

"RESULTADOS SÔBRE A FORMA FRACA DO

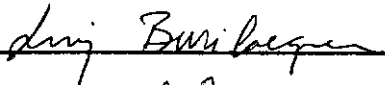
PRINCÍPIO DE SAINT-VENANT"

SOLLY ANDY SEGENREICH

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO ,  
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
"MESTRE EM CIÊNCIA" (M.Sc.).

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
(Presidente)

  
\_\_\_\_\_

  
\_\_\_\_\_

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

MAIO DE 1971

Dedicado  
a meus pais

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Guilherme de La Penha pela sua eficiente orientação e constante incentivo.

À COPPE, na pessoa do Prof. Alberto Luiz Coimbra.

Ao Prof. Leslie Koval, meu professor de mecânica clássica e elasticidade.

À CAPES pelo suporte financeiro.

R E S U M O

O presente trabalho, todo êle restrito à elasticidade linear, consta de 3 capítulos.

No primeiro capítulo é feita uma revisão do problema de Saint-Venant (torção e flexão de cilindros) e da necessidade de ser feita a chamada "hipótese de Saint-Venant". Apresenta-se ainda a generalização da hipótese, sob a forma de "Princípio", feita por Boussinesq e Love e os teoremas propostos por Sternberg e Zanaboni.

No segundo capítulo, aborda-se o teorema de Toupin sobre a forma fraca do Princípio, fazendo-se uma análise dos resultados por êle obtidos.

Finalmente, o autor apresenta no último capítulo, alguns resultados por êle obtidos, ligados à forma fraca do Princípio de Saint-Venant.

A B S T R A C T

The present paper, completely restricted to Linear Elasticity, is presented in three chapters.

In the first chapter, a review on Saint-Venant's problem (torsion and flexion of beams) is made and the necessity of the so-called "Saint-Venant's Hypothesis" is indicated. The generalizations of the hypothesis made by Boussinesq and Love, as well as Sernberg's and Zanaboni's Theorems, are discussed.

In the second chapter, Toupin's Theorem on the weak form of Saint-Venant Principle is presented and some of his results are discussed.

Finally, the author presents some results related to the weak form of Saint-Venant's Principle obtained in his recent research.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS.....	i
RESUMO.....	ii
ABSTRACT.....	iii
I - INTRODUÇÃO.....	1
II - LIMITES SUPERIORES PARA ENERGIA ELÁSTICA.....	15
III - SOBRE A DISTRIBUIÇÃO DA ENERGIA ELÁSTICA EM CILINDROS.....	28
IV - APÊNDICE.....	44
BIBLIOGRAFIA.....	47

## I - INTRODUÇÃO

Assim como em outros ramos da matemática aplicada, os problemas diretos da teoria da elasticidade, possuem solução trivial. Por exemplo, dado um corpo B sobre o qual é definido um campo de deslocamentos, é fácil obter-se o campo de deformações, tensões e qualquer outra informação útil que se deseje, pois o cálculo é feito no sentido da derivação. Infelizmente, os problemas de interesse prático são exatamente os problemas inversos, sendo sua solução, muito mais elaborada já que dependem da integração de sistemas de equações diferenciais parciais com condições de contorno não homogêneas. Tem-se uma idéia da dificuldade destes problemas pelo número reduzido de soluções exatas conhecidas até hoje. Na verdade, poucas são as soluções exatas obteníveis de qualquer forma, mesmo linearizando a teoria.

Devido ao interesse teórico de um lado e certamente devido ao interesse em fornecer soluções para o uso em engenharia, o século XIX viu grandes matemáticos pesquisando as soluções de problemas em elasticidade, principalmente após o estabelecimento definitivo das equações de campo da teoria linear.

Por teoria linear entende-se a teoria em que são feitas as seguintes hipóteses:

$$(i) \quad \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u})$$

$$(ii) \quad \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}} [\underline{\underline{E}}]$$

onde  $\underline{\underline{E}}$  é o tensor de deformação

$\underline{u}$  é o vetor de deslocamento ( $\underline{u} \in C^1$ )

$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^T$  é o tensor de tensão

$\underline{\underline{C}}$  é o tensor de elasticidades

A hipótese (i) pode ser chamada de hipótese da linearidade geométrica e é aproximadamente satisfeita, quando os deslocamentos são pequenos comparados com as dimensões do corpo.

A hipótese (ii) é também conhecida como a hipótese da linearidade do material, e sua legitimidade depende de numerosos fatores, inclusive do histórico das deformações.

Assim, feitas as hipóteses da linearidade, as equações de campo da elastostática são as seguintes:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u}) \quad (1)$$

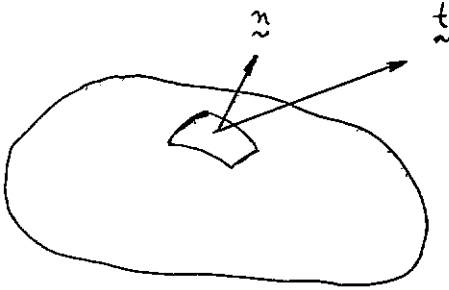
$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}} [\underline{\underline{E}}] \quad (2)$$

$$\text{div } \underline{\underline{S}} + \underline{b} = \underline{0} \quad (3)$$



onde  $\underline{b}$  é o campo de forças distribuídas por unidade de volume. A equação (3), é a equação do equilíbrio estático.

Pelo teorema de Cauchy, sabe-se ainda, que para todo ponto  $\underline{x} \in \overset{\circ}{B}$  (\*) e superfície  $s$  contendo  $\underline{x}$ ,  $\underline{t} = \underline{S}\underline{n}$  em  $\underline{x}$  onde  $\underline{n}$  é a normal unitária a  $s$  em  $\underline{x}$  e  $\underline{t}$  é o vetor tensão. O resultado se estende por continuidade a  $\partial B$ ; nesse caso  $\underline{n}$  é a normal exterior e  $\underline{t}$  é chamado de vetor tração e é representativo das forças que atuam sobre  $\partial B$ .



Assim sendo, são os seguintes os 3 problemas básicos da elastostática:

- Achar  $\underline{S}$  em B dado  $\underline{u}$  em  $\partial B$
- Achar  $\underline{S}$  em B dado  $\underline{t}$  em  $\partial B$
- Achar  $\underline{S}$  em B dado  $\underline{u}$  em  $\partial B_1$  e  $\underline{t}$  em  $\partial B_2$  onde  $\partial B_1$  e  $\partial B_2$  são complementares.

$$(\partial B_1 \cup \partial B_2 = \partial B; \partial B_1 \cap \partial B_2 = \emptyset)$$

(\*)  $\overset{\circ}{B} = B - \partial B$ ; é o interior do conjunto.

O primeiro é chamado de problema do deslocamento, o segundo de problema das trações e o último é conhecido como o problema misto.

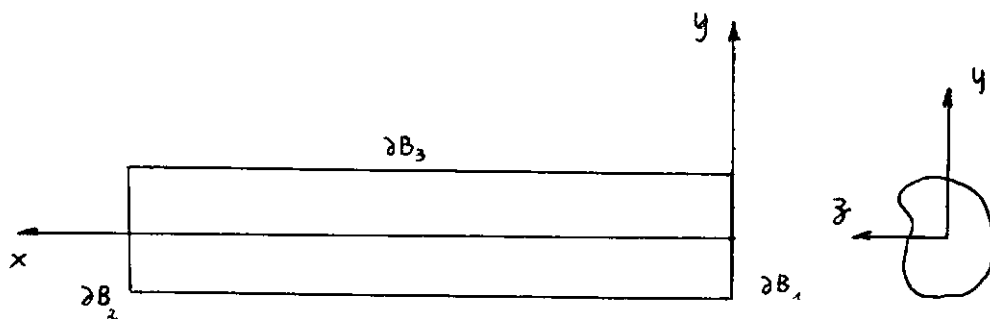
Um dos problemas do tipo b que tem atraído os estudiosos devido a sua grande importância técnica, é o problema da torção e da flexão de vigas.

Como é sabido, Barré de Saint Venant [1893] foi o primeiro a obter soluções exatas para estes problemas (aquelas baseadas na teoria de Bernoulli-Euler, apesar de muito populares, não são exatas). St. Venant<sup>a</sup> utilizou-se do método conhecido como o método semi-inverso, de acordo com o qual parte da solução é assumida sendo o restante obtido como solução de um problema de valor de contorno.

Em termos teóricos, o problema de St. Venant resume-se no seguinte:

Dado um cilindro  $B$  de bases  $\partial B_1$  e  $\partial B_2$  e superfície lateral  $\partial B_3$ , achar  $\underline{S}$  sabendo:

- a) Sobre  $\partial B_1$  age o campo de trações  $\underline{t}_1$
- b) Sobre  $\partial B_2$  age o campo de trações  $\underline{t}_2$
- c)  $\partial B_3$  está livre
- d) Não há forças de volume ( $\underline{b} = 0$ )
- e) O cilindro está em equilíbrio estático.



Devido à extrema dificuldade (talvez até impossibilidade) de resolver o problema analiticamente, St. Venant introduziu as seguintes hipóteses:

$$S_{yy} = S_{zz} = S_{zy} = 0$$

Sob tais hipóteses, tornava-se impossível satisfazer as condições de contorno de  $\underline{t}_1$  em  $\partial B_1$  e  $\underline{t}_2$  em  $\partial B_2$ . Para contornar esta dificuldade, St. Venant "relaxou" as condições de contorno de modo que, ao invés de prescrever  $\underline{t}_1$  em  $\partial B_1$  e  $\underline{t}_2$  em  $\partial B_2$  seriam fornecidos apenas, a força e o momento resultantes em  $\partial B_1$  ( a força e o momento resultantes em  $\partial B_2$  são simétricos por questões de equilíbrio). Tal simplificação permitiu a solução do problema.

Nota-se que o problema "relaxado" não é um problema do tipo b, pois ao invés de ser dado o campo  $\underline{t}_1$  e  $\underline{t}_2$  são apenas dados os resultantes destes campos:

Para que se possa resolver o problema de St. Venant usando a solução do problema "relaxado", St. Venant faz em seu trabalho [1893],

a seguinte observação:

*"C'est que le mode d'application et de répartition des forces vers les extrémités des prismes est indifférent aux effets sensibles produits sur le reste de leur longueur, en sorte qu'on peut toujours, d'une manière suffisamment approchée, remplacer les forces qui sont appliquées, par des forces statiques équivalentes, ou ayant mêmes moments totaux et mêmes résultantes avec une répartition justement telle que l'exigent les formules d'extension, de flexion, de torsion, pour être parfaitement exactes."*

Em poucas palavras, St. Venant afirma nesta observação, que a solução do problema de contorno é praticamente idêntica à solução do problema relaxado a menos dos pontos próximos das bases carregadas. Em seu trabalho, St. Venant faz também, referência a duas experiências de laboratório que parecem confirmar o conteúdo da nota acima.

Esta nota que é conhecida na literatura como o Princípio de St. Venant para cilindros, pode ser reformulada, tendo em vista, a validade do princípio da superposição, (ver cap.III).

Assim, seja:

$\underline{t}_1$  - campo de trações que age sobre  $\partial B_1$ .

$\underline{t}'_1$  - campo de trações sobre  $\partial B_1$  teoricamente exigido pela solução do problema relaxado.

então existe  $\underline{t}_1''$ , campo de tensões sobre  $\partial B_1$ , tal que

$$\underline{t}_1 = \underline{t}_1' + \underline{t}_1''$$

Como  $\underline{t}_1$  e  $\underline{t}_1'$  são necessariamente equipolentes, a força resultante e o momento resultante de  $\underline{t}_1''$  são nulos.

Seja ainda,

$\underline{S}(\underline{t}_1)$  - campo de tensões devido a  $\underline{t}_1$

$\underline{S}(\underline{t}_1')$  - campo de tensões devido a  $\underline{t}_1'$

$\underline{S}(\underline{t}_1'')$  - campo de tensões devido a  $\underline{t}_1''$

Pelo princípio da superposição,

$$\underline{S}(\underline{t}_1) = \underline{S}(\underline{t}_1') + \underline{S}(\underline{t}_1'')$$

Pelo princípio de St. Venant

$$\underline{S}(\underline{t}_1) \equiv \underline{S}(\underline{t}_1') \quad \text{para pontos suficientemente afastados da base}$$

logo  $\underline{S}(\underline{t}_1'') \equiv 0$  nos pontos acima considerados.

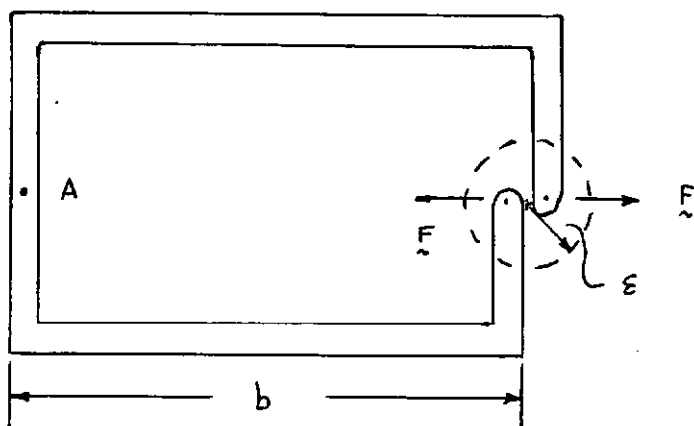
Em palavras, o princípio de St. Venant para cilindros, pode ser reenunciado da seguinte forma:

"Dado um cilindro, carregado unicamente sôbre uma de suas bases, por um campo de trações arbitrário, de força resultante e momento resultante nulos, as componentes de tensão serão praticamente nulos em todo o cilindro, com exceção dos pontos próximos da base carregada."

O enunciado tradicional do princípio de St. Venont é devido a Boussinesq 1885, que generalizou o princípio para qualquer geometria. De acôrdo com Boussinesq "Um sistema de forças externas equilibrado, aplicado a um corpo elástico tal que todos os pontos de aplicação estejam confinados ao interior de uma dada esfera, produz deformações desprezíveis em pontos afastados da esfera por distâncias suficientemente grandes, comparadas com o raio." Este enunciado ganhou popularidade já que foi endossado por Love [1944], em seu famoso tratado.

Em seu trabalho sôbre o princípio de St. Venont V. Mises [1945] levanta uma série de objeções ao enunciado tradicional de Boussinesq. V. Mises comenta que o enunciado tradicional, carece de claresa e qualificação.

Por exemplo, é feita uma objeção à necessidade do sistema ser equilibrado, pois um sistema não equilibrado, é ainda compatível se o domínio for ilimitado.. Outra objeção, é que de acôrdo com a teoria linear, as deformações num ponto qualquer, podem ser feitas arbitrariamente grandes ou pequenas, conforme a carga agente seja feita arbitrariamente grande ou pequena, respectivamente. Finalmente, apresentamos à guisa de ilustração, um contra-exemplo que mostra claramente, as falhas do enunciado tradicional. Seja o corpo indicado na fig. com o respectivo carregamento também indicado.



Como se vê, o corpo está submetido a um carregamento equilibrado, confinado a uma esfera de raio  $\epsilon$ .

De acordo com o enunciado tradicional, seria de se esperar que a deformação (ou tensão) em A fosse desprezível para  $b$  suficientemente grande, o que é obviamente errado.

Tomando por base as objeções levantadas por V. Mises, Sternberg [1954], propõe um princípio de St. Venant modificado e demonstra-o com sucesso. Apesar de ser fora dos objetivos do presente trabalho, uma profunda análise do teorema de Sternberg, julgamos ser oportuno enunciar-lo na íntegra e fazer um breve comentário.

#### Teorema de Sternberg -

Dado um corpo elástico  $B$  de superfície  $\partial B$ , sendo a superfície uma região regular, onde  $B$  é ou não limitado e de conexidade arbitrária. Nestas condições, sejam  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ )  $m$  pontos regulares distintos

sobre  $\partial B$ . Seja ainda  $S_\rho(k)$ ,  $0 < \rho \leq \rho_0$ , uma família de regiões de carregamento que se contraem para  $Z_k$  com  $\rho \rightarrow 0$ . Finalmente, seja  $s_\rho^k = [u_\rho^k, E_\rho^k, S_\rho^k]$  uma família de estados elásticos correspondentes ao carregamento em  $S_\rho(k)$ . Então, dado  $\underline{y} \in B$ .

$$a) \underline{u}_\rho(\underline{y}) = 0(\rho^2); \underline{E}_\rho(\underline{y}) = 0(\rho^2); \underline{S}_\rho(\underline{y}) = 0(\rho^2) \quad \text{em geral}$$

$$b) \underline{u}_\rho(\underline{y}) = 0(\rho^3); \underline{E}_\rho(\underline{y}) = 0(\rho^3); \underline{S}_\rho(\underline{y}) = 0(\rho^3) \quad \text{se para cada } k=1,2,\dots,m$$

a força resultante é nula.

$$c) \underline{u}_\rho(\underline{y}) = 0(\rho^4); \underline{E}_\rho(\underline{y}) = 0(\rho^4); \underline{S}_\rho(\underline{y}) = 0(\rho^4) \quad \text{no caso do equilíbrio}$$

ser astático (\*) em cada k

O resultado anterior só é válido para o caso do carregamento ser distribuído. No caso de existirem cargas concentradas, o teorema modifica-se para:

$$a) \underline{u}_\rho(\underline{y}) = 0(1); \underline{E}_\rho(\underline{y}) = 0(1); \underline{S}_\rho(\underline{y}) = 0(1) \quad \text{no caso geral}$$

$$b) \underline{u}_\rho(\underline{y}) = 0(\rho); \underline{E}_\rho(\underline{y}) = 0(\rho); \underline{S}_\rho(\underline{y}) = 0(\rho) \quad \text{se para cada } k \text{ a força}$$

resultante é nula.

$$c) \underline{u}_\rho(\underline{y}) = 0(\rho^2); \underline{E}_\rho(\underline{y}) = 0(\rho^2); \underline{S}_\rho(\underline{y}) = 0(\rho^2) \quad \text{no caso de haver equi-}$$

líbrio astático em cada k.

(\*) O equilíbrio astático equivale a 12 equações escalares, a saber:

$$\int_\rho t_i d\sigma = 0; \int_\rho t_i x_j d\sigma = 0 \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3$$



Em seu trabalho, Sternberg fez inicialmente, as deduções para a dilatação  $\Delta (E_{ii})$  usando o método de Betti. As extensões para  $\underline{E}$  e  $\underline{S}$  são feitas considerando a fórmula de representação devida a Lauricella, e a extensão para  $\underline{u}$  é possível, excluindo-se um deslocamento rígido, de acordo com a fórmula de representação do campo de deslocamentos de Somigliana.

Um dos resultados mais significativos a que Sternberg chegou, foi demonstrar que, ao contrário do que se pensava anteriormente, a ordem de grandesa de  $\underline{E}(\underline{y})$  nos casos em que tôdas as  $m$  sub-regiões têm forças resultante e momento resultante nulos, não é obrigatõriamente menor de que no caso em que isso não ocorre.

Os métodos abordados até agora em nosso trabalho, com relação ao princípio de St. Venant, podem ser considerados como métodos diretos no sentido de que êles estudam diretamente o comportamento dos deslocamentos ou tensões a partir das equações fundamentais da elasticidade.

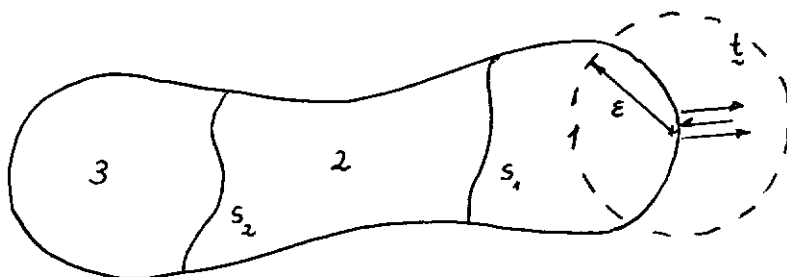
Um método alternativo de se estudar os problemas da elasticidade em geral, e no caso particular o princípio de St. Venant é via equações de energia de deformação. O estudo de um problema, quando possível, através da energia elástica de deformação, apresenta duas grandes vantagens. A primeira é que a função densidade de energia é escalar. A segunda, é que esta função é sãbidamente não negativa. Por outro lado, a aproximação por meios puramente energéticos peca por uma certa perda de informação. Por exemplo, dado o tensor tensão num dado ponto, é trivial obter a densidade de energia neste ponto. O inverso, como se sabe, não é verdade. Mesmo assim, sabendo-se a densidade da energia, conhece-se certas informações sô-

bre o tensor tensão, como por exemplo, um limite superior para qualquer componente do tensor tensão (está implícito que tôdas as constantes do material são conhecidas).

Considerações como estas, levaram um certo grupo de engenheiros e elasticistas a estudar o princípio de St. Venant sob o prisma de trabalho-energia elástica.

Um dos primeiros trabalhos que teve repercussão considerável, foi de Zanaboni [1937]. Em poucas linhas, é o seguinte o resultado a que Zanaboni chegou:

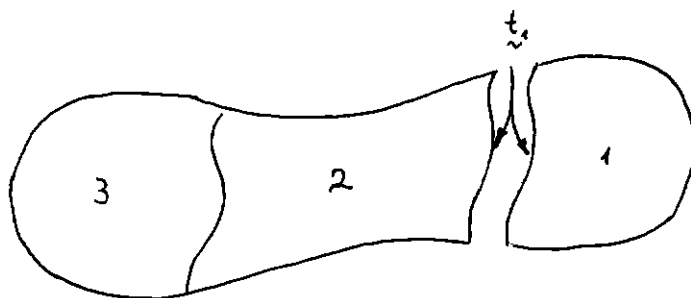
Dado um corpo elástico qualquer, sem forças de volume, e carregado unicamente por um campo de trações de força resultante e momento resultante nulos, que está confinado a uma esfera de raio  $\varepsilon$ . Consideremos então, duas superfícies  $s_1$  e  $s_2$  que não se cortam, tal que  $s_1$ , está mais próxima da esfera que  $s_2$ , como mostra a fig.



Assim, o corpo fica dividido em 3 regiões. Devido ao carregamento  $\underline{t}$ , age sobre  $s_1$  um campo de trações  $\underline{t}_1$  e sobre  $s_2$  o campo  $\underline{t}_2$ . Prova-se com facilidade, que  $\underline{t}_1$  e  $\underline{t}_2$  são obrigatoriamente quito-equilibrados.

Consideremos agora, os dois casos seguintes:

a)

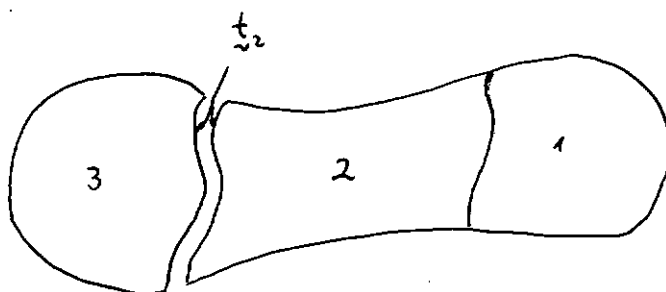


$$U_1 = U_{\underline{t}_1} (1) + U_{\underline{t}_1} (2+3)$$

onde,  $U_{\underline{t}_1} (1)$  é a energia elástica armazenada em (1) devido a  $\underline{t}_1$ , unicamente.

$U_{\underline{t}_1} (2+3)$  é a energia elástica armazenada em (2+3) devido a  $\underline{t}_1$ , unicamente.

b)



$$U_2 = U_{\underline{t}_2} (1+2) + U_{\underline{t}_2} (3) \text{ onde a simbologia é a mesma que no}$$

caso (a).

Então, Zanaboni demonstra que  $U_1 \geq U_2$ . Baseado nesta desigualdade, Zanaboni conclui que a intensidade média de  $\underline{t}_2$  é menor que  $\underline{t}_1$ , ficando assim demonstrado o decaimento das tensões.

Conquanto a demonstração da desigualdade de energia é feita com precisão, as conclusões finais sobre as intensidades de  $\underline{t}_1$  e  $\underline{t}_2$  são vagas e não podem ser consideradas legítimas.

Apesar das conclusões finais de Zanaboni serem duvidosas, o seu trabalho teve o grande mérito de abrir caminho para os estudos do princípio sob o ponto de vista de energia elástica de deformação.

No próximo capítulo, serão abordados os trabalhos de Toupin e Knowles que sem dúvida, representam valiosíssimas contribuições para o estudo do princípio de St. Venant sob o ponto de vista da energia.

## II - LIMITES SUPERIORES PARA ENERGIA ELÁSTICA

### 1. Teorema de Toupin [1965,2]

No que se segue,  $C$  designa um cilindro reto de seção transversal constante  $s$ , base  $\partial C_0$  e eixo  $\underline{e}$ . Notamos por  $s$  a distância (ao longo do suporte de  $\underline{e}$ ) de uma seção transversal  $s_s$  à base  $\partial C_0$  e seja  $\partial C_1 \equiv \partial C - C_0$  e  $C_{s_0}$  a parte de  $C$  definida por  $s \geq s_0$ ; é claro que se  $s_0 = 0$  tem-se  $C_{s_0} \equiv C$

Teorema (Toupin) :

Seja  $\underline{t} : \partial C \rightarrow \mathbb{V}$  um campo de tensões tal que

$$(i) \quad \underline{t} \Big|_{\partial C_0} \quad \bar{e} \text{ auto equilibrado}$$

$$(ii) \quad \underline{t} \Big|_{\partial C_1} \equiv \underline{0}$$

Então a energia elástica de deformação

$U(\underline{t}; s)$  armazenada em  $C_s$  satisfaz a:

$$\frac{U(\underline{t}; s)}{U(\underline{t}; 0)} \leq \exp \left[ - \frac{s-l}{s_c(l)} \right]$$

onde

$$s_c(l) \equiv \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho w_0^2(l)}}$$

A seguinte nomenclatura é usada:

$\rho$  é a massa específica

$\omega_0(l)$  é a menor frequência de vibração livre de uma parte do cilindro de comprimento  $l$  arbitrário.

$\mu_M$  é o máximo módulo de elasticidade

$\mu_m$  é o mínimo módulo de elasticidade

$$\mu^* \equiv \mu_M^2 / \mu_m$$

Daremos abaixo os principais passos da demonstração.

Vejamos também, algo referente à notação.

$$E_{ij} \equiv \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \dots \quad \underline{\text{tensor de deformação infinitesimal}}$$

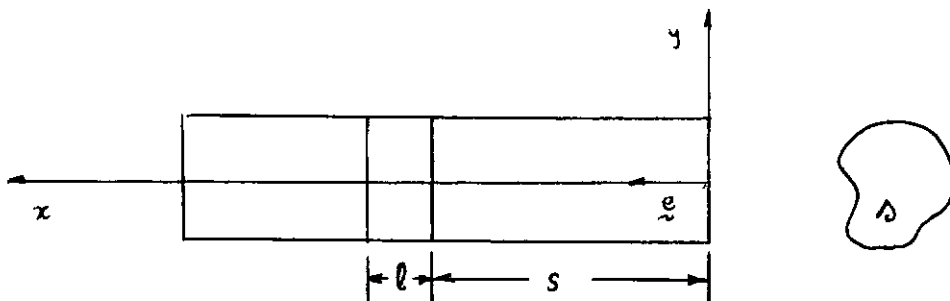
$$\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad \dots \quad \underline{\text{tensor de rotação infinitesimal}}$$

$$W \equiv C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} \quad \dots \quad \underline{\text{função densidade de energia elástica}}$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad \dots \quad \underline{\text{simetria de } \underline{C}}$$

$$||\underline{u}|| \equiv \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} \quad , \quad ||\underline{E}|| \equiv \sqrt{\underline{E} \cdot \underline{E}}$$

Prova: Seja a geometria da figura abaixo



A energia elástica armazenada em  $C_S$  é

$$U(\underline{t}; s) = \frac{1}{2} \int_{C_S} \underline{E} \cdot \underline{C} \left[ \underline{E} \right] dv$$

Pelo teorema do trabalho - energia elástica

$$U(\underline{t}; s) = \frac{1}{2} \int_{\Delta_S} \underline{u} \cdot \underline{t} dA$$

Consideremos agora, um vetor de deslocamento modificado sobre  $\Delta_S$

$$\underline{u}' = \underline{u} + \underline{a} + \underline{\omega} \left[ \underline{x} \right]$$

onde  $\underline{a}$  é um vetor constante

$\underline{\omega}$  é um tensor de rotação infinitesimal constante ( $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ ).

Nestas condições  $\underline{u}'$  difere de  $\underline{u}$  por um deslocamento rígido,

logo

$$U(\underline{t};s) = \frac{1}{2} \int_{\delta_s} \underline{u} \cdot \underline{t} \, dA = \frac{1}{2} \int_{\delta_s} \underline{u}' \cdot \underline{t} \, dA$$

Aplicando as desigualdades de Schwartz e a geométrica-aritmética, temos

$$U(\underline{t};s) \leq \frac{1}{4} \left\{ \alpha \int_{\delta_s} \|\underline{t}\|^2 \, dA + \frac{1}{\alpha} \int_{\delta_s} \|\underline{u}'\|^2 \, dA \right\}$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ . Pode-se mostrar que existe  $W$  tal que em todo ponto  $\underline{x} \in \delta_s$ ,  $\|\underline{t}\|^2 \leq 2 \mu^* W$

Assim,

$$U(\underline{t};s) \leq \frac{1}{4} \left\{ 2\alpha\mu^* \int_{\delta_s} W \, dA + \frac{1}{\alpha} \int_{\delta_s} \|\underline{u}'\|^2 \, dA \right\}$$

Integrando  $U(\underline{t};s)$  entre os limites  $s$  e  $s + l$  onde  $l$  é arbitrário e positivo,

$$\int_s^{s+l} U(\underline{t};s) \, ds \leq \frac{1}{4} \left\{ 2\alpha\mu^* \int_{C_{s,l}} W \, dv + \frac{1}{\alpha} \int_{C_{s,l}} \|\underline{u}'\|^2 \, dv \right\}$$



onde  $C_{s,l} \equiv C_s \cap C_{s+l}$

Pelo princípio de Rayleigh

$$\frac{1}{2} \int_{C_{s,l}} ||\underline{u}'||^2 dv \leq \frac{1}{\rho \omega_0^2(l)} \int_{C_{s,l}} W dv$$

desde que  $\underline{u}'$  seja ortogonal ao subespaço dos deslocamentos rígidos.  $\omega_0(l)$  é a frequência fundamental de vibração livre de um cilindro de comprimento  $l$  e base  $s$ .

Esta ortogonalidade implica em

$$\int_{C_{s,l}} \underline{u}' dv = 0 \quad \text{e} \quad \int_{C_{s,l}} \underline{x} \times \underline{u}' dv = 0$$

Por outro lado, prova-se que sempre é possível escolher constantes  $\underline{a}$  e  $\underline{\omega}$  tal que  $\underline{u}'$  satisfaça as condições de ortogonalidade acima. A desigualdade de Rayleigh pode então ser lícitamente usada, tendo-se

$$\int_s^{s+l} U(\underline{t}; s) ds \leq \frac{1}{2} \left[ \alpha \mu^* + \frac{1}{\alpha \rho \omega_0^2(l)} \right] \int_{C_{s,l}} W dv$$

dividindo ambos os membros por  $\ell$ , e chamando

$$\frac{1}{\ell} \int_s^{s+\ell} U(\underline{t};s) ds \equiv Q(s,\ell)$$

temos

$$Q(s,\ell) \leq \frac{1}{2} \left[ \alpha\mu^* + \frac{1}{\alpha\rho\omega_0^2(\ell)} \right] \frac{1}{\ell} \int_{C_{s,\ell}} W dv$$

mas

$$\frac{1}{\ell} \int_{C_{s,\ell}} W dv = \frac{1}{\ell} \left[ U(\underline{t};s) - U(\underline{t};s+\ell) \right] = - \frac{d}{ds} Q(s,\ell)$$

logo

$$s_c(\ell,\alpha) \frac{d}{ds} Q(s,\ell) + Q(s,\ell) \leq 0$$

onde

$$s_c(\ell,\alpha) \equiv \frac{1}{2} \left[ \alpha\mu^* + \frac{1}{\alpha\rho\omega_0^2(\ell)} \right]$$

Resolvendo esta inequação diferencial entre os limites  $s_1$  e

$s_2$ ,  $s_1 > s_2$  temos,

$$\frac{Q(s_2, l)}{Q(s_1, l)} \leq \exp \left[ - \frac{(s_2 - s_1)}{s_c(l, \alpha)} \right]$$

Como  $U$  é uma função não crescente em relação a  $s$ , tem-se que,

$$U(\underline{t}; s+l) \leq Q(s, l) \leq U(\underline{t}; s)$$

Substituindo,

$$\frac{U(\underline{t}; s_2+l)}{U(\underline{t}; s_1)} \leq \exp \left[ - \frac{s_2 - s_1}{s_c(l, \alpha)} \right]$$

Fazendo  $s_1 = 0$  e  $s_2 = s - l$ , tem-se

$$\frac{U(\underline{t}; s)}{U(\underline{t}; 0)} \leq \exp \left[ - \frac{s - l}{s_c(l, \alpha)} \right]$$

Para otimizar a estimativa, note-se que devemos minimizar  $s_c(l, \alpha)$ . Assim, em relação ao parâmetro  $\alpha$ ,  $s_c(l, \alpha)$  tem um mínimo quando

$$\alpha = \frac{1}{\left[ \mu^* \rho \omega_0^2(l) \right]^{1/2}}$$

Tomando para  $\alpha$  este valor, tem-se

$$s_c(\ell) = \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho \omega_0^2(\ell)}}$$

Após obter este resultado, Toupin faz uma estimativa para a deformação. Toupin mostra que a norma da deformação no centro de uma esfera é limitada superiormente de acordo com,

$$\|\underline{E}\|^2 \leq K \frac{U}{V}$$

onde

$K$  é uma constante do material

$U$  é a energia elástica armazenada na esfera

$V$  é o volume da esfera

Não repetiremos aqui a demonstração deste resultado, entretanto, é importante observar como Toupin usou este resultado em face do resultado anterior.

O objetivo é obter um limite superior para a norma da deformação em qualquer ponto interior do cilindro.

Então, dado um cilindro submetido às condições já inicialmente definidos e um ponto  $P$  qualquer em seu interior, constroi-se a esfera de maior raio centrada em  $P$ , completamente contida no cilindro.

Seja  $d$  esse raio e  $x_p$  a abscissa do centro da esfera.

Pela estimativa da energia,

$$U(\underline{t}; x_p - d) \leq U(\underline{t}; 0) \exp \left[ - \frac{(x_p - d - l)}{s_c(l)} \right]$$

Porém, a energia elástica contida na esfera é certamente menor que  $U(\underline{t}; x_p - d)$ . Assim, podemos usar a desigualdade da norma da deformação, obtendo finalmente

$$\|E_p\|^2 \leq \frac{U(\underline{t}; 0)}{V} \exp \left[ - \frac{(x_p - d - l)}{s_c(l)} \right]$$

## 2. Comentário sôbre o resultado de Toupin:

Observando a desigualdade

$$\|E_p\|^2 \leq \frac{U(\underline{t}; 0)}{V} \exp \left[ - \frac{(x_p - d - l)}{s_c(l)} \right]$$

notamos que, quanto mais próximo da superfície lateral estiver o ponto P, menor será o volume da esfera inteiramente contida no cilindro. Por causa disso, o limite superior perde o seu significado para pontos muito próximos da superfície lateral e falha totalmente sôbre esta.

Roseman [1966,2] obteve, em um trabalho bastante elaborado, um limite superior para a tensão, que é válido em qualquer ponto do cilindro inclusive sôbre a superfície lateral. Sob a restrição de ser o cilindro constituído de um material isotrópico e do contorno da seção transversal satisfazer certas condições de regularidade, Roseman obteve o seguinte resultado:

$$\| \underline{S}(P_x) \|^2 \leq \frac{K}{v^3 a^3} \left[ U(\underline{t}; x-a) - U(\underline{t}; x+a) \right]$$

onde  $\underline{S}(P_x)$  é o tensor tensão no ponto P de abcissa x, K é uma constante física do corpo v e a são constantes positivas que dependem da geometria da seção transversal.

Combinando este trabalho com o resultado do teorema de Toupin, obter-se-á um limite superior para a tensão.

Surge no entanto, um grande problema. Sabemos que,

$$U(\underline{t}; x-a) \leq U(\underline{t}; 0) \exp \left[ - \frac{(x-a-l)}{s_c(l)} \right]$$

$$U(\underline{t}; x+a) \leq U(\underline{t}; 0) \exp \left[ - \frac{(x+a-l)}{s_c(l)} \right]$$

mas é impossível obter uma estimativa para a diferença  $U(\underline{t}; x-a) - U(\underline{t}; x+a)$ , sabendo-se apenas que a mesma é positiva. Ainda, dado  $x_1 < x_2$  então,  $U(\underline{t}; x_1-a) - U(\underline{t}; x_1+a) \geq U(\underline{t}; x_2-a) - U(\underline{t}; x_2+a)$  não pode ser garantido a partir do teorema de Toupin.

O resultado de Roseman combinado com o teorema de Toupin, oferecem uma demonstração formal do Princípio de St. Venant (segundo seu enunciado) para cilindros semi-infinitos. No caso de um cilindro semi-infinito, é possível escolher x tal que  $U(\underline{t}; x-a) \leq \epsilon_1$  e  $U(\underline{t}; x+a) \leq \epsilon_2$  onde  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ ,

são tão pequenos quanto se queira.

Assim,  $U(\underline{t}; x-a) - U(\underline{t}; x+a) \leq \epsilon_3$  onde  $\epsilon_3 > 0$  e é tão pequeno quanto se queira. Então,

$$||\underline{S}(P_x)||^2 \leq \epsilon$$

No entanto, para cilindros finitos nada pode ser garantido.

O teorema de Toupin para a energia, merece dois comentários adicionais:

a) - É errôneo concluir a partir da fórmula

$$\frac{U(\underline{t}; x)}{U(\underline{t}; 0)} \leq \exp \left[ - \frac{x-l}{s_c(l)} \right]$$

que a energia elástica de deformação apresenta um decaimento exponencial. A fórmula garante a existência de um limite superior de natureza exponencial. Entretanto, nada pode ser afirmado sobre o comportamento da energia elástica em si.

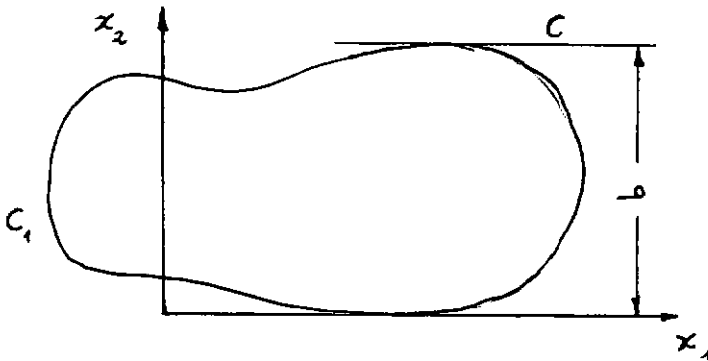
b) - Outro comentário, este de ordem prática, é sobre a dificuldade do cálculo de  $s_c(l)$ . Como já foi visto,  $s_c(l)$  depende essencialmente do cálculo de  $\omega_0(l)$ , e o cálculo de  $\omega_0(l)$  é um problema de valor-próprio extremamente complexo (cremos que da mesma ordem de complexidade que a própria resolução do problema de contorno).

Sabemos que,

$$s_c(l) = \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho \omega_0^2(l)}}$$

Assim, se for possível obter um limite inferior para  $\omega_0(l)$  em função do material e da geometria da seção, poderemos reescrever o teorema de Toupin em função de uma constante universal e de alguns dados geométricos. Este é um problema que ainda está em aberto.

No caso da teoria bidimensional, Knowles [1966,1], chegou independentemente a um resultado análogo ao de Toupin. O resultado de Knowles, tomando por base a figura abaixo, é o seguinte:



Seja  $C_1$  carregado por um campo de tensões auto-equilibrado e  $C-C_1$  livre de tensões. Então,

$$U(x_1) \leq 2U(0) \exp \left[ - 2kx_1/b \right]$$

onde,

$$k = \Pi \left( \frac{\sqrt{2}-1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

é uma constante universal e  $b$  é a largura máxima (vide figura).



Assim, para o caso bidimensional, Knowles pode obter uma constante universal para o decaimento. Isto decorre do fato de que o problema de valor próprio associado à sua demonstração é unidimensional, sendo assim, de fácil solução (cf.(3.14) de [1966,11]).

### III - SÔBRE A DISTRIBUIÇÃO DA ENERGIA ELÁSTICA EM CILINDROS

#### 1. Preliminares:

O resultado de Toupin, quando corretamente interpretado, fornece uma justificativa para a hipótese de St. Venant para cilindros se mi-infinitos.

No presente capítulo, tencionamos obter um resultado mais restritivo quanto à distribuição da energia elástica.

Dado um cilindro reto em equilíbrio, submetido à trações sôbre uma de suas bases, considerando nulas as forças de volume, queremos provar que a energia elástica armazenada entre as abcissas  $x$  e  $x+l$  é maior que a armazenada entre  $x+l$  e  $x+2l$  sendo  $x=0$  a abcissa da base carregada.

Para tanto, demonstraremos alguns teoremas intermediários para finalmente, provarmos o resultado desejado.

A partir de agora, e salvo observações em contrário, as forças de volume serão nulas e  $\underline{\underline{C}}$  é simétrico, i.e.

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} \left[ \underline{\underline{A}} \right] = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}} \left[ \underline{\underline{B}} \right] .$$

Dizemos que  $\left[ \underline{\underline{u}}, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{S}} \right]$  é um estado elástico, se

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\underline{u}} + \nabla \underline{\underline{u}}^T)$$

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}} [\underline{\underline{E}}]$$

$$\text{div } \underline{\underline{S}} = 0$$

Dizemos ainda que é válido o *princípio da superposição* no sentido de que se  $[\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{S}}]$  e  $[\underline{\underline{u}}', \underline{\underline{E}}', \underline{\underline{S}}']$  são dois estados elásticos correspondentes a trações  $\underline{\underline{t}}$  e  $\underline{\underline{t}}'$  sobre a superfície, então, se  $\alpha$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha [\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{S}}] + \beta [\underline{\underline{u}}', \underline{\underline{E}}', \underline{\underline{S}}']$  é o estado elástico correspondente ao sistema de trações  $\alpha \underline{\underline{t}} + \beta \underline{\underline{t}}'$ .

Definimos agora,

$$U [\underline{\underline{E}}] = \frac{1}{2} \int_B \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{C}} [\underline{\underline{E}}] \, d v$$

Como a energia elástica de deformação armazenada em B devido ao campo  $\underline{\underline{E}}$ .

Nestas condições, sabe-se que, [1969,1] .

$$U [\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{E}}'] = U [\underline{\underline{E}}] + \int_B \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{C}} [\underline{\underline{E}}'] \, d v + U [\underline{\underline{E}}']$$

e mais,

$$U [\underline{\underline{E}}] \geq 0, \quad U [\underline{\underline{E}}] = 0 \leftrightarrow \underline{\underline{E}} \equiv 0$$

Escrevemos,

$$\int_B \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{C}} [\underline{\underline{E}}'] \, d v \equiv U [\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{E}}']$$

## 2. Primeiro Teorema da Energia Elástica:

Seja um corpo elástico  $B$  de fronteira  $\partial B$  e seja  $\partial B$  decomposta em três sub-regiões complementares  $\partial B \equiv \partial B_1 + \partial B_2 + \partial B_3$

Consideremos um campo de trações  $\underline{t}_1$  aplicado unicamente em  $\partial B_1$ , tal que o corpo esteja em equilíbrio. Assim, fica associado a  $\underline{t}_1$ , um estado elástico  $[\underline{u}_1, \underline{E}_1, \underline{S}_1]$  com energia elástica  $U[\underline{E}_1]$ .

Consideremos agora, exatamente o mesmo problema, com a condição adicional de que  $\partial B_2$  está engastado, ou seja,  $\underline{u}(\partial B_2) \equiv 0$ . Devido a esta restrição em  $\partial B_2$ , forma-se um campo reativo de trações sobre  $\partial B_2$  que chamaremos  $\underline{t}_2$  com o estado elástico correspondente  $[\underline{u}_2, \underline{E}_2, \underline{S}_2]$  e a energia elástica  $U[\underline{E}_2]$ .

### Teorema -

- a)  $\underline{t}_2$  é um campo auto-equilibrado
- b)  $U[\underline{E}_2] < U[\underline{E}_1]$

Prova:

- a)  $\underline{t}_1$  é auto-equilibrado

$$\int_{\partial B_1} \underline{t}_1 \, dA = \int_{\partial B_1} (\underline{x} \times \underline{t}_1) \, dA = 0 \quad (1)$$

Mas, o corpo está em equilíbrio, logo:

$$\int_{B_1} \underline{t}_1 \, dA + \int_{B_2} \underline{t}_2 \, dA = 0 \quad (2)$$

$$\int_{\partial B_1} (\underline{x} \times \underline{t}_1) \, dA + \int_{\partial B_2} (\underline{x} \times \underline{t}_2) \, dA = 0 \quad (3)$$

Substituindo (1) em (2) e (3) temos

$$\int_{\partial B_2} \underline{t}_2 \, dA = \int_{\partial B_2} (\underline{x} \times \underline{t}_2) \, dA = 0$$

b) Pelo princípio da superposição, sabemos que,

$$U[\underline{E}_1 + \underline{E}_2] = U[\underline{E}_1] + U[\underline{E}_2] + U[\underline{E}_1, \underline{E}_2] \quad (4)$$

Pelo princípio do trabalho - energia elástica,

$$U[\underline{E}] = \frac{1}{2} \int_{\partial B} \underline{t} \cdot \underline{u} \, dA \quad \text{e} \quad U[\underline{E}, \underline{E}'] = \int_{\partial B} \underline{t} \cdot \underline{u}' \, dA$$

Demonstra-se ainda, (v. apêndice 1) que, devido à restrição a  $\partial B_2$  ( $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = 0$  em  $\partial B_2$ )  $U[\underline{E}_1 + \underline{E}_2]$  é mínimo em relação a qualquer variação de  $\underline{t}_2$ .

Seja, então, uma variação

$$\underline{t}_2 \rightarrow \underline{t}_2 + \varepsilon \frac{\underline{t}_2}{|\underline{t}_2|} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$U[\underline{E}_1 + \underline{E}'_2] = U[\underline{E}_1] + U[\underline{E}'_2] + U[\underline{E}_1, \underline{E}'_2]$$

$$U[\underline{E}_1 + \underline{E}'_2] = U[\underline{E}_1] + (1 + \varepsilon)^2 U[\underline{E}_2] + (1 + \varepsilon) U[\underline{E}_1, \underline{E}_2]$$

$$\Delta U = U[\underline{E}_1 + \underline{E}'_2] - U[\underline{E}_1 + \underline{E}_2] = 2\varepsilon U[\underline{E}_2] + \varepsilon^2 U[\underline{E}_2] + \varepsilon U[\underline{E}_1, \underline{E}_2]$$

$$\Delta U = \varepsilon^2 U[\underline{E}_2] + \varepsilon \{2U[\underline{E}_2] + U[\underline{E}_1, \underline{E}_2]\}$$

Mas, pela condição de mínimo,  $\Delta U > 0 \quad \forall \varepsilon \neq 0$

logo,

$$2U[\underline{E}_2] + U[\underline{E}_1, \underline{E}_2] = 0$$

Substituindo em (4)

$$U[\underline{E}_1 + \underline{E}_2] = U[\underline{E}_1] - U[\underline{E}_2]$$

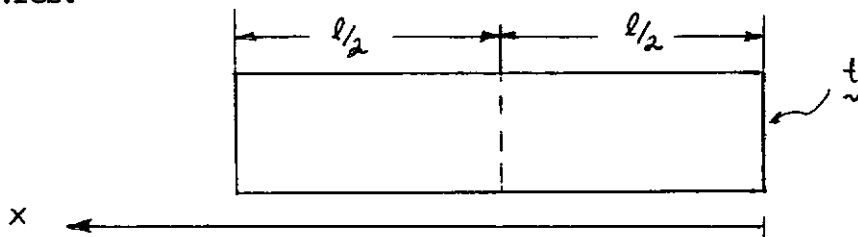
como

$$U[\underline{E}_1 + \underline{E}_2] > 0$$

$$U[\underline{E}_1] > U[\underline{E}_2]$$

### 3. Segundo Teorema da Energia Elástica

Consideremos um cilindro reto que está em equilíbrio, com uma de suas bases carregadas e a outra base, bem como a superfície lateral, livres.



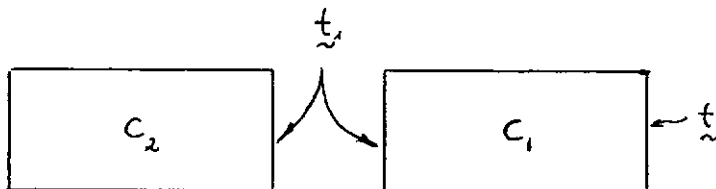
Teorema -

A energia elástica armazenada entre  $0$  e  $l/2$  é maior do que a energia elástica armazenada entre  $l/2$  e  $l$ .

Prova -

Consideremos o cilindro dividido em duas partes iguais.

$C_1$  e  $C_2$



Quer se mostrar que

$$U_{C_1}[E + E_1] > U_{C_2}[E_1]$$

Sabe-se que

$$U_{c_1}[\underline{E} + \underline{E}_1] = U_{c_1}[\underline{E}] + U_{c_1}[\underline{E}_1] + U_{c_1}[\underline{E}, \underline{E}_1]$$

Consideremos agora  $\underline{t}_1$  multiplicado por um fator arbitrário  $k$ .

Então,

$$U_{c_1}[\underline{E} + \underline{E}'_1] = U_{c_1}[\underline{E}] + k^2 U_{c_1}[\underline{E}_1] + k U_{c_1}[\underline{E}, \underline{E}_1]$$

Como  $\underline{t} \neq 0$ ,  $U_{c_1}[\underline{E} + \underline{E}'_1] > 0$   $k \in \mathbb{R}$

Seja  $k = 2$  em particular. Então,

$$U_{c_1}[\underline{E}] + 4U_{c_1}[\underline{E}_1] + 2U_{c_1}[\underline{E}, \underline{E}_1] > 0 \quad (1)$$

Agora, considerando os resultados de Zanaboni [1937] sabe-se que

$$2U_{c_1}[\underline{E}_1] + 2U_{c_2}[\underline{E}_1] + U_{c_1}[\underline{E}, \underline{E}_1] = 0 \quad (2)$$

ou

$$2U_{c_1}[\underline{E}, \underline{E}_1] = -4u_{c_1}[\underline{E}_1] - 4U_{c_2}[\underline{E}_1]$$

Substituindo em (1), temos



$$U_{c_1}[\underline{E}] - 4U_{c_2}[\underline{E}_1] > 0 \quad (3)$$

Como os dois cilindros são iguais  $U_{c_1}[\underline{E}_1] = U_{c_2}[\underline{E}_1]$  logo podemos escrever (3) na forma

$$U_{c_1}[\underline{E}] - 3U_{c_1}[\underline{E}_1] > U_{c_2}[\underline{E}_1]$$

ou

$$U_{c_1}[\underline{E}] + U_{c_1}[\underline{E}_1] - 4U_{c_1}[\underline{E}_1] > U_{c_2}[\underline{E}_1]$$

Mas, de acôrdo com (2)  $U_{c_1}[\underline{E}, \underline{E}_1] = -4U_{c_1}[\underline{E}_1]$ .

Então, finalmente

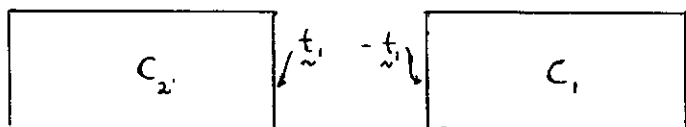
$$U_{c_1}[\underline{E} + \underline{E}_1] > U_{c_2}[\underline{E}_1]$$

Demonstraremos agora, êste mesmo teorema de uma forma alternativa. A razão disto é que, para alcançarmos o resultado final, usaremos a mesma técnica que será usada nesta segunda demonstração.

Consideremos como no caso anterior, o cilindro dividido em duas metades iguais.

Sobre  $C_2$ , age o campo  $\underline{t}_1$ .

Consideremos agora, hipoteticamente, que sobre  $C_1$  age  $-\underline{t}_1$ .



Como as metades são iguais, temos respectivamente em  $C_1$  e  $C_2$ , os estados elásticos

$$\left[ -\underline{u}_1, -\underline{E}_1, -\underline{S}_1 \right] \text{ e } \left[ \underline{u}_1, \underline{E}_1, \underline{S}_1 \right].$$

Nestas condições, as energias elásticas em  $C_1$  e  $C_2$ , serão

$$U_{C_2}[\underline{E}_1] \text{ e } U_{C_1}[-\underline{E}_1] = U_{C_1}[\underline{E}_1] = U_{C_2}[\underline{E}_1]$$

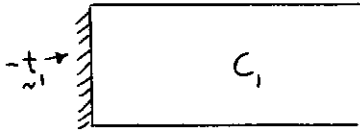
Como os deslocamentos na junção são iguais, os dois cilindros podem ser justapostos, não havendo descontinuidade geométrica.

O problema só não fica resolvido, pois não há equilíbrio na junção (descontinuidade de tensões).

Queremos restabelecer o equilíbrio sem alterarmos os deslocamentos na face limite.

Para tanto, consideremos a metade  $C_1$  e fixemo-la rigidamen-

te depois da aplicação de  $-t_1$ .



$$U_{C_1}[-E_1] = U_{C_2}[E_1]$$

Aplicamos agora, na face livre, um carregamento  $t$  tal que  $-t_1$  se transforme em  $t_1$ , ou seja,  $t$  é tal que, agindo independentemente, provoca uma reação  $2t_1$  sobre o cilindro no engaste.



Como ao aplicarmos  $t$  o único campo de trações que realiza trabalho e o próprio campo  $t$ , então o trabalho líquido será positivo e a energia elástica em  $C_1$  será maior após a aplicação de  $t$  do que antes.

$$U_{C_1}[E + E_1] > U_{C_1}[-E_1] = U_{C_2}[E_1]$$

logo

$$U_{C_1}[E + E_1] > U_{C_2}[E_1]$$

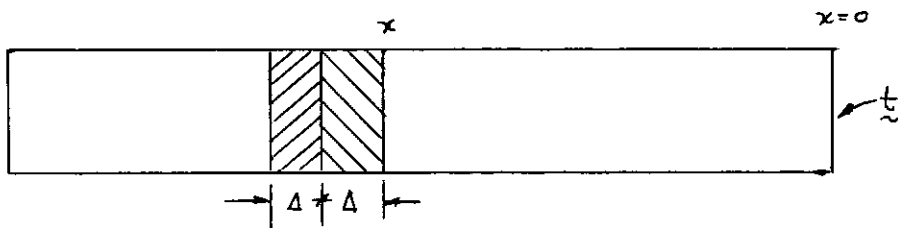
#### 4. Terceiro Teorema da Energia Elástica

Neste ponto, estamos aptos a formular nosso resultado principal.

##### Teorema -

Dado um cilindro reto tal que:

- (i) - São válidas tôdas as restrições da elasticidade linear.
- (ii) - As forças de volume são nulas.
- (iii) - O cilindro está em equilíbrio estático.
- (iv) - O cilindro está carregado sômente sôbre uma de suas bases, sendo a outra base e a superfície lateral, livres.
- (v) - As trações em cada reta paralela à geratriz, conservam a mesma direção.



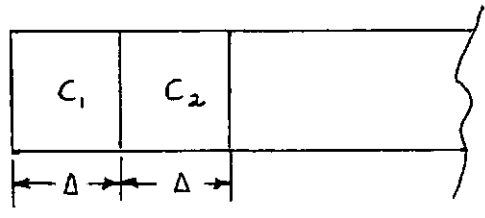
Então,

$$U(x + \Delta) - U(x) > U(x + 2\Delta) - U(x + \Delta)$$

Prova -

Consideremos o cilindro dado a partir de sua base livre.

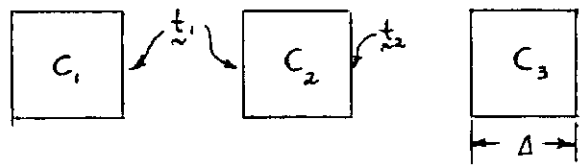
Consideremos duas seções do cilindro de comprimento  $\Delta$  como mostra a figura.



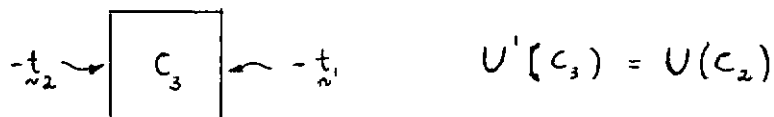
De acordo com o segundo teorema, tem-se

$$U(c_2) > U(c_1)$$

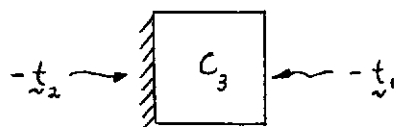
Consideremos agora, a seção imediatamente anterior, que será chamada de  $C_3$ .



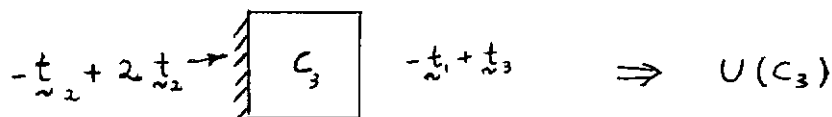
Suponhamos agora, que sobre  $c_3$  agem  $-t_2$  e  $-t_1$ .



então, os deslocamentos na junção  $c_2c_3$  serão os mesmos e o cilindro  $c_3$  pode ser justaposto sem quebra de continuidade geométrica. Como no segundo teorema, o problema não está resolvido por causa da descontinuidade das trações. Assim, fixemos rigidamente a face  $c_2c_3$  do cilindro  $c_3$ .



Procuramos então, um campo de trações  $t_3$  tal que aplicado na base oposta à base fixada faça com que surja um campo  $2t_2$  em  $c_2c_3$  devido à restrição de deslocamento.



Chegamos agora ao ponto crítico. Devemos demonstrar que, o trabalho feito por  $t_3 - t_1$  sobre o cilindro, é maior que o trabalho feito por  $-t_1$ . Uma vez demonstrado isto, fica garantido que, ao aplicarmos  $t_3$  estamos realizando um trabalho líquido positivo, logo

$$U(c_3) > U'(c_3) = U(c_2)$$

ou

$$U(c_3) > U(c_2)$$

Analisando  $t_3$ , nota-se que  $t_3$  é tal que aplicado, produza como reação de engaste  $2t_2$ .

Logo, pelo primeiro teorema

$$U_{c_3}(t_3) > U_{c_3}(2t_2)$$

$$U_{c_3}(t_3) > 4U_{c_3}(t_2)$$

Da mesma forma

$$U_{c_2}(t_2) > 4U_{c_2}(t_1)$$

como  $c_2 \equiv c_3$

$$U_{c_3}(t_3) > 16U_{c_3}(t_1)$$

Como  $t_1$  e  $t_3$  têm a mesma direção, para que a desigualdade seja satisfeita

$$|t_3| > 4|t_1| \quad \text{então} \quad |t_3| - |t_1| > 3|t_1| \quad |t_3 - t_1| > 3|t_1|$$

Consequentemente, o trabalho realizado por  $t_3 - t_1$  é maior que o realizado por  $-t_1$  e o teorema fica provado.

Aplicando o mesmo procedimento para as seções à direita, tem-se

$$U(c_n) > U(c_{n-1}) \quad \Delta \in R^+$$

Observação:

Nota-se que a hipótese (v) do teorema, limita bastante a sua generalidade. Não nos foi possível demonstrarmos a relação  $U(c_3) > U(c_2)$  sem a introdução desta hipótese. Conjecturamos, no entanto, ser tal hipótese desnecessária, o que viria a generalizar amplamente o teorema proposto.

5. Corolário do Terceito Teorema

Seja



$$\phi(\underline{E}) = \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{C}[\underline{E}]$$

a função densidade de energia elástica de deformação. Definimos a função

$$\bar{U}(x) = \int_A \phi \, dA$$

como a energia elástica por unidade de comprimento. A integração é feita sobre a área da seção transversal de abscissa  $x$ .

Corolário -

$$\bar{U}(x) > \bar{U}(x') \quad \text{se} \quad x' > x$$

Prova -

De fato, pelo teorema anterior

$$\int_x^{x+\Delta} \bar{U}(x) \, dx > \int_{x'}^{x'+\Delta} \bar{U}(x) \, dx \quad \text{se} \quad x' > x$$

Como esta relação é válida para qualquer  $\Delta > 0$ , façamos

$\Delta \rightarrow 0$ , então, no limite

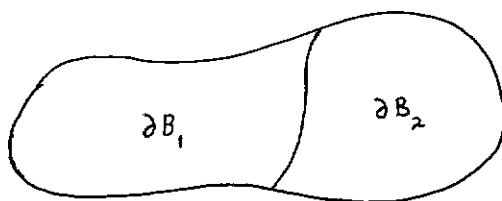
$$\bar{U}(x) > \bar{U}(x')$$

## IV - APÊNDICE

### 1. Corolário do Teorema da Reciprocidade de Betti

Seja um corpo B com fronteira  $\partial B$ . Consideremos esta fronteira dividida em duas regiões complementares.

$$(\partial B_1 \cup \partial B_2 \equiv \partial B ; \partial B_1 \cap \partial B_2 \equiv 0)$$



Sejam dois estados elásticos  $[\underline{u}, \underline{E}, \underline{S}]$  e  $[\underline{u}', \underline{E}', \underline{S}']$  correspondentes respectivamente ao sistema externo  $\underline{t}$  e  $\underline{t}'$ . (as forças de volume são nulas por hipótese)

Corolário -

Sejam por hipótese

- (i)  $\underline{u} = \underline{0}$  sobre  $\partial B_1$
- (ii)  $\underline{t} = \underline{t}'$  sobre  $\partial B_2$

então,

$$U[\underline{E}] < U[\underline{E}']$$

Prova -

Pelo princípio da superposição,  $[\underline{u}' - \underline{u}, \underline{E}' - \underline{E}, \underline{s}' - \underline{s}]$  é um estado elástico correspondente ao sistema  $\underline{t}' - \underline{t}$

Então,

$$U[\underline{E}' - \underline{E}] = U[\underline{E}'] + U[\underline{E}] - \int_B \underline{E}' \cdot \underline{C} \underline{E} \, dv \quad (1)$$

Pelo teorema de Betti

$$\int_B \underline{E}' \cdot \underline{C} \underline{E} \, dv = \int_{\partial B} \underline{t}' \cdot \underline{u} \, dA \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1)

$$U[\underline{E}' - \underline{E}] = U[\underline{E}'] + U[\underline{E}] - \int_{\partial B} \underline{t}' \cdot \underline{u} \, dA \quad (3)$$

Calculemos

$$\int_{\partial B} \underline{t}' \cdot \underline{u} \, dA$$

$$\int_{\partial B} \underline{t}' \cdot \underline{u} \, dA = \int_{\partial B_1} \underline{t}' \cdot \underline{u} \, dA + \int_{\partial B_2} \underline{t}' \cdot \underline{u} \, dA = 2U[\underline{E}] \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3)

$$U[\underline{E}' - \underline{E}] = U[\underline{E}'] - U[\underline{E}]$$

como

$$U[\underline{E}' - \underline{E}] \geq 0$$

$$U[\underline{E}'] - U[\underline{E}] \geq 0 \rightarrow U[\underline{E}'] \geq U[\underline{E}]$$

A igualdade só é válida para  $\underline{E}' \equiv \underline{E}$

B I B L I O G R A F I A

- [1893 ]- TODHUNTER, I. & PEARSON, K : A History of the Theory of Elasticity vol. II, New York, Dover Inc. (1960).
- [1937 ]- ZANABONI, O. : Dimostrazione Generale del Principio de Saint-Venant, Atti. Accad. Lincei, Roma, 25, 117.
- [1944 ]- LOVE, A.E.H. : A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, New York, Dover Inc. (1944).
- [1945 ]- VON MISES, R. : On Saint-Venant Principle, Bull. Amer. Math. Soc., 51, 555.
- [1954 ]- STERNBERG, E. : On Saint-Venant Principle, Quart. Appl. Math., 11, 393-402.
- [1964 ]- DOU, A. : On the Principle of Saint-Venant, Mat. Research Cent., University of Wisconsin, Tech. Rep. 472.
- [1965,1]- STERNBERG, E. & KNOWLES, K. : Minimum Energy Characterization of Saint-Venant Solution to the relaxed Saint-Venant Problem, Div. of Eng. and Appl. Scien. California Institute of Technology, Tech. Rep. 3.
- [1965,2]- TOUPIN, R.-A. : Saint-Venant Principle, Archs. Ration. Mech. Analysis, 18, 83.
- [1966,1]- KNOWLES, K : On Saint-Venant Principle in the two Dimensional li-

near Theory of Elasticity, *Archs, ration. Mech. Analysis*, 31, 1.

[1966,2]- ROSEMAN, J.J. : A Pointwise Estimate for the Stress in a Cylinder and its Application to Saint-Venant's Principle, *Archs. Ration. Mech. Analysis*, 21, 23.

[1966,3]- STERNBERG, E. & KNOWLES, K. : On Saint-Venant Principle and the Torsion of Solids of Revolution, *Archs. Ration. Mech. Analysis*, 22, 100.

[1969,1]- GURTIN, R.M. : Linear Elasticity, a ser publicado no *Handbook of Physics*, Springer.

[1969,2]- KNOWLES, K. & HORGAN, C.O. : On the Exponential Decay of Stresses in Circular Elastic Cylinders Subject to Axisymmetric Self-Equilibrating End Loads, *Int. J. Solids Structures*, 5, 33.