

LIMITE DE STOKES: UMA APROXIMAÇÃO ESTÁVEL

PARA ESCOAMENTOS LENTOS DE FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS

Moysés Zindeluk

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

Aprovada por:

Affonso Silva Telles.
Affonso Carlos da Silva Telles
Presidente

Luiz Bevilacqua
Luiz Bevilacqua

Bruce Caswell
Bruce Caswell

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
DEZEMBRO DE 1972

LIMITE DE STOKES: UMA APROXIMAÇÃO ESTÁVEL PARA ESCOAMENTOS LENTOS DE FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS

Moisés Zindeluk

Agosto/1975

PTS.2/75

Aos do berço,
Ruth,
Irmãos.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor AFFONSO CARLOS DA SILVA TELLES, por sua orientação heurística e sua paciência. A ele se devem as idéias que aqui desenvolvemos.

Ao CNPq e à COPPE, pelo apoio à pesquisa.

À WANDA F. ROCHA, pela datilografia impecável.

Aos amigos, cuja honestidade é um estímulo.

O Autor.

SUMÁRIO

Estudamos um método de limite para escoamentos lentos de fluidos simples com memória evanescente. Baseado no teorema de aproximação de Coleman e Noll, o método visa evitar os casos de instabilidade de soluções que podem ocorrer na aplicação direta dos fluidos de Rivlin-Ericksen.

A conjectura que investigamos atribui a causa de instabilidade à presença, na equação dinâmica, de termos com diversas ordens de grandeza, na escala de tempo.

A equação dinâmica é desdobrada numa sequência de equações a que comparecem termos de mesma ordem de grandeza, aplicando-se o limite dos escoamentos lentos a toda a equação e não apenas à tensão.

O processo é aplicado, até a aproximação de 2º or- dem, ao caso simples do escoamento retilíneo e a solução é comparada com aquela prevista pela aplicação do 2º fluido de Rivlin-Ericksen.

ABSTRACT

A limit procedure for slow flows of simple fluids with fading memory is studied. Grounded on Coleman & Noll's approximation theorem, the procedure aims to avoid the cases of instability that may occur when the fluids of Rivlin-Ericksen are applied.

We investigate the conjecture that the instability is due to the different orders of magnitude of the terms that figure in the dynamical equation.

By applying the slow flow limit to the whole equation, and not to the stress alone, the equation is unfolded in a sequence of equations; to each of them, only terms of the same order are allowed.

The procedure is applied, up to the second order, to the simple case of lineal flow and the solution is compared with that obtained by the application of the second fluid of Rivlin-Ericksen.

F I N D I C E

	Páginas:
Capítulos:	
I INTRODUÇÃO	1
1. Histórico	1
2. Elementos Cinemáticos	4
3. Materiais Simples e Memória <u>Evanes</u> cente	10
4. O Retardamento e o Teorema de <u>Cole</u> man e Noll	15
5. Os Fluidos de Rivlin-Ericksen	19
II INSTABILIDADE DE SOLUÇÕES	22
6. Escoamento Retilíneo	22
7. Escoamento Retilíneo de Fluido do 2º Grau	26
III O LIMITE DE STOKES	35
8. Motivação	35
9. Escoamentos Lentos	38
10. Equações do Movimento	47

Capítulos:	Páginas:
IV APLICABILIDADE	59
11. Comportamento Assintótico de Soluções	59
12. Aplicação: Escoamento Retilíneo ..	64
13. Conclusões	74
BIBLIOGRAFIA	82

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1. HISTÓRICO

Buscando clareza e permanencia, a moderna mecanica dos meios continuos tem como preocupação básica o estudo das equações constitutivas. O cerne do desenvolvimento teórico se deve a trabalhos de Coleman, Noll, Rivlin, Truesdell e outros.

A teoria matemática apresentada em 1958 por Noll¹ deu origem a diversas linhas de pesquisa. Nessa teoria, que leva em conta somente efeitos puramente mecanicos, a tensão em uma partícula em certo instante depende da história da de formaçao numa vizinhança arbitrária da partícula até o instante considerado.

Assim, os materiais são dotados de uma propriedade que denominamos *memória*, cuja atuação será descrita, para ca-

da material, por sua equação constitutiva.

Uma classe interessante de materiais ideais, os materiais simples, é definida assim: a tensão depende exclusivamente da história do primeiro gradiente espacial da deforação. A maior parte dos trabalhos se manteve dentro desta classe. É óbvio que não conhecemos, em geral, toda a história de deformação de um material; precisamos, portanto, de resultados que nos permitam estimar o futuro baseados apenas no passado recente.

Uma propriedade notável em muitos materiais reais, caracterizada matematicamente com o nome de memória evanescente, permitiu a Coleman e Noll ² a obtenção de um resultado altamente promissor: um método de aproximação para a tensão, válido para processos lentos. Em suma, o funcional da história do gradiente de deformação é aproximado por uma função multilinear de um certo número de derivadas em relação ao tempo no instante atual.

Estudaremos aqui apenas os fluidos simples incompressíveis com memória evanescente. Neste caso, o teorema de aproximação citado acima dá origem a uma sequencia de modelos; a cada um desses fluidos ideais damos o nome de fluí

do do n -ésimo grau, onde n é o número de derivadas - tensores de Rivlin-Ericksen - consideradas.

Especialmente importante é o fluido do 2º grau, o de menor ordem a levar em conta efeitos não lineares, cuja equação constitutiva é:

$$\underline{T} = - p \underline{I} + \mu \underline{A}_1 + \alpha_1 \underline{A}_2 + \alpha_2 \underline{A}_1^2 \quad (1.1)$$

onde \underline{T} é o tensor tensão, \underline{A}_k são os tensores de Rivlin-Ericksen μ é a viscosidade e α_1 e α_2 são os coeficientes de 2º ordem.

Como veremos oportunamente, da substituição de (1.1) na equação dinâmica de Cauchy resulta uma equação diferencial parcial de 3º ordem.

Conforme mostraram Coleman, Duffin e Mizel³, essa equação, em certos casos, dá origem a problemas mal-formulados, i.e., instáveis, no sentido de Hadamard. Mostraremos no texto (sec. 7) um caso de instabilidade explicado por Truesdell e Noll⁴.

Este trabalho busca meios para contornar o problema da instabilidade das equações dinâmicas. A conjectura

que orienta o trabalho atribui a causa de instabilidade à presença, em uma mesma equação, de termos com diversas ordens de grandeza, na escala de tempo. Desdobramos a equação numa sequencia de equações a que compareçam termos compatíveis em ordem de grandeza. Estabelecemos, então, o limite para escoamentos lentos sobre o conjunto de equações e não sobre a tensão isoladamente, como sugerem os modelos citados acima, dos quais (1.1) é um exemplo.

A solução de Stokes para o escoamento lento em torno de uma esfera foi obtida com um processo de limite semelhante a este, resultando na equação de Stokes. Essa a motivação para o título que damos ao processo de limite aqui delineado.

2. ELEMENTOS CINEMÁTICOS

Nesta seção descrevemos, sucintamente, os elementos cinemáticos utilizados, segundo a teoria de Noll¹. Para uma exposição detalhada pode-se consultar [5].

Um corpo B é uma variedade diferenciável tri-dimensional, cujos elementos são chamados de partículas. Este nome deve ser desvinculado de seu significado usual de massa

pontual. O corpo se apresenta a nossa observação através de sua configuração, que pode ser definida como um homeomorfismo suave de B sobre uma região do espaço Euclidiano tridimensional.

Seja \underline{x}_t a configuração de B num particular instante de tempo $\tau = t$. Seja $\underline{x} = \underline{x}_t(x)$ a posição ocupada pela partícula X nesse instante. Um modo de se estudar o movimento de B no espaço é tomarmos a configuração \underline{x}_t como referência. A partícula X será identificada com sua posição de referência \underline{x} e a posição de X em qualquer instante t será especificada pela função *deformação relativa* \underline{x}_t

$$\underline{x} = \underline{x}_t(x, \tau) \quad (2.1)$$

Teremos:

$$\underline{x}_t(x, t) = \underline{x}, \text{ i.e., } \underline{x}_t(., t) = \underline{l}.$$

A velocidade e as acelerações da partícula \underline{x} podem ser obtidas derivando \underline{x}_t :

$$\underline{V}(\underline{x}, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \underline{\chi}_t(\underline{x}, \tau)$$

$$\dot{\underline{V}}(\underline{x}, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \underline{\chi}_t(\underline{x}, \tau)$$

.....

$$\overset{(n)}{\underline{V}}(\underline{x}, \tau) = \frac{\partial^{n+1}}{\partial \tau^{n+1}} \underline{\chi}_t(\underline{x}, \tau) \quad (2.2)$$

Para fluidos simples, estamos interessados principalmente no conhecimento do tensor gradiente de deformação relativa:

$$\underline{F}_t = \nabla \underline{\chi}_t(\underline{x}, \tau) \quad (2.3)$$

onde o gradiente " ∇ " é tomado na configuração de referência.

A história de uma função $\alpha(\tau)$ até o instante t é definida por:

$$\alpha^t(s) = \alpha(t-s), \quad s \geq 0 \quad (2.4)$$

Para o gradiente de deformação relativa, a história até o instante t será:

$$\tilde{F}_t^t(s) = \tilde{F}_t(t-s) = \nabla_{\tilde{x}_t} \chi_t(x, t-s), \quad s \geq 0 \quad (2.5)$$

onde se verifica:

$$\tilde{F}_t^t(0) = \tilde{F}_t(t) = 1 \quad (2.6)$$

O tensor de Cauchy-Green à direita, que apresenta a vantagem de componentes racionais em termos do campo de velocidades, é definido por:

$$\tilde{C}_t(\tau) = \tilde{F}_t^T(\tau) \tilde{F}_t(\tau) \quad (2.7)$$

Os tensores de Rivlin-Ericksen são definidos, para o instante t , na forma:

$$\tilde{A}_K = \frac{\partial^K}{\partial \tau^K} C_t(\tau) \Big|_{\tau=0} = (-1)^K \frac{d^K}{ds^K} C_t^t(s) \Big|_{s=0} \quad (2.8)$$

Utilizando (2.7) e (2.2) estabelece-se a fórmula de recorrência:

$$\tilde{A}_n = \tilde{L}_n + \tilde{L}_n^T + \sum_{K=1}^{n-1} {}^n_K \tilde{L}_K^T \cdot \tilde{L}_{n-K} \quad (2.9)$$

onde:

$$\underline{L}_p = \nabla \underline{V}^{(p-1)}(\underline{x}, \tau) \Big|_{\tau=t} \quad (2.10)$$

Em geral, os escoamentos são tratados na descrição *espacial*, que não nos informa o que ocorre com cada partícula e sim o que ocorre numa região do espaço. O escoamento é então descrito por um campo de velocidades

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, \tau) \quad (2.11)$$

Esta descrição pode conter tanta informação quanto a descrição *mATERIAL* (2.1), desde que conheçamos uma configuração do corpo para um instante particular t . As funções \underline{V} e \underline{v} têm argumentos diferentes, mas devem assumir os mesmos valores:

$$\underline{v}(\xi, \tau) = \underline{v}(X, \tau) \quad \text{se} \quad \xi = \underline{x}_t(X, \tau) \quad (2.12)$$

As acelerações devem satisfazer condições identicas à (2.12). Os campos de acelerações são obtidos pela regra da cadeia:

$$\dot{\underline{v}}(x, \tau) = \frac{d}{d\tau} \underline{v}(x, \tau) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \tau} + (\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\underline{\underline{v}}}(\underline{x}, \tau) &= \frac{d^2}{d\tau^2} \underline{\underline{v}}(\underline{x}, \tau) = \frac{\partial^2 \underline{\underline{v}}}{\partial \tau^2} + (\text{grad } \underline{\underline{v}}) \cdot \frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial \tau} + \\
 &+ 2(\text{grad } \frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial \tau}) \cdot \underline{\underline{v}} + \left[\text{grad } \underline{\underline{v}} \cdot (\text{grad } \underline{\underline{v}})^T \right] \cdot \underline{\underline{v}} + \\
 &+ \left[(\text{grad grad } \underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}} \right] \cdot \underline{\underline{v}}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde o operador "grad" é derivação na configuração do instante τ , ou seja:

$$\nabla = \underline{\underline{F}}_t^T \text{grad} \tag{2.15}$$

A aplicação de (2.15) a (2.9), tendo em conta (2.6), leva à fórmula de recorrência

$$\underline{\underline{A}}_{n+1} = \nabla \underline{\underline{v}}^{(n)} + (\nabla \underline{\underline{v}}^{(n)})^T + \sum_{K=1}^{n-1} \underline{\underline{A}}_K (\nabla \underline{\underline{v}}^{(K-1)})^T \cdot (\nabla \underline{\underline{v}}^{(K-1)}) \tag{2.16}$$

Os símbolos ∇ e grad serão confundidos para todas as derivações no instante de referência t .

3. MATERIAIS SIMPLES E MEMÓRIA EVANESCENTE

3.1 FUNCIONAIS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS SIMPLES.

A equação dinâmica de Cauchy

$$\rho \dot{\underline{v}} = \rho \underline{b} + \operatorname{div} \underline{T} \quad (3.1)$$

estabelecida, digamos, ao instante t , é fundamental para a previsão do futuro de um escoamento.

Nessa equação o campo \underline{b} representa as forças de corpo, como a gravitacional e outras, enquanto que o tensor tensão \underline{T} é responsável pelas forças de contato. É de se esperar que, para um dado material, a tensão dependa das características do movimento. Uma fórmula que descreva essa dependência é uma equação constitutiva.

A teoria apresentada por Noll¹, consiste na formulação matemática de certas noções intuitivas, levando a uma teoria de equações constitutivas. Para uma exposição detalhada ver também a referência [4].

Determinismo, ação local e indiferença material

(às mudanças de sistema de referência) são os poucos princípios utilizados para se chegar ao resultado geral da teoria de Noll: A tensão em uma dada partícula, num certo instante, depende apenas da história, até esse instante, da deformação de uma vizinhança arbitrária da partícula.

Salientamos que o tensor tensão é simétrico, resultado dessa teoria puramente mecânica para materiais não-polares, i.e., materiais em que não estão presentes binários de corpo e de contato. (Ver [5] Sec. 200).

A hipótese de continuidade do meio, que leva à exigencia de que a deformação seja homeomorfismo diferenciável, permite o seguinte desenvolvimento:

Seja \underline{y} uma partícula pertencente a uma vizinhança suficientemente pequena de \underline{x} . A história de deformação de \underline{y} pode ser expressa, em relação à de \underline{x} , por uma série de potencias de $|\underline{y} - \underline{x}|$. Se desprezarmos os termos de ordem superior a um, obteremos um movimento homogeneo local. Esse primeira aproximação no espaço das histórias de deformação define uma classe de materiais, os materiais simples.

Estamos interessados nos fluidos simples incompressíveis, para os quais o funcional constitutivo é dado por:

$$\underline{\underline{T}} = - p \underline{\underline{I}} + \sum_{s=0}^{\infty} [\underline{\underline{G}}(s)] \quad (3.2)$$

onde:

$$\underline{\underline{G}}(s) = \underline{\underline{C}}_t^s(s) - \underline{\underline{I}} \quad s \geq 0 \quad (3.3)$$

O princípio do determinismo para fluidos simples incompressíveis fica assim reduzido a: a tensão em uma partícula em dado instante é determinada pela história do primeiro gradiente espacial da deformação relativa até o instante considerado, a menos de uma pressão hidrostática indeterminada.

A equação constitutiva (3.2) é uma formulação equivalente, utilizando a história do tensor de Cauchy-Green (2.7). Pela definição (3.3), a história de repouso será:

$$\underline{\underline{G}}(s) \equiv \underline{\underline{0}} \quad (3.4)$$

3.2 MEMÓRIA EVANESCENTE.

O princípio do determinismo dota os materiais de

uma propriedade a que chamamos memória: o fato de que alguma característica do passado do movimento pode influir no valor atual da tensão. O funcional constitutivo (3.2) tem pouco valor preditivo, pois jamais conhecemos toda a história de deformação. A possibilidade de métodos de aproximação para (3.2) baseados em menos informação é garantida pelo seguinte fato observado na maioria dos materiais reais: o funcional \mathcal{U} deve ser mais sensível aos valores de G para s pequeno - (passado recente) - que para s grande - (passado remoto).

Um material simples cujo funcional constitutivo tem essa característica é dito de memória evanescente. Uma caracterização matemática da memória evanescente foi efetuada por Coleman e Noll² e, posteriormente, generalizada por Wang⁷. A caracterização dada em [2] e comentada em [4] se baseia numa exigência de continuidade para o funcional \mathcal{U} .

Seja h uma função tal que:

- i) $h(s)$ é definida e positiva para $0 < s < \infty$;
- ii) $h(0) = 1$;
- iii) $h(s)$ tende a zero rapidamente quando s cresce, de tal modo que:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^r h(s) = 0, \text{ monotonicamente para } s \text{ grande.}$$

A função $h(s)$ assim descrita é chamada uma função influencia de ordem r (r é positivo, mas não necessariamente inteiro).

O conjunto das funções de s , $0 \leq s < \infty$, cujos valores são tensores simétricos será chamado espaço das histórias. Uma semi-norma pode ser definida nesse espaço, com o peso h , do seguinte modo:

$$\|\underline{G}\|_h = \left(\int_0^\infty [h(s) |\underline{G}(s)|]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

onde:

$$|\underline{G}(s)| = \sqrt{\operatorname{tr} [\underline{G}(s)^2]} \quad (3.6)$$

Um material simples satisfaz o princípio fraco de memória evanescente se existe uma função influencia h de ordem $r > \frac{1}{2}$ tal que o funcional \mathcal{J} é definido e contínuo numa vizinhança da história de repouso no espaço de histórias.

Um material simples é dito de memória evanescente

de ordem n se satisfaz o n -ésimo princípio de memória evanescente: existe uma função influencia de ordem $r > n + \frac{1}{2}$ tal que o funcional \mathcal{J} é definido e n vezes Frechet-diferenciável numa vizinhança da história do repouso no espaço de histórias.

Da topologia introduzida pela norma (3.5) no espaço de histórias resulta que duas histórias são próximas se seus valores forem próximos no passado recente. Para o material de ordem n , os valores do funcional \mathcal{J} e de suas n primeiras diferenciais de Frechet são próximos, para duas histórias próximas.

4. O RETARDAMENTO E O TEOREMA DE COLEMAN E NOLL

Os resultados da seção anterior sugerem a possibilidade de se obter aproximações para o funcional constitutivo dos materiais simples com memória evanescente, para histórias de deformação próximas do repouso, i.e., para escoamentos lentos. Coleman e Noll² demonstraram um teorema de aproximação construindo, a partir de um escoamento dado, uma família de escoamentos mais lentos, através de uma transformação a que chamamos *retardamento*. Seja dado um escoa-

mento, até o instante atual t , por sua história de deformação relativa:

$$\underline{\chi}_t^t(\underline{x}, s) = \underline{\chi}_t(\underline{x}, t-s), \quad s \geq 0 \quad (4.1)$$

O ϵ -retardamento do escoamento será definido pela história de deformação retardada:

$$\underline{\chi}_t^\epsilon(\underline{x}, s) \equiv \underline{\chi}_t^t(\underline{x}, \epsilon s), \quad 0 < \epsilon \leq 1 \quad (4.2)$$

A velocidade \underline{v} e as acelerações $\underline{v}^{(n)}$ serão dadas por:

$$\begin{aligned} \underline{v}^\epsilon(\underline{x}, \tau) &= \underline{v}(\underline{x}, t-s) = \underline{\chi}_t^\epsilon(\underline{x}, s) = - \frac{d}{ds} \underline{\chi}_t(\underline{x}, t-\epsilon s) = \\ &= \epsilon \underline{v}^t(\underline{x}, \epsilon s) = \epsilon \underline{v}(\underline{x}, t-\epsilon s) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\underline{v}^{(n)}(\underline{x}, \tau) = \underline{v}^{(n)}(\underline{x}, t-s) = \underline{\chi}_t^{(n)t}(\underline{x}, s) = (-1)^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \underline{\chi}_t^{(n+1)}(\underline{x}, t-\epsilon s) &= \epsilon^{n+1} \underline{v}^{(n)t}(\underline{x}, \epsilon s) = \\ &= \epsilon^{n+1} \underline{v}^{(n)}(\underline{x}, t-\epsilon s) \end{aligned} \quad (4.4)$$

A velocidade e acelerações do escoamento original são dados por (2.2). Vemos assim que o retardamento substitui um escoamento por outro em que as deformações são as mesmas, mas o processo é mais lento. A história de deformação relativa descreve, com o parâmetro s , a trajetória da partícula \underline{x} e o retardamento é uma reparametrização dessa mesma trajetória, com o parâmetro ϵs . Para os tensores de Rivlin-Ericksen, obtem-se:

$$\frac{\epsilon}{A_K} = \epsilon^K \frac{A}{\tilde{A}_K} \quad (4.5)$$

O teorema de aproximação de Coleman e Noll² indica que, para escoamentos lentos de fluidos simples incompressíveis com memória evanescente de ordem n ou maior, o funcional constitutivo pode ser aproximado pela expressão:

$$\frac{\epsilon}{A} = - p \underline{l} + M_n \left(\frac{\epsilon}{A_1}, \dots, \frac{\epsilon}{A_n} \right) + \underline{o}(\epsilon^n) \quad (4.6)$$

onde o erro $\underline{o}(\epsilon^n)$ é tal que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|\underline{o}(\epsilon^n)|}{\epsilon^n} = 0 \quad (4.7)$$

e M_n é uma função multilinear de seus argumentos. No ca-

so presente, de fluidos incompressíveis, \underline{M}_n é isotrópica e independe da densidade. Os teoremas de representação para tais funções permitem desdobrar (V. Truesdell e Noll⁴) \underline{M}_n na forma:

$$\underline{M}_n(\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_n) = \sum_{K=1}^n \underline{S}_K(\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_K) \quad (4.8)$$

onde a forma dos \underline{S}_K não depende de n. Os primeiros termos são:

$$\underline{S}_1(\underline{A}_1) = \mu \underline{A}_1 \quad (4.9)$$

$$\underline{S}_2(\underline{A}_1, \underline{A}_2) = \alpha_1 \underline{A}_2 + \alpha_2 \underline{A}_1^2 \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_3(\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3) &= \beta_1 \underline{A}_3 + \beta_2 (\underline{A}_2 \underline{A}_1 + \underline{A}_1 \underline{A}_2) + \\ &+ \beta_3 (\operatorname{tr} \underline{A}_2) \underline{A}_1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_4(\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3, \underline{A}_4) &= \gamma_1 \underline{A}_4 + \gamma_2 (\underline{A}_3 \underline{A}_1 + \underline{A}_1 \underline{A}_3) + \\ &+ \gamma_3 \underline{A}_2^2 + \gamma_4 (\underline{A}_2 \underline{A}_1^2 + \underline{A}_1^2 \underline{A}_2) + \gamma_5 (\operatorname{tr} \underline{A}_2) \underline{A}_2 + \\ &+ \gamma_6 (\operatorname{tr} \underline{A}_2) \underline{A}_1^2 + [\gamma_7 \operatorname{tr} \underline{A}_3 + \gamma_8 \operatorname{tr} (\underline{A}_2 \underline{A}_1)] \underline{A}_1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

5. OS FLUIDOS DE RIVLIN-ERICKSEN

O processo de limite indicado pelo teorema de Coleman e Noll consiste na utilização, para o escoamento de fluidos simples com memória evanescente, da relação funcional que aproxima a tensão no limite dos escoamentos lentos. A expressão de aproximação (4.6) é considerada exata, dando origem a uma sequencia de modelos. O n -ésimo fluido de Rivlin-Ericksen tem a equação constitutiva:

$$\underline{\tau} = - p \underline{I} + \sum_{K=1}^n S_K(\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_K) \quad (5.1)$$

onde os S_K são dados por expressões como (4.9)a(4.12). Da relação (4.5) vemos que:

$$S_K(\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_K) = \mathcal{O}(\epsilon^{K-1}) \quad (5.2)$$

ou seja, o somatório em (4.6) e (5.1) agrupa, para escoamentos ϵ -retardados, em cada parcela os termos de mesma ordem em ϵ .

Para um fluido simples incompressível que satisfaçõ faz o n -ésimo princípio de memória evanescente, podemos aproximar a tensão com os fluidos de Rivlin-Ericksen de ordem

$k \leq n$.

O modelo não-Newtoniano mais simples é o 2º fluido de Rivlin-Ericksen, que chamaremos *fluido do 2º grau* e cujo funcional constitutivo é dado por:

$$\underline{T} = - p \underline{I} + \mu \underline{A}_{-1} + \alpha_1 \underline{A}_{-2} + \alpha_2 \underline{A}_{-1}^2 \quad (5.3)$$

Nessa expressão, μ é a função viscosidade, que pode ser considerada constante para escoamentos lentos. Os coeficientes de 2a. ordem α_1 e α_2 contêm a dimensão tempo e caracterizam efeitos acumulativos, até a 2a. ordem na escala de tempo.

O fluido do 2º grau é o único desta sequência que, levando em conta efeitos não-Newtonianos, tem suas constantes determináveis por escoamentos viscométricos permanentes. ([4] e [8]).

O processo de limite de Coleman e Noll sugere, então, o uso do modelo (5.3) como se usa o fluido de Navier-Stokes. O fluido de Navier-Stokes é o fluido do 1º grau:

$$\underline{T} = - p \underline{I} + \mu \underline{A}_{-1} \quad (5.4)$$

Verifica-se que esta equação constitutiva pode ser utilizada para qualquer escoamento e não apenas para os lentos. Já no caso do fluido do 2º grau, tal fato não ocorre, podendo ser encontradas soluções fisicamente inesperadas, como mostraremos nas próximas seções.

Os modelos apresentados mostram-se úteis na obtencão de informações a respeito de escoamento de fluidos não--Newtonianos.

O que buscamos é uma outra forma de utilizar o teorema de Coleman e Noll, que não traga os problemas de instabilidade citados e que exemplificamos a seguir.

CAPÍTULO II

INSTABILIDADE DE SOLUÇÕES

6. ESCOAMENTO RETILINEO

Consideremos o caso simples dos escoamentos tais que, para algum sistema cartesiano (x, y, z) , o campo de velocidades $\underline{v}(x, t)$ tenha as componentes:

$$\dot{x} = 0 \quad ; \quad \dot{y} = v(x, t) \quad ; \quad \dot{z} = 0 \quad (6.1)$$

Tais escoamentos são viscométricos e a expressão para a tensão é muito simples. Seguimos o tratamento dado em [8].

A função deformação relativa deverá fornecer:

$$\xi = \underline{x}_t (x, \tau) \quad (6.2)$$

onde:

$$\xi = (\xi, \eta, \zeta) \quad \text{e} \quad \underline{x} = (x, y, z).$$

As equações de deformação são:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = 0 \quad ; \quad \frac{dn}{d\tau} = v(\xi, \tau) \quad ; \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = 0 \quad (6.3)$$

com as soluções:

$$\xi = x \quad ; \quad n = y + \int_t^\tau v(x, \sigma) d\sigma \quad ; \quad \zeta = z \quad (6.4)$$

As trajetórias serão retilíneas, donde o nome es
coamento retilíneo.

No sistema cartesiano em que valem as componentes
de (6.1), o gradiente de deformação relativa terá matriz:

$$\left[\begin{matrix} F_{\tilde{x}}(\tau) \\ F_{\tilde{y}}(\tau) \\ F_{\tilde{z}}(\tau) \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ k(\tau) - k(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right] \quad (6.5)$$

onde:

$$k(\tau) = \int_0^\tau v'(x, \sigma) d\sigma \quad (6.6)$$

com:

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}, \sigma) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \sigma) \quad (6.7)$$

Notamos que $\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau)$ tem a forma:

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \underline{\mathbf{I}} + [\mathbf{k}(\tau) - \mathbf{k}(t)]\underline{\mathbf{N}} \quad (6.8)$$

onde $\underline{\mathbf{N}}$ é um tensor constante, com matriz:

$$[\underline{\mathbf{N}}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (6.9)$$

Tem-se ainda $\underline{\mathbf{N}}^2 = \underline{\mathbf{0}}$ e $|\underline{\mathbf{N}}| = 1$.

A história do gradiente de deformação relativa se râ:

$$\tilde{\mathbf{F}}_t^t(s) = \tilde{\mathbf{F}}_t(t-s) = \underline{\mathbf{I}} + [\mathbf{k}(t-s) - \mathbf{k}(t)]\underline{\mathbf{N}} \quad (6.10)$$

Fazendo:

$$\underline{g}_t(s) = k(t-s) - k(t) \quad (6.11)$$

a história \underline{F}_t^t fica:

$$\underline{F}_t^t(s) = \underline{\mathbb{I}} + \underline{g}_t(s) \underline{\mathbb{N}} \quad (6.12)$$

O tensor de Cauchy-Green à direita, (2.7), pode ser facilmente calculado e fica:

$$\underline{C}_t^t(s) = \underline{\mathbb{I}} + \underline{g}_t(s) (\underline{\mathbb{N}} + \underline{\mathbb{N}}^T) + [\underline{g}_t(s)]^2 \underline{\mathbb{N}}^T \cdot \underline{\mathbb{N}}$$

Da definição (2.8), calculamos os dois primeiros tensores de Rivlin-Ericksen:

$$\underline{A}_1 = - \frac{d}{ds} \underline{C}_t^t(s) \Big|_{s=0} = - \dot{\underline{g}}_t(0) (\underline{\mathbb{N}} + \underline{\mathbb{N}}^T) \quad (6.13)$$

$$\underline{A}_2 = \frac{d^2}{ds^2} \underline{C}_t^t(s) \Big|_{s=0} = \ddot{\underline{g}}_t(0) (\underline{\mathbb{N}} + \underline{\mathbb{N}}^T) + 2[\dot{\underline{g}}_t(0)]^2 \underline{\mathbb{N}}^T \cdot \underline{\mathbb{N}} \quad (6.14)$$

onde:

$$\dot{\underline{g}}_t(0) = - \dot{k}(t) = - \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) \quad (6.15)$$

$$\ddot{\underline{g}}_t(0) = \ddot{k}(t) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} v(x, t) \quad (6.16)$$

7. ESCOAMENTO RETILÍNEO DE FLUIDO DO 2º GRAU

Suponhamos que um fluido simples incompressível com memória evanescente de ordem maior ou igual a dois seja submetido a um escoamento do tipo descrito na seção 6.

Para escoamentos lentos, a tensão pode ser calculada aproximadamente usando-se o modelo do 2º grau (5.3). Tendo em vista as expressões (6.13) a (6.16), a tensão será:

$$\begin{aligned} \underline{\tau} = & - p \underline{I} + \left[\alpha_1 \ddot{g}_t(0) - \mu \dot{g}_t(0) \right] (\underline{N} + \underline{N}^T) + \\ & + (2\alpha_1 + \alpha_2) \left[\dot{g}_t(0) \right]^2 \underline{N}^T \cdot \underline{N} + \alpha_2 \left[\dot{g}_t(0) \right]^2 \underline{N} \cdot \underline{N}^T \end{aligned} \quad (7.1)$$

A equação da continuidade para fluidos incompressíveis se reduz a $\operatorname{div} \underline{v} = 0$. No presente caso, temos $v_1 = v_3 = 0$, e a equação se reduz a:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

que é identicamente satisfeita por $v = v(x, t)$.

A equação dinâmica de Cauchy é:

$$\rho \dot{\underline{v}} = \rho \underline{b} + \operatorname{div} \underline{T} \quad (7.2)$$

Consideremos as forças de corpo como conservativas, i.e., existe um potencial ψ tal que:

$$\rho \underline{b} = - \operatorname{grad} \psi \quad (7.3)$$

Um novo potencial ϕ pode ser formado fazendo:

$$\phi = p + \psi \quad (7.4)$$

Se desdobrarmos a tensão em

$$\underline{T} = - p \underline{l} + \underline{T}_E \quad (7.5)$$

a equação dinâmica fica

$$\rho \dot{\underline{v}} = - \operatorname{grad} \phi + \operatorname{div} \underline{T}_E \quad (7.6)$$

As componentes das forças de contato são obtidas aplicando a divergência a \underline{T}_E em (7.1). Utilizando a convenção de índice para as derivadas parciais, e.g. $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$, chegamos às três equações componentes de (7.6):

$$\phi_x = (2\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\partial}{\partial x} \left[(v_x)^2 \right] + \alpha_1 v_{txy} + \mu v_{xy} \quad (7.7)$$

$$\rho v_t = -\phi_y + \alpha_1 v_{txx} + \mu v_{xx} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} \left[(v_x)^2 \right] \quad (7.8)$$

$$\phi_z = 0 \quad \text{ou} \quad \phi = \phi(x, y, t) \quad (7.9)$$

Como $v = v(x, t)$, anulam-se as derivadas em y e vem:

$$\phi_x = (2\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\partial}{\partial x} \left[(v_x)^2 \right] \quad (7.10)$$

$$\rho v_t = -\phi_y + \alpha_1 v_{txx} + \mu v_{xx} \quad (7.11)$$

Integramos (7.10) em x , obtendo:

$$\phi(x, y, t) = (2\alpha_1 + \alpha_2) (v_x)^2 + f(y, t) \quad (7.12)$$

Para $f(y, t)$ usamos (7.11):

$$\frac{\partial}{\partial y} f(y, t) = -\rho v_t + \alpha_1 v_{txx} + \mu v_{xx} \quad (7.13)$$

como $v = v(x, t)$, temos em (7.13):

$$\frac{\partial}{\partial y} f(y, t) = g(x, t) = a(t) \quad (7.14)$$

donde:

$$f(y, t) = a(t)y + C \quad (7.15)$$

Portanto, as forças de corpo na direção do escoamento são dadas por $a(t)$ e o potencial ϕ é:

$$\phi(x, y, t) = (2\alpha_1 + \alpha_2)(v_x)^2 + a(t)y + C \quad (7.16)$$

O problema dinâmico se restringe agora à solução da equação a derivadas parciais de terceira ordem:

$$\rho v_t - \mu v_{xx} - \alpha_1 v_{xtx} = a(t) \quad (7.17)$$

Alguns problemas no comportamento de (7.17) foram mostrados por Coleman, Duffin e Mizel ³. Mostraremos um caso específico de instabilidade, o do escoamento em canal (placas paralelas estacionárias), citado por Truesdell e Noll ⁴. O duto é esquematizado na Figura 7.1.

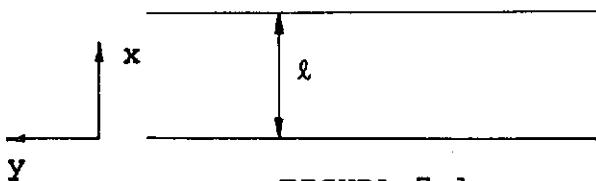


FIGURA 7.1

Estudemos inicialmente o caso homogêneo $a(t) \equiv 0$, ou seja, ausência de forças de corpo na direção do escoamento.

Partindo de condições iniciais arbitrárias, é de se esperar que a energia se dissipe, i.e., que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0 \quad (7.18)$$

Equações e condições serão:

$$\rho v_t - \mu v_{xx} - \alpha_1 v_{xtx} = 0 \quad (7.19)$$

$$\begin{cases} v(x, 0) = f(x) \\ v(0, t) = v(\ell, t) = 0 \end{cases} \quad (7.20)$$

A condição inicial $f(x)$ deve satisfazer $f(0) = f(\ell) = 0$. Para as condições iniciais $f(x)$ que admitiram expansão em série de Fourier, estudemos o comportamento de um termo genérico de tal expansão, ou seja, consideremos:

$$f(x) = A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.21)$$

Podemos encontrar uma solução particular por separação de variáveis. Façamos:

$$v(x, t) = X(x) T(t) \quad (7.22)$$

Substituindo em (7.19), vem:

$$\rho X' - \mu X'' T - \alpha_1 X'' T' = 0$$

onde teremos, para cada valor de n em (7.21):

$$\frac{\rho X}{X''} - \alpha_1 = \frac{\mu T}{T'} = \lambda_n \quad (7.23)$$

Resultando as equações:

$$X'' - \frac{\rho}{\lambda_n + \alpha_1} X = 0$$

$$T' - \frac{\mu}{\lambda_n} T = 0$$

Essas equações admitem as soluções:

$$X(x) = A_n \sin \sqrt{-\frac{\rho}{\lambda_n + \alpha_1}} x$$

$$T(t) = e^{\frac{\mu}{\lambda_n} t}$$

Para que $X(x) = f(x)$ satisfaça (7.21), devemos ter:

$$\sqrt{-\frac{\rho}{\lambda_n + \alpha_1}} = \frac{n\pi}{l}$$

ou seja:

$$\lambda_n = -\frac{\rho}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} - \alpha_1$$

Assim, uma solução particular para (7.19) satisfazendo (7.20) no caso especial (7.21) é:

$$v(x,t) = A_n e^{a_n t} \sin \frac{(n\pi)}{l} x \quad (7.24)$$

onde o expoente a_n é dado por:

$$a_n = \frac{\mu}{\lambda_n} = \frac{v \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}{1 + \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} \quad (7.25)$$

onde $v = \frac{\mu}{\rho}$ é a viscosidade cinemática.

A solução (7.24) será ilimitada se $a_n > 0$, ou seja:

$$1 + \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 < 0 \quad (7.26)$$

A equação (7.19) foi estudada por Ting ⁹, que supondo $\alpha_1 > 0$ previu soluções estáveis. No entanto, existem várias razões para se acreditar que $\alpha_1 < 0$, entre as quais estão as experiências de Markovitz e Brown, e o argumento termodinâmico de Coleman e Mizel, citados em [4] (sec. 121 e 123). Assim, a estabilidade da solução (7.24) estará comprometida se $n > n_o$ onde:

$$n_o = \frac{\ell}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{(-\alpha_1)}} \quad (7.27)$$

e teremos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = \infty \quad (n > n_o) \quad (7.28)$$

Podemos agora verificar que o problema pode ser instável, no sentido de Hadamard, mesmo para a equação não homogênea (7.17).

Seja $v(x, t)$ uma solução limitada de (7.17) satisfazendo as condições:

$$\begin{cases} v(0, t) = v(\ell, t) = 0 \\ x(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (7.29)$$

A função $\tilde{v}(x, t) = \delta e^{\frac{a_n t}{n}} \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ é solução da equação homogênea (7.19) com as condições:

$$\begin{cases} \tilde{v}(0, t) = \tilde{v}(\ell, t) = 0 \\ \tilde{v}(x, 0) = \delta \sin \frac{n\pi}{\ell} x \end{cases} \quad (7.30)$$

A função $\bar{v}(x, t) = v + \tilde{v}$ é solução de (7.17) satis fazendo condições arbitrariamente próximas de (7.29), pois teremos:

$$|\bar{v}(x, 0) - v(x, 0)| = \left| \delta \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right| \leq \delta \quad (7.31)$$

Façamos $n > n_0$ e está mostrada a instabilidade: enquanto v é limitada, a solução \bar{v} , satis fazendo condição inicial arbitrariamente próxima é ilimitada.

CAPÍTULO III

O LIMITE DE STOKES

8. MOTIVAÇÃO

Como vimos no capítulo anterior, o 2º fluido de Rivlin-Ericksen (5.3), quando usado como modelo na equação dinâmica (3.1), dá origem a uma equação diferencial parcial de terceira ordem. Em geral, o fluido do n -ésimo grau for necessáriamente uma equação dinâmica de ordem $n + 1$.

A ordem mais elevada das equações implica na multiplicidade das soluções possíveis, tornando necessárias mais condições restritivas para se chegar a uma solução única.

Note-se, porém, que não temos a nossa disposição, para aplicar a um problema de escoamento, maior número de condições naturais do que as que tem sido usadas até hoje. De fato, um perfil inicial de velocidades encerra em si to

da a informação inicial que podemos fornecer arbitrariamente sem contrariar a própria equação dinâmica, pois é esta que nos informa a aceleração. Quanto às condições de torno, nada além da hipótese de aderência aos obstáculos se nos oferece.

O processo de limite indicado na seção 5 permite a obtenção de expressões para as forças de corpo e tensões normais ([8]). Quanto ao valor preditivo, representado pela equação dinâmica, os casos de instabilidade que ocorrem para o fluido do 2º grau nos levam a suspeitar que possam ocorrer problemas mal formulados também para os de maior ordem.

Essa suspeita se baseia na conjectura de Telles⁶, de que a instabilidade se deve à presença, na equação dinâmica, de termos de diversas ordens de grandeza, na escala de tempo.

De fato, a expressão de aproximação de Coleman e Noll (4.6)^a(4.12), levada à equação de Cauchy (3.1), fornece:

$$\rho \dot{\underline{v}}^{\epsilon} = \rho \dot{\underline{b}}^{\epsilon} - \text{grad } p^{\epsilon} + \sum_{k=1}^n \text{div } S_k(\underline{A}_1^{\epsilon}, \dots, \underline{A}_k^{\epsilon}) + \underline{o}(\epsilon^n) \quad (8.1)$$

Pela expressão (4.4) para a aceleração do escoamento retardado teremos:

$$\frac{\epsilon}{\dot{v}} = \underline{o}(\epsilon) \quad (8.2)$$

De (5.2) temos:

$$S_1(\tilde{A}_1) = \underline{o}(1)$$

$$S_2(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \underline{o}(\epsilon)$$

.....

$$S_n(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) = \underline{o}(\epsilon^{n-1}) \quad (8.3)$$

Supomos que esta dificuldade surge no processo de limite exposto na seção 5 porque o limite para escoamentos lentos é tomado isoladamente sobre a tensão. Nosso intuito é aplicar o teorema de aproximação de Coleman e Noll diretamente na equação do movimento. Com isso, obteremos em lugar de uma equação de ordem n , um sistema de n equações de 2a. ordem, a cada uma das quais comparecem apenas termos de mesma ordem de grandeza.

No primeiro passo do processo, desprezamos todos os termos de ordem superior a um, no parâmetro de retardamento ϵ , inclusive o termo quadrático ($\text{grad } \underline{v}$) $\cdot \underline{v}$, o que se assemelha ao processo de limite utilizado por Stokes para resolver o problema do escoamento lento de fluido Newtoniano em torno de uma esfera. Daí decorre o nome de limite de Stokes dado em [6] a este processo de limite. De fato, a primeira equação encontrada é a equação de Stokes.

9. ESCOAMENTOS LENTOS

A denominação "lento" dada a um escoamento é vaga e não a tornaremos mais precisa - o que só é possível de forma muito precária - porque não necessitamos medir a lentidão de um escoamento, mas tão somente comparar escoamentos.

O processo de limite a ser desenvolvido é aplicável a escoamentos lentos e esse fato é mostrado do seguinte modo: a partir de um escoamento original arbitrário, construímos uma família de ϵ -retardamentos, conforme a definição (4.2). A aproximação é válida para escoamentos lentos se o erro cometido tender a zero com certa rapidez quando ϵ tende a zero.

O termo $\underline{o}(\epsilon^n)$ na expressão de aproximação (4.6) indica a sua validade para escoamentos lentos. Nenhuma outra interpretação pode ser dada ao parâmetro de retardamento ϵ , dada a arbitrariedade do escoamento original.

No instante particular $\tau = t$, chamado de *instante atual*, certas características da história do escoamento são utilizadas para se determinar aproximadamente a tensão. Estudemos a influência do parâmetro de retardamento ϵ nos diversos elementos cinemáticos de interesse.

O retardamento, conforme definido na seção 4, é aplicado à descrição material do passado do escoamento:

$$\underline{x}_t^t(\underline{x}, s) = \underline{x}_t(\underline{x}, t-s), \quad s \geq 0 \quad (9.1)$$

A história de deformação retardada é:

$$\underline{x}_t^\epsilon(\underline{x}, s) = \underline{x}_t(\underline{x}, \epsilon s), \quad 0 < \epsilon \leq 1 \quad (9.2)$$

A velocidade \underline{v} e as acelerações $\underline{v}^{(n)}$ serão:

$$\begin{aligned} \underline{v}^\epsilon(\underline{x}, \tau) &= \underline{v}(\underline{x}, t-s) = \underline{x}_t^\epsilon(\underline{x}, s) = -\frac{\partial}{\partial s} \underline{x}_t(\underline{x}, t-\epsilon s) = \\ &= \epsilon \underline{v}^\epsilon(\underline{x}, \epsilon s) = \epsilon \underline{v}(\underline{x}, t-\epsilon s) \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{v}}^{(n)}(\underline{x}, \tau) &= \underline{\underline{v}}^{(n)}(\underline{x}, t-s) = \underline{\underline{v}}^{(n)t}(\underline{x}, s) = (-1)^{n+1} \\
 &\frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}} \underline{\chi}_t(\underline{x}, t-\epsilon s) = \epsilon^{n+1} \underline{\underline{v}}^{(n)t}(\underline{x}, \epsilon s) = \\
 &= \epsilon^{n+1} \underline{\underline{v}}^{(n)}(\underline{x}, t-\epsilon s)
 \end{aligned} \tag{9.4}$$

Geralmente, não é usada a descrição material. O que sabemos do passado é a história do campo de velocidades, dentro de certa região do espaço. Essa descrição espacial será representada pela história:

$$\underline{\underline{v}}^t(\underline{x}, s) = \underline{\underline{v}}(\underline{x}, t-s), \quad s \geq 0 \tag{9.5}$$

As exigências de diferenciabilidade do campo de velocidades, que aumentam com a ordem de aproximação, serão consideradas satisfeitas, em cada caso.

Apesar de não havermos mencionado, estamos trabalhando com meios materialmente isomorfos, no sentido de que o funcional constitutivo é o mesmo para todas as partículas.

Tendo em conta esta hipótese, não estamos de fato interessados em seguir cada partícula. A descrição espacial

al contém tanta informação quanto a material, desde que co
nheçamos uma configuração do corpo. De fato, tomemos como configuração inicial, para $s = 0$, a configuração do instante t . Teremos:

$$\underline{x}_t^t(\underline{x}, s) = \underline{x} - \int_0^s \underline{v}^t(\underline{x}_t^t(\underline{x}, \sigma), \sigma) d\sigma \quad (9.6)$$

Vemos assim que $\underline{x}_t^t(\underline{x}, s)$ é uma descrição da trajetória da partícula \underline{x} até o instante t . O escoamento retardado será uma reparametrização, obtida aplicando-se a definição (9.2) à integral (9.6):

$$\underline{x}_t^{\epsilon t}(\underline{x}, s) = \underline{x} - \int_0^{\epsilon s} \underline{v}^t(\underline{x}_t^t(\underline{x}, \sigma), \sigma) d\sigma \quad (9.7)$$

O campo de velocidades retardado será aquele integrando obtido ao se tentar encontrar uma definição semelhante a (9.6) para o escoamento retardado. Substituindo em (9.7) a variável muda por $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\epsilon}$, obtemos:

$$\underline{x}_t^{\epsilon t}(\underline{x}, s) = \underline{x} - \int_0^s \underline{v}^t(\underline{x}_t^t(\underline{x}, \epsilon \bar{\sigma}), \epsilon \bar{\sigma}) d(\epsilon \bar{\sigma}) \quad (9.8)$$

onde resulta que o campo de velocidades retardado será:

$$\frac{\epsilon}{\underline{v}}(\underline{x}, s) = \epsilon \underline{v}^t(\underline{x}, \epsilon s) \quad (9.9)$$

Este resultado poderia ser obtido derivando (9.7) em relação a s.

As acelerações serão obtidas derivando (9.9). Lembrando que $ds = -dt$, o seguinte operador seria utilizado:

$$- \frac{d}{ds} = - \frac{\partial}{\partial s} + (\text{grad.}) \cdot \underline{v} \quad (9.10)$$

Para a primeira aceleração do escoamento retardado, notamos que:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{\underline{v}^t}(\underline{x}, s) &= - \frac{\partial}{\partial s} \frac{\epsilon}{\underline{v}^t}(\underline{x}, s) + (\text{grad } \frac{\epsilon}{\underline{v}^t}) \cdot \underline{v}^t = \\ &= - \epsilon \frac{\partial}{\partial s} \underline{v}^t(\underline{x}, \epsilon s) + (\text{grad } \frac{\epsilon}{\underline{v}^t}) \cdot \underline{v}^t = \\ &= - \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \underline{v}^t(\underline{x}, \sigma) \Big|_{\sigma=\epsilon s} + (\text{grad } \frac{\epsilon}{\underline{v}^t}) \cdot \underline{v}^t \end{aligned} \quad (9.11)$$

A suposição crucial que fazemos e que permitirá o desenvolvimento do processo de limite é que a dependencia

do campo de velocidades retardado, no parâmetro de retardamento ϵ é analítica em torno de $\epsilon = 1$, isto é, que podemos expandir $\underline{\underline{v}}$ numa série de potências de ϵ ; supomos ainda que os escoamentos a serem tratados sejam suficientemente bem comportados para que essa série possa convergir uniformemente, para $0 < \epsilon \leq 1$. A série, em termos da variável tempo τ fica:

$$\underline{\underline{v}}(\underline{x}, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \underline{\underline{v}}_k(\underline{x}, \tau), \quad \tau \leq t \quad (9.12)$$

Lembramos que, se $\underline{\underline{v}}(\underline{x}, \tau)$ é o escoamento original, teremos, por (9.9):

$$\underline{\underline{v}}(\underline{x}, \tau) = \epsilon \underline{\underline{v}}(\underline{x}, t - \epsilon(t - \tau)), \quad \tau \leq t \quad (9.13)$$

Assim, para se obter as acelerações a partir da série (9.12), aplicaremos o operador (9.10) que, como se vê em (9.11), dá:

$$\frac{d}{d\tau} \epsilon \underline{\underline{v}}(\underline{x}, \tau) = \dot{\underline{\underline{v}}}(\underline{x}, \tau) = \epsilon \frac{\partial}{\partial \sigma} \underline{\underline{v}}(\underline{x}, \sigma) \Big|_{\sigma=t-\epsilon(t-\tau)} + (\text{grad } \epsilon) \cdot \underline{\underline{v}} \quad (9.14)$$

ou seja, o operador (9.10) será substituído, para aplicação

à série (9.12), por:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} + (\text{grad.}) \cdot \tilde{v}, \quad t < t \quad (9.15)$$

A expressão (4.6) nos fornece um valor aproximado para a tensão no instante $\tau = t$, em função das derivadas à esquerda, no instante t , do campo de velocidades. Adote mos a convénção:

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \quad (9.16)$$

e apliquemos o operador (9.15) repetidamente à série (9.12). Obtemos, considerando a convergência uniforme de (9.12):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}}(x, t) &= \sum_{k=2}^n \epsilon^k \sum_{p=1}^{k-1} (\nabla \tilde{v}_p) \cdot \tilde{v}_{k-p} + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon^{k+1} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{v}_k + \mathcal{O}(\epsilon^n) \end{aligned} \quad (9.17)$$

e a segunda aceleração será:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\epsilon}_{\tilde{v}}(x, t) &= \sum_{k=3}^n \epsilon^k \sum_{p=1}^{k-2} \sum_{q=1}^{k-p-1} \nabla \left[(\nabla \tilde{v}_p) \cdot \tilde{v}_q \right] \cdot \tilde{v}_{k-p-q} + \\
 &+ \sum_{k=2}^{n-1} \epsilon^{k+1} \sum_{p=1}^{k-1} \frac{\partial}{\partial t} \left[(\nabla \tilde{v}_p) \cdot \tilde{v}_{k-p} \right] + \\
 &+ \left. \left[\nabla \left(\frac{\partial \tilde{v}_p}{\partial t} \right) \cdot \tilde{v}_{k-p} \right] \right\} + \sum_{k=1}^{n-2} \epsilon^{k+2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{v}_k + \tilde{o}(\epsilon^n)
 \end{aligned} \tag{9.18}$$

Em seguida, aplicamos a fórmula de recorrência (2.9), obtendo os tensores de Rivlin-Ericksen ao instante t :

$$\tilde{\epsilon}_{\tilde{A}_1} = \nabla \tilde{v} + (\nabla \tilde{v})^T = \sum_{k=1}^n \epsilon^k \left[\nabla \tilde{v}_k + (\nabla \tilde{v}_k)^T \right] + \tilde{o}(\epsilon^n) \tag{9.19}$$

Para reduzir as fórmulas, usaremos a convenção:

$$(\nabla + \nabla^T) \underline{u} = \nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T \tag{9.20}$$

onde:

$$\tilde{\epsilon}_{\tilde{A}_1} = \sum_{k=1}^n \epsilon^k (\nabla + \nabla^T) \underline{v}_k + \tilde{o}(\epsilon^n) \tag{9.21}$$

Os próximos tensores de Rivlin-Ericksen ficam:

$$\begin{aligned}
 \frac{\epsilon}{A_2} &= (\nabla + \nabla^T) \dot{\underline{\underline{v}}} + 2(\nabla \dot{\underline{\underline{v}}})^T \cdot \nabla \dot{\underline{\underline{v}}} = \\
 &= \sum_{k=2}^n \epsilon^k \sum_{p=1}^{k-1} \left\{ (\nabla + \nabla^T) \left[(\nabla \dot{\underline{\underline{v}}}_p) \cdot \dot{\underline{\underline{v}}}_{k-p} \right] + 2(\nabla \dot{\underline{\underline{v}}}_p)^T \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \nabla \dot{\underline{\underline{v}}}_{k-p} \right\} + \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon^{k+1} \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \dot{\underline{\underline{v}}}_k + (\nabla \dot{\underline{\underline{v}}}_k)^T \right] + o(\epsilon^n)
 \end{aligned} \tag{9.22}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\epsilon}{A_3} &= (\nabla + \nabla^T) \ddot{\underline{\underline{v}}} + 3(\nabla \dot{\underline{\underline{v}}})^T \cdot \nabla \dot{\underline{\underline{v}}} + 3(\nabla \dot{\underline{\underline{v}}})^T \cdot \nabla \dot{\underline{\underline{v}}} = \\
 &= \sum_{k=3}^n \epsilon^k \sum_{p=1}^{k-2} \sum_{q=1}^{k-p-1} \left[(\nabla + \nabla^T) \left\{ \nabla \left[(\nabla \dot{\underline{\underline{v}}}_p) \cdot \dot{\underline{\underline{v}}}_q \right] \cdot \dot{\underline{\underline{v}}}_{k-p-q} \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + 3(\nabla \dot{\underline{\underline{v}}}_p)^T \cdot \nabla \left[(\nabla \dot{\underline{\underline{v}}}_q) \cdot \dot{\underline{\underline{v}}}_{k-p-q} \right] + 3 \left\{ \nabla \left[(\nabla \dot{\underline{\underline{v}}}_q) \cdot \dot{\underline{\underline{v}}}_{k-p-q} \right] \right\}^T \right. \\
 &\quad \left. \cdot \nabla \dot{\underline{\underline{v}}}_p \right\} + \sum_{k=2}^{n-1} \epsilon^{k+1} \sum_{p=1}^{k-1} \left[(\nabla + \nabla^T) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[(\nabla \dot{\underline{\underline{v}}}_p) \cdot \dot{\underline{\underline{v}}}_{k-p} \right] \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\nabla \left(\frac{\partial \dot{\underline{\underline{v}}}_p}{\partial t} \right) \right] \cdot \dot{\underline{\underline{v}}}_{k-p} \right\} + 3(\nabla \dot{\underline{\underline{v}}}_p)^T \cdot \left[\nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} \dot{\underline{\underline{v}}}_{k-p} \right) \right] + 3 \left[\nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} \dot{\underline{\underline{v}}}_{k-p} \right) \right]^T \\
 &\quad \cdot \nabla \dot{\underline{\underline{v}}}_p \left\} + \sum_{k=1}^{n-2} \epsilon^{k+2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\nabla \dot{\underline{\underline{v}}}_k + (\nabla \dot{\underline{\underline{v}}}_k)^T \right] + o(\epsilon^n)
 \end{aligned} \tag{9.23}$$

10. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

10.1 CAMPO DE VELOCIDADES PREVISTO.

Todos os elementos cinemáticos necessários à determinação da tensão no instante atual $\tau = t$ foram obtidos na seção 9. Dado um escoamento original, a tensão em um escoamento ϵ -retardado depende do parâmetro de retardamento ϵ , como se vê nas expressões dos tensores de Rivlin-Ericksen (9.21) a (9.23).

O futuro do escoamento será previsto pela equação dinâmica (3.1) e é evidente que o campo de velocidades previsto dependerá do valor de ϵ .

Consideremos que a dependência do escoamento no parâmetro é também analítica para $\tau > t$, estendendo assim a expansão (9.12) em série de potências de ϵ para $\tau > t$. Salientamos que esta extensão não é baseada na regra de retardamento e sim na equação de Cauchy.

A aceleração prevista, que figura no primeiro membro da equação (3.1) é a derivada à direita, em $\tau = t$, do campo de velocidades $\underline{v}(x, t)$ e teremos:

$$\frac{\varepsilon}{\dot{v}}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} \quad (10.1)$$

Ou, aplicando à série (9.12), vem:

$$\frac{\varepsilon}{\dot{v}}(\underline{x}, t) = \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \frac{\partial \underline{v}_k}{\partial t} + \sum_{k=2}^n \varepsilon^k \sum_{p=1}^{k-1} (\nabla \underline{v}_p) \cdot \underline{v}_{k-p} \quad (10.2)$$

que difere por um fator ε na derivada parcial em relação ao tempo da aceleração à esquerda (9.17). Para o instante atual $\tau = t$, os símbolos ∇ e grad são equivalentes.

A equação da continuidade, para fluidos incomprimíveis se reduz a:

$$\text{div } \underline{v} = 0 \quad (10.3)$$

e considerando a hipótese de convergência uniforme de (9.12), fica:

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon^k \text{div } \underline{v}_k = \underline{o}(\varepsilon^n) \quad (10.4)$$

A equação acima deve valer para qualquer valor do retardado

mento. Fazendo ϵ tender a zero, obtemos:

$$\operatorname{div} \underline{\underline{v}}_k(\underline{x}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10.5)$$

Para um fluido simples com memória evanescente de ordem n , podemos aplicar o teorema de Coleman e Noll, calculando aproximadamente a tensão até a ordem $k \leq n$.

As forças de corpo necessárias para a manutenção do escoamento \underline{v} dependem de ϵ . Consideremos que essas forças constituem um campo conservativo, i.e., que existe um potencial ψ , tal que:

$$\underline{\underline{b}}^{\epsilon} = -\nabla \psi^{\epsilon} \quad (10.6)$$

e formemos um novo potencial ϕ^{ϵ} por:

$$\phi^{\epsilon} = \frac{p}{\rho} + \psi^{\epsilon} \quad (10.7)$$

Continuamos com a hipótese do bom comportamento do retardamento, expandindo o potencial ϕ^{ϵ} em série de potências de ϵ , em torno de $\epsilon = 1$, que supomos uniformemente convergente para $0 < \epsilon \ll 1$.

$$\overset{\epsilon}{\phi}(\underline{x}, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon \phi_k(\underline{x}, \tau) \quad (10.8)$$

Ao expandir as forças de corpo e a pressão estática na série (10.8), desconsideramos o fato de que o potencial $\overset{\epsilon}{\phi}$ não é da ordem de ϵ , ou seja, que a série (10.8) deveria conter um termo ϕ_0 . Mas esse termo, que é precisamente o limite de $\overset{\epsilon}{\phi}$ quando ϵ tende a zero, é uma pressão hidrostática, o que significa que o gradiente de ϕ_0 não tem componentes nas direções em que o escoamento é possível. A arbitrariedade desse termo reflete a indeterminação da pressão estática p , e nós o consideramos nulo.

A equação dinâmica de Cauchy, na qual substituimos todos os elementos por suas expansões em séries de potências de ϵ , truncando essas séries no n -ésimo termo e incorporando todos os demais ao termo $\tilde{o}(\epsilon^n)$ fica:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \epsilon^k \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} + \sum_{k=2}^n \epsilon^k \sum_{p=1}^{k-1} (\nabla \tilde{v}_p) \cdot \tilde{v}_{k-p} &= \\ &= - \sum_{k=1}^n \epsilon^k \nabla \phi_k + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^n \operatorname{div} \tilde{S}_k(A_1, \dots, A_k) + \tilde{o}(\epsilon^n) \end{aligned} \quad (10.9)$$

10.2 PRIMEIRA APROXIMAÇÃO.

A aproximação de ordem k , para um fluido de ordem $n > k$ nos levará de (10.9) a um sistema de k equações descrevendo o comportamento dos k primeiros coeficientes das séries (9.12) e (10.8). Essas equações serão obtidas no limite dos escoamentos lentos, ou seja, fazendo ϵ tender a zero.

A obtenção das equações dinâmicas pode ser feita de dois modos: tomando n sucessivamente igual a 1, 2, ... ou mantendo n arbitrariamente grande, processo em que fica claro que a equação que governa cada coeficiente v_k é a mesma qualquer que seja a ordem de memória do fluido aproximado.

Escolhemos o segundo caminho. A primeira equação a ser obtida relaciona os termos de ordem 1 em ϵ .

De (4.9), temos:

$$\tilde{S}_1 \left(\frac{\epsilon}{\tilde{A}_1} \right) = \mu \frac{\epsilon}{\tilde{A}_1} \quad (10.10)$$

onde, substituindo o valor de \tilde{A}_1 dado por (9.21) na equação dinâmica (10.9), esta fica:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} + \sum_{k=2}^n \varepsilon^k \sum_{p=1}^{k-1} (\nabla \tilde{v}_p) \cdot \tilde{v}_{k-p} = \\
 & = - \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \nabla \phi_k + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{div} \sum_{k=1}^n \varepsilon^k (\nabla + \nabla^T) \tilde{v}_k + \\
 & + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \sum_{k=2}^n S_k \left(\frac{\varepsilon}{A_1}, \dots, \frac{\varepsilon}{A_k} \right) + o(\varepsilon^n) \quad (10.11)
 \end{aligned}$$

Usando novamente a hipótese de convergência uniforme de (9.12) o termo $\frac{\mu}{\rho} A_1$ fornece:

$$\mu \operatorname{div} \sum_{k=1}^n \varepsilon^k (\nabla + \nabla^T) \tilde{v}_k = \frac{\mu}{\rho} \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \left[\nabla^2 \tilde{v}_k + \nabla (\operatorname{div} \tilde{v}_k) \right]$$

onde $\operatorname{div} \tilde{v}_k = 0$, pela equação da continuidade (10.5). Assim, (10.11) se torna:

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon^k \left[\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} - v \nabla^2 \tilde{v}_k + \nabla \phi_k \right] = - \sum_{k=2}^n \varepsilon^k \sum_{p=1}^{k-1} (\nabla \tilde{v}_p) \cdot \tilde{v}_{k-p}$$

$$\cdot \tilde{v}_{k-p} + \frac{1}{\rho} \sum_{k=2}^n \operatorname{div} S_k \left(\frac{\varepsilon}{A_1}, \dots, \frac{\varepsilon}{A_k} \right) + o(\varepsilon^n) \quad (10.12)$$

onde $v = \frac{\mu}{\rho}$ é a viscosidade cinemática.

Os coeficientes \underline{v}_k e ϕ_k devem valer para qualquer escoamento retardado. Dividindo (10.12) por ϵ e fazendo ϵ tender a zero obtemos:

$$\frac{\partial \underline{v}_1}{\partial t} - v \nabla^2 \underline{v}_1 = - \nabla \phi_1 \quad (10.13)$$

Assim, a primeira aproximação, dada pelo primeiro coeficiente de (9.12), satisfaz a equação de Stokes (10.13), conforme esperávamos.

10.3 SEGUNDA APROXIMAÇÃO.

Para a segunda aproximação, torna-se importante a parcela \underline{S}_2 da tensão que, por (4.10) é:

$$\underline{S}_2 (\underline{A}_1, \underline{A}_2) = \alpha_1 \frac{\epsilon}{\underline{A}_2} + \alpha_2 \frac{\epsilon}{\underline{A}_1^2} \quad (10.14)$$

ou, com $\frac{\epsilon}{\underline{A}_1}$ e $\frac{\epsilon}{\underline{A}_2}$ dados por (9.21) e (9.22), vem:

$$\begin{aligned}
 S_2(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) &= \alpha_1 \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon^{k+1} \frac{\partial}{\partial t} \left[(\nabla + \nabla^T) \tilde{v}_k \right] + \\
 &+ \sum_{k=2}^n \epsilon^k \sum_{p=1}^{k-1} \left\{ \alpha_1 (\nabla + \nabla^T) \left[(\nabla \tilde{v}_p) \cdot \tilde{v}_{k-p} \right] + \right. \\
 &\left. + \alpha_2 \left[(\nabla + \nabla^T) \tilde{v}_p \right] \cdot \left[(\nabla + \nabla^T) \tilde{v}_{k-p} \right] \right\} + \underline{o}(\epsilon^n)
 \end{aligned}
 \tag{10.15}$$

Multiplicando a equação de Stokes (10.13) por ϵ e subtraindo o resultado da equação dinâmica geral (10.12) e, ainda substituindo a parcela S_2 da tensão dada por (10.15), teremos a equação para os termos de ordem 2 ou maior:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n \epsilon^k \left[\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} - \nu \nabla^2 \tilde{v}_k + \nabla \phi_k \right] &= \sum_{k=2}^n \epsilon^k \sum_{p=1}^{k-1} \left\{ \right. \\
 &- (\nabla \tilde{v}_p) \cdot \tilde{v}_{k-p} + \frac{\alpha_1}{\rho} \operatorname{div} (\nabla + \nabla^T) \left[(\nabla \tilde{v}_p) \cdot \tilde{v}_{k-p} \right] \\
 &+ 2 \frac{\alpha_1}{\rho} \operatorname{div} \left[(\nabla \tilde{v}_p)^T \cdot \nabla \tilde{v}_{k-p} \right] + \frac{\alpha_2}{\rho} \operatorname{div} \left[((\nabla + \nabla^T) \tilde{v}_p) \cdot \right. \\
 &\left. \left. \cdot ((\nabla + \nabla^T) \tilde{v}_{k-p}) \right] \right\} + \frac{\alpha_1}{\rho} \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon^{k+1} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \left[(\nabla + \nabla^T) \tilde{v}_k \right] \\
 &+ \frac{1}{\rho} \sum_{k=3}^n \operatorname{div} S_k(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k) + \underline{o}(\epsilon^n)
 \end{aligned}
 \tag{10.16}$$

Voltamos a considerar o fato de que os coeficientes independem de ϵ . Dividindo (10.16) por ϵ^2 e fazendo ϵ tender a zero, obtemos:

$$\frac{\partial \underline{v}_2}{\partial t} - \nu \nabla^2 \underline{v}_2 = - \nabla \phi_2 + \underline{G}_2(\underline{v}_1) \quad (10.17)$$

onde o termo $\underline{G}_2(\underline{v}_1)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \underline{G}_2(\underline{v}_1) &= - (\nabla \underline{v}_1) \cdot \underline{v}_1 + \frac{\alpha^2}{\rho} \operatorname{div} \left[\nabla \underline{v}_1 + (\nabla \underline{v}_1)^T \right]^2 \\ &+ \frac{\alpha_1}{\rho} \left\{ \operatorname{div}(\nabla + \nabla^T) \left[(\nabla \underline{v}_1) \cdot \underline{v}_1 \right] + \right. \\ &\left. + 2 \operatorname{div} \left[(\nabla \underline{v}_1)^T \cdot \nabla \underline{v}_1 \right] + \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \underline{v}_1 \right\} \quad (10.18) \end{aligned}$$

Assim, a segunda aproximação, dada pelo coeficiente \underline{v}_2 é governada pela equação (10.17), onde $\underline{G}_2(\underline{v}_1)$ depende da solução da primeira aproximação, a equação (10.13) de Stokes.

10.4 TERCEIRA APROXIMAÇÃO.

O procedimento usado em (10.2) e (10.3) pode ser

repetido, obtendo-se as equações para \underline{v}_3 , \underline{v}_4 , etc. A equação para \underline{v}_3 leva em conta a parcela $S_{\sim 3}$ da tensão, dada por:

$$\begin{aligned} S_{\sim 3} (\underline{A}_{\sim 1}, \underline{A}_{\sim 2}, \underline{A}_{\sim 3}) &= \beta_1 \underline{A}_{\sim 3} + \beta_2 (\underline{A}_{\sim 2} \underline{A}_{\sim 1}) + \underline{A}_{\sim 1} \underline{A}_{\sim 2}) + \\ &+ \beta_3 (\text{tr } \underline{A}_{\sim 2}) \underline{A}_{\sim 1} \end{aligned} \quad (10.19)$$

O cálculo é enfadonho, mas direto e a terceira equação será:

$$\frac{\partial \underline{v}_{\sim 3}}{\partial t} - v \nabla^2 \underline{v}_{\sim 3} = - \nabla \phi_{\sim 3} + G_{\sim 3} (\underline{v}_{\sim 1}, \underline{v}_{\sim 2}) \quad (10.20)$$

onde:

$$\begin{aligned} G_{\sim 3} (\underline{v}_{\sim 1}, \underline{v}_{\sim 2}) &= - (\nabla \underline{v}_{\sim 2}) \cdot \underline{v}_{\sim 1} - (\nabla \underline{v}_{\sim 1}) \cdot \underline{v}_{\sim 2} + \\ &+ \frac{\alpha_1}{\rho} \text{div}(\nabla + \nabla^T) \left[(\nabla \underline{v}_{\sim 1}) \cdot \underline{v}_{\sim 2} + (\nabla \underline{v}_{\sim 2}) \cdot \underline{v}_{\sim 1} \right] + \\ &+ \frac{2\alpha_1}{\rho} \text{div} \left[(\nabla \underline{v}_{\sim 2})^T \cdot \nabla \underline{v}_{\sim 1} + (\nabla \underline{v}_{\sim 1})^T \cdot \nabla \underline{v}_{\sim 2} \right] + \\ &+ \frac{\alpha_2}{\rho} \text{div} \left\{ \left[(\nabla + \nabla^T) \underline{v}_{\sim 1} \right] \cdot \left[(\nabla + \nabla^T) \underline{v}_{\sim 2} \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[(\nabla + \nabla^T) \underline{\underline{v}}_2 \right] \cdot \left[(\nabla + \nabla^T) \underline{\underline{v}}_1 \right] \} + \frac{\alpha_1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \underline{\underline{v}}_2 + \\
& + \frac{\beta_1}{\rho} \operatorname{div}(\nabla + \nabla^T) \left\{ \left[\nabla ((\nabla \underline{\underline{v}}_1) \cdot \underline{\underline{v}}_1) \right] \cdot \underline{\underline{v}}_1 \right\} + \\
& + \frac{3\beta_1}{\rho} \operatorname{div} \left[(\nabla \underline{\underline{v}}_1)^T \right] \cdot \left\{ \nabla \left[(\nabla \underline{\underline{v}}_1) \cdot \underline{\underline{v}}_1 \right] \right\} + \\
& + \left\{ \nabla \left[(\nabla \underline{\underline{v}}_1) \cdot \underline{\underline{v}}_1 \right] \right\}^T \cdot \left[(\nabla \underline{\underline{v}}_1) \right] + \frac{\beta_2}{\rho} \operatorname{div} \left[\left[(\nabla + \nabla^T) \underline{\underline{v}}_1 \right] \right. \\
& \cdot \left. \left\{ (\nabla + \nabla^T) \left[(\nabla \underline{\underline{v}}_1) \cdot \underline{\underline{v}}_1 \right] + 2(\nabla \underline{\underline{v}}_1)^T \cdot \nabla \underline{\underline{v}}_1 \right\} \right] + \\
& + \operatorname{div} \left[\left\{ \frac{\beta_2}{\rho} \left[(\nabla + \nabla^T) \left[(\nabla \underline{\underline{v}}_1) \cdot \underline{\underline{v}}_1 \right] + 2(\nabla \underline{\underline{v}}_1)^T \cdot \nabla \underline{\underline{v}}_1 \right] \right\} \right] + \\
& + \frac{\beta_3}{\rho} \operatorname{tr} \left[2\nabla \left[(\nabla \underline{\underline{v}}_1) \cdot \underline{\underline{v}}_1 \right] + 2(\nabla \underline{\underline{v}}_1)^T \cdot \nabla \underline{\underline{v}}_1 \right] \\
& \cdot \left[(\nabla + \nabla^T) \underline{\underline{v}}_1 \right] + \frac{\beta_1}{\rho} \operatorname{div}(\nabla + \nabla^T) \left\{ \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial t} \left[(\nabla \underline{\underline{v}}_1) \cdot \underline{\underline{v}}_1 \right] + \left[\nabla \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}_1}{\partial t} \right) \right] \cdot \underline{\underline{v}}_1 \right\} + \\
& + \frac{3\beta_1}{\rho} \operatorname{div} \left\{ (\nabla \underline{\underline{v}}_1)^T \cdot \left[\nabla \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}_1}{\partial t} \right) \right] \right\} + \\
& + \left[\nabla \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}_1}{\partial t} \right) \right]^T \cdot (\nabla \underline{\underline{v}}_1) \} + \frac{\beta_2}{\rho} \operatorname{div} \left\{ \left[(\nabla + \nabla^T) \underline{\underline{v}}_1 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} (\nabla + \nabla^T) \underline{\underline{v}}_1 \right] + \left[\frac{\partial}{\partial t} (\nabla + \nabla^T) \underline{\underline{v}}_1 \right] \\
 & \cdot \left[(\nabla + \nabla^T) \cdot \underline{\underline{v}}_1 \right] \} + \frac{\beta_1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \underline{\underline{v}}_1 \quad (10.21)
 \end{aligned}$$

CAPÍTULO IVAPLICABILIDADE11. COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS SOLUÇÕES

Vimos na seção anterior que a p -ésima aproximação pelo limite de Stokes, para o escoamento lento de um fluido simples incompressível com memória evanescente de ordem maior ou igual a p , é dada pelo sistema de p equações diferenciais do tipo parabólico:

$$\frac{\partial \underline{v}_k}{\partial t} - \nu \nabla^2 \underline{v}_k = - \nabla \phi_k + G_k(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{k-1}), \quad k = 1, \dots, p \quad (11.1)$$

onde $\underline{G}_1 \equiv 0$, $\underline{G}_2(\underline{v}_1)$ e $\underline{G}_3(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ são dados por (10.18) e (10.21), respectivamente.

Mostraremos agora que, nas condições físicas usuais, as equações (11.1) têm soluções assintoticamente está-

veis. Esta não será uma demonstração rigorosa, mas apenas uma indicação de que o processo pode fornecer bons resultados. Cada uma das equações vetoriais (11.1) fornece até três equações diferenciais parabólicas. Dois teoremas sobre o comportamento assintótico de soluções de equações parabólicas [9], permitem chegar aos resultados esperados. A forma aqui apresentada é caso particular, suficiente para as equações (11.1).

Seja D um cilindro semi-infinito no espaço $(n+1)$ -dimensional das variáveis reais $(\underline{x}, t) = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n, t)$. Seja a fronteira de D composta de um domínio limitado B em $t = 0$ e por uma variedade S no semiespaço $0 < t < \infty$. Seja ∂B a fronteira de B e \bar{D} o fecho de D .

Consideremos as equações:

$$Lu \equiv v \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(\underline{x}, t) \quad (11.2)$$

$$L_0 v \equiv v \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = f(\underline{x}) \quad (11.3)$$

onde $u = u(\underline{x}, t)$ e $v = v(\underline{x})$ satisfazem as condições de contorno:

$$u(\underline{x}, t) = h(\underline{x}, t), \text{ em } S \quad (11.4)$$

$$v(\underline{x}) = h(\underline{x}), \text{ em } \partial B \quad (11.5)$$

O primeiro teorema mostra que, na ausência de forças de corpo, ou se estas tenderem a zero, o escoamento, para qualquer perfil de velocidades inicial, tende ao repouso.

11.1 TEOREMA (Demonstrado em [9]).

Seja $u(\underline{x}, t)$ uma solução de (11.2)a(11.4) com f contínua em \bar{D} e h contínua em S . Se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\underline{x}, t) = 0, \text{ uniformemente em } \bar{D}$$

e,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(\underline{x}, t) = 0, \text{ uniformemente em } S$$

então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(\underline{x}, t) = 0, \text{ uniformemente em } \bar{D}.$$

Este primeiro teorema é caso especial do segundo,

que mostra como um regime transiente tende assintoticamente ao valor estacionário, se as condições de contorno e forças externas tenderem a valores estacionários.

11.2 TEOREMA.

Seja $u(\underline{x}, t)$ uma solução de (11.2) (11.4). Se $h(\underline{x}, t)$ for contínua em \bar{D} e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(\underline{x}, t) = h(\underline{x}), \text{ uniformemente em } \partial B$$

e se $f(\underline{x}, t)$ for contínua em \bar{D} e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\underline{x}, t) = f(\underline{x}), \text{ uniformemente em } \bar{D}$$

então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(\underline{x}, t) = v(\underline{x}), \text{ uniformemente em } \bar{D}$$

onde $v(\underline{x})$ é a solução única de (11.3) (11.5).

Os teoremas são imediatamente aplicáveis à equação de Stokes (10.13).

Para extensão às demais equações, a seguinte pro posição deveria ser demonstrada:

11.3 PROPOSIÇÃO.

Se,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{v}_i(\underline{x}, t) = \bar{\underline{v}}_i(\underline{x}), \text{ uniformemente em } \bar{D}$$

para $i = 1, \dots, k-1$ então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{G}_k(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{k-1}) = \underline{G}_k(\bar{\underline{v}}_1, \dots, \bar{\underline{v}}_{k-1})$$

uniformemente em \bar{D} .

Não tentaremos demonstrar essa proposição, pois não encontramos uma fórmula geral para o cálculo dos \underline{G}_k . Existem, no entanto, indícios de que é possível demonstrá-la para cada valor de k . Dada a diferenciabilidade das soluções de equações parabólicas, ao bom comportamento das operações que definem os \underline{G}_k e ao fato de que estes só dependem de (\underline{x}, t) através de seus argumentos \underline{v}_i , temos esperança de que a proposição (11.3) possa ser demonstrada.

12. APLICAÇÃO: ESCOAMENTO RETILÍNEO

Com o objetivo de ilustrar melhor a aplicação do método e comparar resultados com aqueles obtidos pela aplicação direta dos fluidos de Rivlin-Ericksen, obteremos nessa seção as equações dinâmicas para os três primeiros coeficientes \underline{v}_1 , \underline{v}_2 e \underline{v}_3 , de (9.12) e informações a respeito do potencial das forças externas ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 , de (10.8), para o escoamento retilíneo (seção 6) de um fluido simples, incomprimível, com memória evanescente.

O escoamento estudado tem, em algum sistema cartesiano de referência, um campo de velocidades $\underline{v}(\underline{x}, t)$ com as componentes

$$\dot{x} = 0 \quad ; \quad \dot{y} = v(x, t) \quad ; \quad \dot{z} = 0 \quad (12.1)$$

Uma família de escoamentos retardados pode ser construída a partir de \underline{v} , parametrizada pelo retardamento ϵ . Para um elemento dessa família, expandimos a dependência de ϵ em uma série de potências de ϵ .

$$\underline{\underline{v}}(\underline{x}, t) = \epsilon \underline{u}(\underline{x}, t) + \epsilon^2 \underline{v}(\underline{x}, t) + \epsilon^3 \underline{w}(\underline{x}, t) + \underline{o}(\epsilon^3)$$

$$(12.2)$$

Esta é a série (9.12). A mudança de notação facilitará o desenvolvimento, neste caso particular.

A definição do retardamento através da função de formação relativa implica em que \underline{v} será também um escoamento retilíneo, para qualquer ϵ , $0 < \epsilon \leq 1$. Temos então, para o sistema cartesiano no qual valem (12.1):

$$\left[\begin{array}{c} \epsilon \\ \underline{v}(x, t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \epsilon \\ \underline{v}(x, t) \\ 0 \end{array} \right] \quad (12.3)$$

Sejam as componentes de \underline{u} , \underline{v} e \underline{w} dadas por:

$$\left[\begin{array}{c} \underline{u}(x, t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \\ u_3(x, t) \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} \underline{v}(x, t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \\ v_3(x, t) \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} \underline{w}(x, t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} w_1(x, t) \\ w_2(x, t) \\ w_3(x, t) \end{array} \right] \quad (12.4)$$

A expansão (12.2) nos fornece:

$$\frac{\epsilon}{V_i}(x,t) = \epsilon u_i(x,t) + \epsilon^2 v_i(x,t) + \epsilon^3 w_i(x,t) + o(\epsilon^3)$$

(12.5)

para $i = 1, 2, 3$ e todo valor de ϵ , $0 < \epsilon \leq 1$.

Concluimos que os escoamentos u , v e w são também aproximadamente retilíneos, pois:

$$u_1 = o(\epsilon) ; \quad u_3 = o(\epsilon) ; \quad v_1 = o(\epsilon^2) ;$$

$$v_3 = o(\epsilon^2) ; \quad w_1 = o(\epsilon^3) ; \quad w_3 = o(\epsilon^3) \quad (12.6)$$

e no limite dos escoamentos lentos, podemos tomar:

$$u_i \equiv v_i \equiv w_i \equiv 0 ; \quad i = 1, 3 \quad (12.7)$$

e usar a notação correspondente:

$$u_2 = u(x,t) ; \quad v_2 = v(x,t) ; \quad w_2 = w(x,t)$$

(12.8)

onde u , v e w são funções do tempo e da coordenada x , apenas, como V e $\frac{\epsilon}{V}$.

A equação da continuidade que, por (10.5), se re

duz a:

$$\operatorname{div} \underline{u} = 0 ; \quad \operatorname{div} \underline{v} = 0 ; \quad \operatorname{div} \underline{w} = 0 \quad (12.9)$$

é automaticamente satisfeita por \underline{u} , \underline{v} e \underline{w} assim definidos.

A substituição de (12.2) na equação dinâmica segue o processo indicado na seção 10 e obtemos, para escoamentos lentos, as equações (10.13), (10.17) e (10.20) para \underline{u} , \underline{v} e \underline{w} , a saber:

$$\nu \nabla^2 \underline{u} - \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \nabla \phi_1 \quad (12.10)$$

$$\begin{aligned} \nu \nabla^2 \underline{v} - \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} &= \nabla \phi_2 + (\nabla \underline{u}) \cdot \underline{u} - \frac{\alpha}{\rho} \operatorname{div} [(\nabla + \nabla^T) \underline{u}]^2 + \\ &- \frac{\alpha_1}{\rho} \left\{ \operatorname{div} (\nabla + \nabla^T) [(\nabla \underline{u}) \cdot \underline{u}] + \right. \\ &\left. + 2 \operatorname{div} [(\nabla \underline{u})^T \cdot \nabla \underline{u}] + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} [(\nabla + \nabla^T) \underline{u}] \right\} \end{aligned} \quad (12.11)$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{v} \nabla^2 \underline{\mathbf{w}} - \frac{\partial \underline{\mathbf{w}}}{\partial t} = \nabla \phi_3 + (\nabla \underline{\mathbf{u}}) \cdot \underline{\mathbf{v}} + (\nabla \underline{\mathbf{v}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} + \\
& - \frac{\alpha_1}{\rho} \operatorname{div}(\nabla + \nabla^T) \left[(\nabla \underline{\mathbf{u}}) \cdot \underline{\mathbf{v}} + (\nabla \underline{\mathbf{v}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} \right] + \\
& - \frac{2\alpha_1}{\rho} \operatorname{div} \left[(\nabla \underline{\mathbf{v}})^T \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}} + (\nabla \underline{\mathbf{u}})^T \cdot \nabla \underline{\mathbf{v}} \right] + \\
& - \frac{\alpha_2}{\rho} \operatorname{div} \left\{ \left[(\nabla + \nabla^T) \underline{\mathbf{u}} \right] \cdot \left[(\nabla + \nabla^T) \underline{\mathbf{v}} \right] + \right. \\
& \left. + \left[(\nabla + \nabla^T) \underline{\mathbf{v}} \right] \cdot \left[(\nabla + \nabla^T) \underline{\mathbf{u}} \right] \right\} - \frac{\alpha_1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \underline{\mathbf{v}} + \\
& - \frac{\beta_1}{\rho} \operatorname{div}(\nabla + \nabla^T) \left\{ \nabla \left[(\nabla \underline{\mathbf{u}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} \right] \cdot \underline{\mathbf{u}} \right\} + \\
& - \frac{3\beta_1}{\rho} \operatorname{div} \left\{ (\nabla \underline{\mathbf{u}})^T \cdot \nabla \left[(\nabla \underline{\mathbf{u}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} \right] + \nabla^T \left[(\nabla \underline{\mathbf{u}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} \right] \cdot (\nabla \underline{\mathbf{u}}) \right\} + \\
& - \frac{\beta_2}{\rho} \operatorname{div} \left[\left[(\nabla + \nabla^T) \underline{\mathbf{u}} \right] \cdot \left\{ (\nabla + \nabla^T) \left[(\nabla \underline{\mathbf{u}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2(\nabla \underline{\mathbf{u}})^T \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}} \right\} + \left\{ (\nabla + \nabla^T) \left[(\nabla \underline{\mathbf{u}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2(\nabla \underline{\mathbf{u}})^T \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}} \right\} \cdot \left[(\nabla + \nabla^T) \underline{\mathbf{u}} \right] \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\beta_3}{\rho} \operatorname{div} \left\{ \operatorname{tr} \left[\left[2\nabla(\nabla \tilde{u}) \cdot \tilde{u} \right] + 2(\nabla \tilde{u})^T \cdot \nabla \tilde{u} \right] \right\} \\
 & (\nabla + \nabla^T) \tilde{u} - \frac{\beta_1}{\rho} \operatorname{div} (\nabla + \nabla^T) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[(\nabla \tilde{u}) \cdot \tilde{u} \right] + \right. \\
 & \left. + \left[\nabla \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right) \right] \cdot \tilde{u} \right\} - \frac{3\beta_1}{\rho} \operatorname{div} \left\{ (\nabla \tilde{u})^T \cdot \left[\nabla \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right) \right] \right\} + \\
 & + \left[\nabla \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right)^T \cdot (\nabla \tilde{u}) \right] - \frac{\beta_2}{\rho} \operatorname{div} \left\{ \left[(\nabla + \nabla^T) \tilde{u} \right] \cdot \right. \\
 & \left. \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} (\nabla + \nabla^T) \tilde{u} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial t} (\nabla + \nabla^T) \tilde{u} \right] \cdot \right. \\
 & \left. \cdot \left[(\nabla + \nabla^T) \tilde{u} \right] - \frac{\beta_1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \tilde{u} \quad (12.12) \right.
 \end{aligned}$$

Os diversos elementos de (12.10), (12.11) e (12.12) são calculados para o escoamento retilíneo lento, tendo em conta (12.7) e (12.8) e as equações, em componentes cartesianas ficam:

Primeira aproximação:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0 \quad (12.13a)$$

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \quad (12.13b)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad (12.13c)$$

Segunda aproximação:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -uu_x + 2\frac{\alpha_2}{\rho}u_xu_{xx} + 2\frac{\alpha_1}{\rho}(uu_{xxx} + 3u_xu_{xx}) \quad (12.14a)$$

$$v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \frac{\alpha_1}{\rho}u_{xxt} \quad (12.14b)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0 \quad (12.14c)$$

Terceira aproximação:

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial x} = -u_xv - uv_x + \frac{\alpha_1}{\rho}(u_{xxx}v + 3u_{xx}v_x) +$$

$$\begin{aligned}
 & + 3u_{x:xx} v_{xxx} + uv_{xxx}) + \frac{\alpha_2}{\rho} (2u_{xx} v_x + 2u_x v_{xx}) + \\
 & + \frac{\beta_1}{\rho} (u_{xxx} u_t + 3u_{tx} u_{xx} + u_x u_{tx} + uu_{txx}) + \\
 & + 4u_x u_{txx} + 2uu_{txxx}) + \frac{\beta_2}{\rho} (2u_{xx} u_{tx} + 2u_x u_{txx})
 \end{aligned}$$

(12.15a)

$$\begin{aligned}
 v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial \phi_3}{\partial y} - \frac{\alpha_1}{\rho} (v_{txx}) + \\
 & - \frac{\beta_1}{\rho} (12u_x^2 u_{xx} + 3uu_{xx}^2 + 3uu_x u_{xxx} + u_{txxx}) + \\
 & - \frac{\beta_2}{\rho} (8u_x^2 u_{xx} + 2uu_{xx}^2 + 2uu_x u_{xxx} + 6u_x^2) + \\
 & - \frac{\beta_3}{\rho} (14u_x^2 u_{xx} + 2uu_{xx}^2 + 2uu_x u_{xxx}) \quad (12.15b)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial z} = 0 \quad (12.15c)$$

O sistema (12.13) é reduzido a uma única equação.

De (12.13a) e (12.13c) vem:

$$\phi_1 = f_1(y, t).$$

Como $u = u(x, t)$, temos, por (12.13b):

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(y, t) = F_1(x, t) = a_1(t)$$

onde:

$$\phi_1 = a_1(t)y + b_1(t) \quad (12.16)$$

O sistema (12.13) se reduz a:

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = a_1(t) \quad (12.17)$$

O termo $b_1(t)$ no potencial das forças de corpo reflete a arbitrariedade do referencial e pode ser tomado nulo, já que:

$$\nabla b_1 = 0.$$

Para o segundo coeficiente, o sistema (12.14) fornece, de modo análogo:

$$\phi_2 = a_2(t)y + b_2(x,t) \quad (12.18)$$

onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_2}{\partial x} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -uu_x + 2 \frac{\alpha_2}{\rho} u_x u_{xx} + \\ &+ 2 \frac{1}{\rho} (uu_{xxx} + 3u_x u_{xx}) \end{aligned} \quad (12.19)$$

e o sistema se reduz a:

$$v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = a_2(t) - \frac{1}{\rho} u_{xxt} \quad (12.20)$$

Quanto ao terceiro coeficiente, o sistema (12.15)

leva a:

$$\phi_3 = a_3(t)y + b_3(x,t) \quad (12.21)$$

onde:

$$\frac{\partial b_3}{\partial x} = \frac{\partial \phi_3}{\partial x},$$

dado pela equação (12.15a) e a equação dinâmica fica:

$$\begin{aligned}
 v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} &= a_3(t) - \frac{\alpha_1}{\rho} (v_{txx}) + \\
 &- \frac{\alpha_1}{\rho} (12u_x^2 u_{xx} + 3uu_{xx}^2 + 3uu_x u_{xxx} + u_{txxx}) + \\
 &- \frac{\alpha_2}{\rho} (8u_x^2 u_{xx} + 2uu_{xx}^2 + 2uu_x u_{xxx} + 6u_x^2) + \\
 &- \frac{\alpha_3}{\rho} (14u_x^2 u_{xx} + 2uu_{xx}^2 + 2uu_x u_{xxx}) \quad (12.22)
 \end{aligned}$$

13. CONCLUSÕES

O processo de limite apresentado, que aplica o teorema de aproximação de Coleman e Noll² não somente à tensão, mas a toda a equação dinâmica, leva a resultados aparentemente satisfatórios, apesar de que sua validade permanece discutível. Adotamos o critério de admitir que existe uma classe de escoamentos para os quais a expansão (9.12) é uniformemente convergente para ϵ próximo a 1. Além disso, para que se possa tomar apenas alguns termos dessa

série, sua convergência deve ser suficientemente rápida para uma aproximação satisfatória.

As condições iniciais e de contorno a serem impostas a cada equação devem ser obtidas por desdobramento da condição inicial e de contorno que restringem o escoamento. Esse desdobramento deve ser feito de modo que valha para qualquer valor do retardamento ϵ . O valor a ser atribuído a esse parâmetro para um dado escoamento indicará o peso de cada efeito na solução aproximada, representada pela série (9.12). Como o escoamento original a partir do qual obtivemos a família de escoamentos retardados é arbitrário, não há, no desenvolvimento que fizemos, indicação alguma que leve à determinação do valor de ϵ .

Talvez se possa chegar a alguma conclusão a respeito deste problema através de considerações dimensionais. De fato, os coeficientes constitutivos dos fluidos de grau superior a um, contém a dimensão tempo e podem ser interpretados como constantes de tempo do material. A esse respeito, ver Wang⁷ ou Truesdell e Noll⁸. O parâmetro ϵ poderia ser encarado então como uma relação entre tempos característicos do escoamento e do material. Estas considerações, no entanto, fogem ao escopo deste trabalho, já que,

desde o inicio, utilizamos o parâmetro de retardamento a fim de obter relações válidas no limite dos escoamentos lentos. Assim, consideramos qualquer escoamento como o original ($\epsilon = 1$) e a designação "escoamento lento" não corresponde a algum critério de medida de rapidez.

Finalmente, para exemplificar o método exposto e confrontar seu resultado no caso de instabilidade, citado na seção 7, estudaremos, até à aproximação de 2a. ordem, o escoamento em um canal, i.e., entre placas planas paralelas estacionárias. A este escoamento se aplicam os resultados da seção 12.

Supondo escoamento retilíneo lento teremos, ao efetuar a expansão (9.12):

$$\overset{\epsilon}{V}(x,t) = \epsilon u(x,t) + \epsilon^2 v(x,t) + o(\epsilon^2) \quad (13.1)$$

As condições de contorno sobre $\overset{\epsilon}{V}$ são:

$$\overset{\epsilon}{V}(0,t) = \overset{\epsilon}{V}(\ell,t) = 0 \quad (13.2)$$

e são distribuídas de modo que sejam válidas para qualquer ϵ , a saber:

$$u(0, t) = u(\ell, t) = v(0, t) = v(\ell, t) = 0 \quad (13.3)$$

Quanto à condição inicial, seja dada por:

$$\frac{\epsilon}{V}(x, 0) = F(x) ; \quad F(0) = F(\ell) = 0 \quad (13.4)$$

Para a aproximação de 2a. ordem, desprezamos o termo $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ e desdobramos a condição (13.4) em:

$$V(x, 0) = F(x) = \epsilon f_1(x) + \epsilon^2 f_2(x) \quad (13.5)$$

com:

$$f_1(0) = f_1(\ell) = f_2(0) = f_2(\ell) = 0. \quad (13.6)$$

Desde que f_1 e f_2 sejam seccionalmente suaves, as soluções das equações dinâmicas (12.17) e (12.20) podem ser obtidas pelo método de Fourier (ver, e.g. a referência [10]). Estamos interessados, então, no comportamento das soluções para a condição inicial

$$F(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)x \quad (13.7)$$

Para a distribuição arbitrária dessa condição conforme (13.5), escolhemos:

$$f_1(x) = \frac{F(x)}{\epsilon} ; \quad f_2(x) = 0 \quad (13.8)$$

Examinemos o caso homogêneo, ou seja, ausência de forças de corpo na direção do escoamento, o que conduz a $a_1(t) = 0$ em (12.17). A solução da equação da difusão (12.17) com as condições (13.3) e (13.8) será:

$$u(x,t) = \frac{A_n}{\epsilon} e^{-b_n t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (13.9)$$

onde:

$$b_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 v \quad (13.10)$$

Quanto ao coeficiente de 2a. ordem $v(x,t)$, temos, com $a_2(t) = 0$ em (12.18), a resolução da equação (12.20), que fica:

$$v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{A_n}{\epsilon} b_n c_n e^{-b_n t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (13.11)$$

onde:

$$c_n = \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \quad (13.12)$$

com as condições homogêneas (13.3) e (13.8).

A solução será:

$$v(x,t) = \left[\int_0^t e^{-b_n(t-\tau)} \frac{A_n}{\epsilon} b_n c_n e^{-b_n \tau} d\tau \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

ou seja:

$$v(x,t) = \frac{A_n}{\epsilon} b_n c_n t e^{-b_n t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (13.13)$$

Retornando (13.9) e (13.13) a (13.1), a solução $\frac{\epsilon}{V}(x,t)$ prevista será:

$$\frac{\epsilon}{V}(x,t) = A_n e^{-b_n t} (1 + \epsilon b_n c_n t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (13.14)$$

ou, para $\epsilon = 1$, tendo em vista o exposto acima:

$$V(x,t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 vt} \left[1 + \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4 vt \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (13.15)$$

Esta solução é estável. A solução (7.24) prevista para o fluido do 2º grau e o mesmo escoamento era:

$$V(x,t) = A_n e^{-a_n t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (13.16)$$

onde:

$$a_n = \frac{v \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2}{1 + \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2} = \frac{b_n}{1 + c_n} \quad (13.17)$$

Como $\alpha_1 < 0$, temos $c_n < 0$ e a solução (13.16) é instável para $|c_n| > 1$, o que pode ocorrer para $\alpha_1 \neq 0$, se o perfil inicial de velocidades tiver componentes de Fourier com $n > n_0$, onde:

$$n_0 = \frac{\ell}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{(-\alpha_1)}} \quad (13.18)$$

Nos casos em que (13.16) é estável, mostremos que (13.15) é, para períodos curtos de tempo, uma aproximação razoável. Consideremos $|c_n| \ll 1$. Podemos fazer:

$$a_n = \frac{b_n}{1 + c_n} \approx b_n (1 - c_n), \quad |c_n| \ll 1 \quad (13.19)$$

e, para pequenos intervalos de tempo:

$$e^{-a_n t} \approx e^{-b_n t} e^{b_n c_n t} \approx e^{-b_n t} (1 + b_n c_n t) \quad (13.20)$$

Assim, para os casos em que o método do limite na tensão (Seção 5) fornece resultados instáveis, o limite de Stokes nos dá resultados estáveis.

As duas soluções são próximas, para tempo curto.

BIBLIOGRAFIA

1. NOLL, W. - *A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media.* Arch. Rational Mech. Anal. 2 (1958/59). 197-226.
2. COLEMAN, B.D. & NOLL, W. - *An Approximation Theorem for Functionals with Applications in Continuum Mechanics.* Arch. Rational Mech. Anal. 6 (1960). 355-470.
3. COLEMAN, B.D., DUFFIN, R.J. & MIZEL, V.J. - *Instability, Uniqueness, and Nonexistence Theorems for the Equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a Strip.* Arch. Rational Mech. Anal. 19 (1965). 100-116.
4. TRUESDELL, C. & NOLL, W. - *The Non-Linear Field Theories of Mechanics.* Flugge's Handbuch der Physik III/3 (1965). Springer-Verlag.

5. TRUESDELL, C. & TOUPIN, R. - The Classical Field Theories. Flugge's Handbuch der Physik III/1 (1960). Springer-Verlag.
6. TELLES, A.C.S.S. - Escoamentos Lentos de Fluidos Não-Newtonianos. Limite de Stokes. II Simpósio Brasileiro de Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos. UFMG. (1971). Belo Horizonte.
7. WANG, C.C. - The Principle of Fading Memory. Arch. Rational Mech. Anal. 18 (1964).
8. MARKOVITZ, H., COLEMAN, B.D. & NOLL, W. - Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids. (1965). Springer-Verlag.
9. FRIEDMAN, A. - Partial Differential Equations of Parabolic Type. (1964). Prentice Hall.
10. KOSHLYAKOV, N.S., SMIRNOV, M.M. & GLINER, E.B. - Differential Equations of Mathematical Physics. (1964). John Wiley & Sons.