ANÁLISE DE VIBRAÇÃO DE UMA HASTE SOB A AÇÃO DE FORÇA CENTRÍFUGA E DE CORIOLIS

ANGELO ACCETTI JUNIOR

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

Presidente

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
FEVEREIRO DE 1974

à meu pai (in memoriam),

à minha mãe,

à Nida.

A G R A D E C I M E N T O S

À CAPES, COPPE/UFRJ, NCE/UFRJ e FFEUU.

Ao professor HANS INGO WEBER, pela orientação e incentivo neste trabalho.

À meus pais, à Kristiane, minha filha,

À Nida, minha esposa, pelo apoio e compreensão de sempre.

S I N O P S E

Analisa-se o movimento e estuda-se a estabilidade dinâmica de uma haste na presença de aceleração centrípeta e de Coriolis. Serão estudados os casos de uma haste rígida, e uma haste flexível, ambos simplificados para um modelo de apenas um grau de liberdade.

As equações de movimento que podem ser estabelecidas pela mecânica newtoniana ou lagrangeana, resultam em equações diferenciais não lineares de segunda ordem.

As regiões de estabilidade do movimento do sistema são determinadas aplicando o critério de Ljapunov; a análise do movimento pode ser feita no plano fase, pois existe a integral da equação de movimento.

São apresentados alguns resultados numéricos relativos ao problema da determinação das curvas integrais, no caso da haste elástica.

ABSTRACT

The dynamic stability and the analysis of motion of a bar under the action of centripetal and Coriolis acceleration is investigated. A simplified one degree of freedom model is used for the cases of a rigid and a flexible bar.

The equations of motion may be established by Lagrangian or Newtonian Mechanics and result in non-linear second order differential equations.

The stability regions of the motion are determined by the criterium of Ljapunov; the analysis of motion is done in the phase plane where one can integrate the equation of the trajectory.

Some numerical results are presented related to this integration in the case of the flexible bar.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS ii

SINOPSE iii

ABSTRACT iv

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO II - ESTUDO DA HASTE RÍGIDA

2.1 - HIPÓTESES 6

2.2 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DA HASTE 6

2.3 - APROXIMAÇÃO LINEAR, ROTAÇÃO CRÍTICA 18

2.4 - ESTUDO GERAL DA ESTABILIDADE 23

CAPÍTULO III - ESTUDO ANALÍTICO DA HASTE FLEXÍVEL

3.1 - MODELO FÍSICO 34

3.2 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO 36

3.3 - ESTUDO DA MASSA 36

3.4 - ESTUDO DA HASTE 40

3.5 - COMENTÁRIOS 44

3.6 - NORMALIZAÇÃO E ADIMENSIONALIZAÇÃO 45

3.7 - APROXIMAÇÃO LINEAR POR DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE 48

3.8 - ESTABILIDADE 51

3.9 - SOLUÇÃO NO PLANO FASE 59

CAPÍTULO IV - HASTE ELÁSTICA - CASO EM QUE $\rho > R$

4.1 - MODELO FÍSICO 67

4.2 - EQUAÇÃO DE MOVIMENTO 67

4.3 - ESTUDO DA MASSA 67

4.4 - ESTUDO DA HASTE 69

4.5 - NORMALIZAÇÃO E ADIMENSIONALIZAÇÃO 74

4.6 - ESTABILIDADE 75

4.7 - SOLUÇÃO NO PLANO FASE 76

CAPÍTULO V - MOVIMENTO DA HASTE TRANSVERSAL AO PLANO DE ROTAÇÃO DO ANEL

5.1 - MODELO FÍSICO 89

5.2 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO 80

5.3 - ESTUDO DA MASSA 82

5.4 - ESTUDO DA HASTE 84

5.5 - NORMALIZAÇÃO E ADIMENSIONALIZAÇÃO 88

5.6 - ESTABILIDADE 89

APÊNDICE 91

- DIAGRAMA DE BLOCO 92

- LISTAGEM 93

BIBLIOGRAFIA 95

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos tem sido dada uma crescente atenção a problemas de estabilidade dos mais variados tipos. Enquanto por um lado se estuda os problemas estáticos, partindo de uma estrutura em repouso e dando lugar a situações onde pode haver flambagem, por outro lado se desenvolvem os problemas dinâmicos, que são sistemas em movimento, sujeitos ou não a ação de esforços externos e cujo comportamento deve ser conhecido.

Na evolução da pesquisa espacial e na tendência em aumentar sempre mais a velocidade dos corpos em movimento é justificada a necessidade do cuidado que deve ser dispensado ao estudo da estabilidade dinâmica.

Na análise do comportamento de sistemas globais, como por exemplo um satélite com apêndices flexíveis sob a ação de um certo spin, veja (Meirovitch[7]), e que resulta num sistema híbrido, com equações diferenciais ordinárias e parciais, é importante se ter conhecimento do que ocorre em casos mais simplificados. Consequentemente, a partir deste trabalho, podem nascer idéias para se tratar o primeiro caso. Desta maneira se passa a encarar os casos de placas e hastes sujeitas a movimento de rotação. Em problemas dinâmicos, onde a força centrífuga oriunda do movimento circular age como um esforço de tração, portanto não é provocada a instabilidade. Isto ocorre com um disco com um furo cen-

tral, em rotação, apoiado ao longo da borda deste furo. O caso' no qual a força centrífuga age como força de compressão, por exemplo, é do mesmo disco em rotação,só que apoiado na borda externa,. Este problema foi estudado primeiramente por (Prato[9]).

Neste trabalho, se estuda, essencialmente, o movimento de uma haste com a massa concentrada em sua extremidade livre e sobre a qual a força centrífuga age compressivamente. Essa força tem origem no movimento de rotação do ponto de apoio da haste, como mostra a (fig.1). As deformações poder ser consideradas no plano de rotação e para fora desse plano. Sabendo-se da existência de um valor crítico, para a força de compressão (novamente o caso de flambagem), pode-se extrapolar a existência de uma rotação crítica. Aí termina a anologia com o problema estático, pois o movimento de haste no sistema em rotação dá origem a um novo tipo de esforço, que no sistema de referência utilizado se caracteriza como proveniente da aceleração de Coriolis a que está sujeita a massa. Este efeito se manifesta de uma maneira muito curiosa na equação de movimento, que perde, a custa dele, a sua linearidade.

Investiga-se o movimento da mencionada partícula, presa na extremidade de uma haste rígida ou flexível,sempre delgada e de massa desprezível. O deslocamento da massa de sua posição de equilíbrio, é pequeno comparado ao comprimento da haste. As equações de movimento podem ser obtidas pela lei de Newton,através de um estudo mais detalhado das forças envolvidas, ou então pelo método de Lagrange,através das energias cinética

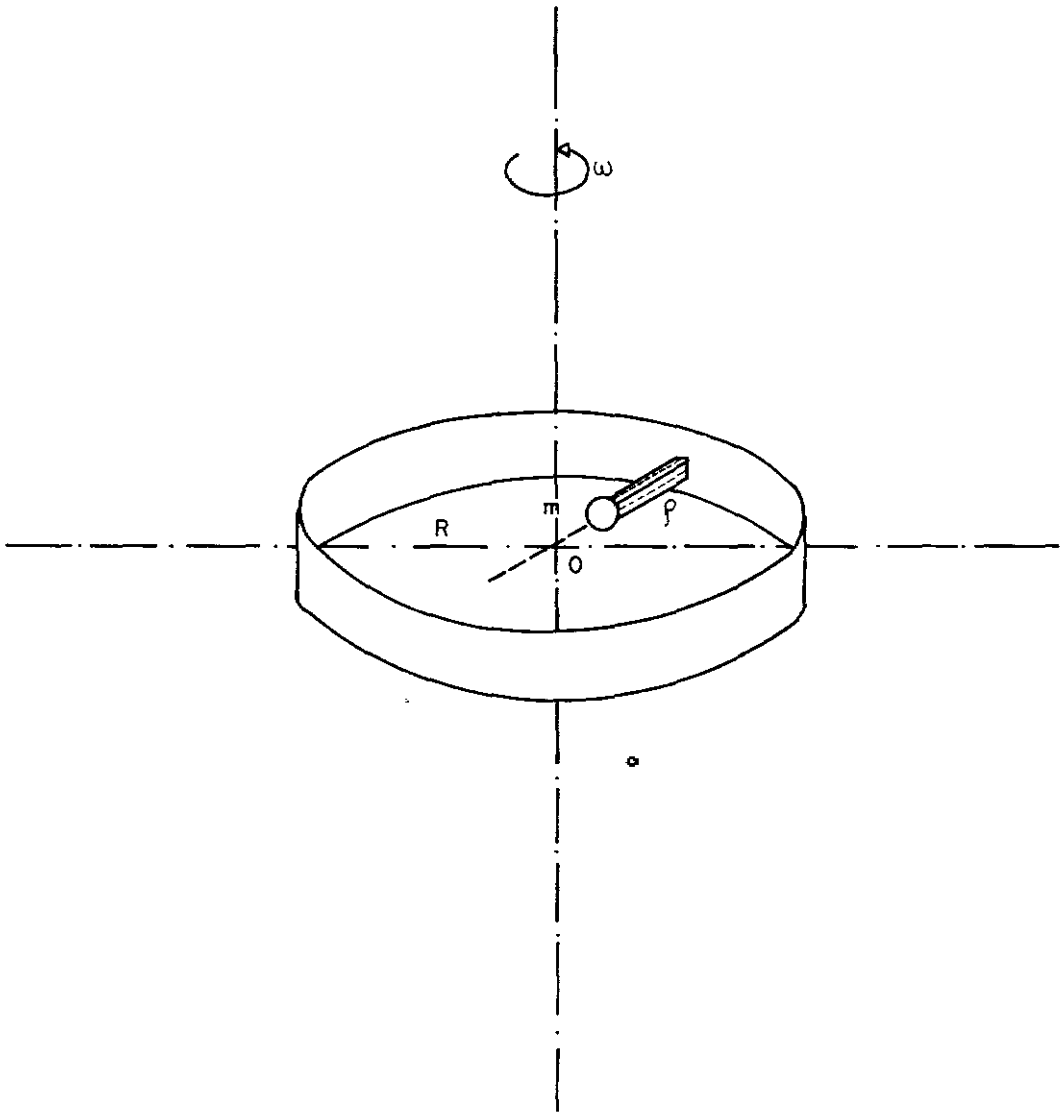


fig. 1

e potencial (inclusive de deformação).

A equação não linear de movimento, de um dado sistema é estudada no plano fase, enquanto o estado de equilíbrio e a estabilidade são verificados pelo critério de Ljapunov. A trajetória no plano fase, pode ser obtida por integração simples, não apresentando grandes dificuldades numéricas.

Em outros capítulos são desenvolvidos os diversos aspectos do problema, até onde se acredita ser razoável sua solução pelo proveito que dela se tem, em função do esforço aplicado. Partindo deste raciocínio, para o estudo dos fenômenos básicos do problema, por exemplo, não é adequado usar uma haste com massa distribuída, pois o sistema é descrito por equações integro - diferenciais parciais, com condições de contorno um tanto mais complicada. Sua solução irá, provavelmente, apenas resolver o problema específico, sem apresentar novas ocorrências físicas ao que se obtem de um modelo mais simples.

Inicialmente, se estuda o caso de uma haste rígida e ligada por uma mola, à superfície de apoio, depois uma haste flexível, engastada perfeitamente. A massa se desloca, ou no plano de rotação ou ortogonal a ele, sendo considerado diversas possibilidades face ao centro de rotação.

Finalizando, há de se ressaltar, que não se procurou resolver especificamente um problema com existência física definida, porém se pretendeu, através do modêlo simplificado assumido, captar as características básicas de um fenôme

no. Para se sentir possíveis campos de aplicação, cita-se o caso de estações orbitais com certo spin, e o caso de ultracentrífugas (para purificação de urânio), onde a velocidade de rotação atingida vai a valores altíssimos.

CAPÍTULO II

ESTUDO DA HASTE RÍGIDA

2.1 - HIPÓTESES

Estuda-se o movimento de uma haste rígida, com a massa concentrada em uma das extremidades, e fixada elásticamente pela extremidade oposta na parte interna de um anel rígido (fig. 2.1).

O anel executa um movimento de rotação em torno de um eixo vertical, que passa pelo seu centro. O movimento da haste está restrito ao plano do anel e é iniciado por um deslocamento da posição de equilíbrio. Examina-se o movimento e as regiões de estabilidade do sistema em função da velocidade angular do anel.

Não serão considerados efeitos de amortecimento de qualquer espécie no movimento da haste.

2.2 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DA HASTE

Considera-se a haste sem massa própria, de comprimento ρ com a massa m concentrada numa extremidade, na outra extremidade uma mola linear de rigidez torsional K_t prende a haste ao anel. R é o raio do anel, isto é, o raio do movimento do ponto de fixação da haste.

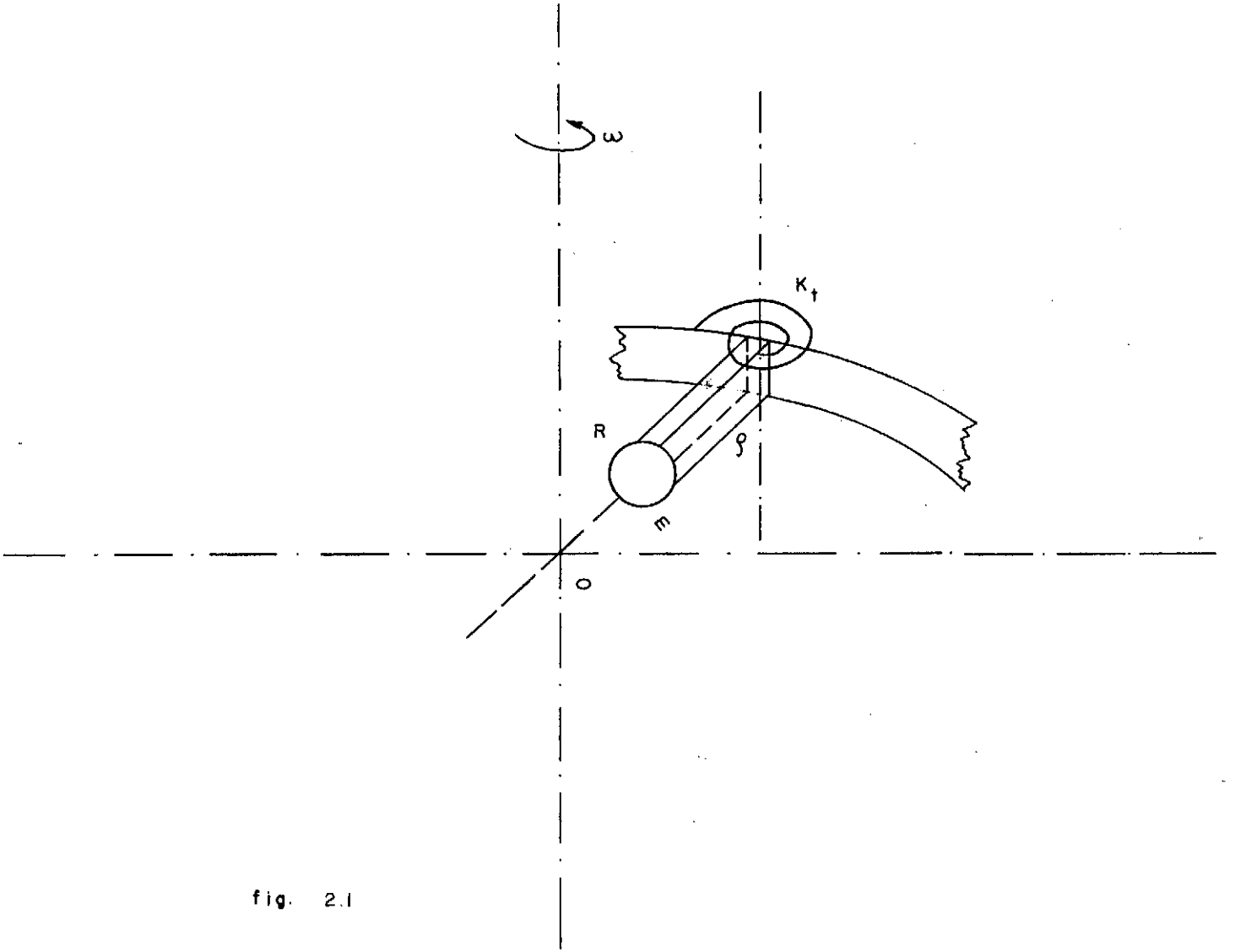


fig. 2.1

Será aproveitado este exemplo simples para a obtenção da equação de movimento por dois processos diferentes. O método baseado nas equações de Lagrange, que trata o sistema de um ponto de vista global, e o baseado nas leis de Newton que levam a uma compreensão física mais profunda do sistema, fato que nos será útil, posteriormente, no tratamento da haste elástica.

Inicialmente o modelo matemático será obtido pela equação de Lagrange (Meirovitch[7])

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1, 2, \ldots n \qquad (2.2.1)$$

onde, para um sistema considerado

$L = T - V$ ... Lagrangeano

T ..... Energia cinética

V ..... Energia potencial

Q_i..... Força generalizada

q_i..... Coordenada generalizada

n ..... Número de graus de liberdade

No caso não há forças não conservativas, pois foi desprezado o amortecimento, e portanto $Q_i = 0$. Além disso, só há um único grau de liberdade, pois a rotação do anel é prescrito. Logo, chamando de θ_1 o desvio da haste de sua posição de equilíbrio:

$$n = 1 \ , \quad q_1 = q = \theta_1 \ ;$$

a energia potencial vale:

$$V = \frac{1}{2} K_t \, \theta_1^2 \tag{2.2.2}$$

e a energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} m \, v^2 \quad , \tag{2.2.3}$$

onde v é a velocidade absoluta da massa. Para a sua determinação define-se os seguintes sistemas de referência:

Primeiramente o inercial com origem no centro do anel O, de eixos x, y, z, (fig. 2.2.1) com os vetores unitários n_x, n_y, n_z respectivamente; o outro com a origem O_1 no ponto de apoio da haste no anel acompanha o movimento de rotação do anel e tem x_1 na direção da haste em sua posição de equilíbrio, y_1 no plano do movimento e z_1 sempre paralelo a z. Seus vetores unitários são:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{n}_{x_1} &= - \cos\theta \, \underset{\sim}{n}_x - \operatorname{sen}\theta \, \underset{\sim}{n}_y \\ \underset{\sim}{n}_{y_1} &= \operatorname{sen}\theta \, \underset{\sim}{n}_x - \cos\theta \, \underset{\sim}{n}_y \\ \underset{\sim}{n}_{z_1} &= \underset{\sim}{n}_z \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

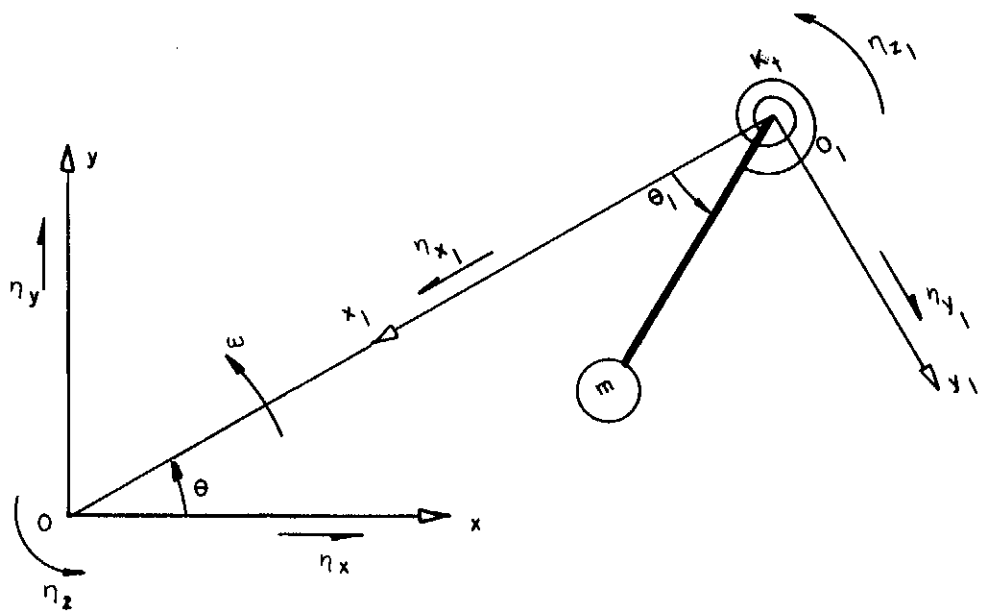


fig. 2.2.1.

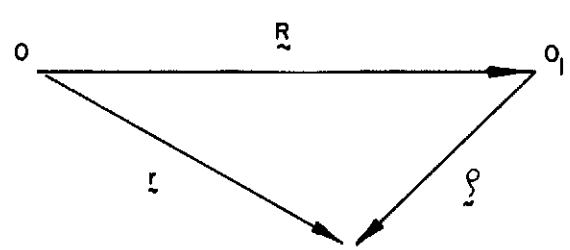


fig. 2.2.2

Para obter as expressões de

$$\underset{\sim}{R} = R \cos\theta \; \underset{\sim}{n_x} + R \operatorname{sen}\theta \; \underset{\sim}{n_y} \qquad e$$

$$\underset{\sim}{\rho} = \rho \cos\theta_1 \; \underset{\sim}{n_{x_1}} + \rho \operatorname{sen}\theta_1 \; \underset{\sim}{n_{y_1}}$$

no sistema inercial substitui-se os valores de $\underset{\sim}{n_{x_1}}$ e $\underset{\sim}{n_{y_1}}$ dados por (2.2.4) e obtem-se:

$$\rho = -\rho\,(\cos\theta \cos\theta_1 - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta_1) \; \underset{\sim}{n_x} -$$

$$-\rho\,(\operatorname{sen}\theta \cos\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta) \; \underset{\sim}{n_y}$$

ou

$$\underset{\sim}{\rho} = -\rho \cos(\theta + \theta_1) \; \underset{\sim}{n_x} - \rho \operatorname{sen}(\theta + \theta_1) \; \underset{\sim}{n_y}$$

(2.2.5)

O vetor posição da massa m é portanto,

$$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{\rho}\,, \quad \text{(fig. 2.2.2)}$$

ou

$$\underset{\sim}{r} = \left[R \cos\theta - \rho\cos(\theta+\theta_1)\right] \underset{\sim}{n_x} + \left[R \operatorname{sen}\theta - \rho\operatorname{sen}(\theta+\theta_1)\right]$$

(2.2.6)

Se o sistema $0x_1y_1z_1$, está girando com velocidade angular $\dot{\theta} = \omega$, o vetor velocidade de P, onde se concentra a partícula de massa m é dado por:

$$\underset{\sim}{v} = \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} = v_x \underset{\sim}{n}_x + v_y \underset{\sim}{n}_y \quad ,$$

e vale:

$$\underset{\sim}{v} = \left[-R\,\dot{\theta}\ \text{sen}\ \theta + \rho\,(\dot{\theta}+\dot{\theta}_1)\ \ \text{sen}\ (\theta+\theta_1)\right] \underset{\sim}{n}_x \ +$$

$$+\left[R\,\dot{\theta}\ \text{sen}\ \theta - \rho\,(\dot{\theta}+\dot{\theta}_1)\ \ \cos\ (\theta+\theta_1)\right] \underset{\sim}{n}_y$$

(2.2.7)

O módulo da velocidade $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ é dado por:

$$v^2 = R^2\dot{\theta}^2 + \rho^2\ (\dot{\theta}+\dot{\theta}_1)^2 - 2R\rho\dot{\theta}\ (\dot{\theta}+\dot{\theta}_1)\ \cos\ \theta_1$$

(2.2.8)

e portanto a energia cinética total do sistema, lembrando que a haste é suposta sem massa, fica,

$$T = \frac{1}{2}\,m\left[R^2\dot{\theta}^2 + \rho^2\ (\dot{\theta}+\dot{\theta}_1)^2 - 2R\rho\dot{\theta}\ (\dot{\theta}+\dot{\theta}_1)\ \cos\ \theta_1\right]$$

(2.2.9)

Como já foi mencionado anteriormente, devido o sistema se movimentar em um plano horizontal, a energia potencial total se reduz à energia elástica acumulada na mola de rigidez torsional K_t, ou seja

$$V = \frac{1}{2} K_t \theta_1^2 \tag{2.2.10}$$

Tem-se portanto o Lagrangeano.

$$L = \frac{1}{2} m \left[R^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2 (\dot{\theta}+\dot{\theta}_1)^2 - 2R\rho\dot{\theta} (\dot{\theta}+\dot{\theta}_1) \cos \theta_1 \right] -$$

$$- \frac{1}{2} K_t \theta_1^2 , \tag{2.2.11}$$

e as derivadas

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = m R \rho \dot{\theta} (\dot{\theta}+\dot{\theta}_1) \operatorname{sen} \theta_1 - K_t \theta_1 ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m \rho^2 (\dot{\theta}+\dot{\theta}_1) - m R \rho \dot{\theta} \cos \theta_1 ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m \rho^2 (\ddot{\theta}+\ddot{\theta}_1) - m R \rho \ddot{\theta} \cos \theta_1 + m R \rho \dot{\theta} \dot{\theta}_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

Substituindo os valores das derivadas do Lagrangeano na equação

de Lagrange, dada por (2.2.1), se obtem

$$\ddot{\theta}_1 - \frac{R}{\rho}\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta_1 + \frac{K_t}{m\rho^2}\theta_1 = \left(\frac{R}{\rho}\cos\theta_1 - 1\right)\ddot{\theta} \tag{2.2.12}$$

Vamos, inicialmente, considerar o caso de um sistema não perturbado, isto é, com a rotação.

$$\dot{\theta} = \omega = c^{\underline{te}} \quad \text{e} \quad \ddot{\theta} = 0 \tag{2.2.13}$$

o que é bem conveniente para o estudo da estabilidade. Posteriormente teceremos alguns comentários sobre o que ocorre sem essa restrição. A equação torna-se finalmente:

$$\ddot{\theta}_1 - \frac{R}{\rho}\omega^2 \operatorname{sen}\theta_1 + \frac{K_t}{m\rho^2}\theta_1 = 0 \tag{2.2.14}$$

uma equação diferencial não linear em θ_1, já que ainda não foi feita a limitação a pequenos desvios da posição de equilíbrio.

Outra maneira pela qual se irá chegar à mesma equação será fornecida, neste caso simples, pela aplicação direta da lei de Newton (Housner[4]), que para uma partícula é a conhecida relação:

$$\sum \underset{\sim}{F} = m \underset{\sim}{a} \tag{2.2.15}$$

Na figura (2.2.3) é mostrado as componentes da aceleração absoluta $\underset{\sim}{a}$ a que está sujeita a massa m ' com a haste vibrando e girando em torno de 0.

Foi usada a decomposição

$$\underset{\sim}{a}_P = \underset{\sim}{a}_{0_1} + \underset{\sim}{a}_{P/0_1} \quad , \tag{2.2.16}$$

onde a_P e a_{0_1} são as acelerações absolutas de P e 0_1 respectivamente e $a_{P/0_1}$ é a aceleração de P num movimento em torno de 0_1 hipoteticamente fixo. Este é um movimento circular e a aceleração neste caso é escrita em termos de componente normal e tangencial. A velocidade com que é executado este movimento, usado como um passo intermediário para uma solução mais simples, vem a ser a velocidade absoluta de rotação da barra. Ela se compõe diretamente das duas velocidades de rotação $(\dot{\theta}+\dot{\theta}_1)\ \underset{\sim}{n}_z$ e portanto a componente normal da aceleração é $(\dot{\theta}+\dot{\theta}_1)\rho^2$ e a tangencial $(\ddot{\theta}+\ddot{\theta}_1)\rho$. Por outro lado o movimento de 0_1 também é circular e as duas componentes de aceleração estão indicadas na (fig. 2.2.3).

Isolando agora a massa m da ponta da barra e anotando as forças que agem (fig. 2.2.4) pode-se aplicar a lei

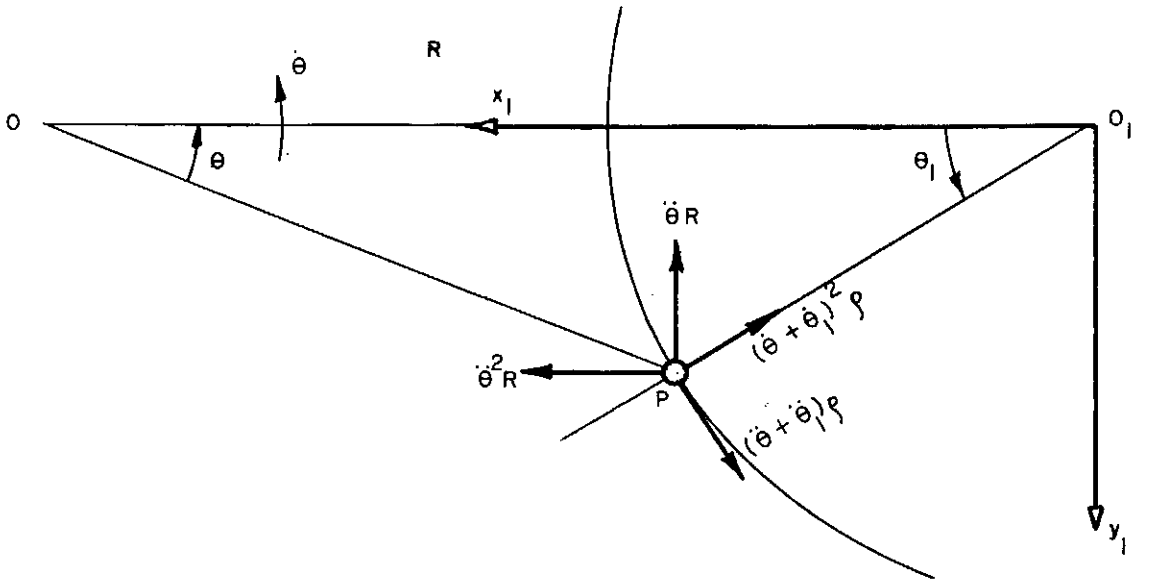


fig. 2.2.3

de Newton, equação (2.2.15). Fazendo-o inicialmente para a massa, em termos de componentes, segundo as duas direções ortogonais indicadas.

$$F = m\left[(\ddot{\theta}+\ddot{\theta}_1)\rho - \dot{\theta}^2 R\,\mathrm{sen}\theta_1 - \ddot{\theta} R\cos\theta_1\right]$$

$$N = m\left[-(\dot{\theta}+\dot{\theta}_1)^2\rho + \dot{\theta}^2 R\cos\theta_1 - \ddot{\theta} R\,\mathrm{sen}\theta_1\right] \qquad (2.2.17)$$

Por outro lado para eliminar as forças incógnitas, deve-se aplicar a mesma lei à haste. Considerando - a comoum corpo plano com movimento de rotação nesse plano, tem-se também pela lei de Newton aplicada a este caso:

$$\sum M_G = I_G \cdot \alpha$$

$$\sum \underset{\sim}{F} = m\,\underset{\sim}{a}_G \qquad (2.2.18)$$

onde o índice G indica referência ao centro de massa da haste.

Sendo porém a massa da barra desprezível, isto é, $I_G \simeq 0$ e $m \simeq 0$. A primeira equação de (2.2.18) leva a equação de movimento, ou seja

$$\sum M_G = 0$$

ou $$-F\rho + M = 0 \qquad (2.2.19)$$

Por ter sido desprezado o efeito do amortecimento na articulação 0_1, então o momento M provém apenas da força de restituição da mola.

$$M = K_t \, \theta_1 \tag{2.2.20}$$

que tinha sido suposta linear.

Substituindo agora os valores de F e M, obtem-se

$$\ddot{\theta}_1 - \frac{R}{\rho} \omega^2 \operatorname{sen} \theta_1 + \frac{K_t}{m\rho^2} \theta_1 = \left(\frac{R}{\rho} \cos \theta_1 - 1\right) \ddot{\theta} \tag{2.2.21}$$

as outras equações fornecem as relações de apoio em 0_1.

A equação (2.2.21) obtida pela lei de Newton, evidentemente é a mesma obtida pelo método de Lagrange ... (2.2.12).

2.3 - APROXIMAÇÃO LINEAR, ROTAÇÃO CRÍTICA

Para pequenas oscilações da massa em torno da sua posição de equilíbrio, no caso não perturbado, representado pela equação (2.2.14), faz-se uma aproximação linear do problema. Com $\operatorname{sen} \theta_1 \simeq \theta_1$ a equação do movimento da massa m fica:

$$\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{K_t}{m\rho^2} - \frac{R}{\rho} \omega^2 \right) \theta_1 = 0 \qquad (2.3.1)$$

Deve-se observar que a solução da equação acima (2.3.1) é um movimento oscilatório simples, desde que o coeficiente de θ_1 seja positivo, isto é,

$$\frac{K_t}{m\rho^2} - \frac{R}{\rho} \omega^2 > 0 \quad , \qquad (2.3.2)$$

caso contrário, o movimento é instável, ou seja, uma vez afastado da posição de equilíbrio $\theta_1 = 0$, ele não mais ali retorna. Da desigualdade acima é possível definir uma rotação crítica, limite superior da velocidade angular do anel, onde o movimento oscilatório é possível. Ela será

$$\omega_{cr}^2 = \frac{K_t}{mR\rho} \qquad (2.3.3)$$

Aproveitando o raciocínio físico utilizado na dedução através da lei de Newton e referindo-se à equação (2.3.1) e (2.2.17) nota-se que numa rotação superior à crítica, quando a barra for ligeiramente deslocada da sua posição de equilíbrio, a componente da força centrífuga, ortogonal à ela, exerce um momento maior do que a mola consegue suportar. O valor crítico é aumentado por uma mola mais rígida e diminuída pelos elementos que compõem o momento, em relação a 0_1, da referida compo

nente da força centrífuga, m, R, ρ. Observa-se inclusive que mesmo para $\rho > R$, isto é, uma haste de comprimento tal que a massa esteja do outro lado do centro de rotação 0, e onde a força centrífuga tracione a massa, o sistema também pode se instabilizar, inclusive a uma rotação menor. Referindo-se a (fig. 2.2.4) vê-se que nesse caso somente a força N muda de sentido porém o momento de F será maior.

O movimento oscilatório, em rotação inferior a crítica, é descrito em função das condições iniciais, (Den Hartog[3])

$$\theta_1 (t) = A \cos \omega_1 t + B \operatorname{sen} \omega_1 t \tag{2.3.4}$$

onde

$\omega_1 = \dfrac{K_t}{m\rho^2} - \dfrac{R\omega^2}{\rho}$, e A e B são determinados em função das condições iniciais

$$\begin{aligned} \theta_1 (0) &= \theta_{10} \\ \dot{\theta}_1 (0) &= \dot{\theta}_{10} \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Então como

$$\begin{aligned} \theta_1 &= A \cos \omega_1 t + B \operatorname{sen} \omega_1 t \\ \dot{\theta}_1 &= -\omega_1 A \operatorname{sen} \omega_1 t + \omega_1 B \cos \omega_1 t \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

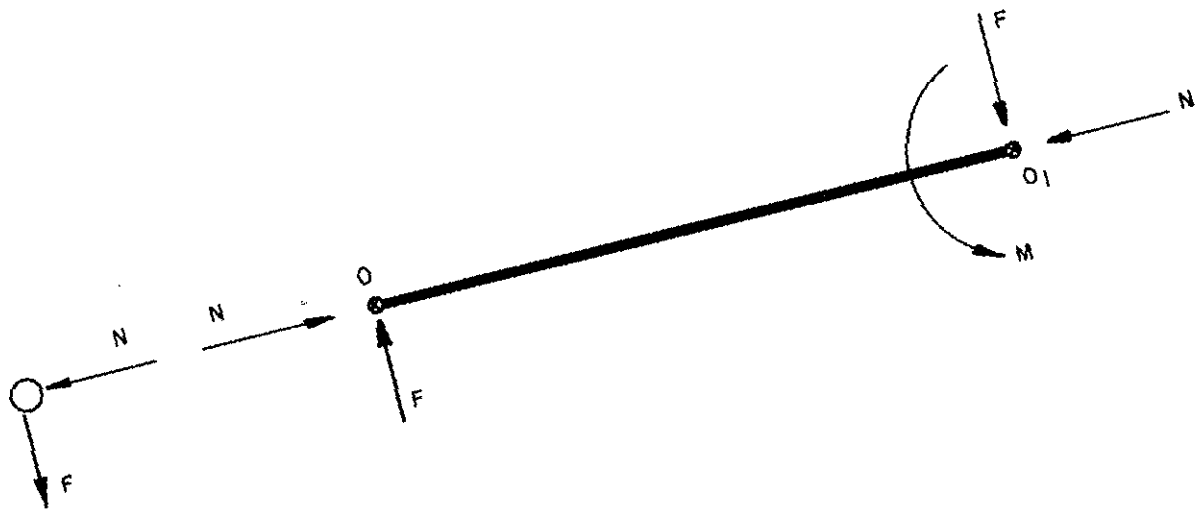


fig. 2.2.4

os valores de A e B são determinados de (2.3.6) com as condições iniciais (2.3.5)

$$A = \theta_{10} \qquad e \qquad B = \frac{\dot{\theta}_{10}}{\omega_1} \tag{2.3.7}$$

ou finalmente substituindo na solução (2.3.4) se obtem:

$$\theta_1 = \theta_{10} \cos \omega_1 t + \frac{\dot{\theta}_{10}}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t \tag{2.3.8}$$

Para finalizar este item vamos retomar a equação (2.2.12) e estudar o caso especial de um sistema perturbado, isto é, acelerado de uma forma constante

$$\ddot{\theta} = \dot{\omega} = c^{\underline{te}} \tag{2.3.9}$$

A equação pode ser linearizada de forma análoga e será:

$$\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{k_t}{m\rho^2} - \frac{R}{\rho} \omega^2\right) \theta_1 = \left(\frac{R}{\rho} - 1\right) \dot{\omega} \tag{2.3.10}$$

A análise da rotação crítica é a mesma, altera-se porém a posição de equilíbrio da haste, já que a intensidade de perturbação é constante. Fazendo uma mudança de variável

$$\theta_1 = \bar{\theta}_1 + \frac{(\frac{R}{\rho} - 1)\dot{\omega}}{\frac{K_t}{m\rho^2} - \frac{R}{\rho}\omega^2} \quad , \tag{2.3.11}$$

através da qual fica definida a nova posição de equilíbrio .... $\bar{\theta}_1 = 0$ o problema vai se reduzir ao caso da equação homogênea , (2.3.1), já analizada. Observe-se que, como é esperado fisicamente, o deslocamento é oposto ao movimento $\theta_1 > 0$ para $R > \rho$ e no sentido do movimento para $R < \rho$.

2.4 - ESTUDO GERAL DA ESTABILIDADE

Considerando a equação diferencial não linear (2.2.14), estuda-se seus estados de equilíbrio no plano fase, com a ajuda do critério de Ljapunov.

Seja dado o sistema

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= P(u, v) \simeq a\,u + b\,v \\ \frac{dv}{dt} &= Q(u, v) \simeq c\,u + d\,v \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

onde u e v são as coordenadas de ponto representativo no plano fase u v, P(u, v), Q(u, v) são funções analíticas não linea -

res das variáveis u e v, e a, b, c, d são os coeficientes da aproximação linear dessas funções nas vizinhanças de uma posi - ção de equilíbrio, a análise do movimento pode ser feita no plano fase. A equação característica do sistema (2.4.1) é

$$s^2 + p\,s + q = 0 \tag{2.4.2}$$

com $p = -(a + d)$ e $q = ad - cb$. A equação (2.4.2) é obtida quando se introduz as soluções

$$\begin{aligned} u &= C_1\, e^{st} \\ v &= \tau C_1\, e^{st} \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

no sistema (2.4.1); τ é um coeficiente de distribuição; $C_1 \neq 0$ para excluir os valores triviais $u=0$ e $v=0$, os quais corres - pondem ao ponto singular único do sistema.

Os pontos de equilíbrio do sistema são obtidos quando se tem

$$\begin{aligned} P(u, v) &= 0 \\ Q(u, v) &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

e, sendo (u_o, v_o) um ponto de equilíbrio, então,

$$P'_u\ (u_o,\ v_o) = a \qquad Q'_u\ (u_o,\ v_o) = c$$

$$P'_v\ (u_o,\ v_o) = b \qquad Q'_v\ (u_o,\ v_o) = d \tag{2.4.5}$$

Segundo um teorema de Ljapunov (Butenin[2]) sobre a estabilidade das posições de equilíbrio, os pontos contidos no plano pq onde se tem $q < 0$, o estado de equilíbrio do sistema é instável. Parte do plano onde $q > 0$, para $p > 0$, o estado de equilíbrio do sistema é assintoticamente estável e para $p < 0$ o estado de equilíbrio do sistema é instável. A (fig. 2.4.1) retrata bem o que foi dito neste parágrafo.

Para o caso do problema em estudo, será aplicado este teorema de Ljapunov na determinação das regiões de estabilidade.

Seja a equação (2.2.14) do movimento da haste rígida

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{K_t}{m\rho^2}\,\theta_1 - \frac{R\omega^2}{\rho}\ \text{sen}\ \theta_1 = 0$$

introduzindo

$$\theta_1 = u$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{u} = v \tag{2.4.6}$$

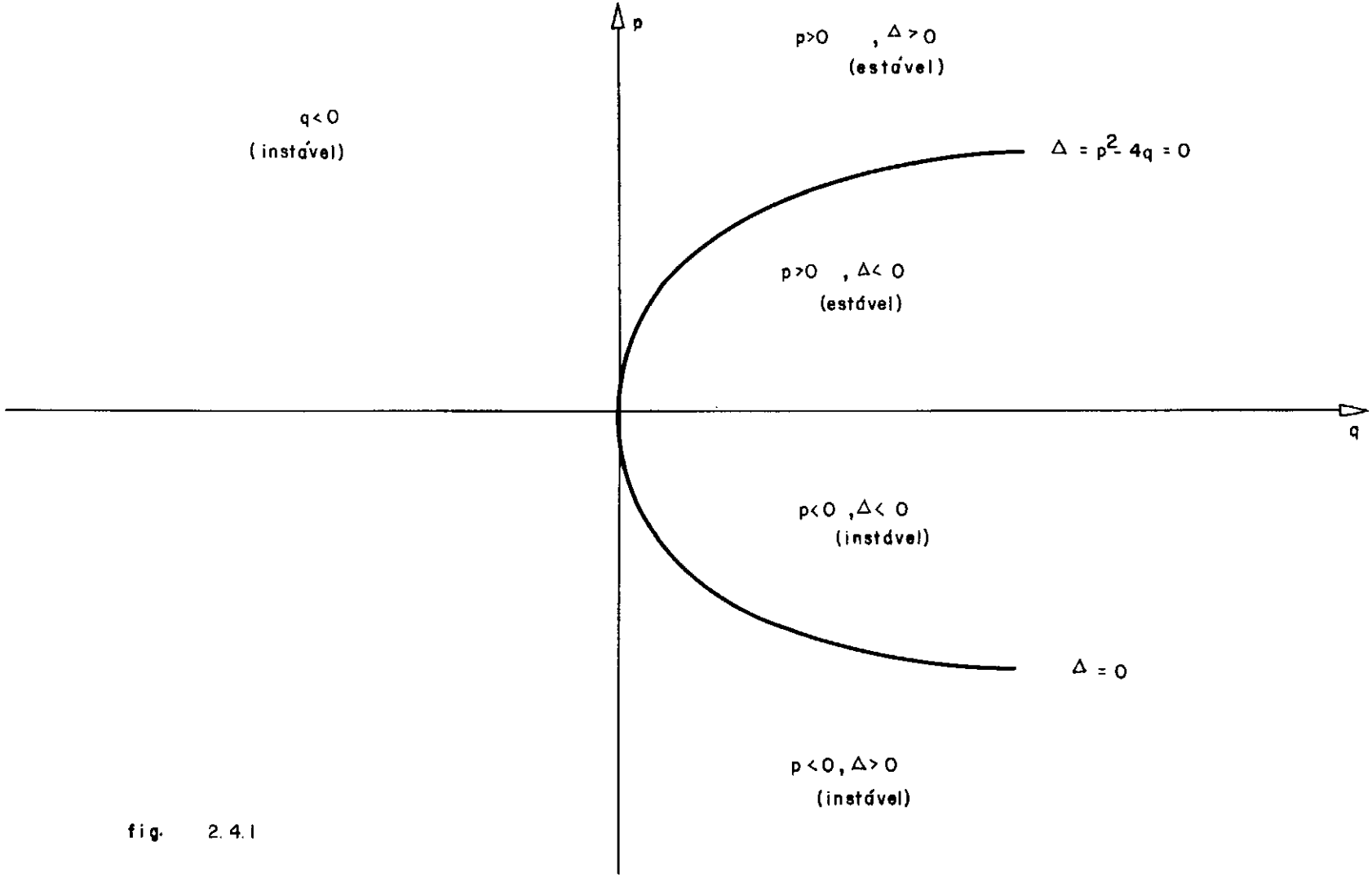

p
q
p>0 , Δ > 0
(estável)
q < 0
(instável)
Δ = p² - 4q = 0
p>0 , Δ< 0
(estável)
p<0 ,Δ< 0
(instável)
Δ = 0
p < 0, Δ> 0
(instável)

fig. 2.4.1

se obtem,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K_t}{m\rho^2} u + \frac{R\omega^2}{\rho} \text{ sen } u \tag{2.4.7}$$

$$\frac{du}{dt} = v$$

Os pontos de equilíbrio do sistema são obtidos quando se faz,

$$\begin{aligned} P(u, v) &= v = 0 \\ Q(u, v) &= -\frac{K_t}{m\rho^2} u + \frac{R\omega^2}{\rho} \text{ sen } u = 0 \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Resultando em,

$$\text{sen } u = \frac{K_t}{m\rho R\omega^2} u \tag{2.4.10}$$

Sendo $v = 0$, os pontos singulares ou de equilíbrio do sistema dado por (2.4.9) estarão localizados sobre o eixo u no plano fase uv. E como $\frac{K_t}{m\rho R\omega^2} = A$ é sempre positivo, as funções u e sen u terão sempre o mesmo sinal. Isto ocorre para valores' de u

$$0 < u^{(n)} < \pi \tag{2.4.11}$$

onde $u^{(n)}$ é um ponto genérico de equilíbrio do sistema, considerando a variação de u entre zero a 2π radianos, (fig.2.4.2).

Os valores de a, b, c e d são

$$a = P'_u = 0$$

$$b = P'_v = 1$$

$$c = Q'_u = -\frac{K_t}{m\rho^2} + \frac{R\omega^2}{\rho}\cos u^{(n)} \qquad (2.4.12)$$

$$d = Q'_v = 0$$

com os valores de

$$p = 0$$

$$q = \frac{K_t}{m\rho^2} - \frac{R\omega^2}{\rho}\cos u^{(n)} \qquad (2.4.13)$$

Pelo critério de Ljapunov tem-se instabilidade quando,

$$p = 0$$

$$q < 0$$

e, portanto, para garantir instabilidade deve-se saber quando $q < 0$:

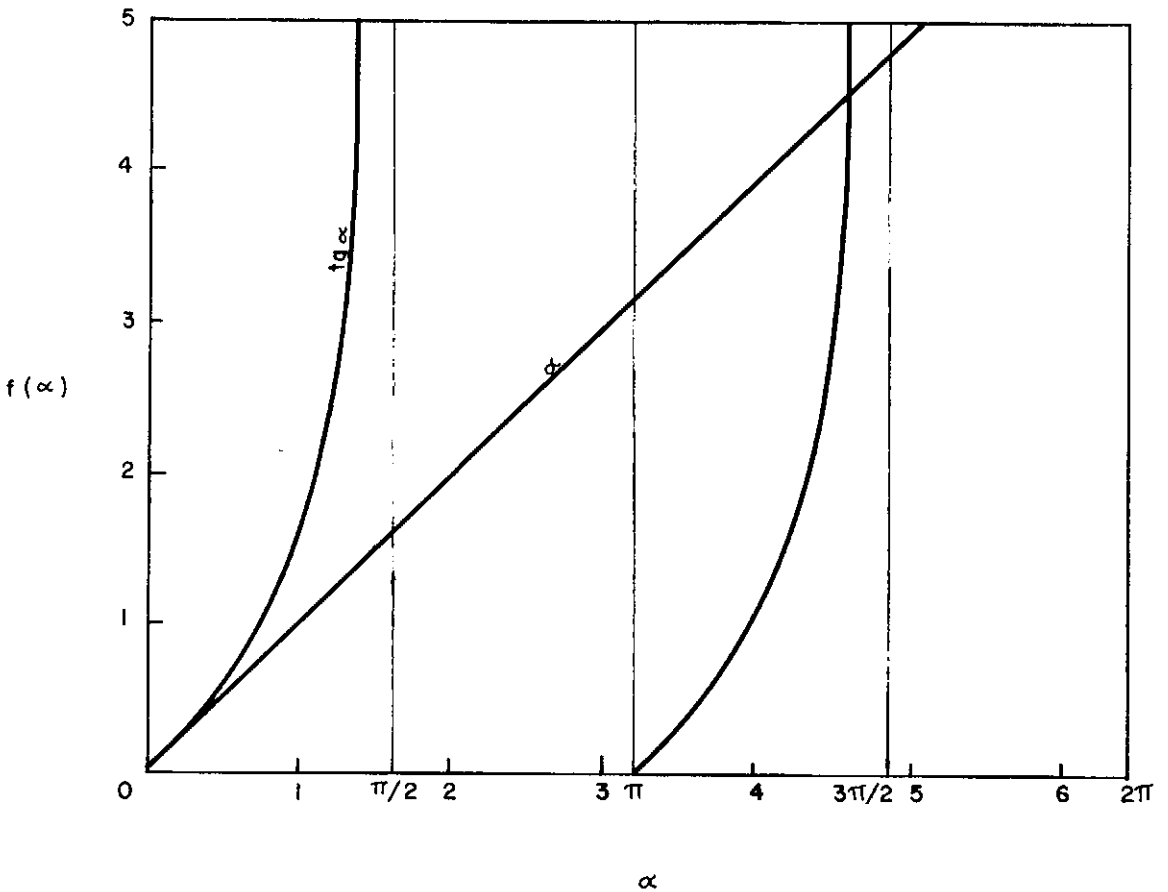


fig. 2.4.2

$$\frac{K_t}{m\rho^2} - \frac{R\omega^2}{\rho} \cos u^{(n)} < 0 \tag{2.4.14}$$

onde

$$\cos u^{(n)} > \frac{K_t}{m\rho R\omega^2} \quad \text{ou} \quad \cos u^{(n)} > A.$$

Sendo A maior que zero, sempre, o cos $u^{(n)}$ o será também. Porém através de A, $u^{(n)}$ está definido, pois é raiz da equação (2.4.10).

Então reunindo as condições:

$$\cos u^{(n)} > A \Rightarrow \cos u^{(n)} > \frac{\operatorname{sen} u^{(n)}}{u^{(n)}}$$

ou (2.4.15)

$$\operatorname{tg} u^{(n)} < u^{(n)},$$

Logo, não é possível se ter valores de $u^{(n)}$ que satisfaçam ao mesmo tempo

$$\begin{aligned} &\cos u^{(n)} > 0 \\ &\operatorname{tg} u^{(n)} < u^{(n)} \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

no intervalo de 0 à π. Não se pode, portanto, garantir instabilidade neste intervalo. Logo não há pontos de equilíbrio instável em $0 < u^{(n)} < 2\pi$, (fig. 2.4.2).

Observe-se que o ponto de equilíbrio para $u^{(n)} = 0$ com $A < 1$, não pode ser tratado exatamente da mesma forma (em (2.4.15) foi feito sen $u^{(n)}/u^{(n)}$) e a conclusão pode ser tirada diretamente de (2.4.14), trata-se de equilíbrio instável!

Segundo Ljapunov quando

$$p = 0$$

$$q > 0$$

o sistema linear é oscilatoriamente estável, porém, nada se pode afirmar sobre o estado de equilíbrio do sistema não linear.

Parte-se então, para uma nova tentativa, fazendo o estudo diretamente pela equação do movimento (2.2.14). Definindo um $\bar{u}$ em torno da nova posição de equilíbrio, veja (fig.2.4.3).

$$u = u^{(n)} + \bar{u} \tag{2.4.17}$$

e, substituindo (2.4.17) na equação do movimento (2.2.14) tem-se

$$\ddot{\bar{u}} + \frac{K_t}{m\rho^2}(u^{(n)} + \bar{u}) - \frac{R\omega^2}{\rho}\left[\text{sen } u^{(n)} \cos \bar{u} + \text{sen } \bar{u} \cos u^{(n)}\right] = 0$$

ou

$$\ddot{\bar{u}} + \left[\frac{K_t}{m\rho^2} - \frac{R\omega^2}{\rho}\cos u^{(n)}\right]\bar{u} = \frac{R\omega^2}{\rho}\text{sen } u^{(n)} - \frac{K_t}{m\rho^2}u^{(n)} \tag{2.4.18}$$

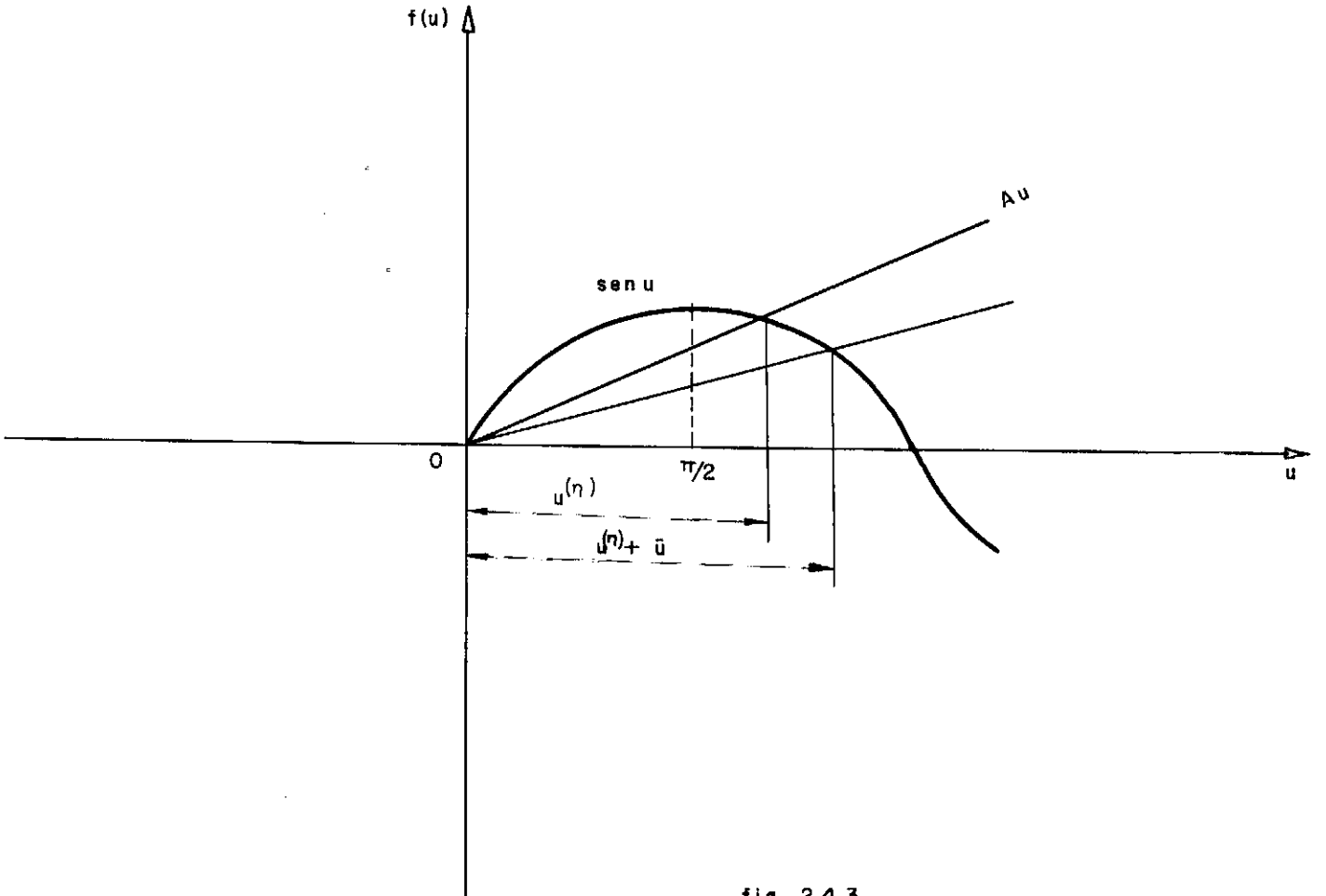


fig. 2.4.3

A solução da equação (2.4.17) é oscilante enquanto $\frac{K_t}{m\rho^2} - \frac{R\omega^2}{\rho} \cos u^{(n)} > 0$ ou $q > 0$. Do que se conclui' facilmente, que para os pontos de equilíbrio $u^{(n)}$ do sistema, para os quais $p = 0$ e $q > 0$, o estado de equilíbrio do sistema é estável, isto é, quando

$$\cos u^{(n)} < \frac{K_t}{m\rho R\omega^2}$$

onde

$u^{(n)}$ é obtido de

$$\operatorname{sen} u^{(n)} = \frac{K_t}{m\rho R\omega^2} \quad u^{(n)}$$

CAPÍTULO III

ESTUDO ANALÍTICO DA HASTE FLEXÍVEL

3.1 - MODELO FÍSICO

Considera-se uma haste elástica, sem massa própria, com uma massa m concentrada em uma das extremidades e engastada, pela extremidade oposta, na parte interna de um anel rígido, que gira com velocidade angular ω, em torno de um eixo vertical, passando pelo seu centro.

A haste tem comprimento ρ e rigidez EI, onde E é o módulo de elasticidade e I é o momento de inércia polar por área de uma secção transversal. O raio do anel R caracteriza o movimento de rotação do ponto de engaste da haste. O conjunto pode ser visualizado também pela (fig. 2.1).

Os sistemas de referências são os mesmos do Capítulo II, isto é, $Oxyz$ inercial e $O_1x_1y_1z_1$ móvel, onde θ é o deslocamento do sistema móvel em relação ao inercial. O afastamento da barra é $y_1(x_1)$ e $x_1 = \xi$, $y_1 = \eta$ são as coordenadas de m (fig. 3.1). No estudo da haste flexível, que é suposta longa e delgada, é mantida ao longo de todo trabalho, a hipótese de pequenas deflexões em relação a sua posição de equilíbrio. Consequentemente pode-se assumir desprezível a variação de ξ, fazendo $\xi = \rho$ sempre, e a coordenada que define a

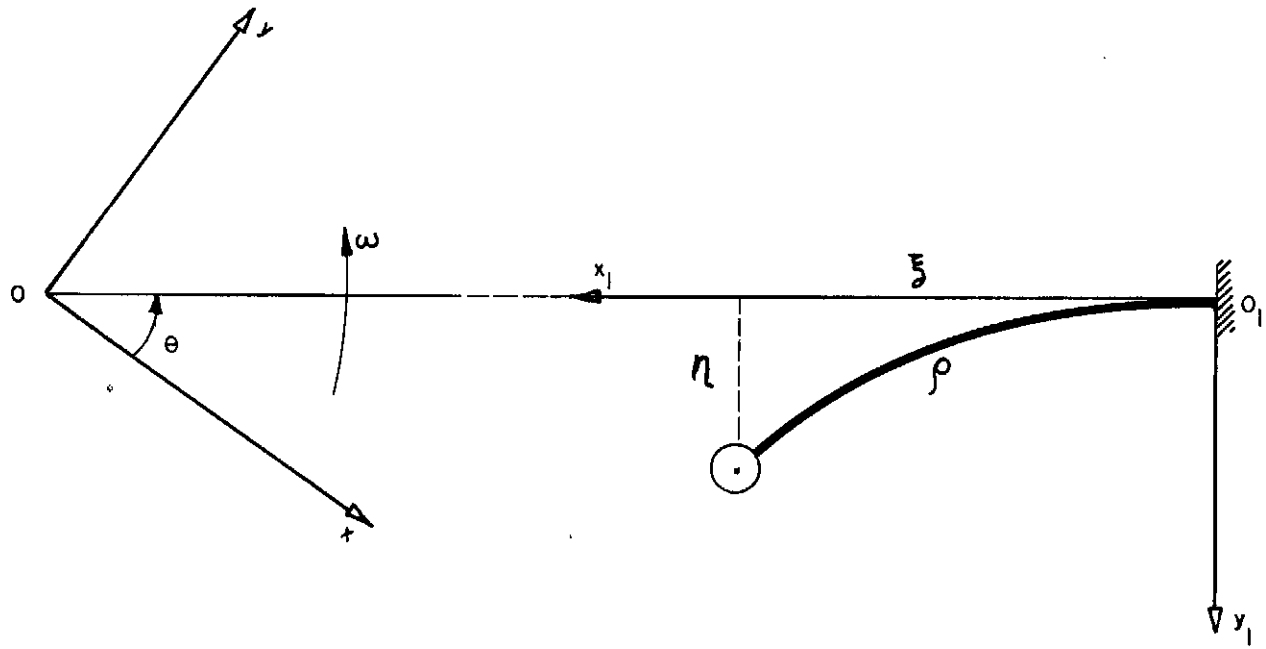


fig. 3.1

posição da massa passa a ser η ($\xi = \rho$). A forma da secção transversal da haste é tal que a vibração no plano do anel é preponderante e pode ser estudada separadamente.

Além do mais não serão considerados efeitos de amortecimento, de qualquer espécie, no movimento da haste.

3.2 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

O modelo matemático do sistema será obtido pela aplicação da lei de Newton, que já no capítulo anterior deu bons resultados no sentido de permitir uma boa interpretação das características físicas do problema. Para tanto é necessário cortar a massa da ponta da barra e substituir sua ação pelas forças correspondentes. A seguir, por um lado pela aplicação da lei de Newton à partícula de massa m relaciona essas forças com o seu movimento, por outro lado, a barra sob ação dessas forças pode ser estudada como um problema de estática, pois por desprezar sua massa não existem os efeitos da aceleração como fica claro ao se examinar a (fig. 3.1).

3.3 - ESTUDO DA MASSA

De uma forma geral, o movimento plano de uma partícula de massa m sujeita a forças F_1 e F_2, num referen

cial móvel (fig. 3.3) que executa um movimento de rotação de raio R com velocidade angular ω e aceleração angular $\dot{\omega}$, pode ser descrito, também, pela lei de Newton (equação 2.2.15). (Housmer[4]), onde:

$$\underset{\sim}{F} = F_2 \underset{\sim}{n}_{x_1} - F_1 \underset{\sim}{n}_{y_1} \tag{3.3.1}$$

e a aceleração absoluta $\underset{\sim}{a}_P$ a que está sujeita a partícula é calculada por

$$\underset{\sim}{a}_P = \underset{\sim}{a}_{0_1} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}) + 2\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v}_{rel} + \underset{\sim}{a}_{rel} + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{r} \tag{3.3.2}$$

onde;

$\underset{\sim}{a}_{0_1}$ - aceleração absoluta de 0_1,

$$\underset{\sim}{a}_{0_1} = R\omega^2 \underset{\sim}{n}_{x_1} - R\dot{\omega} \underset{\sim}{n}_{y_1}$$

$\underset{\sim}{\omega}$ - velocidade angular do sistema relativo, $\underset{\sim}{\omega} = \omega \underset{\sim}{n}_z$

$\dot{\underset{\sim}{\omega}}$ - aceleração angular do sistema relativo, $\dot{\underset{\sim}{\omega}} = \dot{\omega} \underset{\sim}{n}_z$

$\underset{\sim}{r}$ - vetor entre 0_1 e P, $\underset{\sim}{r} = x_1 \underset{\sim}{n}_{x_1} + y_1 \underset{\sim}{n}_{y_1}$

$\underset{\sim}{v}_{rel}$ - velocidade de P no sistema relativo

$$\underset{\sim}{v}_{rel} = \dot{x}_1 \underset{\sim}{n}_{x_1} + \dot{y}_1 \underset{\sim}{n}_{y_1}$$

$\underset{\sim}{a}_{rel}$ - aceleração de P no sistema relativo,

$$\underset{\sim}{a}_{rel} = \ddot{x}_1 \underset{\sim}{n}_{x_1} + \ddot{y}_1 \underset{\sim}{n}_{y_1}.$$

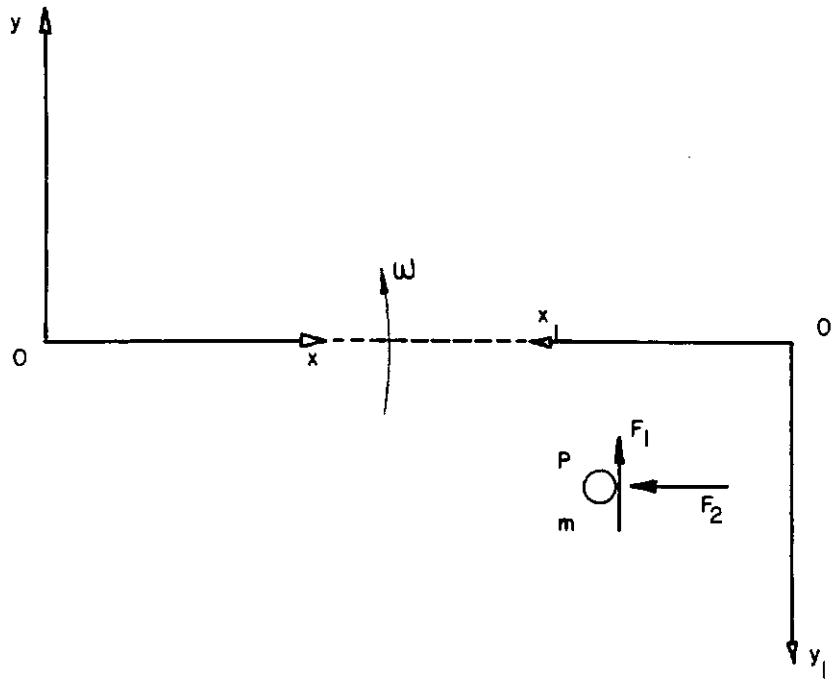


fig. 3.3

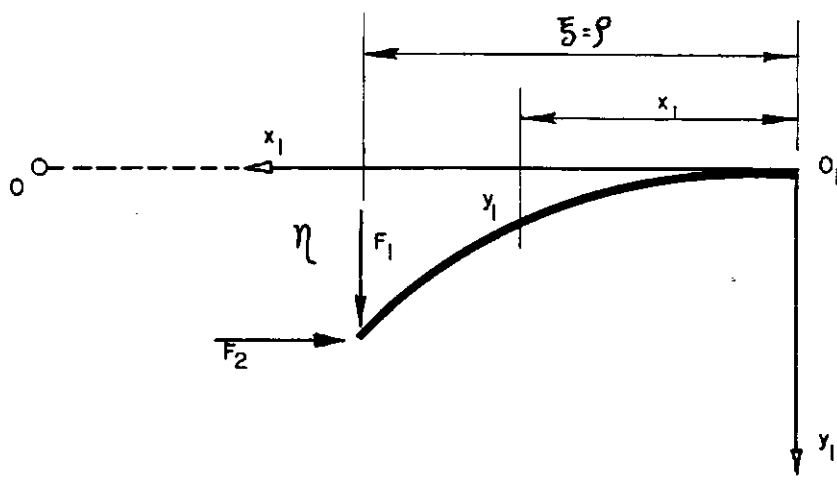


fig. 3.4

Executando as operações indicadas e substituindo na lei de New ton

$$m\ddot{x}_1 - m\omega^2 x_1 - 2m\omega\dot{y}_1 - m\dot{\omega}y_1 = F_2 - m\omega^2 R$$

$$m\ddot{y}_1 - m\omega^2 y_1 + 2m\omega\dot{x}_1 + m\dot{\omega}x_1 = -F_2 + m\dot{\omega}R$$

(3.3.3)

Encontrando-se esta partícula, todavia, na extremidade de uma haste de comprimento ρ, de acordo com a hipótese feita anteriormente considera-se $x_1 = \xi = \rho = c^{\underline{te}}$ e $y_1 = \eta$

$$-2m\omega\dot{\eta} - m\dot{\omega}\eta = F_2 - m\omega^2(R-\rho)$$

$$m\ddot{\eta} - m\omega^2\eta = -F_1 + m\dot{\omega}(R-\rho),$$

ou também,

$$F_1 = m\dot{\omega}(R-\rho) + m\omega^2\eta - m\ddot{\eta}$$

(3.3.4)

$$F_2 = m\omega^2(R-\rho) - m\dot{\omega}\eta - 2m\omega\dot{\eta}$$

onde,

1. $m\ddot{\eta}$ - representa a força de inércia de m em relação ao sistema móvel

2. $2m\,\omega\,\dot{\eta}$ - representa a força de Coriolis.

3. $m\,\omega^2\,(R-\rho)$ e $m\,\omega^2\,\eta$ - as componentes da força centrífuga.

4. $m\,\dot{\omega}\,(R-\rho)$ e $m\,\dot{\omega}\,\eta$ - as componentes da força devido à aceleração angular do sistema móvel.

3.4 - ESTUDO DA HASTE

Será inicialmente estudada a posição de equilíbrio de uma haste sob ação de forças F_1 e F_2, (fig. 3.4) . Resume-se este problema a uma simples investigação estática.

Estabelece-se uma hipótese adicional, simplificando a expressão da curvatura da haste, isto é, aproximando

$$\left[1 + \left[\frac{dy_1}{dx_1}\right]^2\right]^{3/2} \simeq 1$$

Esta hipótese é coerente com aquela feita inicialmente, limitando o estudo para pequenas deformações na haste. Além disso, como será observado oportunamente, vai limitar a validade do resultado para as primeiras formas de vibrar do conjunto haste-massa.

Sabe-se que a curvatura $\frac{1}{\bar{r}}$ da linha elástica de uma viga submetida essencialmente a um momento fletor é dada por (Timoshenko [12]), onde $\bar{r}$ é o raio da curvatura.

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{M}{EI} \qquad (3.4.1)$$

Quando a curvatura é pequena, essa expres -

são é aproximada através de

$$\frac{1}{\bar{r}} \approx - \frac{d^2y}{dx^2}$$

ou seja

$$EI\ d^2y/_{dx^2} = - M \qquad (3.4.2)$$

Aplicado ao caso da (fig. 3.4), tem-se

$$y_1'' = \frac{1}{EI}\left[F_1(\ \rho - x_1\ ) + F_2\ (\ \eta - y_1\ )\right],$$

onde

$$' = \frac{d}{dx}$$

obtendo-se assim

$$y_1'' + \frac{F_2}{EI}\ y_1 = - \frac{F_1}{EI}\ x_1 + \left(\frac{F_1\ \rho + F_2\ \eta}{EI}\right) \qquad (3.4.3)$$

ou

$$y_1'' + A_1\ y_1 = A_2\ x_1 + A_3 \qquad (3.4.4)$$

com os valores de

$$A_1 = \frac{F_2}{EI},\quad A_2 = - \frac{F_1}{EI} \quad e \quad A_3 = \frac{F_1\ \rho + F_2\ \eta}{EI} \qquad (3.4.5)$$

Essa equação diferencial descreve a linha elástica da haste sob ação de forças F_1 e F_2. Usando a 3a. Lei de Newton, da igualdade entre ação e reação, juntam-se os estudos de (3.3) e (3.4) e essas forças passam a ser resultantes da inércia da massa da partícula. Porém como o movimento dessa partícula é vinculado à ponta da haste, determina-se o movimento desta última pela (equação 3.4.4).

A solução geral dessa equação é a soma da solução da equação homogênea com uma solução particular da equação completa, ou seja

$$y_1 = (y_1)_H + (y_1)_P \tag{3.4.6}$$

O aspecto da solução depende fundamentalmente do sinal de A_1, isto é, do sinal de F_2. Por outro lado, o sinal de F_2 (ver fórmula 3.3.4), considerada a haste na posição de equilíbrio, isto é, com $\eta = 0$, varia da seguinte forma

$$\begin{aligned} F_2 &> 0 \qquad R > \rho \\ F_2 &< 0 \qquad R < \rho \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Com a haste vibrando, F_2 pode ou não permanecer com o mesmo sinal, dependendo da influência relativa dos diversos termos em (3.3.4). Se porém a força centrífuga for bem maior que as outras, F_2 não muda de sinal e a análise torna-se mais simples. Vamos neste capítulo examinar apenas o caso em

que $F_2 > 0$, deixando para mais adiante outras hipóteses. Então

$$(y_1)_H = B_1 \text{ sen } \sqrt{A_1}\, x_1 + B_2 \cos \sqrt{A_1}\, x_1$$

$$(y_1)_P = \frac{A_2}{A_1} x_1 + \frac{A_3}{A_1} \tag{3.4.8}$$

ou

$$y_1(x_1) = B_1 \text{ sen } \sqrt{A_1}\, x_1 + B_2 \cos \sqrt{A_1}\, x_1 + \frac{A_2}{A_1} x_1 + \frac{A_3}{A_1} \tag{3.4.9}$$

Entrando com as condições de contorno de uma haste engastada em $x_1 = 0$

$$y_1(0) = 0 \quad \text{e} \quad y_1'(0) = 0 \tag{3.4.10}$$

se obtem

$$B_1 = -\frac{A_2 \sqrt{A_1}}{A_1^2} \quad \text{e} \quad B_2 = -\frac{A_3}{A_1} \tag{3.4.11}$$

Levando (3.4.11) em (3.4.9) com os valores de A_1, A_2 e A_3 dados por (3.4.5), tem-se

$$y_1(x_1) = \frac{F_1}{F_2}\sqrt{\frac{EI}{F_2}}\ \text{sen}\sqrt{\frac{F_2}{EI}}\ x_1 -$$

$$- \frac{F_1\ \rho + F_2\ \eta}{F_2}\cos\sqrt{\frac{F_2}{EI}}\ x_1 -$$

$$- \frac{F_1}{F_2}\ x_1 + \frac{F_1\ \rho + F_2\ \eta}{F_2} \qquad (3.4.12)$$

Esta é a equação da linha elástica da haste.

Como interessa especificamente o estudo do movimento da partícula, que está na ponta da haste, calcula-se (3.4.12) em $x_1 = \rho$, obtendo

$$y_1(x_1=\rho) = \frac{F_1}{F_2}\sqrt{\frac{EI}{F_2}}\ \text{tg}\left[\sqrt{\frac{F_2}{EI}}\ \rho\right] - \frac{F_1}{F_2}\ \rho \qquad (3.4.13)$$

Esta equação, quando reunida às expressões (3.3.4) fornece a equação de movimento da partícula e, portanto, o modelo matemático do problema em estudo.

3.5 - COMENTÁRIOS

Como foi salientado no ítem anterior, F_2 (equação 3.3.4) pode ser sempre maior, sempre menor que zero, ou então alterar seu sinal periodicamente. Tudo depende essencialmente da posição da massa em relação ao centro de rotação. Conforme o caso, a solução para a haste será completamente diferen-

te.

Analisamos nos próximos ítens apenas o caso para $F_2 > 0$, deixando para outro capítulo o caso $F_2 < 0$.

O conjunto de equações (3.3.4) e (3.4.13), formam o modelo matemático do sistema, dentro da limitação de pequenos deslocamentos da haste.

Associando a deflexão da ponta da haste ao deslocamento da massa $y_1 = \eta$ em (3.4.13), obtém-se a expressão mais simples

$$m\ddot{\eta} + \left(\frac{F_2}{\sqrt{\frac{EI}{F_2}}\ tg\left(\sqrt{\frac{F_2}{EI}}\ \rho\right) - \rho} - m\,\omega^2 \right) \eta = m\,\dot{\omega}\,(R-\rho) \tag{3.5.1}$$

$$F_2 = m\,\omega^2\,(R-\rho) - 2m\,\omega\,\dot{\eta} - m\,\dot{\omega}\,\eta$$

Como se trata de um problema não-linear, para a sua solução será, antes de mais nada, procurada uma aproximação linear. E a que primeiramente se faz lembrar, é a linearização da tangente. Ela implica em outra aproximação que será discutida posteriormente.

3.6 - NORMALIZAÇÃO E ADIMENSIONALIZAÇÃO

Para conseguir uma sintetização dos parâme-

tros do problema e, para tornar mais adequada a um estudo numérico, é imprescindível normalizar e adimensionalizar (3.5.1). É muito conveniente introduzir, para tanto, os seguintes parâmetros:

$$C^2 = \frac{m\,\rho^3}{3\,EI}$$

$$\gamma = \frac{R}{\rho} - 1$$

$$\bar{\eta} = \frac{2}{\rho}\,\eta$$

$$\bar{\omega} = C\,\omega \tag{3.6.1}$$

$$\tau = \frac{1}{C}\,t$$

com $\frac{d}{d\tau} = '$ e $\alpha = \sqrt{\frac{F_2}{EI}}\,\rho$

Então:

$$\bar{\eta}'' + \left(\frac{\frac{\alpha^2}{3}}{\frac{tg\,\alpha}{\alpha} - 1} - \bar{\omega}^2 \right) \bar{\eta} = 2\,\gamma\,\bar{\omega}' \tag{3.6.2}$$

$$\frac{\alpha^2}{3} = \gamma\,\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}\,\bar{\eta}' - \frac{1}{2}\,\bar{\omega}'\,\bar{\eta}$$

Vê-se que a solução deste sistema não depende mais diretamente das características de inércia da barra, de-

pendendo, somente, de um único parâmetro geométrico γ, após a normalização.

Chave desta simplificação é o termo $\frac{1}{c^2} = \frac{3\,EI}{m\,\rho^3}$ que representa a freqüência natural de vibração livre de uma viga em balanço, de comprimento ρ, rigidez EI e massa total m concentrada na extremidade livre, (TIMOSHENKO [11]).

Observando (3.6.2) pode-se obter diretamente alguns resultados quanto aos limites de estabilidade e mostrar a conveniência de definir a nova velocidade angular $\bar{\omega}$.

Introduzindo-se a função

$$f(\alpha) = \frac{\frac{\alpha^2}{3}}{\frac{tg\,\alpha}{\alpha} - 1} \tag{3.6.3}$$

sabe-se que só é possível numa oscilação estável quando $f(\alpha) - \bar{\omega}^2 > 0$.

Porém

$$\lim_{\alpha \to 0} f(\alpha) = 1 \tag{3.6.4}$$

e

$$f'(\alpha) < 0 \tag{3.6.5}$$

como será verificado posteriormente, existem faixas de estabilidade. Na primeira delas, o valor máximo de $f(\alpha)$ é em $\alpha = 0$, isto é, $f(\alpha=0) = 1$. Portanto, a rotação crítica a partir da qual o sistema se instabiliza, tem um limite superior e é devido

a (3.6.3)

$$\bar{\omega} < 1.$$

Esse resultado mostra a conveniência numérica em usar $\bar{\omega}$. Por outro lado, lembra-se que a condição $F_2 > 0$ em (3.3.4), exige que, em (3.6.2), $\gamma\,\bar{\omega}^2$ seja suficientemente grande para que $\alpha^2 > 0$.

3.7 - APROXIMAÇÃO LINEAR POR DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE

Neste ítem, procura-se uma aproximação linear para o modelo matemático dado por (3.6.2). Será necessária uma série de restrições que limitam a generalidade da solução. Por outro lado, essa solução é obtida facilmente a partir da equação linear.

Inicialmente, para que se possa pensar em linearização, é necessário desenvolver a tangente em série.

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{5} + \frac{2\,\alpha^5}{15} + \frac{17\,\alpha^3}{315} + \ldots\ldots \qquad (3.7.1)$$

e com a primeira hipótese restritiva $\alpha < 1$, cortar esta série num ponto conveniente.

Em primeira tentativa, tomam-se os dois primeiros termos da série e, substituindo-se em (3.6.2)

$$\bar{\eta}'' + \left[\frac{\frac{\alpha^2}{3}}{\frac{1}{2}\alpha + \frac{\alpha^3}{3} - 1} - \bar{\omega}^2 \right] \bar{\eta} = 2\,\gamma\,\bar{\omega}' \qquad (3.7.2)$$

Daí, se obtém o valor crítico de $\bar{\omega}$, que corresponde a

$$\omega = \frac{1}{C} = \frac{3\,EI}{m\,\rho^3} \qquad (3.7.3)$$

ou seja, como já foi mencionado, à freqüência de vibração da haste em balanço, com uma massa na ponta.

Trata-se, todavia, de uma aproximação bastante grosseira, que será refinada com o uso de mais um termo da série. Nesse caso

$$\bar{\eta}'' + \left(\frac{\frac{\alpha^2}{3}}{\frac{\alpha^2}{3} + \frac{2\,\alpha^4}{15}} - \bar{\omega}^2 \right) \bar{\eta} = 2\,\gamma\,\bar{\omega}'$$

ou

$$\bar{\eta}'' + \left(\frac{1}{1 + \frac{2\,\alpha^2}{5}} - \bar{\omega}^2 \right) \bar{\eta} = 2\,\gamma\,\bar{\omega}' \qquad (3.7.4)$$

lembrando que

$$\frac{\alpha^2}{3} = \gamma\,\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}\,\bar{\eta}' - \frac{1}{2}\,\bar{\omega}'\,\bar{\eta} \qquad (3.7.5)$$

é limitado o estudo à aproximação do limite de estabilidade do sistema, isto é, considerando $\bar{\omega}' = 0$, substitui-se (3.7.5) em (3.7.4). Nesse resultado estão presentes vários elementos não-lineares sob a forma de produtos, como ($\bar{\eta}''.\bar{\eta}'$, $\bar{\eta}'.\bar{\eta}$) e que podem ser linearizados pela técnica usual de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio (η pequeno). A equação resultante é

$$\bar{\eta}'' + \left(\frac{1 - \bar{\omega}^2 - \frac{6}{5}\gamma\,\bar{\omega}^4}{1 + \frac{6}{5}\gamma\,\bar{\omega}^2} \right) \bar{\eta} = 0 \qquad (3.7.6)$$

Outra maneira de induzir esta linearização, a partir de (3.7.4) e (3.7.5), é lembrar que $F_2 > 0$, ou seja, em (3.7.5) o termo $\gamma\,\bar{\omega}^2$ é preponderante.

Para a (3.7.6) resultar numa oscilação estável

$$1 - \bar{\omega}^2 - \frac{6}{5}\gamma\,\bar{\omega}^4 > 0 \qquad (\bar{\omega}^2 > 0)$$

ou então

$$\bar{\omega} < \sqrt{\frac{5}{12\,\gamma}\left(\sqrt{1 + \frac{24}{5}\gamma} - 1\right)} \qquad (3.7.7)$$

podendo o limite superior (lado direito da desigualdade) ser chamado valor crítico. A representação desse valor crítico é feita na (fig. 3.8.2), apresentada no ítem seguinte, para comparação com outros resultados.

Essa segunda aproximação é mais precisa. Mostra a dependência do limite de estabilidade com γ, contudo ficando restrita aos casos em que $\alpha < 1$.

Porém como

$$\alpha = \sqrt{\frac{F_2}{EI}}\,\rho$$

essa restrição limita o valor da força centrífuga para a qual a solução encontrada é válida.

Usar um número maior de termos para a tangente vai complicar muito o desenvolvimento anterior e passa a ser mais conveniente já fazer diretamente o estudo mais genérico do próximo ítem.

3.8 - ESTABILIDADE

Vamos estudar a estabilidade do movimento do sistema diretamente a partir das equações dadas por (3.6.2). Para uma rotação constante, $\bar{\omega}' = 0$

$$\bar{\eta}'' + \left[\frac{\frac{\alpha^2}{3}}{\frac{tg\,\alpha}{\alpha} - 1} - \bar{\omega}^2\right]\bar{\eta} = 0$$

$$\frac{\alpha^2}{3} = \gamma\,\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}\,\bar{\eta}' \qquad (3.8.1)$$

Para a determinação dos limites de estabilidade procede-se a uma linearização que foi sugerida pelo ítem anterior e que corresponde a supor $\gamma\,\bar{\omega}^2 \gg \bar{\omega}\,\bar{\eta}'$, isto é, α passa a ser constante para efeito do estudo da estabilidade.

Para a existência da solução oscilante

$$\frac{\dfrac{\alpha^2}{3}}{\dfrac{tg\,\alpha}{\alpha} - 1} - \bar{\omega}^2 > 0 \qquad (3.8.2)$$

Porém com a hipótese acima

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\alpha^2}{3\,\gamma}\,,$$

e a expressão se escreve

$$\frac{\alpha^2}{3\,\gamma} \cdot \frac{\alpha\,\gamma - (tg\,\alpha - \alpha)}{tg\,\alpha - \alpha} > 0 \qquad (3.8.3)$$

Os limites de estabilidade são dados pela solução da equação

$$tg\,\alpha = (1 + \gamma)\alpha \qquad (3.8.4)$$

e o movimento do sistema existe dentro das hipóteses feitas quando

$$tg\,\alpha < (1 + \gamma)\alpha \qquad e \qquad tg\,\alpha > \alpha \qquad (3.8.5)$$

O resultado dessas inequações são faixas de estabilidade apresentadas na (tabela 3.8.1) para 2 ou 3 valores característicos de γ e esquematicamente também na (fig. 3.8.1). Além do mais o primeiro limite de estabilidade, expresso $\bar{\omega}$, que pode ser obtido da primeira raiz de

$$tg\ (\sqrt{3\gamma}\ \bar{\omega}) = (1+\gamma)\ \sqrt{3\gamma}\ \bar{\omega} \qquad (3.8.6)$$

está apresentado na (fig. 3.8.2) e comparado com o valor aproximado obtido no item anterior.

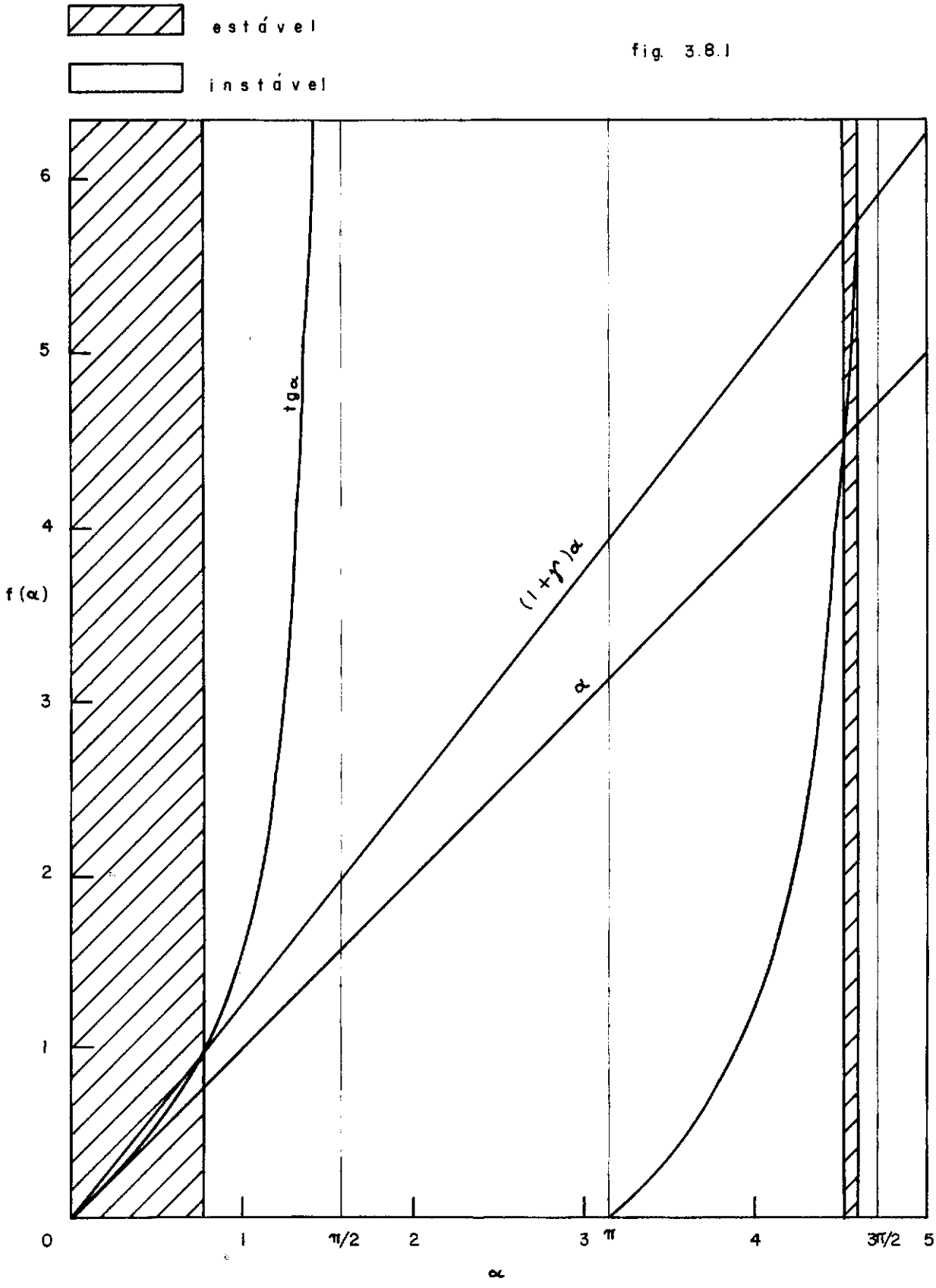
Compreende-se a partir destes resultados porque falou-se em limites de estabilidade e correspondentemente na existência da faixa de estabilidade onde o movimento oscilatório é possível. Em termos físicos, cada uma destas faixas corresponde a uma forma de vibrar da haste. Como porém foi feita a hipótese de pequena variação de curvatura somente o resultado para as primeiras faixas tem significado, e serão estudados posteriormente.

Pode-se comparar esse resultado também com aquele obtido por um raciocínio menos válido. Considera-se o problema em estudo como uma haste comprimida por uma carga igual a força centrífuga (Timoshenko[10])

$$P = m\ \omega^2\ (R-\rho) \qquad (3.8.7)$$

T A B E L A - 3.8.1

γ	FAIXAS DE ESTABILIDADE	VARIAÇÃO DE $\bar{\omega}$
0,5	PRIMEIRA	0 a 0,77
	SEGUNDA	2,60 a 3,70
	TERCEIRA	4,47 a 6,31
1	PRIMEIRA	0 a 0,67
	SEGUNDA	2,60 a 2,65
	TERCEIRA	4,47 a 4,52


estável
instável
fig. 3.8.1
6
5
4
3
2
1
f(α)
tgα
(1+γ)α
α
0
1
π/2
2
3
π
4
3π/2
5
α

Este valor corresponde a força sobre a massa quando esta permanece na posição de equilíbrio e está girando com uma velocidade angular .

Tentando obter o primeiro limite de estabilidade pela carga crítica de flambagem.

$$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{\rho^2} \tag{3.8.8}$$

chega-se através de

$$m\,\omega^2\,(R-\rho) = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{\rho^2}$$

ou

$$\gamma\, c^2\, \omega^2 = \gamma\, \bar{\omega}^2 = \frac{\pi^2}{12} \tag{3.8.9}$$

ao limite para a solução crítica

$$\bar{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{12\gamma}} \tag{3.8.10}$$

que também está representado na (fig. 3.8.2) para comparação aos resultados anteriores. Essa comparação também pode ser feita lembrando que (3.8.9) representa

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \tag{3.8.11}$$

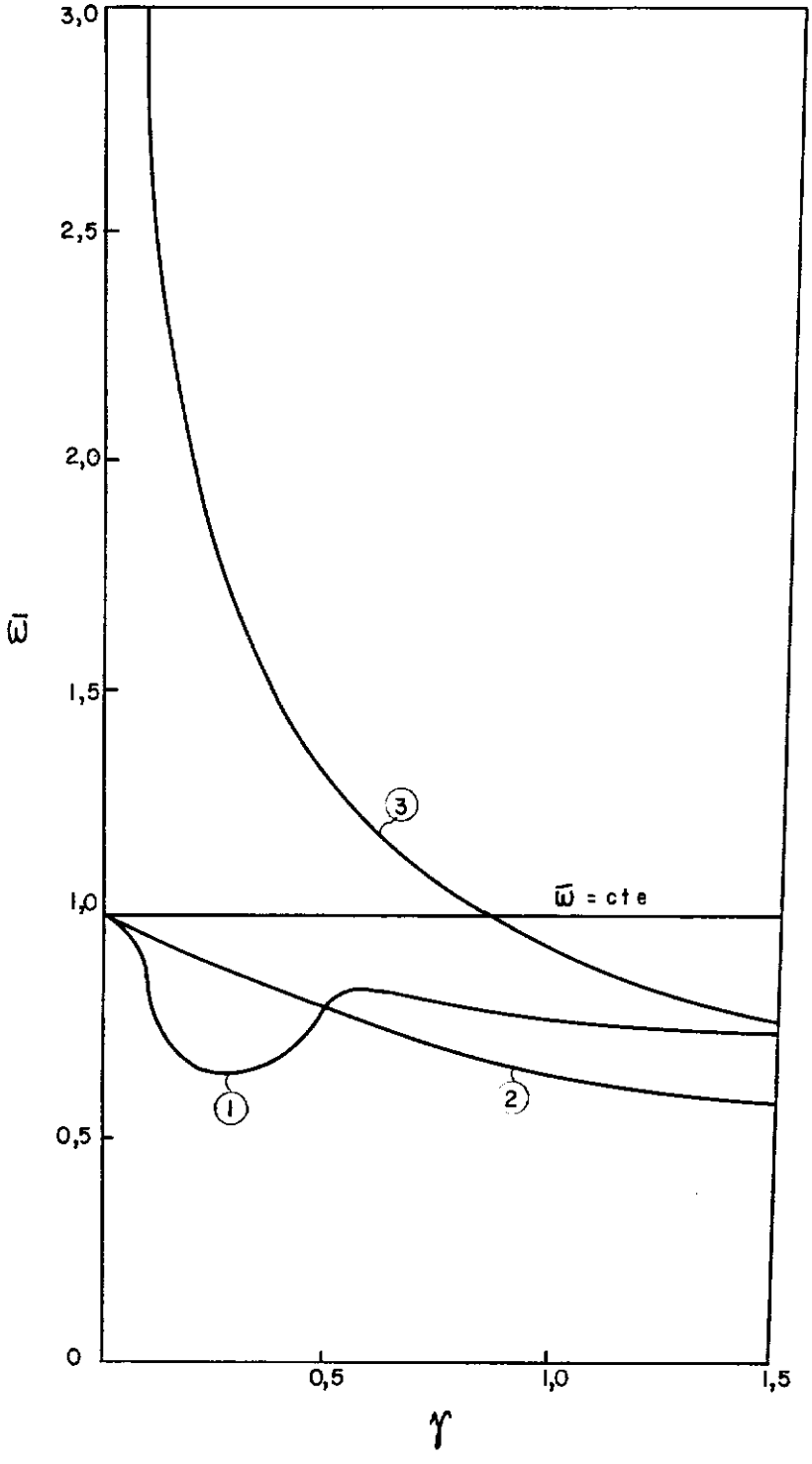


fig. 3.8.2

Isto significa porém, conforme e resultado dado pela (fig. 3.8.2) que só existe coincidência de resultados de ambas as curvas (2) e (3) quando γ tende a infinito, ou seja, o comprimento da haste tende a zero. Na aproximação pela carga crítica de flambagem perde-se a informação do que ocorre no caso da massa no centro de rotação.

A curva (2) da (fig. 3.8.2) é a representação correta do resultado. Quando γ tende a zero, $\bar{\omega}$ tende a unidade, isto é, a rotação crítica tende a frequência natural da barra com a massa na ponta. Neste caso a massa m estará no centro de rotação do anel. Deslocada de sua posição de um certo valor, aparecerá em consequência, uma força centrífuga correspondente que de qualquer maneira poderá instabilizar a haste.

A curva (1) resultado da aproximação da tangente dará um erro para menos ou para mais conforme o valor de γ.

3.9 - SOLUÇÃO NO PLANO FASE

Estuda-se o movimento do sistema, pela sua trajetória no plano fase. Trata-se da forma mais conveniente e geral para a representação. Introduzindo a velocidade da partícula ν, a equação (3.6.2) transforma-se na notação de plano fase em:

$$\bar{\eta}' = \nu$$

$$\nu' = -\left(\frac{\frac{\alpha^2}{3}}{\frac{tg\ \alpha}{\alpha} - 1} - \bar{\omega}^2 \right) \bar{\eta} \qquad (3.9.1)$$

com $\frac{\alpha^2}{3} = \gamma\,\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}\,\nu$

Observa-se que a integração no tempo é extremamente difícil, pelo caráter implícito da variável ν. Ela todavia, não é necessária para o que se deseja pois, a integração da trajetória no plano fase é relativamente simples. Realmente, de (3.9.1)

$$\frac{d\bar{\eta}}{d\nu} = \frac{-\nu}{\left(\frac{\alpha^3/3}{\frac{tg\ \alpha}{\alpha} - 1} - \bar{\omega}^2 \right) \bar{\eta}} \qquad (3.9.2)$$

Portanto, a equação da trajetória $\bar{\eta}\ (\ \nu\ )$

pode ser obtida a partir de uma condição inicial $(\bar{\eta}_o, \nu_o)$

$$\bar{\eta}^2 = \bar{\eta}_o^2 - 2 \int_{\nu_o}^{\nu} \frac{\nu d\nu}{\dfrac{\alpha^3/3}{\dfrac{tg\,\alpha}{\alpha} - 1} - \bar{\omega}^2} \tag{3.9.3}$$

como já foi visto nos ítens anteriores, quando for válida a hipótese $\gamma\bar{\omega}^2 >> \bar{\omega}\nu$, e essa equação da trajetória será dada por uma expressão muito mais simples.

$$\bar{\eta}^2 = \bar{\eta}_o^2 - \frac{\dfrac{1}{\bar{\omega}^2}}{\dfrac{\gamma}{\dfrac{tg\gamma\omega^2}{\gamma\bar{\omega}^2} - 1} - 1} (\nu^2 - \nu_o^2) \tag{3.9.4}$$

que corresponde à equação de uma elípse. Nesse caso, portanto, a trajetória é simétrica tanto em relação ao eixo ν quanto ao eixo $\bar{\eta}$. Observe-se que comparando (3.9.2) e (3.9.3) qualquer desvio da simetria em relação ao eixo $\bar{\eta}$ pode, portanto, ser atribuído ao termo $\bar{\omega}\nu$ presente em α, que por sua vez é o termo devido à aceleração de Coriolis.

O resultado da integração (3.9.2) é representado pelas (figs. 3.9.1 a 3.9.5).

Há necessidade apenas em fixar um parâmetro γ , que foi

$$\gamma = 1,$$

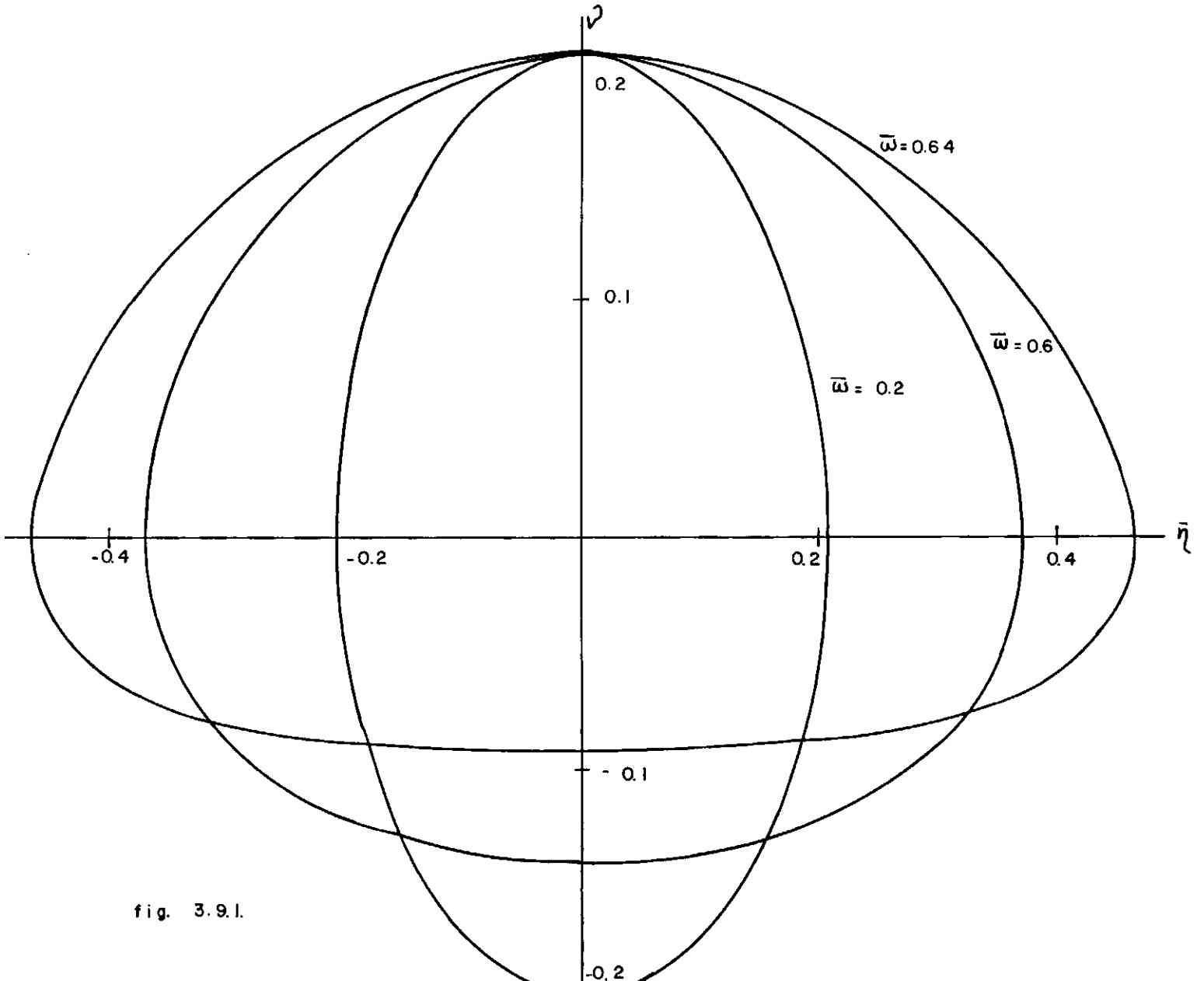

$\bar{\nu}$
0.2
0.1
-0.1
-0.2
$\bar{\eta}$
-0.4
-0.2
0.2
0.4
$\bar{\omega}$ = 0.64
$\bar{\omega}$ = 0.6
$\bar{\omega}$ = 0.2

fig. 3.9.1.

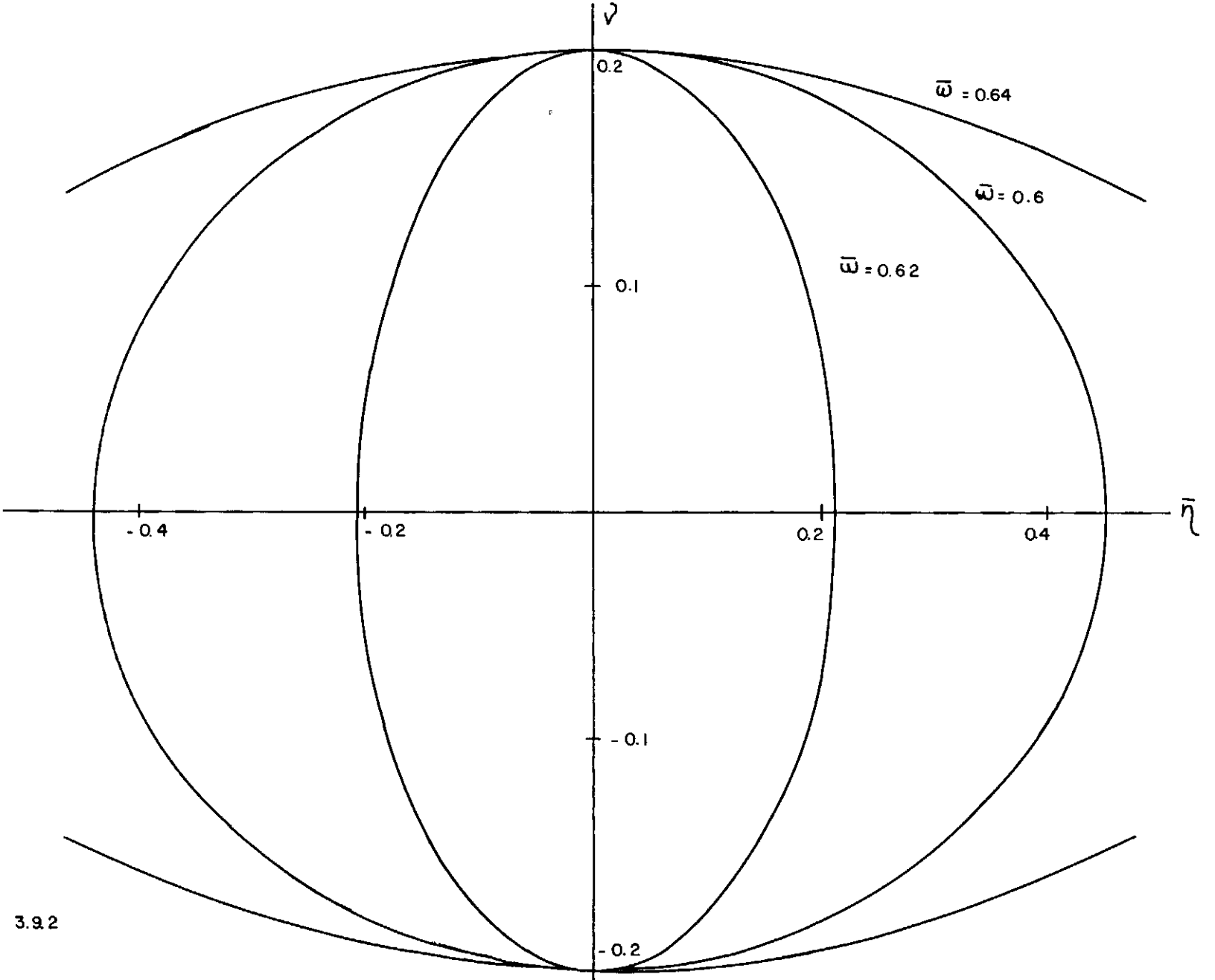

$\bar{\nu}$
0.2
$\bar{\omega}$ = 0.64
$\bar{\omega}$ = 0.6
$\bar{\omega}$ = 0.62
0.1
- 0.4
- 0.2
0.2
0.4
$\bar{\eta}$
- 0.1
- 0.2

fig. 3.9.2

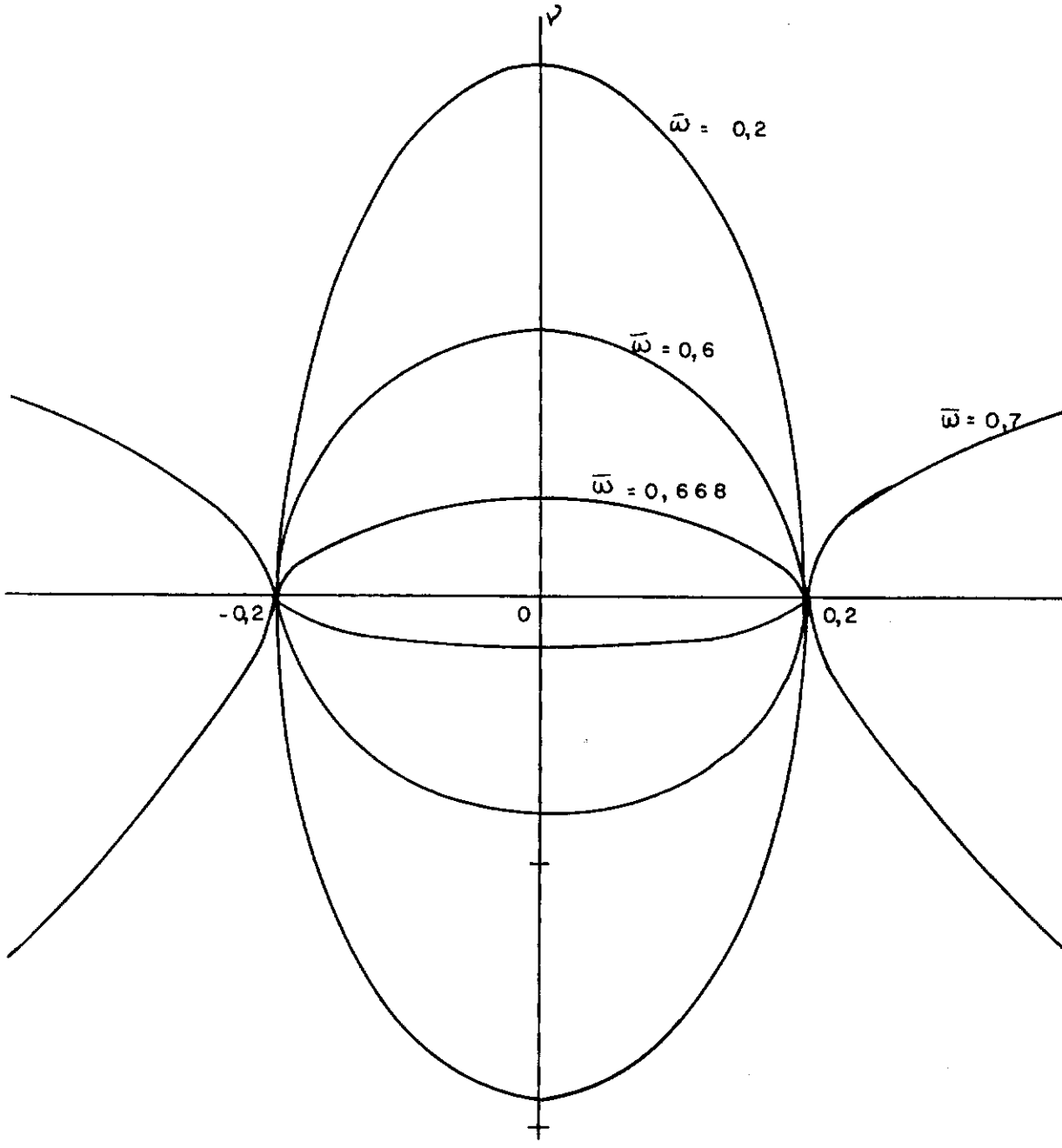


fig. 3.9.3

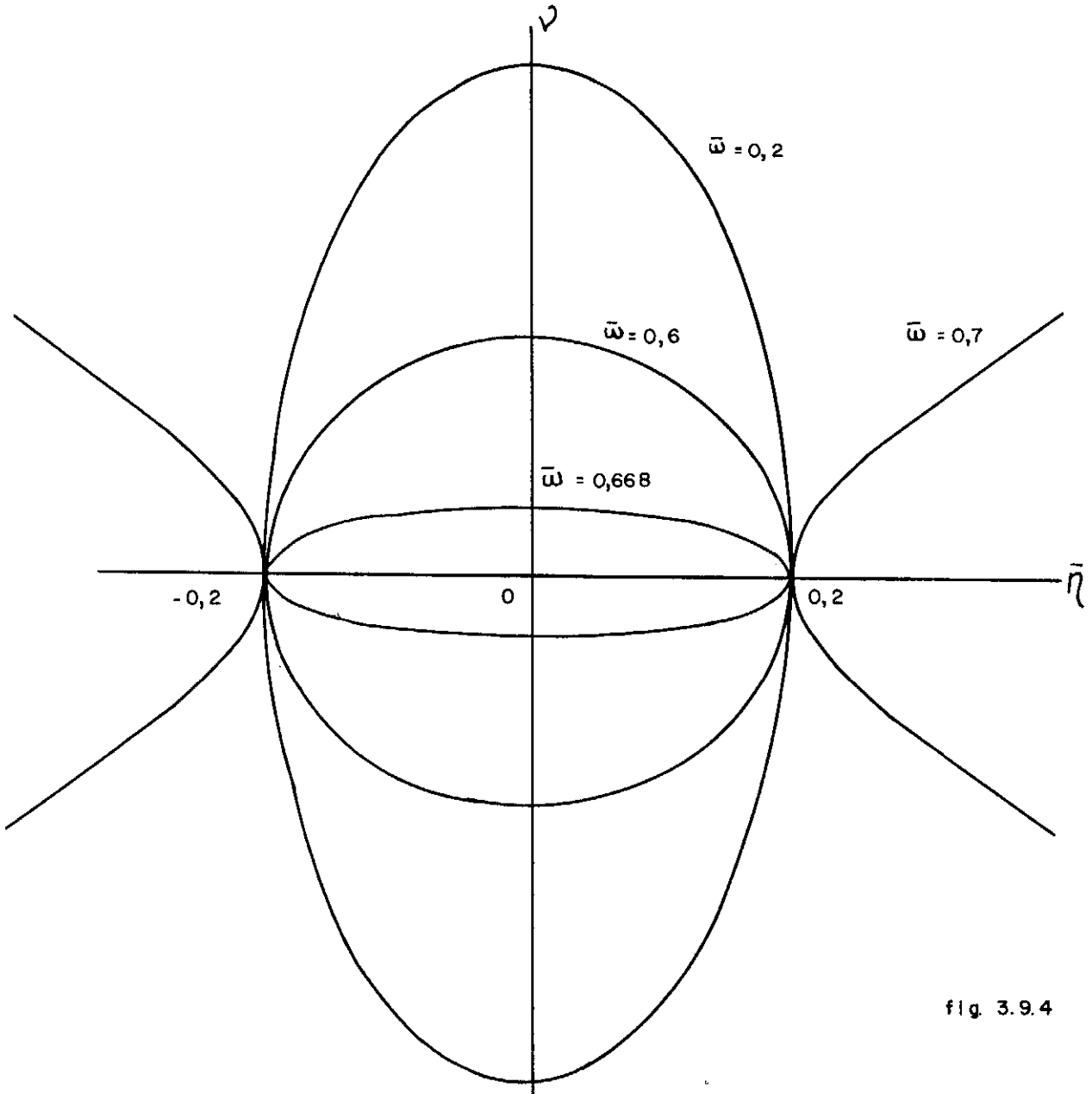

ν
$\bar{\omega}$ = 0,2
$\bar{\omega}$ = 0,6
$\bar{\omega}$ = 0,7
$\bar{\omega}$ = 0,668
-0,2
0
0,2
$\bar{\eta}$

fig. 3.9.4

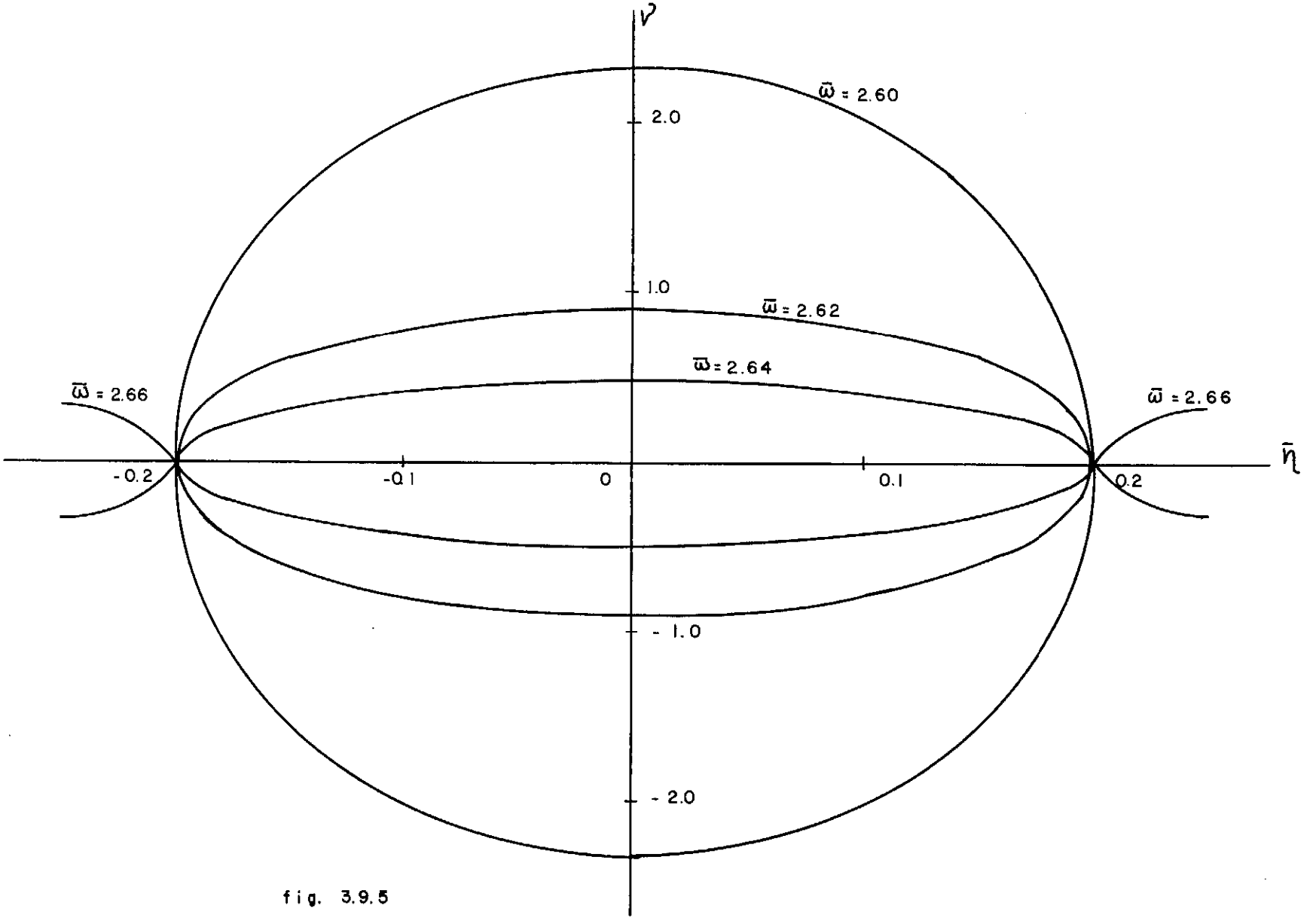

ν
$\bar{\omega}$ = 2.60
2.0
1.0
$\bar{\omega}$ = 2.62
$\bar{\omega}$ = 2.64
$\bar{\omega}$ = 2.66
$\bar{\omega}$ = 2.66
$\bar{\eta}$
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
- 1.0
- 2.0

fig. 3.9.5

isto é, a massa está no meio, entre centro de rotação e ponta de engaste. O outro parâmetro $\bar{\omega}$, será variado em cada caso, para se estudar o comportamento mais próximo ou mais afastado do limite de estabilidade. A (fig. 3.9.1) mostra o movimento na primeira faixa de estabilidade. Observa-se que a distorção em relação ao eixo $\bar{\eta}$ aumenta perto do limite de estabilidade onde portanto, a força de Coriolis se manifesta mais acentuadamente.

Para melhor acaracterizar este efeito, foi traçada a (fig. 3.9.2) que repete a anterior desprezando o termo $\bar{\omega}\ \nu$, de Coriolis, em α(eq. 3.9.1). Comparando estas duas figuras pode-se observar com nitidez os efeitos não lineares deste problema. Nas figuras (3.9.3) e (3.9.4) são mostrados os mesmos efeitos, porém com maior realidade, dentro das limitações de pequenas deflexões da haste, considerando ou não o termo devido a Coriolis.

Para as outras faixas de estabilidade a influência do termo divido a Coriolis torna-se desprezível. Isto pode ser observado pela (fig. 3.9.5) onde levando ou não em consideração este termo, há uma perfeita simetria nos traçados das curvas integrais em relação ao eixo $\bar{\eta}$.

CAPÍTULO IV

HASTE ELÁSTICA - CASO EM QUE $\rho > R$

4.1 - MODELO FÍSICO

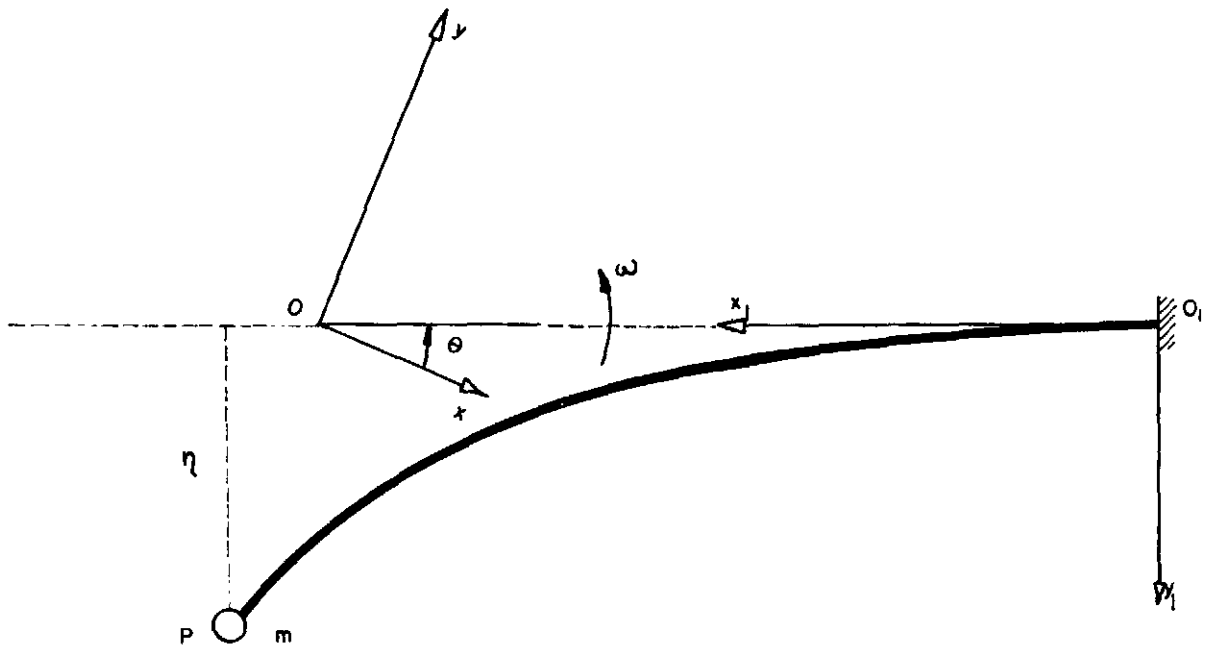
Estuda-se neste capítulo a haste elástica, assim como foi feito no capítulo III, com a diferença de ser $\rho > R$, isto é, a extremidade da haste onde se encontra a massa está além do centro de rotação em relação ao ponto de engaste. Valem, aqui, grande parte das considerações lá feitas. Os sistemas de referências serão os mesmos e as hipóteses lá formuladas serão, aqui, também, adotadas (fig. 4.1.1).

4.2 - EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Analogamente, o modelo matemático do sistema será obtido pela aplicação da lei de Newton, como no capítulo III. Estuda-se a massa e, depois, a haste separadamente.

4.3 - ESTUDO DA MASSA

Neste caso, conforme capítulo III, o movimento plano da partícula de massa m num referencial móvel executando um movimento de rotação de raio R com velocidade angular ω e aceleração angular $\dot{\omega}$ é dado por,



$\overline{O_1O} = \underset{\sim}{R}$

$\overline{O_1P} = \underset{\sim}{\rho}$

fig. 4.1.1

$$m\,\omega^2\,y_1 - m\,\dot{\omega}\,(\rho - R) = F_1 + m\,\ddot{y}_1$$

$$m\,\dot{\omega}\,y_1 - m\,\omega^2\,(R-\rho) = F_2 - 2m\,\omega\,\dot{y}_1 \qquad (4.3.1)$$

Considerando que o movimento da massa m fique somente para $x_1 = \rho$, e considerando pequenas deflexões da haste, as equações (4.3.1) já simplificadas ficam:

$$F_1 = m\,\omega^2\,\eta - m\,\ddot{\eta} - m\,\dot{\omega}\,(\rho - R)$$

$$F_2 = m\,\omega^2\,(\rho - R) + m\,\dot{\omega}\,\eta + 2m\,\omega\,\dot{\eta} \qquad (4.3.2)$$

A (fig. 4.3.1) ilustra bem a posição de m no sistema considerado.

4.4 - ESTUDO DA HASTE

O estudo da haste pode ser feito estaticamente, determinando o equilíbrio sob a ação das forças F_1 e F_2

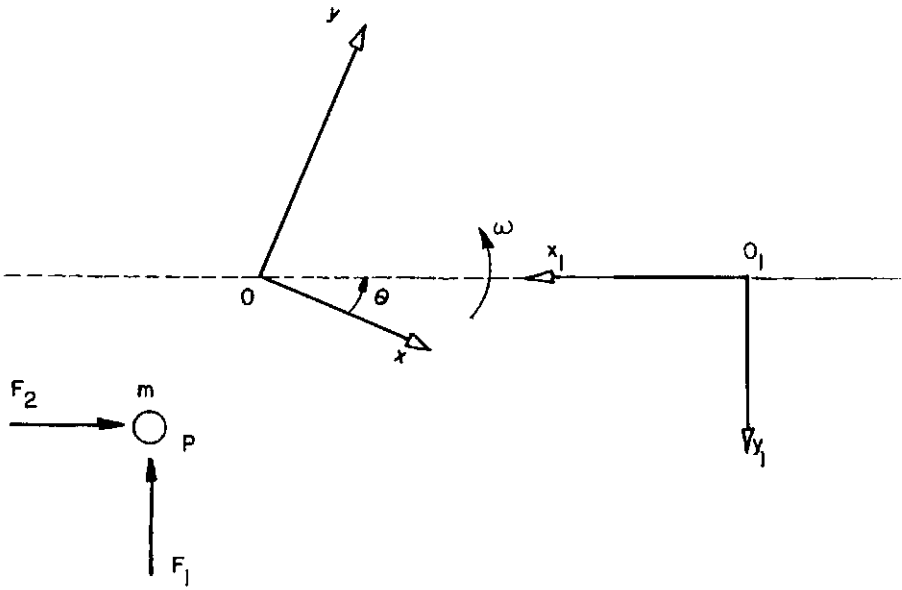


fig. 4.3.1

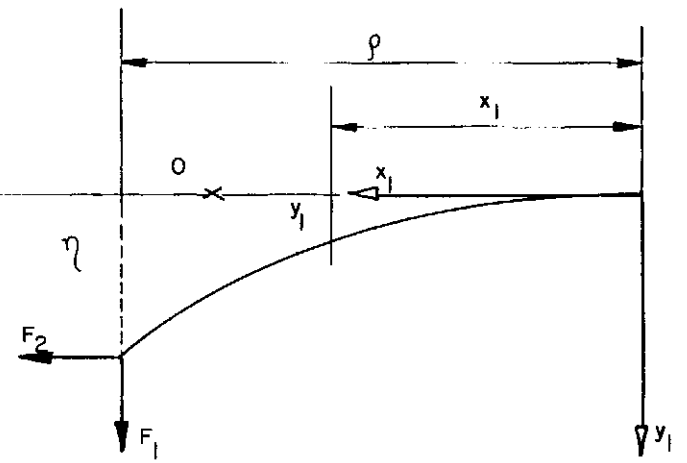


fig. 4.4.1

Como hipótese adicional considera-se a variação da curvatura da haste pequena, isto é,

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{M}{EI}, \text{ onde}$$

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} \simeq 1$$

Dentro desta limitação, usa-se

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = -\frac{M}{EI}$$

donde se obtem:

$$y_1'' - \frac{F_2}{EI}\, y_1 = -\frac{F_1}{EI}\, x_1 + \frac{F_1\rho - F_2\eta}{EI} \qquad (4.4.1)$$

ou

$$y_1'' - A_1 y_1 = A_2 x_1 + A_3$$

com os valores de

$$A_1 = \frac{F_2}{EI}, \quad A_2 = \frac{F_1}{EI} \quad e \quad A_3 = \frac{F_1\rho - F_2\eta}{EI} \tag{4.4.2}$$

A solução geral da equação (4.4.1) é a soma da solução da equação homogênea com uma solução particular da equação completa.

$$y_1 = B_1 \cosh \sqrt{A_1}\, x_1 + B_2 \operatorname{senh} \sqrt{A_1}\, x_1 - \frac{A_2}{A_1} x_1 - \frac{A_3}{A_1}$$

(4.4.3)

Com as condições de contorno para a haste engastada em $x_1 = 0$

$$y_1 = 0 \quad e \quad y_1' = 0 \tag{4.4.4}$$

onde se obtem

$$B_1 = \frac{F_1\rho - F_2\eta}{F_2} \quad e \quad B_2 = -\frac{F_1}{F_2\sqrt{\frac{F_2}{EI}}} \tag{4.4.5}$$

e finalmente a equação da linha elástica da haste fica:

$$y_1 = \frac{F_1\rho - F_2\eta}{F_2} \cosh \sqrt{\frac{F_2}{EI}}\, x_1 - \frac{F_1}{F_2} \sqrt{\frac{EI}{F_2}}\, \mathrm{senh}$$

$$\cdot \sqrt{\frac{F_2}{EI}}\, x_1 + \frac{F_1}{F_2}\, x_1 - \frac{F_1\rho - F_2\eta}{F_2} \qquad (4.4.6)$$

Para o estudo do movimento da partícula calcula-se (4.4.6) em $x_1 = \rho$ donde se tem $y_1 = \eta$ e

$$\eta = \frac{F_1}{F_2} \left[\rho - \sqrt{\frac{EI}{F_2}}\, \mathrm{tgh} \left(\sqrt{\frac{F_2}{EI}}\, \rho \right) \right] \qquad (4.4.7)$$

O conjunto de equações dado por (4.3.2) e (4.4.7) é o modelo matemático do problema dentro das limitações de pequenas deflexões da haste.

$$m\ddot{\eta} + \left[\frac{F_2}{\rho - \sqrt{\frac{EI}{F_2}}\, \mathrm{tgh} \left(\sqrt{\frac{F_2}{EI}}\, \rho \right)} - m\,\omega^2 \right] \eta = -m\,\dot{\omega}\,(\rho - R)$$

$$(4.4.8)$$

$$F_2 = m\,\omega^2\,(\rho - R) + m\,\dot{\omega}\,\eta + 2m\,\omega\,\dot{\eta}$$

4.5 - NORMALIZAÇÃO E ADIMENSIONALIZAÇÃO

Introduz-se as notações

$$c^2 = \frac{m\,\rho^3}{3\,EI}\,, \qquad \gamma = \frac{R}{\rho} - 1$$

$$\bar{\eta} = \frac{2}{\rho}\,\eta\,, \qquad \bar{\omega} = c\,\omega \tag{4.5.1}$$

$$\tau = \frac{1}{c}\,t \text{ com } \frac{d}{d\tau} = {}' \quad \text{e} \quad \alpha = \sqrt{\frac{F_2}{EI}}\,\rho$$

Então

$$\bar{\eta}'' + \left(\frac{\alpha^3/3}{\alpha - \operatorname{tgh}\,\alpha} - \bar{\omega}^2 \right) \bar{\eta} = 2\,\gamma\,\bar{\omega}'$$

com

$$\frac{\alpha^2}{3} = -\gamma\,\bar{\omega}^2 + \frac{1}{2}\,\bar{\omega}'\,\bar{\eta} + \bar{\omega}\,\bar{\eta}' \tag{4.5.2}$$

Aqui também a solução deste sistema não depende mais das características de inércia da barra, depende somente de um parâmetro geométrico γ.

As demais considerações, em torno das equações feitas no sistema (3.6.2), também são válidas aqui.

4.6 - ESTABILIDADE

Para uma rotação constante as equações de (4.5.2) simplificam-se em:

$$\bar{\eta}'' + \left[\frac{\alpha^3/3}{\alpha - \operatorname{tgh} \alpha} - \bar{\omega}^2 \right] \bar{\eta} = 0$$

$$\frac{\alpha^2}{3} = -\gamma \; \bar{\omega}^2 + \bar{\omega} \; \bar{\eta}' \qquad (4.6.1)$$

Para a determinação dos limites de estabilidade será feita a linearização que no caso corresponde a se supor $-\gamma \; \bar{\omega}^2 >> \bar{\omega} \; \bar{\eta}'$, onde α passa a ser constante.

A existência da solução oscilante dá-se para

$$\frac{\alpha^3/3}{\alpha - \operatorname{tgh} \alpha} - \bar{\omega} > 0$$

com (4.6.2)

$$\bar{\omega}^2 = - \frac{\alpha^3}{3\gamma}, \quad \alpha > 0, \quad \gamma < 0$$

os limites de estabilidade são dados pela solução da equação

$$\operatorname{tgh} \alpha = (1 + \gamma) \alpha \qquad (4.6.3)$$

o movimento do sistema existe dentro das hipóteses feitas quando da (fig. 4.6.1)

$$\alpha > \text{tgh}\ \alpha \qquad \text{e} \qquad \text{tgh}\ \alpha < (1 + \gamma)\alpha \tag{4.6.4}$$

4.7 - SOLUÇÃO NO PLANO FASE

Faz-se um estudo do movimento vibratório do sistema, pela sua trajetória no plano fase. Para uma rotação constante, isto é, $\bar{\omega}' = 0$, a equação (4.6.1) transforma-se

$$\bar{\eta}' = \nu$$

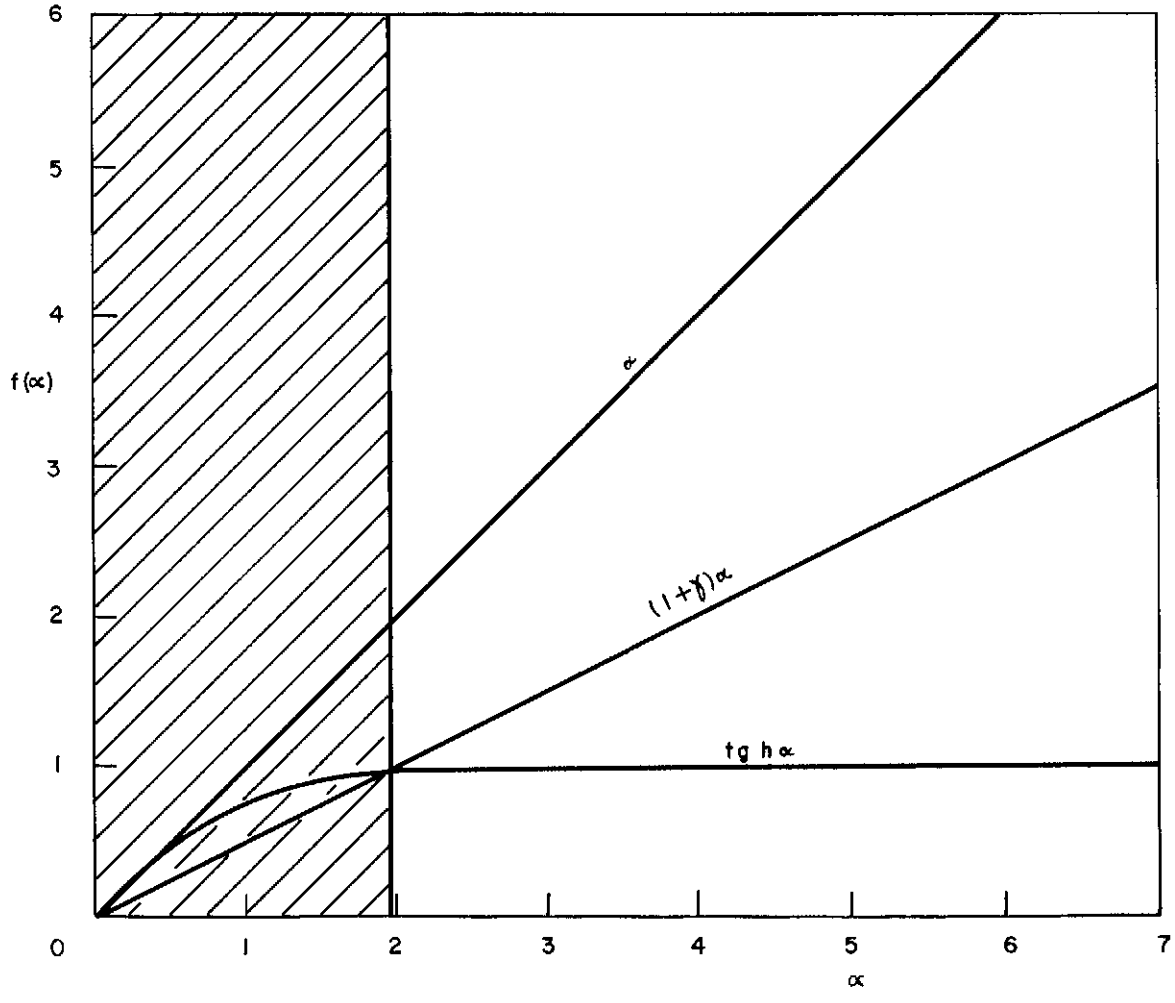
$$\nu' = -\left(\frac{\frac{\alpha^2}{3}}{1 - \frac{\text{tgh}\ \alpha}{\alpha}} - \bar{\omega}^2 \right) \bar{\eta} \tag{4.7.1}$$

com

$$\frac{\alpha^2}{3} = -\gamma\ \bar{\omega}^2 + \bar{\omega}\ \nu$$

a equação da trajetória pode ser integrada

$$\bar{\eta}^2 = \bar{\eta}_o^2 - 2 \int_{\nu_o}^{\nu} \frac{\nu\ d\nu}{\frac{\frac{\alpha^2}{3}}{1 - \frac{\text{tgh}\ \alpha}{\alpha}} - \bar{\omega}^2} \tag{4.7.2}$$



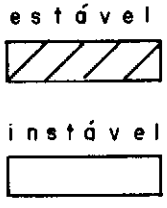


fig. 4.6.1

A (fig. 4.7.1) mostra o resultado da inte - gração. Evidencia o movimento do sistema na faixa de estabilida de. Neste caso, o efeito da força de Coriolis torna-se desprezível, como se pode observar pela própria figura, na simetria dos traçados das curvas integrais em relação a η.

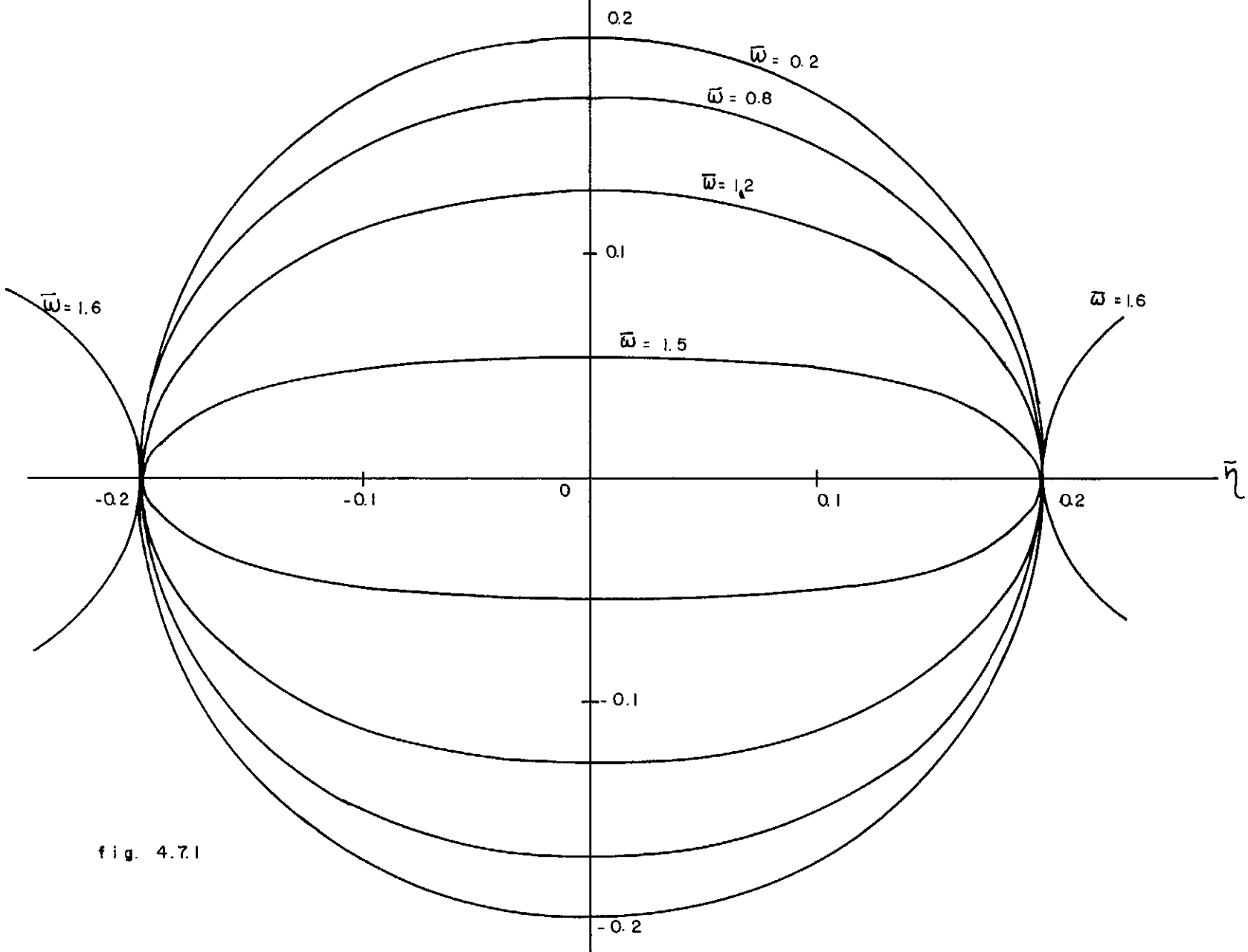

0.2
$\bar{\omega}$ = 0.2
$\bar{\omega}$ = 0.8
$\bar{\omega}$ = 1.2
0.1
$\bar{\omega}$ = 1.6
$\bar{\omega}$ = 1.6
$\bar{\omega}$ = 1.5
$\bar{\eta}$
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
-0.1
-0.2

fig. 4.7.1

CAPÍTULO V

MOVIMENTO DA HASTE TRANSVERSAL AO PLANO DE ROTAÇÃO DO ANEL

5.1 - MODELO FÍSICO

Considera-se a haste flexível, idêntica à do Capítulo III, com movimento no plano vertical rotatório, transversal ao plano de rotação do anel.

Os sistemas de referência são os mesmos do Capítulo III e o deslocamento da massa no sistema móvel é ζ no plano $x_1 0 z_1$ (fig. 5.1.1).

Não serão considerados, como anteriormente, efeitos de amortecimento de qualquer espécie, no movimento da haste. Considera-se que o movimento de vibração no plano transversal seja preponderante devido à forma da secção transversal da haste.

5.2 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

Para a obtenção do modelo matemático do sistema, aplica-se a lei de Newton como foi feito no Capítulo III, onde cortou-se a massa da extremidade da barra e substituiu-se sua ação pelas forças correspondentes. A seguir, estuda-se a has

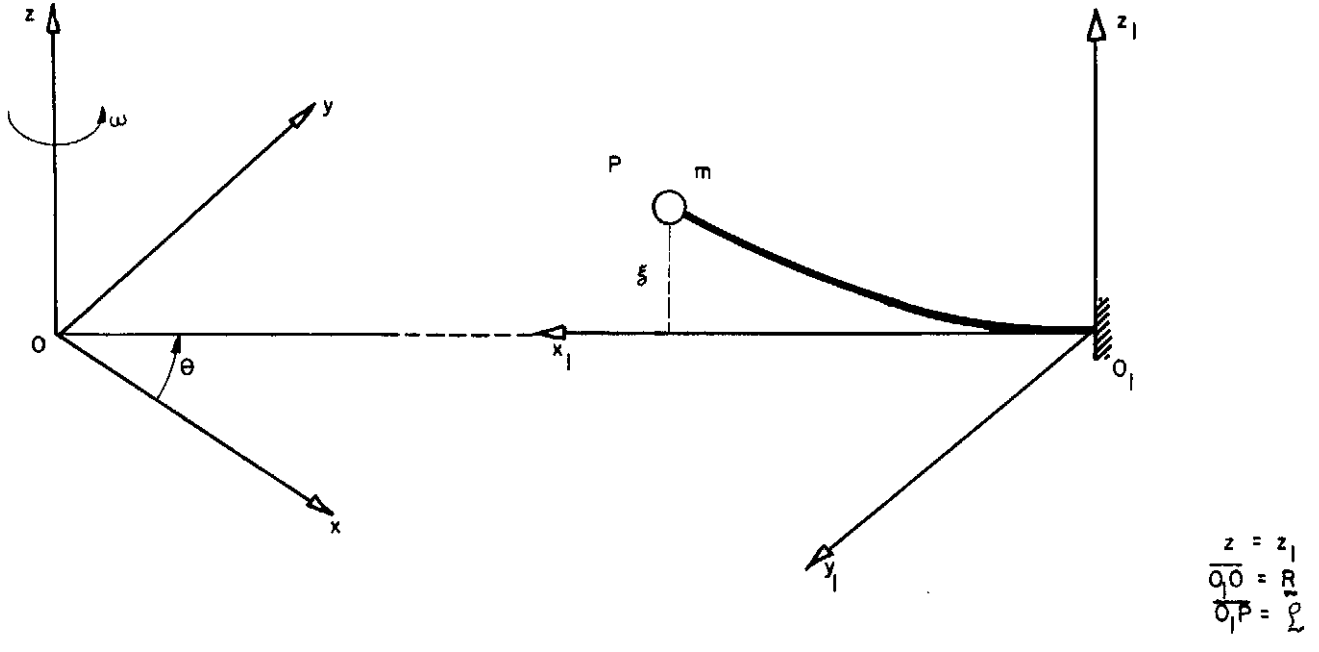


fig. 5.1.1

te sob a ação dessas forças.

5.3 - ESTUDO DA MASSA

O movimento plano da partícula de massa m, sujeita às forças F_1 e F_3, num referencial móvel (fig. 5.3.1), que executa um movimento de rotação de raio R, com velocidade angular ω e aceleração angular $\dot{\omega}$, pode ser descrita pela lei de Newton, assim como no Capítulo III:

$$\sum \underset{\sim}{F} = F_x \, \underset{\sim}{n}_x - F_z \, \underset{\sim}{n}_z$$

e a aceleração absoluta $\underset{\sim}{a}_p$ a que está sujeita a partícula é calculada por

$$\underset{\sim}{a}_p = \underset{\sim}{a}_{o_1} + \underset{\sim}{\omega} \times (\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r}) + \cancel{a}^{\,2}\underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{v}_{rel} + \underset{\sim}{a}_{rel} + \dot{\underset{\sim}{\omega}} \times \underset{\sim}{r}$$

Executando as operações indicadas e substituindo na lei de Newton, no caso do problema em estudo

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 - m \, \omega^2 \, x_1 &= F_2 - m \, \omega^2 \, R \\ m \ddot{z}_1 &= - F_3 \end{aligned} \qquad (5.3.1)$$

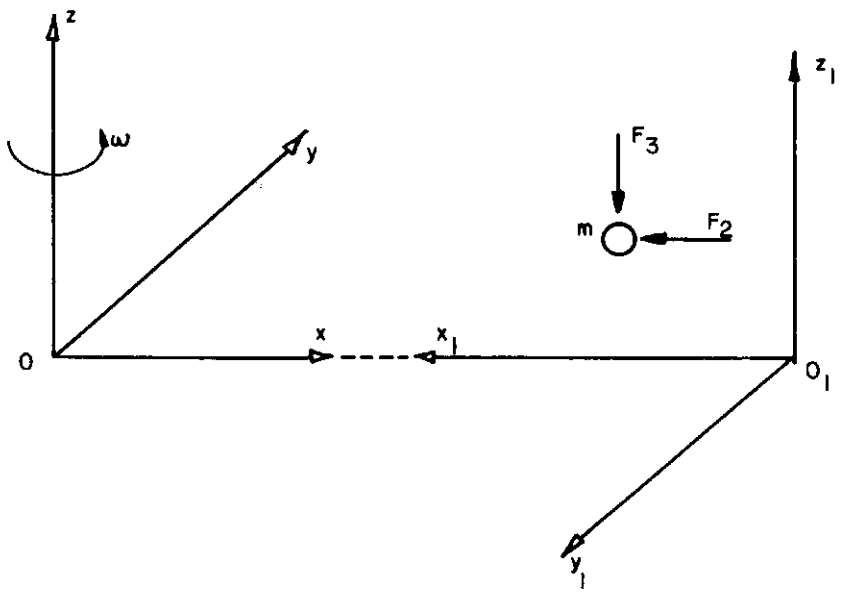


fig. 5. 3. 1

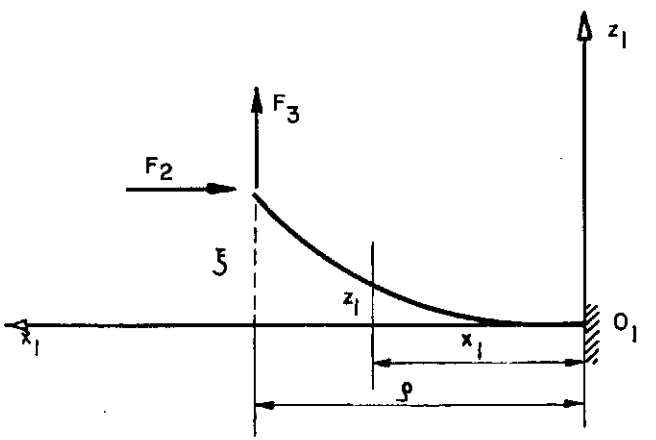


fig. 5. 4. 1

Estando a partícula na extremidade da haste de comprimento ρ, pode se considerar que para pequenas deformações da haste, o movimento de m seja sempre em $x_1 = \rho$. Neste caso, as equações já simplificadas ficam

$$F_2 = m\,\omega^2\,(R-\rho)$$
$$F_3 = -\,m\,\ddot{\zeta} \qquad (5.3.2)$$

Ao contrário do que ocorreu quando o movimento da haste era no plano de rotação do anel, aqui não aparece a força devido a Coriolis.

5.4 - ESTUDO DA HASTE

Estuda-se a posição de equilíbrio da haste sob ação das forças F_3 e F_2 (fig. 5.4.1). Aqui também, o problema será estudado como uma simples investigação estática.

As hipóteses de pequena variação de curvatura da haste e a velocidade de resultado para as primeiras formas de vibrar do conjunto haste-massa serão também considerados.

A curvatura da linha elástica de uma viga submetida essencialmente a um momento fletor é dada por (Timoshenko[11])

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{M}{EI}$$

e quando a curvatura é pequena, essa expressão é aproximada através de

$$\frac{1}{\bar{r}} \simeq - \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{ou} \quad EI \frac{d^2y}{dx^2} = - M$$

Aplicado ao problema da (fig. 5.4.1), tem-se:

$$z_1'' = \frac{1}{EI} \left[F_3 \; (\rho - x_1) + F_2 \; (\zeta - z_1) \right] \tag{5.4.2}$$

onde

$$' = \frac{d}{dx_1}$$

ou

$$z_1'' + \frac{F_2}{EI} z_1 = - \frac{F_3}{EI} x_1 + \frac{F_3\rho + F_2\zeta}{EI} \tag{5.4.3}$$

ou

$$z_1'' + A_1 z_1 = A_2 x_1 + A_3 \tag{5.4.4}$$

com os valores de A_1, A_2 e A_3 dados por

$$A_1 = \frac{F_2}{EI} , \quad A_2 = \frac{- F_3}{EI} \quad e \quad A_3 = \frac{F_3\rho + F_2\zeta}{EI} \tag{5.4.5}$$

A solução geral de (5.4.3) é a soma da solução da equação homogênea com uma solução particular da equação completa

$$z_1 = (z_1)_H + (z_1)_p \tag{5.4.6}$$

Aqui também o aspecto da solução depende fundamentalmente do sinal de A_1, ou melhor, de F_2. Por sua vez, F_2 pode se tornar veja (eq. 5.3.2)

$$\begin{aligned} F_2 &> 0 \qquad R > \rho \\ F_2 &< 0 \qquad R < 0 \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

e como se observa, F_2 pode variar dependendo da força centrífuga.

Para $F_2 > 0$

$$z_1 = B_1 \operatorname{sen} \sqrt{A_1}\, x_1 + B_2 \cos \sqrt{A_1}\, x_1 + \frac{A_2}{A_1} x_1 + \frac{A_3}{A_1} \tag{5.4.8}$$

e com os valores de A_1, A_2 e A_3 dados por (5.4.5) e as condições de contorno

$$z_1 = 0 \quad \text{e} \quad z_1' = 0 \quad \text{em} \quad x_1 = 0 \tag{5.4.9}$$

vem

$$z_1 = \frac{F_3}{F_1}\sqrt{\frac{EI}{F_2}}\ \text{sen}\left[\left(\sqrt{\frac{F_2}{EI}}\right)x_1\right] -$$

$$- \frac{F_3\rho + F_2\ z_1}{EI}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{F_2}{EI}}\right)x_1 - 1\right] -$$

$$- \frac{F_3}{F_1}\ x_1 \qquad (5.4.10)$$

Para somente o estudo do movimento da partícula, calcula-se (5.4.10) em $x_1 = \rho$, no que acarreta $z_1 = \zeta$, obtendo-se

$$\zeta = \frac{F_3}{F_2}\sqrt{\frac{EI}{F_2}}\ \text{tg}\left[\left(\sqrt{\frac{F_2}{EI}}\right)\rho\right] - \frac{F_3}{F_2}\ \rho \qquad (5.4.11)$$

O conjunto de equações (5.3.2) e (5.4.11) é o modelo matemático do problema, dentro das limitações de pequenas deflexões da haste.

As expressões simplificadas

$$m\ \ddot{\zeta} + \left[\frac{F_2}{\sqrt{\frac{EI}{F_2}}\ \text{tg}\left[\sqrt{\frac{F_2}{EI}}\ \rho\right] - \rho}\right]\zeta = 0$$

$$F_2 = m\,\omega^2\,(R-\rho) \tag{5.4.12}$$

5.5 - NORMALIZAÇÃO E ADIMENSIONALIZAÇÃO

Introduzindo as notações

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{m\,\rho^3}{3\,EI} \\ \gamma &= \frac{R}{\rho} - 1 \\ \bar{\omega} &= C\,\omega \\ \tau &= \frac{1}{C}\,t \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

com

$$\frac{d}{d\tau} = {}' \qquad e \qquad \alpha = \sqrt{\frac{F_2}{EI}}\,\rho$$

as equações ficam

$$\begin{aligned} \zeta'' + \left[\frac{\frac{\alpha^2}{3}}{\frac{tg\,\alpha}{\alpha} - 1}\right]\zeta &= 0 \\ \frac{\alpha^2}{3} &= \gamma\,\bar{\omega}^2 \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

A solução deste sistema não depende mais das características de inércia da barra, dependendo somente de um único parâmetro geométrico γ, após a normalização.

5.6 - ESTABILIDADE

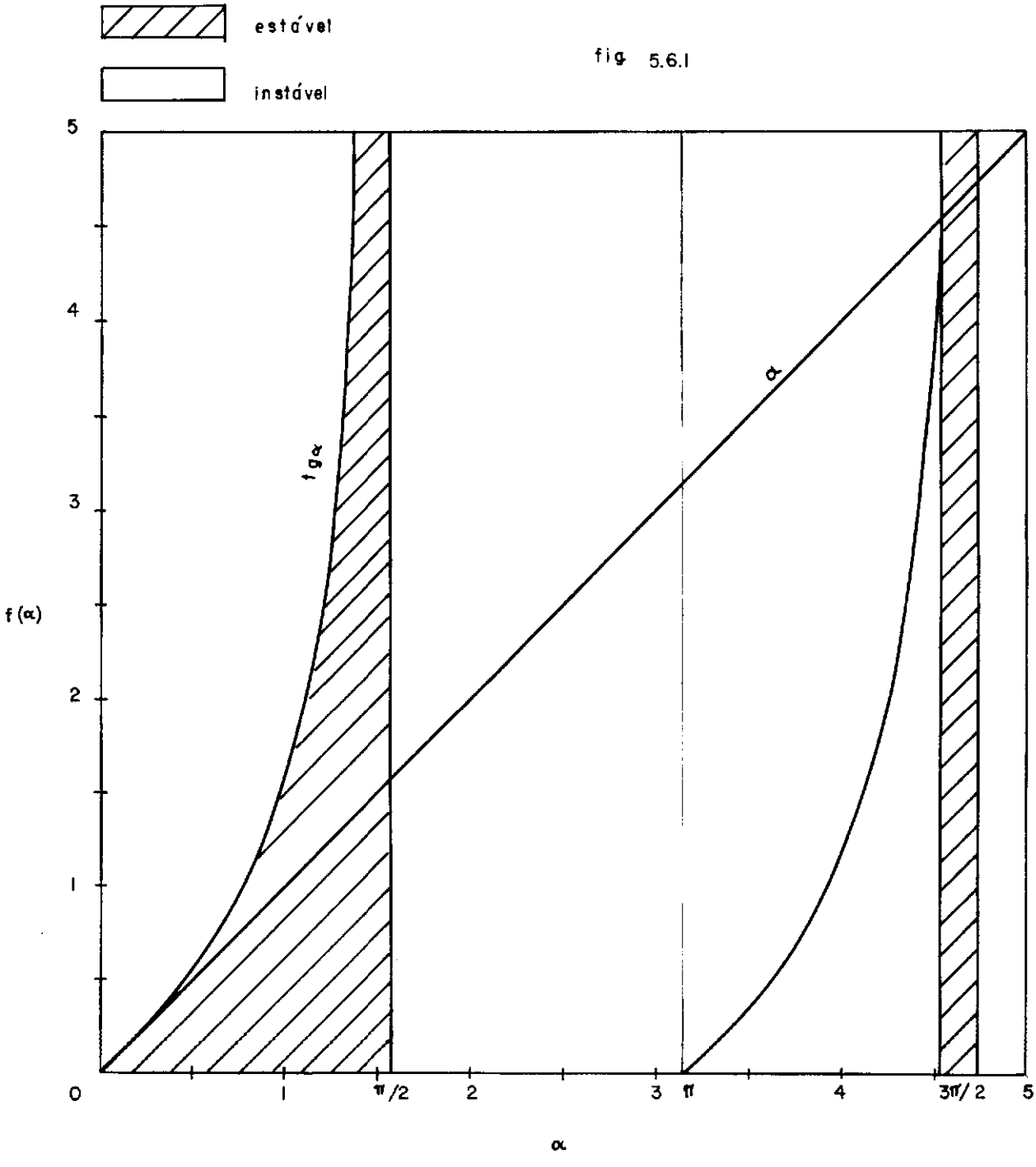
Para que a solução da equação (5.5.2) seja oscilante é necessário que

$$\frac{\frac{\alpha^2}{3}}{\frac{tg\ \alpha}{\alpha} - 1} > 0$$

isto implica que

$$tg\ \alpha > \alpha \qquad \alpha > 0$$

que são os limites de estabilidade para o movimento da haste (veja (fig. 5.6.1)).

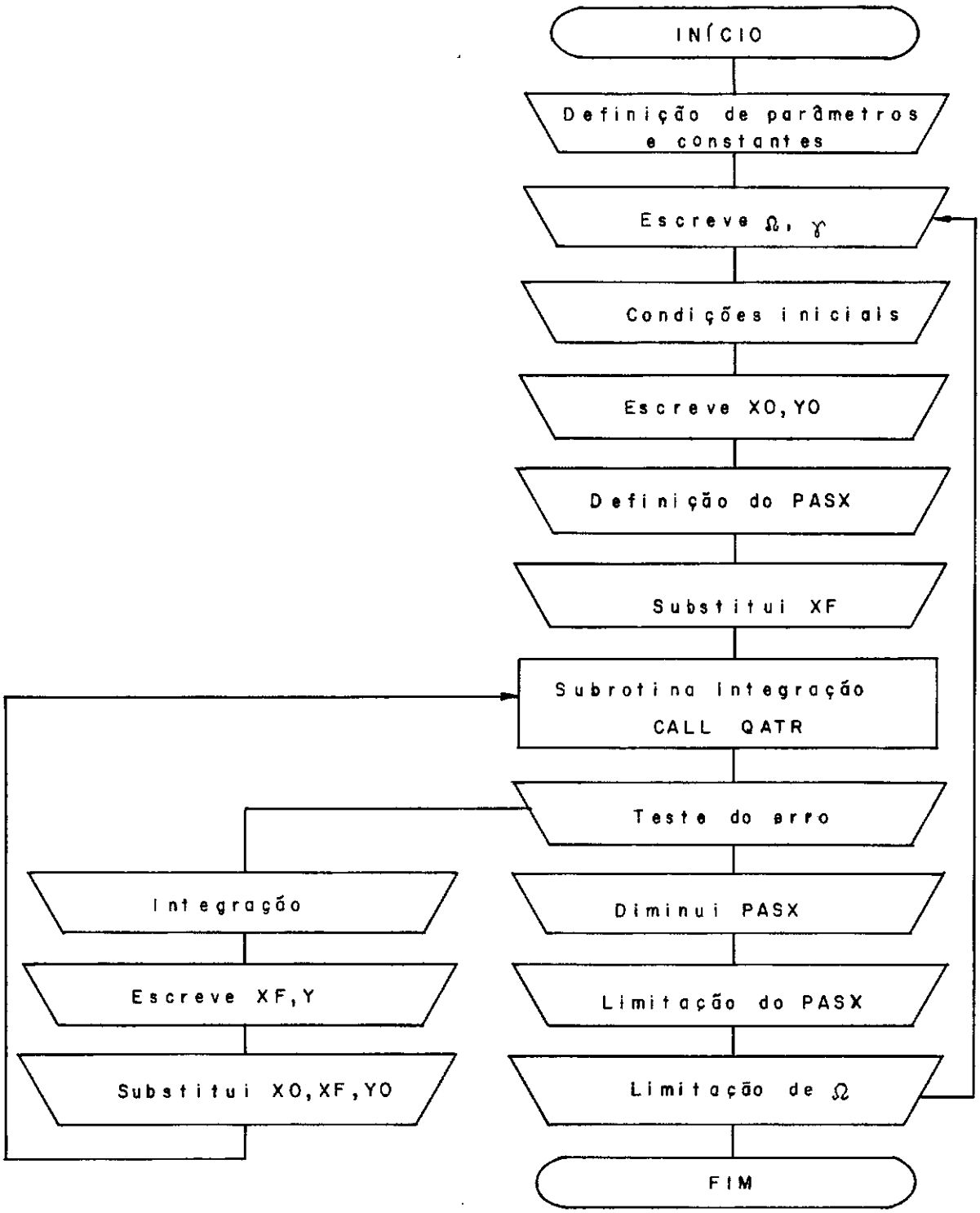

estável
instável
fig 5.6.1
5
4
3
2
1
0
f(α)
tgα
α
1
π/2
2
3
π
4
3π/2
5
α

APÊNDICE

Os gráficos apresentados neste trabalho foram obtidos através de integração das equações diferenciais de movimento dos sistemas. Estas equações diferem uma das outras apenas pelos parâmetros. Deste modo os programas que permitem a obtenção das curvas integrais, são praticamente idênticos, e a apresentação de todos, seria, no caso, inútil e sem qualquer interesse. Em vista do exposto, será apresentado apenas o diagrama de blocos e o programa para um dos casos, a vibração transversal da haste flexível no plano de rotação do anel, considerando desprezível o efeito da aceleração de Coriolis, isto é, supondo:

$$\gamma \bar{\omega}^2 >> \bar{\omega} \bar{\eta}$$

DIAGRAMA DE BLOCOS PARA O PROGRAMA PRINCIPAL



```
PAGE   1    ANGE05C3

// JOB    COFF 10FF                                    ANGE05C3    (4011,0153)

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        00FF        00FF        0002
  0001        10FF        10FF        C001
                          1012        C000

V2 M09   ACTUAL 32K  CONFIG 32K

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
      FUNCTION ANGE1(X)
      COMMON GAMA,OMEGA
C     CALCULO DO INTEGRANDO
      ALFA=SQRT(3*(GAMA*OMEGA**2))
      ANGE1=-X/((ALFA**3*COS(ALFA)/(3.*(SIN(ALFA)-
     1ALFA*COS(ALFA))))-OMEGA**2)
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR ANGE1
 COMMON       4  VARIABLES      16  PROGRAM      80

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0014 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE      WS  UA  ANGE1
CART ID 00FF   DB ADDR  4E00   DB CNT   0007

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(2501 READER,1403 PRINTER)
      REAL INF
      EXTERNAL ANGE1
      DIMENSION AUX(100)
      COMMON GAMA,OMEGA
C     TRAJETORIA NO PLANO FASE
      EPS=0.0001
      NDIM=100
      INF=0.CC03
      DES=0.6
      N=-1
      GAMA=1.
      OMEGA=0.1
      DELCM=0.1
   19 WRITE(5,6)OMEGA,GAMA
    6 FORMAT(1H1,'*OMEGA=',F7.4,3X,'GAMA=',F4.2,/)
      X0=0.
      Y0=0.2
```

```
      WRITE(5,100)XO,YO
      PASX=0.025*N
   21 XF=XO-PASX
   16 CALL GATR(XO,XF,EPS,NDIM,ANGE1,YI,IER,AUX)
      IF(IER-1)10,11,12
   11 WRITE(5,101)
  101 FORMAT('***PRECISAO EXIGIDA MUITO ALTA')
      GO TO 17
   12 WRITE(5,102)
  102 FORMAT('***POUCAS SUBDIVISOES')
      GO TO 17
   10 YI=YO**2+2*YI
      IF(YI)17,13,13
   13 Y=SQRT(YI)
      WRITE(5,100)XF,Y
  100 FORMAT(2F12.5)
      XO=XF
      XF=XO-PASX
      YO=Y
      GO TO 16
   17 PASX=PASX/2.
      IF(ABS(PASX)-INF)20,20,21
   20 IF(OMEGA-DES)18,14,14
   18 N=-N
      IF(N)23,19,19
   23 OMEGA=OMEGA+DELOM
      GO TO 19
   14 CALL EXIT
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON      4  VARIABLES    226  PROGRAM    284

END OF COMPILATION

// XEQ
```

B I B L I O G R A F I A

1 - BOYCE, WILLIAM E.and R.C. DIPRIMA,
"Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems".
John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965

2 - BUTENIN, N.V.,
"Elements of the Theory of Nonlinear Oscillations".
(tradução do original Russo), Blaisdelle Publishing Company, New York, 1965

3 - DEN HARTOG, J.P.,
"Mechanical Vibrations".
Mc Graw-Hill, New York, 1956

4 - HOUSNER, GEORGE W. Y DONALD E.HOUDSON,
"Mecânica Aplicada Dinâmica".
(tradução do original em Inglês, Applied Mechanics Dynamics, New Jersy, 1950), Compania Editorial Continental, México, 1960

5 - KREIDER, D.L., ROBERT F. KULLER, and DONALD R.O.,
"Equações Diferenciais".
(tradução do original Inglês, Elementary Diff. Equation E.U.A:), Editora Edgard Blücher Ltda, 1972

6 - LANGENDONCK, TELEMAKO VAN,
"Resistência dos Materiais - Deformações".
Editora Edgard Blücher, Un.SP

7 - MEIROVITCH, I.,
"Analytical Methods in Vibrations".
Mc Millan, N.York, 1967

8 - PACITTI, T.,
"Princípios de Fortran".
Ao Livro Técnico - Rio de Janeiro, 1969

9 - PRATO, NIVALDO,
"Aplicação do Método de Ritz Extendido na Análise de vibrações e Estabilidade Dinâmica de Placas Circulares".
Tese Mestrado - COPPE/UFRJ - 1973

10 - TIMOSHENKO, S. & J. GERE,
"Theory of Elastic Stability".
Mc Graw - Hill, N.York, 1961

11 - TIMOSHENKO, S.P.,
"Problemas de Vibración en Ingeniaria"
(tradução do original em Inglês, New Jersey, 1928)
Conpania Editorial Continental, S.A., México, 1965

12 - TIMOSHENKO, S.P.,

"Resistência dos Materiais"

(Tradução do original em Inglês, Stregth of Materials, EUA),

Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1966.