

# OTIMIZAÇÃO DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA

## ESTUDO DE DOIS MODELOS

Sérgio Koide

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

  
Prof. Paulo Canedo de Magalhães  
(Presidente)

  
Prof. Luiz Carlos Wrobel

  
Prof. Nelson Maculan Filho

RIO DE JANEIRO, RJ - B R A S I L

MARÇO DE 1984

KOIDE, SÉRGIO

Otimização de Redes de Distribuição de Água - Estudo de Dois Modelos (Rio de Janeiro) 1984.

IX, 92p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1984)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro,  
COPPE.

I. Redes de Distribuição de Água      I. COPPE/UFRJ  
II. Título (série)

A meus pais e à Leiko

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Guerrero pela orientação.

Ao Prof. Paulo Canedo pela orientação e por aceitar a tarefa de orientar um trabalho já em andamento.

Ao Prof. Maculan pelos ensinamentos e pela dedicação e atenção.

Ao Ailton pelos programas de computador.

Ao CNPq pelas bolsas concedidas.

A Lilian pela datilografia

Aos amigos, e em particular a Cristina e a Maria José, que contribuiram e incentivaram para a realização deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

OTIMIZAÇÃO DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA -  
ESTUDO DE DOIS MODELOS

Sérgio Koide

Março, 1984

Orientador: Prof. Paulo Canedo de Magalhães

Programa: Engenharia Civil

São estudados dois modelos de otimização dos custos de implantação de redes de distribuição de água, fazendo-se uma avaliação das soluções obtidas e do desempenho computacional dos modelos.

O primeiro modelo analisado transforma o problema da rede em um problema de Programação Linear Inteira zero-um, que é resolvido pelo Método de Enumeração Implícita e pelo Método Dual de Decomposição.

O outro modelo procura otimizar a rede através de busca heurística dos diâmetros ótimos, baseada no custo da energia necessária para elevação do nível piezométrico nos nós de abastecimento da rede. Nos casos em que a rede é abastecida por reservatório com cota pré-fixada adota-se um valor fictício para o custo de energia, e este valor é modificado pelo modelo ao final de cada iteração no sentido de obter-se o nível piezométrico fixado para o reservatório.

Os modelos foram testados em três redes com características bastante diversas, tendo sido obtidos bons resultados com a utilização do segundo modelo.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

OPTIMIZATION OF WATER DISTRIBUTION NETWORKS -  
STUDY OF TWO MODELS

Sérgio Koide

March, 1984

Chairman: Prof. Paulo Canedo de Magalhães

Department: Civil Engineering

Two cost optimization models of water distribution networks are studied and a evaluation of the obtained solutions and computational performance are done.

The first model analyzed transforms the optimization problem into a zero-one integer linear programming problem, which is solved by implicit enumeration algorithm and by dual decomposition algorithm.

The other model seeks optimization of the network by heuristic search of optimal diameters, based on energy costs necessary to elevation of piezometric height of the network source nodes. In case of network supplied by reservoir with prefixed height, a dummy value is adopted for the energy cost, and this value is modified by the model at the end of each iteration to reach the fixed reservoir piezometric height.

Models were tested in three networks with quite different characteristics, and good results were obtained by using the second model.

## ÍNDICE

Pág.

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO . . . . .	1
I.1 Generalidades . . . . .	1
I.2 O Projeto de Sistemas de Distribuição de Água e a Solução Hidráulica da Rede . . . . .	2
I.3 Otimização de Redes de Distribuição de Água . . . . .	4
I.4 Objetivos do Trabalho . . . . .	7
 CAPÍTULO II - O MODELO DE OTIMIZAÇÃO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO INTEIRA . . . . .	8
II.1 Introdução . . . . .	8
II.2 Definição do Problema . . . . .	8
II.3 Modificação do Problema . . . . .	13
II.4 Resolução do Problema de Programação Linear Inteira Bivalente . . . . .	20
II.4.1 Método de Enumeração Implícita . . . . .	21
II.4.2 Método Dual de Decomposição . . . . .	26
II.5 Comentários . . . . .	35
 CAPÍTULO III - O MODELO HEURÍSTICO DE OTIMIZAÇÃO UTILIZANDO CUSTO DE ENERGIA . . . . .	38
III.1 Introdução . . . . .	38
III.2 Definição do Problema . . . . .	38
III.3 O Algoritmo de Modificação dos Diâmetros	40
III.4 Adaptação do Algoritmo a um Tipo de Problema . . . . .	47
III.5 Comentários . . . . .	48

CAPÍTULO IV - APLICAÇÃO DOS MODELOS . . . . .	49
IV.1 Introdução . . . . .	49
IV.2 Exemplo nº 1 . . . . .	50
IV.2.1 Modelo de Otimização por Programação Inteira Bivalente . . . . .	52
IV.2.1.1 Programação Inteira Bivalente, Método de Enumeração Implicita . . . . .	52
IV.2.1.2 Programação Inteira Bivalente, Método Dual de Decomposição . . . . .	55
IV.2.2 Modelo Heurístico de Otimização Utilizando Custo de Energia . . . . .	57
IV.3 Exemplo nº 2 . . . . .	58
IV.4 Exemplo nº 3 . . . . .	63
IV.4.1 Modelo de Otimização por Programação Inteira Bivalente, Utilizando o Método Dual de Decomposição . . . . .	68
IV.4.2 Modelo de Otimização Heurística Utilizando Custo de Energia . . . . .	72
 CAPÍTULO V - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES . . . . .	 79
V.1 Discussão dos Resultados . . . . .	79
V.1.1 Modelo de Otimização por Programação Linear Inteira Bivalente . . . . .	79
V.1.2 Modelo Heurístico de Otimização Utilizando Custo de Energia . . . . .	81

V.2 Conclusões . . . . .	84
V.3 Recomendações . . . . .	85
 BIBLIOGRAFIA . . . . .	 87

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

#### I.1 GENERALIDADES

É inegável a importância da implantação de sistemas públicos de saneamento básico nas condições de vida da população, principalmente em áreas urbanas.

Devido aos elevados investimentos necessários para a implantação e operação desses sistemas, tem-se desenvolvido inúmeras pesquisas no sentido de se minimizar seus custos, sem prejuízo à qualidade dos serviços prestados.

Em particular, nos sistemas de abastecimento de água, uma grande parcela dos investimentos são absorvidos pela rede de distribuição, podendo representar de 50 a 60% do custo de implantação do sistema (9).

O conhecimento de modelos eficientes de otimização do custo de redes seria de grande aplicação nos estudos de implantação e operação de sistemas de abastecimento de água, seja em novos projetos ou em expansão de sistemas existentes.

Neste trabalho serão estudados e discutidos alguns modelos de otimização de redes de distribuição de água, em sequência aos trabalhos de PIRES (20) e VIEIRA (30).

## I.2 O PROJETO DE SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA E A SOLUÇÃO HIDRÁULICA DA REDE

Devido à complexidade dos sistemas de distribuição de água, inúmeras simplificações normalmente são introduzidas nos estudos para dimensionamento da rede, e as principais, que serão adotadas neste trabalho, são ressaltadas a seguir:

- A distinção dos condutos da rede em principais e secundários permite uma redução nas dimensões do problema, visto que só os principais são considerados no dimensionamento. Os condutos secundários, de menor diâmetro, são os que estão em contato direto com os pontos a serem abastecidos, e portanto, tem influência restrita às suas vizinhanças (18). Deve-se notar que uma simplificação excessiva da rede pode comprometer a análise da rede;
- A distribuição de água, que usualmente é feita ao longo das tubulações, é considerada concentrada em determinados pontos das tubulações principais (preferencialmente nas junções), denominados nós;
- O fluxo na rede é considerado permanente, com as vazões calculadas para as condições críticas (18).

A disposição dos condutos principais na rede pode ou não formar anéis fechados. Caso existam tais anéis, a rede é chamada de malhada, e caso contrário é chamada de rede ramificada. Em geral, a adoção de redes malhadas oferece vantagens em relação às ramificadas, tais como flexibilidade de operação da

rede em casos de reparos, menor sensibilidade às oscilações, de demanda, etc. (30).

Estabelecidos a geometria e os diâmetros da rede, a análise hidráulica pode ser feita baseada nas equações de continuidade nos nós e nas equações de Conservação de Energia. Em geral, o sistema de equações simultâneas resultante da formulação será não linear, dificultando a determinação de soluções analíticas.

Em 1936, CROSS (7) propôs a resolução do sistema de equações por método iterativo, utilizando a técnica da relaxação. Este método ainda é muito utilizado.

Com o desenvolvimento acentuado dos computadores digitais, outras técnicas iterativas passaram a ser utilizadas na solução hidráulica da rede, como o método de Newton-Raphson e o método de Análise Linear. No método de Newton-Raphson faz-se o ajuste de todas as equações simultaneamente a cada iteração, enquanto que no método de Hardy-Cross ajusta-se uma equação de cada vez. No método de Análise Linear faz-se uma linearização artificial das equações de perda de carga, e não é necessária uma solução inicial para o problema como nos outros dois métodos.

VIEIRA (30) apresenta uma revisão atualizada da bibliografia sobre o assunto, e testa os três métodos acima, indicando o método de Newton-Raphson como o que melhor se adapta à solução em computadores de grande porte.

Neste trabalho a solução hidráulica será obtida pelo método de Newton-Raphson, utilizando a formulação nodal proposta por SHAMIR e HOWARD (25), conforme o desenvolvimento apresentado.

tado por VIEIRA (30).

### I.3 OTIMIZAÇÃO DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA

A disponibilidade de computadores de eficiência cada vez maior a custos cada vez menores, torna interessante formulações que considerem não somente a solução hidráulica, mas também os custos de implantação e operação do sistema.

Um grande número de métodos de otimização de redes têm sido proposto nos últimos anos. PIRES (20) e VIEIRA (30) apresentam revisões bibliográficas atualizadas até 1980. Outros trabalhos foram posteriormente apresentados e alguns são citados a seguir.

QUINDRY, BRILL e LIEBMAN (22) apresentaram um modelo iterativo que determina por programação linear, a solução de menor custo para uma dada distribuição de alturas piezométricas nos nós. Então, através de busca por gradiente modifica essas alturas piezométricas no sentido de reduzir o custo da próxima solução obtida por programação linear.

FEATHERSTONE e EL-JUMAILY (10) apresentaram um modelo de otimização que divide o problema em duas partes: a solução hidráulica e a otimização dos diâmetros dos trechos. A solução hidráulica da rede pode ser obtida por qualquer dos métodos existentes. A otimização é feita com base na hipótese de que a solução ótima pode ser obtida através da seleção de diâmetros que tornem o gradiente hidráulico em todos os trechos igual a um valor determinado a partir da minimização da função custo.

Nesta função custo são considerados os custos das tubulações, das bombas e da energia consumida pelas bombas.

BHAVE (6) propôs um método para otimização de redes alimentadas por reservatórios com alturas piezométricas definidas. Inicialmente é determinada a distribuição ótima de vazões por programação linear, associando-se o sistema de distribuição de água ao problema de redes de transporte. O sistema com vazões conhecidas é então otimizado por programação linear. Uma das limitações do modelo é a divisão de alguns trechos em duas partes com diâmetros diferentes, o que é uma característica dos modelos de otimização de redes por programação linear.

Dentre os diversos modelos de otimização de redes que tem sido apresentados, alguns são destacados a seguir.

A formulação proposta por ALPEROVITS e SHAMIR (1) e aplicada no trabalho de VIEIRA (30), utiliza programação linear para determinação da rede ótima. Apesar dos inúmeros pontos positivos, a formulação apresentou problemas quanto ao tempo de computação e quanto à aplicação prática, visto que o algoritmo divide os trechos entre dois nós em dois segmentos de diferentes diâmetros. A adoção de um único diâmetro para o trecho pode alterar a optimalidade da solução encontrada.

ARTINA (2) propôs uma formulação para resolver o problema de otimização do custo da rede por Programação Linear Inteira Bivalente (PLIB), também chamada de Programação zero-um. Para resolução do problema de PLIB obtido, ARTINA (2) aplicou o programa apresentado por PLANE e McMILLAN (21), que está baseado no Método de Enumeração Implícita, na forma proposta por

GEOFFRION (11).

Vários métodos têm sido propostos para resolução dos problemas da PLIB (28), tais como:

- Método dos planos de corte
- Método de "branch and bound"
- Métodos heurísticos
- Método de Enumeração Implícita
- Método Dual de Decomposição
- etc.

O Método de Enumeração Implícita foi proposto por BALAS (5) em 1965 e serviu de base para outros trabalhos, como os de GEOFFRION (11,12) e os de GLOVER (13,14). O método determina o valor ótimo do problema.

O Método Dual de Decomposição proposto por VACA OBANDO (29) gera uma sequência finita de soluções, não necessariamente ótimas, mas que podem ser de interesse. Uma vantagem do método é o tempo de computação, bastante reduzido em relação a outros algoritmos.

Tendo em vista o desenvolvimento verificado nas pesquisas sobre métodos de resolução de problemas de PLIB, pode ser de interesse a verificação da eficiência de alguns desses métodos na resolução do problema de otimização de redes.

RASMUSEN (23) apresentou uma abordagem ao problema de otimização de redes, dividindo-o em dois sub-problemas: solução hidráulica e modificação dos diâmetros dos trechos. Partindo de uma rede de diâmetros conhecidos, a solução hidráulica pode

ser obtida, através dos inúmeros métodos como os de Newton-Raphson, Hardy-Cross, etc.. RASMUSEN (23) propôs um processo heurístico para modificação dos diâmetros, baseado no custo das tubulações e de energia necessária para elevação do nível piezométrico nos pontos de abastecimento da rede.

#### I.4 OBJETIVOS DO TRABALHO

Visando verificar a aplicabilidade de modelos de otimização do custo de redes de distribuição de água em problemas reais, são discutidas e testadas neste trabalho duas formulações para o problema.

No Capítulo II é apresentado o modelo de otimização de redes por Programação Linear Inteira Bivalente (PLIB), segundo a formulação de ARTINA (2), sendo que para a resolução do problema de PLIB foram utilizados o método de Enumeração Implícita (11) com adição de restrição substituta (12,14) e o método Dual de Decomposição (28,29).

No Capítulo III é discutido o modelo de otimização heurística da rede, proposto por RASMUSEN (23).

Para as formulações apresentadas foram desenvolvidos programas em linguagem FORTRAN, e sua aplicação na resolução de redes é relatada no Capítulo IV.

A discussão dos resultados obtidos, as conclusões e algumas sugestões quanto a pesquisas adicionais que podem ser feitas no sentido de se obter melhores resultados na otimização de redes, são apresentados no Capítulo V.

## CAPÍTULO II

### O MODELO DE OTIMIZAÇÃO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO INTEIRA

#### II.1 INTRODUÇÃO

Neste Capítulo é mostrado como o problema de otimização da rede hidráulica foi adaptado por ARTINA (2) para resolução por Programação Inteira Bivalente, e a seguir, são apresentados os algoritmos de Programação Inteira utilizados.

#### II.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A otimização de uma rede hidráulica pode ser considerada como a busca da solução de menor custo, que seja viável hidraulicamente, e capaz de atender às exigências e restrições impostas ao projeto (2).

Em uma rede simples, onde o consumo nos nós e a altura piezométrica no nó fonte são conhecidos, a otimização do investimento inicial torna-se um problema de seleção dos diâmetros dos vários trechos. Quanto às condições hidráulicas, os diâmetros selecionados devem ser tais que o fluxo na rede satisfaça:

- i) à Equação de Continuidade nos nós. A soma das vazões que entram em cada nó deve ser igual à soma das vazões que saem do nó;

- ii) à Equação de Anel. A soma das perdas de carga ao longo de qualquer anel deve ser igual a zero;
- iii) às restrições de velocidade nas tubulações; e
- iv) às restrições de pressão nos nós.

Se a rede possui  $N_J$  nós, obtém-se o mesmo número de Equações de Continuidade, sendo que  $(N_J - 1)$  equações são independentes:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N_J} Q_{ik} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N_J} Q_{kj} - Q_{Ck} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_J \quad (\text{II-1})$$

onde:

$N_J$  = número de nós;

$Q_{ik}$  = vazão no trecho que liga os nós  $i$  e  $k$  (se o trecho existe); e

$Q_{Ck}$  = consumo no nó  $k$ .

A vazão pode ser expressa em termos do diâmetro e da velocidade média do fluxo:

$$Q_{ij} = \frac{\pi D_{ij}^2}{4} V_{ij} \quad (\text{II-2})$$

onde:

$D_{ij}$  = diâmetro interno no trecho  $ij$ ; e

$V_{ij}$  = velocidade média do fluxo no trecho  $ij$ .

Se a rede for malhada e possuir  $NA$  anéis não sobrepostos, pode-se escrever  $NA$  Equações de Anel:

$$\sum \Delta H_{ij} = 0 \quad (\text{II-3})$$

onde  $ij$  são trechos pertencentes ao anel, e  $\Delta H_{ij}$  é a perda de carga entre os nós  $i$  e  $j$ . Ao valor de  $\Delta H$  deve ser atribuído um sinal algébrico. Foi assumido que  $\Delta H$  é positivo se o fluxo é no sentido horário em relação ao anel, e negativo se anti-horário.

A perda de carga ao longo do trecho depende principalmente das características da tubulação e das condições de fluxo do fluido. Entre as diversas equações utilizadas na determinação da perda de carga, as mais empregadas são as de Darcy-Weisbach e de Hazen-Williams (30).

Pela equação de Darcy-Weisbach tem-se:

$$\Delta H = f \frac{L}{2g} \frac{V^2}{D} \quad (\text{II-4})$$

onde:

$\Delta H$  = perda de carga;

$f$  = coeficiente de rugosidade;

$L$  = comprimento;

$D$  = diâmetro;

$V$  = velocidade; e

$g$  = aceleração da gravidade.

Pela equação de Hazen-Williams:

$$\Delta H = \frac{a}{C^{1,852}} \times \frac{L}{D^{1,167}} \cdot V^{1,852} \quad (\text{II-5})$$

onde:

$\Delta H$  = perda de carga;

a = coeficiente que depende das unidades adotadas;

C = coeficiente de HAZEN-WILLIAMS;

L = comprimento;

D = diâmetro; e

V = velocidade.

Colocando a perda de carga sob forma geral, tem-se

$$\Delta H = K D^m V^n \quad (\text{II-6})$$

No presente trabalho será adotada a equação de HAZEN-WILLIAMS, devido à simplicidade e à generalização do emprego dessa fórmula (4).

A velocidade máxima no interior da tubulação deve ser limitada por vários fatores, como corrosão, sobrepressão, desgaste, etc. (4). Por outro lado, baixas velocidades podem indicar um mal aproveitamento das linhas.

Uma rede de tubulações com NJ nós, NA anéis não sobrepostos e NL trechos satisfaçõa a seguinte equação (16):

$$NL = (NJ-1) + NA \quad (\text{II-7})$$

O número de equações independentes que podem ser obtidas (equações (II-1) e (II-3)) é NL. Como os diâmetros e velocidades são desconhecidos, tem-se  $2 \times NL$  incógnitas, e portanto, o sistema é indeterminado.

Porém, os diâmetros só podem assumir valores discretos, limitados àqueles produzidos comercialmente. Além disso, levando-se em conta os consumos nos nós e as limitações de velocidade e de perda de carga, muitas vezes o intervalo de diâmetros admissíveis é ainda menor.

Observadas essas restrições, o problema pode ou não admitir soluções viáveis. Caso as admita, é necessário um critério para a seleção da melhor solução. Neste modelo o critério adotado foi o custo mínimo das linhas, válido principalmente para o caso em que a cota do reservatório de abastecimento é prefixada.

O custo da tubulação pode ser considerado uma função não linear do diâmetro (conhecidos o comprimento, material,etc.). Com isso, temos um problema de otimização não linear, com variáveis inteiras e variáveis reais:

$$\text{minimizar } CT(d_{ij})$$

Sujeito à:

$$\begin{aligned} g_1(d_{ij}, v_{ij}) &= 0 \\ &\vdots \\ g_{NJ-1}(d_{ij}, v_{ij}) &= 0 \\ g_{NJ}(d_{ij}, v_{ij}) &= 0 \\ &\vdots \\ g_{NJ+NA-1}(d_{ij}, v_{ij}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-8})$$

onde:

$CT(d_{ij})$  = custo total da rede;

$d_{ij}$  = diâmetro;

$v_{ij}$  = velocidade;

$g_k$ ,  $k=1, \dots, NJ-1$  - Equações de Continuidade;  
 $g_\ell$ ,  $\ell = NJ, \dots, NJ+NA-1$  - Equações de Anel;  
 $NJ$  = número de nós; e  
 $NA$  = número de anéis.

### II.3 MODIFICAÇÃO DO PROBLEMA

Uma maneira de se abordar o problema é modificar a sua formulação para adaptá-lo ao uso de Programação Inteira binária (ou 0-1). Desta forma, pode-se contornar o problema da não-linearidade do custo da rede e das restrições.

ARTINA (2) modificou o termo  $Q_{ij}$  das equações (II-1), para que os diâmetros assumam apenas os valores discretizados, o somatório toma então a seguinte forma:

$$\sum_{t=1}^{T_{ij}} Q_{ijt} x_{ijt} \quad (\text{II-9})$$

onde:

$T_{ij}$  = número de diferentes diâmetros que o trecho  $ij$  pode assumir;

$x_{ijt}$  = variável inteira que pode assumir o valor 0 ou 1; e

$Q_{ijt}$  = vazão no trecho  $ij$  para o  $t$ -ésimo diâmetro.

O valor de  $Q_{ijt}$  foi fixado para que a equação (II-9) varie somente com o valor de  $x_{ijt}$ . Considerando que a velocidade em qualquer trecho tem um intervalo admissível de variação, tomou-se para cálculo de  $Q_{ijt}$  o valor médio do intervalo,  $V^*$ :

$$g'_k(x_{ijt}) = \left| \sum_{i=1}^{NJ} \sum_{t=1}^{T_{ik}} Q_{ikt} x_{ikt} - \sum_{j=1}^{NJ} \sum_{t=1}^{T_{kj}} Q_{kjt} x_{kjt} - Q_{C_k} \right|$$

$$k = 1, \dots, NJ \quad (II-10)$$

onde:

$$x_{ijt} = 0 \text{ ou } 1$$

Na maioria dos casos  $g'_k(x_{ijt})$  não será igual a zero e portanto as equações (II-1) serão violadas.

Para que se cancele o valor de  $g'_k(x_{ijt})$ , deve-se ter:

i) mudanças nas velocidades em relação a  $V^*$ , em um ou mais trechos que trazem água ao nó;

ii) mudanças nas velocidades em relação a  $V^*$ , em um ou mais trechos que levam água do nó;

iii) efeito combinado de (i) e (ii).

A situação crítica ocorre quando o menor diâmetro tem que suprir isolado a diferença de vazões  $g'_k(x_{ijt})$ . Assim, deve-se ter:

$$g'_k(x_{ijt}) \leq \Delta Q_{k,\max}, \quad k = 1, \dots, NJ \quad (II-11)$$

onde  $\Delta Q_{k,\max}$  é a vazão adicional que o menor diâmetro conduziria se a velocidade passasse de  $V^*$  à velocidade máxima admissível.

Como:

$$Q_{ij} + \Delta Q_{ij} = \frac{\pi d_{ij}^2}{4} (V_{ij} + \Delta V_{ij})$$

Então:

$$\Delta Q_{k,\max} = \frac{\pi d_{\min}^2}{4} \Delta V_{\max} \quad (\text{II-12})$$

onde  $d_{\min}$  é o diâmetro mínimo dentre os que podem ser selecionados para os trechos concorrentes ao nó  $k$ ; e  $\Delta V_{\max}$  é a diferença entre  $V^*$  e a velocidade máxima admissível.

Analogamente, as Equações de Anel (eq. (II-3)) podem ser escritas da seguinte forma:

$$g'_l(x_{ijt}) = \left| \sum_{t=1}^{T_{ij}} \Delta H_{ijt} x_{ijt} \right| \quad \begin{array}{l} l = 1, \dots, NA \\ i, j \text{ pertencentes ao anel} \\ l \end{array} \quad (\text{II-13})$$

onde  $\Delta H_{ijt}$  é a perda da carga no trecho  $ij$ , com o  $t$ -ésimo diâmetro e considerando a velocidade igual a  $V^*$ .

Aqui também,  $g'_l(x_{ijt})$  será diferente de zero na maioria dos casos, e para que este valor seja anulado, são necessárias:

- iv) mudanças nas velocidades em relação a  $V^*$ , em um ou mais trechos com fluxo no sentido horário no anel;
- v) mudanças nas velocidades em relação a  $V^*$ , em um ou mais trechos com fluxo no sentido anti-horário no anel;
- vi) uma combinação de (iv) e (v).

A situação crítica ocorre quando o trecho mais curto e com maior diâmetro disponível é responsável pela perda de carga

adicional que anularia  $g'_\ell(x_{ijt})$ . Portanto:

$$g'_\ell(x_{ijt}) \leq \Delta H_{\ell, \max} \quad \ell = 1, 2, \dots, NA \\ i, j \text{ pertencentes ao anel } \ell \quad (II-14)$$

onde  $\Delta H_{\ell, \max}$  é a perda de carga adicional que é provocada pelo trecho mais curto e com o maior diâmetro disponível, quando a velocidade passa de  $V^*$  para a máxima admissível.

Da equação (II-6), onde

$$\Delta H = K D^m V^n,$$

pode-se obter:

$$\Delta H + \Delta(\Delta H) = K D^m (V + \Delta V)^n \quad (II-15)$$

Utilizando a fórmula de HAZEN-WILLIAMS, obtém-se:

$$\Delta H_{\ell, \max} = \left( \frac{2,82}{C_{HW}} \right)^{1,852} \frac{L_{crit}}{d_{crit}^{1,167}} \left[ (V^* + \Delta V_{max})^{1,852} - V^{*1,852} \right] \\ \ell = 1, 2, \dots, NN \quad (II-16)$$

onde:

$C_{HW}$  = coeficiente de HAZEN-WILLIAMS;

$L_{crit}$  = comprimento do trecho crítico do anel (m); e

$d_{crit}$  = diâmetro máximo disponível para o trecho crítico (m).

Torna-se necessário garantir que apenas um dos diâmetros – entre os  $T_{ij}$  disponíveis para o trecho  $ij$  – seja selecionado.

nado. Isto pode ser feito acrescentando ao problema NL (número de trechos) restrições do tipo:

$$g_m'(x_{ijt}) = \sum_{t=1}^{T_{ij}} x_{ijt} = 1 \quad m = 1, 2, \dots, NL \quad (II-17)$$

Assim fica assegurado que apenas uma das variáveis  $x_{ijt}$  irá assumir o valor 1, ou seja, somente um diâmetro será escolhido por trecho.

O custo de cada trecho da rede é:

$$\sum_{t=1}^{T_{ij}} c_t L_{ij} x_{ijt} \quad (II-18)$$

onde  $c_t$  é o custo unitário da tubulação com o  $t$ -ésimo diâmetro disponível para o trecho  $ij$ .

O custo total da rede torna-se então:

$$CT'(x_{ijt}) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N_J} \sum_{t=1}^{T_{ij}} c_t L_{ij} x_{ijt} \quad (II-19)$$

onde:

$CT'(x_{ijt})$  = custo total da rede;

$c_t$  = custo unitário da tubulação;

$L_{ij}$  = comprimento do trecho; e

$x_{ijt}$  = 0 ou 1.

Tem-se agora um problema de Programação Inteira bivalente:

minimizar  $CT'(x_{ijt})$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
 g_1'(x_{ijt}) &\leq \Delta Q_{1,\max} \\
 g_2'(x_{ijt}) &\leq \Delta Q_{2,\max} \\
 &\vdots \\
 g_{NJ}'(x_{ijt}) &\leq \Delta Q_{NJ,\max} \\
 g_{NJ+1}'(x_{ijt}) &\leq \Delta H_{1,\max} \\
 g_{NJ+2}'(x_{ijt}) &\leq \Delta H_{2,\max} \\
 &\vdots \\
 g_{NJ+NA}'(x_{ijt}) &\leq \Delta H_{NA,\max} \\
 g_{NJ+NA+1}'(x_{ijt}) &= 1 \\
 &\vdots \\
 g_{NJ+NA+NL}'(x_{ijt}) &= 1
 \end{aligned} \tag{II-20}$$

onde:

$x_{ijt}$  = variável inteira (0-1);

$g_k'$ ,  $k=1, \dots, NJ$  = restrições de Continuidade;

$g_\ell'$ ,  $\ell=NJ+1, \dots, NJ+NA$  = restrições de Anel; e

$g_p'$ ,  $p=NJ+NA+1, \dots, NJ+NA+NL$  = restrições de Unicidade.

Pode-se ainda acrescentar ao problema restrições que limitem a perda de carga ao longo de determinadas trajetórias na rede.

Dada uma trajetória A-B, a perda ao longo dela será:

$$\Delta P_{AB} = \sum_{i,j \in AB} K_{ij} D_{ij}^m V_{ij}^n \leq \Delta P_{\max} \tag{II-21}$$

onde:

$\Delta P_{AB}$  = perda de carga ao longo da trajetória A-B;

$K$ ,  $D^m$ ,  $V^n$  = ver equação (II-6); e

$\Delta P_{max}$  = limite da perda de carga na trajetória.

Um caso extremo ocorreria se em todos os trechos a velocidade  $V_{ij}$  assumisse o valor máximo admissível ( $V^* + \Delta V_{max}$ ). Porém, é pouco provável que tal situação aconteça. O fato pode ser contornado tomando-se:

$$\Delta P_{max} = \alpha \cdot \Delta P_{disp} \quad (\text{II-22})$$

onde:  $0 < \alpha \leq 1$

$\Delta P_{disp}$  = altura piezométrica disponível.

Pode-se observar que em (II-20) as restrições do problema não estão expostas de maneira uniforme quanto à relação de desigualdade.

As equações de Continuidade (II-10) e de Anel (II-13) estão na forma:

$$\left| \sum_j a_{ij} x_j + d_i \right| \leq b_i \quad (\text{II-23})$$

que é equivalente a:

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} x_j + d_i - b_i \leq 0 \\ - \sum_j a_{ij} x_j - d_i - b_i \leq 0 \end{cases} \quad (\text{II-24})$$

As equações de Unicidade (II-17) podem ser escritas como os seguintes conjuntos de desigualdades:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{ij} \\ \sum_{t=1}^T x_{ijt} \leq 1 \\ \quad \quad \quad i=1, \dots, M \\ T_{ij} \\ \sum_{t=1}^T x_{ijt} \geq 1 \\ \quad \quad \quad j=1, \dots, N \end{array} \right. \quad (II-25)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{ij} \\ \sum_{t=1}^T x_{ijt} - 1 \leq 0 \\ \quad \quad \quad (II-26) \\ T_{ij} \\ - \sum_{t=1}^T x_{ijt} + 1 \leq 0 \end{array} \right.$$

Desta maneira pode-se colocar todas as restrições de (II-20) como um mesmo tipo de desigualdade.

De posse dessas equações, pode-se tentar a resolução do problema através de um dos algoritmos de Programação Inteira Binária.

#### II.4 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA BINÁRIO

Para resolução dos problemas de Programação ZERO-UM, foram aplicados o Método de Enumeração Implícita e o Método Dual de Decomposição.

O Método de Enumeração Implícita proposto por BALAS (5) em 1965, consiste em um procedimento sistemático de sucessivas in-

dicações do valor UM para as variáveis, e que após tentar uma pequena parte das  $2^n$  soluções, apresenta uma solução ótima ou indícios da inexistência de soluções viáveis (31). ARTINA (2) utilizou o programa apresentado por PLANE e McMILLAN (21) desenvolvido para o Método de Enumeração Implícita e relatou resultados encorajadores.

O Método Dual de Decomposição, proposto por VACA OBANDO (28), gera uma sequência finita de soluções, utilizando dualidade em Programação Inteira e o Método de Geração de Colunas. Essas soluções não são necessariamente ótimas ou mesmo viáveis, porém podem estar próximas da ótima. Ainda que o algoritmo conduza somente a soluções não viáveis, alguns destes resultados podem ser úteis, seja na fixação da faixa de diâmetros admissíveis para cada trecho, ou na consideração de que são viáveis que aquelas soluções que violem as restrições em pequena porcentagem. Vale ressaltar que o modelo desenvolvido por ARTINA (2) baseia-se em uma série de simplificações para estabelecer as equações da restrição, e por isso algumas soluções consideradas não viáveis podem, após a solução hidráulica, revelarem-se viáveis.

#### II.4.1 Método de Enumeração Implícita

Seja o problema (P):

$$\text{minimizar } \underline{c} \cdot \underline{x} \quad (\text{II-27})$$

$$\text{sujeito à: } A \underline{x} + b \geq \underline{0} \quad (\text{II-28})$$

$$x_j = 0 \text{ ou } 1 \quad j \in N = \{1, \dots, n\}$$

onde  $\underline{c}$  é um vetor de dimensão  $n$ ,  $\underline{b}$  e  $\underline{0}$  são vetores de dimensão  $m$  ( $\underline{0}$  - vetor nulo),  $A$  é uma matriz  $mxn$  e  $\underline{x}$  é o vetor binário de dimensão  $n$ , incógnita do problema. Como os  $c_j$ ,  $j \in N$  são os custos dos trechos, tem-se  $c_j \geq 0$ , para todo  $j \in N$ .

Para melhor descrição do método, serão dadas definições a certos termos.

Qualquer vetor binário  $\underline{x}$  será chamado de "solução", e se satisfaz a  $A\underline{x} + \underline{b} \geq \underline{0}$ , de "solução viável". Se, além disto fornecer o menor valor de  $\underline{c} \cdot \underline{x}$  entre todas as soluções viáveis,  $\underline{x}$  será chamado de "solução ótima viável".

No problema (P) existe um número finito ( $2^n$ ) de soluções, e portanto a enumeração de todas as soluções é um processo finito para determinação da solução ótima viável, se existente. Naturalmente essa enumeração só é possível para pequenos valores de  $n$ . Porém, podem ser adotadas estratégias que obtenham, à medida que a enumeração se processa, informações que permitam excluir um grande número de soluções de posterior verificação. Essas soluções podem ser consideradas implicitamente enumeradas.

Uma "solução parcial"  $S$  é definida como uma atribuição de valores binários a um subconjunto das  $n$  variáveis, e é caracterizada por  $J$ , o conjunto dos índices (com sinal algébrico) das variáveis que a compõem. Se a variável assume o valor 1 ela é representada em  $J$  pelo seu índice com sinal positivo, e se assume valor 0, com sinal negativo. Por exemplo, se  $n = 4$  e  $J_1 = \{1, -2, 4\}$  tem-se que  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_4 = 1$ .

Qualquer variável de valor não definido em  $S$  é chamada de variável "livre" em relação a  $S$ . No exemplo anterior  $x_3$  é li-

vre em relação a  $S_1$ .

A ordem em que as variáveis se apresentam em J é a ordem em que são geradas pelo algoritmo.

Um "complemento" de S é definido como uma solução determinada por S quando se atribui valores binários às variáveis livres. No exemplo podem ser formados dois complementos para  $S_1$ :  $x_3 = 1 \{+3\}$  ou  $x_3 = 0 \{-3\}$ . Assim, com uma solução parcial S com s variáveis, pode-se formar  $2^{n-s}$  complementos.

Uma solução parcial é "abandonada" se todos os seus complementos forem inviáveis.

Na representação de uma solução parcial S, o índice de uma variável em J poderá ser "sublinhado", indicando que o complemento lógico da variável já foi considerado. Se para o exemplo  $J_2 = \{1, \underline{-3}, \underline{4}\}$ , isto indica que  $x_1 = 1$ ,  $x_3 = 0$  e  $x_4 = 1$ , e que os valores  $x_3 = 1$  e  $x_4 = 0$  já foram considerados.

Na Figura II-1 tem-se o fluxograma para o esquema de enumeração de GLOVER (13), conforme apresentado por VILLARES e MACULAN (31).

Descrição detalhada do algoritmo e de critérios para abandonar J (quadro 2 da Figura II-1) e formar novos conjuntos J (quadro 3 da Figura II-1) foi apresentada por vários autores como GEOFFRION (11), PAULA JUNIOR (19), VILLARES e MACULAN (31) e outros.

PLANE e McMILLAN (21) apresentam um Programa em FORTRAN para a resolução do problema pelo Método de Enumeração Implícita. Esse Programa foi utilizado neste trabalho com algu-

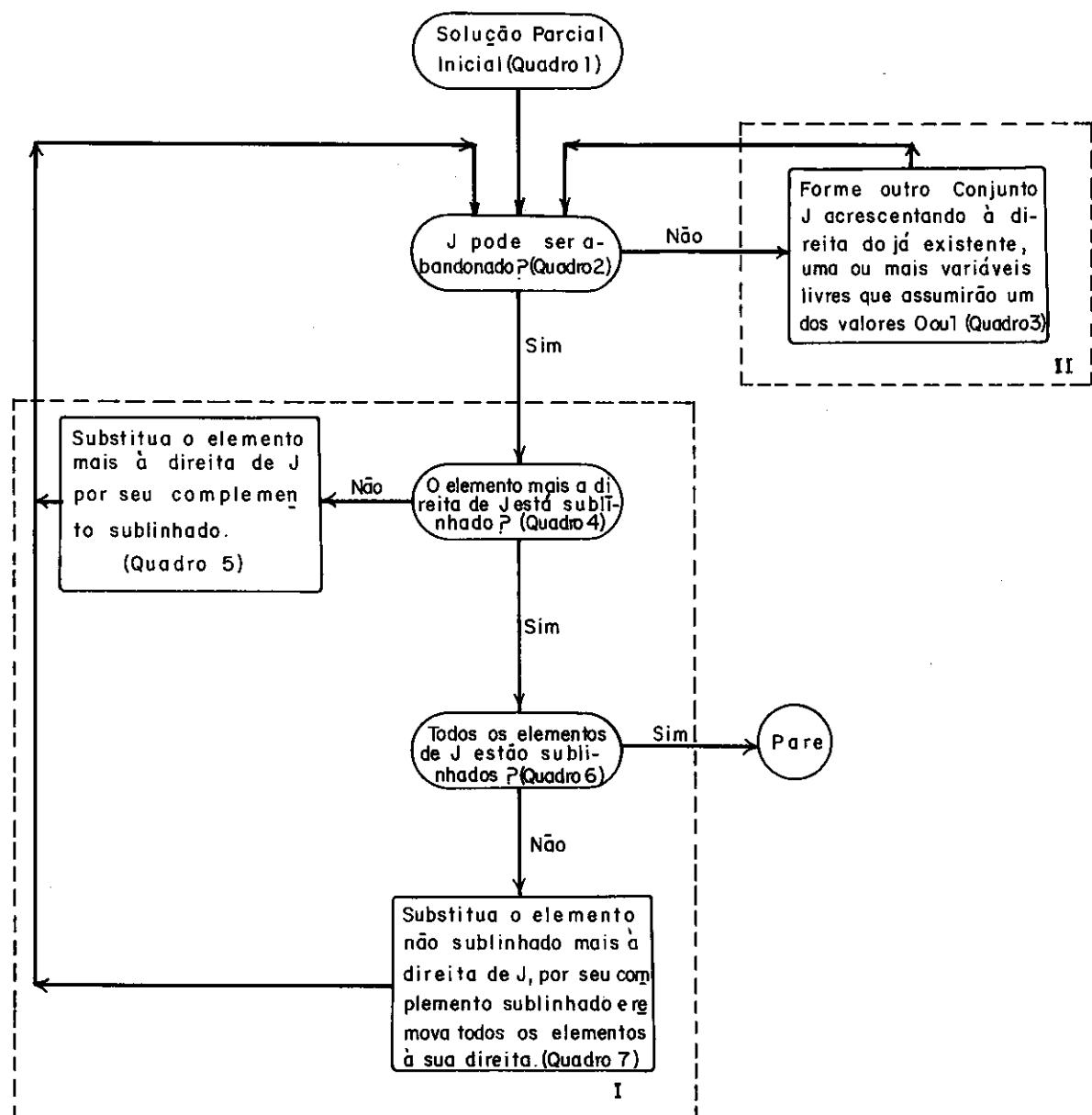


Figura II.1 – Fluxograma para o esquema de enumeração de GLOVER (13)(31)

mas modificações, as principais discutidas a seguir:

i) Para proceder o avanço na enumeração, a variável livre selecionada para incrementar  $J$  deve ser tal que ao assumir o valor 1, diminua a inviabilidade e a solução parcial obtida possua complemento viável. Entre as variáveis livres com essa característica, se existentes, o Programa de PLANE e McMILLAN (21) seleciona aquela com a maior soma algébrica de coeficientes nas restrições. Porém, nos problemas em questão, o somatório dos coeficientes nas restrições para qualquer variável se anula (eq. (II-24) e (II-26)), a menos das restrições às perdas de carga. Esse critério foi então substituído por aquele proposto por GEOFFRION (11), onde a variável  $j$  selecionada deve ser tal que maximize o critério:

$$\max_{j \notin J} \sum_{i=1}^m \min \{y_i^s + a_{ij}, 0\} \quad (\text{II-29})$$

$$\text{onde } y_i^s = b_i - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j$$

ii) Das equações de unicidade (II-17) sabe-se que somente uma das variáveis correspondentes a um dado trecho pode assumir o valor 1. Portanto, toda vez que o algoritmo selecionar uma variável para assumir o valor 1, pode-se obrigar as outras variáveis correspondentes ao mesmo trecho a assumir valor zero. E mais, ao acrescentar em  $J$  os negativos dos índices destas variáveis, pode-se "sublinhá-los", pois essas variáveis não podem assumir valor 1 enquanto a

1.<sup>a</sup> variável do trecho em J não for logicamente complementada (ver Figura II-1).

iii) Foi incluída no programa original a opção de se acrescentar às restrições originais do problema, uma "restrição substituta" na forma proposta por GEOF-FRION (12). Uma restrição substituta é uma restrição adicional calculada para conter informações úteis a respeito do conjunto de restrições, e que não podem ser obtidas da análise de cada restrição original, individualmente (14).

"Seja o problema: minimizar  $\underline{c}^T \underline{x}$ , sujeito a  $A\underline{x} \leq \underline{b}$ ,  $x_j = (0,1); j \in N$ . Uma restrição substituta será definida como sendo:  $u(A\underline{x} - \underline{b}) \leq 0$ " (31).

O sub-programa utilizado foi desenvolvido a partir da descrição do procedimento para determinação de restrições substitutas, apresentado por VILLARES e MACULAN (31).

Para determinação da melhor restrição substituta foi utilizado o programa ZX3LP do IMSL da BURROUGHS, na resolução do problema de Programação Linear a que se chega durante o desenvolvimento.

#### II.4.2 Método Dual de Decomposição

Seja o problema linear inteiro bivalente:

maximizar  $\underline{c}^T \underline{x}$

$$\text{sujeito à: } \begin{matrix} \tilde{c}x \leq \tilde{b} \\ x \in \{0,1\}^n \end{matrix} \quad (\text{II-30})$$

onde  $\tilde{c}$  é um vetor linha com  $n$  componentes,  $\tilde{x}$  é um vetor coluna com  $n$  componentes e  $A$  uma matriz  $m \times n$ .

No problema da rede (eq. (II-20)) o objetivo é minimizar a função objetiva, o que pode ser contornado maximizando-se o negativo da função objetiva original.

Incluindo as restrições na função objetiva tem-se o problema irrestrito:

$$\begin{aligned} & \max_{\tilde{x}} \{ \tilde{c}\tilde{x} - \tilde{u}(A\tilde{x} - \tilde{b}) \} \\ & \text{suj. à } x \in \{0,1\}^n \end{aligned} \quad (\text{II-31})$$

onde  $\tilde{u}$  é um vetor linha com  $m$  componentes não negativas.

O problema dual de (II-30) será:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } z(\tilde{u}); \quad z(\tilde{u}) = \max_{\tilde{x}} \{ \tilde{c}\tilde{x} - \tilde{u}(A\tilde{x} - \tilde{b}) \mid \tilde{x} \in \{0,1\}^n \} \\ & \text{suj. à: } \tilde{u} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{II-32})$$

O problema (II-30) será denominado primal de (II-32).

Através de propriedades dos problemas primal e dual, mostra-se que (28):

$$\max_{\tilde{x}} \{ \tilde{c}\tilde{x} \mid A\tilde{x} \leq \tilde{b}, \tilde{x} \in \{0,1\}^n \} \leq \min_{\tilde{u}} \{ z(\tilde{u}) \mid \tilde{u} \geq 0 \}$$

Portanto, se  $\tilde{x}^*$  for ótimo de (II-30) e  $\tilde{u}^*$  de (II-32) tem-se que  $\tilde{c}\tilde{x}^* \leq z(\tilde{u}^*)$ .

O cálculo de (II-32) fornece então uma cota superior de  $\underline{c}\underline{x}$  em (II-30), permitindo assim a determinação de soluções próximas da ótima.

O método consiste de duas fases: na primeira procura-se soluções que estejam próximas da ótima; na segunda fase procura-se soluções que se aproximem ainda mais da ótima, quando existem folgas nas restrições da solução viável que permitam outras variáveis assumirem o valor 1.

Nos problemas tratados aqui, uma das condições para que a solução seja aceita como viável é que uma, e somente uma, das variáveis correspondentes a cada trecho deve assumir valor 1. Assim, sabe-se de antemão que não existirão folgas nas restrições de uma solução viável, e portanto só será utilizada a primeira fase do método, sobre a qual se falará suscintamente a seguir.

Dado  $\underline{u} \geq \underline{z}$ , tem-se o problema:

$$\begin{aligned} \min z(\underline{u}), \quad z(\underline{u}) &= \max \{ \underline{c}\underline{x} - \underline{u}(\underline{A}\underline{x} - \underline{b}) \} \\ \text{suj. à: } \underline{x} &\in \{0,1\}^n \end{aligned} \quad (\text{II-33})$$

Seja o conjunto definido por:

$$\mathbb{X} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{0} \leq \underline{x} \leq \underline{d} \} \quad \text{onde } \underline{d} = (1, 1, \dots, 1)^T.$$

Então  $\{0,1\}^n$  é o conjunto de todos os vértices de  $\mathbb{X}$ .

Pode-se substituir (II-33) por:

$$\min_{\tilde{u}} z(\tilde{u}) \quad (\text{II-34})$$

suj. à:  $\tilde{x} \in \mathbb{X}$ ;

pois (II-34) é um problema de Programação Linear e portanto admite ao menos uma solução ótima em um vértice de  $\mathbb{X}$ . Como  $\{0,1\}^n$  pertence a  $\mathbb{X}$ , a solução de (II-33) é a mesma de (II-34).

Seja  $\mathbb{Y}$  o conjunto dos vértices de  $\mathbb{X}$ :

$$Y = \{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^p\}, p = 2^n$$

Como o ótimo de (II-34) ocorre em um ponto de  $\mathbb{Y}$ , pode-se fazer:

$$z(\tilde{u}) = \tilde{u}\tilde{b} + \max_{k=1,2,\dots,p} \{(\tilde{c} - \tilde{u}\tilde{A}) \tilde{x}^k\}; \quad (\text{II-35})$$

onde  $\tilde{x}^k$  é considerado conhecido.

Após algumas modificações e utilizando dualidade, VACA OBANDO (28) chega ao seguinte problema:

$$\max v = \sum_{k=1}^p \tilde{c} \tilde{x}^k \lambda_k$$

$$\text{suj. à: } \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \quad (\text{II-36})$$

$$\sum_{k=1}^p \tilde{A} \tilde{x}^k \lambda_k \leq \tilde{b}$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, p$$

O problema (II-36) tem inúmeras colunas e para encontrar sua solução será utilizado o Método Revisado do Simplex

(17), partindo de uma solução básica inicial – no problema da rede será adotada a solução artificial  $(0, 0, \dots, 0)^T$  – e então serão geradas as colunas que entrarão na base em substituição de outras.

Colocando (II-36) na forma padrão dos problemas de Programação Linear:

$$\begin{aligned} \max v &= \sum_{k=1}^P \tilde{c}x^k \lambda_k \\ \sum_{k=1}^P \lambda_k &= 1 \\ \sum_{k=1}^P \tilde{A}x^k \lambda_k + \tilde{s} &= \tilde{b} \end{aligned} \quad (\text{II-37})$$

$$\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, P$$

$$\tilde{s} \geq 0,$$

onde  $s_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) são as variáveis de folga.

Escrevendo sob forma matricial:

$$\max v$$

suj. à:

$$\left[ \begin{array}{ccccccc|cccccc} 1 & -\tilde{c}x^1 & -\tilde{c}x^2 & \dots & \tilde{c}x^P & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{A}x^1 & \tilde{A}x^2 & \dots & \tilde{A}x^P & \tilde{e}_1 & \tilde{e}_2 & \dots & \tilde{e}_m \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} v \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_P \\ s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ b \end{array} \right] \quad (\text{II-38})$$

onde  $\underline{e}_i$  é o vetor coluna com elementos nulos, a menos do  $i$ -ésimo, que assume o valor 1.

Seja  $B$  a matriz  $(m+1)$  por  $(m+1)$  associada à base inicial;  $\underline{c}_B$  o vetor linha dos coeficientes  $(\underline{c}\underline{x}^k)$  e  $(0)$  de  $\lambda_k$  e  $s_i$  na função objetivo associados a  $B$ ;  $\underline{a}_j$  o vetor coluna tal que  $\underline{a}_k = [1, \underline{A}\underline{x}^k]$  ou  $\underline{a}_i = [0, \underline{e}_i]$ . Fazendo ainda  $\bar{b} = B^{-1}\underline{b}$ ,  $\pi = \underline{c}_B B^{-1}$  e  $\bar{v} = \underline{c}_B \bar{b}$ .

O quadro inicial será

$\bar{v}$	1	$\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_{m+1}$		Coluna onde será colocado o vetor que entrará na base com a atualização
$\bar{b}$	0	$B^{-1}$		

Figura II-2

O quadro será ótimo quando todos os  $\pi_i$  ( $i = 2, \dots, m+1$ ) forem não negativos. Se  $\pi_i < 0$  a variável  $s_{i-1}$  é candidata a entrar na base, e o vetor  $\underline{a}_{i-1}$  será atualizado, premultiplicando-o por  $B^{-1}$ . Fazendo o pivoteamento com a coluna  $i$ ,  $s_{i-1}$  entrará na base.

Quando este quadro for ótimo deve-se procurar  $k$  que minimize  $\underline{\pi} \underline{a}_k - \underline{c}\underline{x}^k$ ,  $k = 1, \dots, p$ . Isso corresponde a resolver o seguinte problema de Programação Linear:

$$\min \underline{\pi} \underline{a}_k - \underline{c}\underline{x}^k \quad \text{s.a. } \underline{x}^k \in \mathbf{X} \quad (\text{II-39})$$

Como  $\tilde{a}_k = [1, \tilde{A}\tilde{x}^k]^T$ , e fazendo  $\tilde{\pi} = [\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}']^T$  o problema (III-39) é equivalente a:

$$\min \tilde{\pi}_1 + (\tilde{\pi}'\tilde{A} - \tilde{c})\tilde{x}$$

$$\text{s.a: } \tilde{x} \in \mathbf{X} \quad (\text{II-40})$$

A solução ótima ( $\hat{x}$ ) é obtida fazendo-se  $x_j = 1$  ( $j=1, \dots, n$ ) quando seu coeficiente em (II-40) for positivo, e  $x_j = 0$  quando negativo. Se o coeficiente for nulo,  $x_j$  pode ser 0 ou 1.

Se o mínimo de (II-40),  $\tilde{\pi}_1 + (\tilde{\pi}'\tilde{A} - \tilde{c})\hat{x}$ , for negativo, o vetor  $\{\tilde{\pi}_1 + (\tilde{\pi}'\tilde{A} - \tilde{c})\hat{x}, B^{-1}[1, \tilde{A}\hat{x}]\}$  entrará na base. Se  $\tilde{\pi}_1 + (\tilde{\pi}'\tilde{A} - \tilde{c})\hat{x} \geq 0$ , o quadro será o ótimo, e não poderão ser obtidas mais soluções.

VACA OBANDO, VILLARES e MACULAN (29) apresentam uma extensão para o método descrita a seguir, que permitirá contornar a questão da unicidade dos trechos no problema da rede.

Seja o problema:

$$\max z = \tilde{c} \cdot \tilde{x} \quad (\text{II-41})$$

$$\text{s.a: } \tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b} \quad (\text{II-42})$$

$$\sum_{j \in J_p} x_j = 1 \quad p = 1, \dots, P \quad (\text{II-43})$$

$$\begin{cases} x_j \geq 0 & j=1, \dots, n \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 & \end{cases} \quad (\text{II-44})$$

$$(\text{II-45})$$

O conjunto  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  pode ser dividido em  $P$  subconjuntos tais que:

$$J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_P = J \quad \text{e} \quad J_P \cap J_q = \emptyset, \quad \forall P \neq q$$

Omitindo-se a restrição (II-42) tem-se  $P$  problemas independentes onde, em cada subconjunto  $J_p$ , deve-se atribuir valor 1 à variável  $(x_{j_0})$  com o maior índice em (II-41), ou seja,  
 $x_{j_0} = 1$  se  $c_{j_0} = \max_{j \in J_p} (c_j)$ .

Pode-se definir para este problema o conjunto (29):

$$\mathbb{X} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j \in J_p} x_j = 1, p=1, \dots, P; \bigcup_{p=1}^P J_p = J, J_p \cap J_q = \emptyset,$$

$$\forall p \neq q; 0 \leq x_j \leq 1, j=1, 2, \dots, n \text{ e } J = 1, 2, \dots, n \}$$

Agora o problema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\max. \quad \underline{c} \cdot \underline{x}$$

$$\text{s.a: } A\underline{x} \leq \underline{b} \quad (\text{II-46})$$

$$\underline{x} \in \mathbb{X}$$

Este problema pode ser resolvido utilizando-se dualidade em Programação Inteira bivalente, na forma discutida anteriormente.

Portanto, no problema da rede (eq. (II-20)), as restrições de unicidade dos trechos (eq. (II-17)) são retiradas do conjunto original de restrições e incluídas no conjunto  $\mathbb{X}$ .

Dentre as soluções viáveis encontradas pelo algoritmo,

é selecionada aquela que leve ao menor custo da rede. Caso não seja encontrada nenhuma solução viável, é selecionada a solução "menos" inviável.

VACA OBANDO (28) define uma "solução  $\epsilon$ -viável" como sendo uma solução inviável que satisfaça

$$\underline{A}\underline{x} - \underline{b} \leq \epsilon \underline{b}, \quad \epsilon > 0$$

onde  $\epsilon$  é um escalar definido arbitrariamente.

Baseado nesta definição e supondo  $b_i > 0$ ,  $i=1, \dots, m$ , pode-se determinar para qualquer solução não viável o valor mínimo de  $\epsilon$  tal que  $\underline{A}\underline{x} - \underline{b} \leq \epsilon \underline{b}$ :

$$\epsilon_{\min} = \max_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \right) / b_i \quad (\text{II-47})$$

Será considerada a "melhor solução não-viável" aquela que apresentar o menor  $\epsilon$ .

No problema da rede (eq. (II-20)) tem-se as restrições de Continuidade (II-10) e de Anel (II-13). Nas restrições de Continuidade o termo correspondente ao  $b_i$  é composto de duas partes: a vazão adicional ( $\Delta Q_{i,\max}$ ) e o consumo no nó ( $Q_{C_i}$ ). Portanto o consumo no nó, apesar de ser independente, compõe o lado esquerdo da equação (II-11), e portanto o valor de  $\epsilon$  para essas restrições deve ser calculado:

$$\epsilon_{\min} = \max_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \right) / \Delta Q_{i,\max} \quad (\text{II-48})$$

Assim, pode-se calcular  $\epsilon_{\min}$  independentemente de variáveis artificiais, mesmo nos casos em que o termo independente for menor ou igual a zero, pois  $\Delta Q_{i,\max}$  é sempre positivo.

Nas restrições de Anel o termo correspondente ao  $b_i$  é  $\Delta H_{i,\max}$ , que é positivo. Pode-se portanto calcular  $\epsilon_{\min}$  como em (II-47).

## II.5 COMENTÁRIOS

O modelo apresentado seleciona para cada trecho um diâmetro comercial considerando apenas os custos das tubulações instaladas.

A análise hidráulica da rede é feita após a seleção dos diâmetros. Entretanto, a matriz de restrições do modelo garante implicitamente que a solução selecionada satisfaz às condições hidráulicas impostas. Foi utilizado o método de NEWTON-RAPHSON para a análise hidráulica da rede (30).

O modelo apresenta pontos críticos discutidos a seguir:

i) O número de variáveis bivalentes do problema pode ser grande mesmo para redes pequenas;

Dada uma lista de diâmetros comerciais pode ser fixada como admissível para cada trecho, apenas uma parte desta lista; supondo que o número de diâmetros admissíveis (ND) seja igual para todos os trechos, o número de variáveis bivalentes (NV) será  $NV = ND \times NL$  onde NL é o número de trechos da rede;

Assim uma escolha criteriosa dos diâmetros admissíveis para cada trecho pode reduzir consideravelmente o número de variáveis do problema;

ii) O número de restrições do problema é bastante elevado; isto associado a um grande número de variáveis pode levar à necessidade de uma área excessiva de memória de computador;

O número de restrições do problema será:

$$NR = 2NJ + 2NA + 2NL + NP$$

onde:  $NR$  = número de restrições

$NJ$  = número de nós ( $2NJ$  - restrições de Continuidade)

$NA$  = número de anéis no caso de redes malhadas ( $2NA$  - restrições de Anel)

$NL$  = número de trechos ( $2NL$  - restrições de Unicidade)

$NP$  = número de trajetórias para verificação de perda de carga.

Da equação (II-47), tem-se que  $NL = NJ - 1 + NA$  e portanto,  $NR = 4NL + NP + 2$ ; Para o Método Dual de Decomposição, o número de restrições será:  $NR = 2NL + NP + 2$  pois as restrições de unicidade não são necessárias;

iii) Para a montagem das equações de restrição é necessária a fixação dos sentidos das vazões em todos os trechos da rede; esse esquema de distribuição de fluxo é, portanto, considerado conhecido e não é al-

terado pelo modelo;

- iv) As restrições de perda de carga exigem a indicação das trajetórias consideradas críticas, e também do coeficiente da equação (II-22);
- v) Não foi considerada no modelo a existência de bombas, válvulas e outros dispositivos hidráulicos.

## CAPÍTULO III

### O MODELO HEURÍSTICO DE OTIMIZAÇÃO UTILIZANDO "CUSTO DE ENERGIA"

#### III.1 INTRODUÇÃO

Neste Capítulo é mostrado o modelo heurístico de otimização proposto por RASMUSEN (23), onde o custo de energia é considerado dentro do custo global do sistema, juntamente com o custo de investimento em tubulações.

Ao final do Capítulo é introduzida uma modificação no algoritmo de RASMUSEN (23) para resolução de problemas onde a cota piezométrica do nó de abastecimento é conhecida. Seguindo sugestão de RASMUSEN, o custo de energia foi utilizado em tais problemas como uma função de penalização do custo.

#### III.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

As alturas piezométricas nos nós da rede ( $H_j$ ) devem obedecer a seguinte condição:

$$H_j \geq (HM_j + HN_j) \quad j = 1, 2, \dots, NJ \quad (\text{III-1})$$

onde:

$HM_j$  = altura manométrica mínima admissível no nó  $j$ ;

$HN_j$  = elevação do nó  $j$ ;

NJ = número de nós da rede.

Além disso, o fluxo na rede deve ser tal que sejam obedecidas as equações de continuidade nos nós e as equações de anel (se a rede for malhada), conforme discutido no Capítulo II.

Considerando os custos de investimento na rede e de operação (energia consumida para elevação da cota piezométrica nos nós de abastecimento), tem-se o custo total:

$$\tilde{CT}(D) = \sum_{i=1}^{NJ} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{NJ} c(d_{ij}) L_{ij} + \sum_{k=1}^{NF} Q_k E_k (H_k - H_{N_k}) \quad (\text{III-2})$$

onde:

$\tilde{D}$  = vetor dos diâmetros dos trechos (NL elementos);

$c(d_{ij})$  = custo unitário da tubulação de diâmetro  $d_{ij}$  instalada entre os nós i e j;

$L_{ij}$  = comprimento do trecho entre os nós i e j;

$Q_k$  = vazão de alimentação da rede, que entra pelo nó k; ( $NF = \text{nº de nós de abastecimento}$ );

$E_k$  = valor presente do custo de elevação no nó k, de 1 m<sup>3</sup> de água, 1 m de altura, continuamente pelo tempo de operação da rede.

Observa-se que a alimentação da rede foi considerada como sendo feita a partir de bombas diretamente ligadas à rede, ou então que os reservatórios elevados não tem ainda cota definida (o custo de reservatórios ou instalações de bombeamento não foram considerados).

Este problema de otimização do custo total pode ser decomposto em dois subproblemas:

- a resolução hidráulica de uma rede com todos os diâmetros e consumos nos nós conhecidos;
- a aplicação de um algoritmo para modificação dos diâmetros, a partir de uma configuração inicial, visando reduzir o custo total.

A resolução hidráulica da rede pode ser obtida por vários métodos. Os mais empregados foram analisados por VIEIRA (30) que recomenda o método de NEWTON-RAPHSON. Este método adapta-se particularmente bem ao algoritmo em estudo pois fornece diretamente as alturas piezométricas nos nós.

### III.3 O ALGORITMO DE MODIFICAÇÃO DOS DIÂMETROS

O presente algoritmo foi apresentado por RASMUSEN (23) em 1976.

Considerando uma rede conhecida, com consumos conhecidos, as alturas piezométricas dos nós em relação a uma referência qualquer pode ser determinada. A cota dessa referência pode ser fixada de modo que exista pelo menos um nó  $i^*$  tal que:

$$H_i = HM_i + HN_i \quad \text{para } i = i^*$$

e

(III-3)

$$H_i \geq HM_i + HN_i \quad \text{para } i \neq i^*$$

O nó  $i^*$  será chamado de nó crítico. O nó crítico pode naturalmente estar situado em qualquer ponto da rede, dependendo de uma série de fatores, tais como os diâmetros selecionados,

a topografia, os requisitos mínimos de pressão, etc..

As pressões nos nós de abastecimento podem ser determinadas pelas perdas de carga nos trechos que levam água ao nó i\*, visto que foi fixada a cota piezométrica deste nó. Estes trechos serão chamados de críticos. Todos os outros trechos serão chamados de não-críticos.

Qualquer redução no custo de energia só pode ser obtida pela redução da perda de carga nos trechos críticos a partir do aumento nos diâmetros, com o consequente aumento dos investimentos em tubulações para os trechos alterados. À jusante dos trechos não críticos, existe uma sobrepressão em relação à mínima admissível, o que pode permitir redução de diâmetros, sem necessariamente provocar aumento da pressão nos nós de abastecimento, reduzindo-se assim os investimentos em tubulações sem aumento nos custos de energia.

O custo de energia nos nós de abastecimento será:

$$C_s = E_s Q_s H_s = MC_s H_s \quad (\text{III-4})$$

onde:

$C_s$  = custo de energia

$Q_s$  = vazão que é fornecida ao nó;

$H_s$  = altura manométrica no nó s (nó de abastecimento)

$E_s$  = valor presente do custo de elevação no nó s, de 1 m<sup>3</sup> de água, 1 m de altura, continuamente, pelo tempo de operação da rede.

$MC_s = E_s Q_s$  = custo específico de energia.

Nos casos em que a rede é abastecida através de um único nó, o custo específico da energia é constante ao longo dos trechos críticos, pois estes podem ser considerados ligados em série (23). Se a rede tem duas ou mais fontes de suprimento, o custo específico de energia nos trechos será assumido como sendo a média ponderada dos valores nas fontes. O fator de ponderação será a vazão fornecida por cada fonte.

Tomando-se um trecho crítico ( $ij$ ) conduzindo uma vazão  $Q_{ij}$  constante, e desprezando-se sua interdependência com o restante da rede, o custo de energia (CE) é dado por:

$$CE(\Delta H_{ij}) = MC_s \Delta H_{ij} \quad (\text{III-5})$$

Para este trecho, o investimento em tubulação (CI) é:

$$CI(\Delta H_{ij}) = L_{ij} c(d_{ij}) \quad (\text{III-6})$$

Para uma certa vazão, pela fórmula de HAZEN-WILLIAMS (Capítulo II), o diâmetro pode ser expresso em função da perda de carga, e portanto:

$$CI(\Delta H_{ij}) = L_{ij} c'(\Delta H_{ij}) \quad (\text{III-7})$$

onde  $c'(\Delta H_{ij})$  = custo unitário de investimento em tubulação necessária para conduzir uma certa vazão, com uma perda de carga igual a  $\Delta H_{ij}$ .

O custo total de um trecho será então uma função da perda de carga:

$$CT(\Delta H_{ij}) = CE(\Delta H_{ij}) + CI(\Delta H_{ij}) \quad (\text{III-8})$$

Caso o diâmetro fosse uma variável contínua ter-se-ia:

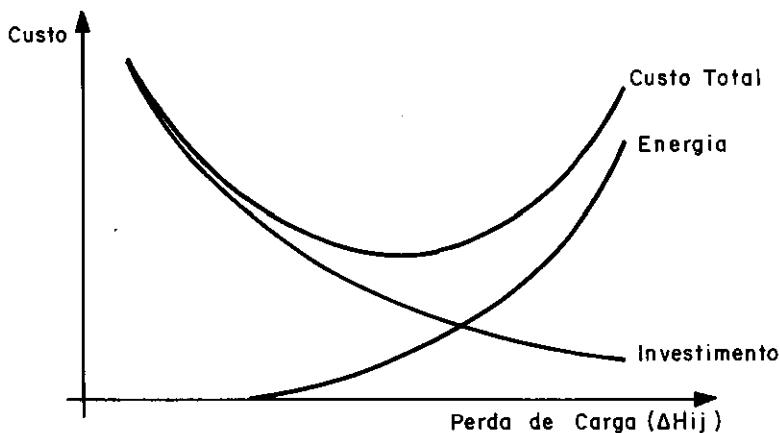


Figura III.1 - Relação entre os custos de investimento em tubulações e o custo de energia em sistemas de abastecimento de água (23)

Derivando-se o custo total em relação a  $\Delta H_{ij}$  poder-se-ia obter o custo mínimo:

$$\frac{dCT(\Delta H_{ij})}{d\Delta H_{ij}} = \frac{dCE(\Delta H_{ij})}{d\Delta H_{ij}} + \frac{dCI(\Delta H_{ij})}{d\Delta H_{ij}} = 0 \quad (\text{III-9})$$

Porém, o diâmetro só pode assumir determinados valores discretos. Nota-se além disso que, devido à interdependência entre os elementos componentes da rede, inicialmente desprezada, uma grande variação nos diâmetros dos trechos provavelmente provo-

caria mudanças bastante significativas na distribuição de vazões, considerada constante na análise. Pode-se tentar fazer uma aproximação observando-se o comportamento dos custos para intervalos discretos, tomado-se apenas os diâmetros comerciais imediatamente maior e menor que o diâmetro atual de cada trecho.

Tomando-se então apenas os diâmetros comerciais, tem-se:

$d_{ij}^0$  - diâmetro atual do trecho

$d_{ij}^{0+1}$  - diâmetro comercial imediatamente superior a  $d_{ij}^0$ ;

$d_{ij}^{0-1}$  - diâmetro comercial imediatamente inferior a  $d_{ij}^0$ ;

$\Delta H_{ij}^0$  - perda de carga no trecho  $ij$ , de diâmetro  $d_{ij}^0$ ;

$\Delta H_{ij}^{0+1}$  - perda de carga no trecho  $ij$ , se o diâmetro fosse  $d_{ij}^{0+1}$ , mantida a mesma vazão;

$\Delta H_{ij}^{0-1}$  - perda de carga no trecho  $ij$ , se o diâmetro fosse  $d_{ij}^{0-1}$ , mantida a mesma vazão;

Para uma variação de diâmetro de  $d_{ij}^0$  para  $d_{ij}^{0+1}$  tem-se uma redução na perda de carga de  $\Delta H_{ij}^0$  para  $\Delta H_{ij}^{0+1}$  ( $\Delta H_{ij}^0 > \Delta H_{ij}^{0+1}$ ) – assumindo-se na análise que cada trecho é independente do restante da rede – e portanto tem-se uma redução no custo de energia de  $|(\Delta H_{ij}^{0+1} - \Delta H_{ij}^0) MC_i|$ . O investimento em tubulação aumenta de  $[(C'(\Delta H_{ij}^{0+1}) - C'(\Delta H_{ij}^0))] \times L_{ij}$ .

O diâmetro do trecho deverá ser alterado de  $d_{ij}^0$  para  $d_{ij}^{0+1}$  se houver redução no custo total, ou seja, se:

$$(\Delta H_{ij}^{0+1} - \Delta H_{ij}^0)MC_i + [c'(\Delta H_{ij}^{0+1}) - c'(\Delta H_{ij}^0)]L_{ij} < 0 \quad (\text{III-10})$$

ou

$$[c(d_{ij}^{0+1}) - c(d_{ij}^0)]L_{ij} < (\Delta H_{ij}^0 - \Delta H_{ij}^{0+1})MC_i \quad (\text{III-11})$$

Analogamente, o diâmetro deverá ser reduzido de  $d_{ij}^0$  para  $d_{ij}^{0-1}$  se:

$$(\Delta H_{ij}^{0-1} - \Delta H_{ij}^0)MC_i + [c'(\Delta H_{ij}^{0-1}) - c'(\Delta H_{ij}^0)]L_{ij} < 0 \quad (\text{III-12})$$

ou

$$[c(d_{ij}^0) - c(d_{ij}^{0-1})]L_{ij} > (\Delta H_{ij}^{0-1} - \Delta H_{ij}^0)MC_i \quad (\text{III-13})$$

A análise acima é válida para os trechos críticos. Os trechos não-críticos tem uma sobrepressão à jusante, que pode ser expressa por:

$$H_j^E = H_j - (HM_j + HN_j) \quad (\text{III-14})$$

Para trechos críticos tem-se:  $H_{ij}^E = 0$ .

Uma redução na sobrepressão não provoca variação no custo de energia, visto que a pressão na fonte é determinada pelos trechos críticos. No entanto, se  $H_j^E$  permitir uma redução de diâmetro, isso representa uma redução no investimento sem variação no custo de energia.

RASMUSEN (23) propõe uma modificação nas equações (III-11) e (III-13) de forma a considerar a sobrepressão nos trechos não críticos:

i) o diâmetro deve ser alterado de  $d_{ij}^0$  para  $d_{ij}^{0+1}$  se

$$\left[ c(d_{ij}^{0+1}) - c(d_{ij}^0) \right] L_{ij} < (\Delta H_{ij}^0 - \Delta H_{ij}^{0+1} - H_j^E) MC_i;$$

ii) o diâmetro deve ser alterado de  $d_{ij}^0$  para  $d_{ij}^{0-1}$  se

$$\left[ c(d_{ij}^0) - c(d_{ij}^{0-1}) \right] L_{ij} > (\Delta H_{ij}^{0-1} - \Delta H_{ij}^0 - H_j^E) MC_i;$$

iii) o diâmetro  $d_{ij}^0$  deve ser mantido em caso contrário.

Resumindo, o algoritmo proposto por RASMUSEN pode ser descrito pelos seguintes passos:

- 1 - obtenção da solução hidráulica da rede atual (ou inicial);
- 2 - determinação do custo total;
- 3 - localização do nó crítico e dos trechos críticos;
- 4 - cálculo do custo específico de energia (se necessário);
- 5 - modificação dos diâmetros segundo o critério apresentado;
- 6 - repetição dos passos 1 a 5 até que o custo total não possa mais ser diminuído.

Para evitar que o algoritmo elimine algum trecho da rede, deve ser fixado para cada trecho um diâmetro mínimo.

### III.4 ADAPTAÇÃO DO ALGORITMO A UM TIPO DE PROBLEMA

Um tipo particular de problema de grande interesse é aquele em que não é levado em conta o custo de energia, porém a pressão na fonte (cota do reservatório) é pré-fixada, seja porque o reservatório já está construído, seja por imposição do projeto.

RASMUSEN (23) sugere que nesses casos seja utilizado um custo fictício de energia, que funcionaria como uma função de penalização. Partindo desta sugestão, mais um passo foi introduzido no algoritmo descrito.

Assim, começando o problema com um custo fictício inicial de energia, caso a pressão obtida para o nó de abastecimento for maior que a fixada, aumenta-se o custo de energia. Caso for menor, diminui-se este custo.

O passo 7 pode ser assim condensado:

7 - se a pressão no nó de abastecimento não é fixada –  
FIM; Caso contrário:

- se a pressão obtida para o nó de abastecimento é maior que a fixada, altera-se  $E_s$  para o valor médio entre o atual e o limite superior; caso o limite superior ainda não esteja definido, adotar para este valor  $\alpha \times E_s$ , onde  $\alpha > 1$  é arbitrário (por exemplo,  $\alpha = 2$ ); o valor de  $E_s$  antes de ser alterado, deve ser guardado como sendo o limite inferior;

- se a pressão obtida para o nó de abastecimento é menor que a fixada, altera-se  $E_s$  para o valor médio entre o atual e o limite inferior (inicialmente igual a zero); o valor de  $E_s$  antes de ser alterado, deve ser guardado como sendo o limite superior.

8 - Retornar ao passo 1.

Torna-se também necessário estabelecer uma diferença admissível entre a pressão encontrada para o nó de abastecimento e aquela fixada para o mesmo nó. Essa diferença servirá como critério de parada para o algoritmo. Caso não seja possível obter uma solução que atenda a essa diferença de pressão admissível, a diferença entre os custos de energia de iterações sucessivas tenderá a se anular, o que estabelece outro critério de parada.

### III.5 COMENTÁRIOS

O modelo não garante a determinação da solução ótima global. A melhor solução obtida pode inclusive depender da configuração inicial da rede, muito embora não haja grandes dependências, conforme será comentado no Capítulo IV.

Nos casos em que a cota do reservatório não é fixada, torna-se necessário algum cuidado no cálculo do custo de energia pois as vazões para dimensionamento das tubulações não correspondem às vazões médias de abastecimento, e sim a valores de pico.

## CAPÍTULO IV

## APLICAÇÃO DOS MÉTODOS

## IV.1 INTRODUÇÃO

A eficiência e aplicabilidade dos modelos discutidos foi testada com a aplicação em três exemplos. O primeiro exemplo selecionado foi uma rede simples, com o intuito de se testar os diversos modelos. Este exemplo, uma rede malhada com 4 anéis e 9 trechos, foi apresentado por ARTINA (2).

O segundo exemplo utilizado foi uma rede ramificada com 19 trechos, parte da rede da cidade de Ponta de Pedras (PA), que serviu para verificação da possibilidade de aplicação do modelo heurístico de RASMUSEN a esse tipo de rede.

O terceiro exemplo escolhido foi a expansão de parte da rede da cidade de Apucarana (PR), conforme projeto de uma empresa de consultoria de Engenharia (24). Trata-se de uma rede malhada com 33 trechos (12 já existentes) e 9 anéis.

Para a aplicação dos modelos foram desenvolvidos programas em linguagem FORTRAN. Os programas foram executados em computadores BURROUGHS (B-6700) do Núcleo de Computação Eletrônica (NCE) da UFRJ e do Centro de Processamento de Dados da Universidade de Brasília (CPD-UnB).

No Método de Enumeração Implícita foram utilizados os subprogramas ZX1LP/ZX2LP, ZX3LP e UERTST do conjunto de programas IMSL (15).

No Método Dual de Decomposição foi utilizada precisão dupla para as variáveis do quadro da Figura II-2 e mais alguns vetores de trabalho.

#### IV.2 EXEMPLO N° 1

Como primeiro exemplo a ser testado, foi escolhida a rede apresentada por ARTINA (2) e mostrada na Figura IV-1.

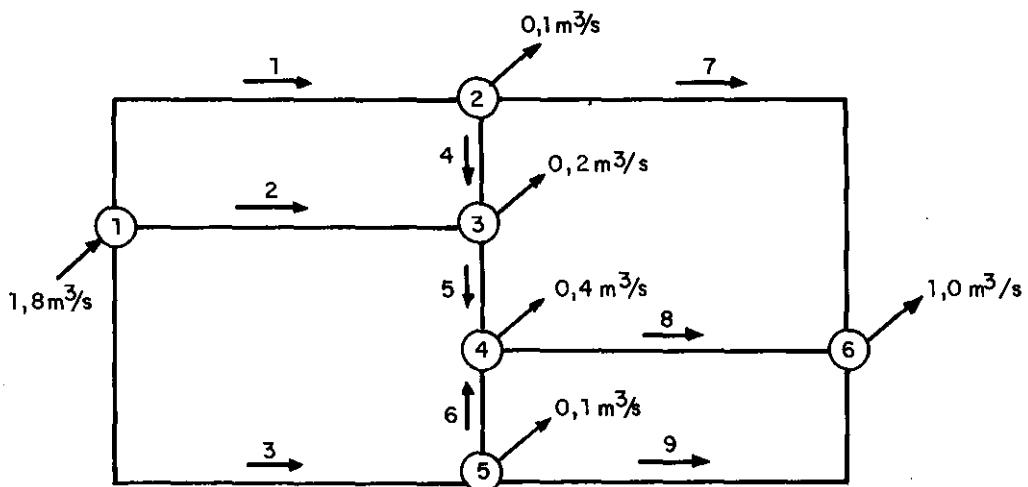


Figura IV.1 – Esquema representativo da rede exemplo de ARTINA (2)

Neste exemplo todos os nós são considerados à mesma cota (elevação) e a cota piezométrica no nó 1 (nó de abastecimento) é de 18m. Como restrição, ARTINA estabeleceu a velocidade máxima nos tubos em 1,5 m/s.

Os diâmetros de tubulação disponíveis para a rede são apresentados na Tabela IV-1. Para todas as tubulações foi adotado o coeficiente de HAZEN-WILLIAMS para perda de carga igual a 130. Na Tabela IV-2 estão listados os comprimentos dos trechos.

DIÂMETRO (m)	CUSTO POR METRO
0,6	0,0464
0,7	0,0586
0,8	0,0716
0,9	0,0854
1,0	0,1000

TABELA IV-1 - Custo unitário das tubulações disponíveis.

TRECHO	COMPRIMENTO (m)
1	4000
2	3000
3	5000
4	1000
5	1000
6	1000
7	5000
8	3000
9	4000

TABELA IV-2 - Comprimentos dos trechos da rede.

A seguir são descritos os resultados obtidos pela aplicação dos modelos de otimização neste problema.

#### IV.2.1 Modelo de Otimização por Programação Inteira Bivalente

Segundo a metodologia proposta por ARTINA (2) o programa desenvolvido monta o Problema de Programação Inteira Bivalente. Este problema foi resolvido pelo Método de Enumeração Implícita e pelo Método Dual de Decomposição.

##### IV.2.1.1 Programação Inteira Bivalente, Método de Enumeração Implícita

O Método de Enumeração Implícita foi testado através de três algoritmos ligeiramente diferentes na resolução deste problema:

- a) utilizando o programa apresentado por PLANE e MILLAN (21), com a substituição do critério para seleção da variável livre a ser incluída em J, pelo critério proposto por GEOFFRION (11) – modificação (i), item III.4.1;
- b) utilizando o algoritmo acima, com a modificação (ii) citado no item II.4.1, com a qual atribui-se o valor zero para as demais variáveis correspondentes a determinado trecho, sempre que uma delas assume o valor 1. Com isso evita-se testar uma série de so-

luções inviáveis, já que cada trecho só pode assumir um único diâmetro;

c) utilizando restrições substitutas — modificação (iii), item II.4.1.

Após testes preliminares reduziu-se o número de diâmetros admissíveis por trecho, devido ao excessivo tempo de processamento consumido na solução. Assim, eliminou-se inicialmente um diâmetro admissível para cada trecho, o maior (1,0 m) ou o menor (0,6 m), conforme a posição do trecho na rede. O Problema de Programação Inteira, inicialmente com 45 variáveis ficou reduzido a 36 variáveis. A solução ótima obtida é mostrada na Tabela IV-3.

TRECHO	DIÂMETRO (m)	TRECHO	DIÂMETRO (m)
1	1,0	6	0,6
2	0,6	7	0,6
3	0,9	8	0,6
4	0,6	9	0,7
5	0,6		

Custo total da rede = 1711

Pressão mínima na rede = 5,76 m (nó 6)

TABELA IV-3 - Solução ótima para o exemplo nº 1, utilizando o modelo de ARTINA (2)

Os tempos de processamento gastos pelos três algoritmos foram:

algoritmo a	> 25 minutos (não terminou)
algoritmo b	15,30 minutos
algoritmo c	10,60 minutos

A solução obtida é ótima considerando os quatro diâmetros admissíveis, e portanto será ótima para um número menor de diâmetros admissíveis que inclua a solução. Assim, foram feitos testes com 2 e 3 diâmetros admissíveis por trecho (18 e 27 variáveis, respectivamente) para verificar a eficiência do método utilizando cada um dos algoritmos. A Tabela IV-4 mostra os tempos de processamento gastos na obtenção da solução ótima.

NÚMERO DE VARIÁVEIS	TEMPO DE PROCESSAMENTO (min)		
	a	b	c
18	0,92	0,58	1,79
27	6,43	3,36	4,48
36	> 25	15,30	10,60

TABELA IV-4 - Tempos de processamento gastos pelos três algoritmos

O algoritmo (c) foi ainda testado para 27 variáveis, com relação ao número de iterações entre sucessivos cálculos da restrição substituta, e os tempos de processamento são mostrados na Tabela IV-5. A nova restrição foi sempre anexada ao conjunto substituindo a restrição substituta anterior.

NÚMERO DE ITERAÇÕES	TEMPO DE PROCESSAMENTO (min)
1	4,48
5	>5,20
10	4,00
15	4,47

TABELA IV-5 - Tempo de processamento gasto na obtenção da solução ótima, em função do número de iterações entre os cálculos de restrição substituta

Observando-se a Tabela IV-4, vê-se que o algoritmo (b) é o mais eficiente para um pequeno número de variáveis. Porém o tempo de processamento cresceu muito com o número de variáveis o que não ocorreu com o algoritmo (c). Com relação a este, o número de iterações entre cada determinação de nova restrição substituta não teve grande influência.

#### IV.2.1.2 Programação Inteira Bivalente, Método Dual de Decomposição

O problema com 36 variáveis (4 diâmetros admissíveis por trecho) foi resolvido e não foi encontrada nenhuma solução viável. Porém, para cada solução gerada foi calculado o valor de  $\epsilon_{\min}$ , segundo a equação (II-48), e foi então selecionada como a melhor solução  $\epsilon$ -viável aquela com o menor  $\epsilon_{\min}$ . Nos casos em que duas soluções levaram ao mesmo  $\epsilon_{\min}$ , foi selecionada aquela de menor custo. Na Tabela IV-6 é mostrada a melhor solução

ção ε-viável encontrada.

TRECHO	DIÂMETRO (m)	TRECHO	DIÂMETRO (m)
1	1,0	6	0,6
2	0,6	7	0,6
3	0,9	8	0,6
4	0,6	9	0,6
5	0,6		

Custo total da rede = 1662

Pressão mínima na rede = 3,96 (nó 6)

TABELA IV-6 - Melhor solução ε-viável encontrada pelo Método Dual de Decomposição

O tempo de processamento gasto na obtenção da solução foi de 12 segundos.

Ao se proceder a análise hidráulica da solução verifica-se que ela não viola efetivamente a restrição de velocidade, sendo que no trecho 5 a velocidade chega a 1,47 m/s (velocidade máxima permitida = 1,5 m/s). Provavelmente as simplificações introduzidas pelo modelo a se montar as equações de restrição, levaram a que a restrição crítica fosse violada com  $\epsilon_{\min}$  igual a 0,071, quando na realidade a solução é viável.

IV.2.2 Modelo Heurístico de Otimização Utilizando Custo de Energia

No exemplo utilizado, ARTINA fixou a cota piezométrica no nó de abastecimento, mas não faz referências quanto à pressão mínima admissível na rede. Foi adotado para a aplicação deste modelo a pressão mínima de 2,0 metros.

Como para este modelo o número de diâmetros admissíveis por trecho não deve alterar sensivelmente nem a área de memória do computador requerida, nem o tempo de processamento, tomou-se os 5 diâmetros disponíveis como admissíveis para qualquer trecho. O problema foi inicializado atribuindo-se o diâmetro de 0,8 m para todos os trechos e o valor 10,0, arbitrário, para o custo de energia. A Tabela IV-7 mostra a solução obtida, com tempo de processamento de 9 segundos.

TRECHO	DIÂMETRO (m)	TRECHO	DIÂMETRO (m)
1	0,7	6	0,6
2	0,8	7	0,6
3	0,7	8	0,7
4	0,6	9	0,6
5	0,8		

Custo total da rede = 1500

Pressão mínima na rede = 2,59 m (nó 6)

TABELA IV-7 - Melhor solução obtida pelo Modelo Heurístico de RASMUSEN (23)

Apesar do baixo custo da solução, a restrição de velocidade nos trechos ( $v \leq 1,5$  m/s) imposta por ARTINA, foi violada no trecho 2, onde a velocidade atingiu 1,64 m/s. Cabe ressaltar que o modelo proposto por RASMUSEN, não considera diretamente as velocidades nos trechos, mas sim indiretamente a partir do custo de energia acarretado pela maior perda de carga. Assim não foi possível limitar a velocidade nos trechos.

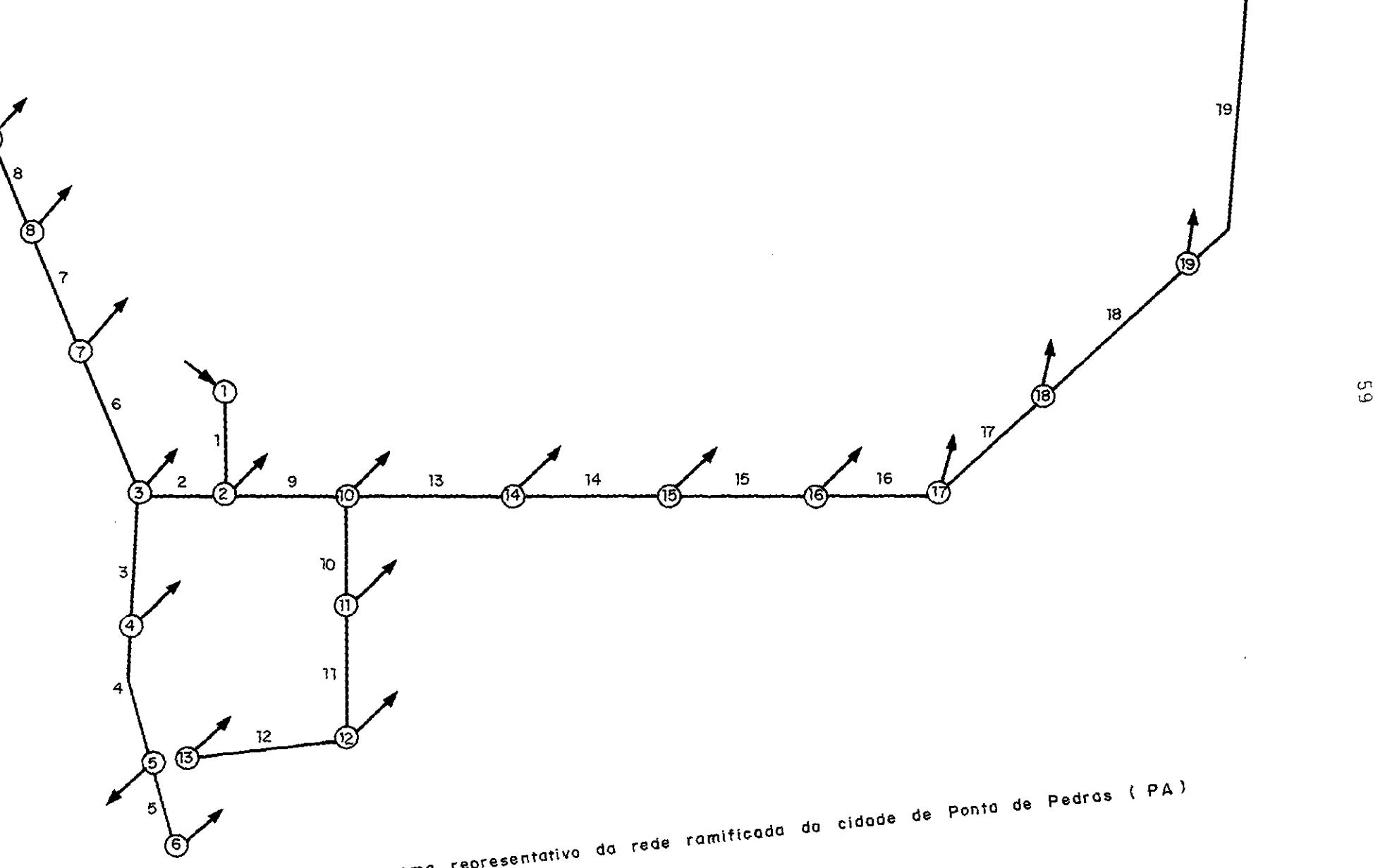
#### IV.3 EXEMPLO N° 2

Neste exemplo foi estudada a rede ramificada de abastecimento de água da Cidade de Ponta das Pedras (PA)(Figura IV-2). PIRES (20) apresentou soluções para esta rede, otimizadas por diferentes métodos, e que serão aqui utilizadas para comparação.

Por ser o exemplo uma rede ramificada, só será testado o modelo heurístico de RASMUSEN.

Na resolução do problema foram considerados os mesmos dados e restrições apresentados no projeto original da Companhia de Saneamento do Pará (20). As pressões admissíveis na rede foram limitadas entre 15 e 50 metros. Para as tubulações, cujos custos estão listados na Tabela IV-8, foi admitido um coeficiente de HAZEN-WILLIAMS igual a 140 (tubulações de PVC).

Nas Tabelas IV-9 e IV-10 estão listadas as características da rede.



DIÂMETRO (mm)	CUSTO UNITÁRIO (Cr\$/m)	DIÂMETRO (mm)	CUSTO UNITÁRIO (Cr\$/m)
40	50,80	100	84,11
50	55,05	125	115,00
65	62,27	150	145,04
75	71,18	200	186,30

TABELA IV-8 - Custo unitário das tubulações

Nº	COTA (m)	Nº	COTA (m)
1	6,20	11	5,40
2	6,13	12	4,20
3	6,20	13	3,70
4	5,30	14	5,60
5	3,70	15	5,20
6	3,60	16	5,00
7	5,50	17	5,10
8	6,20	18	5,20
9	5,60	19	5,20
10	5,90	20	3,00

TABELA IV-9 - Cotas da rede nos nós

TRECHO	COMPRIMENTO (m)	VAZÃO (l/s)	TRECHO	COMPRIMENTO (m)	VAZÃO (l/s)
1	50	9,10	11	108	0,17
2	20	1,32	12	118	0,06
3	105	0,33	13	105	6,39
4	144	0,11	14	93	5,53
5	43	0,02	15	75	4,35
6	157	0,58	16	35	4,11
7	282	0,26	17	135	3,52
8	122	0,06	18	195	2,48
9	63	7,74	19	611	0,30
10	108	0,43			

TABELA IV-10 - Comprimentos e vazões nos diversos trechos da rede

PIRES (20) utilizou no dimensionamento da rede três processos: a *prática tradicional*, onde o dimensionamento é feito levando-se em conta a velocidade máxima admissível para cada diâmetro; o *modelo paramétrico* proposto por DEB (8), onde se determina a perda de carga ótima na rede e a partir desta, os diâmetros ótimos, que devem ser aproximados para os diâmetros comerciais existentes; e o *modelo de Programação Linear*, onde os comprimentos dos trechos são as variáveis do problema e, portanto, as posições dos nós não são conhecidas.

Um resumo dos resultados obtidos por PIRES é apresentado nas Tabelas IV-11 e IV-13.

TRECHO	COMPRIMENTO (m)	VAZÃO (l/s)	DIÂMETROS (mm)			
			PRAT. TRAD.	PROG. LINEAR	MODELO PARAMÉTRICO OPÇÃO 1	OPÇÃO 2
1	50	9,10	150	150	125	125
2	20	1,32	75	75	50	65
3	105	0,33	50	50	50	50
4	144	0,11	50	50	50	50
5	43	0,02	50	50	50	50
6	145	0,58	50	65	50	50
6	12	0,58	50	50	50	50
7	282	0,26	50	50	50	50
8	122	0,06	50	50	50	50
9	55	7,74	150	125	100	125
9	8	7,74	150	100	100	125
10	108	0,43	50	50	50	50
11	108	0,17	50	50	50	50
12	118	0,06	50	50	50	50
13	105	6,39	150	100	100	125
14	93	5,53	150	100	100	100
15	75	4,35	100	100	100	100
16	35	4,11	100	100	100	100
17	135	3,52	100	100	100	100
18	195	2,48	100	100	75	100
19	611	0,30	50	50	50	50

OBS.: os trechos 6 e 9 aparecem repetidos porque o modelo de Programação Linear dividiu os trechos em 2 diâmetros diferentes

TABELA IV-11 - Diâmetros obtidos por PIRES (20) utilizando os 3 modelos

Para a aplicação do modelo heurístico devem ser fornecidos como dados de entrada os diâmetros iniciais dos trechos e o custo fictício da energia. Para os diâmetros iniciais foram adotadas 3 configurações diferentes:

- todos os trechos com diâmetro de 50 mm;
- todos os trechos com diâmetro de 200 mm; e
- configuração inicial igual à solução obtida por PI-RES pela prática tradicional.

Partindo-se de um custo fictício de energia ( $E_s$ ) igual a 200, obteve-se quatro soluções diferentes, para diferentes valores do custo de energia gerados pelo programa, segundo o procedimento descrito no passo (7) do algoritmo, apresentado no Capítulo III. Essas mesmas quatro soluções, apresentadas nas Tabelas IV-12 e IV-13, foram obtidas independentemente da configuração inicial utilizada. O tempo médio de processamento gasto para obtenção das quatro soluções foi de 25 segundos.

Na Tabela IV-13 apresenta-se para cada solução, além do custo total, a cota piezométrica necessária no nó de abastecimento para que a pressão em toda a rede seja maior ou igual a 15 metros.

#### IV-4 EXEMPLO Nº 3

A rede escolhida faz parte do Sistema de Abastecimento da cidade de Apucarana (PR) e trata-se da expansão de uma rede pré-existente (Figura IV-3).

TRECHO	DIÂMETRO (mm)			
	SOLUÇÃO 1 ( $E_s = 200$ )	SOLUÇÃO 2 ( $E_s = 400$ )	SOLUÇÃO 3 ( $E_s = 800$ )	SOLUÇÃO 4 ( $E_s = 12800$ )
1	100	125	125	200
2	50	50	50	50
3	50	50	50	50
4	50	50	50	50
5	50	50	50	50
6	50	50	50	50
7	50	50	50	50
8	50	50	50	50
9	100	100	125	150
10	50	50	50	50
11	50	50	50	50
12	50	50	50	50
13	100	100	125	150
14	100	100	100	125
15	100	100	100	125
16	100	100	100	125
17	100	100	100	125
18	75	100	100	125
19	50	50	50	50

TABELA IV-12 - Diâmetros das soluções obtidas pelo modelo  
heurístico

MÉTODO	CUSTO TOTAL (Cr\$)	COTA PIEZOM. Nº 1 (m)
Prática Tradicional	182.519	21,88
Modelo Paramétrico - opção 1	162.271	24,06
- opção 2	170.126	22,38
Mod. Prog. Linear	169.356	22,80
Mod. Heurístico - solução 1	160.726	24,56
- solução 2	164.792	23,34
- solução 3	169.982	22,40
- solução 4	195.058	22,01

TABELA IV-13 - Custo total e cota piezométrica necessária no nó de abastecimento para cada solução

A expansão da rede foi projetada pela empresa SERETE (24), que aproveitou um reservatório elevado, com cota piezométrica de 888 metros, e parte da rede, em tubos de ferro fundido, já existentes no local (foi adotado para esses trechos o coeficiente de HAZEN-WILLIAMS, igual a 90). Para os novos trechos só foram utilizadas tubulações de PVC (coeficiente de HAZEN-WILLIAMS igual a 140). As pressões admissíveis foram limitadas ao intervalo entre 15 e 50 metros. Na Tabela IV-14 estão listados os custos unitários utilizados para as tubulações e na Tabela IV-15 são apresentados os dados dos nós da rede.

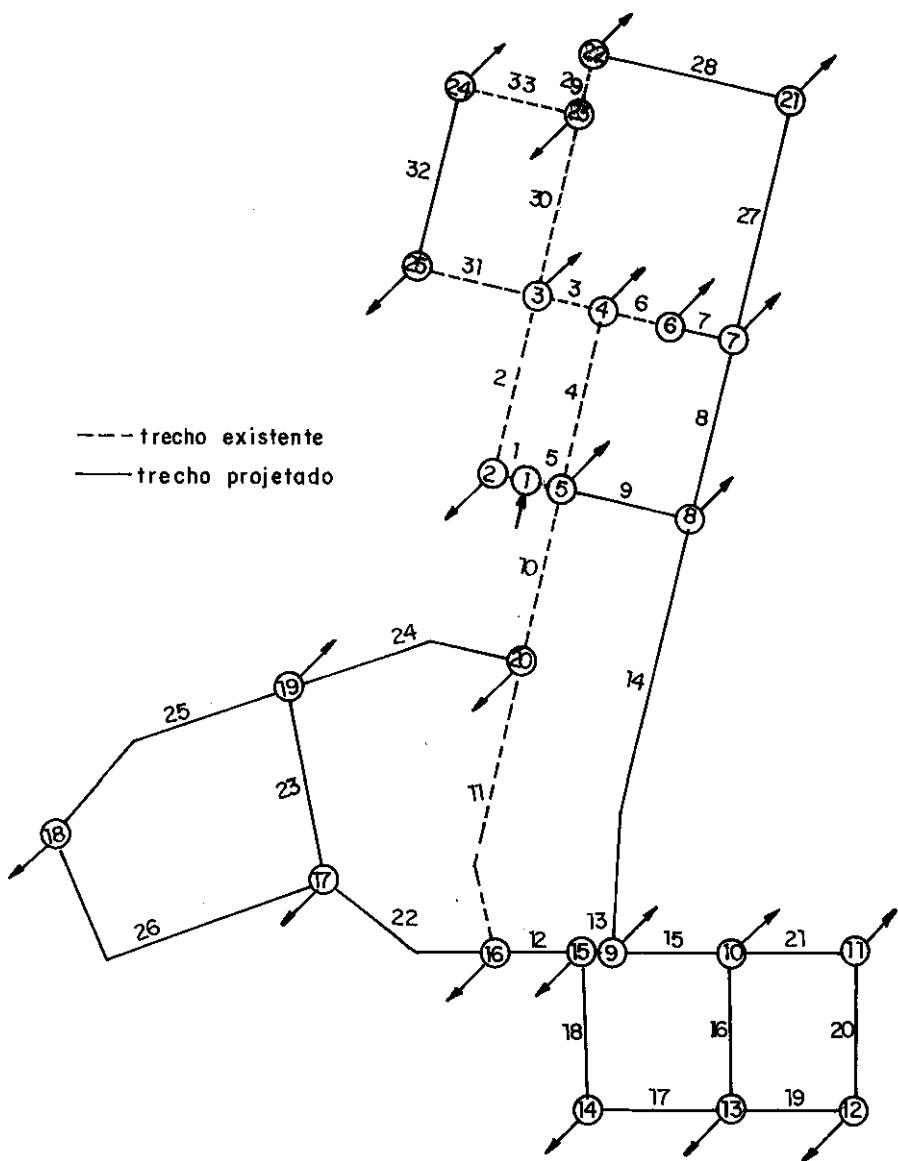


Figura IV.3 – Esquema representativo da expansão de parte da rede de distribuição da cidade de APUCARANA (PR)

DIÂMETRO (mm)	CUSTO UNITÁRIO (Cr\$/m)
85	116,18
110	191,99
140	369,30
160	478,09

TABELA IV-14 - Custo utilizado para as tubulações de PVC

Nº	COTA (m)	CONSUMO (l/s)	Nº	COTA (m)	CONSUMO (l/s)
1	864,50	- 140	14	838,00	3
2	860,00	3	15	861,00	0
3	859,00	8	16	860,80	6
4	862,90	0	17	848,50	6
5	864,10	0	18	855,80	10
6	862,20	0	19	861,50	8
7	860,30	15	20	859,50	5
8	856,00	7	21	852,00	14
9	860,50	4	22	852,00	0
10	859,00	5	23	855,00	9
11	852,00	3	24	851,00	14
12	848,00	3	25	854,60	11
13	849,00	6			

TABELA IV-15 - Dados dos nós da rede

VIEIRA (30) determinou uma solução para o problema em estudo, através do modelo de ALPEROVITS e SHAMIR (25) que utiliza programação linear em conjunto com uma técnica de busca por gradiente, baseada nas variáveis duais do problema de programação linear. Porém, o modelo divide vários trechos em duas partes com diâmetros diferentes. VIEIRA fez um refinamento da solução obtida, para obtenção de diâmetros únicos para cada trecho. Esta solução e aquela projetada pela SERETE são mostradas na Tabela IV-16. Nas Tabelas IV-17 e IV-18 são mostrados os custos da rede projetada pela SERETE e por VIEIRA, respectivamente, não incluindo aí os trechos já existentes.

Considerando-se a rede projetada pela SERETE, o nó com menor pressão disponível é o nó 19, onde essa pressão é de 20,66 m. Na rede proposta por VIEIRA (30), o nó crítico é o nó 10, onde a pressão disponível é 14,99 m.

Aplicou-se na resolução deste exemplo o Modelo de Programação Linear Inteira Bivalente (com o Método Dual de Decomposição) e o Modelo Heurístico, utilizando custo fictício de energia.

#### IV.4.1 O Modelo de Otimização por Programação Linear Inteira Bivalente, Utilizando o Método Dual de Decomposição

Para a aplicação do modelo, adotou-se os quatro diâmetros disponíveis como sendo admissíveis para cada trecho da expansão e um único diâmetro para os trechos existentes. Assim, o problema de Programação Inteira ficou com 96 variáveis inteiras

TRECHO	COMPRIMENTO (m)	DIÂMETRO (mm)	
		SOL. SERETE	SOL. VIEIRA
- 1	70	250	250
- 2	360	250	250
- 3	130	200	200
- 4	360	200	200
- 5	65	350	350
- 6	125	150	150
7	120	160	85
8	364	110	110
9	240	140	110
- 10	263	350	350
- 11	454	350	350
12	93	160	160
13	122	160	110
14	509	110	85
15	216	140	110
16	748	110	85
17	338	85	85
18	351	110	85
19	235	110	85
20	348	85	85
21	233	85	85
22	358	110	110
23	282	110	85
24	402	140	140
25	543	110	110
26	752	110	85
27	468	110	85
28	374	160	110
- 29	116	250	250
- 30	358	250	250
- 31	246	125	125
32	354	110	85
- 33	248	125	125

OBS.: os trechos precedidos pelo sinal (-) são os já existentes

TABELA IV-16 - Soluções apresentadas pela SERETE (24) por VIEIRA (30) para a expansão de parte da rede de Apucarana (PR)

DIÂMETRO (mm)	COMPRIMENTO (m)	CUSTO (Cr\$)
85	919	106.769
110	4564	876.242
140	858	316.859
160	709	338.966

Custo total das tubulações: 1.638.836

TABELA IV-17 - Custo das tubulações da expansão da rede, projetada pela SERETE (24)

DIÂMETRO (mm)	COMPRIMENTO (m)	CUSTO (Cr\$)
85	4338	503.989
110	2217	425.642
140	402	148.459
160	93	44.462

Custo total das tubulações: 1.122.552

TABELA IV-18 - Custo das tubulações da expansão da rede, pela solução de VIEIRA (30)

zero-um.

As velocidades máximas adotadas para os diversos diâmetros estão listadas na Tabela IV-19.

DIÂMETRO (mm)	VEL. MÁXIMA (m/s)
85	0,75
110	0,90
140	1,05
150	1,10
160	1,15
200	1,30
250	1,50
350	1,90

TABELA IV-19 - Velocidades máximas para os diversos diâmetros

Ao ser executado o Problema de Programação Inteira, o programa terminou ainda na 1<sup>a</sup>. fase do Método Dual de Decomposição. Portanto, não foi possível eliminar as variáveis artificiais do Problema.

A melhor solução não viável gerada foi muito ruim, violando as restrições de velocidade em 10 trechos. A limitação de pressão mínima na rede foi violada no nó 10, onde a pressão disponível foi de 11,54 m. O custo total da rede foi de Cr\$ .... 1.311.720.

A configuração encontrada não satisfaz de forma alguma às condições impostas ao problema e não deve portanto ser consi-

derada como uma "solução".

#### IV.4.2 O Modelo de Otimização Heurística Utilizando Custo de Energia

Como neste exemplo a cota do reservatório é conhecida, foi necessário arbitrar-se um valor inicial para o custo de energia ( $E_s = 1,00$ ). Para os diâmetros iniciais dos trechos da rede, foram escolhidas duas configurações diferentes:

- a) adotando-se o diâmetro 160 mm para todos os trechos na expansão;
- b) adotando-se o diâmetro 85 mm para todos os trechos da expansão.

Para cada configuração inicial foram obtidas quatro soluções diferentes, em função dos valores do custo fictício de energia, gerados pelo programa a partir do custo inicial ( $E_s = 1,00$ ).

Nas Tabelas IV-20 a IV-23 estão resumidos os resultados obtidos a partir das duas configurações iniciais descritas.

Nas Tabelas IV-24 a IV-26 estão resumidas as características da rede para a melhor solução obtida pelo método heurístico (solução B4). A melhor solução com diâmetros iniciais iguais a 160 mm (solução A4) difere da solução 8 apenas no trecho 28, onde o diâmetro selecionado foi de 110 mm, enquanto que na solução (B4) o diâmetro para o mesmo trecho foi de 85 mm.

SOLUÇÃO	CUSTO FICT. DE ENERGIA	NÓ CRÍTICO	PRESSÃO NO NÓ CRÍTICO (m)	CUSTO TOTAL DAS TUBULA- ÇÕES (Cr\$)
A1	1,00	18	20,03	1.251.647
A2	0,25	18	20,03	1.201.308
A3	0,125	10	19,54	1.171.566
A4	0,0625	18	14,96	954.353

TABELA IV-20 - Resumo das soluções obtidas com a configuração inicial com diâmetros de 160 mm para todos os trechos da expansão

SOLUÇÃO	CUSTO FICT. DE ENERGIA	NÓ CRÍTICO	PRESSÃO NO NÓ CRÍTICO	CUSTO TOTAL DAS TUBULA- ÇÕES (Cr\$)
B1	1,00	6	22,69	1.328.806
B2	0,25	9	21,87	1.241.076
B3	0,125	18	20,07	1.099.764
B4	0,0625	18	14,96	926.000

TABELA IV-21 - Resumo das soluções obtidas com a configuração inicial com diâmetros de 85 mm para todos os trechos da expansão

TRECHO	DIÂMETRO (mm)			
	SOLUÇÃO A1	SOLUÇÃO A2	SOLUÇÃO A3	SOLUÇÃO A4
- 1	250	250	250	250
- 2	250	250	250	250
- 3	200	200	200	200
- 4	200	200	200	200
- 5	350	350	350	350
- 6	150	150	150	150
7	140	110	110	110
8	140	110	110	85
9	140	140	110	110
- 10	350	350	350	350
- 11	350	350	350	350
12	160	160	140	140
13	140	140	110	110
14	85	85	85	85
15	140	140	110	110
16	85	85	85	85
17	85	85	85	85
18	85	85	85	85
19	85	85	85	85
20	85	85	85	85
21	85	85	85	85
22	85	85	110	85
23	85	85	110	85
24	140	140	140	110
25	85	85	110	85
26	85	85	110	85
27	85	110	85	85
28	110	110	85	110
- 29	250	250	250	250
- 30	250	250	250	250
- 31	125	125	125	125
32	85	85	85	85
- 33	125	125	125	125

OBS.: os trechos precedidos pelo sinal (-) são os já existentes

TABELA IV-22 - Diâmetros com soluções obtidas a partir da configuração com diâmetros de 160 mm para todos os trechos da expansão

TRECHO	DIÂMETRO (mm)			
	SOLUÇÃO B1	SOLUÇÃO B2	SOLUÇÃO B3	SOLUÇÃO B4
- 1	250	250	250	250
- 2	250	250	250	250
- 3	200	200	200	200
- 4	200	200	200	200
- 5	350	350	350	350
- 6	150	150	150	150
7	110	110	110	110
8	110	110	85	85
9	160	140	140	110
- 10	350	350	350	350
- 11	350	350	350	350
12	140	110	140	140
13	140	110	140	110
14	110	110	85	85
15	160	140	140	110
16	85	85	85	85
17	85	85	85	85
18	85	85	85	85
19	85	85	85	85
20	85	85	85	85
21	85	85	85	85
22	85	85	85	85
23	85	85	85	85
24	160	160	140	110
25	110	110	85	85
26	85	85	85	85
27	85	85	85	85
28	110	110	85	85
- 29	250	250	250	250
- 30	250	250	250	250
- 31	125	125	125	125
32	85	85	85	85
- 33	125	125	125	125

OBS.: os trechos precedidos pelo sinal (-) são os já existentes

TABELA IV-23 - Diâmetros das soluções obtidas a partir da configuração com diâmetros de 85 mm para todos os trechos da expansão

Para cada configuração inicial, o tempo médio de processamento para a geração das quatro soluções foi de 125 segundos.

NO	COTA (m)	PRESSÃO DISPONÍVEL (m)
1	864,50	23,50
2	860,00	27,50
3	859,00	26,20
4	862,90	22,40
5	864,10	23,55
6	862,20	21,47
7	860,30	20,21
8	856,00	27,40
9	860,50	22,05
10	859,00	19,78
11	852,00	24,87
12	848,00	28,51
13	849,00	27,78
14	838,00	40,92
15	861,00	24,35
16	860,80	25,87
17	848,50	28,48
18	855,80	14,96
19	861,50	16,00
20	859,50	27,59
21	852,00	22,34
22	852,00	32,02
23	855,00	29,06
24	851,00	28,57
25	854,60	25,58

TABELA IV-24 - Características dos nós da rede com os diâmetros da melhor solução obtida pelo Modelo Heurístico utilizando Custo Fictício de Energia (solução B<sup>4</sup>)

TRECHO	COMPRIMENTO (m)	DIÂMETRO (mm)	NÓ MONTANTE	NÓ JUSANTE	VAZÃO (l/s)
- 1	70	250	1	2	45,63
- 2	360	250	2	3	42,63
- 3	130	200	4	3	7,62
- 4	360	200	5	4	24,01
- 5	65	350	1	5	94,37
- 6	125	150	4	6	16,39
7	120	110	6	7	16,39
8	364	85	8	7	4,36
9	240	110	5	8	13,24
- 10	263	350	5	20	57,12
- 11	454	350	20	16	36,57
12	93	140	16	15	22,12
13	122	110	15	9	15,25
14	509	85	8	9	1,88
15	216	110	9	10	13,13
16	748	85	10	13	3,67
17	338	85	14	13	3,87
18	351	85	15	14	6,87
19	235	85	13	12	1,55
20	348	85	11	12	1,45
21	233	85	10	11	4,45
22	358	85	16	17	8,45
23	282	85	19	17	2,00
24	402	110	20	19	15,55
25	543	85	19	18	5,55
26	752	85	17	18	4,45
27	468	85	7	21	5,75
28	374	85	22	21	8,25
- 29	116	250	23	22	8,25
- 30	358	250	3	23	29,34
- 31	246	125	3	25	12,91
32	354	85	25	24	1,91
- 33	248	125	23	24	12,09

OBS.: Os trechos precedidos pelo sinal (-) são os já existentes

TABELA IV-25 - Características dos trechos para a melhor solução obtida pelo Modelo Heurístico utilizando Custo Fictício de Energia (solução B4)

DIÂMETRO (mm)	COMPRIMENTO (m)	CUSTO (Cr\$)
85	5857	680.466
110	1100	211.189
140	93	34.345
<b>Custo total das tubulações: 926.000</b>		

TABELA IV-26 - Custo das tubulações da expansão da rede, para a melhor solução obtida pelo Método Heurístico utilizando Custo Fictício de Energia (solução B4)

## CAPÍTULO V

## DISCUSSÃO DOS RESULTADOS, CONCLUSÕES

## E RECOMENDAÇÕES

## V.1 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

## V.1.1 Modelo de Otimização por Programação Linear Inteira Bivalente (PLIB)

O modelo apresentou como característica as grandes dimensões do problema de PLIB gerado, o que exige grandes áreas de memória de computador mesmo para problemas relativamente pequenos.

A aplicação do modelo na resolução do Exemplo nº 1 (item IV.2) serviu para testar a eficiência dos dois métodos empregados na solução do problema de PLIB, o Método de Enumeração Implícita (MEI) e o Método Dual de Decomposição (MDD).

O MEI levou a um excessivo tempo de processamento para qualquer dos algoritmos utilizados, considerando-se as dimensões do Exemplo nº 1. Dentre os algoritmos empregados, aparentemente o de melhor eficiência para resolução deste tipo de problema foi aquele em que se usou as restrições substitutas propostas por GEOFFRION (12) (algoritmo c). O tempo de processamento, apesar de muito grande não teve um crescimento tão acentuado com o aumento do número de variáveis, se comparado com o resultado obtido com os outros dois algoritmos (ver Tabela IV-4). A eficiência do programa utilizando o algoritmo (c) poderia ser me-

lhorada caso se utilizasse no cálculo da melhor restrição substituta, um programa de Programação Linear mais eficiente que aquele existente no IMSL (15), de eficiência bastante ruim, conforme comprovou VIEIRA (30).

Em função do tempo de processamento requerido, desproporcional às dimensões da rede a ser otimizada, o modelo utilizando Método de Enumeração Implícita não foi aplicado no Exemplo nº 3, pois este apresenta quase três vezes mais variáveis inteiras zero-um que o Exemplo nº 1.

O Método Dual de Decomposição (MDD) consumiu tempos de processamento bastante reduzidos na resolução dos problemas de PLIB, porém não se obteve nenhuma solução viável, tanto para o Exemplo nº 1 quanto para o Exemplo nº 3. No Exemplo nº 1, apesar de não ter encontrado nenhuma solução viável, o MDD comprovou a importância de se analisar as soluções próximas do espaço viável, pois após a análise hidráulica da melhor solução ε-viável encontrada, de custo inferior ao da melhor solução viável do PLIB (Tabelas IV-3 e IV-6) constatou-se que aquela solução não viola as restrições impostas ao Exemplo. A exclusão desta solução do espaço das soluções viáveis deve-se às simplificações do modelo ao estabelecer as equações de restrição. Em parte isso talvez pudesse ser contornado utilizando-se no modelo velocidades admissíveis um pouco maiores que aquelas realmente estabelecidas.

Já na resolução do Exemplo nº 3 não se conseguiu obter pelo MDD nenhuma solução aceitável, indicando que o tipo de problema de PLIB gerado pelo modelo não se presta à resolução pelo Método.

### V.1.2 Modelo Heurístico de Otimização Utilizando Custo de Energia (MHCE)

A aplicação deste modelo levou a bons resultados, tanto em termos de tempo de processamento quanto em relação ao custo das soluções obtidas.

Para o Exemplo nº 1, a melhor solução obtida apresentou um custo 10% inferior ao custo da melhor solução obtida pelo modelo de otimização por PLIB (Tabelas IV-6 e IV-7). Porém a comparação entre esses resultados não é muito válida, pois as restrições impostas ao Exemplo pelos modelos são diferentes. Considerando-se a restrição de velocidade admitida pelo modelo de PLIB, a solução obtida pelo MHCE seria inviável, pois violaria a restrição de velocidade no trecho 2.

A resolução do Exemplo nº 2 mostrou que o MHCE pode ser aplicado também em redes ramificadas. Nos casos em que a cota piezométrica no nó de abastecimento não está estabelecida, seja porque a cota do reservatório ainda não foi fixada ou então porque a rede será pressurizada por bombeamento direto, o modelo presta-se à geração de diversas soluções alternativas, quando não se inclui o custo real de energia na otimização.

A utilização do programa desenvolvido para o Modelo é bastante simples pois não são necessários cálculos preliminares para se arbitrar os diâmetros iniciais, podendo ser atribuído o mesmo valor para todos os trechos. No Exemplo nº 2 foram obtidos os mesmos resultados, independentemente da configuração inicial adotada (Tabela IV-12). Dentre as soluções geradas, apenas a 4<sup>a</sup> é ruim, o que é perceptível mesmo ao se comparar as 4

soluções entre si, pois para uma redução de pressão de apenas 0,4 m no nó de abastecimento, ocorreu um acréscimo de 15% no custo de tubulações da solução 4 quando comparada com a solução 3. Além disso, a solução 4 é pior que a solução obtida por PIRES (20) pela prática tradicional. Analisando-se as soluções conjuntamente (Tabela IV-13), aparentemente a faixa ótima para a cota piezométrica no nó de abastecimento está entre 22,50 m e 24,50 m. Para uma decisão mais acurada em termos de custo total, seria necessário considerar ainda os custos do reservatório elevado e dos gastos de energia em função da cota piezométrica necessária no nó de abastecimento.

A aplicação do MHCE no Exemplo nº 3, permitiu uma melhor análise, pois houve uniformidade nas restrições utilizadas para o dimensionamento tanto pelo MHCE quanto pela SERETE (24) e por VIEIRA (30).

A configuração inicial da rede teve pouca influência nas soluções finais obtidas, pois, como se pode observar nas Tabelas IV-20 a IV-23, as melhores soluções obtidas (A4 e B4) a partir de duas configurações iniciais diferentes, diferem entre si em apenas um trecho.

A melhor solução obtida pelo MHCE, solução B4, apresenta um custo 17,5% inferior àquele obtido por VIEIRA (Tabelas IV-16 e IV-18). A mesma solução B4, se comparada com a rede projetada pela SERETE (Tabela IV-17), apresenta uma redução de 43,5% no custo de tubulações, mostrando claramente que os critérios que vêm sendo utilizados tradicionalmente por inúmeros projetistas, não consideram o fator custo no projeto da rede, superdimensionando-a. Como a rede em geral é projetada para aten-

der a uma etapa bem definida dentro de um projeto global, essa folga torna-se desnecessária e onerosa. A regulamentação do Sistema Financeiro de Saneamento (SFS) do BNH, dispõe que na comparação de alternativas de projeto, dispensa-se a inclusão no valor presente dos custos, das despesas ou investimentos que não variem com nenhuma alternativa estudada (Circular COSAN - Carteira de Operações do SFS - nº 01/81 - "Dispõe sobre a escolha de alternativas nos Relatórios Preliminares"). Como em geral em projetos de Sistemas de Abastecimento de Água e dimensionamento da rede têm sido feito independentemente dos outros estudos (captação, adução, tratamento, etc.) em grande parte dos projetos têm se incluído o custo da rede como invariante nas diversas alternativas estudadas, e assim, muitas vezes não há uma preocupação com a redução do custo da rede. Porém, dado ao seu elevado custo relativo, o superdimensionamento da rede pode inclusive contribuir decisivamente para a inviabilização do empreendimento em termos de financiamento pelo SFS, que condiciona esse financiamento à satisfação de critérios bastante restritivos – a tarifa média de cidades similares deve ser maior que uma porcentagem (60% para cidades com população entre 5000 e 50000 habitantes e 75% para cidades com mais de 50000 habitantes) do custo marginal do projeto ( $CM = C_p / V_p$ , onde CM é o custo marginal,  $C_p$  é o valor presente dos custos incrementais e  $V_p$  o valor presente dos volumes faturáveis) (Circular COSAN nº 02/81 - "Instui Modelo de Análise Econômica de Empreendimentos Financiáveis através do SFS e dá outras providências").

## V.2 CONCLUSÕES

O modelo de otimização por Programação Linear Inteira Bivalente revelou-se ineficaz, principalmente pelo tamanho do problema de PLIB gerado, e por excluir com suas simplificações, algumas soluções que podem ser melhores que aquelas consideradas viáveis pelo modelo.

O Método de Enumeração Implícita (MEI) mostrou-se inadequado para resolução de problemas deste tipo, devido ao excessivo tempo de processamento gasto, provocado pelo grande número de variáveis zero-um. Para resolução de problemas de PLIB com muitas variáveis, a inclusão das restrições substitutas propostas por GEOFFRION (12) melhoraram a eficiência do Método, porém não o suficiente para torná-lo aplicável ao caso.

O Método Dual de Decomposição (MDD) não parece ser muito eficaz para o tipo de problema em questão, pois apesar de ter evidenciado a importância de se verificar as soluções próximas do espaço viável, não gerou nenhuma solução aceitável para um problema de maior porte, como o Exemplo nº 3.

Pode-se portanto, dizer que o modelo de Otimização por PLIB só poderá ser útil se as dificuldades de armazenamento e processamento forem contornadas, seja pela utilização de computadores muito mais eficientes (no caso do MEI), ou pela aplicação de outros métodos para resolução do problema de PLIB, mais adequados que os testados.

O modelo de Otimização Heurística utilizando Custo de Energia (MHCE) mostrou-se bastante eficiente, obtendo boas soluções

ções com tempo de processamento e área de memória de computador relativamente pequenos. O modelo, juntamente com o programa de Análise Hidráulica (resolução do sistema de equações pelo método de Newton-Raphson, utilizando as cotas piezométricas nos nós como variáveis) não necessita uma inicialização elaborada pois não é necessário fazer um pré-dimensionamento da rede ou uma distribuição inicial de vazões pelos trechos (no caso de redes malhadas). O Modelo presta-se para a geração de diversas soluções antes de se definir a cota do reservatório ou mesmo o traçado dos anéis principais, dada a simplicidade dos dados iniciais e o tempo de processamento em computador, relativamente pequeno.

Deve-se ressaltar também que, dado o alto custo de construção e manutenção dos reservatórios elevados, nota-se uma preocupação no sentido de se utilizar sistemas com bombeamento direto para a rede, o que já vem sendo largamente aplicado em outros países (16, 26, 27). O MHCE é bastante adequado a este caso, pois a rede e o sistema de bombeamento são otimizados conjuntamente.

### V.3 RECOMENDAÇÕES

Pode-se sugerir alguns estudos para o Modelo Heurístico utilizando Custo de Energia:

- um estudo mais aprofundado sobre o valor inicial do custo fictício de energia e sua influência no tempo de processamento de computador;

- o efeito da inclusão de certos dispositivos especiais como válvulas redutoras de pressão, na otimização da rede;
- a otimização de redes onde já existam construídos mais de um reservatório elevado;
- a adaptação e compatibilização dos programas do Modelo Heurístico para micro-computadores (de acesso mais fácil a qualquer projetista).

Em caráter mais geral, seria de interesse estudar-se com mais profundidade o uso de sistemas de abastecimento com bombeamento direto para a rede, eliminando-se os reservatórios elevados, em geral de alto custo relativo no projeto. Na parte de equipamentos, seria útil um levantamento dos sistemas existentes no mercado e o desenvolvimento de sistemas de controle para as máquinas hidráulicas, compatíveis com as condições de operação (mão-de-obra, falhas no fornecimento de energia elétrica, etc.) existentes principalmente em pequenas comunidades no país. A adoção de sistemas com bombeamento direto possibilita uma alteração no estudo de alternativas para Sistemas de Abastecimento de água, pois os custos da rede e das bombas passam a ter relação direta com os demais custos do sistema (captação, adução, tratamento, etc.) e a otimização pode ser feita de maneira a incluir no estudo de cada alternativa, a rede e bombas que melhor se adaptem às suas condições.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) ALPEROVITS, E. e SHAMIR, U., "Design of optimal water distribution systems", *Water Resources Research*, vol. 13, nº 6, pp. 885-900, 1977.
- (2) ARTINA, S., "The use of mathematical programming techniques in designing hydraulic networks", *Meccanica*, vol. 8, nº 3, pp. 158-167, 1973.
- (3) ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), *Elaboração de projetos hidráulicos de redes de distribuição de água potável para abastecimento público*, P-NB-594/77, Rio de Janeiro, 1977.
- (4) AZEVEDO NETTO, J.M., *Manual de hidráulica*, 6<sup>a</sup> edição, São Paulo, Edgard Blücher, 1973.
- (5) BALAS, E., "An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables", *Operations Research*, vol. 13, nº 4, pp. 517-546, 1965.
- (6) BHAVE, P.R., "Optimization of gravity-fed water distribution systems: theory", *Journal of Environment Engineering, ASCE*, vol. 109, nº 1, pp. 383-395, 1983.

- (7) CROSS, H., "Analysis of flow in networks of conduits or conductors", Engineering Experiments Station, *Bulletin No. 286*, University of Illinois, nov. 1936.
- (8) DEB, A.K., "Least cost design of branched pipe network system", *Journal of Environmental Engineering Div.*, ASCE, vol. 100, nº 4, pp. 821-835, 1974.
- (9) DEB, A.K. e SARKAR, A.K., "Optimization in design of hydraulic network", *Journal of Sanitary Engineering Div.*, ASCE, vol. 97, nº 2, pp. 141-159, 1971.
- (10) FEATHERSTONE, R.E. e EL-JUMAILY, K.K., "Optimal diameter selection for pipe networks", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, vol. 109, nº 2, pp. 221-234, 1983.
- (11) GEOFFRION, A.M., "Integer programming by implicit enumeration and Balas' method", *SIAM Review*, vol. 9, nº 2, pp. 178-190, 1967.
- (12) GEOFFRION, A.M., "An improved implicit enumeration approach for integer programming", *Operations Research*, vol. 17, nº 3, pp. 437-454, 1969.

- (13) GLOVER, F., "A multiphase-dual algorithm for the zero-one integer programming problem", *Operations Research*, vol. 13, nº 6, pp. 879-919, 1965.
- (14) GLOVER, R., "Surrogate constraints", *Operations Research*, vol. 16, nº 4, pp. 741-749, 1968.
- (15) ISML, *Library 3 Reference Manual V.2*, 6.<sup>a</sup> edição, Houston, Texas, International Mathematical & Statistical Libraries Inc., 1977 (Burroughs 6700/7700 Series).
- (16) JEPSON, R.W., *Analysis of flow in pipe networks*, Ann Arbor, Mich., Ann Arbor Science, 1976.
- (17) MACULAN FILHO, N. e PEREIRA, M.V.F., *Programação Linear*, 1.<sup>a</sup> edição, São Paulo, Atlas, 1980.
- (18) MARTINS, J.A., "Rede de Distribuição", In: AZEVEDO NETTO, J.M. et al., *Planejamento de sistemas de abastecimento de água*, Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Organização Pan-Americana de Saúde, pp. 185-213, 1973.
- (19) PAULA JUNIOR, G.G., *Contribuição às aplicações dos modelos de recobrimento e particionamento em programação inteira*, Rio de Janeiro, 1978, (Tese de M.Sc.).

- (20) PIRES, R., *Utilização de técnicas de otimização em redes de abastecimento de água*, Rio de Janeiro, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1979 (Tese de M.Sc.).
- (21) PLANE, D.R. e McMILLAN Jr., C., *Discrete optimization-integer programming and network for management decisions*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1971.
- (22) QUINDRY, G.E.; BRILL, E.D. e LIEBMAN, J.C., "Optimization of looped water distribution systems", *Journal of the Environmental Engineering Div.*, ASCE, vol. 107, nº 4, pp. 665-679, 1981.
- (23) RASMUSSEN, H.J., "Simplified optimization of water supply systems", *Journal of the Environmental Engineering Div.*, ASCE, vol. 102, nº 2, pp. 313-327, 1976.
- (24) SERETE, Abastecimento de água da cidade de Apucarana, Memorial descritivo, especificações técnicas e orçamento, vol. 1, 1973.
- (25) SHAMIR, U. e HOWARD, C.D., "Water distribution system analysis", *Journal of the Hydraulics Div.*, ASCE, vol. 94, nº 1, pp. 219-234, 1968.

- (26) SOUSA, R.F.; BRUCOLI, A.C. e LUCARELLI, D.L., "Bombeamento direto nas redes de distribuição através de bombas de velocidade variável sem reservatório de distribuição", 11 p., *Simpósio sobre Materiais e Equipamentos Utilizados em Saneamento Básico*, Rio de Janeiro, 1978.
- (27) STREETER, V.L. e WYLIE, E.B., *Mecânica dos fluidos*, 7<sup>a</sup> edição, São Paulo, McGraw-Hill, 1980.
- (28) VACA OBANDO, F.E., "Um algoritmo eficiente para encontrar soluções aproximadas de problemas de programação bivalente (0-1), utilizando dualidade em programação inteira", Rio de Janeiro, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1978 (Tese de D.Sc.).
- (29) VACA OBANDO, F.E.; VILLARES, M.L. e MACULAN FILHO, N., "Soluções aproximadas de problemas de programação bivalente (0-1), utilizando dualidade em programação inteira", 11<sup>a</sup> Jornadas Argentinas de Informática e Investigación Operativa, Buenos Aires, 1979.
- (30) VIEIRA, A.M., "Métodos iterativos de análise hidráulica e dimensionamento ótimo por programação linear de redes de distribuição de água", Rio de Janeiro, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1980, (Tese de M.Sc.).

- (31) VILLARES, M.L. e MACULAN FILHO, N., *Resolução de problemas de programação linear inteira bivalente (0-1) por algoritmos de enumeração implícita*, PDD 14/79, Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1979.