

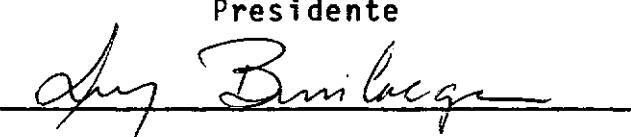
ESTUDO DO MOVIMENTO DE BALANÇO DE
UM SISTEMA COM PERTURBAÇÃO INTERNA

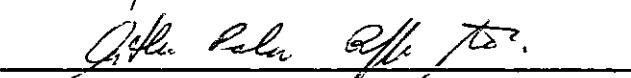
Marcio Nascimento Vieira

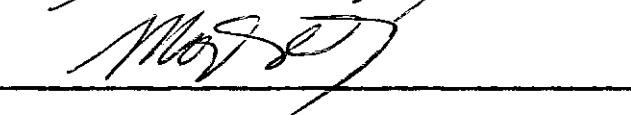
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:


Presidente


Dr. Brumelange


Dr. Pala


Dr. Tavares

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
ABRIL DE 1974

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Hans Ingo Weber que com sua orientação esclarecida criou condições para a realização deste Trabalho. Ainda especialmente pela sua dedicação e interesse, de onde nasceu forte motivação.

À COPPE, Conselho Nacional de Pesquisa e Fundação Escola Politécnica da Bahia, pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

É feita a análise do Movimento de Balanço em um sistema dotado de perturbação própria. Esse sistema corresponde a uma caixa tendo internamente um pendulo e que se apoia através de uma suspensão elástica dissipativa sobre uma base. O Modelo Matemático é conseguido através da Mecânica Newtoniana.

Determina-se a Carta de Estabilidade em condições exatas e em condições aproximadas, a partir do critério de Liénard-Chipart.

Estuda-se a influência de excitações típicas, sobre a caixa e na base, e o efeito de alguns parametros do sistema sobre sua resposta.

ABSTRACT

The roll motion of a system with internal perturbation is investigated. The system consists of a rigid box with a pendulum fixed on the top and supported by an elastic dissipative suspension. The mathematical model is obtained by the Newtonian Mechanics.

One establishes the stability chart with exact and with approximate conditions, following the Liénard-Chipart criterium.

One investigates the influence of typical excitations on the box and its base and the effect of the variation of some parameters of the system on its response.

I N D I C E

CAPÍTULO I	- APRESENTAÇÃO E MODELO FÍSICO	1
CAPÍTULO II	- MODELO MATEMÁTICO	7
	2.1. Coordenadas e Referenciais	7
	2.2. Análise de Forças	9
	2.3. Modelo Matemático	13
	2.4. Simplificação do Modelo Matemático	16
	2.5. Normalização	18
	2.6. Comentário sobre as Excitações	21
CAPÍTULO III	- ESTABILIDADE	27
	3.1. Estabilidade para $c_2 = 0$	29
	3.2. Estabilidade para $c_2 \neq 0$	33
	3.3. Comentários e Comparações	39
CAPÍTULO IV	- INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS	43
	4.1. Excitação pela Força Horizontal $F(t)$	43
	4.2. Excitação pela Rotação da Base $\psi(t)$	45
	4.3. Resultados e Comentários	45
CAPÍTULO V	- PROGRAMAS UTILIZADOS	56
	5.1. Normalização	56
	5.2. Estudo Qualitativo do Modelo Matemático	57
	5.3. Solução Numérica do Modelo Matemático	58
	5.4. Determinação dos Auto-Valores	60
	5.5. Determinação do Fator $f_a = \Delta_c / \Delta_p$	60
	Diagrama de Fluxo para o Programa - 1 -	61
	Diagrama de Fluxo para o Programa - 2 -	67
	Diagrama de Fluxo para o Programa - 3 -	72
	Diagrama de Fluxo para o Programa - 4 -	76
	Diagrama para Computação Analógica	81
	- BIBLIOGRAFIA	82

CAPÍTULO I

APRESENTAÇÃO E MODELO FÍSICO

Entende-se por Movimento de Balanço de um corpo em movimento, à rotação dele em torno do seu eixo que na posição de equilíbrio coincide com a tangente ao movimento. As outras rotações possíveis são em torno do eixo transversal, chamada arfagem, e do eixo vertical, chamada aproamento.

Os nomes desses movimentos são em português oriundos da terminologia da engenharia naval. Em inglês eles são, respectivamente, roll, pitch e yaw (Fig. 1).

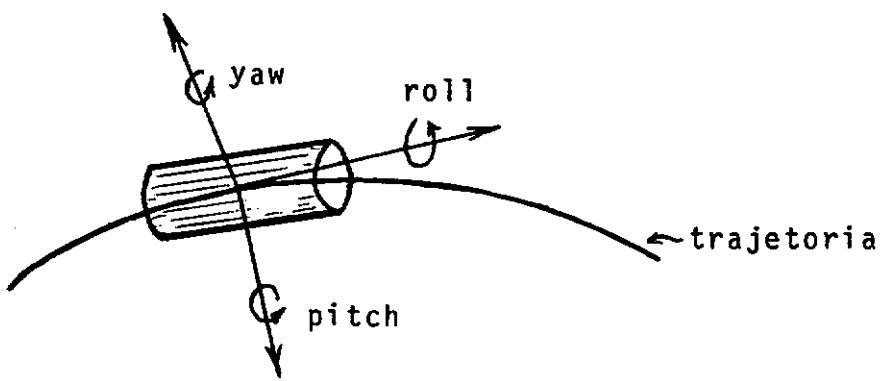


FIG. 1

Pretendemos neste trabalho analisar somente o movimento de balanço de um determinado sistema, para conhecer o efeito de vários parâmetros sobre o comportamento dinâmico. Para este fim será idealizado um modelo físico, proveniente de uma situação real.

O estudo do movimento de um vagão ferroviário está ganhando muito interesse científico na atualidade como demonstram as publicações [7] a [10]. A quantidade de efeitos interessantes para o estudo é muito grande e somente foi abordada em parte.

O modelo adotado neste trabalho baseou-se no pro-

blema do movimento em linha reta de um vagão contendo uma carga em movimento. Considerando-se um vagão apoiado por uma suspensão elástica sobre dois truques, cada qual novamente com ligação elástica a quatro rodas, e lembrando-se que um corpo livre possui seis graus de liberdade, vê-se a complexidade do problema. É normal fazer simplificações no modelo de forma a obter certas características básicas do movimento.

Neste trabalho supõe-se o movimento de balanço desacoplável, podendo portanto, ser investigada uma seção transversal do vagão. No modelo físico uma caixa com centro de massa adotado simula o vagão, um pendulo preso na parte superior da caixa representa a massa em movimento e uma base simula o truque (Fig. 2). Não houve preocupação em se definir mais exatamente o elemento físico representado pelo pendulo, que poderia ser encarado como por exemplo um fluido contido no vagão. É claro que essa hipótese deve ter, caso normal, sua viabilidade verificada experimentalmente, seja identificando um sistema real, seja pela construção de um modelo experimental. Como se pretende obter um modelo físico relativamente simples ainda são acrescentadas algumas simplificações que permitam um estudo dentro do escopo deste trabalho.

Em relação ao problema real mencionado, corresponde a substituir certos acoplamentos por perturbações específicas. Assim, não se considera o acoplamento transversal caixa-base, substituindo-o por uma excitação $F(t)$ na caixa e mantendo a base rígida. Por outro lado, não se considera o movimento das rodas sobre os trilhos, apenas estuda-se o efeito de perturbações na caixa pelos movi-

mentos, de rotação $\psi(t)$ e deslocamento vertical $y(t)$, da base.

O modelo físico foi tomado constituído de cinco partes distintas:

- a caixa
- a perturbação (pendulo)
- a suspensão
- a base
- as excitações

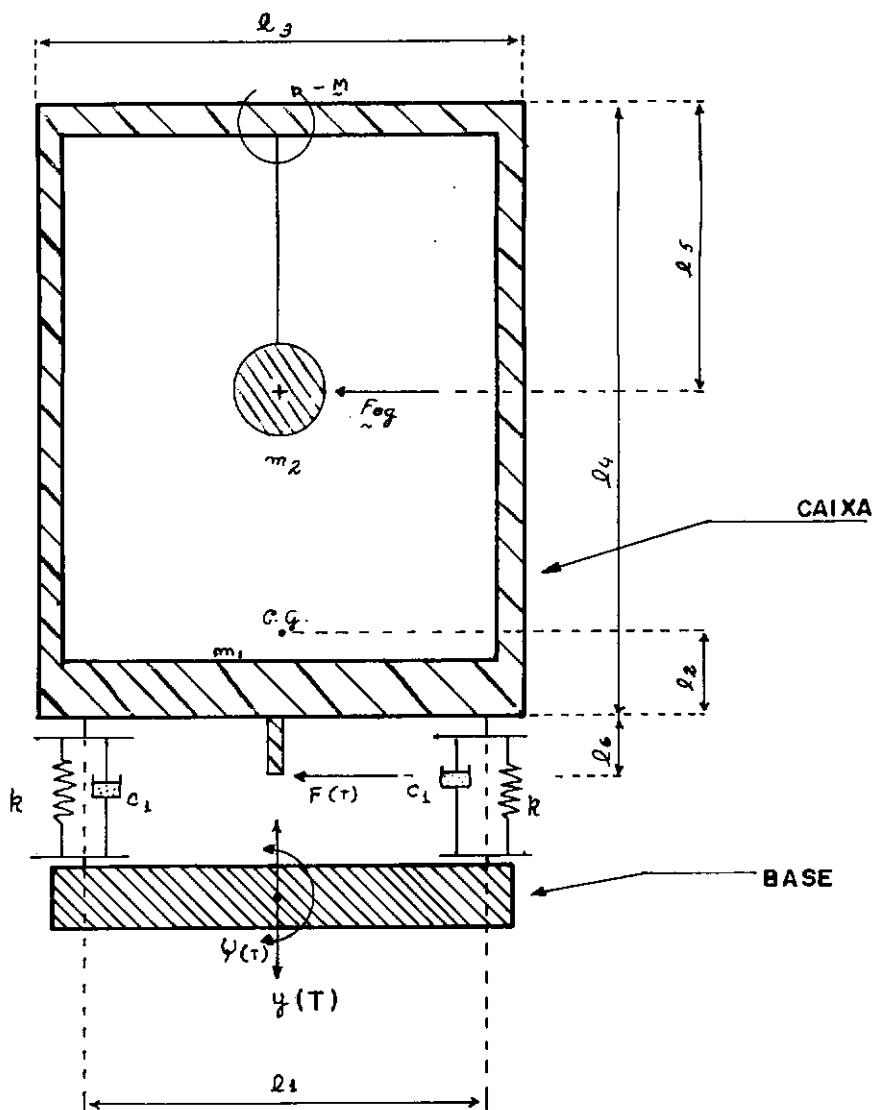
(FIGURA 2)

A Fig. 2 esclarece sobre a caixa, suspensão, base e excitações.

A perturbação requer, entretanto, alguns comentários adicionais.

Procurou-se fazer a caixa dotada de uma auto-perturbação, isto é, simulando a interação com uma carga em movimento, que para maior generalidade foi suposta constituída de uma parte inercial com efeito elástico e de amortecimento. Essa parte inercial e seu efeito elástico de reposição foram tomados equivalentes a um pendulo (m_2 , ℓ_5), sendo assim definidos, respectivamente, pela massa m_2 e pelo comprimento ℓ_5 . O efeito de amortecimento, entretanto, foi estabelecido como sendo de caráter viscoso e interagindo com a caixa, da forma que passamos a esclarecer.

Em se tratando de estudar um sistema em relação



- l_1 DISTANCIA ENTRE MOLAS
- l_2 ALTURA DO CENTRO DE GRAVIDADE DA CAIXA
- l_3 LARGURA DA CAIXA
- l_4 ALTURA DA CAIXA
- l_5 COMPRIMENTO DO PENDULO
- l_6 BRAÇO DE $F(t)$
- J_1 MOMENTO DE INERCIA DA CAIXA
- m_2 MASSA DO PENDULO
- k CONSTANTE DE MOLA DA SUSPENÇÃO
- c_1 AMORTECIMENTO SUSPENSÃO / CAIXA
- c_2 AMORTECIMENTO PENDULO / CAIXA
- m_1 MASSA DA CAIXA
- $F(t), \psi(t), Y(t) \dots$ EXCITAÇÕES

Fig. 2

a uma perturbação própria, é evidente o interesse em fazê-la a mais crítica possível, dentro de limitações ou naturezas pré-estabelecidas. A parte amortecida deverá, desse modo, estar vinculada às partes elástica e dinâmica já definidas para a auto-perturbação.

A Fig. 3 e a Fig. 4 abaixo mostram dois modelos possíveis para a simulação do amortecimento viscoso a ser usado em conexão com m_2 e ℓ_5 .

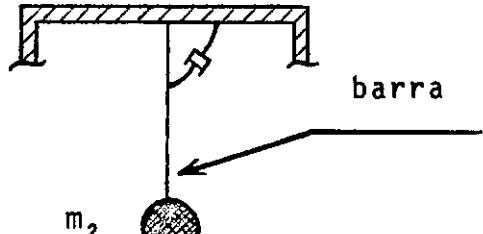


Fig. 3

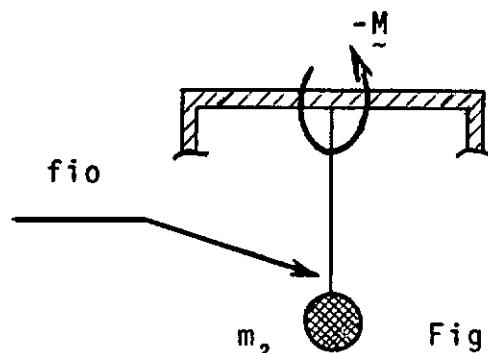


Fig. 4

Na Fig. 3 o pendulo é suportado por uma barra de peso desprezível que tem na rotula de encaixe na caixa um efeito de amortecimento viscoso. Na Fig. 4 o pendulo é suportado por um fio; o amortecimento sobre a massa é proporcional à sua velocidade de rotação em torno do ponto de suspensão, e a interação se dá somente através de um momento equivalente sobre a caixa. Convém notar que o primeiro deles faz atuar sobre a caixa, uma reação $-F_{eq}$ que tende a diminuir o efeito do momento $-M$, também sobre a caixa, e que existe em ambos. Isto pode ser visto na Fig. 5 e na Fig. 6, respectivamente.

mente, onde só estão representadas as forças devido ao amortecimento.

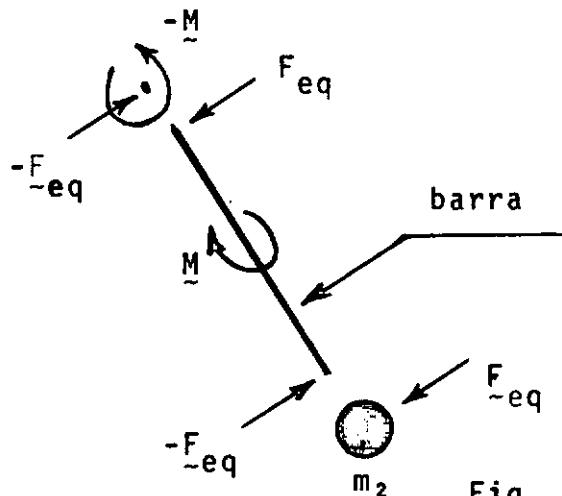


Fig. 5

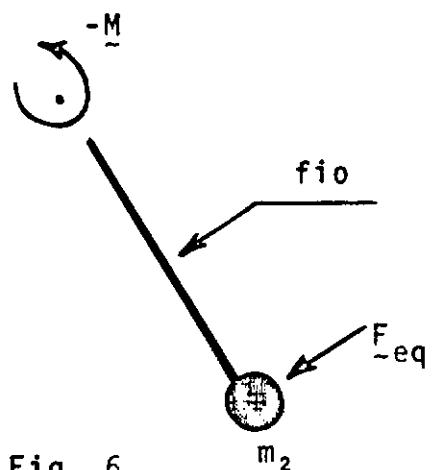


Fig. 6

Como será visto posteriormente o momento $\underline{-M}$ sobre a caixa é um elemento de instabilização do sistema (Graf. II). Para a auto-perturbação no modelo físico adotado usou-se o caso descrito pela Fig. 4 que oferece uma situação mais crítica.

Sobre as outras partes que constituem o modelo físico podem ser feitos também alguns comentários. A suspensão é suposta de forma a fazer agir sobre a caixa somente forças verticais, a despeito da existência da excitação horizontal $F(t)$. Por outro lado, $\psi(t)$ é tomado como a rotação da base, em torno de seu ponto médio, sendo $y(t)$ o seu deslocamento linear.

CAPÍTULO II

MODELO MATEMÁTICO

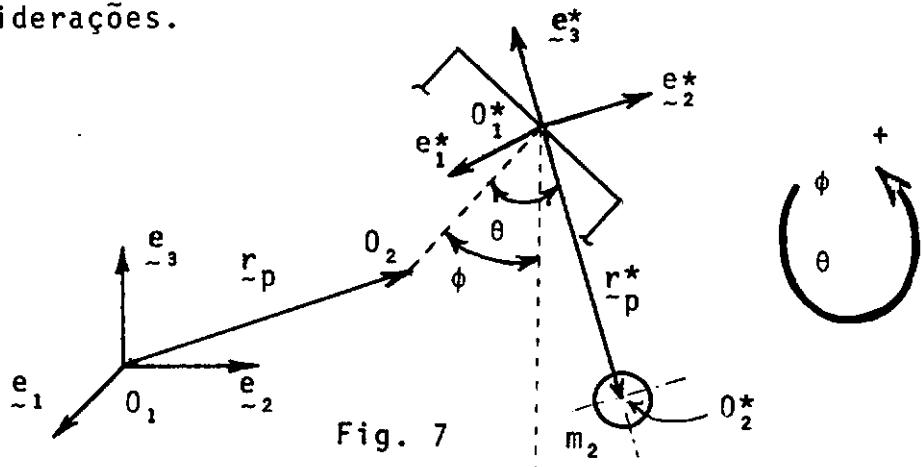
Neste capítulo procuraremos obter um modelo matemático representativo do modelo físico apresentado no capítulo anterior. Adotaremos para isto o método da Lei de Newton.

2.1. Coordenadas e Referenciais

Seja um referencial fixo representado por seus vetores bases $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, e um outro móvel com origem no ponto O_1^* , de suspensão da massa m_2 , e vetores bases $(\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^*)$. Este referencial por sua vez é fixo no pendulo, tal que \underline{e}_3^* tenha sempre a direção do fio de sustentação de m_2 , \underline{e}_2^* forma com \underline{e}_3^* o plano em que se está estudando o sistema e \underline{e}_1^* é normal a ele (Fig. 7).

Consideremos como $\phi(t)$ o ângulo formado com a vertical, por uma perpendicular à base da caixa, e seja $\theta(t)$ o ângulo do pendulo, tomado em relação à esta perpendicular.

Convencionemos como positivo o sentido anti-horário, e seja O_2 o centro de gravidade da caixa. A Fig. 7 esclarece quanto a estas considerações.



Tomemos ainda como $x_2(t)$ e $x_3(t)$, respectivamente, os deslocamentos horizontal e vertical do centro de gravidade da caixa.

O vetor posição \underline{r}_p de O_2 será então:

$$\underline{r}_p = x_2(t) \underline{e}_2 + x_3(t) \underline{e}_3 \quad (2.1)$$

Por sua vez, o vetor posição de O_2^* será dado por:

$$\underline{r}_p^* = -l_5 \underline{e}_3^* \quad (2.2)$$

onde l_5 é o comprimento do pendulo.

A relação entre os vetores base é obtida tendo-se em vista a rotação relativa entre os dois referenciais. Observa-se que rotações positivas devem ser somadas para obtenção do ângulo final entre o pendulo e a vertical, o que pode ser visto pela Fig.7. Podemos, portanto, escrever:

$$\begin{aligned} \underline{e}_2 &= \cos(\phi + \theta) \underline{e}_2^* - \sin(\phi + \theta) \underline{e}_3^* \\ \underline{e}_3 &= \sin(\phi + \theta) \underline{e}_2^* + \cos(\phi + \theta) \underline{e}_3^* \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \underline{e}_2^* &= \cos(\phi + \theta) \underline{e}_2 + \sin(\phi + \theta) \underline{e}_3 \\ \underline{e}_3^* &= -\sin(\phi + \theta) \underline{e}_2 + \cos(\phi + \theta) \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para obtenção do número necessário de coordenadas deve ser verificado quantos graus de liberdade tem o sistema: a caixa pode apresentar movimento de rotação e dois tipos de deslocamento, e o pendulo pelo fato de estar prescrito o movimento do seu ponto de suspensão tem sua posição determinada através de um ângulo.

Tem-se no total quatro graus de liberdade e o seguinte conjunto de coordenadas:

- $x_2(t)$: deslocamento horizontal da caixa
- $x_3(t)$: deslocamento vertical da caixa
- $\phi(t)$: ângulo da caixa
- $\theta(t)$: ângulo do pendulo

2.2 - Análise de Forças

Temos na caixa a distinguir cinco origens de solicitações:

- forças da suspensão
- forças de inércia
- forças gravitacionais
- excitação $F(t)$

Seja \underline{T} e $-\underline{M}$, respectivamente, a tração e o momento do pendulo sobre a caixa (conforme hipótese anterior). As suas expressões, no referencial absoluto, serão então:

$$\underline{T} = T \sin(\phi + \theta) \underline{e}_2 - T \cos(\phi + \theta) \underline{e}_3 \quad (2.5)$$

$$-\underline{M} = c_2 \dot{\theta} \underline{e}_1 \quad (2.6)$$

As forças \underline{F}_1 e \underline{F}_2 da suspensão sobre a caixa serão dadas por:

$$\underline{F}_1 = (kd_1) \underline{e}_3 + (c_1 \dot{d}_1) \underline{e}_3 + \left(\frac{m_1 + m_2}{2} g \right) \underline{e}_3 \quad (2.7)$$

$$\underline{F}_2 = (kd_2) \underline{e}_3 + (c_1 \dot{d}_2) \underline{e}_3 + \left(\frac{m_1 + m_2}{2} g \right) \underline{e}_3$$

onde:

$$d_1 = y - x_3 + \frac{\ell_1}{2}(\sin \phi - \sin \psi) - \ell_2(1 - \cos \phi)$$

$$d_2 = y - x_3 - \frac{\ell_1}{2}(\sin \phi - \sin \psi) - \ell_2(1 - \cos \phi)$$

o que pode ser visto pela Fig. 8.

Fica-se com:

$$\begin{aligned} \underline{F}_1 &= \{k[y - x_3 + \frac{\ell_1}{2}(\sin \phi - \sin \psi) - \ell_2(1 - \cos \phi)] \\ &+ c_1[\dot{y} - \dot{x}_3 + \frac{\ell_1}{2}(\dot{\phi} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \psi) - \ell_2 \dot{\phi} \sin \phi] \\ &+ (m_1 + m_2)g/2\} \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (2.8)$$

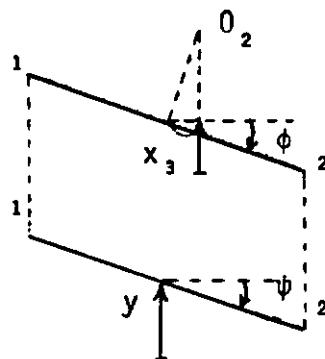


Fig. 8

$$\begin{aligned} \underline{F}_2 &= \{k[y - x_3 - \frac{\ell_1}{2}(\sin \phi - \sin \psi) - \ell_2(1 - \cos \phi)] \\ &+ c_1[\dot{y} - \dot{x}_3 - \frac{\ell_1}{2}(\dot{\phi} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \psi) - \ell_2 \dot{\phi} \sin \phi] \\ &+ (m_1 + m_2)g/2\} \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Denotando por \underline{M}_{in} e \underline{F}_{in} , respectivamente, o momento e a força de inércia devido à inércia da caixa, e notando que $F(t)$ é definida sempre horizontal, chegamos a:

$$\underline{M}_{in} = - J_1 \ddot{\phi} \underline{e}_1 \quad (2.10)$$

$$\underline{F}_{in} = - m_1 \ddot{x}_2 \underline{e}_2 - m_1 \ddot{x}_3 \underline{e}_3 \quad (2.11)$$

$$\underline{F}(t) = F(t) \underline{e}_2 \quad (2.12)$$

Para a massa m_2 , temos a distinguir quatro origens de solicitações:

- interação com a caixa
- forças inerciais
- forças gravitacionais
- forças de amortecimento.

Como foi apresentado no Cap. I, a massa do pêndulo estará sujeita a uma força de amortecimento proporcional à sua velocidade (amortecimento viscoso). Essa força será representada por F_{eq} , por ser devida a um efeito equivalente que atua sobre a caixa como um momento $-M$.

$$\underline{M} = F_{eq} \times \underline{r}_p^* \rightarrow F_{eq} = - \frac{c_2}{\lambda_s} \dot{\theta} \underline{e}_2^* \quad (2.13)$$

Representemos por \underline{a}_p^* a aceleração absoluta de m_2 escrita no referencial $(\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^*)$. Se denotarmos por $\underline{\omega}$ a rotação absoluta de $(\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^*)$ e por $\underline{a}_{0_1}^*$ a aceleração absoluta de O_1^* , teremos então:

$$\underline{a}_p^* = \underline{a}_{0_1}^* + \underline{a}_r^* + 2\underline{\omega}^* \times \underline{v}_r^* + \dot{\underline{\omega}}^* \times \underline{r}_p^* + \underline{\omega}^* \times (\underline{\omega}^* \times \underline{r}_p^*) \quad (2.14)$$

onde \underline{v}_r^* e \underline{a}_r^* são, respectivamente a velocidade e aceleração de m_2 em $(\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^*)$. Como m_2 está fixa em $(\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^*)$ e da Fig. 2 temos respectivamente:

$$\underline{v}_r^* = \underline{a}_r^* = \underline{0} \quad (2.15)$$

$$\underline{\omega}^* = (\dot{\phi} + \dot{\theta}) \underline{e}_1^* \quad (2.16)$$

A aceleração absoluta \ddot{a}_0^* será dada por:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_0^* &= [\ddot{x}_2 - (\ell_4 - \ell_2)(\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi)] \hat{e}_2 \\ &+ [\ddot{x}_3 - (\ell_4 - \ell_2)(\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi)] \hat{e}_3\end{aligned}\quad (2.17)$$

Substituindo-se (2.3) em (2.17), chega-se a:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_0^* &= \{[\ddot{x}_2 - (\ell_4 - \ell_2)(\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi)] \cos(\phi + \theta) + \\ &+ [\ddot{x}_3 - (\ell_4 - \ell_2)\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi] \sin(\phi + \theta)\} \hat{e}_2^* + \\ &+ \{[\ddot{x}_3 - (\ell_4 - \ell_2)(\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi)] \cos(\phi + \theta) - \\ &- [\ddot{x}_2 - (\ell_4 - \ell_2)(\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi)] \sin(\phi + \theta)\} \hat{e}_3^*\end{aligned}\quad (2.18)$$

Substituindo (2.15), (2.16) e (2.18) em (2.14) e denotando por a_2^* e a_3^* as componentes de \ddot{a}_p^* em $(\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*)$, chega-se a:

$$\begin{aligned}a_2^* &= \ddot{x}_2 \cos(\phi + \theta) + \ddot{x}_3 \sin(\phi + \theta) - \dot{\phi}^2 [\cos \phi \sin(\phi + \theta) - \\ &- \sin \phi \cos(\phi + \theta)] (\ell_4 - \ell_2) + \ddot{\phi} \{\ell_5 - (\ell_4 - \ell_2)[\cos \phi \\ &\cos(\phi + \theta) + \sin \phi \sin(\phi + \theta)] + \ell_5 \ddot{\theta}\}\end{aligned}\quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}a_3^* &= \ddot{x}_3 \cos(\phi + \theta) - \ddot{x}_2 \sin(\phi + \theta) - \dot{\phi}^2 [\cos \phi \cos(\phi + \theta) - \\ &- \sin \phi \sin(\phi + \theta)] (\ell_4 - \ell_2) + \ddot{\phi} \{\cos \phi \sin(\phi + \theta) - \\ &- \sin \phi \cos(\phi + \theta) + \ell_5 (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2\}\end{aligned}\quad (2.20)$$

Adotando-se a hipótese de que os termos não lineares são suficientemente pequenos em face aos demais, podemos proceder a uma primeira linearização destas expressões obtidas. Evidentemente, fica-se restringido a deslocamentos suficientemente pequenos.

nos, bem como, as velocidades e as acelerações.

Primeira Linearização:

$$\underline{T} = T(\phi + \theta) \underline{e}_2 - T \underline{e}_3, \quad (2.21)$$

$$\underline{F}_1 = \{k[y - x_3 + \frac{\ell_1}{2}(\phi - \psi)] + c_1[\dot{y} - \dot{x}_3 + \frac{\ell_1}{2}(\dot{\phi} - \dot{\psi})] + \\ + \frac{m_1 + m_2}{2}g\} \underline{e}_3, \quad (2.22)$$

$$\underline{F}_2 = \{k[y - x_3 - \frac{\ell_1}{2}(\phi - \psi)] + c_1[\dot{y} - \dot{x}_3 - \frac{\ell_1}{2}(\dot{\phi} - \dot{\psi})] + \\ + \frac{m_1 + m_2}{2}g\} \underline{e}_3, \quad (2.23)$$

$$\underline{a}_p^* = [\ddot{x}_2 + (\ell_5 - \ell_4 + \ell_2)\ddot{\phi} + \ell_5\ddot{\theta}] \underline{e}_2^* + \ddot{x}_3 \underline{e}_3^* \quad (2.24)$$

2.3 - Modelo Matemático

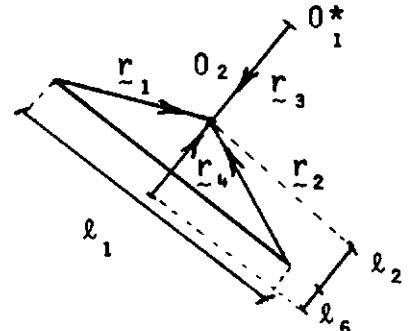
As condições de equilíbrio dinâmico (lei de D'Alembert) para a caixa:

$$\underline{T} - (m_2 g) \underline{e}_3 + \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_{in} + \underline{F}(t) = 0$$

$$\underline{M} + \underline{M}_{in} + \underline{F}_1 \times \underline{r}_1 + \underline{F}_2 \times \underline{r}_2 + \underline{T} \times \underline{r}_3 + \underline{F}(t) \times \underline{r}_4 = 0$$

onde os \underline{r}_i , $i=1, \dots, 4$ são os vetores que ligam os pontos de aplicação, das forças respectivas, ao centro de gravidade da caixa. Pe-
la Fig. 9 tiramos suas expressões:

Fig. 9



$$\underline{r}_1 = \left(\frac{\ell}{2} \cos\phi - \ell_2 \sin\phi \right) \underline{e}_2 + \left(\ell_2 \cos\phi + \frac{\ell}{2} \sin\phi \right) \underline{e}_3, \quad (2.27)$$

$$\underline{r}_2 = - \left(\frac{\ell}{2} \cos\phi + \ell_2 \sin\phi \right) \underline{e}_2 + \left(\ell_2 \cos\phi - \frac{\ell}{2} \sin\phi \right) \underline{e}_3 \quad (2.28)$$

$$\underline{r}_3 = (\ell_4 - \ell_2) \sin\phi \underline{e}_2 - (\ell_4 - \ell_2) \cos\phi \underline{e}_3 \quad (2.29)$$

$$\underline{r}_4 = - (\ell_2 + \ell_6) \sin\phi \underline{e}_2 + (\ell_2 + \ell_6) \cos\phi \underline{e}_3 \quad (2.30)$$

Fica-se, portanto, com:

$$\underline{F}_1 \times \underline{r}_1 = - F_1 \left(\frac{\ell}{2} \cos\phi - \ell_2 \sin\phi \right) \underline{e}_1 \quad (2.31)$$

$$\underline{F}_2 \times \underline{r}_2 = F_2 \left(\frac{\ell}{2} \cos\phi + \ell_2 \sin\phi \right) \underline{e}_1 \quad (2.32)$$

$$\underline{T} \times \underline{r}_3 = - T (\ell_4 - \ell_2) \sin\phi \underline{e}_1 \quad (2.33)$$

$$\underline{F}(t) \times \underline{r}_4 = F(t) (\ell_2 + \ell_6) \cos\phi \underline{e}_1 \quad (2.34)$$

Substituindo-se (2.11), (2.12), (2.21), ..., (2.23)

em (2.25) chega-se a:

$$m_1 \ddot{x}_2 - T(\phi + \theta) = F(t) \quad (2.35)$$

$$m_1 \ddot{x}_3 + 2c_1 \dot{x}_3 + 2kx_3 - T = 2ky + 2c_1 \dot{y} \quad (2.36)$$

Substituindo-se (2.6), (2.10), (2.31), ..., (2.34)

em (2.26) chega-se a:

$$J_1 \ddot{\phi} + (F_1 + F_2) \left(\frac{\ell}{2} \cos\phi - \ell_2 \sin\phi \right) + T(\ell_4 - \ell_2) \sin\phi - \\ - F(\ell_2 + \ell_6) \cos\phi - c_2 \dot{\theta} = 0 \quad (2.37)$$

As equações (2.35), (2.36) e (2.37) são representati

vas para o movimento da caixa, estando acoplados com as equações do

pendulo através de T e $c_2 \dot{\theta}$.

Por outro lado, escrevendo as condições de equilíbrio dinâmico para o pendulo

$$\underline{F}_{\text{eq}} + \underline{T} + \underline{P}_2 - m_2 \underline{a}_p = 0$$

A tração \underline{T} e o peso \underline{P}_2 escritos no referencial $(\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^*)$ tomam a forma:

$$\underline{T}^* = T \underline{e}_3^* \quad (2.39)$$

$$\underline{P}_2^* = -m_2 g \sin(\phi+\theta) \underline{e}_2^* - m_2 g \cos(\phi+\theta) \underline{e}_3^* \quad (2.40)$$

Substituindo-se (2.13), (2.24), (2.39) e (2.40) em (2.38) chega-se a:

$$m_2 [\ddot{x}_2 + (\ell_5 - \ell_4 + \ell_2) \ddot{\phi} + \ell_5 \ddot{\theta} + g \sin(\phi+\theta)] + \frac{c}{\ell_5} \dot{\theta} = 0 \quad (2.41)$$

$$m_2 \ddot{x}_3 + m_2 g \cos(\phi+\theta) - T = 0 \quad (2.42)$$

Ficamos, assim, com um sistema de cinco equações e cinco incógnitas, incluindo a tração \underline{T} . Notando, porém, que a mesma pode ser explicitada em (2.42) e substituindo-a em (2.35), ..., (2.37), (2.41) obtemos, então, um sistema de quarta ordem em x_2, x_3, ϕ e θ . Substitue-se também F_1 e F_2 em (2.37) por suas expressões em (2.22) e (2.23).

O modelo, assim obtido é não linear. Considerando-se a hipótese já feita de deslocamentos, velocidades e acelerações suficientemente pequenos, podemos proceder a uma segunda linearização. Obtém-se as seguintes equações:

Segunda linearização:

$$m_1 \ddot{x}_2 - m_2 g \phi - m_2 g \theta = F(t) \quad (2.43)$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_3 + 2c_1 \dot{x}_3 + 2kx_3 = 2ky + 2c_1 \dot{y} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\phi} + \frac{1}{2} \ddot{\psi} - c_2 \dot{\theta} + \xi(t)\phi + (\ell_4 - \ell_2)m_2 g \theta &= (\ell_2 + \ell_6)F + \\ + k \frac{\ell^2}{2} \psi + c_1 \frac{\ell^2}{2} \dot{\psi} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + m_2 (\ell_5 - \ell_4 + \ell_2) \ddot{\phi} + m_2 \ell_5 \ddot{\theta} + \frac{c}{\ell_5^2} \dot{\theta} + m_2 g \phi + m_2 g \theta = 0 \quad (2.46)$$

onde $\xi(t)$ é dado por:

$$\xi(t) = - (m_1 + m_2)g\ell_2 - k\ell_1(y - \frac{\ell}{2}) - 2c_1\ell_2\dot{y} \quad (2.47)$$

O termo $\xi(t)$ aparece no sistema como um parâmetro variável, variação esta consequente de $y(t)$. O movimento vertical $y(t)$ da base atua, portanto, como excitação paramétrica, perdendo-se com isto a possibilidade de soluções por técnicas elementares. Dependendo de $y(t)$, pode-se, porém, obter soluções em série. Soluções numéricas para sistemas lineares podem sempre ser adotadas.

2.4 - Simplificação do Modelo Matemático

A segunda equação em (2.44) é desacoplada das demais. Isto mostra que nas condições da hipótese assumida o movimento vertical é desacoplado da rotação (justificando, assim o seu estudo em separado) e vice-versa, sendo excitado apenas pelo movimento vertical da base. A solução geral de (2.44), será:

$$x_3(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + x_p(t) \quad (2.48)$$

onde

$$\lambda_i = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 2(m_1 + m_2)k}}{(m_1 + m_2)}, \quad i = 1, 2 \quad (2.49)$$

sendo $x_p(t)$ a solução particular que dependerá de $y(t)$.

Se $y(t)$ tem desenvolvimento em série de Fourier

[1]

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (2.50)$$

então

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y(i, n, \omega) c_n e^{in\omega t} \quad (2.51)$$

onde

$$Y(i, n, \omega) = \frac{2(k + in\omega c_1)}{k - n^2 \omega^2 (m_1 + m_2) + in\omega c_1} \quad (2.52)$$

Não é nosso objetivo discutir em detalhe as características desse movimento vertical. É comum encontrar um estudo pormenorizado desse movimento inclusive em textos básicos que estudam veículos.

Observando-se o sistema resultante (2.43), (2.45),

(2.46) pode-se notar, de imediato, que mais uma simplificação é possível: a variável x_2 aparece como \ddot{x}_2 em duas das equações. Logo ela também pode ser eliminada tornando bem mais fácil a solução do modo cujo estudo nos propomos. As equações resultantes são:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\phi} + \frac{\ell_1^2}{2} c_1 \dot{\phi} - c_2 \dot{\theta} + \xi(t) \phi + (\ell_4 - \ell_2) m_2 g \theta &= (\ell_2 + \ell_6) F + \\ &+ \frac{\ell_1^2}{2} k \psi + \frac{\ell_1^2}{2} c_1 \dot{\psi} \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$m_2 \ddot{\ell}_5 \theta + m_2 (\ell_5 - \ell_4 + \ell_2) \dot{\phi} + \frac{c_2}{\ell_5} \ddot{\theta} + \frac{m_2}{m_1} (m_2 + m_1) g \phi + \frac{m_2}{m_1} (m_2 + m_1) g \theta = - \frac{m_2}{m_1} F \quad (2.54)$$

2.5 - Normalização.

As equações (2.53) e (2.54) em forma matricial, se escreve:

$$\ddot{M}\ddot{X} + C\dot{X} + KX = E$$

Considerando-se o vetor $X = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix}$ e procurando escrever M com diagonal unitária, divide-se a primeira equação por J_1 e a segunda por $m_2 \ell_5$. Fica-se com:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(1 - \frac{\ell_4 - \ell_2}{\ell_5}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \frac{(J_1 - J_2)}{J_1} \frac{m_2 g}{\ell_5} \\ \frac{m_2 + m_1}{m_1 \ell_5} g \\ \frac{m_2 + m_1}{m_1 \ell_5} g \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\ell_1^2}{2} & \frac{c_1}{c_2} & -\frac{c_2}{J_1} \\ 0 & \frac{c_2}{m_2 \ell_5^2} & \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{\ell_2 + \ell_6}{J_1} F + \frac{\ell_1^2}{2J_1} k\psi + \frac{\ell_1^2}{2J_1} c_1 \dot{\psi} \\ -\frac{1}{m_2 \ell_5} F \end{pmatrix}$$

Observe-se que foi obtida uma matriz de massa M não simétrica. Essa forma é de obtenção possível no desenvolvimento pela Lei de Newton. Ela também não representa nenhuma dificuldade especial (no desenvolvimento por Lagrange ela é automaticamente simétrica) pois é simetrizável por uma transformação elementar, como será feito posteriormente. As outras matrizes não apresentam ne-

nhuma peculiariaridade, podendo portanto K e C serem desdobrados em partes simétricas e anti-simétricas. Portanto, o problema é bem geral se compõe de forças giroscópicas, forças de amortecimento viscoso, forças conservativas e não conservativas. Além do mais existe, como vimos, um termo de excitação paramétrica.

Normalização no tempo:

Seja

$$\tau = \Omega \cdot t \quad (2.55)$$

sendo τ um novo "tempo adimensional" e Ω uma constante. Tere-mos, então:

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{\Omega} \frac{d}{d\tau} \quad (2.56)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{\Omega^2} \frac{d^2}{d\tau^2} \quad (2.57)$$

Derivando em relação a τ o sistema toma a forma:

$$\frac{1}{\Omega^2} M X'' + \frac{1}{\Omega} C X' + K X = E$$

Multiplicando-se por Ω^2

$$M X'' + \Omega C X' + \Omega^2 K X = \Omega^2 E \quad (2.58)$$

Representemos por e_{11} e e_{21} os elementos do vetor E. O produto $\Omega^2 E$ fornecerá, então:

$$\Omega^2 e_{11} = \Omega^2 \frac{\ell_2 + \ell_6}{J_1} F + \Omega^2 \frac{\ell_1^2}{2J_1} k\psi + \Omega \frac{\ell_1^2}{2J_1} c_1 \psi' \quad (2.59)$$

$$\Omega^2 e_{21} = \Omega^2 \frac{1}{m_1 \ell_5} F \quad (2.60)$$

Substituindo-se (2.59) e (2.60) em (2.58) e explicitando ϕ'' da primeira equação e substituindo-a na segunda, fica-se com:

$$\phi'' = -a\phi' + s\theta' - \mu(\tau)\phi - b\theta + \eta_1(\tau) \quad (2.61)$$

$$\theta'' = c\phi' - z\theta' + [e\mu(\tau) - d]\phi + f\theta - \eta_2(\tau) \quad (2.62)$$

onde

$$\eta_1(\tau) = n\psi(\tau) + p\psi'(\tau) + vF(\tau) \quad (2.63)$$

$$\eta_2(\tau) = q\psi(\tau) + r\psi'(\tau) - wF(\tau) \quad (2.64)$$

$$\mu(\tau) = g^* - hy(\tau) - m y'(\tau) \quad (2.65)$$

sendo

$$a = \Omega \frac{\ell_1^2}{2J_1} c_1 \quad (2.66)$$

$$b = \Omega^2 g (\ell_4 - \ell_2) \frac{m_2}{J_1} \quad (2.67)$$

$$c = \Omega \frac{\ell_1^2}{2J_1} \left(1 - \frac{\ell_4 - \ell_2}{\ell_5} \right) c_1 \quad (2.68)$$

$$d = \Omega^2 \frac{m_1 + m_2}{\ell_5 m_1} \quad (2.69)$$

$$e = 1 - \frac{\ell_4 - \ell_2}{\ell_5} \quad (2.70)$$

$$f = \Omega^2 \left[(\ell_4 - \ell_2) \left(1 - \frac{\ell_4 - \ell_2}{\ell_5} \right) \frac{m_2}{J_1} g - \frac{m_1 + m_2}{m_1 \ell_5} g \right] \quad (2.71)$$

$$g^* = \Omega^2 \frac{1}{J_1} \left[k \frac{\ell_1^2}{2} - g(m_1 + m_2) \ell_2 \right] \quad (2.72)$$

$$h = \Omega^2 \frac{k \ell_1}{J_1} \quad (2.73)$$

$$m = \Omega \frac{2c_1 \ell_2}{J_1} \quad (2.74)$$

$$n = \Omega^2 \frac{k \ell_1^2}{2 J_1} \quad (2.75)$$

$$p = \Omega \frac{c_1 \ell_1^2}{2 J_1} \quad (2.76)$$

$$q = \Omega^2 \left(1 - \frac{\ell_4 - \ell_2}{\ell_5}\right) \frac{k \ell_1^2}{2 J_1} \quad (2.77)$$

$$r = \Omega \left(1 - \frac{\ell_4 - \ell_2}{\ell_5}\right) \frac{c_1 \ell_1^2}{2 J_1} \quad (2.78)$$

$$s = \Omega \frac{c_2}{J_1} \quad (2.79)$$

$$z = \Omega c_2 \left[\frac{1}{J_1} \left(1 - \frac{\ell_4 - \ell_2}{\ell_5}\right) + \frac{1}{m_2 \ell_5^2} \right] \quad (2.80)$$

$$w = \Omega^2 \left[\frac{\ell_2 + \ell_6}{J_1} \left(1 - \frac{\ell_4 - \ell_2}{\ell_5}\right) + \frac{1}{m_1 \ell_5} \right] \quad (2.81)$$

$$v = \Omega^2 \frac{\ell_2 + \ell_6}{J_1} \quad (2.82)$$

2.6 - Comentários sobre as Excitações.

Observando-se (2.61) e (2.62) é fácil se ver duas naturezas distintas na influência das excitações $y(t)$, $\psi(t)$ e $F(t)$:

- como parte não homogênea do sistema
- como parte variável nos coeficientes do sistema.

A primeira delas aparece em (2.63) e (2.64), respectivamente em $n_1(t)$ e $n_2(t)$. Conclui-se assim que a rotação $\psi(t)$

da base e a força horizontal $F(t)$ atuam somente sobre a solução particular, ou seja, o movimento forçado. De uma forma geral suas influências se expressarão sob forma do produto $y(i, n, \omega)$ sobre os coeficientes C_n de suas séries de Fourier, o que pode ser visto em (2.51) e (2.52). As equações (2.63) e (2.64) nos mostram ainda que a resposta do sistema dependerá, também, da velocidade de rotação $\dot{y}(t)$ (devido ao amortecimento c_1).

A influência sobre os coeficientes aparece no termo $\mu(t)$ em (2.65), e se deve à excitação $y(t)$. O movimento vertical de base atua, portanto, "mudando a tendência" da resposta do sistema.

Consideremos o sistema excitado somente em $y(t)$. Notando que M e C são constantes e a variação aparece somente em K , podemos escrever:

$$\ddot{M}\ddot{X} + C\dot{X} + K_c X + K(t)X = 0 \quad (2.83)$$

onde K_c é a parte constante de K e $K(t) = K(y(t))$ [6]. Supondo que $y(t)$ possui expansão em série de potência convergente em R^+ (conjuntos dos reais maiores ou iguais a zero), então $X(t)$ também o terá [6]:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n \quad (2.84)$$

onde os coeficientes A_n são vetores a serem determinados e seja

$$K(t) = \mu^*(t) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ e & 0 \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n \quad (2.85)$$

onde

$$\mu^*(t) = hy(t) + m\dot{y}(t)$$

e os coeficientes B_n são matrizes conhecidos através da excitação $y(t)$.

Substitindo-se (2.84) e (2.85) em (2.83), chega -se a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M A_{n+2}(n+1)(n+2)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} C A_{n+1}(n+1)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} K_c A_n t^n + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} D_n t^n = 0 \quad (2.86)$$

onde o vetor D_m é dado por

$$D_m = \sum_{j=0}^m B_{m-j} A_j \quad (2.87)$$

A equação (2.86) pode ser escrita como:

$$K_c A_0 + C A_1 + 2M A_2 + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [D_n + K_c A_n + C A_{n+1}(n+1) + \\ + M A_{n+2}(n+1)(n+2)] t^n = 0 \quad (2.88)$$

Portanto deve-se ter

$$n = 0 \rightarrow D_0 + K_c A_0 + C A_1 + 2M A_2 = 0 \quad (2.89)$$

$$n \geq 1 \rightarrow D_n + K_c A_n + C A_{n+1}(n+1) + M A_{n+2}(n+1)(n+2) = 0 \quad (2.90)$$

Fica-se, assim, com uma relação de recorrência a partir da qual se determina os A_n :

$$A_{n+2} = M^{-1} \left[\sum_{j=0}^n B_{n-j} A_j + K_c A_n + C A_{n+1}(n+1) \right] / (n+1)(n+2) \quad (2.91)$$

com A_0 e A_1 as condições iniciais em deslocamento e velocidade (θ que pode ser visto derivando (2.84) e em $t = 0$), respectivamente.

A partir de (2.91) é possível se ver a influência de $y(t)$ sobre a resposta $X(t)$. Notando que os A_{n+2} podem ser considerados como a soma de duas parcelas

$$M^{-1} \frac{K_c A_n + C A_{n+1}(n+1)}{(n+1)(n+2)} \quad \text{e} \quad M^{-1} \frac{\sum_{j=0}^{\infty} B_{n-j} A_j}{(n+1)(n+2)}$$

então a série de potência de $X(t)$ poderá ser escrita assim:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^* t^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{**} t^n \quad (2.92)$$

Para os A_n^* e A_n^{**} sempre podem ser definidas expressões polimoniais da forma:

$$A_n^* \neq f(B_i), \forall i > 0 \quad (2.93)$$

$$A_n^{**} = f(B_i \cdot f(A_j^*, B_\ell)), \quad i, j, \ell < n \quad (2.94)$$

Podemos, então, escrever:

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t)$$

onde $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são respectivamente a primeira e segunda parcela em (2.92). $X_1(t)$ não depende, portanto, dos B_n .

De (2.94) concluimos que se $B_n = 0, \forall n$, então $A_n^{**} = 0, \forall n$ e, consequentemente, $X_2(t) \equiv 0$. Como $B_n = 0, \forall n$ equi vale a $y(t) \equiv 0$, prova-se assim, que $X_1(t)$ representa a resposta do sistema quando não excitado. O movimento vertical $y(t)$ atua, portanto, adicionando à resposta natural $X_1(t)$, uma modificação $X_2(t)$.

Dando valores a n obtemos os A_n^* e A_n^{**}

$$A_2^* = \frac{M^{-1}}{2} (K_C A_0 + C A_1)$$

$n = 0 \rightarrow$

$$A_2^{**} = \frac{M^{-1}}{2} B_0 A_0$$

$$A_3^* = \frac{M^{-1}}{6} [K_C A_1 + 2M^{-1}C (K_C A_0 + C A_1)]$$

$n = 1 \rightarrow$

$$A_3^{**} = \frac{M^{-1}}{6} [B_1 A_0 + B_0 (A_1 + 2M^{-1} C A_0)]$$

e assim sucessivamente sempre podemos determinar os A_n^* e A_n^{**} dependentes de A_0 e A_1 .

Como A_0 e A_1 representam as condições iniciais em deslocamento e velocidade, respectivamente, pode-se concluir então, que não havendo perturbação inicial, o movimento vertical da base por si só não excitará o sistema ao movimento de rotação.

De (2.91) é fácil se ver que se os B_n forem suficientemente pequenos em face de K_C e C , então $X_2(t)$ será desprezível em face de $X(t)$. O mesmo efeito pode ser visto diretamente da equação diferencial, pois se a excitação $y(t)$ tiver a mesma ordem de grandeza do deslocamento $X(t)$ seu produto pode ser desprezado tendo em vista nossa aproximação linear.

Finalmente, queremos ressaltar que apresentamos um caminho possível de ser seguido para cálculo deste fenômeno de excitação paramétrica, que porém não será abordado com maior profundidade neste trabalho. Vale a pena lembrar que também outros métodos existem para o estudo de equações diferenciais com coeficientes periódicos. Porém todos eles levam a um desenvolvimento extre-

mamente complexo no nosso caso e poderiam resultar em um novo e extenso trabalho.

CAPÍTULO IIIESTABILIDADE

Neste capítulo estaremos interessados em determinar as condições necessárias e suficientes para que o sistema seja estável assintoticamente. Usaremos, para isto, o critério de Liénard-Chipart [3].

Consideremos as variáveis $v_i(t)$, $i=1, \dots, 4$ definidos como

$$v_1 = \phi \quad (3.1)$$

$$v_3 = \theta \quad (3.3)$$

$$v_2 = \dot{v}_1 \quad (3.2)$$

$$v_4 = \dot{v}_3 \quad (3.4)$$

portanto

$$\dot{\phi} = v_2 \quad (3.5)$$

$$\dot{\theta} = v_4 \quad (3.7)$$

$$\ddot{\phi} = \dot{v}_2 \quad (3.6)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{v}_4 \quad (3.8)$$

Substituindo (3.1), (3.3), (3.5), ... , (3.8) em (2.61) e (2.62), obtemos as equações:

$$\dot{v}_2 = -a v_2 - \mu v_1 - b v_3 + s v_4 + \eta_1 \quad (3.9)$$

$$\dot{v}_4 = c v_2 + (e \mu - d) v_1 + f v_3 - z v_4 - \eta_2 \quad (3.10)$$

As equações (3.2), (3.4), (3.9) e (3.10) formam um novo sistema nas variáveis v_i .

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mu & -a & -b & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (e\mu-d) & c & f & -z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_1 \\ 0 \\ -\eta_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

onde, conforme (2.65), se tem $\mu = \mu(t)$.

Esse sistema tem a forma:

$$\dot{\underline{Y}} = A(t) \underline{Y} + B(t)$$

e, se ele não está excitado temos:

$$\underline{n}_1 = 0$$

$$\mu = g^* = \text{const.}$$

$$\underline{n}_2 = 0$$

o que pode ser visto em (2.63), ..., (2.65), ficando-se assim com $A(t) = A = \text{const.}$ e $B = 0$. A equação (3.11) se reduz, portanto a

$$\dot{\underline{Y}} = A \underline{Y} \quad (3.12)$$

As soluções de (3.12) são da forma

$$\underline{Y} = \sum_i b_i e^{\lambda_i t} \underline{E}_i \quad (3.13)$$

onde os b_i são constantes arbitrárias, os \underline{E}_i os auto-vetores da matriz A e os λ_i seus correspondentes auto-valores. De (3.13) se ve que se $R_e(\lambda_i) < 0$, $\forall i$ então o sistema será assintoticamente estável.

Os auto-valores da matriz A serão as soluções da equação

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (3.14)$$

Desenvolvendo (3.14) chega-se ao polinômio característico

$$\begin{aligned} \lambda^4 + (z+a)\lambda^3 + (g^* - f + az - cs)\lambda^2 + [g^*z + cb - af - s(eg^* - d)]\lambda \\ + [b(eg^* - d) - g^*f] = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

que tem a forma

$$s_4 \lambda^4 + s_3 \lambda^3 + s_2 \lambda^2 + s_1 \lambda + s_0 = 0 \quad (3.16)$$

onde

$$s_0 = b(eg^* - d) - g^*f \quad (3.17)$$

$$s_1 = g^*z + cb - af - s(eg^* - d) \quad (3.18)$$

$$s_2 = g^* - f + az - cs \quad (3.19)$$

$$s_3 = a + z \quad (3.20)$$

$$s_4 = 1 \quad (3.21)$$

De posse dos coeficientes s_i , $i = 1, \dots, 4$ a estabilidade assintótica fica garantida pelas condições

$$s_i > 0, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.22)$$

$$s_1(s_2s_3 - s_1s_4) - s_0s_3^2 > 0 \quad (3.23)$$

que representam o critério de Liénard-Chipart adotado (veja, por exemplo, [3]).

Convém lembrar que a estabilidade dinâmica costuma ser estudada para sistemas sem excitações. Isto se justifica, pois a solução geral é sempre constituída de duas parcelas: a solução da homogênea mais a solução particular. Se o sistema homogêneo não é estável, então certamente também não o será sua solução geral. É claro, pode-se ter o caso da solução particular estabilizar a solução homogênea, o que evidentemente não representa interesse no estudo de veículos.

3.1 - Estabilidade para $c_2 = 0$.

De início vamos fazer o estudo da estabilidade do sistema quando não houver amortecimento entre o pêndulo e a caixa, para em seguida determinar a alteração da carta de estabilidade com a inclusão desse amortecimento. É claro que consideramos es-

tabilidade no sentido de Lyapunov, isto é, a estabilidade oscilante, já que o pêndulo deixa de ter seu movimento amortecido, o que pode ser visto ou fisicamente ou observando que a matriz de amortecimento C, definida no item 2.4, passa a ser positiva semi-definida.

No caso $c_2 = 0$, há visível simplificação das expressões, e é possível se obter conclusões pelo desenvolvimento algébrico. Tem-se no caso :

$$s_0 = b(eg^* - d) - g^*f \quad (3.24)$$

$$s_1 = bc - af \quad (3.25)$$

$$s_2 = g^* - f \quad (3.26)$$

$$s_3 = a \quad (3.27)$$

$$s_4 = 1 \quad (3.28)$$

pois $s = z = 0$ o que pode ser visto a partir de (2.79) e (2.80).

Substituindo (2.66), ..., (2.72) em (3.24), ..., (3.28), chega-se às expressões:

$$s_0 = \frac{1}{J_1} \left[\frac{k\ell_1^2}{2} - gm_1\ell_2 - gm_2\ell_4 \right] \frac{m_1+m_2}{m_1\ell_5} g \quad (3.29)$$

$$s_1 = \frac{\ell_1^2}{2J_1} \frac{m_1 + m_2}{m_1\ell_5} c_1 g \quad (3.30)$$

$$s_2 = \frac{k\ell_1^2}{2J_1} - \left(1 - \frac{\ell_4 - \ell_2}{\ell_5}\right) \frac{\ell_4 - \ell_2}{J_1} m_2 g + (m_2 + m_1) \left(\frac{1}{m_1\ell_5} - \frac{\ell_2}{J_1}\right) g \quad (3.31)$$

$$s_3 = \frac{\ell_1^2}{2J_1} c_1 \quad (3.32)$$

De (3.30) e (3.32) observa-se que:

$$s_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 l_5} g s_3$$

e (3.23) pode, então, ser escrita como

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1 l_5} g (s_2 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 l_5} g) - s_0 > 0 \quad (3.33)$$

Substituindo (3.29) e (3.31) em (3.33), chega-se a

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1 l_5^2} \frac{(l_4 - l_2)^2}{J_1} m_2 g^2 > 0 \quad (3.34)$$

o que mostra ser (3.23) sempre verificada.

De (3.30) e (3.32) ve-se que $s_i > 0$ para $i = 1$ e $i = 3$ desde que $c_1 > 0$. Ficamos, assim, somente com as condições

- (i) $s_0 > 0$
- (ii) $s_2 > 0$, $c_1 > 0$

Resolvendo (i):

De (3.29) conclui-se

$$\frac{k l_1^2}{2} - g m_1 l_2 - g m_2 l_4 > 0$$

portanto

$$\frac{k l_1^2}{2} > g m_2 l_4 + g m_1 l_2 \quad (3.35)$$

Resolvendo (ii):

Desenvolvendo (3.31) chega-se à inequação

$$\frac{k l_1^2}{2} - g m_2 l_4 - g m_1 l_2 + \frac{J_1}{l_5} g + \left[(l_4 - l_2)^2 + \frac{J_1}{m_1} \right] g \frac{m_2}{l_5} > 0$$

que pode ser escrita como

$$\frac{k\ell_1^2}{2} > gm_2\ell_4 + gm_1\ell_2 - \frac{J_1}{\ell_5}g - \left[(\ell_4 - \ell_2)^2 + \frac{J_1}{m_1} \right] g \frac{m_2}{\ell_5} \quad (3.36)$$

Notando que o segundo membro desta desigualdade é sempre menor que o de (3.35), conclui-se então que a estabilidade para $c_1 = 0$ fica garantida pela verificação de (3.35), com $c_1 > 0$.

Escrevendo (3.35) como

$$\frac{k\ell_1^2}{2g} > (\ell_4)m_2 + (\ell_2)m_1$$

a região de estabilidade ficará, então, delimitada por uma reta de coeficiente angular igual à altura ℓ_4 , da caixa, e coeficiente linear dado por $m_1\ell_2$ (ver gráf. I). Conclui-se, portanto, que:

- no sistema perturbado maior altura da caixa e do seu centro de gravidade instabilizam o sistema. Maiores valores da massa m_1 também acarretam instabilidade;
- no sistema sem o pêndulo, ou seja, sem a perturbação interna, a altura da caixa não influí diretamente na estabilidade.

Encarando (3.35) como condição sobre energias, podemos ainda concluir:

- o sistema será estável se a energia elástica da mola (correspondente a uma deflexão igual à bitola ℓ_1) for maior que a soma da energia potencial da massa m_2 (em cota correspondente à altura ℓ_4) mais a energia potencial da caixa (para uma altura igual a do seu centro de gravidade).

Reservamos, todavia, para o final deste item, a

ocorrência mais interessante. Observa-se que da verificação de (3.35) segundo o critério de Liénard-Chipart fica garantida estabilidade assintótica! Já foi ressaltado, porém, no início, que não é considerado amortecimento entre pêndulo e caixa, o que se expressa matematicamente por uma matriz de amortecimento positiva semi-definida. Ora, então estamos face a um caso onde o amortecimento é pervasivo ou penetrante, isto é, ele atravessa o sistema. Esse assunto tem sido tratado na literatura, principalmente por MÜLLER ([11] e [12]) baseado em uma discussão originária dos trabalhos de Thomson Tait. A conclusão direta, a partir do sistema de equações do movimento é simples no caso de K simétrica porém muito complicada no caso de K não simétrica. Dispensamos, portanto, essa verificação geral e nos limitamos ao que foi apresentado acima. Uma verificação do resultado obtido do mencionado critério pode ser feita determinando-se as raízes do polinômio característico (3.15) e que levam evidentemente às mesmas conclusões, isto é, a parte real dos auto-valores é sempre negativa, se for obedecida (3.35). O único caso de estabilidade oscilante ocorre no contorno (de (3.45); ver gráf. I)

$$\frac{k\ell_1^2}{2} = gm_2\ell_4 + gm_1\ell_2$$

3.2 - Estabilidade para $c_2 \neq 0$.

Substituindo-se (2.66), ..., (2.79) e (2.80) em (3.17), ..., (3.20), chega-se a

$$s_0 = \frac{1}{J_1} \left[\frac{k\ell_1^2}{2} - gm_1\ell_2 - gm_2\ell_4 \right] \frac{m_1 + m_2}{m_1\ell_5} g \quad (3.37)$$

$$s_1 = \frac{\ell_1^2}{\ell_5} \frac{m_1+m_2}{m_1} \frac{g}{2J_1} c_1 \left\{ \frac{1}{J_1 m_2 \ell_5} \left[\frac{k \ell_1^2}{2} - (m_1 + m_2) g \ell_2 \right] + \frac{m_1 + m_2}{J_1 m_1} g \right\} \frac{c_2}{\ell_5} \quad (3.38)$$

$$s_2 = \frac{k \ell_1^2}{2J_1} - \left(1 - \frac{\ell_4 - \ell_2}{\ell_5} \right) \frac{\ell_4 - \ell_2}{J_1} m_2 g + (m_2 + m_1) g \left[\frac{1}{m_1 \ell_5} - \frac{\ell_2}{J_1} \right] + \frac{\ell_1^2}{2J_1 \ell_5^2 m_2} c_1 c_2 \quad (3.39)$$

$$s_3 = \frac{\ell_1^2}{2J_1} c_1 + \left(\frac{J_1}{\ell_5^2 m_1} + 1 - \frac{\ell_4 - \ell_2}{\ell_5} \right) \frac{c_2}{J_1} \quad (3.40)$$

Análise de $s_0 > 0$:

Notando que (3.37) é igual a (3.29), fica-se com a mesma condição (3.35) do caso anterior.

Análise de $s_1 > 0$:

Observando que o único termo possível de ser negativo em (3.38) é

$$\left[\frac{k \ell_1^2}{2} - (m_1 + m_2) g \ell_2 \right]$$

e considerando que existe um $k \ell_1^2 / 2$ mínimo dado por (3.35), conclui-se que $s_1 > 0$ é sempre atendida quando $s_0 > 0$.

Isto pode ser visto por:

$$\left(\frac{k \ell_1^2}{2} \right)_{\min} = g m_1 \ell_2 + g m_2 \ell_4$$

$$\left(\frac{k \ell_1^2}{2} \right)_{\min} - (m_1 + m_2) g \ell_2 = g m_2 (\ell_4 - \ell_2) > 0$$

Análise de $s_2 > 0$:

Pelo resultado da análise de $s_2 > 0$ quando $c_2 = 0$ vimos que esta condição era sempre atendida se $s_0 > 0$. Também aqui o resultado é idêntico, pois o termo em c_2 acrescido é sempre positivo.

Análise de $s_3 > 0$:

De (3.40) fica-se com

$$\frac{\ell_1^2}{2J_1} c_1 + \left(\frac{1}{m_2 \ell_5} + \frac{\ell_4 - \ell_2}{\ell_5} \right) \frac{c_2}{\ell_5} > 0$$

que pode ser escrito na forma

$$\left(\frac{\ell_1^2}{2} \frac{c_1}{c_2} + 1 \right) \ell_5^2 - (\ell_4 - \ell_2) \ell_5 + \frac{J_1}{m_2} > 0 \quad (3.41)$$

A desigualdade (3.41) pode ser vista como uma inequação do segundo grau em ℓ_5 . Sua solução será dada por

$$\frac{(\ell_4 - \ell_2) - \sqrt{\Delta}}{2\left(\frac{\ell_1^2}{2} \frac{c_1}{c_2} + 1\right)} < \ell_5 < \frac{(\ell_4 - \ell_2) + \sqrt{\Delta}}{2\left(\frac{\ell_1^2}{2} \frac{c_1}{c_2} + 1\right)} \quad (3.42)$$

onde

$$\Delta = (\ell_4 - \ell_2)^2 - 4 \frac{J_1}{m_2} \left(\frac{\ell_1^2}{2} \frac{c_1}{c_2} + 1 \right)$$

A Figura 10 mostra o aspecto da região representada por (3.42).

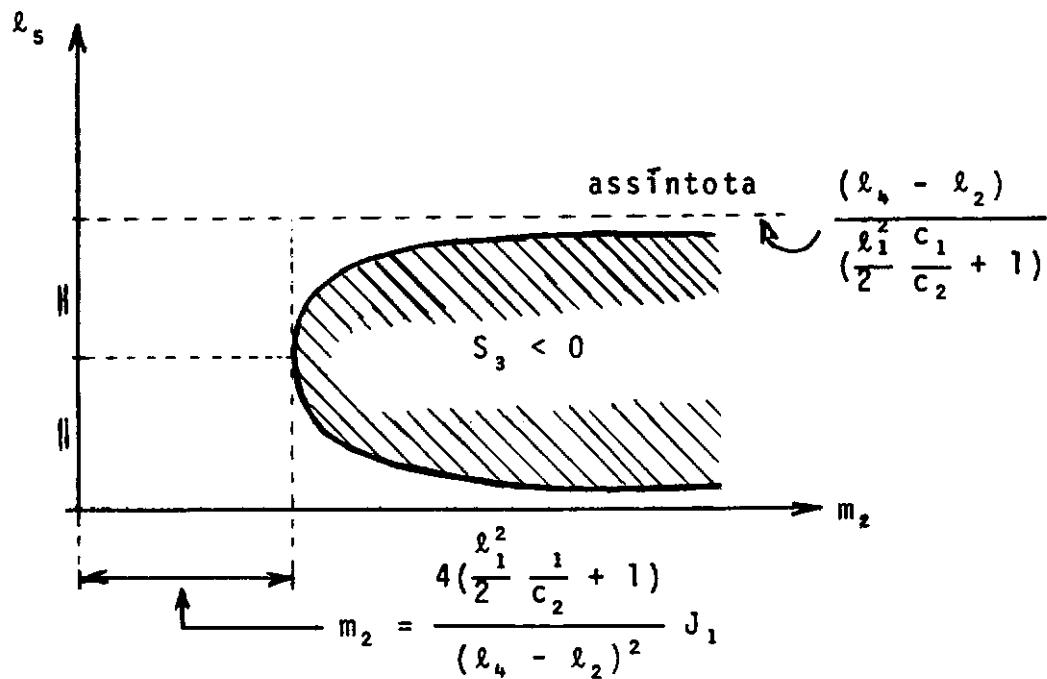


Fig. 10

Análise de $s_1(s_2s_3 - s_1s_4) - s_0s_3^2 > 0$:

Em vista da complexidade algébrica desta condição, o que pode ser visto a partir de (3.39), ... (3.42), procuraremos analisar até onde nos for possível a forma de sua região em confronto com $s_3 > 0$ (Fig. 10).

Supondo $s_0, s_1, s_2 > 0$, conforme já apresentado, é fácil ver que a condição

$$s_1(s_2s_3 - s_1) - s_0s_3^2 > 0$$

só pode ser satisfeita quando $s_3 > 0$, de onde se conclui que ela poderá ser atendida somente na parte não hachuriada da Fig. 10.

Por outro lado, considerando-se os limites $m_2 \rightarrow 0^+$, $\ell_5 \rightarrow 0^+$ e $\ell_5 \rightarrow \infty^+$, de (3.39), ..., (3.42) pode-se ver

que

$$\begin{aligned} m_2 \rightarrow 0^+ &\Rightarrow s_1(s_2s_3 - s_1) - s_0s_3^2 > 0 \\ l_s \rightarrow 0^+ &\Rightarrow s_1(s_2s_3 - s_1) - s_0s_3^2 > 0 \\ l_s \rightarrow \infty^+ &\Rightarrow s_1(s_2s_3 - s_1) - s_0s_3^2 > 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Conclui-se, assim, a existência de um contorno S que terá o aspecto conforme a Fig. 11 e que separa a região estável da região instável de acordo com a condição (3.23).

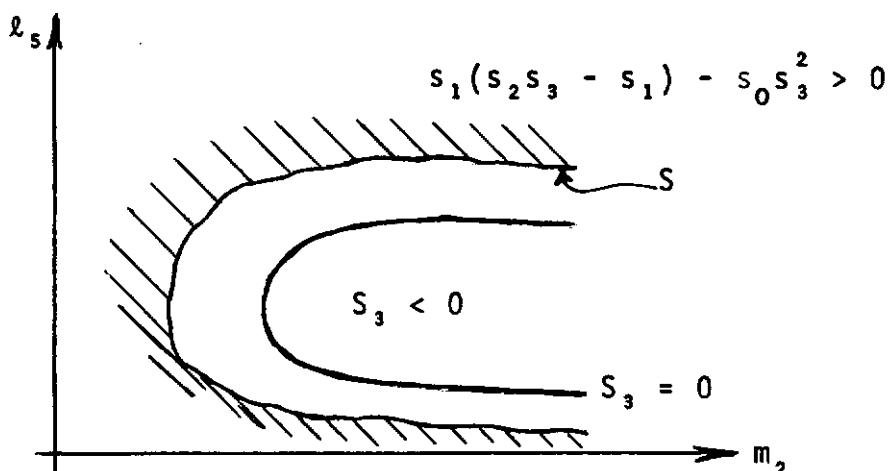


Fig. 11

Um resultado particularmente interessante seria se este contorno S viesse aproximadamente a coincidir com o próprio contorno $s_3 = 0$ já conhecido (*). Uma investigação neste sentido pode ser feita tomando-se o limite $s_3 \rightarrow 0^+$, e nestas condições temos que

$$\text{se } s_2s_3 - s_1 > 0 \quad \text{então} \quad s_1(s_2s_3 - s_1) - s_0s_3^2 > 0 \quad (3.45)$$

Das equações (3.37), ..., (3.40) através de simplificações convenientes, chega-se a :

(*) Note que não poderá haver superposição exata, pois em $s_3 = 0$ (3.23) não é satisfeita; estamos supondo $s_0, s_1, s_2 > 0$.

$$s_2 s_3 - s_1 = \frac{1}{\ell_5} \left[\left(\frac{\ell_2}{m_2} - \frac{\ell_4 - \ell_2}{m_1} \right) + \frac{c_2}{m_2 \ell_5} \left(\frac{m_2 + m_1}{m_1 \ell_5} g - \frac{k \ell_1^2}{2 J_1} \right) \right] \\ + s_3 \left[\frac{k \ell_1^2}{2 J_1} - \left(1 - \frac{\ell_4 - \ell_2}{\ell_5} \right) \frac{\ell_4 - \ell_2}{J_1} m_2 g - (m_2 + m_1) \frac{\ell_2}{J_1} g + \frac{\ell_1^2}{2 J_1 m_2 \ell_5} c_1 c_2 \right] \quad (3.46)$$

O segundo colchete, nesta expressão, é sempre positivo quando $s_0 > 0$; como $s_3 \rightarrow 0^+$ então o sinal de (3.46) ficará determinado por

$$\left(\frac{\ell_2}{m_2} - \frac{\ell_4 - \ell_2}{m_1} \right) + \frac{c_2}{m_2 \ell_5^2} \left[\left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) g - \frac{k \ell_1^2}{2 J_1} \ell_5 \right] \quad (3.47)$$

e, portanto, para m_2 suficientemente grande a condição (3.45) pode ser escrita como

$$\frac{1}{m_1} \left[\frac{c_2}{\ell_5^2} g - (\ell_4 - \ell_2) \right] > 0 + s_1 (s_2 s_3 - s_1) - s_0 s_3^2 > 0 \quad (3.48)$$

Levando em consideração que c_2 é um amortecimento, $(\ell_4 - \ell_2)$ uma dimensão linear do sistema e

$$\ell_5 < \frac{(\ell_4 - \ell_2)}{\left(\frac{\ell_1^2}{2} \frac{c_1}{c_2} + 1 \right)}$$

em pontos próximos ao contorno $s_3 = 0$ (Fig. 10), é de se esperar que (3.23) seja verificada. Há, portanto, para valores altos de m_2 , uma "superposição" nos contornos S e $s_3 = 0$.

Por outro lado, se a razão $k \ell_1^2 / J_1$ não for suficientemente grande, então (3.46) será positiva mesmo no início do contorno $s_3 = 0$, e a "superposição" será total (Fig. 11).

3.3 - Comentários e Resultados.

O critério (3.23) não oferece condições de ser trabalhado algebraicamente no caso de $c_2 \neq 0$, daí a razão da última análise apresentada.

Nela procuramos mostrar a existência do contorno S , que no caso de se confundir com o contorno $s_3 = 0$ resulta numa "equivalência" entre o critério (3.23) e a região $s_3 > 0$.

É evidente que não podemos excluir de todo a possibilidade da existência de instabilidade como mostra a Fig.12, porém não vemos, a priori, nenhuma motivação física para elas.

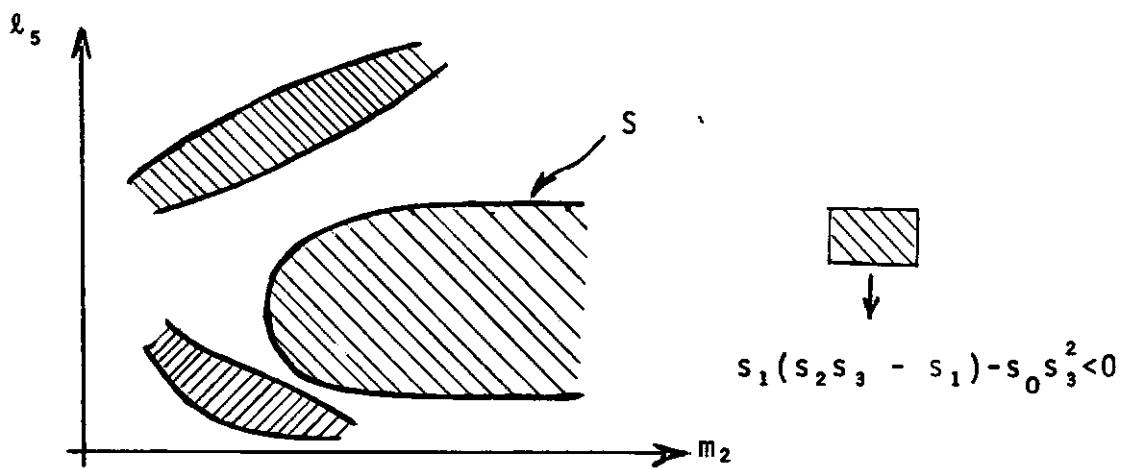


Fig. 12

A condição (3.45) representa um caminho para se mostrar que os contornos se "confundem". Através dela se chegou à análise do sinal de (3.47) onde se ve que com m_2 suficientemente grande é de se esperar que S se superponha ao contorno $s_3 = 0$. Conclui-se, também, que se $k\ell_1^2/J_1$ não for muito grande então a "superposição" se dá para qualquer m_2 .

Nestas condições, a região de estabilidade para

$c_2 \neq 0$ seria dada pelas regiões

$$(i) \quad s_0 > 0$$

$$(ii) \quad s_3 > 0$$

Notando que (i) é a própria região para $c_2 = 0$, então (ii) poderia ser vista como a instabilidade provocada pelo amortecimento c_2 (Gráf. II). Convém notar, ainda, que (ii) representa um mínimo de estabilidade perdida, pois o contorno S pode não se confundir com o contorno $s_3 = 0$.

Convém, ainda, notar que (3.23) é uma condição mixta em (i) e (ii), isto é, contém termos em $k\ell_1^2/2$ (variável de $s_0 > 0$) e termos em ℓ_5 (variável de $s_3 > 0$); desta forma, fixado um contorno S (que tem ℓ_5 e m_2 como variáveis dependente e independente, respectivamente) qualquer então fica determinado o valor de $k\ell_1^2/2$, o que se reflete como uma perda da região em (i).

Os Gráficos (I) e (II) mostram as regiões $s_0 > 0$ e $s_3 > 0$, respectivamente, e a influência dos parâmetros do sistema sobre elas. Não foi determinado o contorno S (o que não representa dificuldade, pois podemos determinar pontos facilmente através de um simples teste numérico de (3.23)) para as curvas no Gráf. II por julgarmos mais interessante não perder a região $s_0 > 0$ em troca de um de seus pontos (o que deve ser feito para a obtenção do contorno S numericamente; deve-se notar, também, que isto implica em uma limitação sobre a variação de m_2).

Gráfico I

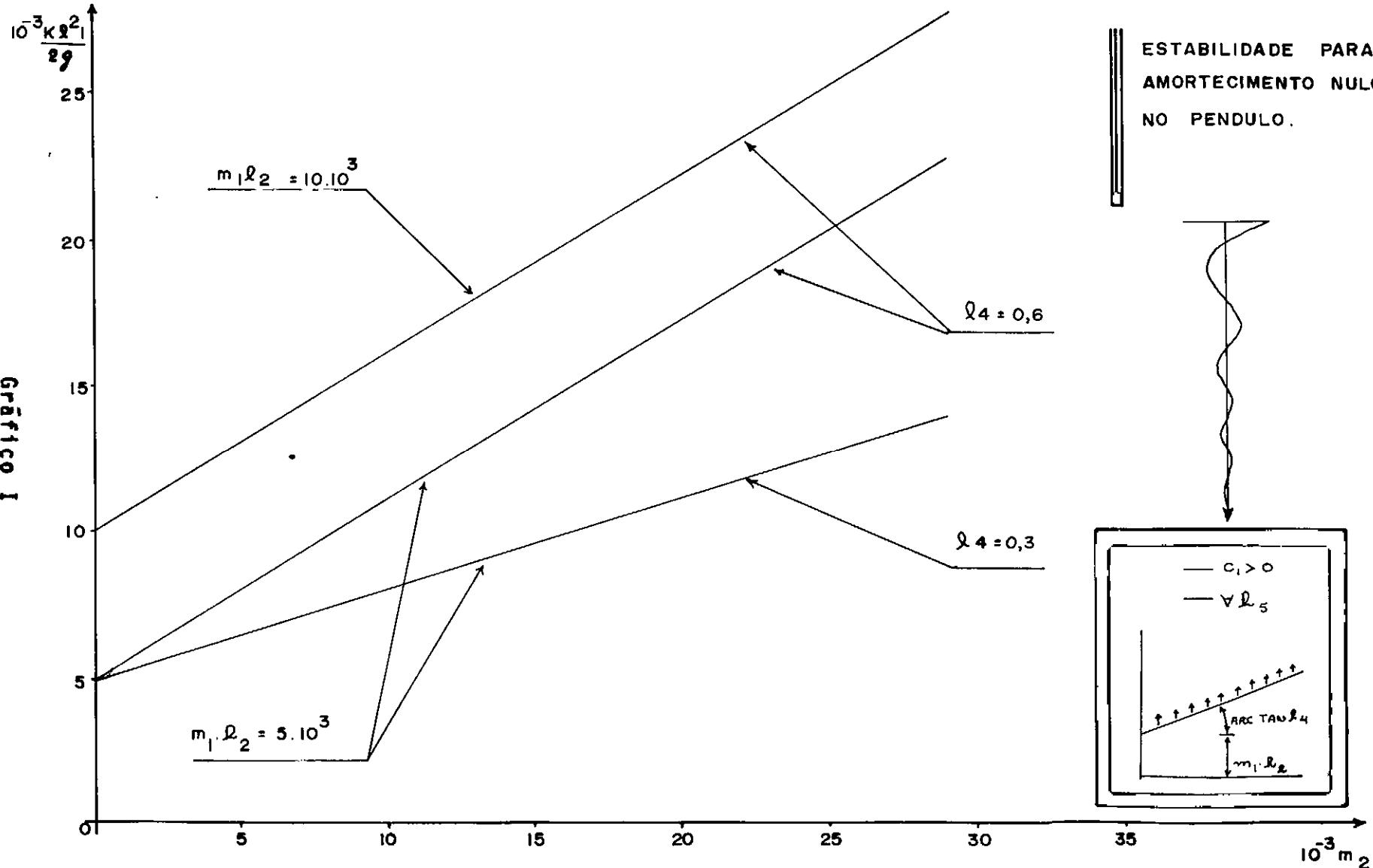
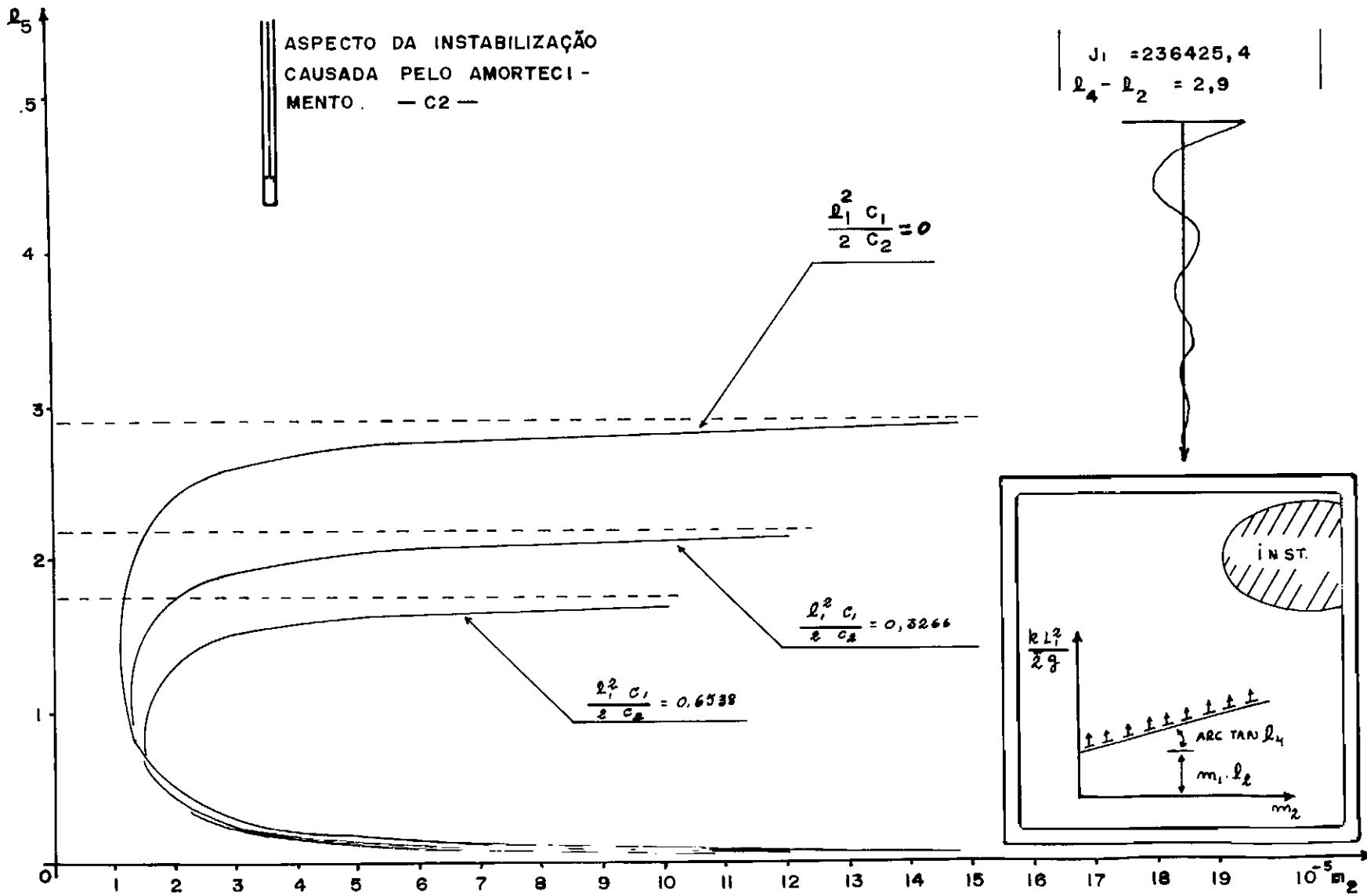


Gráfico II



CAPÍTULO IVINFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS

Neste capítulo procuraremos determinar as características da solução particular para o sistema excitado em $F(t)$ ou $\psi(t)$. Para tanto, serão apresentados os diagramas frequência-amplitude para uma excitação harmônica e determinada a influência dos parâmetros do pêndulo e da suspensão no resultado. Desta forma procuramos orientar um futuro trabalho que procure ajustar valores ótimos para o funcionamento do sistema. Lembramos que o movimento vertical da base foi comentado em 2.5, onde vimos que sua influência se expressa em termos da parcela $X_2(t)$ acrescida à resposta natural $X_1(t)$.

4.1 - Excitação pela Força Horizontal $F(t)$.

Seja $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ a excitação e $\phi(t) = \Phi e^{i\omega t}$, $\theta(t) = \Theta e^{i\omega t}$ a resposta do sistema, onde

$$\Phi = \Phi_r + i\Phi_{im} \quad (4.1)$$

$$\Theta = \Theta_r + i\Theta_{im} \quad (4.2)$$

sendo F_0 real.

Derivando $\phi(t)$ e $\theta(t)$ obtemos

$$\dot{\phi} = i\omega\Phi e^{i\omega t} \quad (4.3) \qquad \dot{\theta} = i\omega\Theta e^{i\omega t} \quad (4.5)$$

$$\ddot{\phi} = -\omega^2\Phi e^{i\omega t} \quad (4.4) \qquad \ddot{\theta} = -\omega^2\Theta e^{i\omega t} \quad (4.6)$$

Substituindo-se (4.1), ..., (4.6) nas equações do sistema, chega-se a:

$$\begin{aligned} [(g^* - \omega^2)\Phi_r - wa\Phi_{im} + b\theta_r + ws\theta_{im}] + i[w\Phi_r + (g^* - \omega^2)\Phi_{im} - \\ - ws\theta_r + b\theta_{im}] = vF_0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} [(eg^* - d)\Phi_r - wc\Phi_{im} + (f + \omega^2)\theta_r + wz\theta_{im}] + i[wc\Phi_r + (eg^* - d)\Phi_{im} - \\ - wz\theta_r + (f + \omega^2)\theta_{im}] = wF_0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

De (4.7) concluimos que

$$(g^* - \omega^2)\Phi_r + b\theta_r - wa\Phi_{im} + ws\theta_{im} = vF_0 \quad (4.9)$$

$$wa\Phi_r - ws\theta_r + (g^* - \omega^2)\Phi_{im} + b\theta_{im} = 0 \quad (4.10)$$

e de (4.8), fica-se com

$$(eg^* - d)\Phi_r + (f + \omega^2)\theta_r - wc\Phi_{im} + wz\theta_{im} = wF_0 \quad (4.11)$$

$$wc\Phi_r - wz\theta_r + (eg^* - d)\Phi_{im} + (f + \omega^2)\theta_{im} = 0 \quad (4.12)$$

As equações (4.9), ..., (4.12) formam um sistema em Φ_r , θ_r , Φ_{im} e θ_{im} . A solução para a amplitude da caixa se râ dada por:

$$\Phi_r = \frac{\Delta_c}{\Delta_p} F_0 \quad (4.13)$$

onde

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} v & b & -wa & ws \\ w & (f+\omega^2) & -wc & wz \\ 0 & -ws & (g^* - \omega^2) & b \\ 0 & -wz & (eg^* - d) & (f + \omega^2) \end{vmatrix} \quad \Delta_p = \begin{vmatrix} (g^* - \omega^2) & b & -wa & ws \\ (eg^* - d) & (f + \omega^2) & -wc & wz \\ wa & -ws & (g^* - \omega^2) & b \\ wc & -wz & (eg^* - d) & (f - \omega^2) \end{vmatrix}$$

De (4.13) é fácil de ver que a razão $f_a = \frac{\Delta_c}{\Delta_p}$ é o fator de ampliação da amplitude F_0 (da excitação $F = F_0 e^{i\omega t}$).

4.2 - Excitação pela Rotação da Base $\psi(t)$.

Seja $\psi(t) = \psi_0 e^{i\omega t}$. Como no caso anterior, chega-se agora ao sistema:

$$\begin{pmatrix} (g^* - \omega^2) & b & -\omega a & \omega s \\ (eg^* - d) & (f + \omega^2) & -\omega c & \omega z \\ \omega a & -\omega s & (g^* - \omega^2) & b \\ \omega c & -\omega z & (eg^* - d) & (f + \omega^2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Phi_r \\ \Theta_r \\ \Phi_{im} \\ \Theta_{im} \end{pmatrix} = \psi_0 \begin{pmatrix} n \\ -q \\ \omega p \\ -\omega r \end{pmatrix}$$

A solução para a amplitude da caixa será

$$\Phi_r = \frac{\Delta_c}{\Delta_p} \psi_0$$

com

$$\Delta_c = \begin{pmatrix} n & b & -\omega a & \omega s \\ -q & (f + \omega^2) & -\omega c & \omega c \\ \omega p & -\omega s & (g^* - \omega^2) & b \\ -\omega r & -\omega z & (eg^* - d) & (f + \omega^2) \end{pmatrix}, \quad \Delta_p \text{ como no caso anterior}$$

onde $f_a = \frac{\Delta_c}{\Delta_p}$ também representa o fator de ampliação, agora da amplitude ψ_0 (da excitação $\psi(t) = \psi_0 e^{i\omega t}$).

4.3 - Resultados e Comentários.

Os determinantes Δ_c e Δ_p , embora em forma acessível quando em função dos coeficientes do sistema, não oferecem condições de serem trabalhados analiticamente se em função dos parâmetros. Isto podemos ver pela forma das expressões (2.66), ..., (2.82).

Por outro lado, se fosse tentada uma solução como em (2.50), ..., (2.52) também não se chegaria a expressões mais simples.

Adotou-se, então, resolver a razão $f_a = \Delta_c / \Delta_p$ de ampliação através de programa listado no Cap. V. Ali são feitos os esclarecimentos a respeito deste programa.

Através do Gráf. III pode-se ver a influência dos parâmetros da perturbação sobre a resposta (solução particular) do sistema. Observa-se que maiores comprimentos ℓ_s do pêndulo acarretam ressonâncias em frequência mais baixa, e que menores massas m_2 levam a menores amplitudes da caixa; observa-se, também, que o amortecimento c_2 "fechou" a curva na região de ressonância e diminuiu seu pico. Por outro lado, a influência de ℓ_s pode ainda ser vista como consequência da "frequência da perturbação", uma vez que o comprimento do pêndulo é uma medida de sua frequência natural $\sqrt{g/\ell_s}$.

O Gráf. IV, por sua vez, estabelece uma comparação entre o fator de ampliação para a força horizontal (linha interrompida) e para a rotação da base (linha cheia). Convém notar, ali, que procurando-se comparar grandezas adimensionais define-se, agora, um novo f_a^* como a razão entre Φ_r e a deflexão estática correspondente a uma força horizontal constante F_0 (aplicada estaticamente).

Os parâmetros k e c_1 da suspensão se mostraram não muito influentes no controle de Δ_c / Δ_p . Grandes variações destes parâmetros provocaram pequenas mudanças nas curvas. Isto mostra a necessidade do uso de controles ativos, caso se deseje um

controle do sistema através de sua suspensão.

Os Gráficos V a X representam resposta do sistema com auto-valores

$$\lambda_1 = -1,030$$

$$\lambda_3 = -1,550 - i(0,957)$$

$$\lambda_2 = -3,828$$

$$\lambda_4 = -1,550 + i(0,957)$$

e com parâmetros

$$l_1 = 1,40 \text{ m}$$

$$m_1 = 2,0 \cdot 10^4 \text{ Kg}$$

$$l_2 = 0,25 \text{ m}$$

$$m_2 = 1,5 \cdot 10^4 \text{ Kg}$$

$$l_3 = 2,95 \text{ m}$$

$$c_1 = 9,0 \cdot 10^5 \text{ Kg/sg}$$

$$l_4 = 3,15 \text{ m}$$

$$c_2 = 7,0 \cdot 10^5 \text{ Kg.m}^2/\text{sg}$$

$$l_5 = 2,00 \text{ m}$$

$$k = 6,0 \cdot 10^5 \text{ Kg/sg}^2$$

$$l_6 = 0,25 \text{ m}$$

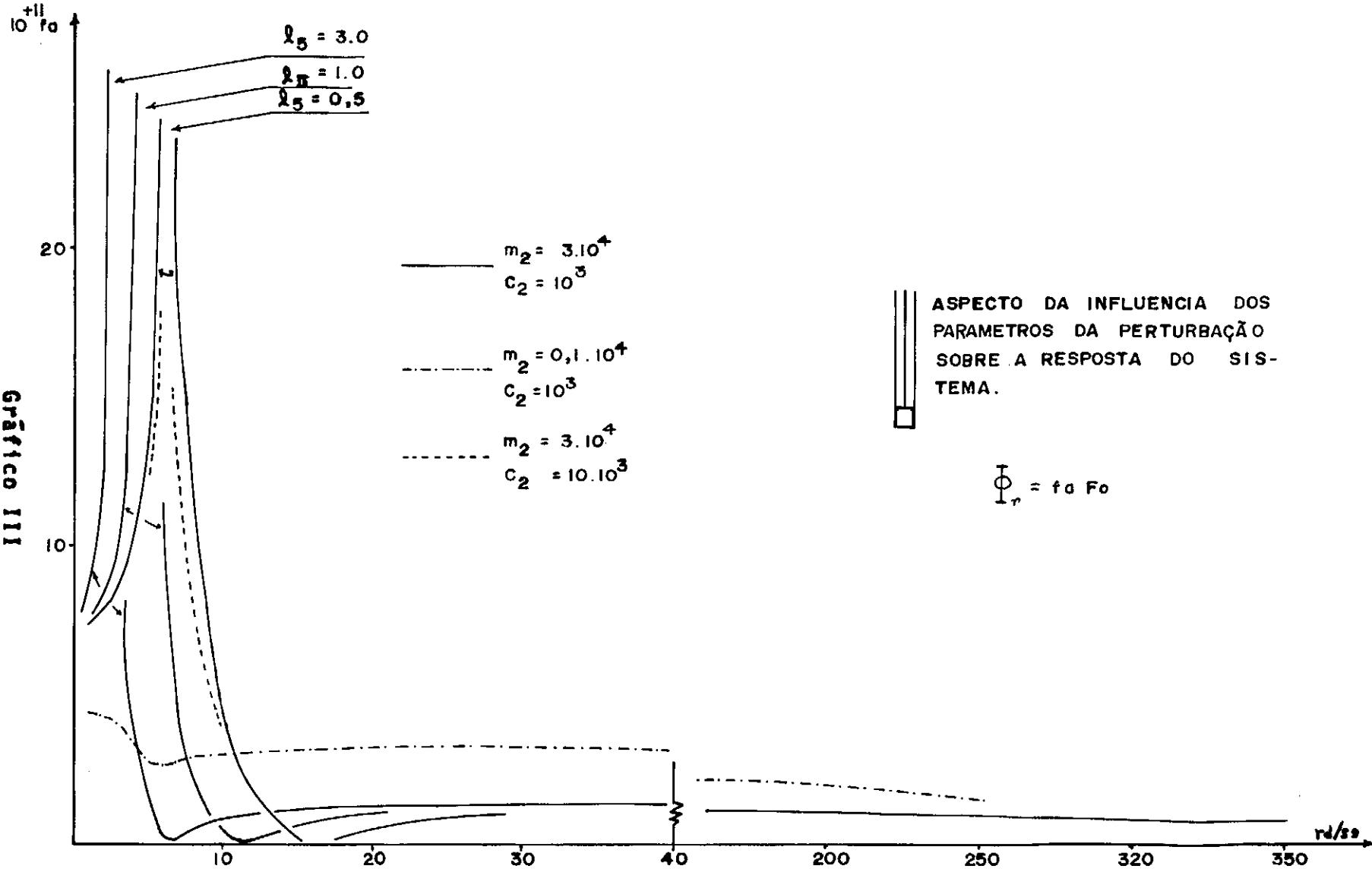
$$J_1 = 236425,4 \text{ Kg.m}^2$$

obtidas através do método de RUNGE-KUTTA. Trata-se de um método numérico para solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias, e foi usado para isto a subrotina RKGS. O programa para este fim encontra-se esclarecido no Cap. V

Através do Gráf. VIII é fácil se ver que se $y(t)$ é "suficientemente pequeno", a sua influência sobre a resposta é desprezível. Esta conclusão já tínhamos obtido em 2.5 sobre os coeficientes B_n do desenvolvimento em série da potência de $K(y(t))$.

Queremos chamar a atenção, ainda, para o fato de que a frequência deste movimento vertical da base irá, certamente, provocar um fenômeno de instabilidade paramétrica, similar ao que ocorre com o caso de um pêndulo que tem o seu ponto de suspensão movendo-se na vertical (equação de Mathieu), o que pode ser visto satisfatoriamente por exemplo em [3].

Gráfico III



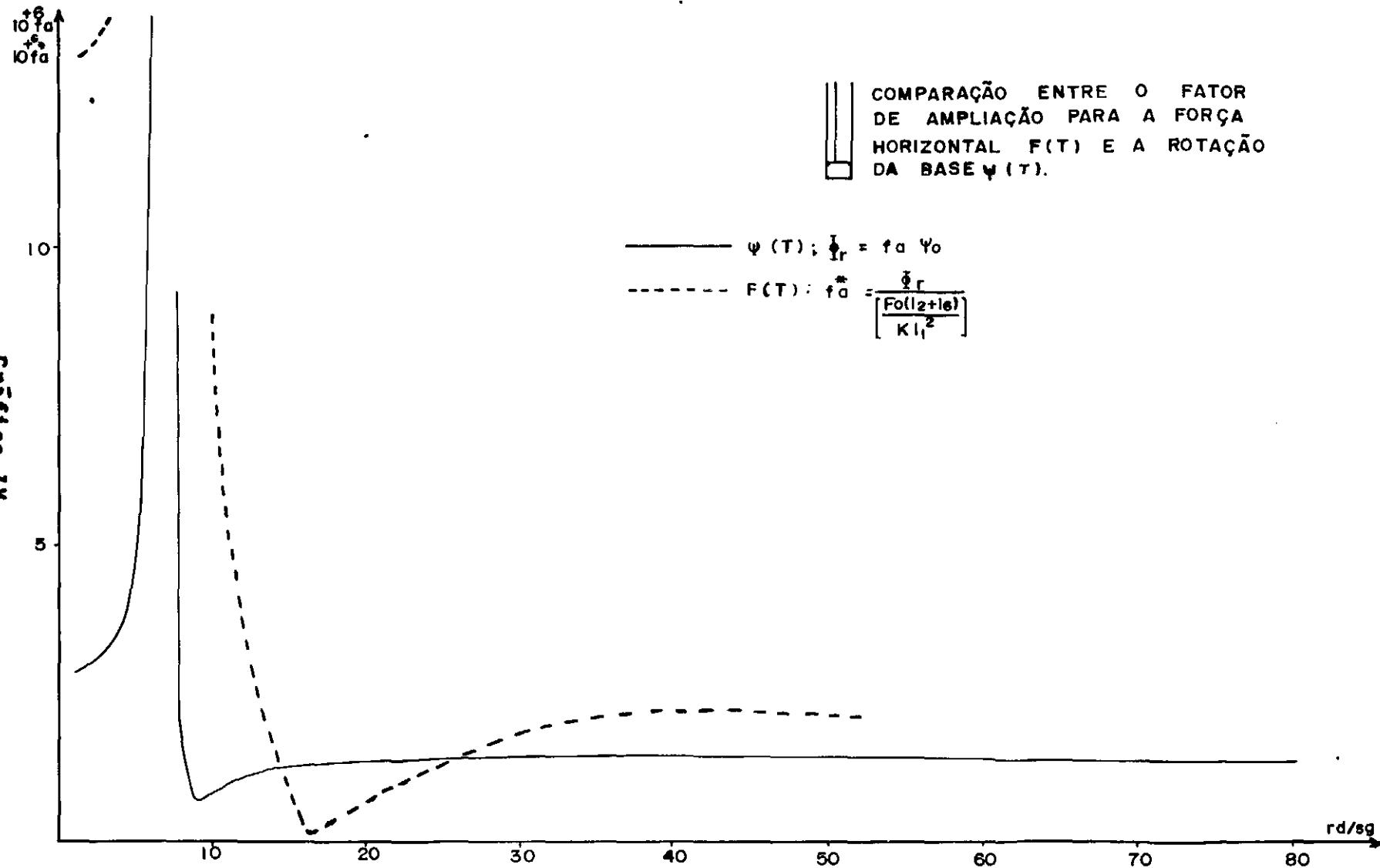
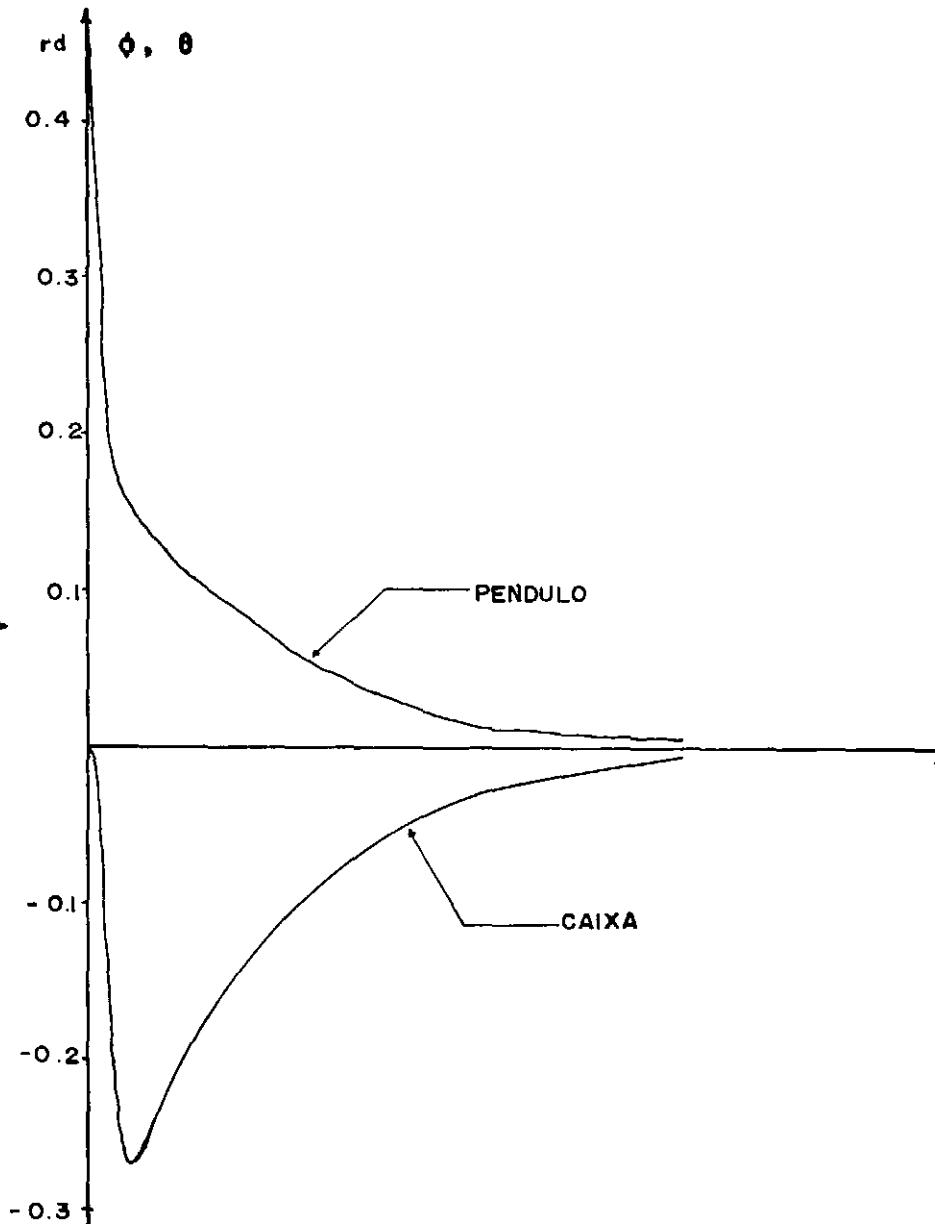
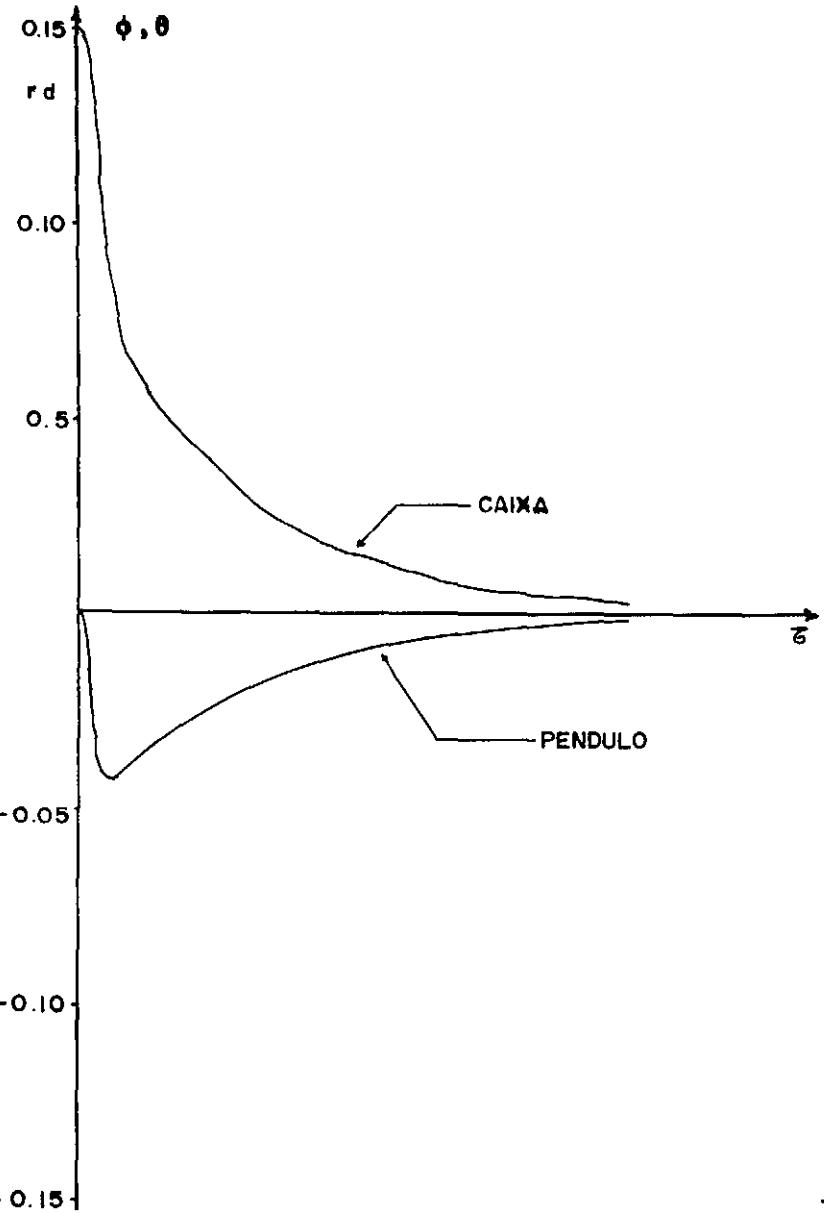


Gráfico V



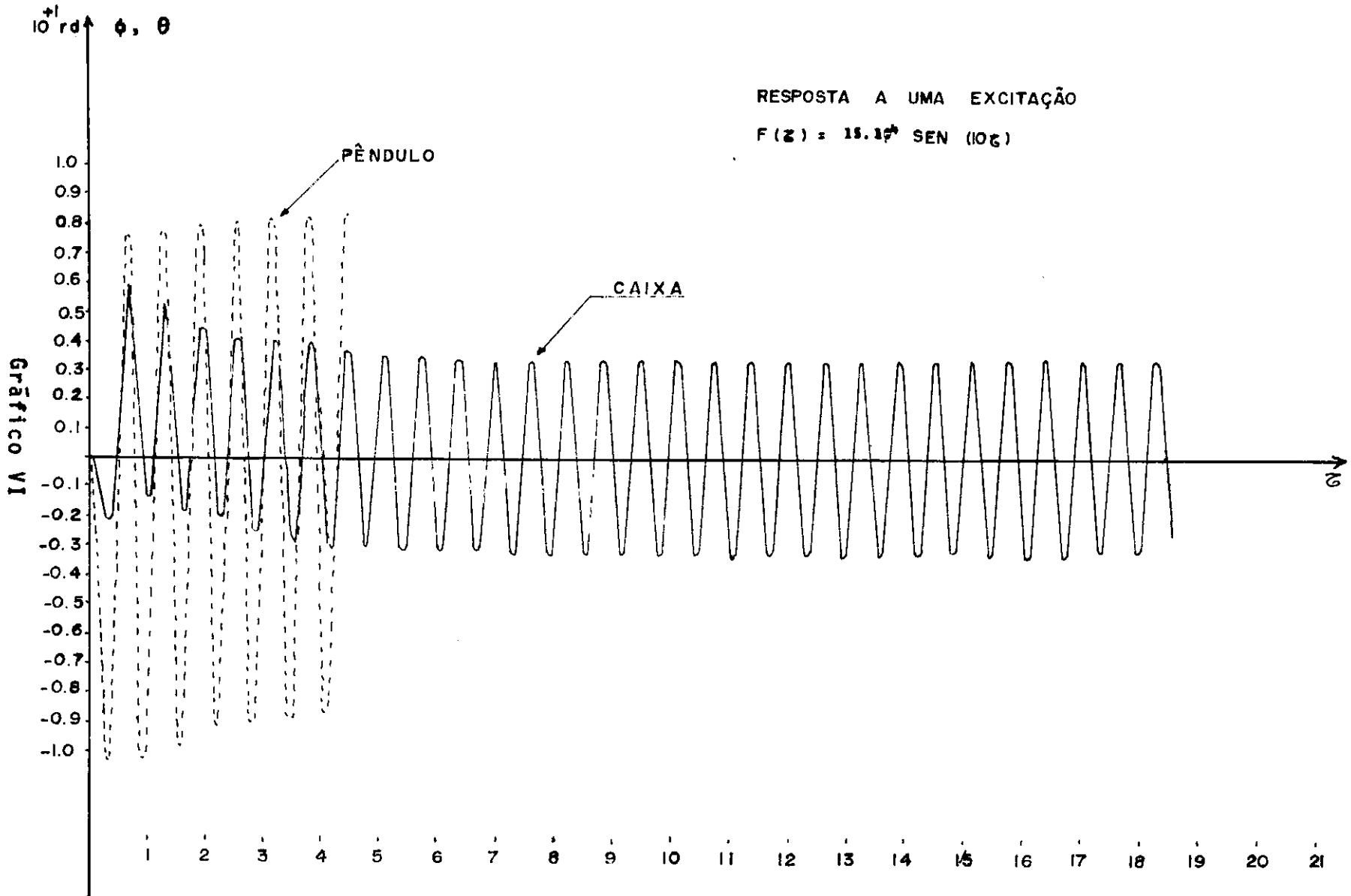


Gráfico VII

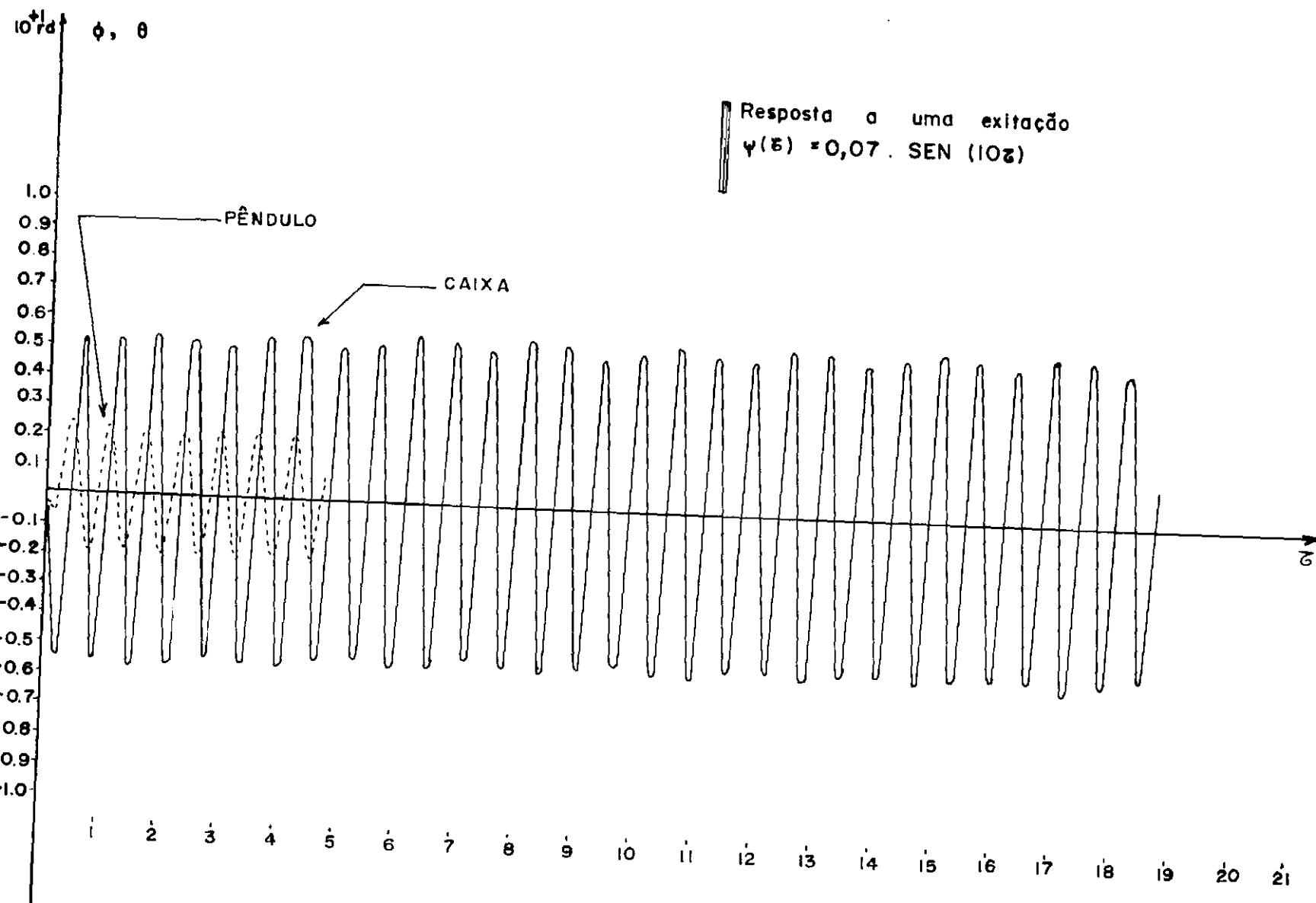


Gráfico VIII

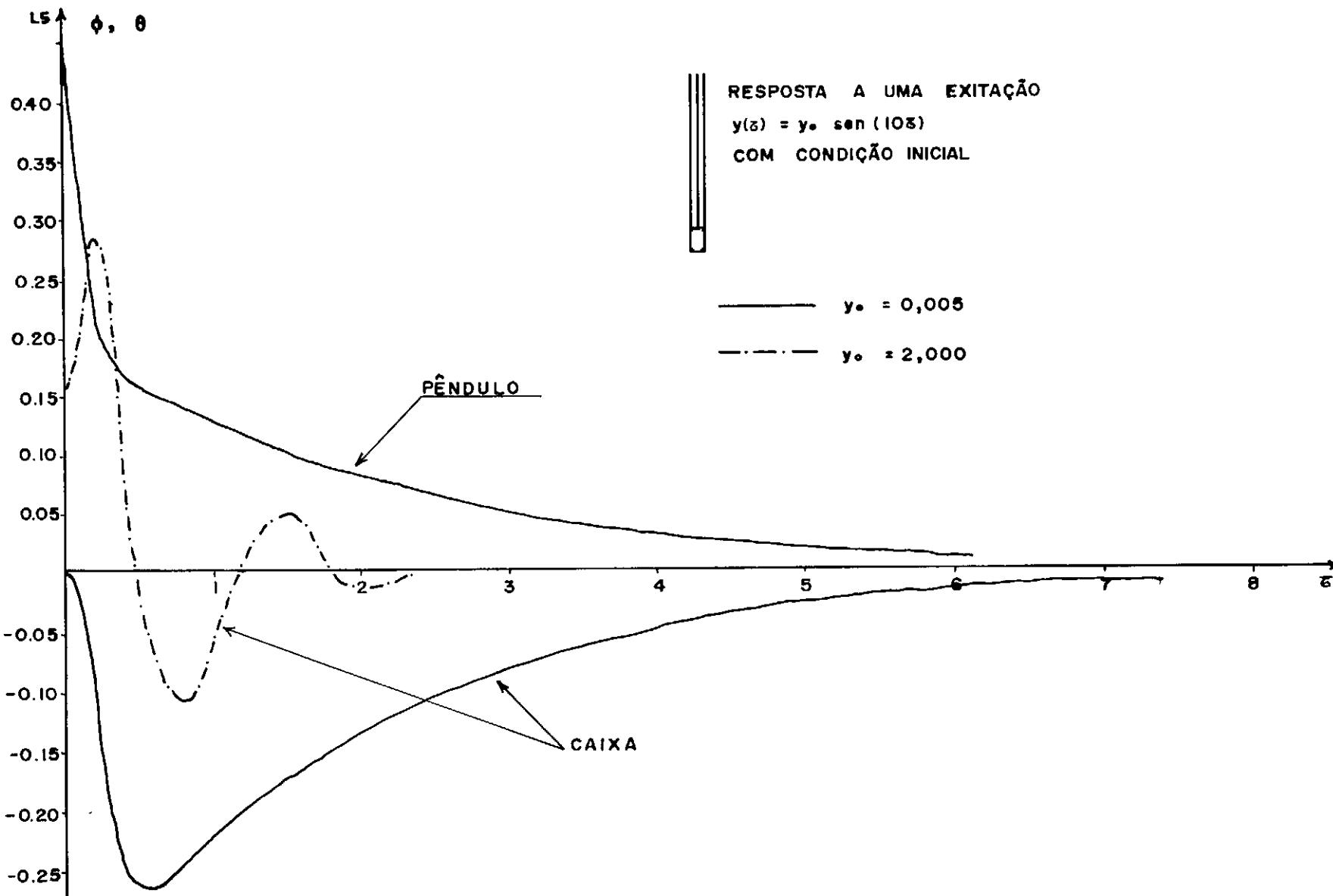


Gráfico IX

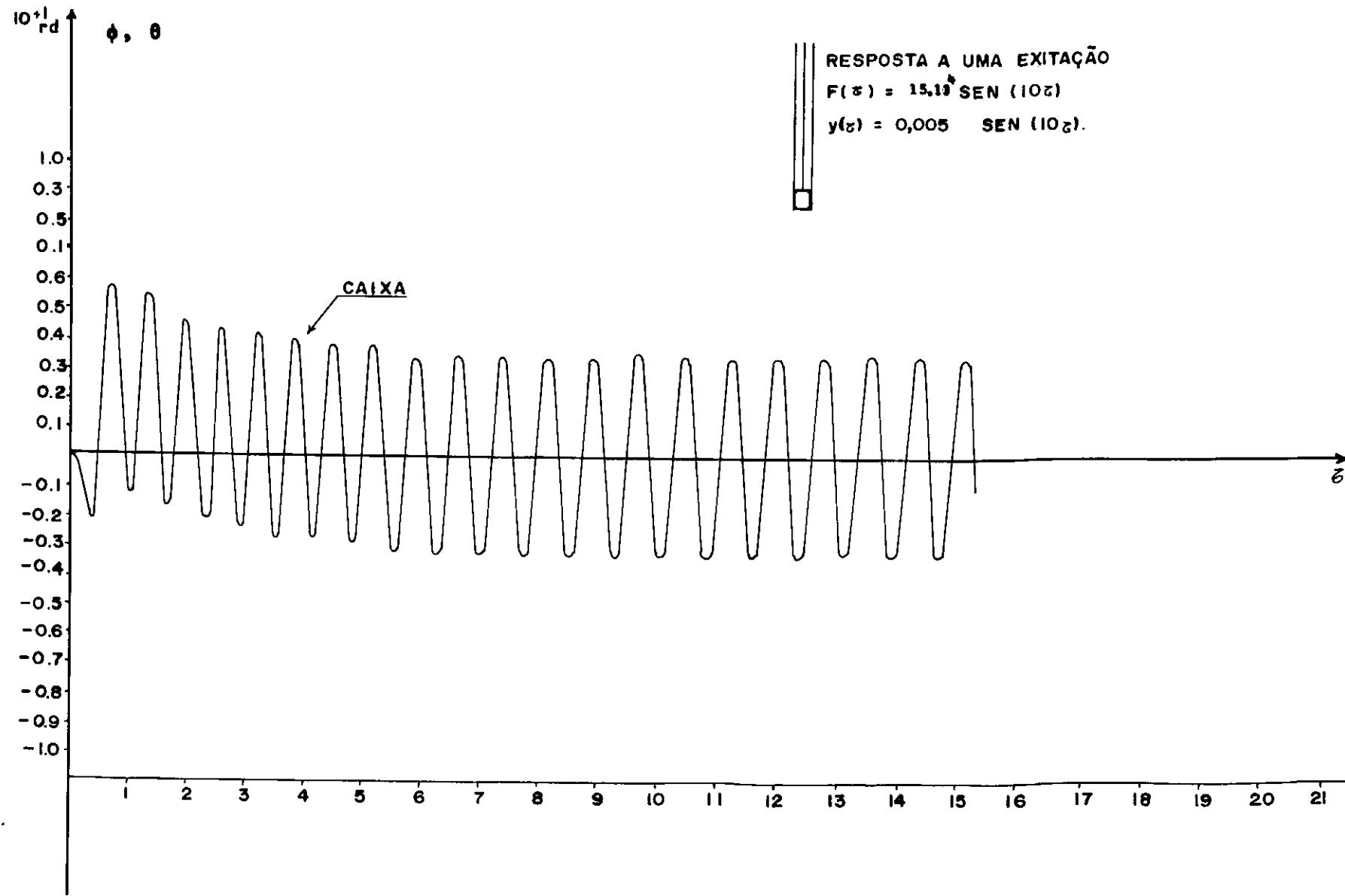
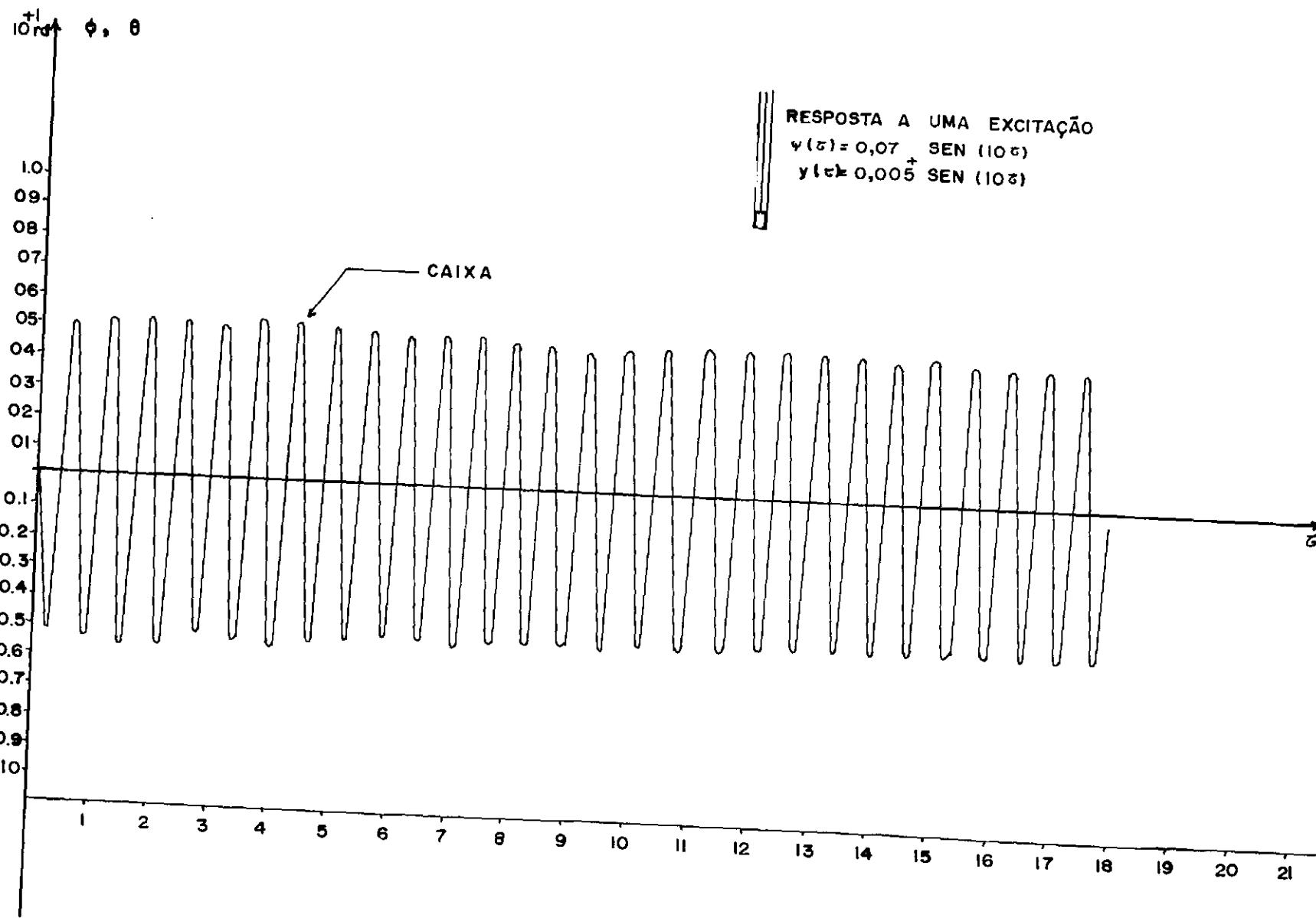


Gráfico X



CAPÍTULO VPROGRAMAS UTILIZADOS

Neste capítulo procuraremos esclarecer sobre a parte computacional utilizada para:

- normalização através do cálculo do fator Ω (ver 2.4)
- estudo qualitativo do modelo matemático (computação analógica)
- solução numérica do modelo matemático (método de Runge-Kutta)
- determinação dos auto-valores (ver (3.13), ..., (3.21))
- determinação do fator $f_a = \Delta_c / \Delta_p$ (ver 4.1).

5.1 - Normalização

PROGRAMA - 1 -

O fator Ω de normalização (no tempo) surgiu da necessidade de se controlar o intervalo de variação dos coeficientes do sistema. Essa necessidade nasceu de um estudo preliminar do modelo matemático, em um computador analógico (ver 5.2), onde se necessita de coeficientes não muito pequenos (de preferência no mínimo da ordem de 10^{-2}) e nem muito grandes (de preferência menores ou iguais a 1, e no máximo 10). Convém notar que uma minimização da diferença entre os valores numéricos dos diversos coeficientes do sistema permitirá se ter, de forma mais acentuada, a influência de todos os seus termos, na sua solução.

E feito o cálculo dos coeficientes, dados por (2.66), ..., (2.82). O fator Ω é determinado da sorte a se ter

três grupos de valores:

- menores ou iguais a 100,00
- menores ou iguais a 9,9
- menores ou iguais a 1,0

Evidentemente pode-se mudar estes limites mudando-se apenas os cartões de teste.

5.2 - Estudo Qualitativo do Modelo Matemático.

Inicialmente se procedeu a uma análise do modelo matemático, fazendo uso de um Computador Analógico. As soluções assim obtidas foram assumidas apenas com caráter qualitativo, devendo à insuficiência de precisão consequente de valores (dos coeficientes do sistema) inconvenientemente pequenos (mesmo com o sistema normalizado) para serem colocados satisfatoriamente nos potençômetros.

Através deste estudo se pôde constatar, mesmo antes de analiticamente, o fenômeno de penetração do amortecimento assinalado em 3.1. Por outro lado, testou-se também a influência das diversas excitações, e de suas combinações, sobre a resposta do sistema. Verificou-se aí, o resultado a que se chegou, posteriormente, através do desenvolvimento analítico em 2.5, sobre a influência da excitação $y(t)$.

Também se procurou variar, arbitrariamente, os potençômetros (podendo assim, representar um modelo matemático incompatível com o modelo físico) apenas com o intuito de testar a

influência dos diversos termos do modelo matemático. Frequentes fenômenos de instabilidade da solução ocorreram durante estes testes.

Esclarecemos que este estudo preliminar foi feito com o intuito de se analisar o modelo matemático (relativamente fácil no computador analógico) e assim possuir esclarecimentos para maior confiabilidade nos resultados de uma posterior análise numérica quantitativa em um computador digital. Também serviu para mostrar, a priori, fenômenos interessantes sobre o modelo físico (o caso do amortecimentos e de $y(t)$) e assim motivar uma posterior verificação analítica ou mesmo numérica.

No final deste capítulo encontra-se o circuito utilizado.

5.3 - Solução Numérica do Modelo Matemático.

PROGRAMA - 2 -

Foi utilizado o método de RUNGE-KUTTA. Trata-se de um método numérico para solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias da forma

$$\underline{\dot{Y}} = F(x, \underline{Y})$$

Se h representa um incremento na variável independente x , o método de RUNGE-KUTTA computa o vetor $\underline{Y}(h + x_0)$, a partir de $\underline{Y}(x_0)$ conhecido. Detalhes a este respeito podem ser encontrados em [5].

A subrotina usada para este fim foi a RKGS, embutida nos IBM 1130 e /360. Os seus parâmetros são os seguintes:

- i) Um vetor PRMT, de entrada e saída, com dimensão maior ou

igual a 5.

- ii) Um vetor \underline{Y} , de entrada, com as condições iniciais.
- iii) Um vetor DERY, de entrada, de peso dos erros.
- iv) Uma variável NDIM, de entrada, com a dimensão do sistema.
- v) Uma variável NDIV, de saída, que serve como mensagem do erro.
- vi) Uma subrotina externa RCAL que deverá calcular $F(x, \underline{Y})$ para x e \underline{Y} dados.
- vii) Uma subrotina externa RSAI, que deverá dar saída aos resultados.
- viii) Um vetor AUX auxiliar, com 8 linhas e NDIM colunas.

As componentes do vetor PRMT são:

- PRMT(1): de entrada, com o limite inferior do intervalo.
- PRMT(2): de entrada, com o limite superior do intervalo.
- PRMT(3): de entrada, com o passo adotado.
- PRMT(4): de entrada, com o erro permitido.
- PRMT(5): deve ser utilizado com STOP para RKGS.
se PRMT(5) ≠ 0, então RKGS retorna ao programa principal.

As demais componentes de PRMT, caso seja definido com dimensão maior do que 5, ficam a critério do usuário.

Os parâmetros da subrotina RCAL deverão ser:

- i) a variável independente x

- ii) o vetor \underline{Y}
- iii) o vetor DERY
- iv) a variável NDIV
- v) a variável NDIM
- vi) o vetor PRMT

5.4 - Determinação dos Auto-Valores.

PROGRAMA - 3 -

É feito o teste das condições (3.22) e (3.23) para estabilidade. Se o sistema for instável, um menor amortecimento c_2 é assumido. São calculados os auto-valores do sistema usando a subrotina POLRT.

5.5 - Determinação do Fator $f_a = \Delta_c / \Delta_p$.

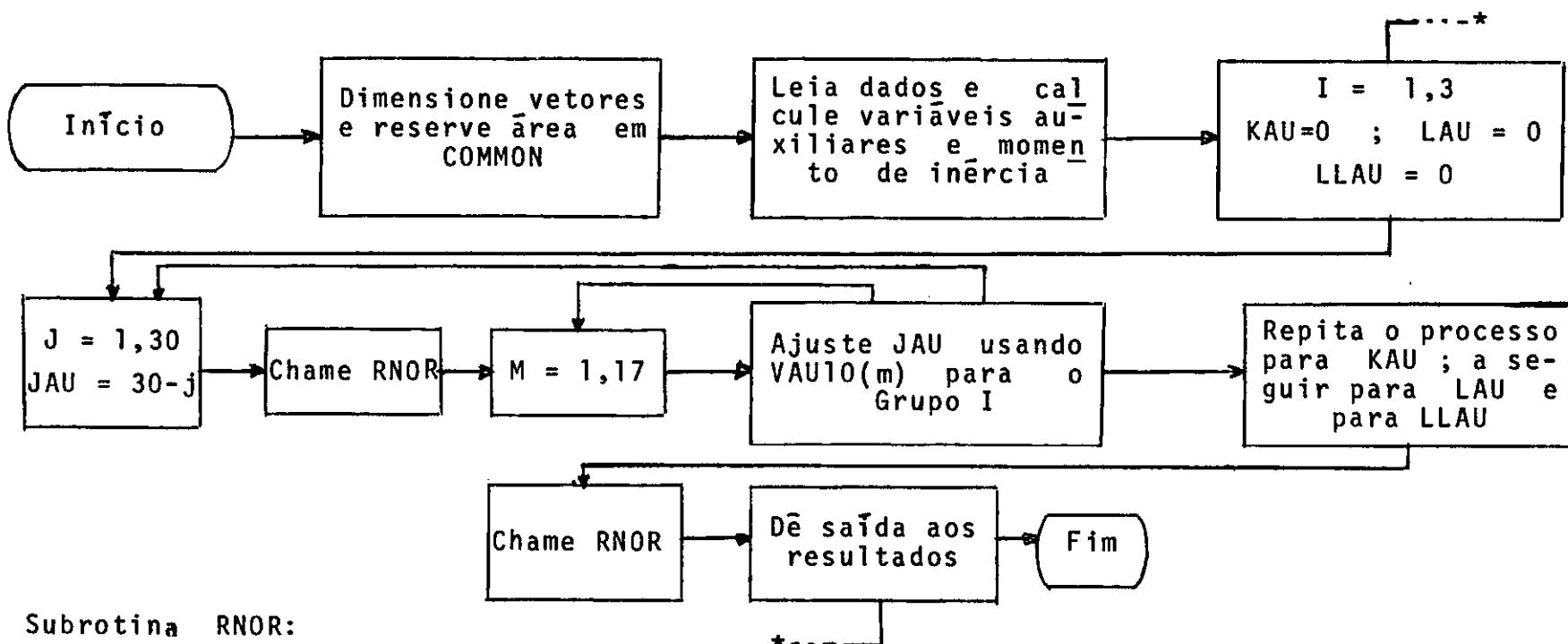
PROGRAMA - 4 -

É determinado o fator de ampliação para diversos valores da frequência. O passo, inicialmente assumido, varia de acordo com a inclinação da curva.

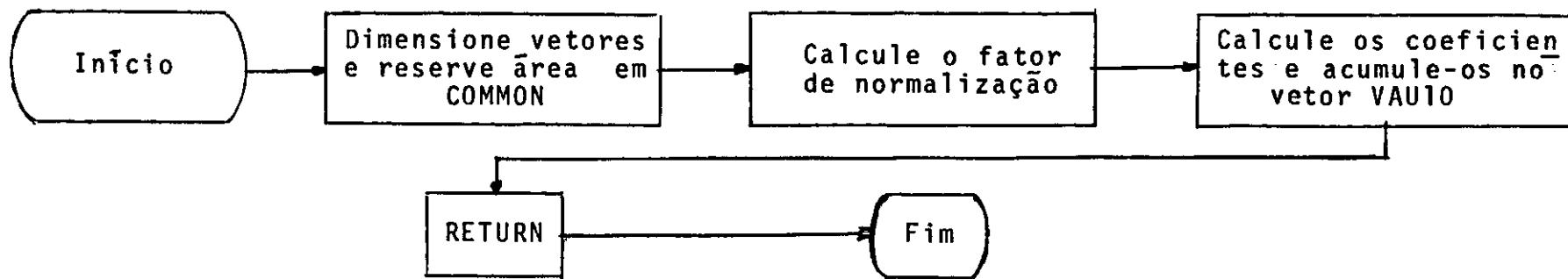
A seguir, os diagramas de bloco e as respectivas listagens.

DIAGRAMA DE FLUXO PRA O PROGRAMA - 1 -

Programa Principal:



Subrotina RNOR:



```

// FOR
*CNE WCRD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
C--
      SUBROUTINE RNOR
COMMON RM1,RM2,RK,RC1,RC2,RL1,RL2,RL3,RL4,RL5,RL7,RJ1
COMMON VAU1,VAU2,VAU3,VAU4,VAU5,VAU6,VAU7,VAU8,I,JAU
COMMON KAU,LAU,LLAU,A(3),B(3),C(3),D(3),E(3),F(3),G(3)
COMMON H(3),T(3),U(3),P(3),Q(3),R(3),S(3),Z(3),W(3)
COMMON CMEGA(3),VAU9(3),VAU10(17),V(3)
C--
      VAU9(I)=((RJ1/(8.*JAU))*((RM1+RM2)/RK)/(3.5**KAU))/
1(2.***LAU)/(1.05**LLAU)
      OMEGA(I)=SQRT(VAU9(I))
C--
      A(I)=(CMEGA(I)*VAU8)/RJ1
      B(I)=(VAU9(I)*(RL4-RL2)*RM2*9.81)/RJ1
      C(I)=CMEGA(I)*VAU3*VAU8/RJ1
      D(I)=VAU9(I)*VAU4*9.81/RL5
      E(I)=VAU3
      F(I)=VAU9(I)*((VAU3*(RL4-RL2)*RM2/RJ1)-VAU4/RL5)*9.81
      G(I)=VAU9(I)*(VAU5-(RM2+RM1)*RL2*9.81)/RJ1
      H(I)=VAU9(I)*RK*RL1/RJ1
      T(I)=(OMEGA(I)*VAU7)/RJ1
      U(I)=(VAU9(I)*VAU5)/RJ1
      P(I)=(CMEGA(I)*VAU8)/RJ1
      Q(I)=(VAU9(I)*VAU3*VAU5)/RJ1
      R(I)=CMEGA(I)*VAL8*VAU3/RJ1
      S(I)=(OMEGA(I)*RC2)/RJ1
      Z(I)=CMEGA(I)*(RC2*VAU3/RJ1+(RC2/RM2)/(RL5**2))
      W(I)=VAU9(I)*(VAL3*(RL2+RL7)/RJ1+(1./RM1)/RL5)
      V(I)=VAU9(I)*(RL2+RL7)/RJ1
C--
      DO 14 M=1,17
      GO TO (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,113,213,313,413),M
1 VAU10(M)=A(I)
      GO TO 14
2 VAU10(M)=B(I)
      GO TO 14
3 VAU10(M)=C(I)
      GO TO 14
4 VAU10(M)=D(I)
      GO TO 14
5 VAU10(M)=E(I)
      GO TO 14
6 VAU10(M)=F(I)
      GO TO 14
7 VAU10(M)=G(I)

```

```

GO TO 14
8 VAU10(M)=H(I)
GO TO 14
9 VAU10(M)=T(I)
GO TO 14
10 VAU10(M)=U(I)
GO TO 14
11 VAU10(M)=P(I)
GO TO 14
12 VAU10(M)=R(I)
GO TO 14
13 VAU10(M)=S(I)
GO TO 14
113 VAU10(M)=Q(I)
GO TO 14
213 VAL10(M)=Z(I)
GO TO 14
313 VAU10(M)=V(I)
GO TO 14
413 VAU10(M)=W(I)
14 CONTINUE
RETURN
END

// DLP
*STORE      WS  LA  RNCR
// FCR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
*ICCS(2501READER,1403PRINTER)
*EXTENDED PRECISION
C--
      DIMENSION CNOR(3)
COMMON RM1,RM2,RK,RC1,RC2,RL1,RL2,RL3,RL4,RL5,RL7,RJ1
COMMON VAU1,VAU2,VAU3,VAU4,VAL5,VAU6,VAU7,VAU8,I,JAU
COMMON KAU,LAU,LLAU,A(3),B(3),C(3),D(3),E(3),F(3),G(3)
COMMON H(3),T(3),U(3),P(3),Q(3),R(3),S(3),Z(3),W(3)
COMMON CMEGA(3),VAU9(3),VAU10(17),V(3)
C--
      READ(8,100)RM1,RM2,RK,RC1,RC2
      READ(8,300)RL1,RL2,RL3,RL4,RL5,RL7
C--
      WRITE(5,200)
C--
      VAU1=(RM1*2.)/3.
      VAU2=RM1/3.
      VAU3=(VAU1*RL2)/RL4
      VAU4=VAU1-VAU3
      VAU5=VAU3*(RL3**2+C.03**2)/12.
      VAU6=VAU4*(RL3**2+0.03**2)/12.
      VAU7=VAU5+VAU3*((RL4-RL2)**2)

```

```

VAU8=VAU6+VAU4*(RL2**2)
VAU1=VAU2*(RL4**2+0.03**2)/12.
VAU3=(RL3/2.)***2+(((RL4-(2.*RL2))/2.)***2)
VAU4=VAU1+VAU2*(VAU3**2)
RJ1=VAU7+VAU8+2.*VAU4

C--
    VAU1=(RL1/2.)***2
    VAU2=(RL4-RL2)***2
    VAU3=(RL5+RL2-RL4)/RL5
    VAU4=(RM1+RM2)/RM1
    VAU5=2.*RK*VAU1
    VAU6=2.*RC1*VAU2
    VAU7=2.*RC1*RL2
    VAU8=2.*RC1*VAL1

C--
    DC 41 I=1,3
    KAU=0
    LAU=0
    LLAU=0

C--
    DO 19 J=1,30
    JAU=30-J
    CALL RNCR
    DO 18 M=1,17
    GO TO (15,16,17),I
15 IF(ABS(VAU10(M))-100.)18,38,20
16 IF(ABS(VAU10(M))-9.9)18,38,20
17 IF(ABS(VAU10(M))-1.0)18,38,20
18 CONTINUE
19 CONTINUE
20 CONTINUE

C--
    DC 25 K=1,10
    KAU=10-K
    CALL RNCR
    DC 24 M=1,17
    GO TO (121,22,23),I
121 IF(ABS(VAU10(M))-100.)24,38,26
22 IF(ABS(VAU10(M))-9.9)24,38,26
23 IF(ABS(VAU10(M))-1.0)24,38,26
24 CONTINUE
25 CONTINUE
26 CONTINUE

C--
    DO 31 L=1,10
    LAU=10-L
    CALL RNCR
    DC 30 M=1,17
    GO TO (27,28,29),I
27 IF(ABS(VAU10(M))-100.)30,38,32

```

```

28 IF(ABS(VAU10(M))-9.9)30,38,32
29 IF(ABS(VAU10(M))-1.0)30,38,32
30 CONTINUE
31 CONTINUE
32 CCNTINUE
C--
   DO 36 LL=1,15
   LLAU=15-LL
   CALL RNCR
   DO 35 M=1,17
   GO TO (132,33,34),I
132 IF(ABS(VAU10(M))-100.)35,38,37
33 IF(ABS(VAU10(M))-9.9)35,38,37
34 IF(ABS(VAU10(M))-1.0)35,38,37
35 CONTINUE
36 CONTINUE
   GO TO 38
37 LLAU=LLAU+1
38 CONTINUE
C--
   CALL RNCR
   GO TO (138,39,40),I
138 WRITE(5,1400)A(I),B(I),C(I),D(I),E(I),F(I),G(I),
   1          H(I),T(I),U(I),P(I),Q(I)
   WRITE(5,1401)R(I),S(I),W(I),Z(I),V(I)
   CNCR(I)=((8.**JAU)/RJ1)*(3.5**KAU)*(2.1**LAU)*(1.05**LLAU)
   WRITE(5,1300)J,K,L,LL
   GO TO 41
39 WRITE(5,800)A(I),B(I),C(I),D(I),E(I),F(I),G(I),
   1          H(I),T(I),U(I),P(I),Q(I)
   WRITE(5,801)R(I),S(I),W(I),Z(I),V(I)
   CNCR(I)=((8.**JAU)/RJ1)*(3.5**KAU)*(2.1**LAU)*(1.05**LLAU)
   WRITE(5,1300)J,K,L,LL
   GO TO 41
40 WRITE(5,900)A(I),B(I),C(I),D(I),E(I),F(I),G(I),
   1          H(I),T(I),U(I),P(I),Q(I)
   WRITE(5,901)R(I),S(I),W(I),Z(I),V(I)
   CNCR(I)=((8.**JAU)/RJ1)*(3.5**KAU)*(2.1**LAU)*(1.05**LLAU)
   WRITE(5,1300)J,K,L,LL
41 CONTINUE
   WRITE(5,1000)
   WRITE(5,400)RM1,RM2,RK
   WRITE(5,500)RC1,RC2
   WRITE(5,1200)RJ1
   WRITE(5,600)RL1,RL2,RL3,RL4,RL5,RL7
   WRITE(5,700)OMEGA(1),OMEGA(2),OMEGA(3)
   WRITE(5,1100)CNCR(1),CNCR(2),CNCR(3)
C--
100 FORMAT(5F14.5)
200 FORMAT(20X,'- R E S U L T A D O S -',//)

```

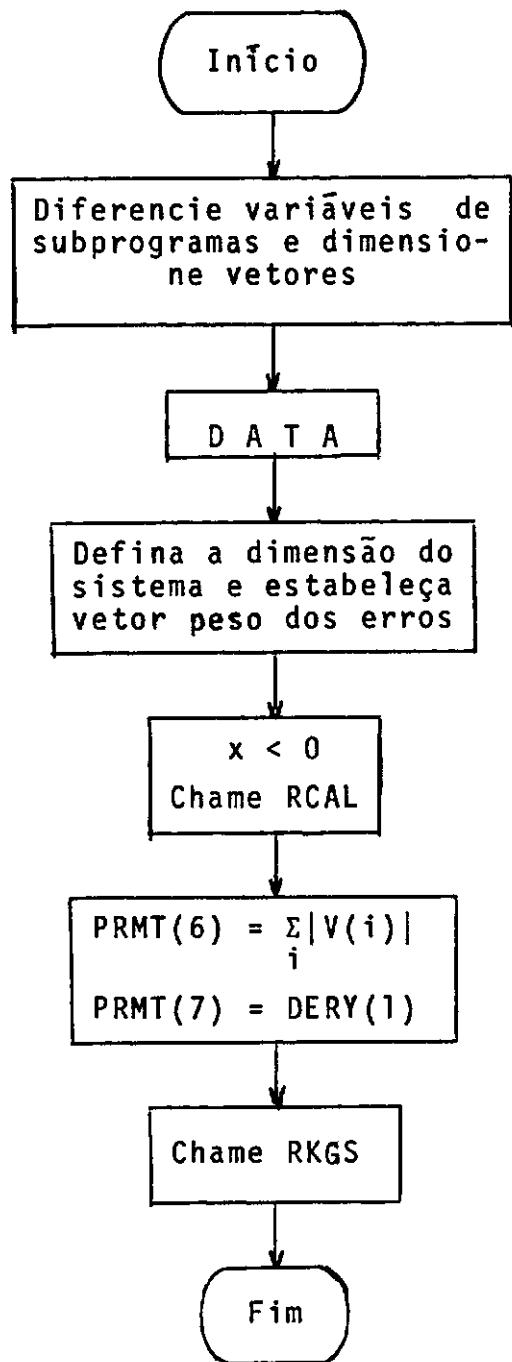
```

300 FORMAT(6F10.3)
400 FORMAT('RM1=',F14.5,/,,'RM2=',F14.5,/,,'RK=',F14.5,/)
500 FORMAT('RC1=',F14.5,/,,'RC2=',F14.5,/)
600 FORMAT('RL1=',F10.3,/,,'RL2=',F10.3,/,,'RL3=',F10.3,/,,
  'RL4=',F10.3,/,,'RL5=',F10.3,/,,'RL7=',F10.3,///)
700 FORMAT(1X,'OMEGA(1)=',F15.7,/,1X,'OMEGA(2)=',F15.7,
  1//,1X,'OMEGA(3)=',F15.7,///)
800 FORMAT(1X,'A(2)=',F20.7,/,1X,'B(2)=',F20.7,/,1X,'C(2)=',
  1F20.7,/,1X,'D(2)=',F20.7,/,1X,'E(2)=',F20.7,/,1X,'F(2)
  1=',F20.7,/,1X,'G(2)=',F20.7,/,1X,'H(2)=',F20.7,/,1X,
  1'T(2)=',F20.7,/,1X,'U(2)=',F20.7,/,1X,'P(2)=',F20.7,/
  1,1X,'Q(2)=',F20.7,/)
801 FORMAT(1X,'R(2)=',F20.7,/,1X,'S(2)=',F20.7,/,1X,'W(2)='
  1,F20.7,/,1X,'Z(2)=',F20.7,/,1X,'V(2)=',F20.7,///)
900 FORMAT(1X,'A(3)=',F20.7,/,1X,'B(3)=',F20.7,/,1X,'C(3)=',
  1F20.7,/,1X,'D(3)=',F20.7,/,1X,'E(3)=',F20.7,/,1X,'F(3)
  1=',F20.7,/,1X,'G(3)=',F20.7,/,1X,'H(3)=',F20.7,/,1X,
  1'T(3)=',F20.7,/,1X,'U(3)=',F20.7,/,1X,'P(3)=',F20.7,/
  1,1X,'Q(3)=',F20.7,/)
901 FORMAT(1X,'R(3)=',F20.7,/,1X,'S(3)=',F20.7,/,1X,'W(3)='
  1,F20.7,/,1X,'Z(3)=',F20.7,/,1X,'V(3)=',F20.7,///)
1000 FORMAT(20X,'- P A R A M E T R O S -',/,/)
1100 FORMAT(1X,'- C C E F I C I E N T E S P/ N O R M A L I',
  11X,'Z A C A O D E O M E G A -',/,/,1X,'CNOR(1)=',F20.7
  1,/,1X,'CNCR(2)=',F20.7,/,1X,'CNOR(3)=',F20.7,///)
1200 FORMAT('RJ1=',F18.3,/)
1300 FORMAT(1X,'CONTROLE DA NORMALIZACAO -',5X,'J=',I2,4X,'K='
  1,I2,4X,'L=',I2,4X,'LL=',I2,/,)
1400 FORMAT(1X,'A(1)=',F20.7,/,1X,'B(1)=',F20.7,/,1X,'C(1)=',
  1F20.7,/,1X,'D(1)=',F20.7,/,1X,'E(1)=',F20.7,/,1X,'F(1)
  1=',F20.7,/,1X,'G(1)=',F20.7,/,1X,'H(1)=',F20.7,/,1X,
  1'T(1)=',F20.7,/,1X,'U(1)=',F20.7,/,1X,'P(1)=',F20.7,/
  1,1X,'Q(1)=',F20.7,/)
1401 FORMAT(1X,'R(1)=',F20.7,/,1X,'S(1)=',F20.7,/,1X,'W(1)='
  1,F20.7,/,1X,'Z(1)=',F20.7,/,1X,'V(1)=',F20.7,///)
  CALL EXIT
  END
// XEQ

```

DIAGRAMA DE FLUXO PARA O PROGRAMA - 2 -

Programa Principal:



Subrotina RCAL:

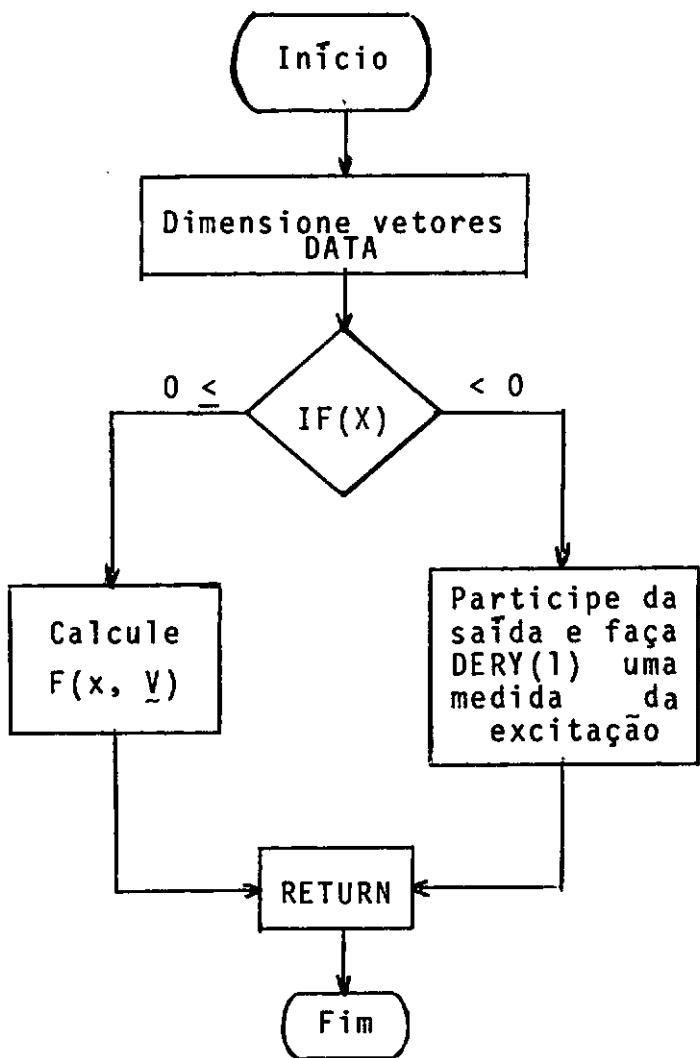
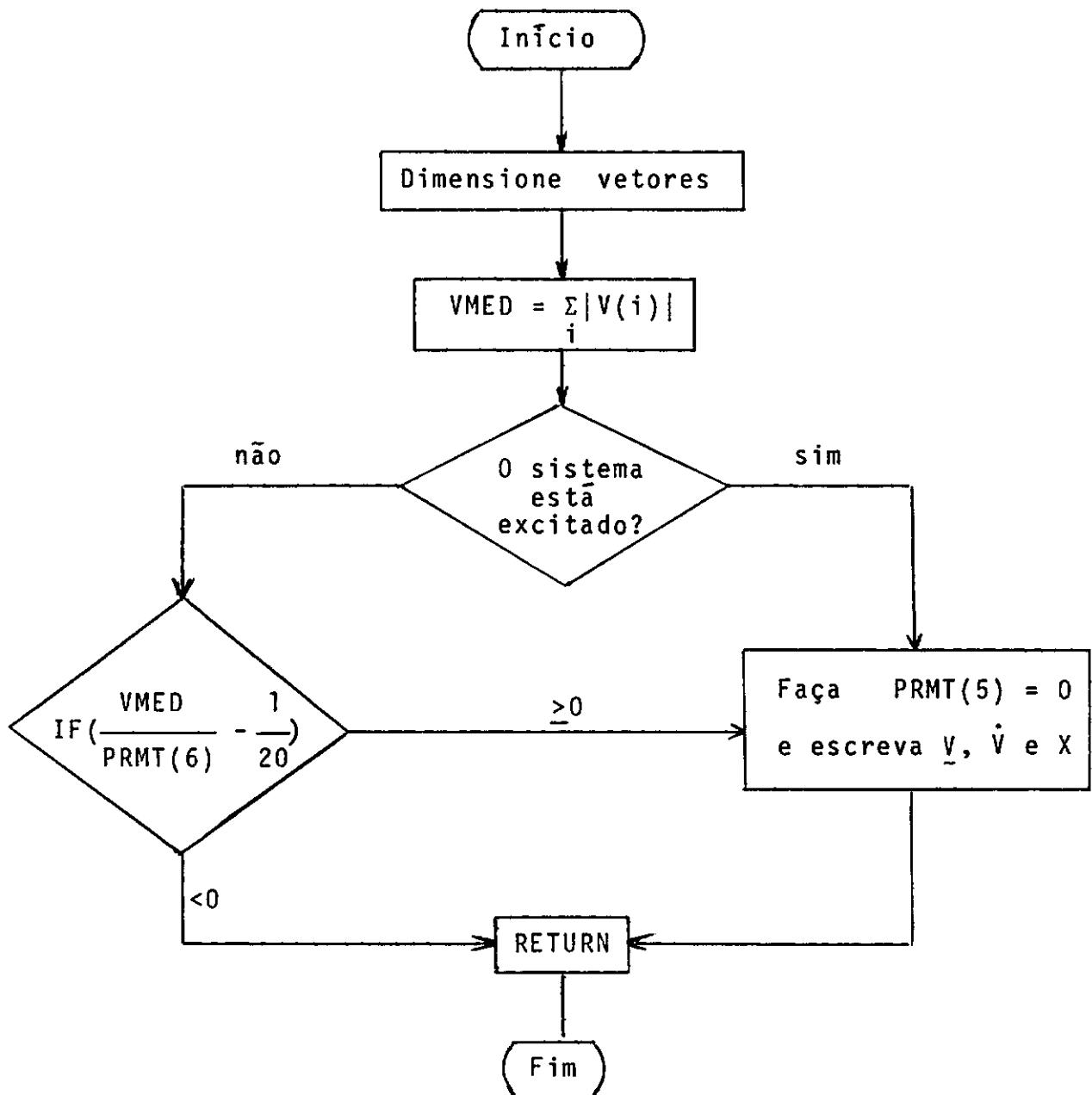


DIAGRAMA DE FLUXO PARA O PROGRAMA - 2 -

Subrotina RSAI:



```

// FCR
*LIST SOURCE PROGRAM
*CNE WORD INTEGERS
    SUBROUTINE RCAL(X,V,DERY)
    DIMENSION V(4),DERY(4)
    DATA A,B,C,D,E,F,G,H,T,U,P,Q,R,S,W,Z,RV/
    DATA Y,OMG,FOR,FRE1,FRE2,FRE3/
C--
    IF(X)10,30,30
C--
10  WRITE(5,20)Y,OMG,FOR,FRE1,FRE2
    WRITE(5,21)FRE3
    WRITE(5,22)
C--
20  FORMAT(1X,'- PARAMETROS DA EXCITACAO',///,3X,'- AMPLITUDE',
    11X,'VERTICAL DA BASE',8X,F10.3,/,3X,'- AMPLITUDE DE ROTA',
    1'CAO DA BASE',6X,F10.3,/,3X,'- AMPLITUDE DA FORCA HORIZON'
    1,'TAL',3X,F7.3,/,3X,'- FREQUENCIA VERTICAL DA BASE',7X,
    1F10.3,/,3X,'- FREQUENCIA DE ROTACAO DA BASE',5X,F10.3,/)
21  FORMAT(3X,'- FREQUENCIA DA FORCA HORIZONTAL',4X,F10.3,///,
    120X,'- RESULTADOS -',/)
22  FORMAT(14X,'ANGULO',9X,'VELOCIDADE',6X,'ACELERACAO',7X,'AN'
    1,'GULO',9X,'VELOCIDADE',6X,'ACELERACAO',/,2X,'TEMPO', 'DA',
    114X,'DA',14X,'CA',14X,'DO',14X,'DO',14X,'DO',11X,'INCREMEN'
    1,'TO',/,15X,'CAIXA',11X,'CAIXA',11X,'CAIXA',11X,'PENDULO',
    19X,'PENDULC',9X,'PENDULO',/)
    DERY(1)=ABS(Y)+ABS(OMG)+ABS(FOR)
    RETURN
C--
30  RN1=-U*OMG*SIN(FRE2*X)-P*OMG*FRE2*COS(FRE2*X)
    1+RV*FCR*SIN(FRE3*X)
    RN2=Q*OMG*SIN(FRE2*X)+R*OMG*FRE2*COS(FRE2*X)
    1-W*FOR*SIN(FRE3*X)
    RKSI=G-H*Y*SIN(FRE1*X)-T*Y*FRE1*COS(FRE1*X)
    DERY(1)=V(2)
    DERY(2)=-RKSI*V(1)-A*V(2)-B*V(3)+S*V(4)+RN1
    DERY(3)=V(4)
    DERY(4)=(E*RKSI-D)*V(1)+C*V(2)+F*V(3)-Z*V(4)+RN2
C--
    RETURN
END
// DUP
*STORE      WS  UA  RCAL
// FCR
*LIST SOURCE PROGRAM
*CNE WORD INTEGERS
C--
    SUBROUTINE RSAI(X,V,DERY,NDIV,NDIM,PRMT)
    DIMENSION V(4),DERY(4),PRMT(7)
C--

```

```

        IF(PRMT(6))40,40,50
40 GO TO 100
50 IF(PRMT(7))70,70,6C
60 GO TO 100
70 VMED=ABS(V(1))+ABS(V(2))+ABS(V(3))+ABS(V(4))
    IF(VMED/PRMT(6)-1./20.)80,100,100

C--
80 PRMT(5)=1.
  WRITE(5,90)PRMT(3),PRMT(4)
90 FCRMAT(//,1X,'- INCREMENTO INICIAL',5X,F4.2,
  1//,1X,'- TOLERANCIA',13X,F10.8,/)
  RETURN

C--
100 PRMT(5)=0.
  ACR=PRMT(3)/(2.*#NDIV)
  WRITE(5,110)X,V(1),V(2),DERY(2),V(3),V(4),DERY(4),ACR
110 FORMAT(1X,F6.3,7E16.5)
  IF(X-PRMT(2))120,130,120
120 RETURN

C--
130 WRITE(5,140)PRMT(3),PRMT(4)
140 FORMAT(//,1X,'- INCREMENTO INICIAL',5X,F4.2,/,1X,
  1'- TOLERANCIA',13X,F10.8,/)
  RETURN
  END

// DCL
*STCRE      WS  UA  RSAI
// FCR
*LIST SOURCE PROGRAM
*CNE WORD INTEGERS
*ICCS(2501READER,1403PRINTER)
C--
      EXTERNAL RCAL,RSAI
      DIMENSION V(4),DERY(4),PRMT(7),AUX(8,4)

C--
      DATA PRMT(1),PRMT(2),PRMT(3),PRMT(4)/
      DATA V(1),V(2),V(3),V(4)/
      DATA RM1,RM2,RC1,RC2,RJ1,RK/
      DATA RL1,RL2,RL3,RL4,RL5,RL7/
C--
      NDIM=4
C--
      WRITE(5,1)
      WRITE(5,2)V(1),V(2),V(3),V(4)
      WRITE(5,3)RM1,RM2,RK,RC1,RC2,RJ1
      WRITE(5,4)RL1,RL2,RL3,RL4,RL5,RL7

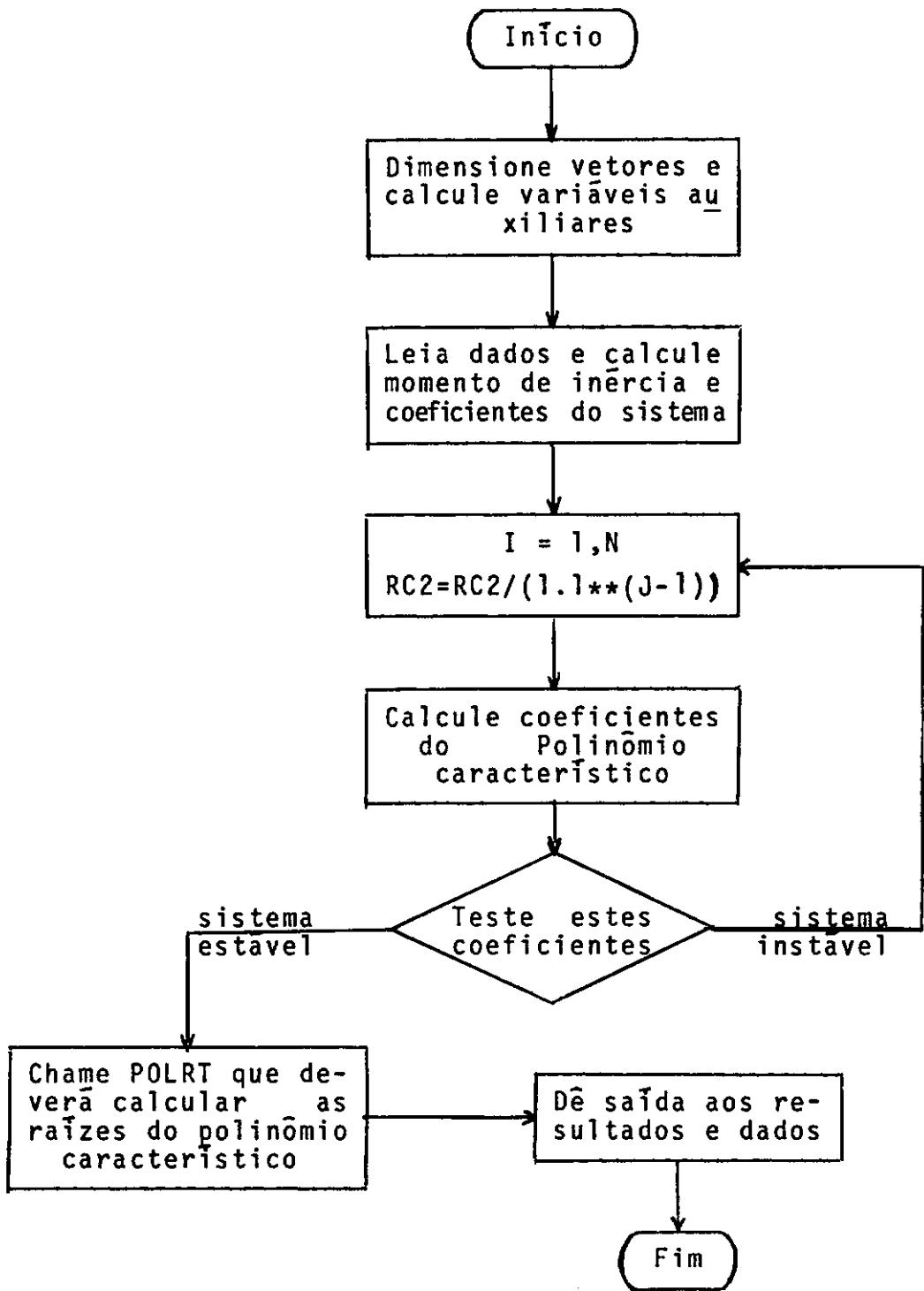
C--
      X=-1.
      CALL RCAL(X,V,DERY)
C--

```

```

      PRMT(6)=ABS(V(1))+ABS(V(2))+ABS(V(3))+ABS(V(4))
      PRMT(7)=DERY(1)
C--
      DO 140 I=1,NDIM
 140 DERY(I)=FLCAT(1/NDIM)
C--
      DO 180 I=1,10
      PRMT(3)=PRMT(3)-0.01*FLOAT(I-1)
C--
      CALL RKGS(PRMT,V,DERY,NDIM,NDIV,RCAL,RSAI,AUX)
C--
      IF(NDIV<10)210,210,150
 150 IF(NDIV>12)160,190,200
C--
 160 DO 170 J=1,NDIM
 170 DERY(J)=FLCAT(1/NDIM)
 180 PRMT(1)=0.
      WRITE(5,5)
      GO TO 220
C--
 190 WRITE(5,6)
      GO TO 220
 200 WRITE(5,7)
      GO TO 220
C--
 210 WRITE(5,8)NDIV,I
 220 CONTINUE
C--
 1 FORMAT(///,10X,'- SOLUCAO DO SISTEMA LINEARIZADO -',///)
 2 FORMAT(1X,'- CONDICoes INICIAIS',3X,'V(1)=',F5.2,7X,'V(2)='
     1,F5.2,7X,'V(3)=',F5.2,7X,'V(4)=',F5.2,//)
 3 FORMAT(1X,'- PARAMETROS DO SISTEMA',//,'RM1=',F10.3,/,,'RM'
     1,'2=',F10.3,/,,'RK=',F10.3,/,,'RC1=',F10.3,/,,'RC2=',F10.3,
     1/,,'RJ1=',F13.3,//)
 4 FORMAT('RL1=',F6.3,/,,'RL2=',F6.3,/,,'RL3=',F6.3,/,,'RL4='
     1,F6.3,/,,'RL5=',F6.3,/,,'RL7=',F6.3,//)
 5 FORMAT(///,1X,'- C NUMERO DE DIVISoES DO PASSO ASSUMIDO UL'
     1,'TRAPASSOU 10.NECESSARIO SELECIONAR UM MENOR PASSO IN'
     1,'ICIAL',//)
 6 FORMAT(///,1X,'- O PASSO INICIAL FOI TOMADO NULO.NECESSARIO'
     1,'O SELECIONA-LO COMPATIVEL COM O SENTIDO DO ACRESSIMO',//)
 7 FORMAT(///,1X,'- O SINAL DO PASSO INICIAL NAO ESTA COMPATI'
     1,'VEL COM O SENTIDO DO ACRESSIMO.NECESSARIO TROCAR ESTE SI'
     1,'NAL',//)
 8 FORMAT(//,'- CONTROLE DO ACRESSIMO INICIAL',9X,'NDIV=',I3,
     18X,'I=',I3,//)
      CALL EXIT
      END
// XEQ

```

DIAGRAMA DE FLUXO PARA O PROGRAMA - 3 -

```

// FCR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
*IICCS(2501READER,1403PRINTER)
C--
      DIMENSION COF(5),XCOF(5),ROOTR(4),ROOTI(4)
C--
      READ(8,1)RM1,RM2,RK,RC1,RC2
      READ(8,2)RL1,RL2,RL3,RL4,RL5
      WRITE(5,13)
C--
      VAU1=(RM1*2.)/3.
      VAU2=RM1/3.
      VAL3=(VAU1*RL2)/RL4
      VAU4=VAU1-VAU3
      VAU5=VAL3*(RL3**2+0.03**2)/12.
      VAL6=VAL4*(RL3**2+C.C3**2)/12.
      VAU7=VAU5+VAU3*((RL4-RL2)**2)
      VAU8=VAU6+VAU4*(RL2**2)
      VAL1=VAU2*(RL4**2+C.C3**2)/12.
      VAU3=(RL3/2.)**2+((RL4-(2.*RL2))/2.)**2
      VAU4=VAU1+VAU2*(VAU3**2)
      RJ1=VAU7+VAL8+2.*VAU4
C--
      A=(RL1**2)*RC1/2.
      B=9.81*(RL4-RL2)*RM2
      C=(RL1**2)*RC1*(RL5-RL4+RL2)/(RL5*2.)
      D=((RM2+RM1)/RM1)*RJ1*9.81/RL5
      E=((RL5-RL4+RL2)/RL5)*RJ1
      F=((RL5-RL4+RL2)*(RL4-RL2)*RM2*9.81-((RM2+RM1)/RM1)*RJ1
      1*9.81)/RL5
      G=RK*(RL1**2)/2.-9.81*(RM2+RM1)*RL2
      DC 80 I=1,51
      RC2=RC2/(1.1** (I-1))
      S=RC2
      Z=RC2*((RL5-RL4+RL2)/RL5+RJ1/(RM2*(RL5**2)))
C--
      S0=B*((E/RJ1)*(G/RJ1)-(D/RJ1))-G*F/RJ1
      S1=(G*Z+C*B-A*F)/RJ1-S*((E/RJ1)*(G/RJ1)-(D/RJ1))
      S2=G-F+A*Z/RJ1-C*S/RJ1
      S3=A+Z
      S4=RJ1
      S5=S1*(S2*S3-S1*S4)-(S3**2)*S0
C--
      IF(S0)80,80,40
      40 IF(S1)80,80,50
      50 IF(S2)80,80,60
      60 IF(S3)80,80,70
      70 IF(S5)80,80,90
      80 CONTINUE

```

```

90 WRITE(5,24)I
C--
      TEST=0.
      IF(S0)100,100,110
100 WRITE(5,3)
      TEST=1.
110 IF(S2)120,120,130
120 WRITE(5,4)
      TEST=1.
130 IF(S1)140,140,150
140 WRITE(5,5)
      TEST=1.
150 IF(S3)160,160,170
160 WRITE(5,6)
      TEST=1.
170 IF(S5)180,180,181
180 WRITE(5,7)
      TEST=1.
181 IF(TEST)190,190,182
182 WRITE(5,8)
      GO TO 200
190 WRITE(5,9)
C--
200 WRITE(5,15)
C--
      XC0F(1)=S0
      XC0F(2)=S1
      XC0F(3)=S2
      XC0F(4)=S3
      XC0F(5)=RJ1
C--
      M=4
C--
      DO 220 I=1,11
      DO 210 J=1,5
210 XC0F(J)=XCCF(J)*(2.**(J-1))
      CALL POLRT(XC0F,C0F,M,ROOTR,RCCTI,MEN)
      IF(MEN-3)230,220,230
220 CONTINUE
C--
      230 DO 240 L=1,4
      WRITE(5,17)RCOTR(L),ROOTI(L)
240 CONTINUE
C--
      WRITE(5,16)
      IF(MEN-1)250,260,270
250 WRITE(5,18)MEN
      GO TO 310
260 WRITE(5,19)MEN
      GO TO 310

```

```

27C IF(MEN-3)280,290,300
280 WRITE(5,20)MEN
    GO TO 310
290 WRITE(5,21)MEN
    GO TO 310
300 WRITE(5,22)MEN
C--
310 WRITE(5,14)
    WRITE(5,10)RM1,RM2,RK,RJ1
    WRITE(5,11)RC1,RC2
    WRITE(5,12)RL1,RL2,RL3,RL4,RL5
    WRITE(5,23)I
C--
1  FCRMAT(5F14.5)
2  FCRMAT(5F10.3)
3  FORMAT(1X,'- NAO SATISFEITA CONDICAO (I)',//)
4  FCRMAT(1X,'- NAO SATISFEITA CONDICAO (III)',//)
5  FCRMAT(1X,'- NAO SATISFEITA CONDICAO (II)',//)
6  FCRMAT(1X,'- NAO SATISFEITA CONDICAO (IV)',//)
7  FCRMAT(1X,'- NAO SATISFEITA CONDICAO (V)',//)
8  FCRMAT(1X,'- SISTEMA INSTAVEL',//)
9  FCRMAT(1X,'- SISTEMA ESTAVEL',//)
10 FORMAT('RM1=',F14.5,/,,'RM2=',F14.5,/,,'RK =',F14.5,
     1///,'RJ1=',F14.5,/)
11 FORMAT('RC1=',F14.5,/,,'RC2=',F14.5,/)
-- 12 FCRMAT('RL1=',F10.3,/,,'RL2=',F10.3,/,,'RL3=',F10.3,/,
     1      'RL4=',F10.3,/,,'RL5=',F10.3)
13 FORMAT(///,20X,'- RESULTADOS',//)
14 FCRMAT(20X,'- PARAMETROS',//)
15 FORMAT(1X,'- RAIZES DO POLINOMIO CARACTERISTICO',//)
16 FORMAT(//,1X,'- MENSAGEM DE ERRO',/)
17 FORMAT(10X,E14.7,25X,E14.7,/)
18 FORMAT(3X,'- NAO HOUVE ERRO',5X,'MEN=',I1,///)
19 FORMAT(3X,'- O GRAU M FOI TOMADO MENOR DA QUE 1',
     15X,'MEN=',I1,///)
20 FORMAT(3X,'- O GRAU M FOI TOMADO IGUAL A 1',
     15X,'MEN=',I1,///)
21 FORMAT(3X,'- NAO FOI POSSIVEL CALCULAR AS RAIZES COM',
     1' 500 INTERACOES PARA 5 VALORES INICIAIS',5X,'MEN=',I1,///)
22 FCRMAT(3X,'- COEFICIENTE DO TERMO DE MAIOR GRAU FOI',
     1' COMZERO NULO',5X,'MEN=',I1,///)
23 FORMAT(//,1X,'- CONTROLE DOS COEFICIENTES',5X,'I=',I2,/)
24 FCRMAT(/,1X,'- CONTROLE DO AMORTECIMENTO INICIAL',
     1' DO PENDULO',10X,'I=',I2,/)
    CALL EXIT
    END
// XEQ

```

DIAGRAMA DE FLUXO PARA O PROGRAMA - 4 -

Programa Principal:

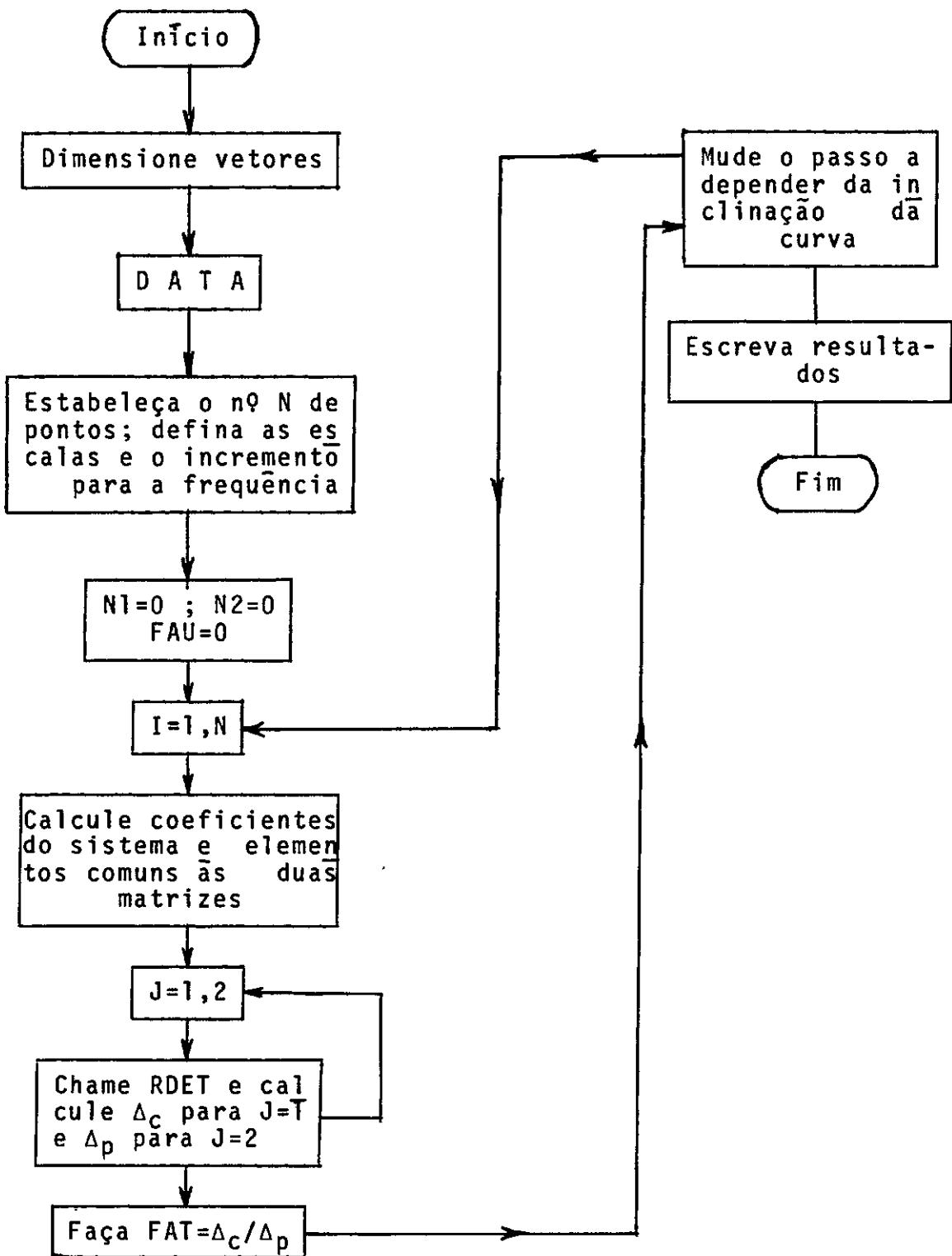
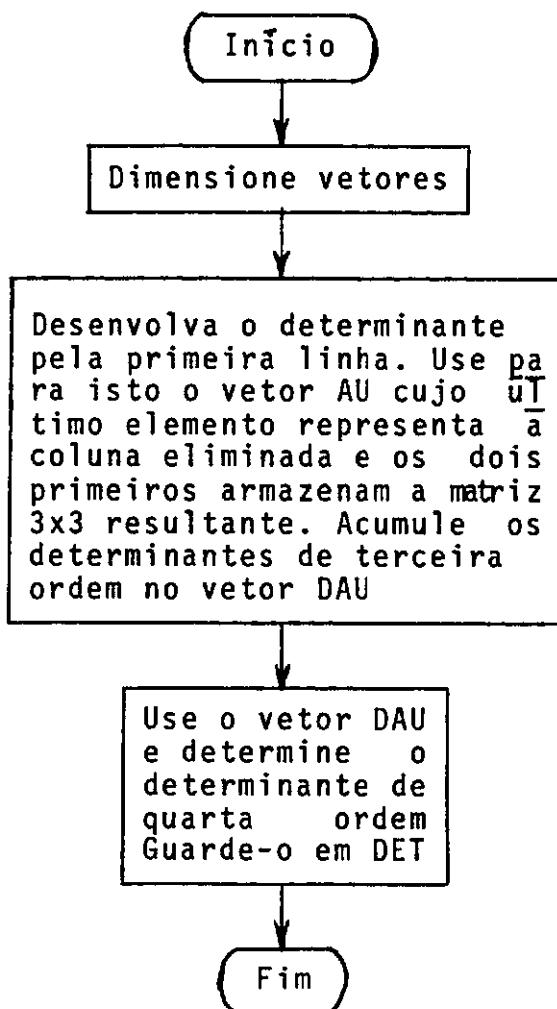


DIAGRAMA DE FLUXO PARA O PROGRAMA - 4 -

Subrotina RDET:



```

// FOR
*CNE WCRD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
  SUBROUTINE RDET(EL,DET)
  DIMENSION AU(3,3,4),EL(4,4),DAU(4)
  DET=0.
  TEST=0.
  DO 6 L=1,4
  DO 5 I=1,3
  N=0
  DO 4 J=1,3
  M=I+1
  IF(J-L)1,2,1
  1 IF(TEST)11,12,11
  11 N=N+1
  GO TO 3
  12 N=J
  GO TO 3
  2 TEST=1.
  N=J+1
  3 AU(I,J,L)=EL(M,N)
  4 CONTINUE
  5 CCNTINUE
    DAU(L)=AU(1,1,L)*(AU(2,2,L)*AU(3,3,L)-AU(2,3,L)*AU(3,2,L))
    1   -AU(1,2,L)*(AU(2,1,L)*AU(3,3,L)-AU(2,3,L)*AU(3,1,L))
    1   +AU(1,3,L)*(AU(2,1,L)*AU(3,2,L)-AU(2,2,L)*AU(3,1,L))
  6 DET=DET-((-1.)*L)*DAU(L)*EL(1,L)
  RETURN
END
// DUP
*STCRE      WS  UA  RDET
// FOR
*LIST SCLRCE PROGRAM
*CNE WCRD INTEGERS
*IICCS(2501READER,1403PRINTER)
C--
  DIMENSION EL(4,4)
  DATA RL1,RL2,RL4,RL5,RL7/
  DATA RM1,RM2,RC1,RC2,RJ1,RK/
  FRE=0.
  ESCV=1.
  ESCH=1C./2C0.
  FAU=0.
  RINC=1.
  RAU=RINC
  N1=0
  N2=0
  A=(RL1**2)*RC1/RJ1/2.
  B=9.81*(RL4-RL2)*RM2/RJ1
  C=A*(RL5-RL4+RL2)/RL5

```

```

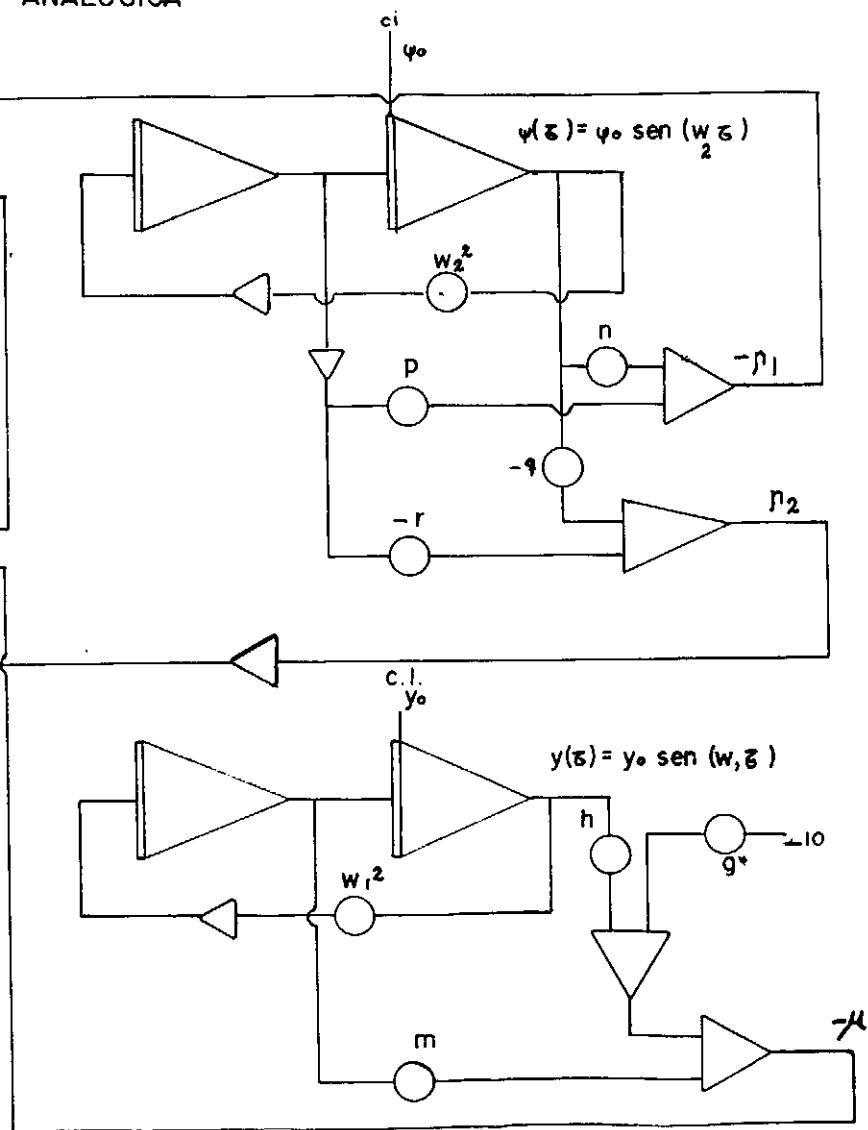
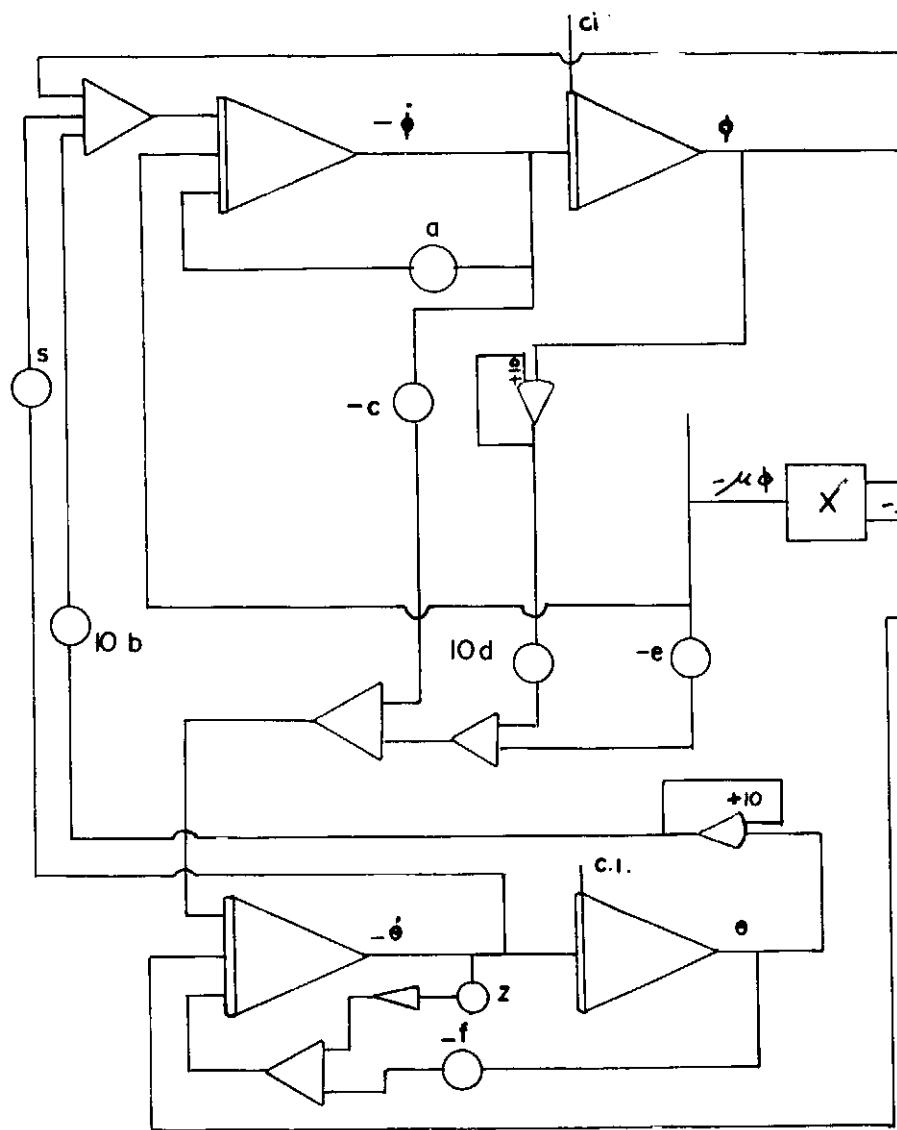
D=9.81*(RM1+RM2)/RM1/RL5
E=(RL5-RL4+RL2)/RL5
F=E*B-D
G=(RL1**2)*RK/RJ1/2.-9.81*(RM1+RM2)*RL2
H=RL1*RK/RJ1
RM=2.*RC1*RL2/RJ1
RN=(RL1**2)*RK/RJ1/2.
P=A
C=E*RN
R=E*A
S=RC2/RJ1
Z=RC2*E/RJ1+RC2/RM2/(RL5**2)
V=(RL2+RL7)/RJ1
W=E*V+1./RM1/RL5

C--
EL(1,2)=B
EL(4,3)=E*G-D
EL(3,4)=B
DO 14 I=1,400
FRE=FRE+RINC
EL(1,3)=-FRE*A
EL(1,4)=FRE*S
EL(2,2)=F+FRE**2
EL(2,3)=-C*FRE
EL(2,4)=Z*FRE
EL(3,2)=-S*FRE
EL(3,3)=G-FRE**2
EL(4,2)=-EL(2,4)
EL(4,4)=EL(2,2)
DO 3 J=1,2
GO TO 1,J
1 EL(1,1)=V
EL(2,1)=W
EL(3,1)=C.
EL(4,1)=C.
CALL RDET(EL,DET)
DETC=DET
GO TO 3
2 EL(1,1)=G-FRE**2
EL(2,1)=E*G-D
EL(3,1)=A*FRE
EL(4,1)=C*FRE
CALL RDET(EL,DET)
DETP=DET
3 CONTINUE
IF(DETP)4,14,4
4 FAT=ABS(DETC/DETP)
WRITE(5,100) FRE,FAT
IF((ABS(FAT-FAU)*ESCV/(RINC*ESCH))-1.1)12,5,5
5 IF((ABS(FAT-FAU)*ESCV/(RINC*ESCH))-2.0)6,8,8

```

```
6 IF(N1)14,7,14
7 RINC=RINC/4.
N1=1
GO TO 14
8 IF(N2)14,9,14
9 IF(N1)10,11,10
10 RINC=RINC/2.
N2=1
GO TO 14
11 RINC=RINC/40.
N2=1
GO TO 14
12 IF(N2)13,14,13
13 RINC=RAU
N2=0
14 FAU=FAT
100 FORMAT(/,10X,'FRE=',F10.4,15X,'AMP=',E14.7,20X,'****')
CALL EXIT
END
// XEQ
```

CIRCUITO PARA COMPUTAÇÃO ANALÓGICA



BIBLIOGRAFIA

- [1] YU CHEN, Vibrations Theoretical Methods, 1966.
- [2] LAMBERTO CESARI, Asymtotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations, Third Edition, 1970.
- [3] B. PORTER, Stability Criteria for Linear Dynamical Systems , 1967.
- [4] W. HAHN, Stability of Motion, 1967.
- [5] A. RALSTONI H.S. WILF, Mathematical Methods for Digital Computers.
- [6] KREIDER, KULLE, OSTBERG, Equações Diferenciais, 1972.
- [7] ASME - G.N. SARMA, F. KOZIN, An Active Suspension System Design for the Lateral Dynamics of a High-Speed Wheel-Rail System , 1972.
- [8] M. GUILLEMARD, Les Bogies Modernes pour les très grandes Vitesses, Proceedings of the II International Conference on Vehicles Dynamics.
- [9] ASME - Anthology of Rail Vehicle Dynamics, Effects of Train Action on Rail Car Vibration (2 vol.), 1972.
- [10] CYRIL M. HARRIS, CHARLES F. CREDE, Shock and Vibration Hand-Book (3. vol), 1961.
- [11] VON P.C. MÜLLER, Asymptotische Stabilität von Linearen Mechanischen Systemem mit Positiv Semidefiniter Dämpfungsmatrix, 1971.
- [12] VON P.C.MÜLLER, Verallgemeineug des Stabilitätssatzes von

Thomson-Tait-Chetaev auf Mechanische Systeme mit Secheinbar
nichtkonservativen Lagekräften, 1972.