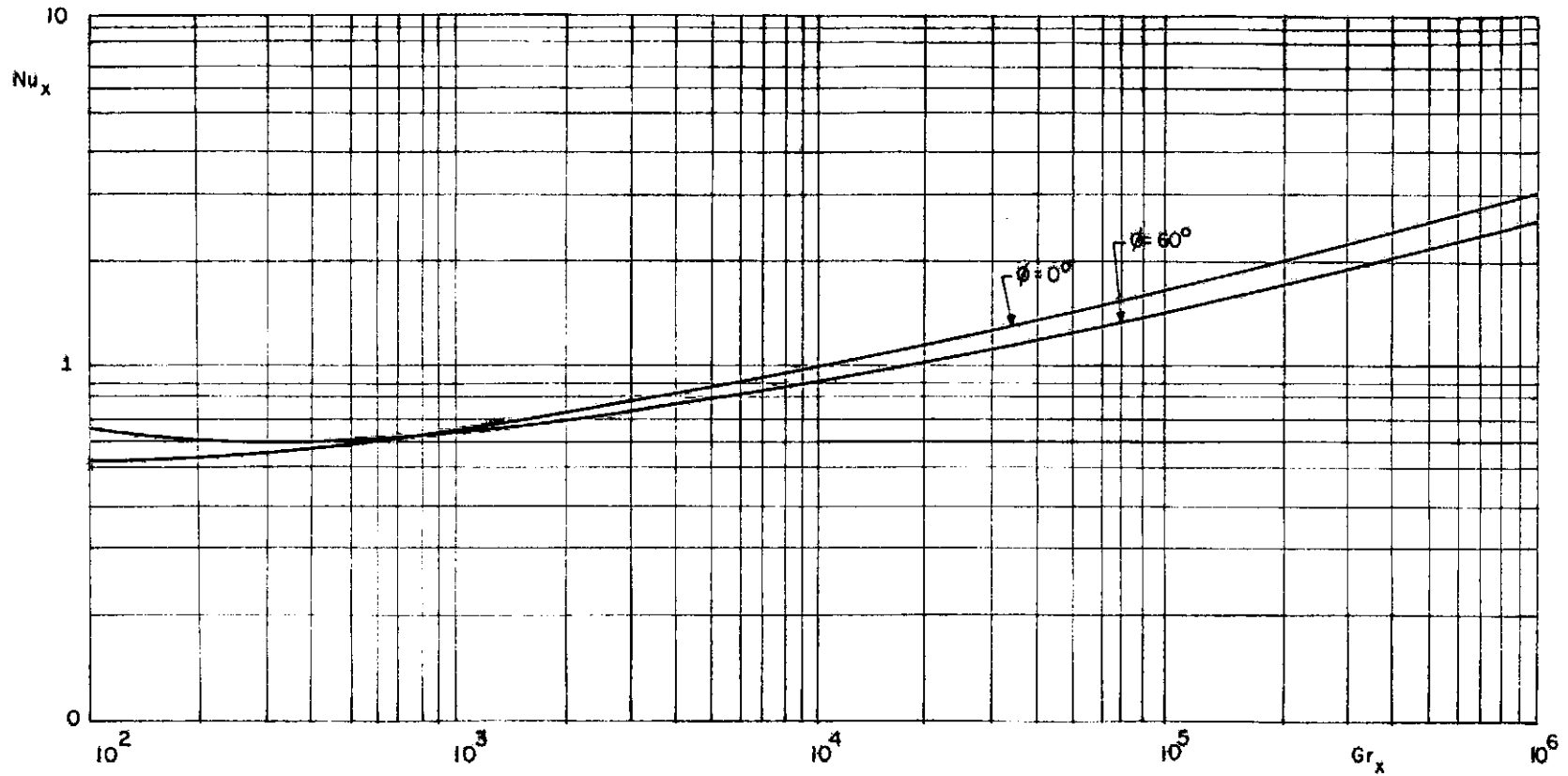


FIG. 8 - RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO DE NUSSOLT LOCAL E O NÚMERO DE GRASHOF LOCAL
 PARA $Pr = 0.03$ • ÂNGULOS DE INCLINAÇÃO DE 0° e 60°

DISCUSSÃO

A análise dos perfis de velocidade das Figuras 2,3 e 4 mostra que os resultados obtidos na presente análise diferem dos dados experimentais, sendo que a diferença diminui a medida que se aproxima da placa, e que junto à mesma os resultados obtidos mostram uma boa correlação com os dados experimentais. O fato está ligado à condição de contorno no escoamento livre. O presente trabalho assume análogamente a solução de camada limite que $u \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow \infty$, enquanto que os resultados experimentais mostram - que mesmo quando a temperatura do fluido dentro da camada limite praticamente atinge a temperatura do meio ambiente ($\theta=0$), a velocidade ainda é diferente de zero. Esta velocidade em $\eta \rightarrow \infty$ é decorrente do processo de bombeamento do fluido para dentro da camada limite. Os resultados obtidos por Kierkus apresentam uma melhor correlação com os dados experimentais pelo mesmo ter introduzido uma condição de contorno não homogênea para $\eta \rightarrow \infty$, calculada a partir do escoamento potencial.

A análise da Figura 5 mostra que o fluxo de calor calculado pela presente análise é melhor que o determinado por Kierkus, quando comparados com os resultados experimentais. Yang-Jerger já haviam observado que a análise de perturbação da solução clássica até primeira ordem mostrava uma discrepância no comportamento do número de Nusselt. Verificou-se que os resultados obtidos por essa análise forneciam uma correção negativa para o número de Nusselt obtido pela solução clássica, enquanto que os resultados experimentais mostravam que o número de Nusselt era maior que o obtido pela solução clássica. A discrepância observada na análise de Yang-Jerger se apresenta também na análise de Kierkus, como se pode observar na Figura 5, na qual se nota que os gradientes de temperatura obtidos por Kierkus são menores que os da solução clássica, e portanto no sentido contrário ao indicado pelos resultados experimentais. A presente análise obteve gradientes de temperatura maiores que o da solução clássica e portanto os resultados obtidos para o fluxo de calor são melhores que os de Kierkus. O fato está ligado à extensão da análise de perturbação. Kierkus estende sua análise até primeira ordem, com o que deixa de considerar vários termos das

equações de conservação, entre os quais o termo da condução longitudinal - na equação da energia. Este termo é muito importante para os cálculos de transmissão de calor, como se pode observar na Tabela 4. A presente análise estende as perturbações até segunda ordem e assim inclui maior número - de termos das equações de conservação, obtendo correções positivas para a solução clássica modificada e portanto resultados mais próximos aos obtidos experimentalmente. A comparação entre os números de Nusselt calculados pela presente análise, pela análise de Kierkus e os resultados experimentais não é indicada pois os resultados apresentados na Figura 9 da referência 8 não estão coerentes com os gradientes de temperatura apresentados na sua Figura 8.

A análise da Tabela 4 mostra que o efeito de $\partial^2 u / \partial x^2$ é pouco sensível e independente do ângulo de inclinação conforme citado anteriormente. A correção introduzida por este termo é negativa visto que o cisalhamento longitudinal dissipa energia cinética e reduz a troca de calor. A mesma tabela indica ainda que a condução longitudinal independe do ângulo de inclinação e fornece sensíveis correções positivas sobre a solução clássica modificada. Finalmente o gradiente transversal de pressão introduz - também correções positivas que aumentam quando se inclina a placa, devido ao maior bombeamento de fluido para a camada limite e conseqüente aumento da troca de calor. Para o número de Prandtl 0.03 e ângulo de 60° a correção introduzida pelo gradiente transversal de pressão supera a fornecida - pela condução longitudinal.

As correções sobre a solução clássica modificada obtidas pelo presente trabalho são pequenas para o número de Prandtl 0.733, mas as Tabelas 5,6,7,8 e 9 mostram que as mesmas se tornam sensíveis quando se diminua o número de Prandtl e/ou se aumenta o ângulo de inclinação, pois em ambos os casos o espessamento da camada limite faz com que as hipóteses de - Prandtl se tornem menos precisas para o tratamento do problema. A análise das mesmas tabelas mostra ainda que os desvios diminuem a medida que o número de Grashof aumenta, o que era esperado visto que as equações de camada limite representam as soluções assintóticas das equações de conservação para o número de Grashof tendendo ao infinito.

A análise das Figuras 7 e 8 que mostram a relação entre o número de Nusselt local e o número de Grashof local permitem a discussão de vários aspectos do presente trabalho. Como já foi indicado, as correções sobre a solução clássica modificada se tornam maiores a medida que se diminui o número de Grashof, e portanto o comportamento do número de Nusselt nessa faixa deve ser semelhante ao indicado pela solução clássica modificada. A análise da equação (30) mostra que para um mesmo número de Grashof o número de Nusselt diminui com o aumento do ângulo de inclinação. Este comportamento também é observado na presente análise como se pode verificar nas Figuras 7 e 8 para números de Grashof suficientemente altos. Entretanto, para números de Grashof pequenos verifica-se que o número de Nusselt se torna maior quando se aumenta o ângulo de inclinação, e portanto no sentido inverso ao indicado pela solução clássica modificada. Este comportamento mostra que as correções introduzidas superam o efeito do fator $(\cos\phi)^{1/4}$. Conforme foi visto na discussão da Tabela 4 os efeitos de $\partial^2 u / \partial x^2$ e $\partial^2 T / \partial x^2$ embora introduzam correções sobre a solução clássica modificada, independem do ângulo de inclinação e portanto não influem no sentido indicado por $(\cos\phi)^{1/4}$. A correção introduzida pelo presente método varia com a inclinação da placa e com o valor do número de Grashof conforme está estabelecido na equação (28). Na discussão da Tabela 4 indicou-se que a variação de $\theta_2'(0)$ era devida somente ao efeito de $\partial p / \partial y$. Portanto quando se inclina a placa a parcela $\theta_2'(0)(\cos\phi)^{-1/2}$ se torna maior. Por outro lado a correção aumenta para números de Grashof menores. Sendo assim os efeitos de inclinação e diminuição do número de Grashof agem no mesmo sentido e aumentam as correções ao ponto de inverter o sentido indicado pela solução clássica modificada no cálculo do número de Nusselt local. Ressalta-se finalmente que a relação entre o número de Nusselt local e o número de Grashof local deve ser descrita segundo uma curva e não segundo uma reta como estabelece a solução clássica modificada. Esta constatação já havia sido enunciada por Rich.

A extensão da presente análise para a face inferior da placa levaria à obtenção dos mesmos números de Nusselt calculados para a face superior. De fato, a equação (19) revela que para a face inferior a excita-

ção da equação de quantidade de movimento de primeira ordem muda de sinal, com conseqüente alteração nos sinais de f_1 e suas derivadas. Entretanto, a influência dos resultados de primeira ordem se faz sentir apenas no cálculo de F_1 no qual aparecem na forma $2f_1'f_1''$. Os resultados de Yung-Oetting e Kierkus conduzem à mesma conclusão, indicando assim que dentro dos limites de suas análises o perfil de temperatura é idêntico nas faces superior e inferior da placa. Por outro lado, a equação (15) levada nas equações (12) e (13) mostra que a velocidade na face inferior é diferente da velocidade na face superior, fato constatado experimentalmente pela referência 8. A extensão da presente análise até terceira ordem revela que os campos de temperatura nas faces superior e inferior são desiguais, podendo-se assim concluir que o número de Nusselt da face superior é diferente do número de Nusselt da face inferior, e que esta diferença é pequena (terceira ordem).

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O presente trabalho analisa a convecção natural laminar junto a uma placa inclinada isotérmica, por meio de um método de perturbação da solução clássica até segunda ordem, de modo que maior número de termos das equações de conservação foram considerados e os efeitos de $\partial p/\partial y$, $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 T/\partial x^2$ analisados separadamente e conjuntamente. Dos resultados obtidos - para o fluxo de calor pode-se concluir que os termos $\partial p/\partial y$ e $\partial^2 T/\partial x^2$ fornecem correções positivas para a solução clássica modificada enquanto que o termo $\partial^2 u/\partial x^2$, de influência bem reduzida fornece correções negativas. O efeito do gradiente transversal de pressão cresce com o aumento do ângulo de inclinação e/ou a diminuição do número de Prandtl, sendo que para o número de Prandtl 0.03 e ângulo de inclinação 60° ele se torna mais influente que a condução longitudinal. Os efeitos de $\partial^2 u/\partial x^2$ e $\partial^2 T/\partial x^2$ independem do ângulo de inclinação. As correções obtidas foram sensíveis para o número de Prandtl 0.03 e menores para o número de Prandtl 0.733. Para números de Grashof suficientemente pequenos o número de Nusselt se torna maior para ângulos de inclinação maiores, sendo que o número de Grashof limite para este comportamento é maior para o número de Prandtl mais baixo. As correções obtidas para o número de Prandtl 0.03 não puderam ser confrontadas com resultados experimentais que infelizmente não existem na literatura.

Sugere-se que o problema seja desenvolvido através uma análise que permita o estudo das equações de conservação com maior número de termos e que leve em consideração os efeitos da velocidade induzida junto ao contorno da camada limite. O estudo do fluxo térmico na face inferior da placa mereceria uma análise mais específica. Resultados experimentais na faixa de números de Prandtl baixos seriam também de grande valia para o desenvolvimento dos estudos de convecção natural em placas inclinadas.

SIMBOLOGIA

$f(\xi, \eta)$	função adimensional introduzida na equação (10)	
g	aceleração da gravidade	(m/s^2)
Gr_L	número de Grashof	$Gr_L = \frac{g\beta(T_\omega - T_\infty)L^3}{\nu^2}$
Gr_x	número de Grashof local	$Gr_x = \frac{g\beta(T_\omega - T_\infty)x^3}{\nu^2}$
L	comprimento de placa	(m)
Nu_x	número de Nusselt local	$Nu_x = \frac{qx}{\kappa(T_\omega - T_\infty)}$
p	pressão estática	(N/m^2)
Pr	número de Prandtl	$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$
q	fluxo de calor por unidade de área	(cal/m^2)
T	temperatura	$(^\circ\text{K})$
u	componente da velocidade na direção x	(m/s)
v	componente da velocidade na direção y	(m/s)
x	coordenada na direção da placa	(m)
y	coordenada na direção normal a placa	(m)

Símbolos Gregos

α	difusividade térmica do fluido	(m^2/s)
β	coeficiente de expansão térmica do fluido	$\beta = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ $(^\circ\text{K}^{-1})$
η	variável adimensional independente definida em (11)	
κ	condutividade térmica do fluido	$(\text{W/m}^\circ\text{K})$
$\theta(\xi, \eta)$	temperatura adimensional	$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_\omega - T_\infty}$

ν	viscosidade cinemática do fluido	(m^2/s)
ρ	densidade do fluido	(kg/m^3)
ϕ	ângulo de inclinação da placa	
ψ	função fluxo definida pela equação (7)	
ξ	parâmetro adimensional de perturbação	

Subscritos

∞	condições ambientes
ω	condições da placa
$0,1,2$	ordens de perturbação

Sperscritos

'	derivadas em relação a η
---	-------------------------------

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ECKERT, E.R.G. and DRAKE, R.M., Heat and Mass Transfer, Tokyo, Kōgakusha Company, Ltd., 1959, p 327.
2. OSTRACH, S., An analysis of laminar free-convection flow and heat transfer about a flat plate parallel to the direction of the generating body force, NACA Report 1111, 1952.
3. YANG, K.T. and Jerger, E.W., First-order perturbations of laminar free-convection boundary layers on a vertical plate, ASME, J. Heat Transfer, Feb., 1964, p 107-115.
4. SURIANO, F.J., YANG, K.T. and DONLON, J.A., Laminar free-convection along a vertical plate at extremely small Grashof numbers, Int. J. Heat Mass Transfer, 8, 1965, p 815-831.
5. SPARROW, E.M. and GUINLE, L.M.F., Deviations from classical free-convection boundary layer theory at low Prandtl numbers, Int. J. Heat Mass Transfer, 11, 1968, p 1403-1406.
6. RICH, B.R., An investigation of heat transfer from an inclined flat plate in free-convection, ASME, May, 1953, p 489-499.
7. KREITH, F., Princípios da transmissão de calor, São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 1969, p 354.
8. KIERKUS, W.T., An analysis of laminar free-convection flow and heat transfer about an inclined isothermal plate, Int. J. Heat Mass Transfer, 11, 1968, p 241-253.
9. YUNG, S.C. and OETTING, R.B., Free-convection heat transfer from an inclined heated flat plate in air, ASME, J. Heat Transfer, 1969, p 192-194.

APÊNDICE A

SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE PERTURBAÇÃO

Inicialmente integra-se a equação de ordem zero

$$\begin{aligned} f_o'''' + 3f_o f_o'' - 2f_o'^2 + \theta_o &= 0 \\ \theta_o'' + 3Pr f_o \theta_o' &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

com as condições de contorno

$$\left. \begin{aligned} f_o &= 0 \\ f_o' &= 0 \\ \theta_o &= 1 \end{aligned} \right\} \eta = 0 \quad \left. \begin{aligned} f_o' &\rightarrow 0 \\ \theta_o &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \eta \rightarrow \infty \quad (18)$$

Transforma-se as equações (17) num sistema de cinco equações - diferenciais de primeira ordem, tomando

$$f_o = Y1$$

$$f_o' = \frac{dY1}{d\eta} = Y2$$

$$f_o'' = \frac{d^2Y1}{d\eta^2} = \frac{dY2}{d\eta} = Y3$$

$$f_o'''' = \frac{d^3Y1}{d\eta^3} = \frac{d^2Y2}{d\eta^2} = \frac{dY3}{d\eta} = -3Y1Y3 + 2(Y1)^2 - Y4$$

$$\theta_o = Y4$$

$$\theta_o' = \frac{dY4}{d\eta} = Y5$$

$$\theta_o'' = \frac{d^2Y4}{d\eta^2} = \frac{dY5}{d\eta} = -3PrY1Y5$$

obtendo as cinco equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dY_1}{dn} = Y_2$$

$$\frac{dY_2}{dn} = Y_3$$

$$\frac{dY_3}{dn} = -3Y_1Y_3 + 2(Y_1)^2 - Y_4$$

$$\frac{dY_4}{dn} = Y_5$$

$$\frac{dY_5}{dn} = -3PrY_1Y_5$$

cuja integração fornece Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 que correspondem a $f_0, f'_0, f''_0, \theta_0, \theta'_0$

O método de Runge-Kutta exige que tôdas as condições de contorno no sejam referidas ao mesmo ponto inicial de integração, que no presente caso é $n=0$. A equação (18) fornece sômente três condições em $n=0$, e portanto é necessário determinar-se as outras duas condições de contorno em $n=0$ quais sejam $f''_0(0)$ e $\theta'_0(0)$. Estas condições de contorno devem ser determinadas de forma que as condições em $n \rightarrow \infty$ sejam satisfeitas. O método utilizado é iterativo e está indicado no Apêndice B.

A seguir integra-se pelo mesmo processo a equação de perturbação de ordem um

$$f'''_1 + 3f_0 f''_1 - f'_0 f'_1 = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{4} n (\operatorname{tg} \phi) \theta'_0 dn \quad (19)$$

com as condições de contorno

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = 0 \\ f'_1 = 0 \end{array} \right\} n = 0 \quad \left. \begin{array}{l} f_1 \rightarrow 0 \\ f'_1 \rightarrow 0 \end{array} \right\} n \rightarrow \infty \quad (20)$$

A integral do 2º membro da equação (19) depende somente da solução da equação de ordem zero, e pode ser escrita como

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{4} n(\operatorname{tg}\phi)\theta'_0 dn = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{4} n(\operatorname{tg}\phi)\theta'_0 dn - \int_0^{\eta} \frac{\sqrt{2}}{4} n(\operatorname{tg}\phi)\theta'_0 dn$$

A primeira parcela do 2º membro representa um valor constante para cada ângulo de inclinação, e depende apenas da solução da equação de ordem zero. Esse valor foi calculado incluindo na solução da equação de ordem zero

$$I1 = Y6$$

$$\frac{dY6}{dn} = \frac{\sqrt{2}}{4} n(\operatorname{tg}\phi)Y5$$

onde $I1 = \int_0^{\eta} \frac{\sqrt{2}}{4} n(\operatorname{tg}\phi)\theta'_0 dn$ e cujo valor em $n=0$ é $I1=0$. O valor em $n \rightarrow \infty$ foi designado por XJ1IN.

A solução da equação (19) necessita da solução da equação de ordem zero e portanto as equações (17) e (19) são transformadas num sistema de nove equações diferenciais de primeira ordem, ou seja, as seis já indicadas e mais três referentes a equação (19). Para tal toma-se

$$f_1 = Y7$$

$$f'_1 = \frac{dY7}{dn} = Y8$$

$$f''_1 = \frac{d^2Y7}{dn^2} = \frac{dY8}{dn} = Y9$$

$$f'''_1 = \frac{d^3Y7}{dn^3} = \frac{d^2Y8}{dn^2} = \frac{dY9}{dn} = -3Y1Y9 + Y2Y8 + XJ1IN - Y6$$

obtendo-se as três seguintes equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dY7}{dn} = Y8$$

$$\frac{dY8}{dn} = Y9$$

$$\frac{dY9}{dn} = -3Y1Y9 + Y2Y8 + XJ1IN - Y6$$

cuja integração fornece $Y7, Y8, Y9$ que correspondem a f_1, f_1', f_1''

Novamente utiliza-se o método iterativo indicado no Apêndice B pois desconhece-se a condição de contorno $f_1''(0)$.

Finalmente integra-se pelo mesmo processo a equação de perturbação de ordem dois

$$f_2'''' + 3f_0'f_2' + 2f_0''f_2' - 3f_0'''f_2 + \theta_2 = \int_{\eta}^{\infty} F(n)dn \quad (21)$$

$$\theta_2'' + 3Prf_0'\theta_2' + 6Prf_0''\theta_2' - 3Pr\theta_2'f_2 = G(n)$$

com as seguintes condições de contorno

$$\left. \begin{array}{l} f_2 = 0 \\ f_2' = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{array} \right\} \eta = 0 \quad \left. \begin{array}{l} f_2' \rightarrow 0 \\ \theta_2 \rightarrow 0 \end{array} \right\} \eta \rightarrow \infty \quad (22)$$

A integral do 2º membro da equação (21) depende somente das soluções das equações de ordem zero e de ordem um, e pode ser escrita como

$$\int_{\eta}^{\infty} F(n)dn = \int_0^{\infty} F(n)dn - \int_0^{\eta} F(n)dn$$

Analogamente ao que foi descrito para a integral da equação de ordem um, toma-se durante a solução da equação de ordem um

$$I_2 = Y_{10}$$

$$\frac{dY_{10}}{d\eta} = F(\eta)$$

onde $I_2 = \int_0^{\infty} F(\eta) d\eta$ e cujo valor em $\eta=0$ é $I_2=0$. O valor em $\eta \rightarrow \infty$ foi designado por XJ2IN.

A solução da equação (21) necessita das soluções das equações (17) e (19) e portanto as equações (17), (19) e (21) são transformadas num sistema de quinze equações diferenciais de primeira ordem, ou seja, as dez já indicadas e mais cinco referentes a equação (21). Para tal toma-se

$$f_2 = Y_{11}$$

$$f_2' = \frac{dY_{11}}{d\eta} = Y_{12}$$

$$f_2'' = \frac{d^2Y_{11}}{d\eta^2} = \frac{dY_{12}}{d\eta} = Y_{13}$$

$$f_2''' = \frac{d^3Y_{11}}{d\eta^3} = \frac{d^2Y_{12}}{d\eta^2} = \frac{dY_{13}}{d\eta} = -3Y_1Y_{12} - 2Y_2Y_{12} + 3Y_3Y_{11} - Y_{14} + XJ2IN -$$

-Y_{10}

$$\theta_2 = Y_{14}$$

$$\theta_2' = \frac{dY_{14}}{d\eta} = Y_{15}$$

$$\theta_2'' = \frac{d^2Y_{14}}{d\eta^2} = \frac{dY_{15}}{d\eta} = -3PrY_1Y_{15} - 6PrY_2Y_{14} + 3PrY_5Y_{11} + G(\eta)$$

obtendo as seguintes equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dY_{11}}{d\eta} = Y_{12}$$

$$\frac{dY_{12}}{d\eta} = Y_{13}$$

$$\frac{dY_{13}}{d\eta} = -3Y_{11}Y_{12} - 2Y_{21}Y_{12} + 3Y_{31}Y_{11} - Y_{14} + X_{J2IN} - Y_{10}$$

$$\frac{dY_{14}}{d\eta} = Y_{15}$$

$$\frac{dY_{15}}{d\eta} = -3PrY_{11}Y_{15} - 6PrY_{21}Y_{14} + 3PrY_{51}Y_{11} + G(\eta)$$

cuja integração fornece $Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, Y_{14}, Y_{15}$ que correspondem a $f''_2, f'_2, f''_2, \theta_2, \theta'_2$.

Novamente utiliza-se o método iterativo indicado no Apêndice B pois desconhe-se as condições de contorno $f''_2(0)$ e $\theta'_2(0)$ necessárias à integração pelo método de Runge-Kutta.

APÊNDICE B

MÉTODO ITERATIVO PARA DETERMINAÇÃO DAS CONDIÇÕES INICIAIS $f''(0)$ e $\theta'(0)$

As equações de perturbação necessitam para sua solução pelo método de Runge-Kutta das condições de contorno $f''(0)$ e $\theta'(0)$. Conhece-se as condições de contorno $f'(\infty) = \theta(\infty) = 0$.

As funções f' e θ dependem dos valores iniciais de f'' e θ' . Denominando $f''(0) = \alpha$, $\theta'(0) = \beta$, tem-se que

$$f' = \text{função}(\alpha, \beta)$$

$$\theta = \text{função}(\alpha, \beta)$$

Denomina-se ainda por (α_0, β_0) os auto-valores corretos, ou seja, quando $f''(0) = \alpha_0$ e $\theta'(0) = \beta_0$ obtém-se $f'(\infty) = \theta(\infty) = 0$.

Desenvolvendo $f'(\alpha, \beta)$ e $\theta(\alpha, \beta)$ em série de Taylor na vizinhança de (α_0, β_0) e truncando as séries após o termo de primeira ordem vem

$$f'(\alpha, \beta) = f'(\alpha_0 + h, \beta_0 + k) \approx f'(\alpha_0, \beta_0) + (\alpha - \alpha_0) \frac{\partial f'(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} + (\beta - \beta_0) \frac{\partial f'(\alpha, \beta)}{\partial \beta}$$

$$\theta(\alpha, \beta) = \theta(\alpha_0 + h, \beta_0 + k) \approx \theta(\alpha_0, \beta_0) + (\alpha - \alpha_0) \frac{\partial \theta(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} + (\beta - \beta_0) \frac{\partial \theta(\alpha, \beta)}{\partial \beta}$$

Para o caso presente tem-se que para $\eta \rightarrow \infty$

$$f'(\alpha_0, \beta_0) = \theta(\alpha_0, \beta_0) = 0$$

A fim de resolver o sistema acima toma-se

$$\frac{\partial f'}{\partial \alpha} = \frac{\Delta f'}{\Delta \alpha} \quad ; \quad \frac{\partial f'}{\partial \beta} = \frac{\Delta f'}{\Delta \beta} \quad ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{\Delta \theta}{\Delta \alpha} \quad ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{\Delta \theta}{\Delta \beta}$$

com o que obtém-se para $\eta \rightarrow \infty$

$$0 \approx f'(\alpha, \beta) + (\alpha_0 - \alpha) \frac{\Delta f'}{\Delta \alpha} + (\beta_0 - \beta) \frac{\Delta f'}{\Delta \beta}$$

$$0 \approx \theta(\alpha, \beta) + (\alpha_0 - \alpha) \frac{\Delta \theta}{\Delta \alpha} + (\beta_0 - \beta) \frac{\Delta \theta}{\Delta \beta}$$

Adota-se inicialmente $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ e calcula-se

$$f'(\alpha_1, \beta_1) = \text{DAN1}$$

$$\theta(\alpha_1, \beta_1) = \text{DAN2}$$

A seguir toma-se $\alpha = \alpha_1 + h$, $\beta = \beta_1$ e calcula-se

$$f'(\alpha_1 + h, \beta_1) = \text{DAN3}$$

$$\theta(\alpha_1 + h, \beta_1) = \text{DAN4}$$

Finalmente toma-se $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1 + k$ e calcula-se

$$f'(\alpha_1, \beta_1 + k) = \text{DAN5}$$

$$\theta(\alpha_1, \beta_1 + k) = \text{DAN6}$$

Pode-se então determinar

$$\frac{\Delta f'}{\Delta \alpha} = \frac{\text{DAN3} - \text{DAN1}}{h} = \text{AB}$$

$$\frac{\Delta f'}{\Delta \beta} = \frac{\text{DAN5} - \text{DAN1}}{k} = \text{AC}$$

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta \alpha} = \frac{\text{DAN4} - \text{DAN2}}{h} = \text{AD}$$

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta \beta} = \frac{\text{DAN6} - \text{DAN2}}{k} = \text{AE}$$

Constroi-se então o sistema

$$0 = DAN1 + (\alpha_0 - \alpha_1)AB + (\beta_0 - \beta_1)AC$$

$$0 = DAN2 + (\alpha_0 - \alpha_1)AD + (\beta_0 - \beta_1)AE$$

O sistema acima é resolvido para $(\alpha_0 - \alpha_1)$ e $(\beta_0 - \beta_1)$, que com os valores inicialmente adotados (α_1, β_1) fornecem uma primeira aproximação para α_0, β_0 que se constituem nos valores iniciais para a nova iteração.

A convergência deste processo para as presentes equações de perturbação dá-se na terceira iteração.