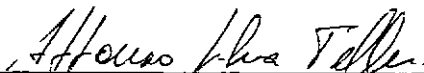


UMA PREVISÃO PARA O DESEMPENHO ÓTIMO DE UM  
DUPLO-TUBO ALETADO PARA A TRANSFERÊNCIA DE  
CALOR EM REGIME LAMINAR

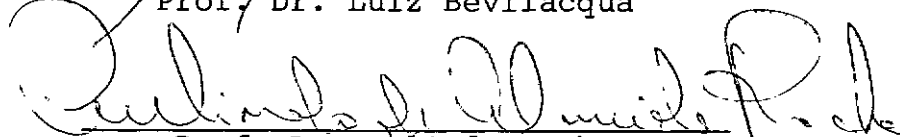
SERGIO COLLE

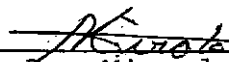
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.)

Aprovada por:

  
Prof. Dr. Affonso da Silva Telles  
Presidente

  
Prof. Dr. Luiz Bevilacqua

  
Prof. Dr. Arlindo Rocha

  
Prof. Dr. Miguel Hiroo Hirata

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1976

Para a Graça,  
Fabrício  
e Rafael

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, deixo aqui expressa a minha gratidão aos professores da COPPE, Affonso da Silva Telles e Luiz Bevilacqua pela atenção dispensada durante a elaboração da presente tese. Especial agradecimento cabe também ao meu colega Clovis R. Maliska do Centro Tecnológico da UFSC, com o qual tive o prazer de trabalhar durante parte do período de elaboração desta pesquisa.

Agradeço também aos colegas professores, Arno Blass, Nelson Back, Sergio R. Arruda e Raul Valentim da Silva do Centro Tecnológico da UFSC pela atenção e assistência dispensadas.

Não poderia deixar de agradecer também, aos Srs. Ingo Haake e Luiz Fernando dos Santos, membros do Centro de Processamento de Dados da CELESC (Centrais Elétricas de Santa Catarina) por sua eficiente assessoria na parte de computação.

Finalmente, agradeço ao acadêmico Anilton Lapa, desenhista, e aos acadêmicos Nestor Back e Luiz Henrique, datilógrafos, pelos excelentes trabalhos elaborados.

## S I N O P S E

Esta pesquisa é concernente ao estudo da transferência do calor em regime laminar, no duplo-tubo aletado longitudinalmente.

Os problemas aqui discutidos, são os dois problemas tradicionais da transferência do calor em dutos, isto é, o estudo da solução da equação da energia sob as condições de contorno de fluxo constante e de temperatura constante perifericamente, na parede aletada, sob a hipótese de perfil de velocidade e de temperatura plenamente desenvolvidos.

Os problemas do escoamento laminar e da transferência de calor, sendo problemas a valores de contorno de caráter misto, são reduzidos a problemas de caráter mais simples pelo uso de equações integrais. O método das funções de Green é utilizado na solução de todos os problemas discutidos, resultando soluções analíticas facilmente computáveis.

É estudada a influência da geometria do duto aletado sobre as configurações dos campos de velocidade, de temperatura e do fluxo local e, em função desta análise, são apresentadas algumas conclusões qualitativas sobre a eficiência da parede aletada.

O desempenho do duplo-tubo, mais precisamente da parede aletada, é avaliado por meio de números de Nusselt apropriados, os quais traduzem o comportamento do duplo-tubo como trocador compacto.

A previsão dos parâmetros ótimos é feita a partir das curvas de desempenho do duplo-tubo para vários valores da altura das aletas e do número das mesmas, para cada relação de raios fixa.

Embora poucos trabalhos teóricos e experimentais sejam disponíveis na literatura especializada, os resultados aqui obtidos, nos casos-limite, concordam muito bem com os resultados dos trabalhos encontrados.

## A B S T R A C T

The present work deals with a theoretical study of the steady-state laminar flow and steady-state heat transfer in finned double-tube heat exchangers. Here, the fins are plane, straight and continuous and equally spaced, fixed on the external surface of the inner tube.

Two boundary conditions are discussed; in the first one, a constant and uniform heat flux is assumed to apply steadily over the inner tube surface and over each fin; in the second one, a constant peripheral temperature distribution is assumed to apply over the inner tube surface and each fin, while a constant and uniform heat flux is assumed in the longitudinal direction of the tube and the fins. For each case, a constant and uniform heat flux is assumed on the outer tube surface.

The related boundary value problems are solved analytically, with the aid of complete Green's functions and the inverse method.

The influence of the geometry on the velocity and temperature distribution is analyzed in detail.

In order to discuss and analyze the finned double-tube performance as a compact heat exchanger, appropriate Nusselt numbers are defined.

The predictions of the global and optimum performance are made by means of the Nusselt number curves i.e., the relationship between the Nusselt number, the boundary conditions and the geometric characteristics of the duct.

Very little has been published on this subject in the related literature. However, some limiting cases of the present study could be compared and are in good agreement with the available data.

## SIMBOLOGIA

$\cap$  = intersecção de conjuntos

$\cup$  = união de conjuntos

$\in$  = pertinência a conjuntos

$R$  = conjunto dos números reais

$R^n$  = espaço vetorial real n-dimensional

$D$  = região do  $R^n$  ( $n \geq 2$ )

$\partial D$  = fronteira de  $D$

$\bar{D} = D + \partial D$  = fecho de  $D$

$\partial D_a$  = fronteira relativa à parede aletada

$C^k(\bar{D})$  = espaço vetorial de funções  $f : \bar{D} \rightarrow R$  k-vezes continuamente diferenciáveis.

$C^0(\bar{D})$  = espaço das funções  $f : \bar{D} \rightarrow R$  contínuas sobre  $\bar{D}$

$\underline{n}$  = normal exterior a  $\partial D$

$\frac{\partial f}{\partial \underline{n}} \Big|_{\partial D} = \text{grad } f \cdot \underline{n} = \text{derivada normal de } f \text{ em } \partial D$

$(r^*, \theta, x^*)$  = coordenadas cilíndricas circulares

$r_i^*$  = raio do tubo interno

$r_e^*$  = raio do tubo externo

$r_a^*$  = raio correspondente às extremidades das aletas

$D_i^* = 2 r_i^*$  = diâmetro do tubo interno

$D_e^* = 2 r_e^*$  = diâmetro do tubo externo

$D_a^* = 2 r_a^*$  = diâmetro correspondente às extremidade das aletas

$L^* = r_a^* - r_i^*$  = altura das aletas

$2 S_a^*$  = perímetro da parede aletada por aleta

$2 S_t^*$  = perímetro da interface sólido-fluido por aleta

$2 A^*$  = área da secção transversal do duto por aleta

$D_h^* = 4 A^* / 2 S_t^*$  diâmetro hidráulico

$r_i = r_i^* / r_e^*$  = relação de raios

$r_a = r_a^* / r_e^*$

$L = L^* / (r_e^* - r_i^*)$  = altura adimensional das aletas.

$S_a = S_a^* / r_e^*$  = semi-perímetro adimensional da parede aletada por aleta

$S_t = S_t^*/r_e^* =$  semi-perímetro adimensional da interface sólido-fluido por aleta

$D_e = D_e^*/r_e^* = 2$

$D_i = D_i^*/r_e^*$

$D_h = D_h^*/r_e^* =$  diâmetro hidráulico adimensional

$A = A^*/r_e^{*2} =$  área adimensional

$m =$  número de aletas

$\theta_0 = 2\pi/m =$  ângulo entre aletas

### - CAPÍTULO III -

$\vec{v} = (v_r^*, v_\theta^*, v_x^*) =$  velocidade vetorial do fluido

$\rho =$  massa específica do fluido

$\mu =$  viscosidade do fluido

$\nu = \mu/\rho$

$u = -v_x^*/\frac{dp^*}{dx^*} r_e^{*2}/\mu =$  velocidade adimensional na direção  $x^*$

$u_m^* = \frac{1}{A^*} \int_0^{\theta_0/2} \int_{r_i^*}^{r_e^*} v_x^*(r^*, \theta) r^* dr^* d\theta =$  velocidade média do fluido

$u_m = -u_m^*/\frac{dp^*}{dx^*} r_e^{*2}/\mu =$  velocidade média adimensional

$f = \frac{dp^*}{dx^*} \frac{D_h^*}{4} / \frac{1}{2} \rho u_m^{*2} =$  fator de atrito

$Re_{Dh}^* = Re_{Dh} = u_m^* D_h^*/\nu =$  número de Reynolds baseado no diâmetro hidráulico

$Re_{De}^* = Re_{De} = u_m^* D_e^*/\nu =$  número de Reynolds baseado no diâmetro externo

### - CAPÍTULO IV -

$C_p =$  calor específico do fluido a pressão constante

$k =$  condutibilidade térmica do fluido

$T^*$  = temperatura do fluido

$\phi^*$  = função dissipação viscosa

$Q_g^*$  = geração de calor no fluido por unidade de volume

$Q_i^*$  = fluxo térmico total no tubo interno

$Q_e^*$  = fluxo térmico total no tubo externo

$q_r^* = Q_i^*/2\pi r_i^* =$  fluxo térmico de referência

$q_a^*$  = fluxo térmico uniforme nas aletas

$q_i^*$  = fluxo térmico uniforme no tubo interno

$q_e^*$  = fluxo térmico uniforme no tubo externo

$\beta_i = q_i^*/q_r^* =$  fluxo térmico adimensional no tubo interno

$\beta_a = q_a^*/q_r^* =$  fluxo térmico adimensional nas aletas

$\beta_e = q_e^*/q_r^* =$  fluxo térmico adimensional no tubo externo

$W_a = \beta_a/\beta_i =$  fração de fluxo nas aletas

$W_e = 2\pi r_e^* q_e^*/Q_i^* =$  fração de fluxo total no tubo externo

$$T_b^* = \int_0^{\theta_0/2} \int_{r_i^*}^{r_e^*} T^* u^* r^* dr^* d\theta / \int_0^{\theta_0/2} \int_{r_i^*}^{r_e^*} u^* r^* dr^* d\theta = \text{temperatura média de mistura}$$

$T_f^*$  = temperatura média na parede aletada

$T_m^*$  = temperatura média na secção transversal do duto aletado

$T = (T^* - T_m^*)/q_r^* r_e^*/k =$  temperatura adimensional

$T_f = T_f^*/q_r^* r_e^*/k$

$T_b = T_b^*/q_r^* r_e^*/k$

$$C_1 = \rho C_p r_e^{*3} \frac{dp^*}{dx^*} \frac{dT_b^*}{dx^*} / \mu q_r^* = \text{constante}$$

$$C_2 = r_e^{*3} \left( \frac{dp^*}{dx^*} \right)^2 / \mu q_r^* = \text{constante}$$

$$\phi = \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 = \text{função dissipação adimensional}$$

$h^* = Q_i^*/(2\pi r_i^*(T_f^* - T_b^*)) =$  coeficiente de transferência de calor por convecção

$NU_m = NU_i = NU_{Di}^* = NU_{Di} = h^* D_i/k =$  número de Nusselt baseado no diâmetro hidráulico (Eqs. (IV-41), (IV-43))



$\bar{h}^* = Q_i^* / (S_a^* (T_f^* - T_b^*)) =$  coeficiente médio de transferência de calor por convecção

$NU = NU_f = NU_h = \overline{NU}_{Dh}^* = \overline{NU}_{Dh} = \bar{h}^* D_h^* / k =$  número de Nusselt médio baseado no diâmetro hidráulico (Eqs. (IV-45), (IV-48))

$\overline{NU} =$  número de Nusselt médio baseado no diâmetro hidráulico e no coeficiente médio de transferência de calor relativo ao perímetro da interface sólido-fluido (Eq. (IV-49))

$NU_{i_o} = NU_o =$  número de Nusselt baseado no diâmetro interno para o duplo-tubo não-aletado (Eq. (IV-43))

## - CAPÍTULO V -

$T = (T^* - T_b^*) / \frac{dT_b^*}{dx^*} \frac{dp^*}{dx^*} r_e^{*4} / \alpha \mu =$  temperatura adimensional

$\alpha = k / \rho C_p =$  difusividade térmica do fluido

$Q_a^* = \int_{\partial D_a} k \frac{\partial T}{\partial n} ds^* =$  fluxo térmico total na parede aletada

$\bar{q}_a^* =$  fluxo térmico médio relativo à parede aletada

$q_i^* = Q_a^* / 2\pi r_i^* =$  fluxo térmico médio relativo ao tubo interno

$\bar{q}_a = \bar{q}_a^* / \frac{dT_b^*}{dx^*} \frac{dp^*}{dx^*} r_e^{*3} k / \alpha \mu =$  fluxo térmico médio adimensional

$\bar{h}_a^* = \bar{q}_a^* / (T_f^* - T_b^*) =$  coeficiente médio de transferência de calor por convecção relativo à parede aletada

$\bar{h}_i^* = q_i^* / (T_f^* - T_b^*) =$  coeficiente médio de transferência de calor por convecção relativo ao tubo interno

$\overline{NU}_m = \overline{NU}_i = \overline{NU}_{Di}^* = \overline{NU}_{Di} = \bar{h}_i^* D_i^* / k =$  número de Nusselt baseado no diâmetro interno (Eqs. (V-36), (V-50))

$\overline{NU} = \overline{NU}_t = \overline{NU}_{Dh}^* = \overline{NU}_{Dh} = \bar{h}_a^* D_h^* / k =$  número de Nusselt médio baseado no diâmetro hidráulico (Eqs. (V-38), (V-51))

$\overline{\overline{NU}} = \overline{\overline{NU}}_{Dh} =$  Número de Nusselt médio baseado no diâmetro hidráulico e no coeficiente médio de transferência de calor relativo ao perímetro da interface sólido-fluido (Eq. (V-56))

$\overline{NU}_{io} = \overline{NU}_o =$  número de Nusselt baseado no diâmetro interno para o duplo-tubo não-aletado (Eq. (V-50))

## Í N D I C E

	PÁG.
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO II - REVISÃO DA LITERATURA .....	6
CAPÍTULO III - O PROBLEMA DO ESCOAMENTO LAMINAR .....	
III.1- Equação do Movimento e Condições de Contorno .....	11
III.2- Solução do Problema pelo Método da Função de Green .....	16
III.3- Solução da Equação Integral .....	17
III.4- Campo de Velocidade e Velocidade Média ...	24
III.5- Condição de Neumann .....	27
III.6- Perda de Carga .....	28
CAPÍTULO IV - TRANSFERÊNCIA DE CALOR PARA FLUXO PRESCRITO	
IV.1 - O Problema da Transferência de Calor na Parede Aletada .....	30
IV.2 - Solução do Problema pelo Método da Função de Green Modificada .....	37
IV.3 - Números de Nusselt .....	42
CAPÍTULO V - TRANSFERÊNCIA DE CALOR PARA TEMPERATURA PRESCRITA NA PAREDE ALETADA	
V.1 - O Problema da Transferência de Calor na Parede Aletada .....	46

V.2	- Solução do Problema pelo Método da Função de Green .....	49
V.3	- Solução da Equação Integral .....	51
V.4	- Campo de Temperatura .....	57
V.5	- Números de Nusselt .....	59

## CAPÍTULO VI - RESULTADOS E COMPARAÇÕES

VI.1	- Resultados do Escoamento Laminar .....	68
VI.2	- Resultados da Transferência de Calor para Fluxo Prescrito .....	87
VI.3	- Resultados da Transferência de Calor para Temperatura Prescrita .....	113
VI.4	- Comparação dos Resultados .....	146

## CAPÍTULO VII - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

VII.1-	Distribuição de Velocidade e Perda de Carga .....	152
VII.2-	Distribuição da Temperatura e Desempenho para Fluxo Prescrito .....	153
VII.3-	Distribuição da Temperatura e Desempenho para Temperatura Prescrita .....	160

## CAPÍTULO VIII - CONCLUSÃO

VIII.1-	Natureza da Convecção Laminar no Duplo-Tubo Aletado .....	165
VIII.2-	Desempenho Ótimo do Duplo-Tubo .....	166
VIII.3-	Extensão da Aplicação do Método Inverso - Sugestões para Desenvolvimento Posterior .	169

BIBLIOGRAFIA .....	175
APÊNDICES .....	181

## C A P Í T U L O    I

## INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, tem havido interesse cada vez mais crescente no desenvolvimento e no estudo de métodos para promover o desempenho térmico de superfícies e dutos. Verificações experimentais tem comprovado a viabilidade técnica de muitos métodos<sup>29</sup>. Todavia, dos vários métodos existentes, poucos são viáveis economicamente. Os métodos mais viáveis são: aumento da superfície pelo uso de aletas, promotores de vorticidade e aletas promotoras de vorticidade.

Dutos aletados interna e externamente, tem sido largamente utilizados no projeto de trocadores de calor compactos<sup>20</sup>.

Os tipos de aletas mais comumente usados nesses dutos são: aletas espiraladas descontínuas e aletas planas contínuas e descontínuas. A experiência demonstra que as aletas mais eficientes em tubos e duplo-tubos, são aquelas que abrangem as maiores áreas de troca de calor<sup>18,25</sup>.

Existem dois propósitos básicos para o uso de aletas; o primeiro é diminuir ou minimizar a temperatura média da parede aletada a partir de uma dada distribuição de fluxo térmico na parede, enquanto que o segundo, é aumentar ou maximizar o fluxo térmico médio na parede aletada, a partir de uma dada distribuição de temperatura.

No estudo particular de dutos, estes propósitos não podem estar desvinculados, é claro, da potência de bombeamento, isto é, o desempenho da parede aletada é sempre analisado em comparação com a perda de carga no duto, ocasionada pela presença das aletas.

Nos dutos aletados, a presença das aletas altera a configuração do escoamento e, conseqüentemente, a perda de carga.

Na realidade, o escoamento no duto aletado é acompanhado da produção de turbulência nas regiões de geometria abrupta e da supressão da turbulência nos cantos da secção do duto. No caso das aletas longitudinais aqui abordado, o primeiro efeito tem papel irrelevante, enquanto que o segundo efeito é dominante no balanço da quantidade de movimento. Para uma dada vazão mássica, quanto maior for o número de aletas, tanto maior será o atrito e, então, a potência de bombeamento. Por isso, as investigações no desempenho de dutos aletados em regime turbulento são usualmente conduzidas sob a condição de potência de bombeamento constante<sup>29</sup>. No escoamento laminar contudo, tal critério é desnecessário, pelo fato de o número de Nusselt não depender do número de Reynolds para perfis de velocidade e de temperatura plenamente desenvolvidos.

Sob o ponto de vista teórico, o grau de complexidade do problema da transferência de calor laminar depende fundamentalmente da geometria da secção transversal do duto e das condições de contorno. Por outro lado, o problema pode ser consideravelmente simplificado, se forem prescritas condições de contorno perifericamente uniformes na parede aletada.

As condições de fluxo ou de temperatura constante perifericamente e fluxo constante longitudinalmente não são muito difíceis de ocorrer na prática; estes limites entre os quais as situações reais ocorrem, além de serem tradicionalmente estudados, podem servir de ponto de partida para o estudo de condições de contorno mais gerais<sup>3</sup>, usando no caso linear, o princípio de superposição.

É sabido que o fenómeno da condensação ou da evaporação em uma parede espessa de boa condutibilidade térmica tende a uniformizar a temperatura da superfície e que, a geração elétrica ou nuclear de calor numa parede de espessura constante de baixa condutibilidade térmica, tende a uniformizar o fluxo normal à mesma.

A hipótese de distribuição de fluxo uniforme nas aletas é um tanto restritiva, uma vez que, na realidade, o desempenho lo

cal da aleta depende fortemente da geometria local. Nos cantos, a temperatura tende a se uniformizar devido à estagnação, diminuindo o fluxo térmico local, enquanto que na extremidade da aleta, em consequência do grande gradiente de velocidade na região central do duto o fluxo é máximo. A hipótese de fluxo uniforme prescrito, por sua vez, força mais calor nas regiões de estagnação do que ocorre na realidade.

A hipótese de temperatura constante perifericamente também é restritiva, uma vez que, pelas hipóteses tradicionalmente aceitas no estudo da transferência de calor em aletas, a temperatura em geral, varia com o comprimento.

Uma outra simplificação admitida no presente estudo é a consideração de fluxo constante longitudinalmente ao duto. Casos em que esta condição ocorre podem ser constatados nos reatores nucleares resfriados a gás e nos trocadores de calor compactos do tipo duplo-tubo em contracorrente, cujas capacidades caloríficas dos escoamentos são idênticas.

A hipótese de fluxo térmico constante periférica e longitudinalmente fora originalmente admitida no estudo de tubos aletados longitudinalmente por HU & CHANG <sup>34</sup>.

Além da hipótese citada, as seguintes simplificações foram admitidas:

- (i) A espessura das aletas é desprezável, isto é, as aletas atuam como fontes localizadas de fluxo térmico.
- (ii) A distribuição de fluxo térmico uniforme nas aletas é da ordem da distribuição de fluxo na parede original.
- (iii) Os efeitos da dissipação viscosa da equação da energia são desprezáveis.



Sob estas hipóteses, os resultados daquele trabalho concordaram muito bem com os resultados teóricos e experimentais correlatos.

Ao que parece, nenhum estudo teórico tem sido feito, para analisar a transferência de calor laminar no duplo-tubo aletado. Adicionalmente, nenhuma informação experimental tem sido fornecida com relação à influência do número de aletas e altura das mesmas, sobre o desempenho do duplo-tubo aletado na transferência de calor no regime laminar.

No caso específico de duplo-tubos aletados longitudinalmente, algumas pesquisas experimentais foram realizadas, especialmente no caso particular de a altura das aletas ser igual à diferença dos raios dos tubos <sup>19,25,29</sup>.

O presente trabalho tem por objetivo, estudar teoricamente a transferência de calor laminar no duplo-tubo aletado longitudinalmente, admitindo-se, além das hipóteses de [34], uma distribuição de fluxo externo uniforme, periférica e longitudinalmente.

Adicionalmente, será examinada a condição de temperatura constante perifericamente, com fluxo constante no sentido longitudinal da parede aletada, admitindo-se também uma distribuição uniforme de fluxo no tubo externo, no sentido periférico e longitudinal. Esta segunda etapa, tem por propósito, examinar a influência da natureza da condição de contorno no desempenho da parede aletada.

O objetivo básico de [34], foi determinar relações geométricas na parede aletada, que maximizassem o número de Nusselt com base no diâmetro nominal. Os resultados daquela pesquisa possibilitaram uma previsão das características ótimas do tubo aletado, tais como, altura das aletas e número de aletas. Na presente análise, espera-se que exista algumas relações entre a altura das aletas e número de aletas, que maximizem o número de Nusselt, tanto para a condição de contorno de fluxo constante periférica e longitudinalmente, quanto para a condição de temperatura constante perifericamente e fluxo constante no sentido longitudinal na

parede aletada.

Devido a crescente aplicação de dutos aletados nos projetos de trocadores de calor na área de engenharia nuclear, particular atenção será dedicada ao efeito produzido pela geração de calor no fluido sobre o número de Nusselt e sobre os parâmetros ótimos da parede aletada.

## C A P Í T U L O   I I

## REVISÃO DA LITERATURA

Um dos primeiros estudos teóricos do escoamento e da transferência de calor laminar em dutos foi feita por ECKERT, et. Al.<sup>3</sup>. As soluções dos problemas da transferência do calor em [3] foram obtidas pela analogia da placa, a qual, foi originalmente formulada por MARCO & HAN<sup>2</sup>. Em [3], foi analisada a influência da geometria do duto sobre o número de Nusselt, para o caso particular de secção transversal em forma de um setor circular. Os resultados mais relevantes daquele trabalho são os seguintes:

As condições de contorno de fluxo e de temperatura constante perifericamente, com o fluxo constante no sentido longitudinal do duto resultam, com base no diâmetro hidráulico, números de Nusselt diferentes do número de Nusselt correspondentes ao duto circular; o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds baseado no diâmetro hidráulico difere do produto correspondente ao duto circular; o número de Nusselt e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds são funções essencialmente da geometria do duto.

Os resultados de [3] foram posteriormente verificados experimentalmente por ECKERT & IRVINE<sup>6</sup>, onde foram feitos estudos sobre a perda de carga no regime laminar e turbulento e sobre a transferência de calor no regime turbulento. Os resultados de [6] foram limitados a um duto com secção transversal em forma de triângulo isósceles, cuja amplitude do ângulo de ápice permite comparar esta secção com um setor de círculo. Na transferência de calor em [6], a presença da sub-camada laminar faz sentir seus efeitos; para a condição de fluxo constante na parede, foi verifi

cado que, no regime turbulento, os padrões de distribuição de temperatura e de fluxo local na parede, se assemelham aos padrões respectivos associados ao regime laminar em [3].

Posteriormente, CARLSON & IRVINE <sup>7</sup>, num programa experimental, levantaram as características da perda de carga de dutos de secção triangular para vários ângulos de ápice do triângulo da secção. Além da concordância dos resultados com outros trabalhos na área, verificou-se que os resultados referentes ao regime laminar concordam razoavelmente com [3]. Resultados e conclusões análogas, para dutos de secção retangular podem ser encontrados em [9].

As pesquisas experimentais sobre a convecção forçada em dutos geralmente tem sido conduzidas no regime turbulento. O estudo experimental da convecção forçada laminar em dutos apresenta grandes dificuldades, principalmente devido ao fato de existir na aquele regime, considerável influência da convecção natural, como foi verificado experimentalmente por BERGLES & SIMONDS <sup>27</sup>. Uma análise teórica do problema, para dutos circulares horizontais, pode ser vista em [50], cujos resultados concordam consideravelmente com dados experimentais.

Até a presente data, parece não existir nenhum trabalho ou informação experimental que permita avaliar a influência da convecção natural sobre a convecção forçada laminar em dutos aletados, apesar de haver um razoável número de resultados experimentais relativos ao regime turbulento para tubos e duplo-tubos aletados com vários tipos de aletas.

Pelo que parece, a primeira preocupação de estudar teoricamente a perda de carga em duplo-tubos aletados foi de SPARROW, et. Al.<sup>15</sup>, onde considerou-se o caso particular em que as aletas são planas, contínuas e longitudinais, cujas alturas são iguais a diferença dos raios dos tubos. Na solução do problema do escoamento laminar plenamente desenvolvido em [15], utilizou-se o método de separação de variáveis. Naquele trabalho concluiu-se basicamente que, o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds basea

do no diâmetro hidráulico, difere em geral do produto correspondente ao duto circular.

Um dos primeiros trabalhos experimentais na área de transferência de calor em regime turbulento em dutos aletados, foi feito por HILDING & COOGAN<sup>18</sup>, onde foram examinados tubos e duplos-tubos aletados com aletas espiraladas e com aletas planas e longitudinais.

O que se pode afirmar de [18] é que baseando o coeficiente médio de transferência de calor na área nominal da superfície de troca de calor, os melhores resultados são obtidos para aletas de maiores alturas, isto é, para as maiores áreas da superfície extendida.

Um trabalho completo sobre os métodos de melhoria da transferência de calor em superfícies e dutos foi feito por BERGLES<sup>25</sup>, onde a performance das geometrias analisadas em [18] é considerada como sendo das melhores, dentre os métodos gerais desenvolvidos para promover a transferência de calor em superfícies e dutos.

Ao lado dessas pesquisas, o problema da transferência de calor laminar em duplo-tubos aletados longitudinalmente parece não ter sido analisado teoricamente. O primeiro estudo teórico da transferência de calor laminar em tubos aletados longitudinalmente, foi realizado por HU & CHANG<sup>34</sup>. Os resultados obtidos em [34] corroboram, em termos gerais, às conclusões de BERGLES, et. Al.<sup>29</sup>. O método de abordagem utilizado em [34] foi o método das funções de Green, em conjunção com uma aplicação parcial do método inverso.

Os fundamentos do método inverso são formulados em [10] e [11] e, uma das primeiras aplicações na transferência de calor não-estacionária é apresentada em [19]. A eficiência das funções de Green fundamentais, na solução de problemas de condução de calor não-estacionário em meios anisotrópicos, usando o método inverso, foi avaliada em [35].

Recentemente, MALISKA<sup>46</sup>, examinou o problema da transfe

rência de calor laminar no duplo-tubo aletado com a geometria discutida em [15], fazendo uso das funções de Green e do método direto.

Em [46], o método das funções de Green completas foi utilizado tanto na solução do problema do escoamento laminar quanto na solução do problema da transferência de calor, sob a condição de contorno de fluxo constante periférica e longitudinalmente na parede aletada e fluxo constante no tubo externo.

Os resultados de [46] referentes a perda de carga concordam com os resultados de [15] e no limite, quando o raio interno tende a zero, os resultados da transferência de calor concordam com os resultados de [3].

O método das funções de Green completa e o método inverso foi utilizado em [47], para o estudo da transferência do calor laminar no duplo-tubo aletado longitudinalmente, submetido a um fluxo constante nas aletas e no tubo interno e fluxo nulo no tubo externo. Enquanto que em [46] a altura das aletas é igual a diferença dos raios dos tubos, em [47], a altura das aletas é menor que, ou igual a diferença dos raios dos tubos; particularidade essa que exige na solução dos problemas a valores de contorno associados, o uso do método inverso. A análise de [47] será apresentada nos capítulos III e IV, como partes integrantes do presente estudo.

Apesar das vantagens oferecidas pelas aletas espirais e planas, descontínuas e contínuas, poucas pesquisas teóricas tem parecido na literatura especializada até o presente momento. Mesmo para os casos mais simples, a redução dos problemas é acompanhada de grande complexidade.

A rigor, o estudo do duto aletado deveria ser feito, levando-se em conta dois problemas a valores de contorno acoplados; o primeiro, é referido à condução na parede aletada e o segundo é referido a transferência de calor laminar por convecção. Mesmo admitindo-se as hipóteses tradicionais da teoria das aletas as quais já são restritivas <sup>32</sup>, a complexidade do problema implica pelo me

nos no uso de um método iterativo, devido a relação do coeficiente médio de transferência do calor com a temperatura média de mistura do escoamento. Uma tentativa, a qual parece ter sido bem sucedida na otimização de paredes verticais aletadas sob convecção natural, é relatada em [28], onde foi usado um método de análise semi-empírico. Uma outra estimativa dos parâmetros ótimos em paredes verticais sob convecção natural aparece em [33].

Talvez um método de aproximações sucessivas utilizando um método análogo ao de [28], acoplado à teoria da transferência de calor laminar em dutos possa ser desenvolvido, para estudar mais realisticamente a convecção forçada laminar em dutos aletados longitudinalmente.

Contudo, o objetivo deste trabalho não é basicamente estudar as aletas, mas sim, o efeito das aletas como elementos promotores de área de troca de calor, para uma certa condição de contorno fixada a priori, sem onerar com isto, a área da secção transversal do duto em questão, a exemplo do que foi feito em [34].

## C A P Í T U L O    I I I

## O PROBLEMA DO ESCOAMENTO LAMINAR

III.1 - Equação do Movimento e Condições de Contorno

O escoamento laminar de um fluido Newtoniano incompressível é descrito pela equação de Navier-Stokes. Na região de entrada de dutos, tal equação tem caráter não-linear, em virtude dos termos de inércia das componentes transversais da quantidade de movimento. Em pontos suficientemente afastados dessa região porém, tal termo é suprimido, em virtude da anulação de tais componentes do movimento. A equação de Navier-Stokes nesses pontos tem caráter linear, e a dificuldade da resolução desta, é função somente da geometria da secção transversal do duto.

Por outro lado, o escoamento laminar não isotérmico em dutos, na realidade, é grandemente influenciado pelos efeitos da convecção natural, devido a dependência das propriedades físicas do fluido com a temperatura <sup>27</sup>. Na presente análise, contudo, tais efeitos não serão considerados devido a complexidade matemática do problema e também devido a falta de evidências, de que a convecção natural exerça tal influência na convecção forçada laminar em dutos aletados.

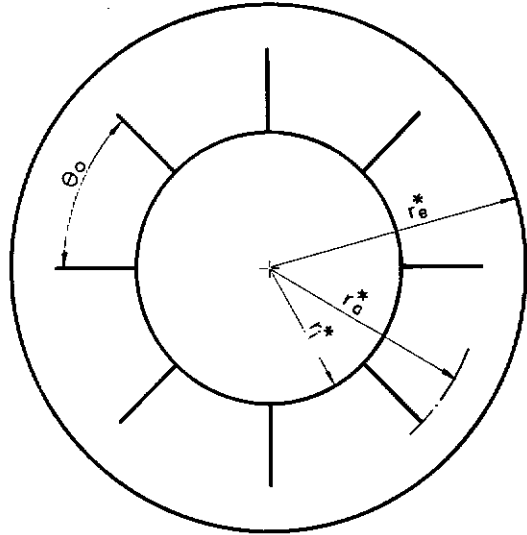
Pelo que foi dito, vamos admitir as seguintes hipóteses:

- a) O fluido é Newtoniano e incompressível com propriedades físicas constantes.
- b) O escoamento é laminar, estacionário e plenamente desenvolvido.
- c) Os efeitos gravitacionais são desprezáveis, e adicionalmente,



d) O duto é constituído de paredes polidas, paredes cilíndricas e circulares, com aletas planas longitudinais e contínuas, cujas espessuras são desprezáveis, sendo tais aletas igualmente espaçadas e fixadas na superfície externa do tubo in terno (vide fig. III-1)

Fig. (III-1)



A equação de Navier-Stokes para um fluido incompressível tem a seguinte forma vetorial:

$$\rho \left[ \frac{\partial \underline{\tilde{v}}^*}{\partial t} + (\text{grad } \underline{\tilde{v}}^*) \underline{\tilde{v}}^* \right] = - \text{grad } p^* + \mu \nabla^2 \underline{\tilde{v}}^* \quad (\text{III-1})$$

e a equação da continuidade tem a forma:

$$\text{div } \underline{\tilde{v}}^* = 0 \quad (\text{III-2})$$

onde,

- $\underline{\tilde{v}}^*$  = campo de velocidade
- $\rho$  = massa específica do fluido
- $\mu$  = viscosidade do fluido
- $p^*$  = pressão estática do fluido

A eq. (III-1), para o caso estacionário, juntamente com a eq. (III-2), em coordenadas cilíndricas circulares  $(r^*, \theta, x^*)$ , adquirem as formas escalares seguintes:

$$\rho \left( \frac{v_{\theta}^*}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} + v_x^* \frac{\partial v_r^*}{\partial x^*} - \frac{v_{\theta}^{*2}}{r^*} + v_r^* \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. (r^* v_r^*) \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v_{\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial x^{*2}} \right] \quad (\text{III-3})$$

$$\rho \left( v_r^* \frac{\partial v_{\theta}^*}{\partial r^*} + \frac{v_{\theta}^*}{r^*} \frac{\partial v_{\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{v_r^* v_{\theta}^*}{r^*} + v_x^* \frac{\partial v_{\theta}^*}{\partial x^*} \right) = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} + \\ + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_{\theta}^*) \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_{\theta}^*}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_{\theta}^*}{\partial x^{*2}} \right] \quad (\text{III-4})$$

$$\rho \left( v_r^* \frac{\partial v_x^*}{\partial r^*} + \frac{v_{\theta}^*}{r^*} \frac{\partial v_x^*}{\partial \theta} + v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \cdot \right. \\ \left. (r^* \frac{\partial v_x^*}{\partial r^*}) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} \right] \quad (\text{III-5})$$

e,

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_{\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} = 0 \quad (\text{III-6})$$

No escoamento plenamente desenvolvido, para o caso de um duto reto, o transporte de massa nas direções radial e tangencial é nulo, isto é,  $v_r^* = v_{\theta}^* = 0$ . Segue-se das equações (III-3) - (III-6) que,

$$\frac{\partial p^*}{\partial r^*} = 0 \quad (\text{III-7})$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{III-8})$$

$$\rho v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial v_x^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_x^{*2}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial x^{*2}} \right] \quad e, \quad (\text{III-9})$$

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} = 0 \quad (\text{III-10})$$

Destas equações segue-se que,

$$\nabla^2 v_x^* = - \frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dx^*} \quad (\text{III-11})$$

As condições de contorno associadas ao problema, de acordo com a hipótese (d) (vide figuras (III-1) e (III-2)), são:

$$v_x^* = 0 ; \quad r = r_i^* ; \quad - \theta_0/2 \leq \theta \leq \theta_0/2 \quad (\text{III-12})$$

$$v_x^* = 0 ; \quad r = r_e^* ; \quad - \theta_0/2 \leq \theta \leq \theta_0/2 \quad (\text{III-13})$$

$$v_x^* = 0 ; \quad r_i^* \leq r^* \leq r_a^* ; \quad \theta = \pm \theta_0/2 \quad (\text{III-14})$$

Pela simetria do escoamento relativamente as linhas de prolongamento das aletas tem-se, adicionalmente,

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial \theta} = 0 ; \quad r_a^* \leq r \leq r_e^* ; \quad \theta = \pm \theta_0/2 \quad (\text{III-15})$$

Como é conveniente e também usual <sup>34</sup>, vamos introduzir as seguintes quantidades adimensionais:

$$r = r^*/r_e^* ; \quad u = - v_x^* / \frac{dp^*}{dx^*} r_e^{*2} / \mu$$

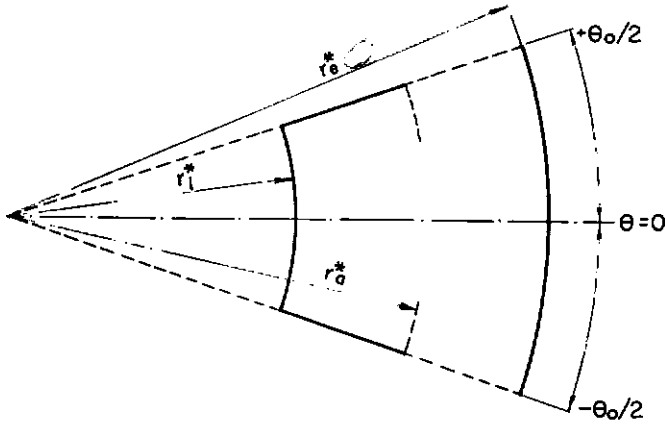


Fig. (III-2)

Os parâmetros adimensionais correspondentes serão,

$$r_i = r_i^*/r_e^* = \text{relação dos raios dos tubos}$$

$$r_e = r_e^*/r_e^* = 1$$

$$r_a = r_a^*/r_e^* = \text{raio adimensional na extremidade das aletas}$$

e,

$$L = (r_a^* - r_i^*) / (r_e^* - r_i^*) = \text{altura adimensional da aleta.}$$

Com estas definições podemos escrever o que segue:

$$\nabla^2 u = -1 \quad , \quad \text{para todo } (r, \theta) \in D \quad ; \quad (\text{III-16})$$

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r_i \leq r \leq 1 \quad ; \quad -\theta_0/2 \leq \theta \leq \theta_0/2\}$$

$$u = 0 \quad ; \quad r = r_i \quad ; \quad -\theta_0/2 \leq \theta \leq \theta_0/2 \quad (\text{III-17})$$

$$u = 0 \quad ; \quad r = 1 \quad ; \quad -\theta_0/2 \leq \theta \leq \theta_0/2 \quad (\text{III-18})$$

$$u = 0 \quad ; \quad r_i \leq r \leq r_a \quad ; \quad \theta = \pm \theta_0/2 \quad (\text{III-19})$$

e,

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad r_a \leq r \leq 1 \quad ; \quad \theta = \pm \theta_0/2 \quad (\text{III-20})$$

As equações (III-16)-(III-20) definem um problema a valores de contorno do tipo misto na região D considerada.

Este problema pode ser transformado num problema de Dirichlet de fácil solução, desde que se conheça a velocidade  $U(r)$  no intervalo  $[r_a, 1]$  para  $\theta = \pm \theta_0/2$ .

Dois são os procedimentos básicos de solução dos problemas (III-16)-(III-20): o primeiro procedimento, seria a aplicação do método inverso, no cálculo das derivadas normais de  $u$  na fronteira  $\partial D$ , admitindo-se a condição de contorno (III-20), fazendo uso de uma função de Green apropriada, mais precisamente da função de Green para o problema de Neumann. Uma vez conhecida a distribuição da derivada, calcularíamos o fator de atrito e o campo de velocidade.

Um outro procedimento, o qual parece bastante apropriado para este tipo de problema, é o procedimento utilizado em [34], isto é, a redução do problema a um problema de Dirichlet, como foi observado anteriormente. Esta redução é também uma aplicação do método inverso, mas somente ao cálculo de  $U$  no intervalo  $[r_a, 1]$ , como será visto adiante.

### III.2 - Solução do Problema pelo Método da Função de Green

Seja  $g(r, \theta | r', \theta')$  a função de Green do problema de Dirichlet associado a equação (III-16). A solução de (III-16) - (III-20) (vide apêndice A) é da forma:

$$u(r, \theta) = \int_{r_i}^1 \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} g(r, \theta | r', \theta') r' dr' d\theta' - \int_{r_a}^1 U(r') \cdot \left[ \frac{\partial g}{\partial \theta'} (r, \theta | r', \theta_0/2) - \frac{\partial g}{\partial \theta'} (r, \theta | r', -\theta_0/2) \right] \cdot \frac{dr'}{r'}$$

(III-21)

A aplicação da condição (III-20) nos dá uma equação integral de Fredholm homogênea de primeira espécie, da forma,

$$f(r) - \int_{r_a}^1 U(r') K(r, r') dr' = 0 \quad (\text{III-22})$$

onde,

$$f(r) = \frac{2\pi}{m^2} \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} \int_{r_i}^1 \frac{\partial g}{\partial \theta} (r, \theta_0/2 | r', \theta') r' dr' d\theta' \quad (\text{III-23})$$

e,

$$K(r, r') = \frac{2\pi}{m^2 r'} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \theta'} (r, \theta_0/2 | r', \theta_0/2) - \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \theta'} (r, \theta_0/2 | r', -\theta_0/2) \right] \quad (\text{III-24})$$

A dificuldade da solução do problema (III-16)-(III-20), reduz-se somente a solução da equação integral (III-22).

### III.3 - Solução da Equação Integral

As derivadas parciais da função de Green são descontínuas para  $\theta = \theta'$ ; espera-se portanto, que alguma singularidade ocorra no núcleo da equação (III-22). Adicionalmente, a série representativa de  $g$  não é apropriada para representar as segundas derivadas de  $g$  em (III-24). É necessário portanto, determinar uma forma inteira para a função de Green que permita em última análise o cálculo de  $K(r, r')$ .

A função de Green expandida em auto-funções de  $\theta$ , para a região  $D$  aqui considerada é a seguinte (vide apêndice A):

$$g(r, \theta | r', \theta') = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(r'^{-mn/2} - r_i^{mn/2})}{(r_i^{-mn/2} - r_i^{mn/2})} \cdot [(r/r_i)^{mn/2} - (r/r_i)^{-mn/2}] \sin \frac{1}{2} mn (\theta + \theta_0/2) \sin \frac{1}{2} mn (\theta' + \theta_0/2) \quad (\text{III-25})$$

para  $r < r'$ , onde  $\theta_0 = 2\pi/m$ ; e  
 $m$  = número de aletas (número par).

Desde que se faça  $r < r'$ , os cálculos de (III-22) podem ser efetuados com apenas um ramo para  $g$ , precisamente aquele correspondente a eq. (III-25).

Isto pode ser justificado pelo fato de a derivada

$$\frac{2\pi}{m^2} \left. \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|_{\theta_0/2} = f(r) - \int_{r_a}^1 U(r') K(r, r') dr' \quad (\text{III-26})$$

poder ser calculada com apenas uma integração; a integração de  $K(r, r')$ , para  $r < r'$ .

Uma soma de funções inteiras para a função  $g$  pode ser obtida, notando-se que o denominador de (III-25) pode ser expandido em série de potência como segue;

$$\frac{1}{r_i^{-mn/2} - r_i^{mn/2}} = \sum_{p=0}^{\infty} (r_i^{2p+1})^{mn/2} ; \quad 0 < r_i < 1$$

Substituindo esta expansão em (III-25), e os senos daquela expressão por cosenos, resulta a expansão,

$$g(r, \theta | r', \theta') = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_1^{mn/2} - a_2^{mn/2} - a_3^{mn/2} + a_4^{mn/2}) \cdot \left[ \cos \frac{1}{2} mn (\theta - \theta') - \cos \frac{1}{2} mn (\theta + \theta' + \theta_0) \right] \quad (\text{III-27})$$

onde, para  $r < r'$  ;

$$\begin{aligned} a_1 &= rr_i^{2p}/r' < 1 , \\ a_2 &= rr'r_i^{2p} < 1 , \\ a_3 &= r_i^{2p+2}/rr' < 1 \quad e \\ a_4 &= r'r_i^{2p+2}/r < 1 . \end{aligned}$$

Pela identidade complexa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a^n \cos n \beta \theta = - \frac{1}{2} \ln (1 + a^2 - 2a \cos \beta \theta) ; \quad a < 1 ,$$

a equação (III-27) pode ser escrita numa soma de funções como se gue:

$$\begin{aligned} g(r, \theta | r', \theta') &= \frac{1}{4\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} - Y_{22} + Y_{31} \\ &\quad - Y_{32} + Y_{41} - Y_{42}) \end{aligned} \quad (\text{III-28})$$

onde,

$$y_{k1} = \ln [1 + a_k^m - 2a_k^{m/2} \cos \frac{m}{2} (\theta - \theta')] ]$$

e

$$y_{k2} = \ln [1 + a_k^m - 2a_k^{m/2} \cos \frac{m}{2} (\theta + \theta' + \theta_0) ] .$$

As seguintes derivadas podem ser facilmente obtidas;

$$\left. \frac{\partial^2 y_{k1}}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta=\theta'=\theta_0/2} = - \frac{m^2}{2} a_k^{m/2} / (1 - a_k^{m/2})^2 ;$$

$$\left. \frac{\partial^2 y_{k2}}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta=\theta'=\theta_0/2} = \frac{m^2}{2} a_k^{m/2} / (1 - a_k^{m/2})^2 ;$$



$$\left. \frac{\partial^2 Y_{k1}}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta = -\theta' = \theta_0/2} = \frac{m^2}{2} a_k^{m/2} / (1 + a_k^{m/2})^2$$

e

$$\left. \frac{\partial^2 Y_{k2}}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta = -\theta' = \theta_0/2} = - \frac{m^2}{2} a_k^{m/2} / (1 + a_k^{m/2})^2$$

Pela eq. (III-24), por (III-26) e pelas derivadas calculadas, tem-se para  $K(r, r')$  a seguinte equação:

$$\begin{aligned} K(r, r') = & \frac{1}{r'} \sum_{p=0}^{\infty} [a_1^{m/2} (1 + a_1^{m/2}) / (1 - a_1^m)^2 - \\ & - a_2^{m/2} (1 + a_2^{m/2}) / (1 - a_2^m)^2 - a_3^{m/2} (1 + a_3^{m/2}) / \\ & / (1 - a_3^m)^2 + a_4^{m/2} (1 + a_4^{m/2}) / (1 - a_4^m)^2] \quad (\text{III-29}) \end{aligned}$$

A substituição de  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$  em (III-29), resulta finalmente,

$$\begin{aligned} K(r, r') = & \frac{(rr')^{m/2}}{r'} \sum_{p=0}^{\infty} (r_i^p)^m \left\{ \left[ \frac{r'^m + (rr_i^{2p})^m}{(r_i^m - (rr_i^{2p})^m)^2} - \right. \right. \\ & - \left. \frac{1 + (rr'r_i^{2p})^m}{(1 - (rr'r_i^{2p})^m)^2} \right] - r_i^m \left[ \frac{(rr')^m + (r_i^{2p+2})^m}{((rr')^m - (r_i^{2p+2})^m)^2} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{r'^m + (r'r_i^{2p+2})^m}{(r^m - (r'r_i^{2p+2})^m)^2} \right] \right\} \quad (\text{III-30}) \end{aligned}$$

Para o cálculo da função  $f(r)$ , é mais conveniente utilizar uma expansão parcial em  $r$  para  $g$ , no lugar da expansão (III-25). Para a região  $D$  aqui considerada, a função de Green expandida em  $r$  tem os seguintes ramos (vide apêndice A):

$$g^<(r, \theta | r', \theta') = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sinh \alpha_n(\theta + \theta_0/2)}{\sinh (\alpha_n \theta_0/2)} \cdot \sinh \alpha_n(\theta' - \theta_0/2) \cdot \phi_n(r') \phi_n(r) \quad , \quad \text{para } \theta < \theta' \quad (\text{III-31})$$

e,

$$g^>(r, \theta | r', \theta') = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sinh \alpha_n(\theta' + \theta_0/2)}{\sinh (\alpha_n \theta_0/2)} \cdot \sinh \alpha_n(\theta - \theta_0/2) \cdot \phi_n(r') \phi_n(r) \quad , \quad \text{para } \theta > \theta' \quad ; \quad (\text{III-32})$$

$$\alpha_n = n\pi / \ln r \quad ; \quad \phi_n(r) = \sin (\alpha_n \ln r/r)$$

Por (III-23), (III-31) e (III-32), temos:

$$f(r) = \frac{2\pi}{m^2} \int_{r_i}^1 \left[ \int_{-\theta_0/2}^{\theta} \frac{\partial g^>}{\partial \theta} (r, \theta_0/2 | r', \theta') d\theta' + \int_{\theta}^{\theta_0/2} \frac{\partial g^<}{\partial \theta} (r, \theta_0/2 | r', \theta') d\theta' \right] dr' \quad (\text{III-33})$$

de onde resulta a equação,

$$f(r) = (4\pi/m^2 \ln r_i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r_i^2 - \cos n\pi)}{(4 + \alpha_n^2)} \cdot \text{tgh}(\alpha_n \theta_0/2) \cdot \phi_n(r) \quad (\text{III-34})$$

Pelo critério da integral e pelo teorema de Weierstrass<sup>12</sup> a seguinte estimativa do número de termos de  $f(r)$  pode ser avaliada:

$$M > (\ln r_i) \operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{2} (1 - m^2 \epsilon / \pi) \right] / \pi$$

O erro relativo de aproximação para  $f(r) \neq 0$  será então,

$$\eta(r) = \epsilon / f(r)$$

Durante os cálculos, a função  $f(r)$  foi calculada para uma estimativa uniforme de  $|\eta(r)|$  da ordem de  $10^{-5}$ .

Pela equação (III-26) é fácil de ver que a função  $m^2 f(r) / 2\pi$  é a própria derivada normal as aletas, do campo de velocidade para o caso particular de  $L = 1$ ; este fato permite avaliar qualitativamente o comportamento de  $f(r)$  em função da geometria do duto em questão.

Uma boa aproximação numérica da solução da eq. (III-22) pode ser obtida a partir da transformação de tal equação num sistema de equações algébricas lineares<sup>34</sup>.

Se dividirmos o intervalo  $[r_a, 1]$  em  $N$  sub-intervalos iguais de comprimento  $\Delta r_j = (1 - r_a) / N$ , a derivada normal pode ser aproximada pela seguinte equação:

$$\frac{2\pi}{m^2} \left. \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|_{\theta_0/2} = f(r) - \sum_{j=1}^N U(r_j) \int_{r_j^-}^{r_j^+} K(r, r') dr' \quad (\text{III-35})$$

com  $r < r'$ ; onde,  $r_j$  = raio do ponto central do  $j$ -ésimo sub-intervalo;

$$r_j^+ = r_j + \Delta r_j / 2 ; \quad r_j^- = r_j - \Delta r_j / 2$$

e  $U(r_j)$  é o valor da velocidade  $U$  em  $r_j$ , suposta constante no sub-intervalo  $[r_j^-, r_j^+]$  (vide fig. (III-3)).

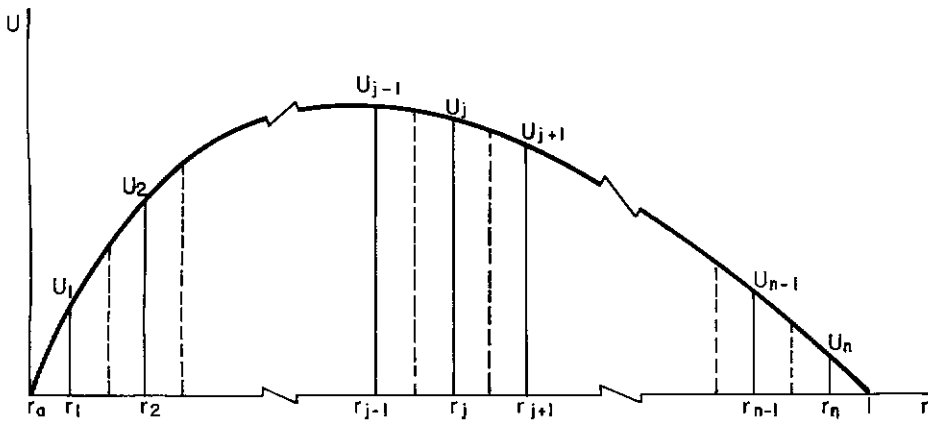


Fig. (III-3)

A equação (III-35) foi obtida da equação (III-26), pela aplicação do teorema do valor médio.

No intervalo  $[r_a, 1]$ , a condição (III-20) aplicada a cada ponto  $r_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , conduz ao seguinte sistema linear:

$$\sum_{j=1}^N A_{kj} U(r_k) = f(r_j) \quad ; \quad j, k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{III-36})$$

onde,

$$A_{kj} = \int_{r_j^-}^{r_j^+} K(r_k, r') dr' \quad (\text{III-37})$$

Os coeficientes  $A_{kj}$  são calculados facilmente, levando-se em conta que as integrais presentes em (III-37) são do tipo,

$$I = \frac{2}{m} \int_{r_j^-}^{r_j^+} \frac{(ar')^m + (br)^m}{((ar')^m - (br)^m)^2} \cdot dr'^{m/2}$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes.

Do cálculo desta integral resulta,

$$I = \frac{2}{m} \cdot \frac{r'^{m/2}}{(ar')^m - (br)^m}.$$

Em consequência, a forma final dos  $A_{kj}$  é,

$$\begin{aligned} A_{kj} = \frac{2}{m} (rr')^{m/2} \sum_{p=0}^{\infty} (r_i^p)^m \left\{ \left[ \frac{1}{(r'r_i^{2p})^m - r_k^m} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{1 - (r_k r' r_i^{2p})^m} \right] - r_i^m \left[ \frac{1}{(r_i^{2p+2})^m - (r_k r')^m} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{r'^m - (r_k r_i^{2p+2})^m} \right] \right\} \Bigg|_{r_j^-}^{r_j^+} \end{aligned} \quad (\text{III-38})$$

Devido ao fato de a série de potência presente nesta equação apresentar grande velocidade de convergência, seu cálculo justifica o uso em geral de apenas dez termos.

#### III.4 - Campo de Velocidade e Velocidade Média

Usando a função de Green expressa pela expansão (III-31) -(III-32), o campo de velocidade pode ser facilmente obtido da solução (III-21); mais precisamente,

$$\begin{aligned} u(r, \theta) = \int_{r_i}^1 \left[ \int_{-\theta_0/2}^{\theta} g^<(r, \theta | r', \theta') d\theta' + \int_{\theta}^{\theta_0/2} g^>(r, \theta | r', \theta') \right. \\ \left. \cdot d\theta' \right] r' dr' - \int_{r_a}^1 U(r') \left[ \frac{\partial g^<}{\partial \theta'} (r, \theta | r', \theta_0/2) - \right. \end{aligned}$$

$$- \frac{\partial g^>}{\partial \theta'} (r, \theta | r', -\theta_0/2) \Big] \frac{dr'}{r'}$$

Efetuada os cálculos indicados acima, chega-se a equa<sub>ção</sub>,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n \cosh (\alpha_n \theta)) \phi_n(r) \quad (\text{III-39})$$

onde,

$$A_n = \frac{2}{n\pi} (\cos n\pi - r_i^2) / (4 + \alpha_n^2) ;$$

$$B_n = (A_n - C_n) / \cosh (\alpha_n \theta_0/2)$$

e ,

$$C_n = - \frac{2}{\ln r_i} \int_{r_a}^1 U(r) \phi_n(r) \frac{dr}{r} \quad (\text{III-40})$$

Os coeficientes de Fourier  $C_n$  em (III-40), são calcula<sub>dos</sub> numericamente através dos valores de  $U_j = U(r_j)$ , obtidos da solução do sistema linear (III-36). O processo de cálculo consiste no ajuste de parábolas de três em três pontos no intervalo  $[r_a, 1]$  e em seguida, na integração das áreas sob essas curvas (vide figura (III-3)).

O resultado pode ser resumido pelas equações abaixo;

$$C_n = \sum_{j=1,3,5}^N C_{nj} , \text{ onde } N \text{ é impar e,}$$

$$C_{nj} = \int_{r_j - \Delta r_j}^{r_j + \Delta r_j} (a_{1j} + a_{2j}r + a_{3j}r^2) \phi_n(r) \frac{dr}{r} =$$

$$= \sum_{k=1}^3 \frac{a_{kj} r^{k-1}}{(k-1)^2 + \alpha_n^2} (\alpha_n \cos (\alpha_n \ln r/r_i) - (k-1) \sin (\alpha_n \ln r/r_i)) \left| \begin{array}{l} r_j + \Delta r_j \\ r_j - \Delta r_j \end{array} \right.$$

onde os coeficientes  $a_{kj}$ ,  $k = 1, 2, 3$  são calculados pelo ajuste das curvas de três em três pontos.

Este procedimento de cálculo é bastante eficiente na representação do campo de velocidade, como será visto no capítulo VI.

A velocidade média do escoamento, parâmetro usado no cálculo da perda de carga do duto, é obtida analiticamente pela equação (III-39) e pela seguinte definição:

$$u_m = \frac{2}{A} \int_{r_i}^1 \int_0^{\theta_0/2} u(r, \theta) r dr d\theta \quad (\text{III-41})$$

onde,

$$A = \text{área da região } D = \theta_0 (1 - r_i^2) / 2$$

Efetuando os cálculos indicados em (III-41) resulta,

$$u_m = \frac{4}{\theta_0 (1 - r_i^2)} \sum_{n=1}^{\infty} D_n [A_n \theta_0/2 - B_n \operatorname{tgh} (\alpha_n \theta_0/2) / \alpha_n] \quad (\text{III-42})$$

onde,

$$D_n = \frac{n\pi}{\ln r_i} (\cos n\pi - r_i^2) / (4 + \alpha_n^2)$$

O comportamento da distribuição de velocidade no duto é apropriadamente avaliado pela representação do campo  $u/u_m$ , que por definição das quantidades adimensionais é igual a  $u^*/u_m^*$ .

Alguns padrões dessa distribuição são apresentados no Capítulo VI.

### III.5 - Condição de Neumann

Uma verificação da solução deste problema pode ser feita através da condição de Neumann a qual, a solução exata de um problema de Dirichlet deve obedecer; essa condição é expressa pela equação,

$$\int_D \nabla^2 u dA = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} ds \quad (\text{III-43})$$

Por (III-16), vem,

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} ds = -A \quad ; \quad A = \frac{\theta_0}{2} (1 - r_i^2)$$

O desvio desta condição devido a aproximação numérica, pode ser avaliado pelo seguinte erro relativo:

$$\epsilon = \frac{2}{A} \left[ \frac{A}{2} + \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} ds \right] \quad (\text{III-44})$$

onde,

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} ds = - \int_0^{\theta_0/2} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_i} r_i d\theta + \int_0^{\theta_0/2} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_1 d\theta + \int_{r_i}^{r_a} \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0/2} \cdot \frac{dr}{r} \quad (\text{III-45})$$

Calculando as derivadas constantes de (III-45) e substituindo esta equação em (III-44), pode-se chegar ao que segue,



$$\varepsilon = \frac{4}{\theta_0(1-r_i^2)} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - C_n) \operatorname{tgh}(\alpha_n \theta_0/2) \quad .$$

$$. [\cos(\alpha_n \ln r_a/r_i) - \cos n\pi] \quad (\text{III-46})$$

Este resíduo é resultante unicamente da aproximação da solução da equação integral, uma vez que, para  $r_a = 1$ ,  $\varepsilon = 0$ .

Para efeito de análise da sensibilidade de  $\varepsilon$ , foram substituídos em (III-46), coeficientes  $C_n$  diferentes daqueles coeficientes correspondentes a solução do problema; como exemplo, para  $m = 8$ , substituiu-se na equação (III-46) os coeficientes para  $m = 4, 12, 16$  e  $32$ ; os resultados podem ser vistos no capítulo VI.

### III.6 - Perda de Carga

Para o escoamento laminar, o fator de atrito  $f$  é relacionado com as características geométricas do duto e com a velocidade média pela equação abaixo<sup>22</sup>,

$$f \cdot Re_{Dh} = Dh^2 / 2 u_m \quad (\text{III-47})$$

onde,

$$Dh = \text{diâmetro hidráulico} = 4A/S$$

onde  $S$  é o perímetro da interface sólido-fluido;

$$Dh = 2 / (1 / (1-r_i) + L / (\theta_0(1+r_i) / 2))$$

e

$$\begin{aligned} Re_{Dh} &= \text{número de Reynolds baseado no diâmetro hidráulico} \\ &= u_m^* Dh^* / \nu \quad ; \end{aligned}$$

$$Dh^* = r_e^* Dh \quad ; \quad \nu = \mu/\rho$$

Uma forma mais conveniente para representar geometricamente o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds é a seguinte:

$$f \cdot \text{Re}_{D_e} (D_e / D_h) = 2/u_m \quad (\text{III-48})$$

onde,

$$D_e = \text{diâmetro externo} = 2$$

e

$$\text{Re}_{D_e} = u_m^* D_e^* / \nu \quad ; \quad D_e^* = r_e^* D_e$$

As curvas representadas pela eq. (III-48) tem melhor caráter monotônico que as curvas correspondentes a eq. (III-47)<sup>34</sup>.

As equações (III-47) e (III-48) exprimem claramente o dato de que, o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds, depende somente das características geométricas do duto.

## C A P Í T U L O    I V

## TRANSFERÊNCIA DE CALOR PARA FLUXO PRESCRITO

IV.1 - O Problema da Transferência de Calor na Parede Aletada

A consideração de que a viscosidade do fluido é constante e por isto, independente da temperatura, no caso do escoamento laminar, implica no desacoplamento do sistema de equações diferenciais parciais constituído das equações da continuidade, do movimento e da energia. Em outras palavras, a distribuição de temperatura na região em consideração é função essencialmente do tipo de condição de contorno prescrita e da geometria da secção transversal do duto. Devido a este fato, é conveniente que se examine o comportamento da transferência de calor na parede aletada, para cada condição de contorno separadamente.

Neste capítulo vamos examinar o problema do fluxo prescrito na parede aletada, admitindo as hipóteses do capítulo III e adicionalmente as seguintes hipóteses:

- a) Perfil de temperatura plenamente desenvolvido.
- b) Distribuição de fluxo uniforme nas aletas, nos tubos interno e externo nos sentidos periférico e longitudinal.

Para perfil plenamente desenvolvido na ausência de condução axial de calor, a equação da energia expressa em coordenadas cilíndricas circulares adquire a seguinte forma,

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} = \frac{\rho C_p}{k} u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} - \frac{\Phi^*}{k} - \frac{Q_g^*}{k} \quad (IV-1)$$

onde,

$C_p$  = calor específico do fluido a pressão constante

$k$  = condutibilidade térmica do fluido

$Q_g^*$  = geração de calor no fluido por unidade de volume e

$\phi^*$  = função dissipação viscosa, cuja equação é,

$$\phi^* = \mu \left[ \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)^2 \right] \quad (IV-2)$$

Na comparação do desempenho do duplo-tubo aletado com o desempenho do duplo-tubo não-aletado de mesma relação de raios  $r_i^*$  /  $r_e^*$ , faz-se necessária a escolha de uma referência de comparação; a referência, neste caso, é o fluxo total na parede aletada  $Q_i^*$ , o qual tem valor fixo com  $L^*$  e  $m$ .

É conveniente definir o fluxo médio de referência  $q_r^*$ , em função do fluxo total na parede aletada  $Q_i^*$  pela equação seguinte:

$$q_r^* = Q_i^* / (2\pi r_i^*) \quad (IV-3)$$

Em outras palavras,  $q_r^*$  é o fluxo térmico médio na parede aletada de raio  $r_i^*$ .

Sejam as seguintes distribuições de fluxo térmico:

$q_a^*$  = fluxo térmico uniforme nas aletas;

$q_i^*$  = fluxo térmico uniforme no tubo interno; e

$q_e^*$  = fluxo térmico médio uniforme no tubo externo.

Um balanço térmico na parede aletada relaciona  $q_r^*$ ,  $q_i^*$  e  $q_a^*$  pela expressão,

$$Q_i^* = 2\pi r_i^* q_r^* = 2\pi r_i^* q_i^* + 2\pi (r_a^* - r_i^*) q_a^* \quad (\text{IV-4})$$

As seguintes quantidades adimensionais são úteis no cálculo:

$$\beta_i = q_i^* / q_r^* \quad ; \quad (\text{IV-5})$$

$$\beta_a = q_a^* / q_r^* \quad ; \quad (\text{IV-6})$$

$$\beta_e = q_e^* / q_r^* \quad ; \quad (\text{IV-7})$$

$$W_a = \beta_a / \beta_i \quad ; \quad (\text{IV-8})$$

$$W_e = 2\pi r_e^* q_e^* / Q_i^* \quad ; \quad (\text{IV-9})$$

onde,

$W_a$  = fração de fluxo nas aletas e,

$W_e$  = fração de fluxo total no tubo externo.

Pela lei de Fourier, as condições de contorno associadas a equação (IV-1) são do tipo (vide figura (IV-1)):

$$-k \frac{\partial T}{\partial r^*} = q_i^* \quad ; \quad r^* = r_i^* \quad ; \quad -\theta_0/2 \leq \theta \leq \theta_0/2 \quad (\text{IV-10})$$

$$\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = q_a^* \quad ; \quad \theta = \pm \theta_0/2 \quad ; \quad r_i^* \leq r^* \leq r_a^* \quad (\text{IV-11})$$

$$k \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = q_e^* \quad ; \quad r = r_e^* \quad ; \quad -\theta_0/2 \leq \theta \leq \theta_0/2 \quad (\text{IV-12})$$

A igualdade dos fluxos das aletas nos permite ainda escrever a condição de simetria,

$$\frac{\partial T^*}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \theta = 0, \quad ; \quad r_i^* \leq r^* \leq r_e^* \quad (\text{IV-13})$$

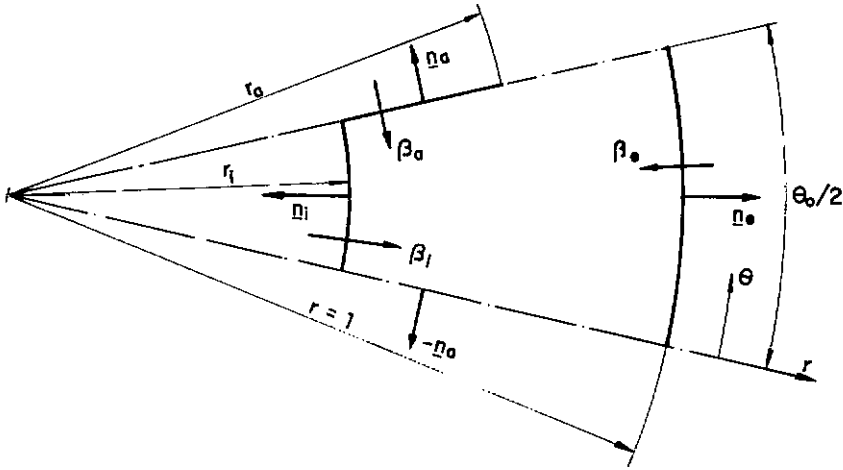


Fig. (IV-1)

A condição (a) de perfil plenamente desenvolvido, nos permite escrever o que segue:

$$\frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{T^* - T_b^*}{T_f^* - T_b^*} \right) = 0 \quad (\text{IV-14})$$

onde  $T_f^*$  é a temperatura média na parede aletada  $\partial D_a$  definida por,

$$T_f^* = \frac{1}{S_a^*} \int_{\partial D_a} T^* ds^* ; \quad (\text{IV-15})$$

onde  $S_a^*$  = perímetro da parede aletada

e  $T_b^*$  é a temperatura média de mistura na secção D definida por,

$$T_b^* = \frac{1}{u_m^* A^*} \int_D T^* u^* dA^* ; \quad (\text{IV-16})$$

$A^*$  = área da secção transversal do duto.

A condição (IV-14), juntamente com a condição (b) , nos

permite escrever as seguintes igualdades (vide apêndice B):

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{dT_f^*}{dx^*} = \frac{dT_b^*}{dx^*} \quad (\text{IV-17})$$

É conveniente neste ponto introduzir as seguintes variáveis adimensionais:

$$r = r^* / r_e^* \quad (\text{IV-18})$$

$$u = -u^* / \frac{dp^*}{dx^*} r_e^{*2} / \mu \quad (\text{IV-19})$$

$$T = (T^* - T_m^*) / (q_r^* r_e^* / k) \quad (\text{IV-20})$$

onde,

$T_m$  = temperatura média na secção transversal do duto.

Como consequência de (IV-17)-(IV-20), as equações (IV-1) e (IV-2) adquirem as formas,

$$\nabla^2 T = -C_1 u - C_2 \Phi - \lambda \quad (\text{IV-21})$$

onde,

$$C_1 = \rho C_p r_e^{*3} \frac{dp^*}{dx^*} \frac{dT_b^*}{dx^*} / \mu q_r^* ;$$

$$C_2 = r_e^{*3} \left( \frac{dp^*}{dx^*} \right)^2 / \mu q_r^* ;$$

$$\lambda = Q_g^* r_e^* / q_r^* = \text{parâmetro de geração de calor no fluido e,}$$

$$\Phi = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \quad (\text{IV-22})$$

As condições de contorno adimensionais, associadas à equação (IV-21), por (IV-10)-(IV-13) serão,

$$-\frac{\partial T}{\partial r} = \beta_i \quad ; \quad r = r_i \quad ; \quad -\theta_0/2 \leq \theta \leq \theta_0/2 \quad (\text{IV-23})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \beta_a \quad ; \quad \theta = \pm \theta_0/2 \quad ; \quad r_i \leq r \leq r_a \quad (\text{IV-24})$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \beta_e \quad ; \quad r = 1 \quad ; \quad -\theta_0/2 \leq \theta \leq \theta_0/2 \quad (\text{IV-25})$$

onde, por (IV-4)-(IV-6) vem,

$$\beta_i = 1 / [1 + m W_a L(1 - r_i) / \pi r_i] \quad (\text{IV-26})$$

e, por (IV-7) e (IV-9) tem-se,

$$\beta_e = r_i W_e \quad (\text{IV-27})$$

As equações (IV-21)-(IV-25) caracterizam um problema de Neumann, o qual, para ser consistente, deve obedecer a condição de Neumann como segue:

$$\int_{\partial D} \frac{\partial T}{\partial \underline{n}} \, ds = \int_D \nabla^2 u \, dA \quad (\text{IV-28})$$

Devido a existência da simetria relativamente a reta  $\theta = 0$ , a região  $D$  em análise pode ser o semi-setor da figura (IV-1);

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r_i \leq r \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0/2\} \quad ;$$



As condições de contorno neste caso são do tipo,

$$-\frac{\partial T}{\partial r} = \beta_i \quad ; \quad r = r_i \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0/2 \quad (\text{IV-29})$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \beta_e \quad ; \quad r = 1 \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0/2 \quad (\text{IV-30})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \theta = 0 \quad ; \quad r_i \leq r \leq 1 \quad (\text{IV-31})$$

e,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \beta_a \quad ; \quad \theta = \theta_0/2 \quad ; \quad r_i \leq r \leq r_a \quad (\text{IV-32})$$

A condição de consistência (IV-28), envolvendo os parâmetros  $C_1$ ,  $C_2$  e  $\lambda$  em consequência, é expressa pela equação,

$$C_1 = -[\theta_0(\beta_i r_i + \beta_e) / 2 + \beta_a(r_a - r_i) + \lambda(1-r_i^2)\theta_0/4 - \\ - \int_0^{\theta_0/2} \int_{r_i}^1 C_2 \phi \, r \, dr \, d\theta] / (u_m(1-r_i^2) \theta_0/4) \quad (\text{IV-33})$$

onde  $C_2$  e  $\lambda$  são parâmetros a especificar.

O problema (IV-21), (IV-29)-(IV-33) tem solução única a menos de uma constante arbitrária (vide apêndice A), a qual pode ser determinada pela condição,

$$\int_0^{\theta_0/2} \int_{r_i}^1 T \, r \, dr \, d\theta = 0 \quad (\text{IV-34})$$

A condição (IV-33) poderia ser modificada em função da escolha da variável adimensional para representar a temperatura, como pode ser visto no apêndice B. A escolha da definição (IV-20) por outro lado, é a mais apropriada pelo fato de as condições de contorno adimensionais (IV-29)-(IV-30) e (IV-32) significarem, neste caso, frações de fluxo relativas ao fluxo de referência  $q_r^*$ .

A formulação do problema da transferência de calor exposta nesta seção, além de ter como objetivo a análise do desempenho do duplo-tubo para vários valores de  $m$ ,  $L$  e  $r_i$ , tem como objetivo adicional, a previsão dos parâmetros ótimos do trocador, sob a condição de que a relação entre o fluxo térmico total no tubo externo e o fluxo térmico total na parede aletada seja constante. Apesar de na prática  $We$  ser nulo, este parâmetro será incluído na solução do problema, tanto para que a influência do fluxo externo sobre o desempenho da parede aletada possa ser analisada, quanto para que a presente análise possa ser comparada com referências correlatas, para valores particulares de  $We$ .

#### IV.2 - Solução do Problema pelo Método da Função de Green Modificada.

O método da função de Green parece ser o método mais apropriado para resolver o problema a valores de contorno (IV-21), (IV-29)-(IV-32).

A solução deste problema tem para equação (vide apêndice A) a expressão geral abaixo:

$$T(r, \theta) = C + \int_0^{\theta_0/2} \int_{r_i}^1 g(r, \theta | r', \theta') [C_1 u(r', \theta') + C_2 \Phi + \lambda] r' dr' d\theta' + \int_{r_i}^{r_a} g(r, \theta | r', \theta_0/2) .$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (\nabla T \cdot \underline{n}_a) dr' + \int_0^{\theta_0/2} g(r, \theta | r_i, \theta') (\nabla T \cdot \underline{n}_i) r_i d\theta' \\
& + \int_0^{\theta_0/2} g(r, \theta | 1, \theta') \cdot (\nabla T \cdot \underline{n}_e) d\theta' \quad (IV-35)
\end{aligned}$$

onde  $g$  é a função de Green modificada para o problema de Neumann e  $C$  é uma constante arbitrária, a qual é determinada pela condição (IV-34).

A expansão parcial de  $g$  em auto-funções de  $r$  para o semi-setor  $D$  considerado, tem para equação (vide apêndice A) o que segue:

$$g(r, \theta | r', \theta') = g_0(\theta, \theta') + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\theta, \theta') \cdot \psi_n(r) \cdot \psi_n(r') \quad (IV-36)$$

onde,

$$\psi_n(r) = \cos(\alpha_n \ln r/r_i) \quad ; \quad \alpha_n = n\pi/\ln r_i \quad ;$$

$$g_0(\theta, \theta') = \begin{cases} -\frac{\theta^2 + \theta'^2}{\theta_0 \ln r_i} + \frac{\theta'}{\ln r_i} - \frac{\theta_0}{\ln r_i} \\ \text{para } \theta < \theta' \\ \\ -\frac{\theta^2 + \theta'^2}{\theta_0 \ln r_i} + \frac{\theta}{\ln r_i} - \frac{\theta_0}{\ln r_i} \\ \text{para } \theta > \theta' \end{cases}$$

(IV-37)

$$g_n(\theta, \theta') = \begin{cases} -\frac{2}{n\pi} \cosh [\alpha_n(\theta' - \theta_0/2)] \cosh(\alpha_n\theta) / \\ \quad \sinh(\alpha_n \theta_0/2) & ; \text{ para } \theta < \theta' & ; \\ -\frac{2}{n\pi} \cosh [\alpha_n(\theta - \theta_0/2)] \cosh(\alpha_n\theta') / \\ \quad \sinh(\alpha_n \theta_0/2) & ; \text{ para } \theta > \theta' \end{cases}$$

(IV-38)

Por (IV-29)-(IV-32), tem-se que,

$$\begin{aligned} T(r, \theta) = & C + \beta_i r_i \int_0^{\theta_0/2} g(r, \theta | r_i, \theta') d\theta' + \\ & + \beta_e \int_0^{\theta_0/2} g(r, \theta | 1, \theta') d\theta' \\ & + \beta_a \int_{r_i}^{r_a} g(r, \theta | r', \theta_0/2) \cdot \frac{dr'}{r'} + \\ & + C_1 \int_{r_i}^1 \int_0^{\theta_0/2} g(r, \theta | r', \theta') \cdot u(r', \theta') \cdot r' dr' d\theta' + \\ & + \lambda \int_{r_i}^1 \int_0^{\theta_0/2} g(r, \theta | r', \theta') \cdot r' dr' d\theta' + \\ & + C_2 \int_{r_i}^1 \int_0^{\theta_0/2} g(r, \theta | r', \theta') \cdot \phi(r', \theta') \cdot r' dr' d\theta' \end{aligned}$$

(IV-39)

A omissão da parcela,

$$- \theta^2/\theta_0 \ln r_i - \theta_0 / \ln r_i$$

em (IV-37), não afeta os resultados do cálculo de (IV-39) , pela definição de  $C_1$  e pelo fato de a integração ser efetuada segundo a variável  $\theta'$  .

Em consequência,

$$g_0(\theta, \theta') = \begin{cases} - \theta'^2/\theta_0 \ln r_i + \theta'/\ln r_i \\ \quad \text{para } \theta < \theta' \\ - \theta'^2/\theta_0 \ln r_i + \theta/\ln r_i \\ \quad \text{para } \theta > \theta' \end{cases} ;$$

Efetuando os cálculos indicados em (IV-39), para o caso particular em que  $C_2 = 0$  , resulta a seguinte equação para a solução do problema da temperatura:

$$T(r, \theta) = C + H(\theta^2 + \theta_0^2/6) +$$

$$+ \beta_i r_i \ln r_i [1/3 + \ln(r/r_i)/\ln r_i + (\ln(r/r_i)/$$

$$/ \ln r_i)^2/2] - \beta_e \ln r_i [1/3 - (\ln(r/r_i)/\ln r_i)^2] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \cosh(\alpha_n \theta) / \cosh(\alpha_n \theta_0/2) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [A_{2n} + A_{3n} \cosh(\alpha_n \theta) / \cosh(\alpha_n \theta_0/2) +$$

$$\begin{aligned}
& + A_{4n} \theta \sinh(\alpha_n \theta) / \cosh(\alpha_n \theta_0/2) + \\
& + A_{5n} \cosh(\alpha_n \theta) / \cosh(\alpha_n \theta_0/2) \psi_n(r) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} [Q_{nk} + P_{nk} \cosh(\alpha_n \theta) / \cosh(\alpha_n \theta_0/2) + \\
& + S_{nk} \cosh(\alpha_k \theta) / \sinh(\alpha_k \theta_0/2)] \psi_k(r) \quad (\text{IV-40})
\end{aligned}$$

onde,

$$H = [C_1 (1 - r_i^2) (u_{mo} - u_m)/2 - 2\beta_a (r_a - r_i)/\theta_0] / (2 \ln r_i) ;$$

$u_{mo}$  = velocidade média para o duplo-tubo não aletado;

$$A_{1n} = C_1 A_n (A_n - C_n) / 2 ;$$

$$A_{2n} = -A_n [C_1 (r_i^2 - 1) / (2(1 + \alpha_n^2)) + 2 \lambda \ln r_i] ;$$

$$\begin{aligned}
A_{3n} = & 2 \beta_a \{ r_i - r_a [\cos(\alpha_n \ln r_a/r_i) + \\
& + \alpha_n \sin(\alpha_n \ln r_a/r_i)] \} / (n\pi(1 + \alpha_n^2)) ;
\end{aligned}$$

$$A_{4n} = C_1 (1 - r_i^2) (A_n - C_n) / (4 \ln r_i (1 + \alpha_n^2)) ;$$

$$A_{5n} = -A_{4n} [(\theta_0/2) \coth(\alpha_n \theta_0/2) + \ln r_i / n\pi] ;$$

$$\begin{aligned}
A_{nk} = & (r_i^2 - \cos(n+k)\pi) [ (n+k)/(4 + (\alpha_n + \alpha_k)^2) + \\
& + (n-k)/(4 + (\alpha_n - \alpha_k)^2) ] ;
\end{aligned}$$

$$Q_{nk} = -C_1 A_{nk} A_n / (\pi k^2) ;$$

$$P_{nk} = C_1 (A_n - C_n) A_{nk} / (\pi (k^2 - n^2)) ;$$

e,

$$S_{nk} = -P_{nk} (n/k) \operatorname{tgh}(\alpha_n \theta_0/2)$$

A solução (IV-40) não leva em consideração a dissipação viscosa; para aletas longitudinais em dutos circulares, no regime laminar, a dissipação viscosa não produz efeitos relevantes sobre o desempenho da parede aletada como foi verificado em [42].

### IV.3 - Números de Nusselt

A escolha de uma definição apropriada para o número de Nusselt depende da natureza do problema de transferência de calor em questão.

Como a presente pesquisa visa comparar o desempenho do duplo-tubo aletado com o desempenho do duplo-tubo não aletado, a definição mais conveniente do número de Nusselt parece ser a seguinte:

$$NU_{Di}^* = h^* D_i^* / k \quad ; \quad D_i^* = 2r_i^* \quad (IV-41)$$

onde o coeficiente de transferência de calor por convecção  $h^*$ , baseado no perímetro da parede original é expresso pela equação:

$$h^* = Q_i^* / (2 \pi r_i^* (T_f^* - T_b^*)) \quad (IV-42)$$

Por (IV-41), (IV-42) (IV-20) podemos ainda escrever o que segue:

$$NU_{Di} = 2 r_i / (T_f - T_b) \quad (IV-43)$$

onde,

$$T_f = T_f^* / q_r^* r_e^* / k$$

e

$$T_b = T_b^* / q_r^* r_e^* / k$$

Da mesma forma,

$$NU_{Dh} = Dh / (T_f - T_b) \quad (IV-44)$$

onde,

$$Dh = Dh^* / r_e^*$$

Uma definição de interesse comparativo é a seguinte:

$$\overline{NU}_{Dh}^* = \bar{h}^* Dh^* / k \quad (IV-45)$$

onde o coeficiente médio de transferência de calor por convecção é definido por,

$$\bar{h}^* = Q_i^* / (S_a^* (T_f^* - T_b^*)) ; \quad (IV-46)$$

$S_a^*$  é o perímetro da parede aletada por aleta expresso por,

$$S_a^* = \theta_0 r_i^* / 2 + r_a^* - r_i^*$$

Os coeficientes  $\bar{h}^*$  e  $h^*$  são relacionados como segue:

$$\bar{h}^* = h^* \theta_0 r_i^* / 2 S_a^* ; \quad (IV-47)$$

Contudo, a forma adimensional de (IV-45) é a seguinte:

$$\overline{NU}_{Dh} = (r_i \theta_0 / 2) NU_{Dh} / S_a \quad (IV-48)$$



onde,

$$S_a = S_a^* / r_e^* = \theta_0 r_i/2 + r_a - r_i$$

Uma outra definição de interesse comparativo é a seguinte:

$$\overline{NU}_{Dh} = (\beta_i r_i \theta_0/2 + \beta_e \theta_0/2 + \beta_a(r_a - r_i)) \quad .$$

$$. Dh / (St (\bar{T}_f - T_b)) \quad (IV-49)$$

onde,

$$S_t = S_a + \theta_0/2$$

e

$$\bar{T}_f = \frac{1}{S_t} \int_{\partial D} T \, ds \quad (IV-50)$$

sendo  $\partial D$  o contorno da região da figura (IV-1).

A escolha da definição (IV-41) foi feita pelas mesmas razões expostas em [34]; são elas: No limite quando  $L$  tende a zero, este número reduz-se ao número de Nusselt do duplo-tubo não aletado; o duplo-tubo aletado substitui o duplo-tubo não aletado com a mesma relação nominal,  $r_i^*/r_e^*$ , a qual descreve totalmente o trocador compacto; para uma dada temperatura da superfície,  $h^*$  (e então  $NU_{Di}$ ) nos dá a razão de transferência de calor, ou inversamente, para uma dada razão de transferência de calor, este número determina a diferença de temperatura entre a parede aletada e o fluido.

A temperatura média na fronteira  $T_f$ , é calculada em relação a parede aletada e é expressa pela equação:

$$T_f = \frac{1}{S_a} \int_{\partial D_a} T \, ds \quad , \quad (IV-51)$$

sendo  $\partial D_a$ , neste caso, o contorno da parede aletada correspon-

dente ao semi-setor da figura (IV-1).

Desta forma,

$$T_f = \frac{1}{S_a} \left[ \int_0^{\theta_0/2} T(r_i, \theta) r_i d\theta + \int_{r_i}^{r_a} T(r, \theta_0/2) dr \right] \quad (IV-52)$$

Da mesma maneira,

$$T_b = \frac{1}{u_m A} \int_D T u dA \quad (IV-53)$$

ou seja,

$$T_b = \frac{1}{u_m A} \int_0^{\theta_0/2} \int_{r_i}^1 T(r, \theta) u(r, \theta) r dr d\theta \quad ; \quad (IV-54)$$

$$A = \theta_0 (1 - r_i^2) / 4 = \text{área do semi-setor da fig. (IV-1).}$$

Por razões de economia de tempo de computação, expressões analíticas foram desenvolvidas para as equações (IV-45) e (IV-47) (vide apêndice C); tais expressões são demasiadamente ex tensas para serem aqui apresentadas.

Essas equações, apesar da extensão, são de grande va lia, ao lado da necessidade do oneroso cálculo dos campos da tem peratura e da velocidade, para a integração numérica de  $T_b$  e  $T_f$ .

Diferentemente do que ocorre na teoria da transferência de calor em regime turbulento, onde o número de Nusselt é função do número de Reynolds e do número de Prandtl, as equações (IV-40), (IV-43) e (IV-44) nos mostram que o número de Nusselt relativo a convecção forçada laminar no duplo-tubo aletado, a exemplo da conclusão de [3], depende somente das características geométricas do duto e das condições de contorno especificadas. O grau de in fluência de cada fator é analisado no capítulo VII, com base nas curvas de desempenho apresentadas no capítulo VI.

## C A P Í T U L O    V

TRANSFERÊNCIA DE CALOR PARA TEMPERATURA  
PRESCRITA NA PAREDE ALETADAV.1 - O Problema da Transferência de Calor na Parede Aletada

A segunda condição de contorno que tem progressivamente despertado interesse prático e teórico é a condição de temperatura constante perifericamente na interfase sólido-fluido <sup>3, 4 5, 50</sup>.

Todas as hipóteses do capítulo III serão aqui admitidas, em adição às hipóteses abaixo:

- a) A distribuição de temperatura na parede aletada é perifericamente uniforme, enquanto que o fluxo médio na parede aletada é constante no sentido longitudinal.
- b) A distribuição de fluxo térmico no tubo externo é uniforme periférica e longitudinalmente ao duto.

Para regime estacionário e perfil plenamente desenvolvido, na ausência de dissipação viscosa e geração de calor no fluido, a equação da energia adquire a forma abaixo:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} = \frac{\rho C_p}{k} u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (V-1)$$

onde  $u^*$  é a velocidade do escoamento.

Adicionalmente, a hipótese de perfil plenamente desenvolvido nos permite escrever as igualdades (vide apêndice B):

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{dT_f^*}{dx^*} = \frac{dT_b^*}{dx^*} \quad (V-2)$$

As condições de contorno associadas à equação (V-2), serão do tipo abaixo (vide figura (V-1)):

$$T^* = T_f^* \quad ; \quad r^* = r_i^* \quad ; \quad -\theta_0/2 \leq \theta \leq \theta_0/2 \quad (V-3)$$

$$T^* = T_f^* \quad ; \quad \theta = \pm\theta_0/2 \quad ; \quad r_i^* \leq r^* \leq r_a^* \quad (V-4)$$

$$-k \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = q_e^* \quad ; \quad r = r_e^* \quad ; \quad -\theta_0/2 \leq \theta \leq \theta_0/2 \quad (V-5)$$

onde  $T_f^*$  é a temperatura da parede aletada e  $q_e^*$  é o fluxo térmico médio uniforme no tubo externo.

Adicionalmente, pela simetria da geometria da secção transversal do duto pode-se escrever o seguinte:

$$\frac{\partial T^*}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \theta = \pm\theta_0/2 \quad ; \quad r_a^* \leq r^* \leq r_e^* \quad (V-6)$$

e

$$\frac{\partial T^*}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \theta = 0 \quad ; \quad r_i^* \leq r^* \leq r_e^* \quad (V-7)$$

A adimensionalização do problema pode ser conseguida com a introdução das seguintes quantidades adimensionais: .

$$u = -u^* / r_e^{*2} \frac{dp^*}{dx^*} / \mu \quad ; \quad r = r^*/r_e^*$$

$$T = (T^* - T_b^*) / \frac{dT_b^*}{dx^*} \frac{dp^*}{dx^*} r_e^{*4} / \alpha \mu \quad ; \quad \alpha = k/\rho C_p$$

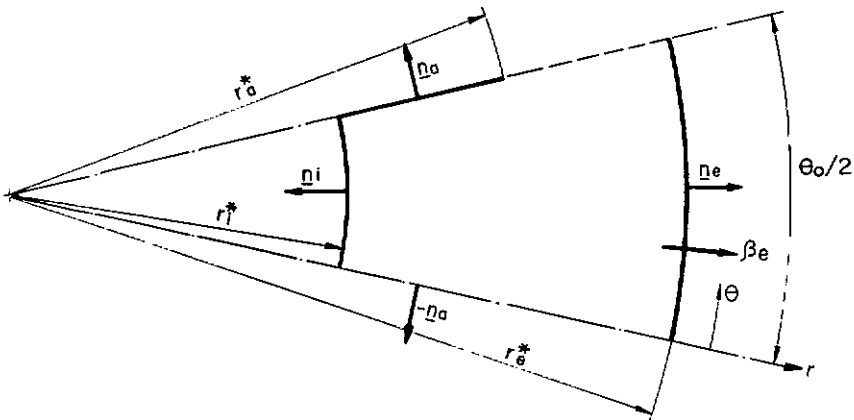


Fig. (V-1)

A substituição destas quantidades em (V-1)-(V-7) conduz a equação diferencial,

$$\nabla^2 T = -u \quad (V-8)$$

e as condições de contorno adimensionais correspondentes,

$$T = 0 \quad ; \quad r = r_i \quad ; \quad -\theta_0/2 \leq \theta \leq \theta_0/2 \quad (V-9)$$

$$T = 0 \quad ; \quad \theta = \pm\theta_0/2 \quad ; \quad r_i \leq r \leq r_a \quad (V-10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \beta_e = -q_e^* / r_e^{*3} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \frac{dp^*}{dx^*} k / \alpha \mu \quad (V-11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \theta = \pm\theta_0/2 \quad ; \quad r_a \leq r \leq 1 \quad (V-12)$$

e,

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \theta = 0 \quad ; \quad r_i \leq r \leq 1 \quad (V-13)$$

As equações (V-8)-(V-13), constituem um problema a valores de contorno de caráter misto, onde a temperatura ao longo do intervalo  $[r_a, 1]$  é desconhecida.

A semelhança de tal problema com o problema relativo ao escoamento laminar sugere que o mesmo método seja utilizado na sua solução.

O método das funções de Green também, neste caso, parece ser o mais apropriado para a redução do problema a um problema a valores de contorno do tipo misto mais simples.

## V.2 - Solução do Problema pelo Método da Função de Green

Para a região correspondente a figura (V-1) pode-se provar facilmente que a solução do problema a valores de contorno (V-8)-(V-13) adquire a forma abaixo (vide apêndice A):

$$\begin{aligned}
 T(r, \theta) = & \int_{r_i}^1 \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} g(r, \theta | r', \theta') u(r', \theta') r' dr' d\theta' \\
 & - \int_{r_a}^1 t(r') \left[ \frac{\partial g}{\partial \theta'} (r, \theta | r', \theta_0/2) - \frac{\partial g}{\partial \theta'} (r, \theta | r', -\theta_0/2) \right] \\
 & \cdot \frac{dr'}{r'} + \beta_e \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} g(r, \theta | 1, \theta') d\theta' \quad (V-14)
 \end{aligned}$$

onde,

$$t(r') = T(r', \theta_0/2) = T(r', -\theta_0/2)$$

é uma função a determinar no intervalo  $[r_a, 1]$  e  $g$  é a função de Green do problema.

A função  $t(r')$  pode ser calculada de modo semelhante ao que foi feito no capítulo III para o cálculo de  $U(r')$ .

Aplicando a condição de contorno (V-12) à solução (V-14), resulta a equação,

$$\begin{aligned} & \int_{r_a}^1 t(r') \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \theta'} (r, \theta_0/2 | r', \theta_0/2) - \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \theta'} (r, \theta_0/2 | \right. \\ & \quad \left. r', -\theta_0/2) \right] \frac{dr'}{r'} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \int_{r_i}^1 \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} \right. \\ & \quad \cdot g(r, \theta | r', \theta') u(r', \theta') r' dr' d\theta' + \\ & \quad \left. + \beta_e \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} g(r, \theta | 1, \theta') d\theta' \right]_{\theta_0/2} = 0 \end{aligned} \quad (V-15)$$

A equação (V-15) é uma equação integral de Fredholm homogênea de primeira espécie da forma,

$$h(r) - \int_{r_a}^1 t(r') K(r, r') dr' = 0 \quad ; \quad r \in [r_a, 1] \quad (V-16)$$

onde,

$$\begin{aligned} K(r, r') = & \frac{2\pi}{m^2} \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \theta'} (r, \theta_0/2 | r', \theta_0/2) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \theta'} (r, \theta_0/2 | r', -\theta_0/2) \right] \end{aligned} \quad (V-17)$$

e,

$$h(r) = \frac{2\pi}{m^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \int_{r_i}^1 \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} g u r' dr' d\theta' + \right.$$

$$+ \beta_e \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} g(r, \theta | 1, \theta') d\theta' \Big]_{\theta_0/2} \quad (V-18)$$

A dificuldade na obtenção da solução do problema (V-8)-(V-12), reduz-se somente na resolução da equação (V-16), a qual pode ser facilmente resolvida, fazendo uso do procedimento usado no capítulo III.

### V.3 - Solução da Equação Integral

A expansão parcial em auto-funções de  $\theta$  para a função de Green associada ao problema (V-8)-(V-12), para a geometria da figura (V-1), de acordo com a equação (A.82) do apêndice A, adquire a forma abaixo:

$$g(r, \theta | r', \theta') = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(r_i^{mn/2} + r_i^{-mn/2})} \frac{(r^{mn/2} + r'^{-mn/2})}{(r_i^{mn/2} + r_i^{-mn/2})} \cdot \left[ (r/r_i)^{mn/2} - (r/r_i)^{-mn/2} \right] \sin \frac{1}{2} mn (\theta + \theta_0/2) \cdot \sin \frac{1}{2} mn (\theta' + \theta_0/2) \quad ; \quad \text{para } r < r' \quad (V-19)$$

Como  $r_i < 1$ , o denominador de (V-19) pode ser expandido em série de potências como segue:

$$\frac{1}{r_i^{mn/2} + r_i^{-mn/2}} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (r_i^{2p+1})^{mn/2}$$

Substituindo esta série em (V-19) e repetindo as operações do capítulo III, pode-se chegar à expansão seguinte:



$$\begin{aligned}
g(r, \theta | r', \theta') = & \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [a_1^{mn/2} + \\
& + a_2^{mn/2} - a_3^{mn/2} - a_4^{mn/2}] \cdot \left[ \cos \frac{1}{2} mn (\theta - \theta') - \cos \frac{1}{2} mn (\theta + \theta' + \theta_0) \right] \quad (V-20) \\
& \text{para } r < r'
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
a_1 &= r' r r_i^{2p} < 1, \\
a_2 &= r r_i^{2p} / r' < 1, \\
a_3 &= r_i^{2p+2} / r r' < 1 \quad \text{e} \\
a_4 &= r' r_i^{2p+2} / r < 1
\end{aligned}$$

Introduzindo em (V-20) a identidade complexa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos n\beta\theta = -\frac{1}{2} \ln(1 + a^2 - 2a \cos \beta\theta) \quad ; \quad a < 1$$

resulta a forma logarítmica,

$$\begin{aligned}
g(r, \theta | r', \theta') = & \frac{1}{4\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \{ -\ln [1 + a_1^m - 2a_1^{m/2} \cdot \\
& \cdot \cos \frac{m}{2} (\theta' - \theta)] + \ln [1 + a_1^m - 2a_1^{m/2} \cos \frac{m}{2} \cdot \\
& (\theta + \theta' + \theta_0)] - \ln [1 + a_2^m - 2a_2^{m/2} \cos \frac{m}{2} \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (\theta' - \theta)] + \ln[1 + a_2^m - 2a_2^{m/2} \cos \frac{m}{2} (\theta + \theta' + \theta_0)] \\
& + \ln[1 + a_3^m - 2a_3^{m/2} \cos \frac{m}{2} (\theta' - \theta)] - \\
& - \ln[1 + a_3^m - 2a_3^{m/2} \cos \frac{m}{2} (\theta + \theta' + \theta_0)] \\
& + \ln[1 + a_4^m - 2a_4^{m/2} \cos \frac{m}{2} (\theta' - \theta)] \\
& - \ln[1 + a_4^m - 2a_4^{m/2} \cos \frac{m}{2} (\theta + \theta' + \theta_0)] \} \quad (V-21)
\end{aligned}$$

Repetindo novamente as operações análogas do capítulo III, pode-se chegar finalmente a equação,

$$\begin{aligned}
K(r, r') &= \frac{1}{r'} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p [a_1^{m/2} (1 + a_1^{m/2}) / \\
& (1 - a_1^m)^2 + a_2^{m/2} (1 + a_2^{m/2}) / (1 - a_2^m)^2 - \\
& - a_3^{m/2} (1 + a_3^{m/2}) / (1 - a_3^m)^2 - \\
& - a_4^{m/2} (1 + a_4^{m/2}) / (1 - a_4^m)^2] \quad (V-22)
\end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned}
K(r, r') &= \frac{(rr')^{m/2}}{r'} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (r_i^p)^m \cdot \\
& \cdot \left\{ \left[ \frac{r'^m + (rr_i^{2p})^m}{((r'^m - (rr_i^{2p})^m)^2} + \frac{1 + (rr'r_i^{2p})^m}{(1 - (rr'r_i^{2p})^m)^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$- r_i^m \left[ \frac{(rr')^m + (r_i^{2p+2})^m}{((rr')^m - (r_i^{2p+2})^m)^2} + \frac{r^m + (r'r_i^{2p+2})^m}{(r^m - (r'r_i^{2p+2})^m)^2} \right] \quad (V-23)$$

Por outro lado, a expansão parcial em  $\theta$  da função de Green associada ao problema (V-8)-(V-12), de acordo com a equação (A.83), tem a forma,

$$g(r, \theta | r', \theta') = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \frac{\sinh [\beta_n (\theta_0/2 + \theta)]}{\sinh (\beta_n \theta_0)} \cdot \sinh [\beta_n (\theta_0/2 - \theta')] \psi_n(r) \psi_n(r') ; \text{ para } \theta < \theta' \quad (V-24)$$

e,

$$g(r, \theta | r', \theta') = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \frac{\sinh [\beta_n (\theta_0/2 + \theta')] }{\sinh (\beta_n \theta_0)} \cdot \sinh [\beta_n (\theta_0/2 - \theta)] \psi_n(r) \psi_n(r') ; \text{ para } \theta > \theta' \quad (V-25)$$

onde,

$$\psi_n(r) = \sin (\beta_n \ln r/r_i)$$

e

$$\beta_n = (2n - 1) \pi/2 \ln r_i$$

Do cálculo da primeira e da última parcela de (V-14), resulta a seguinte série:

$$T_1(r, \theta) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)} \left\{ - \frac{A_n}{\beta_p} \left[ 1 - \frac{\cosh \beta_p \theta}{\cosh (\beta_p \theta_0/2)} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (A_n - C_n) \frac{\beta_p}{\beta_p^2 - \alpha_n^2} \left[ \frac{\cosh \alpha_n \theta}{\cosh (\alpha_n \theta_0/2)} - \frac{\cosh \beta_p \theta}{\cosh (\beta_p \theta_0/2)} \right] \} \\
& \cdot S_{pn} \psi_p(r) + \frac{4\beta_e}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{\beta_p (2p-1)} \left[ 1 - \frac{\cosh \beta_p \theta}{\cosh (\beta_p \theta_0/2)} \right] . \\
& \cdot \psi_p(r) \tag{V-26}
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
S_{pn} &= (2 r_i^2 - (\beta_p + \alpha_n) (-1)^{n+p}) / (4 + (\beta_p - \alpha_n)^2) - \\
&- (2 r_i^2 - (\beta_p - \alpha_n) (-1)^{n+p}) / (4 + (\beta_p - \alpha_n)^2) ;
\end{aligned}$$

$$\alpha_n = n\pi / \ln r_i ;$$

e  $A_n$  e  $C_n$ , são os coeficientes da equação do campo de velocidade definidos no capítulo III.

Como pode ser observado em (V-14), a equação (V-26) é a solução do problema (V-8)-(V-12) para o caso particular de  $L=1$ , isto é, quando a altura das aletas é igual a diferença dos raios dos tubos.

Pela definição de  $h(r)$  em (V-18),

$$h(r) = \left. \frac{\partial T_1}{\partial \theta} \right|_{\theta_0/2} ;$$

Em consequência,

$$\begin{aligned}
h(r) &= \frac{4}{m^2} \sum_{p,n=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)} [A_n \operatorname{tgh} (\beta_p \theta_0/2) + \\
&+ (A_n - C_n) \frac{\beta_p}{\beta_p^2 - \alpha_n^2} (\alpha_n \operatorname{tgh} (\alpha_n \theta_0/2) - \beta_p] .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \operatorname{tgh}(\beta_p \theta_0/2) \int S_{pn} \psi_p(r) = 2\beta_e \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p-1)} \cdot \\
 & \cdot \operatorname{tgh}(\beta_p \theta_0/2) \psi_p(r) \quad (V-27)
 \end{aligned}$$

A solução da equação integral pode ser aproximada com a mesma discretização do intervalo  $[r_a, 1]$  usada no capítulo III.

Como resultado, a função  $t(r)$  é aproximada pelo sistema linear,

$$\sum_{j=1}^N A_{kj} t_j = h(r_k) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (V-28)$$

onde,

$$t_j = t(r_j) \quad ; \quad N \text{ é o número de sub-intervalos e}$$

$$A_{kj} = \int_{r_j^-}^{r_j^+} K(r_k, r') dr' \quad (V-29)$$

De (V-23) e (V-29) resulta para os coeficientes  $A_{kj}$  a série de termos alternativos abaixo:

$$A_{kj} = \frac{2}{m} (rr')^{m/2} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (r_i^m)^p \cdot$$

$$\left\{ \left[ \frac{1}{(r_k r_i^{2p})^m - r'^m} + \frac{1}{1 - (r_k r' r_i^{2p})^m} \right] - \right.$$

$$\left. - r_i^m \left[ \frac{1}{(r_i^{2p+2})^m - (r_k r')^m} + \frac{1}{r_k^m - (r' r_i^{2p+2})^m} \right] \right\} \Big|_{r_j^-}^{r_j^+}$$

Esta série é bastante apropriada na evolução dos coeficientes  $A_{kj}$ , tanto pela série de potências altamente convergente quanto pelo seu caráter alternativo.

De modo geral, para a gama de raios testada, apenas dez termos são necessários para calcular com boa precisão os coeficientes  $A_{kj}$ .

#### V.4 - Campo de Temperatura

Calculando a segunda parcela de (V-14) e somando a solução particular  $T_1$ , resulta o que segue:

$$\begin{aligned}
 T(r, \theta) = & \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2p-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{A_n}{\beta_p} \left[ 1 - \frac{\cosh(\beta_p \theta)}{\cosh(\beta_p \theta_0/2)} \right] \right. \right. \\
 & + (A_n - C_n) \left[ \frac{\cosh(\alpha_n \theta)}{\cosh(\alpha_n \theta_0/2)} - \frac{\cosh(\beta_p \theta)}{\cosh(\beta_p \theta_0/2)} \right] \\
 & \cdot \beta_p / (\beta_p^2 - \alpha_n^2) \} S_{pn} + \frac{4\beta_e}{\pi} \frac{(-1)^{p+1}}{\beta_p (2p-1)} \\
 & \cdot \left[ 1 - \frac{\cosh(\beta_p \theta)}{\cosh(\beta_p \theta_0/2)} \right] + \bar{C}_p \frac{\cosh(\beta_p \theta)}{\cosh(\beta_p \theta_0/2)} \} \psi_p(r) \quad (V-31)
 \end{aligned}$$

onde,

$$\bar{C}_p = -\frac{2}{\ln r_i} \int_{r_a}^1 t(r') \psi_p(r') \frac{dr'}{r'} \quad ; \quad p = 1, 2, \dots \text{etc.}$$

são os coeficientes de Fourier da expansão de  $t(r')$  no intervalo  $[r_i, 1]$ .

O cálculo destes coeficientes é feito pelo mesmo método usado no cálculo dos coeficientes  $C_n$ .

A solução numérica de (V-28) é ajustada por parábolas do tipo  $a_1 + a_2 r + a_3 r^2$  de três em três pontos do intervalo  $[r_a, 1]$  (vide figura (V-2)).

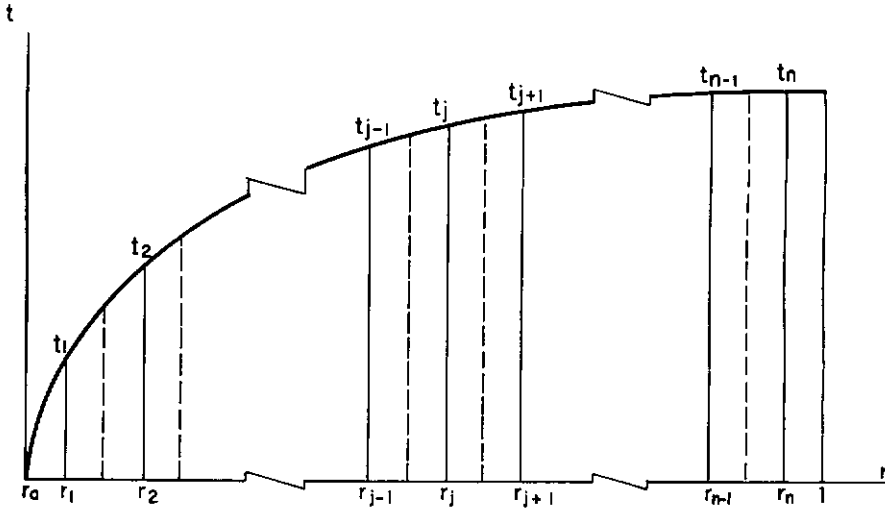


Fig. (V-2)

As seguintes equações são utilizadas no cálculo:

$$\bar{C}_p = - \frac{2}{\ln r_i} \sum_{j=1,3,5}^N \bar{C}_{pj}$$

onde,

$$\begin{aligned} \bar{C}_{pj} &= \int_{r_j - \Delta r_j}^{r_j + \Delta r_j} (a_{1j} + a_{2j} r + a_{3j} r^2) \psi_p(r) \frac{dr}{r} = \\ &= \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{a_{kj}}{(k-1) + \beta_p^2} r^{k-1} (\beta_p \cos (\beta_p \ln r_a/r_i) - \right. \\ &\quad \left. - (k-1) \sin (\beta_p \ln r_a/r_i)) \right] \Big|_{r_j - \Delta r_j}^{r_j + \Delta r_j} \end{aligned}$$

Este procedimento é bastante satisfatório para representar a distribuição de temperatura na secção transversal do duto, como é observado no capítulo VI.

### V.5 - Números de Nusselt

A escolha dos parâmetros que entram na definição do número de Nusselt para a presente condição de contorno é feita pelas mesmas razões expostas no capítulo IV. A finalidade do problema (V-8)-(V-12) é, para um dado fluxo externo prescrito periférica e longitudinalmente, avaliar o desempenho do duplo-tubo aletado em relação ao duplo-tubo não-aletado sob a condição de temperatura constante e de fluxo médio constante no sentido longitudinal na parede aletada. A referência utilizada é o fluxo térmico total oriundo do escoamento do tubo interno cujo diâmetro é  $r_i^*$ .

Contudo, define-se o coeficiente médio de transferência de calor por convecção pela equação seguinte:

$$\bar{h}_i^* = \bar{q}_i^* / (T_f^* - T_b^*) \quad (V-32)$$

onde  $T_f^*$  é a temperatura na parede aletada e  $T_b^*$  é a temperatura média de mistura definida pela equação,

$$T_b^* = \frac{1}{u_m^* A^*} \int_{r_i^*}^1 \int_0^{\theta_0/2} T^* u^* r^* dr^* d\theta \quad ; \quad (V-33)$$

$\bar{q}_i^*$  é o fluxo térmico médio relativo ao tubo interno, definido por,

$$\bar{q}_i^* = Q_a^* / 2\pi r_i^* \quad (V-34)$$

onde,



$$Q_a^* = k \int_{\partial D_a} \frac{\partial T^*}{\partial \underline{n}} ds^* \quad ; \quad (V-35)$$

$\partial D_a$  = contorno relativo a parede aletada

O número de Nusselt baseado no diâmetro nominal  $D_i^*$  e no coeficiente médio  $\bar{h}_i^*$  é definido pela expressão,

$$\overline{NU}_{D_i^*} = \bar{h}_i^* D_i^* / k \quad (V-36)$$

A escolha desta definição, a exemplo do capítulo IV, é justificada pelas seguintes razões: para as mesmas condições de contorno do duplo-tubo aletado e não-aletado, no limite quando  $L$  tende a zero, este número reduz-se ao número de Nusselt do duplo-tubo não-aletado; o duplo-tubo aletado substitui o duplo-tubo não aletado com o mesmo diâmetro nominal  $D_i^*$  a qual descreve o trocador compacto; e para uma dada temperatura da superfície  $\bar{h}_i^*$  (e então  $\overline{NU}_{D_i^*}$ ) nos dá a taxa de transferência de calor, ou inversamente, para uma dada taxa de transferência de calor, este número determina a diferença de temperatura entre a superfície aletada e o fluido em escoamento.

Um número de Nusselt de interesse comparativo é o seguinte:

$$NU_{D_h^*} = \bar{h}_i^* D_h^* / k \quad (V-37)$$

onde,

$D_h^*$  = diâmetro hidráulico

Para verificação do desempenho global do duplo-tubo é interessante também definir o número de Nusselt como segue:

$$NU_{D_h^*} = \bar{h}_a^* D_h^* / k \quad (V-38)$$

onde,

$$\bar{h}_a^* = \bar{q}_a^* / (T_f^* - T_b^*) \quad ; \quad (V-39)$$

onde,

$$\bar{q}_a^* = Q_a^* / S_a^* \quad ; \quad (V-40)$$

$S_a^*$  = perímetro da superfície extendida

O fluxo médio  $\bar{q}_a^*$  está relacionado à velocidade média do escoamento  $u_m^*$  pela seguinte equação:

$$\bar{q}_a^* S_a^* - q_e^* \pi D_e^* = \rho C_p u_m^* A^* \frac{dT_b^*}{dx^*} \quad , \quad (V-41)$$

como pode mostrar um simples balanço térmico na secção considera da.

Explicitamente, a equação (V-35) para o semi-setor da figura (V-1) é da forma,

$$\begin{aligned} Q_a^*/2m = \bar{q}_a^* S_a^* = -k \left[ \int_0^{\theta_0/2} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{r_i^*} r_i^* d\theta + \right. \\ \left. + \int_{r_i^*}^{r_a^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0/2} \frac{dr^*}{r^*} \right] \end{aligned} \quad (v-42)$$

onde,

$$S_a^* = r_i^* \theta_0/2 + r_a^* - r_i^*$$

As equações adimensionais análogas a (V-33) e (V-42) são da forma,

$$T_b = \frac{1}{u_m A} \int_0^{\theta_0/2} \int_{r_i}^1 T u r dr d\theta \quad (V-43)$$

onde,

$$A = \theta_0 (1 - r_i^2) / 4$$

e

$$\bar{q}_a S_a = \int_0^{\theta_0/2} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_i} r_i d\theta + \int_{r_i}^{r_a} \left. \frac{\partial T}{\partial \theta} \right|_{\theta_0/2} \frac{dr}{r} \quad (V-44)$$

onde,

$$S_a = r_i \theta_0/2 + r_a - r_i$$

Da definição de  $T$  segue-se que,

$$\bar{q}_a^* = \bar{q}_a r_e^{*3} \frac{dp^*}{dx^*} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} k / \alpha \mu \quad (V-45)$$

Por (V-2), (V-45) e pela particularização do balanço térmico em (V-41) ao semi-setor da figura (V-1), resulta a seguinte identidade adimensional:

$$\bar{q}_a S_a - \theta_0 \beta_e / 2 = u_m A \quad (V-46)$$

Esta equação poderia também ser obtida diretamente da equação (V-1) pela aplicação do teorema da divergência.

A equação (V-46) é a equação de compatibilidade, a qual o problema a valores de contorno (V-1)-(V-9), deve satisfazer para perfil plenamente desenvolvido.

A equação (V-46) é usada também para o estabelecimento do valor do fluxo externo  $\beta_e$  durante o cálculo da curva de desempenho para a condição de temperatura constante na parede aletada;

A relação entre a fração total de fluxo externo  $W_e$  e  $\beta_e$  é obtida como segue:

$$W_e = Q_e^*/Q_a^* = 2\pi r_e^* q_e^* / \int_{\partial D_a} k \frac{\partial T^*}{\partial \underline{n}} ds^* \quad (V-47)$$

A substituição das variáveis adimensionais correspondentes em (V-47) resulta,

$$W_e = 2\pi \beta_e / \bar{q}_a S_a \quad (V-48)$$

De (V-46) e (V-48) resulta a relação que segue:

$$\beta_e = \frac{1}{2} (1 - r_i^2) u_m W_e / (1 - W_e) \quad (V-49)$$

de onde podemos calcular  $\beta_e$  para cada valor de  $W_e$ ; durante os testes de  $m$  e  $L$ , o valor de  $W_e$  é constante, enquanto que  $\beta_e$  será variável de acordo com (V-49). Com este procedimento, o desempenho da parede aletada será avaliado com base numa fração constante, do fluxo total externo com relação ao fluxo total da parede aletada, de forma análoga ao que foi feito no capítulo IV.

As equações adimensionais correspondentes às equações (V-36) e (V-37) tem as formas respectivas como segue:

$$\overline{NU}_{Di} = \bar{q}_i D_i / T_b \quad (V-50)$$

onde

$$\bar{q}_i = \bar{q}_a S_a / \theta_0 r_i/2$$

e

$$\overline{NU}_{Dh} = \bar{q}_a D_h / T_b \quad (V-51)$$

Pela substituição de (V-31) nas definições (V-43) e (V-44), expressões analíticas para aquelas equações podem ser facilmente obtidas; o resultado é o seguinte:

$$\int_{r_a}^{r_i} \frac{\partial T}{\partial \theta} \bigg|_{\theta_0/2} \frac{dr}{r} = \sum_{p=1}^{\infty} \left[ (2/\pi) \frac{1}{(2p-1)} \sum_{n=1}^{\infty} B_{pn} S_{pn} - \beta_p \bar{C}_p \operatorname{tgh}(\beta_p \theta_0/2) - (4 \beta_e/\pi) \frac{(-1)^{p+1}}{(2p-1)} \operatorname{tgh}(\beta_p \theta_0/2) \right] S_p \quad (V-52)$$

onde,

$$S_p = \left[ 1 - \cos(\beta_p \ln r_a/r_i) \right] / \beta_p \quad e$$

$$B_{pn} = A_n \operatorname{tgh}(\beta_p \theta_0/2) + (A_n - C_n) \frac{\beta_p}{(\beta_p^2 - \alpha_n^2)} \cdot \left[ \alpha_n \operatorname{tgh}(\alpha_n \theta_0/2) - \beta_p \operatorname{tgh}(\beta_p \theta_0/2) \right] ;$$

$$\int_0^{\theta_0/2} \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r_i} d\theta = (2/\pi) \sum_{p,n=1}^{\infty} \frac{\beta_p}{(2p-1)} Q_{pn} S_{pn} + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{C}_p \operatorname{tgh}(\beta_p \theta_0/2) + (4 \beta_e/\pi) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p-1)} \left[ \theta_0/2 - \operatorname{tgh}(\beta_p \theta_0/2) / \beta_p \right] \quad (V-53)$$

onde,

$$Q_{pn} = - \frac{A_n}{\beta_p} \left[ \theta_0/2 - \operatorname{tgh}(\beta_p \theta_0/2) / \beta_p \right] + (A_n - C_n) \cdot \frac{\beta_p}{\beta_p^2 - \alpha_n^2} \left[ \operatorname{tgh}(\alpha_n \theta_0/2) / \alpha_n - \operatorname{tgh}(\beta_p \theta_0/2) / \beta_p \right]$$

A integral (V-43) tem para resultado o que segue:

$$\begin{aligned}
 \int_{r_i}^1 \int_0^{\theta_0/2} T u r dr d\theta &= \frac{1}{2} \sum_{p,k=1}^{\infty} \{A_k \left[ (2/\pi) \right. \\
 &\sum_{n=1}^{\infty} Q_{pn} S_{pn} / (2p-1) + \bar{C}_p \operatorname{tgh} (\beta_p \theta_0/2) / \\
 &\beta_p + (4 \beta_e/\pi) (-1)^{p+1} (\theta_0/2 - \operatorname{tgh} (\beta_p \theta_0/2)/\beta_p) / \\
 &(\beta_p (2p-1)) \left. \right] - (A_k - C_k) \left[ (2/\pi) \sum_{n=1}^{\infty} R_{pnk} S_{pn} / \right. \\
 &(2p-1) + \bar{C}_p R_{pk} + (4 \beta_e/\pi) (-1)^{p+1} (\operatorname{tgh} (\alpha_k \theta_0/2) / \\
 &\alpha_k - R_{pk}) / (\beta_p (2p-1)) \left. \right] \} S_{pk} \quad (V-54)
 \end{aligned}$$

onde,

$$P_{nk} = \begin{cases} [\alpha_k \operatorname{tgh} (\alpha_n \theta_0/2) - \alpha_n \operatorname{tgh} (\alpha_k \theta_0/2)] / (\alpha_k^2 - \alpha_n^2) & ; \\ & n \neq k \\ \frac{1}{2} \left[ \operatorname{tgh} (\alpha_n \theta_0/2) / \alpha_n + \frac{\theta_0}{2} (1 - \operatorname{tgh}^2 (\alpha_n \theta_0/2)) \right] & ; \\ & n = k \end{cases}$$

$$R_{pk} = [\beta_p \operatorname{tgh} (\beta_p \theta_0/2) - \alpha_k \operatorname{tgh} (\alpha_k \theta_0/2)] / (\beta_p^2 - \alpha_n^2)$$

$$R_{pnk} = - \frac{A_n}{\beta_p} \left( \tanh (\alpha_k \theta_0/2) / \alpha_k - R_{pk} \right) + \\ + (A_n - C_n) \frac{\beta_p}{\beta_p^2 - \alpha_n^2} (P_{nk} - R_{pk}) \quad .$$

Estas séries são usadas para o cálculo dos números de Nusselt e dos fluxos médios definidos anteriormente.

Pelo teorema de valor médio, uma primeira estimativa de  $T_b$  pode ser avaliada (vide apêndice C); deste modo,  $T_b$  vem obedecer a desigualdade,

$$0 \leq T_b \leq \max T(D) \quad (V-55)$$

onde  $D$  é a região do semi-setor considerado.

Para efeito de comparação, o seguinte número de Nusselt terá utilidade:

$$\overline{Nu}_{Dh} = (\bar{q}_a S_a - \beta_e \theta_0/2) D_h / (S_t (T_b - \bar{T}_f)) \quad (V-56)$$

onde neste caso,

$$\bar{T}_f = \frac{1}{S_t} \int_{\partial D} T \, ds = \frac{1}{S_t} \int_0^{\theta_0/2} T(1, \theta) \, d\theta \quad ; \quad (V-57)$$

$$S_t = r_i \theta_0/2 + r_a - r_i + \theta_0/2$$

Por (V-46) tem-se ainda a equação,

$$\overline{\overline{NU}}_{Dh} = u_m A D_h / (S_t (T_b - \overline{T}_f)) \quad (V-58)$$

Cada número de Nusselt definido tem significado e interpretação particulares dentro do contexto, como será visto nos capítulos VI e VII.

Adicionalmente, uma verificação direta das equações (VI-50)-(VI-54) nos permite afirmar, a exemplo do capítulo IV, que os números de Nusselt aqui definidos, também dependem somente da geometria da secção transversal do duto aletado e da natureza das condições de contorno.



## CAPÍTULO VI

## RESULTADOS E COMPARAÇÕES

VI.1 - Resultados do Escoamento Laminar

Para compreender certos aspectos locais do comportamento da distribuição da velocidade no duplo-tubo aletado, faz-se necessária uma visualização de algumas soluções da equação integral (III-22). Uma família típica de tais soluções pode ser vista na figura (VI-1). Essas soluções foram aproximadas pelo sistema linear (III-36) para valores de  $N$  entre 15 e 31.

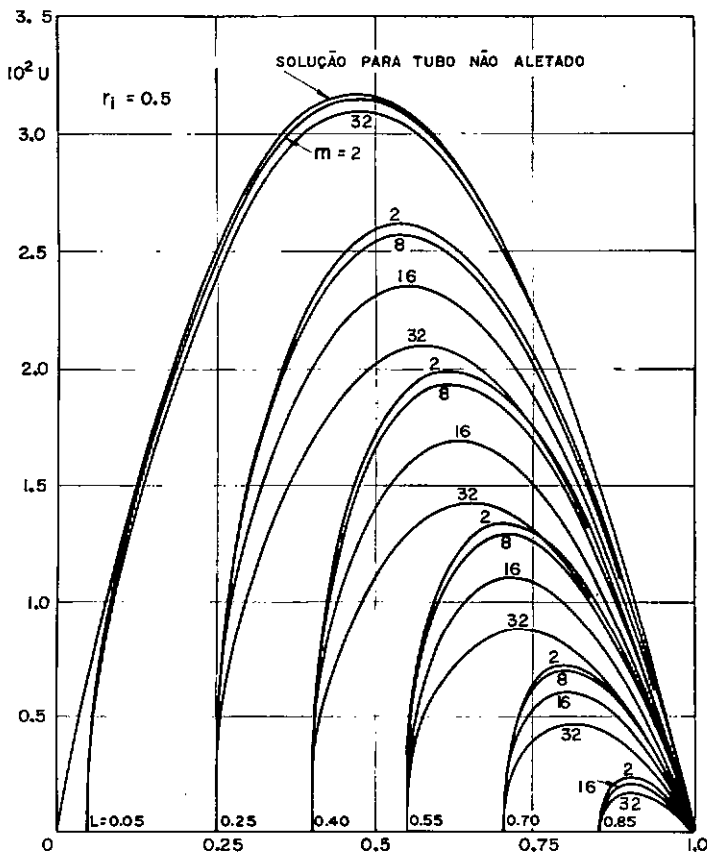


Fig. (VI-1) - Soluções da equação integral (III-22) no intervalo  $r_a \leq r \leq 1,0$  para  $r_i = 0,5$  e para vários valores de  $m$  e  $L$ .

Como pode ser observado nesta figura, existe um limite superior para cada  $r_i$ , o qual é a própria solução do campo de velocidade relativa ao duplo-tubo não-aletado ( $L = 0$ ).

Como pode ser visto nas figuras (VI-2) e (VI-3), existe igualmente um limite inferior para cada  $L$  fixo, quando  $m$  cresce indefinidamente. Por estas figuras, tal limite inferior parece ser a própria solução de um duplo-tubo não-aletado equivalente, cuja relação de raios é  $r_a$ , isto é, o raio correspondente à extremidade das aletas.

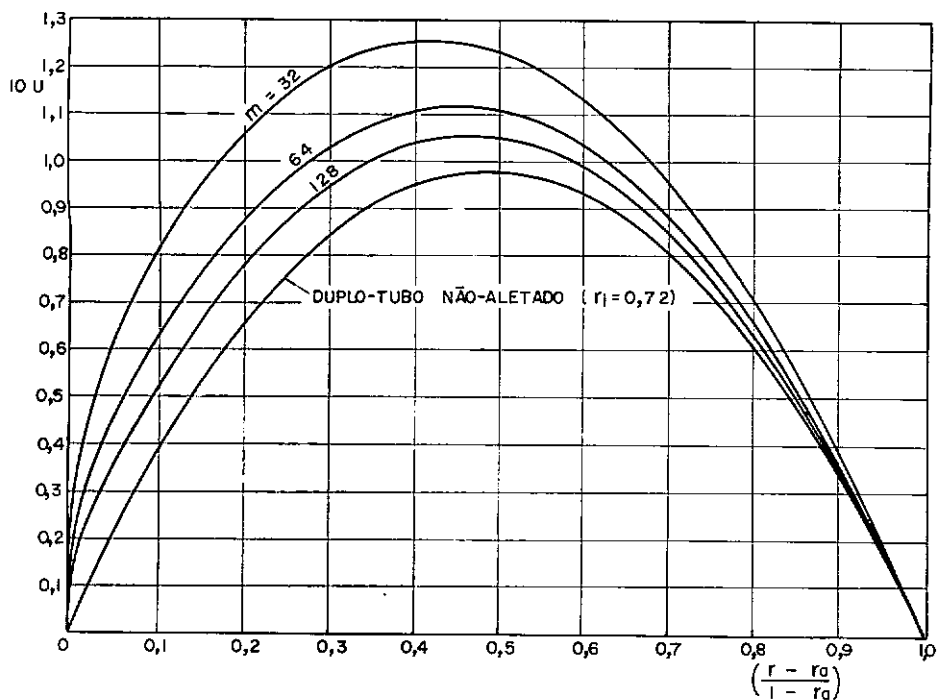


Fig. (VI-2) - Limite inferior das soluções da equação integral (III-22) para  $r_i = 0.3$  e  $L = 0.6$ .

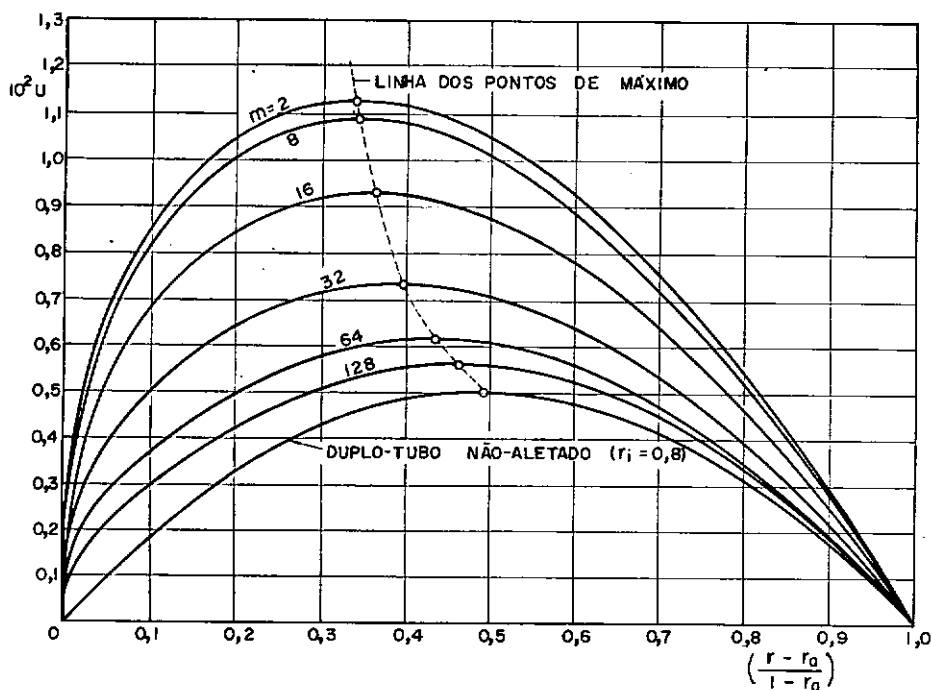


Fig. (VI-3) - Limite inferior das soluções da equação integral (III-22) para  $r_i = 0.5$  e  $L = 0.6$ .

Usando a equação (III-29), alguns padrões do campo de velocidade foram plotados; esses padrões foram calculados numericamente no computador e em seguida, por interpolação quadrática, as linhas isocinéticas foram construídas. Os resultados para  $r_i = 0,4$  e  $L = 0,6$  são vistos nas figuras (VI-4)-(VI-7) para números de aletas  $m$  iguais a 2, 4, 8 e 16.

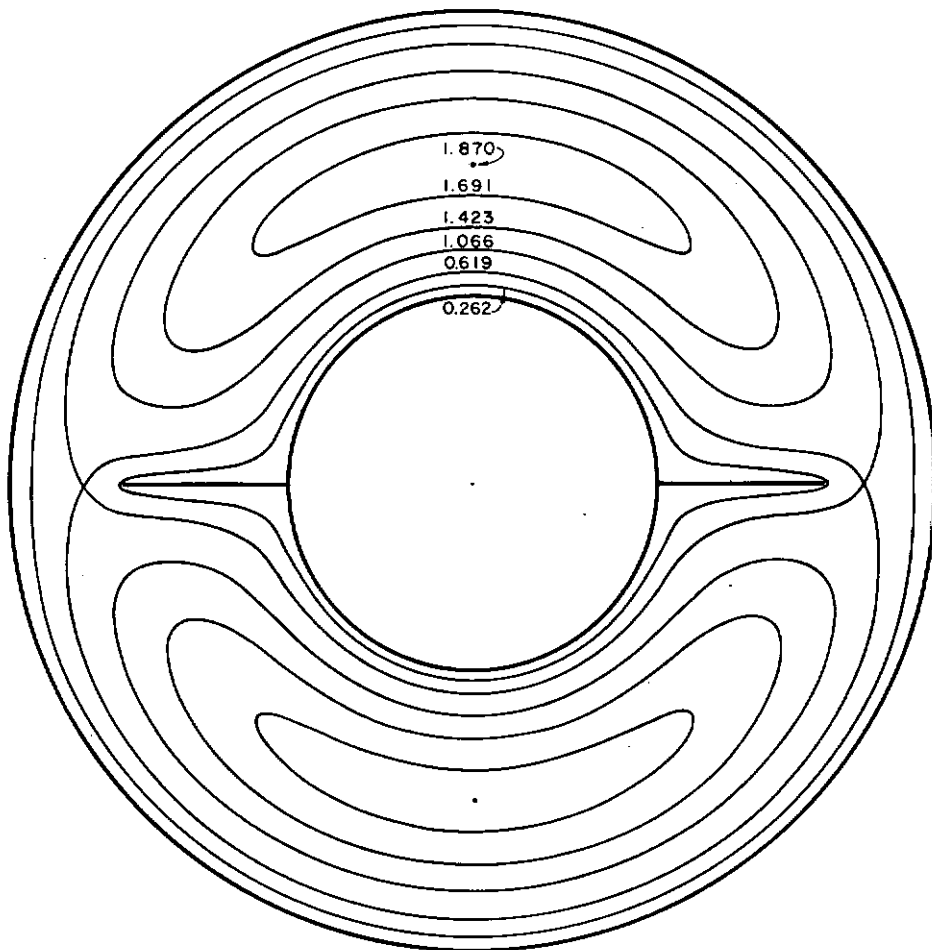


Fig. (VI-4) - Campo de velocidades  $u/u_m$  para  $r_i = 0,4$ ,  $L = 0,6$  e  $m = 2$ .

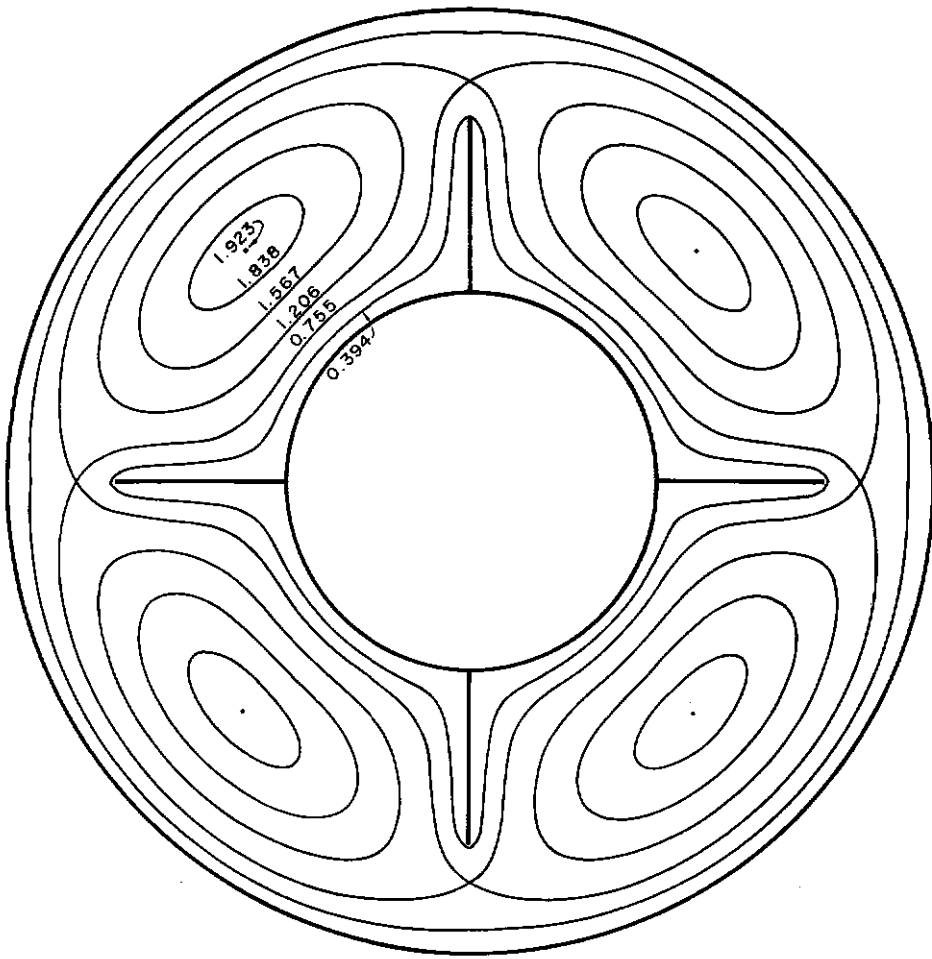


Fig. (VI-5) - Campo de velocidades  $u/u_m$  para  $r_i = 0,4$ ,  $L = 0,6$  e  $m = 4$ .

Para todos os cálculos efetuados, o erro de aproximação usando a solução obtida no capítulo III, não ultrapassou a tolerância de  $10^{-2}$ .

Esse erro, calculado pela equação (III-46) parece mostrar um critério razoavelmente preciso para testar o método de solução da equação integral (III-23), conforme mostra a figura (VI-8).

Nesta figura é plotado o erro de aproximação como fun-

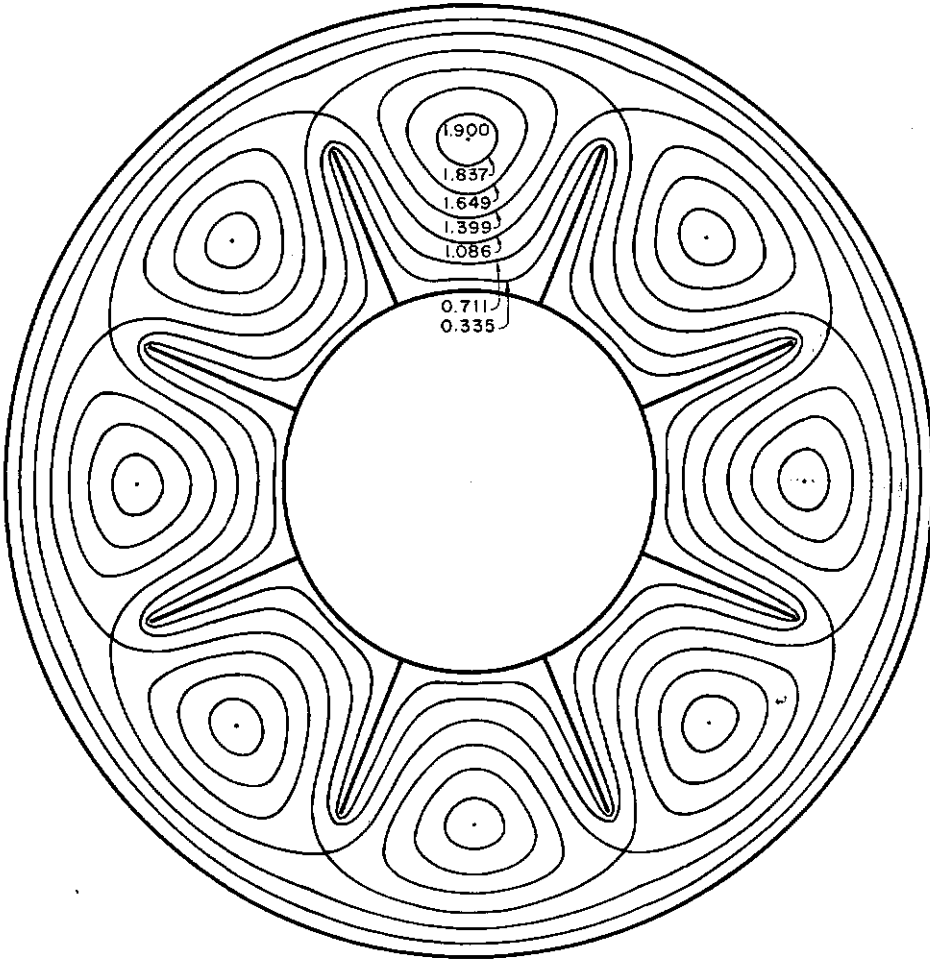


Fig. (VI-6) - Campo de velocidades  $u/u_m$  para  $r_i = 0,4$ ,  $L = 0,6$  e  $m = 8$ .

ção do número de aletas; o erro é calculado pela substituição dos coeficientes de Fourier  $C_n$  associados a soluções distintas da solução correspondente a  $m = 8$ . Como se pode observar, o erro relativo a  $m = 8$  aumenta de 20 a 150 vezes aproximadamente.

Curvas do fator de atrito também foram calculadas para várias relações de raios  $r_i$  no intervalo  $[0,2, 0,9]$ .

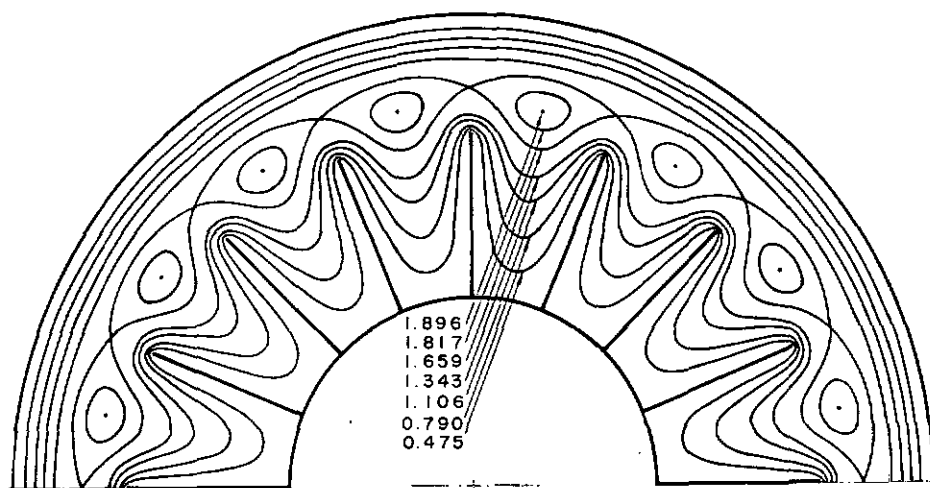


Fig. (VI-7) - Campo de velocidade  $u/u_m$  para  $r_i = 0,4$ ,  $L = 0,6$  e  $m = 16$ .

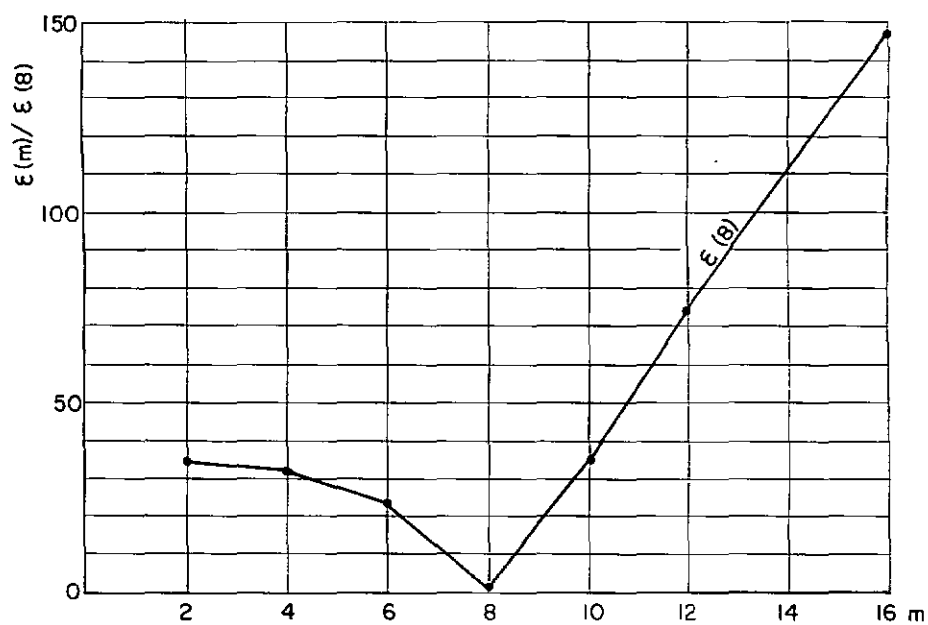


Fig. (VI-8) - Sensibilidade do erro de aproximação para  $r_i = 0,5$  e  $L = 0,6$ .

Nas figuras (VI-9)-(VI-16) são plotados na ordenada do lado esquerdo de cada gráfico os valores do produto  $f.Re_{De} (D_e/D_h)$  enquanto que na ordenada do lado direito, são plotados os valores de  $f.Re_{Dh}$ , como funções do número de aletas  $m$  para cada altura de aletas  $L$ .

Estes gráficos foram construídos com base nos valores numéricos das tabelas I a VIII, as quais foram calculadas através das equações (III-47) e (III-48).

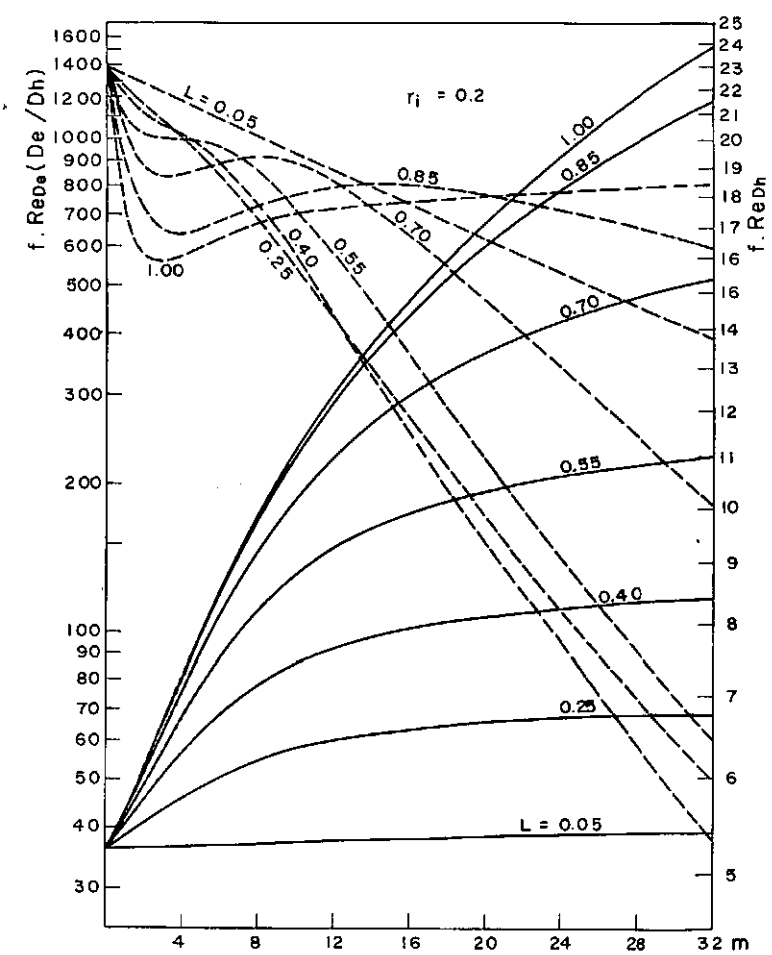


Fig. (VI-9)

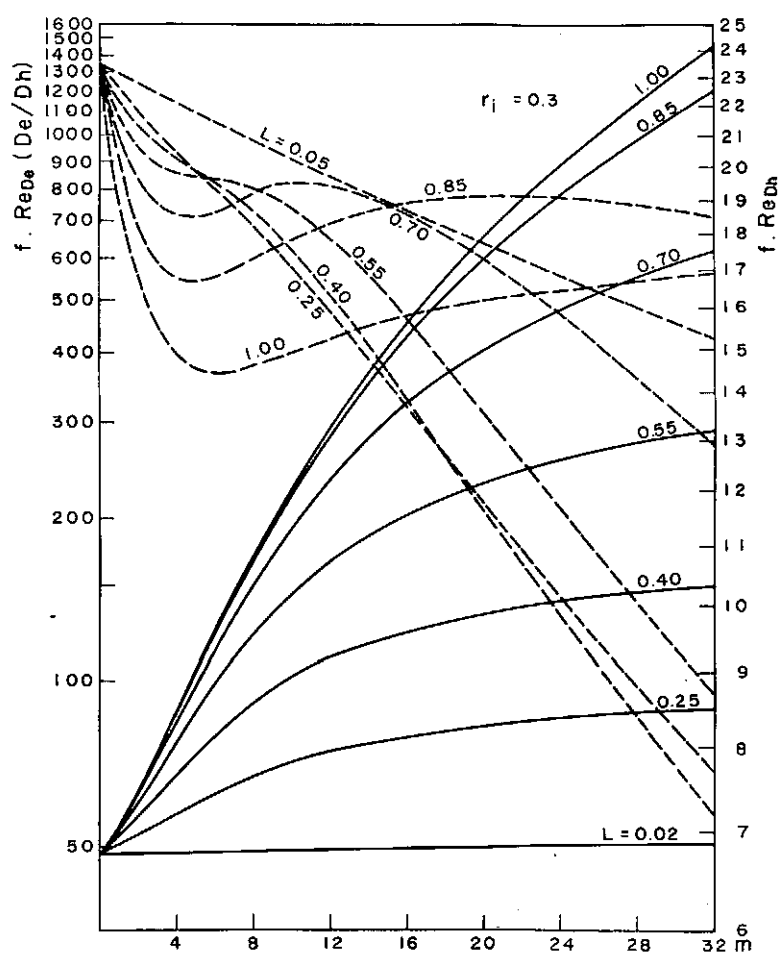


Fig. (VI-10)



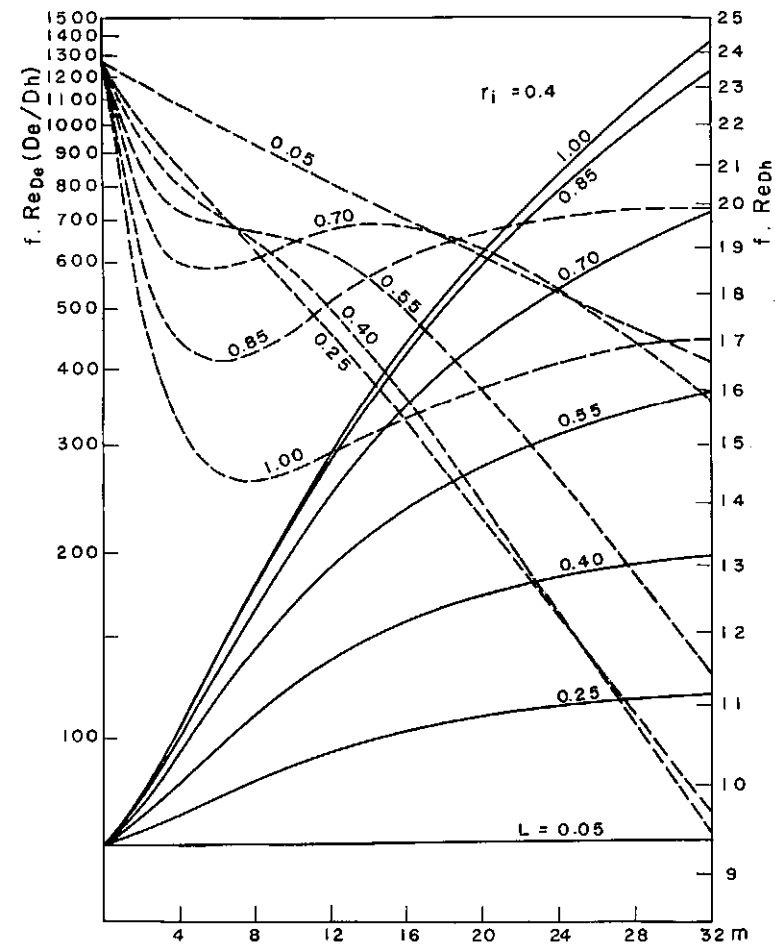


Fig. (VI-11)

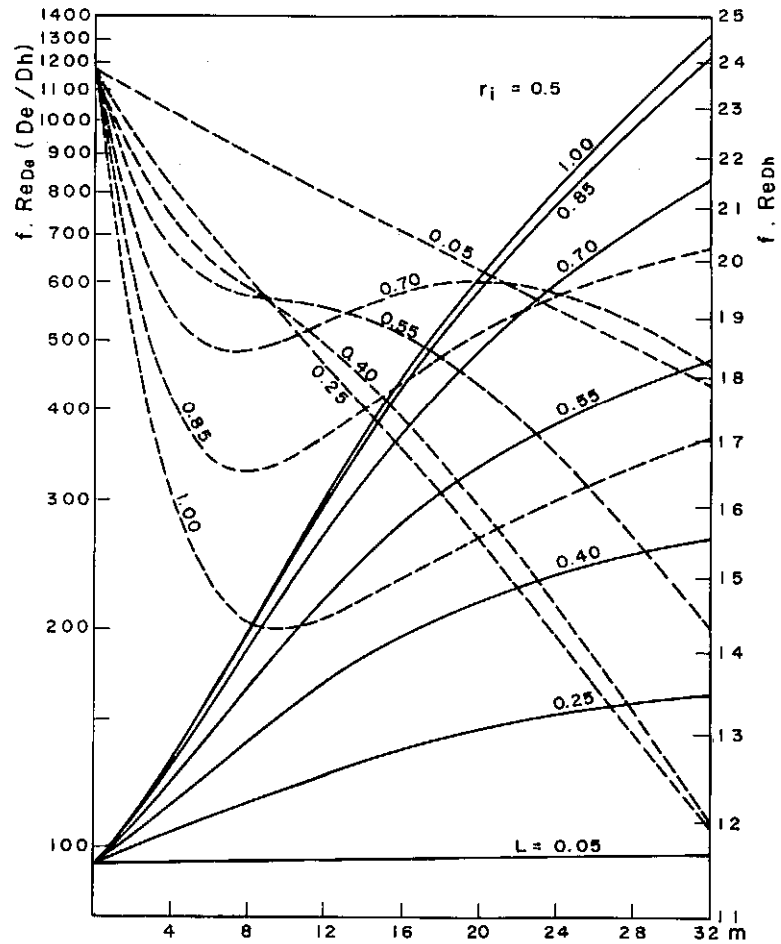


Fig. (VI-12)

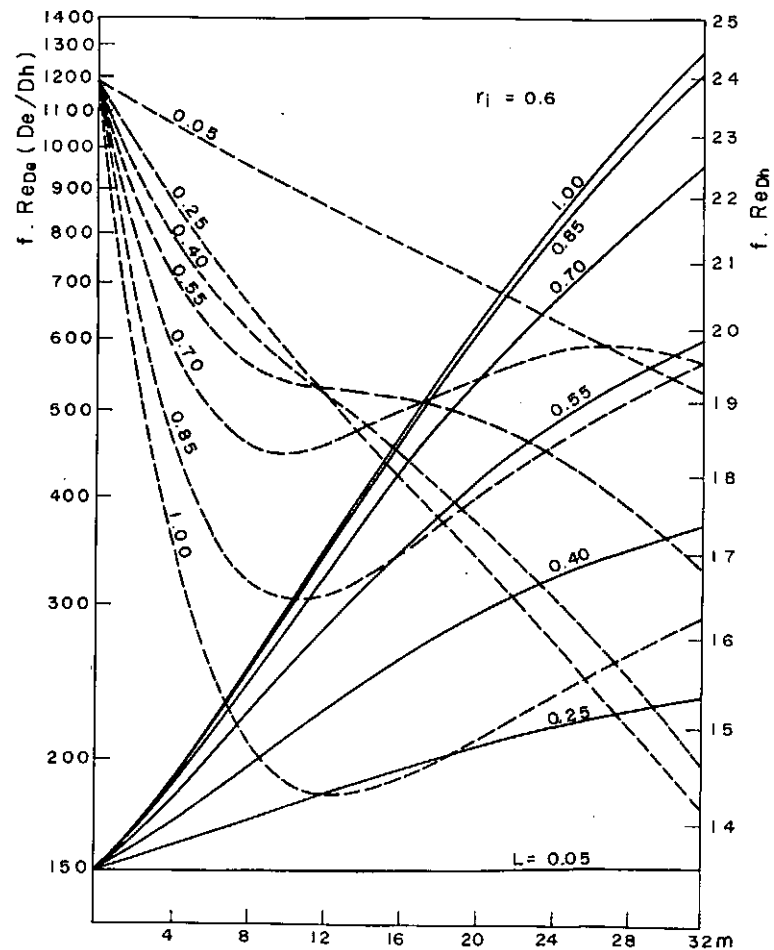


Fig. (VI-13)

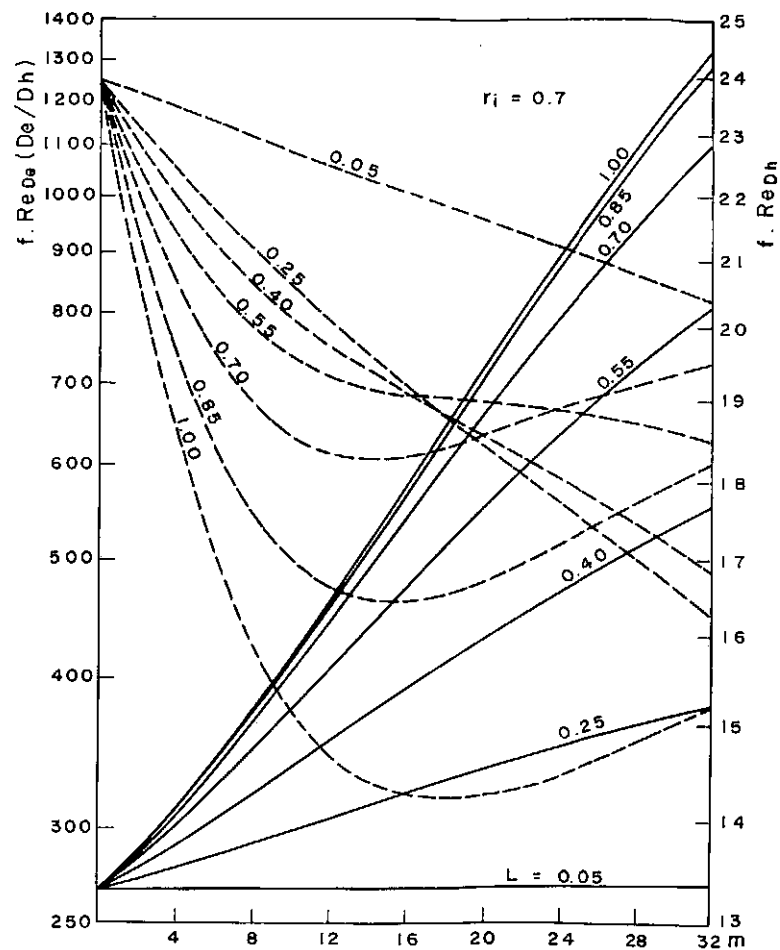


Fig. (VI-14)

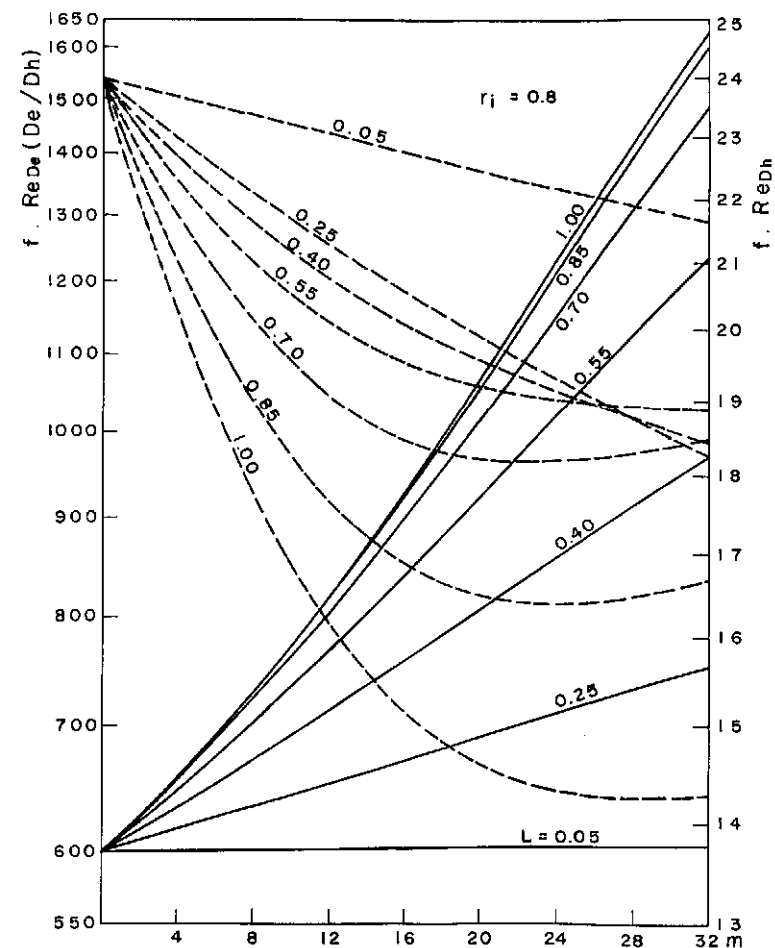


Fig. (VI-15)

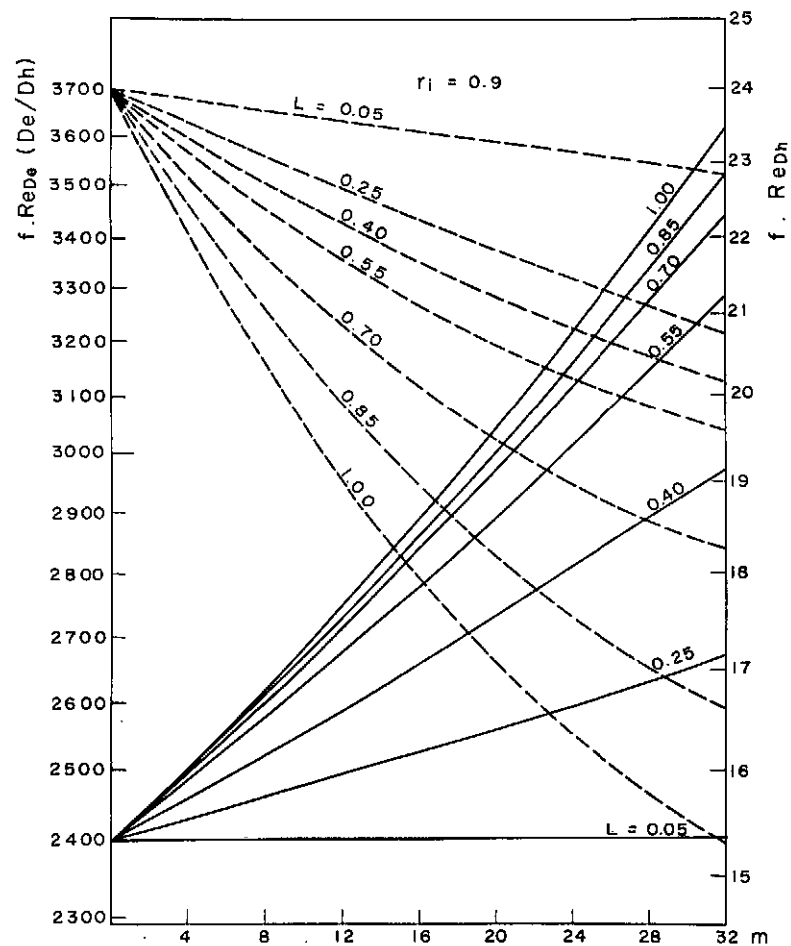


Fig. (VI-16)

$r_i = 0,2 \quad ; \quad f \cdot Re_{De} (De/Dh)_0 = 36,08$ 

$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	36,33	36,59	37,10	37,55	37,93	38,24	38,48	38,66	38,87
0,25	40,84	46,29	54,99	60,07	63,09	65,04	66,38	67,36	68,10
0,40	44,91	56,77	78,11	91,87	100,60	106,46	110,60	113,67	116,02
0,55	48,21	67,25	110,37	145,77	172,07	191,54	206,22	217,50	226,41
0,70	50,20	74,85	145,12	223,54	298,75	366,45	425,46	476,35	519,83
0,85	50,92	77,97	165,12	285,55	432,09	598,95	780,94	973,06	1171,50
1,00	51,03	78,44	168,63	298,71	466,62	672,05	914,94	1195,20	1513,00

 $r_i = 0,2 \quad ; \quad (f \cdot Re_{Dh})_0 = 23,09$ 

$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	22,30	21,55	20,17	18,91	17,74	16,65	15,64	14,71	13,84
0,25	21,37	20,16	17,34	14,35	11,81	9,80	8,22	6,98	5,99
0,40	21,00	20,25	17,73	14,43	11,58	9,36	7,74	6,38	5,38
0,55	20,23	20,00	18,89	16,19	13,39	11,03	9,13	7,64	6,46
0,70	19,09	18,85	19,39	18,48	16,77	14,87	13,07	11,45	10,05
0,85	17,60	16,84	17,71	18,25	18,31	18,06	17,59	17,01	16,35
1,00	16,09	14,69	14,83	15,20	15,46	15,64	17,77	15,87	15,95

$r_i = 0,3 \quad ; \quad f \cdot Re_{De}(De/Dh)_0 = 47,88$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	48,07	48,26	48,65	49,02	49,38	49,71	50,01	50,27	50,51
0,25	52,22	57,23	67,03	74,38	79,39	82,83	85,28	87,09	88,47
0,40	56,14	67,13	91,18	110,40	124,03	133,70	140,76	146,08	150,20
0,55	59,33	76,56	121,85	166,10	202,70	231,68	254,50	272,66	287,26
0,70	61,25	83,02	150,76	235,24	323,15	407,60	485,42	555,43	617,79
0,85	61,95	85,57	165,54	281,74	427,13	596,53	785,48	989,71	1205,5
1,00	62,05	85,94	167,92	290,54	450,38	646,44	878,41	1146,2	1449,7
$r_i = 0,3 \quad ; \quad (f \cdot Re_{Dh})_0 = 23,46$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	22,77	22,11	20,88	19,75	18,71	17,75	16,86	16,02	15,24
0,25	21,71	20,44	18,21	15,90	13,69	11,77	10,16	8,82	7,71
0,40	21,27	20,26	18,63	16,28	13,82	11,76	9,85	8,40	7,21
0,55	20,58	19,78	19,40	17,92	15,79	13,63	11,72	10,08	8,72
0,70	19,52	18,57	19,23	19,23	18,57	17,28	15,80	14,32	12,93
0,85	18,20	16,73	17,30	18,28	18,86	19,08	19,04	18,80	18,42
1,00	16,86	14,82	14,63	15,24	15,76	16,15	16,46	16,70	16,89

Quadro II

$r_i = 0,4 \quad ; \quad f.Re_{De}(De/D_h)_0 = 65,77$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	65,95	66,13	66,48	66,83	67,19	65,53	67,86	68,17	68,47
0,25	70,05	74,87	85,23	94,63	102,14	107,88	112,88	115,58	118,21
0,40	74,02	84,45	109,76	134,22	154,26	169,80	181,79	191,14	198,57
0,55	77,24	93,23	138,23	189,44	237,43	278,93	313,79	342,79	366,88
0,70	79,18	99,02	162,11	248,14	345,37	445,50	543,37	636,22	722,53
0,85	79,91	101,31	173,42	282,69	423,85	592,55	785,13	998,22	1228,5
1,00	80,00	101,58	174,85	287,70	437,10	621,41	839,91	1092,3	1378,4
$r = 0,4 \quad ; \quad (f.Re_{Dh})_0 = 23,68$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	23,11	22,56	21,52	20,56	19,66	18,82	18,04	17,30	16,61
0,25	22,10	20,87	18,94	17,15	15,39	13,72	12,22	10,89	9,73
0,40	21,66	20,48	19,15	17,64	15,83	13,98	12,27	10,77	9,48
0,55	21,02	19,86	19,43	18,88	17,65	16,06	14,40	12,83	11,42
0,70	20,10	18,66	18,76	19,40	19,46	18,94	18,05	16,97	15,81
0,85	18,96	17,02	16,80	17,79	18,72	19,36	19,75	19,92	19,93
1,00	17,78	15,31	14,39	14,89	15,53	16,09	16,55	16,93	17,24

Quadro III

$r_i = 0,5 \quad ; \quad f, Re_{De}(De/Dh)_0 = 95,25$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	95,42	95,60	95,94	96,30	96,66	97,02	97,37	97,72	98,06
0,25	99,71	104,60	115,42	126,42	136,50	145,20	152,38	158,33	163,21
0,40	103,92	114,30	140,11	168,60	195,48	218,89	238,43	254,63	268,02
0,55	107,35	122,93	166,63	221,76	279,97	335,61	386,25	431,11	470,37
0,70	109,43	128,49	186,92	270,85	372,59	484,70	601,26	718,01	832,12
0,85	110,20	130,64	195,68	295,64	428,02	589,60	777,48	988,79	1221,3
1,00	110,29	130,90	196,78	299,03	436,49	607,54	811,16	1046,7	1313,9
$r_i = 0,5 \quad ; \quad (f.Re_{Dh})_0 = 23,81$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	23,36	22,92	22,07	21,23	20,53	19,82	19,15	18,52	17,92
0,25	22,48	21,37	19,64	18,18	16,82	15,49	14,22	13,03	11,94
0,40	22,07	20,88	19,52	18,50	17,33	16,01	14,63	13,29	12,05
0,55	21,52	20,20	19,36	19,18	18,72	17,86	16,76	15,53	14,30
0,70	20,74	19,09	18,39	18,93	19,45	19,61	19,41	18,93	18,24
0,85	19,77	17,64	16,51	17,05	17,93	18,75	19,41	19,89	20,22
1,00	18,76	16,13	14,39	14,47	14,99	15,58	16,12	16,59	17,00

Quadro IV

$r_i = 0,6 \quad ; \quad f \cdot Re_{De} (De/Dh)_0 = 149,36$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	149,52	149,68	150,00	150,34	150,67	151,02	151,36	151,71	152,06
0,25	154,26	159,50	170,98	183,28	195,60	207,35	218,16	227,81	236,36
0,40	159,00	169,97	196,49	227,75	260,56	292,44	322,00	348,42	371,94
0,55	162,88	179,08	222,04	278,54	343,62	412,14	480,27	545,28	606,00
0,70	165,22	184,85	240,18	319,82	421,02	538,84	668,33	804,95	945,24
0,85	166,10	187,06	247,63	338,58	460,55	611,93	790,63	994,69	1222,2
1,00	166,21	187,34	248,61	341,16	466,35	623,49	811,65	1030,10	1278,3

$r_i = 0,6 \quad ; \quad (f \cdot Re_{Dh})_0 = 23,90$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	23,55	23,20	22,54	21,91	21,31	20,73	20,18	19,65	19,14
0,25	22,83	21,90	20,36	19,11	18,01	16,98	15,99	15,03	14,12
0,40	22,48	21,40	19,97	19,08	18,30	17,47	16,56	15,58	14,60
0,55	22,03	20,75	19,49	19,16	19,02	18,75	18,28	17,61	16,82
0,70	21,40	19,78	18,39	18,38	18,83	19,29	19,58	19,66	19,53
0,85	20,62	18,54	16,68	16,50	16,99	17,69	18,38	19,00	19,53
1,00	19,79	17,25	14,85	14,28	14,44	14,85	15,34	15,82	16,26

Quadro V



$r_i = 0,7 \quad ; \quad f \cdot Re_{De} (De/Dh)_0 = 266,10$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	266,30	266,49	266,89	267,26	267,65	268,05	268,45	268,86	269,27
0,25	271,99	278,15	291,30	305,48	320,40	335,50	350,44	364,96	378,76
0,40	277,72	290,40	319,49	353,74	391,94	432,22	473,00	513,04	551,37
0,55	282,44	300,91	346,02	403,86	473,50	551,93	636,03	722,97	810,00
0,70	285,29	307,44	363,73	440,34	538,65	657,22	792,71	943,05	1104,1
0,85	286,36	309,95	370,81	455,75	568,15	708,52	876,26	1069,7	1288,6
1,00	286,50	310,27	371,74	457,81	572,27	716,01	888,88	1090,5	1320,3
$r_i = 0,7 \quad ; \quad (f \cdot Re_{Dh})_v = 23,95$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	23,70	23,45	22,97	22,51	22,06	21,63	21,20	20,80	20,40
0,25	23,16	22,44	21,19	20,13	19,22	18,40	17,64	16,92	16,23
0,40	22,89	22,00	20,66	19,75	19,08	18,52	17,97	17,40	16,79
0,55	22,55	21,45	20,02	19,34	19,08	18,98	18,87	18,70	18,43
0,70	22,07	20,66	18,94	18,29	18,26	18,53	18,88	19,23	19,48
0,85	21,47	19,67	17,47	16,58	16,43	16,68	17,12	17,63	18,15
1,00	20,84	18,62	15,93	14,70	14,28	14,29	14,51	14,83	15,18

Quadro VI

$r_i = 0,8 \quad ; \quad f \cdot Re_{De} (De/Dh)_0 = 599,51$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	599,75	600,00	600,53	601,03	601,54	602,00	602,54	603,09	603,59
0,25	607,53	615,77	632,98	651,11	670,38	690,09	710,47	731,33	752,22
0,40	615,46	632,30	668,86	709,80	755,42	805,18	858,25	913,57	970,82
0,55	621,91	646,05	700,42	764,60	839,93	926,67	1023,5	1128,9	1241,3
0,70	625,85	654,61	720,88	801,81	900,41	1018,27	1155,77	1311,2	1484,8
0,85	627,33	657,88	728,82	816,60	925,31	1057,6	1214,6	1397,0	1604,3
1,00	627,54	658,33	729,94	818,66	928,85	1063,3	1223,5	1409,9	1622,7
$r_i = 0,8 \quad ; \quad (f \cdot Re_{Dh})_0 = 23,98$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	23,82	23,66	23,35	23,05	22,76	22,46	22,18	21,90	21,63
0,25	23,46	22,98	22,08	21,29	20,58	19,93	19,34	18,79	18,28
0,40	23,28	22,65	21,59	20,75	20,09	19,57	19,13	18,75	18,40
0,55	23,05	22,24	20,98	20,10	19,54	19,21	19,03	18,93	18,86
0,70	22,73	21,68	20,09	19,06	18,48	18,22	18,19	18,29	18,49
0,85	22,33	20,97	18,94	17,64	16,87	16,50	16,39	16,47	16,67
1,00	21,89	20,21	17,74	16,14	15,15	14,59	14,32	14,24	14,28

$r_i = 0,9 \quad ; \quad f \cdot Re_{De} (De/D_h)_0 = 2399,5$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$									
0,05	2399,9	2400,3	2401,0	2401,7	2402,4	2403,2	2403,9	2405,1	2405,2
0,25	2414,7	2430,1	2461,5	2493,6	2526,3	2560,1	2595,9	2631,7	2668,1
0,40	2429,0	2458,9	2521,5	2587,6	2657,3	2728,9	2805,7	2890,3	2974,8
0,55	2440,9	2484,0	2574,6	2671,4	2776,2	2888,15	3012,2	3144,5	3284,5
0,70	2446,3	2495,0	2598,5	2710,7	2832,7	2967,0	3112,9	3274,3	3449,7
0,85	2448,4	2499,3	2607,8	2726,0	2855,3	2997,8	3154,5	3327,4	3516,3
1,00	2451,3	2505,4	2621,1	2747,9	2887,6	3042,17	3213,6	3403,9	3614,4
$r_i = 0,9 \quad ; \quad f \cdot (Re_{Dh})_0 = 23,99$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$									
0,05	23,92	23,84	23,69	23,54	23,39	23,25	23,10	22,96	22,81
0,25	23,75	23,51	23,04	22,61	22,19	21,80	21,43	21,08	20,75
0,40	23,65	23,32	22,71	22,17	21,67	21,22	20,82	20,49	20,17
0,55	23,53	23,10	22,33	21,66	21,09	20,59	20,20	19,87	19,59
0,70	23,35	22,76	21,72	20,83	20,08	19,47	18,96	18,56	18,24
0,85	23,15	22,37	21,02	19,88	18,94	18,16	17,52	17,01	16,59
1,00	22,95	22,00	20,38	19,05	17,96	17,07	16,35	15,77	15,32

Quadro VIII

## VI.2 - Resultados da Transferência de Calor para Fluxo Prescrito

Uma análise qualitativa do desempenho do trocador, pode ser feita com base na distribuição de temperatura na secção transversal do duto, isto é, na representação bi-dimensional da solução da equação diferencial da energia (IV-40). Pelo fato de valer a relação,

$$(T^* - T_b^*) / (T_f^* - T_b^*) = (T - T_b) / (T_f - T_b) \quad (\text{VI-1})$$

é mais apropriado representar graficamente a distribuição desta relação ao invés de representar  $(T^* - T_m^*) / (q_r^* r_e^* / k)$ .

Nas figuras (VI-17)-(VI-26), são representados vários padrões de distribuição de temperatura, calculados pelas equações (IV-40), (IV-52) e (IV-54), onde o efeito do fluxo externo, expresso pelo parâmetro  $W_e$  é levado em consideração.

As curvas isotérmicas foram evoluídas pelo mesmo procedimento utilizado na construção dos padrões de distribuição de velocidade. Em todos os casos examinados foi considerado que  $\beta_a = 0,5\beta_i$ , isto é,  $W_a = 0,5$ .

O efeito do fluxo externo foi analisado somente para  $W_e = 0,5$  e  $W_e = -0,5$ ; os padrões apresentados a seguir, representam comportamento típico da distribuição da temperatura em função do fluxo externo. Os valores numéricos da derivada no tubo externo  $\beta_e$  foram calculados caso por caso; os resultados concordam muito bem com os valores numéricos prescritos pela equação,

$$\beta_e = W_e / r_i$$

Na construção dessas figuras, cuidado especial foi tomado para que as curvas correspondentes aos pontos "sela" pudessem ser localizadas. Em consequência, as linhas isotermas calculadas não correspondem a incrementos iguais de temperatura ao longo da secção transversal do duto, pelo menos para o caso particular de  $W_e = 0,5$ .

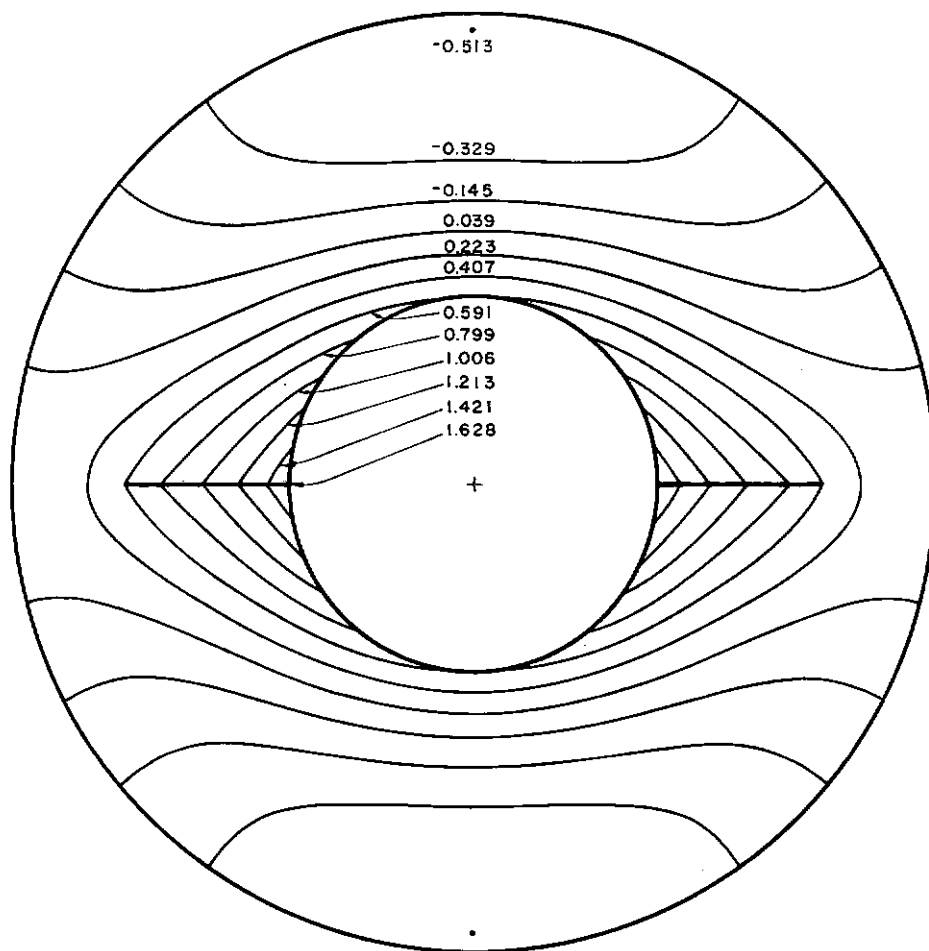


Fig. (VI-17) - Distribuição de temperatura  $(T - T_b)/(T_f - T_b)$  para  $r_i = 0,4$ ,  $L = 0,6$ ,  $m = 2$  e  $W_e = 0$ .

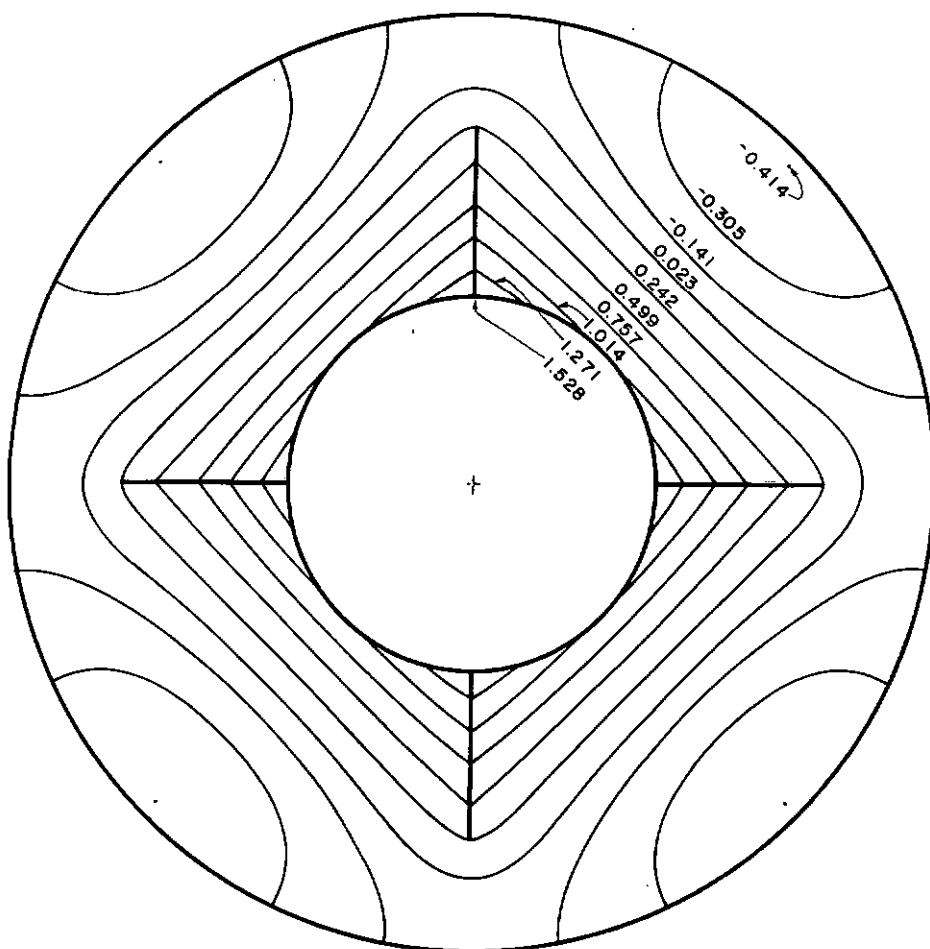


Fig. (VI-18) - Distribuição de temperatura  $(T - T_b)/(T_f - T_b)$  para  $r_i = 0,4$ ,  $m = 4$  e  $W_e = 0$ .

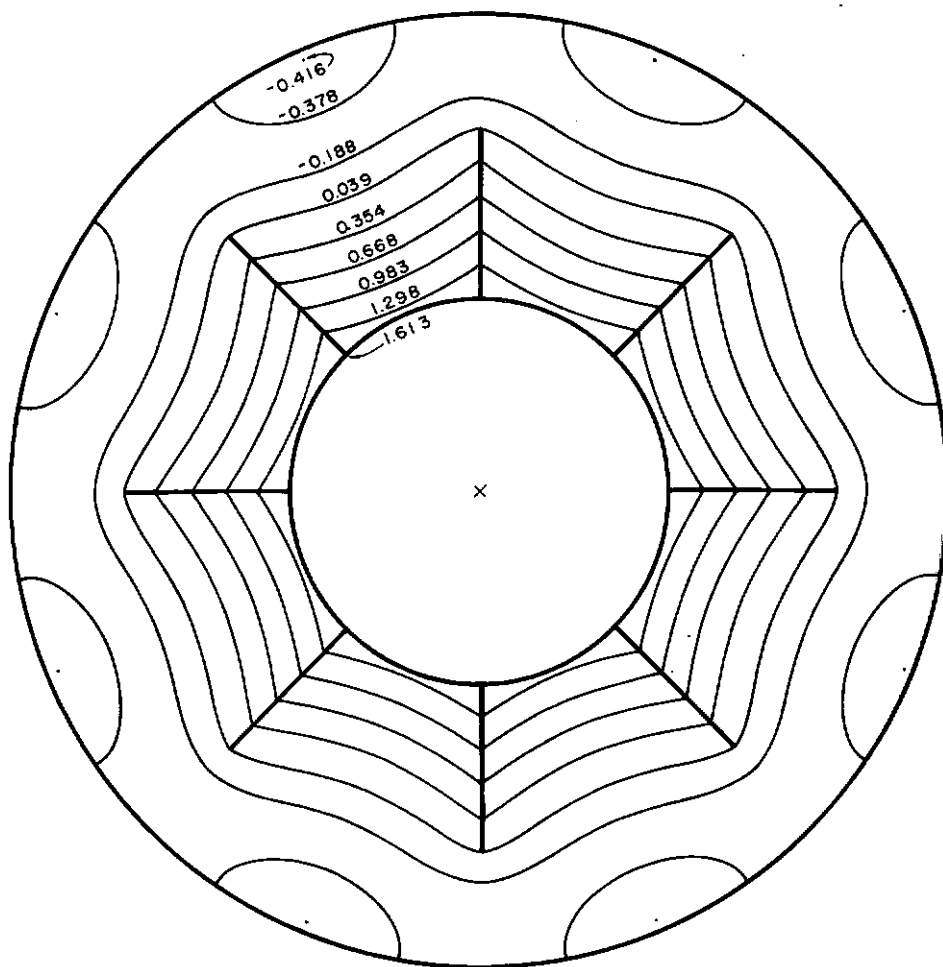


Fig. (VI-19) - Distribuição de temperatura  $(T - T_b)/(T_f - T_b)$  para  $r_i = 0,4$ ,  $m = 8$  e  $W_e = 0$ .

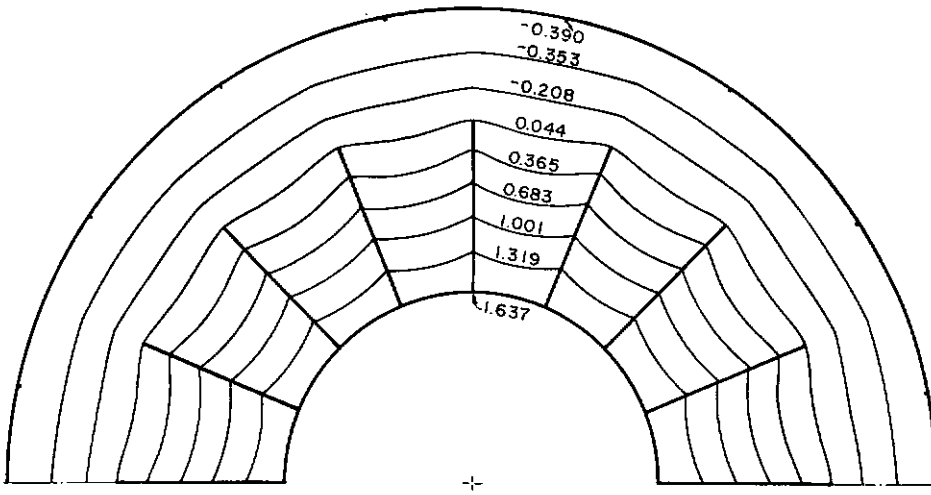


Fig. (VI-20) - Distribuição de temperatura  $(T - T_b)/(T_f - T_b)$  para  $r_i = 0,4$ ,  $L = 0,6$ ,  $m = 16$  e  $W_e = 0$

A análise do desempenho do duplo-tubo aletado, sob a condição de contorno estabelecida no capítulo IV, bem como a previsão das dimensões ótimas são feitas com base na dependência entre o número de Nusselt e as variáveis  $L$  e  $m$  para cada relação de raios  $r_i$  com  $W_e$  fixo.

No cálculo dos números de Nusselt de interesse, tanto a temperatura média na parede aletada  $T_f$ , quanto a temperatura média de mistura  $T_b$ , foram calculadas analiticamente por suas equações respectivas (C.18)-(C.20) e (C.21)-(C.29) do apêndice C.

As equações (C.18)-(C.20) contudo, não são apropriadas para o cálculo de  $T_b$ , para pequenas relações de raios  $r_i$  da ordem de 0,2 e para grandes valores de  $m$  em torno de 32. Nestes casos, a temperatura de mistura foi calculada por integração numérica em função dos dados obtidos das equações (III-39) e (VI-40) na região considerada.



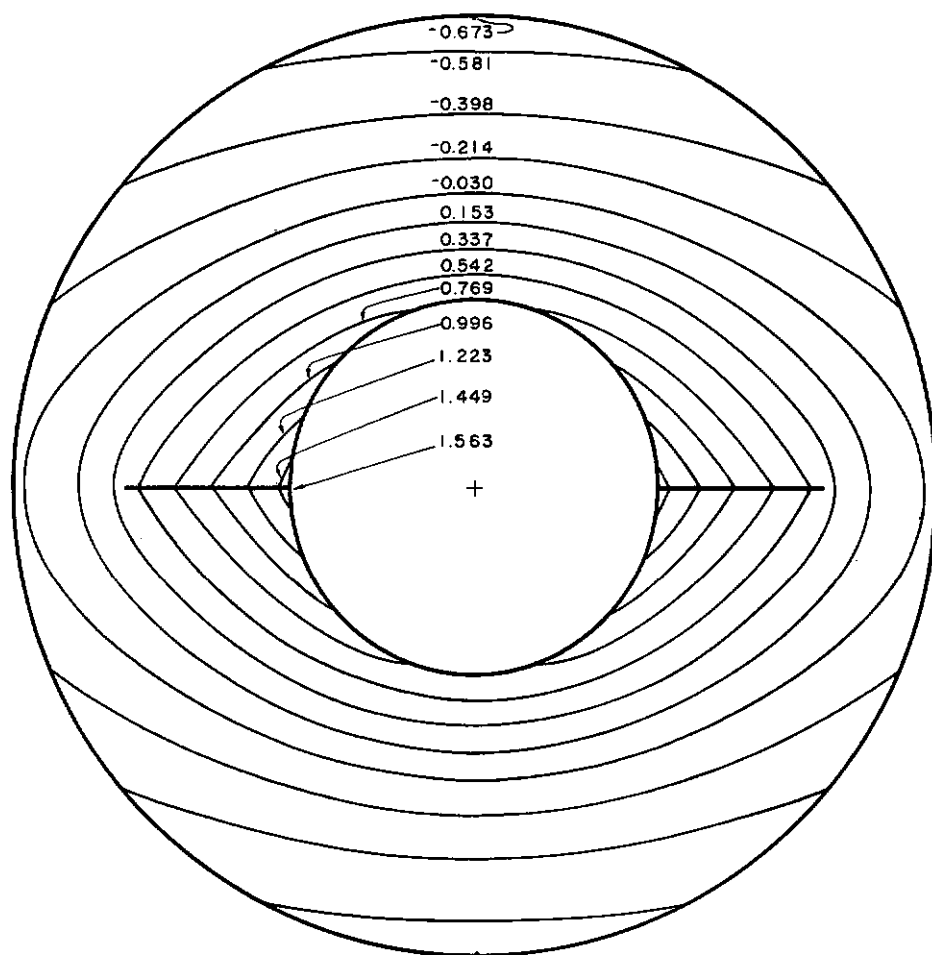


Fig. (VI-21) - Distribuição de temperatura  $(T - T_b)/(T_f - T_b)$  para  $r_i = 0,4$ ,  $L = 0,6$ ,  $m = 2$  e  $W_e = -0,5$ .

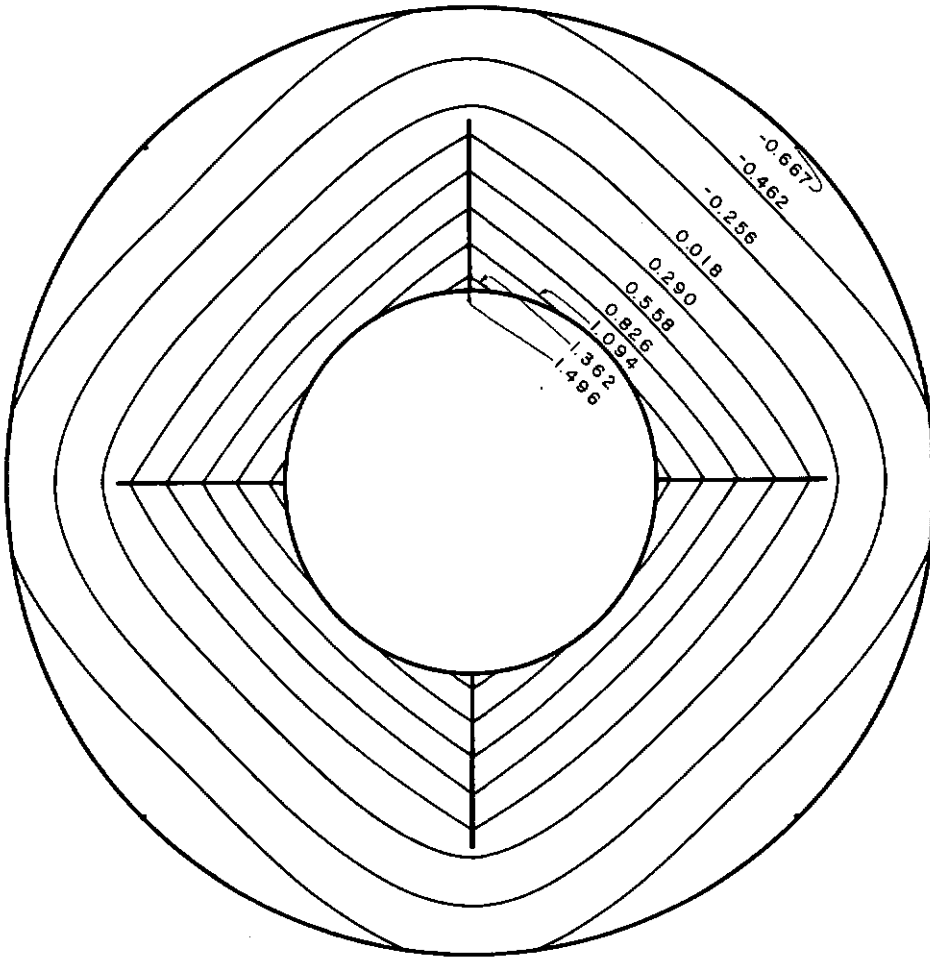


Fig. (VI-22) - Distribuição de temperatura  $(T - T_b)/(T_f - T_b)$  para  $r_i = 0,4$ ,  $L = 0,6$ ,  $m = 4$  e  $W_e = -0,5$ .

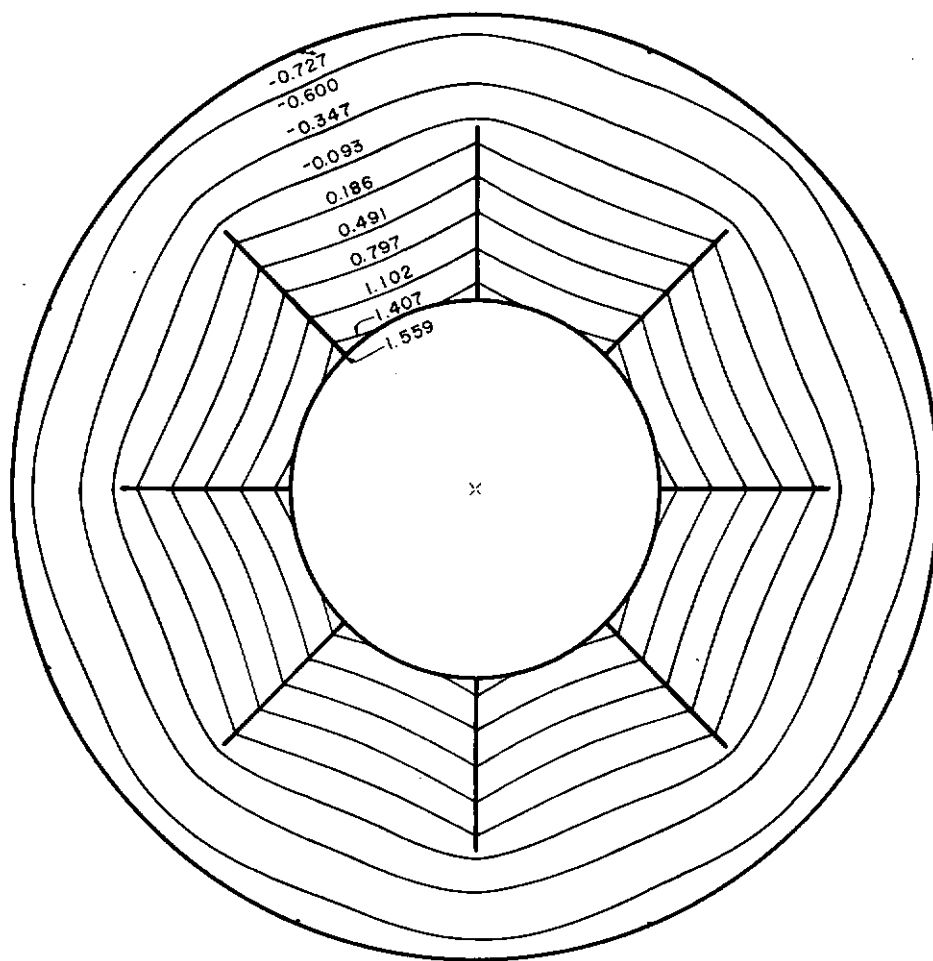


Fig. (VI-23) - Distribuição de temperatura  $(T - T_b)/(T_f - T_b)$  para  $r_i = 0,4$ ,  $L = 0,6$ ,  $m = 8$  e  $W_e = -0,5$ .

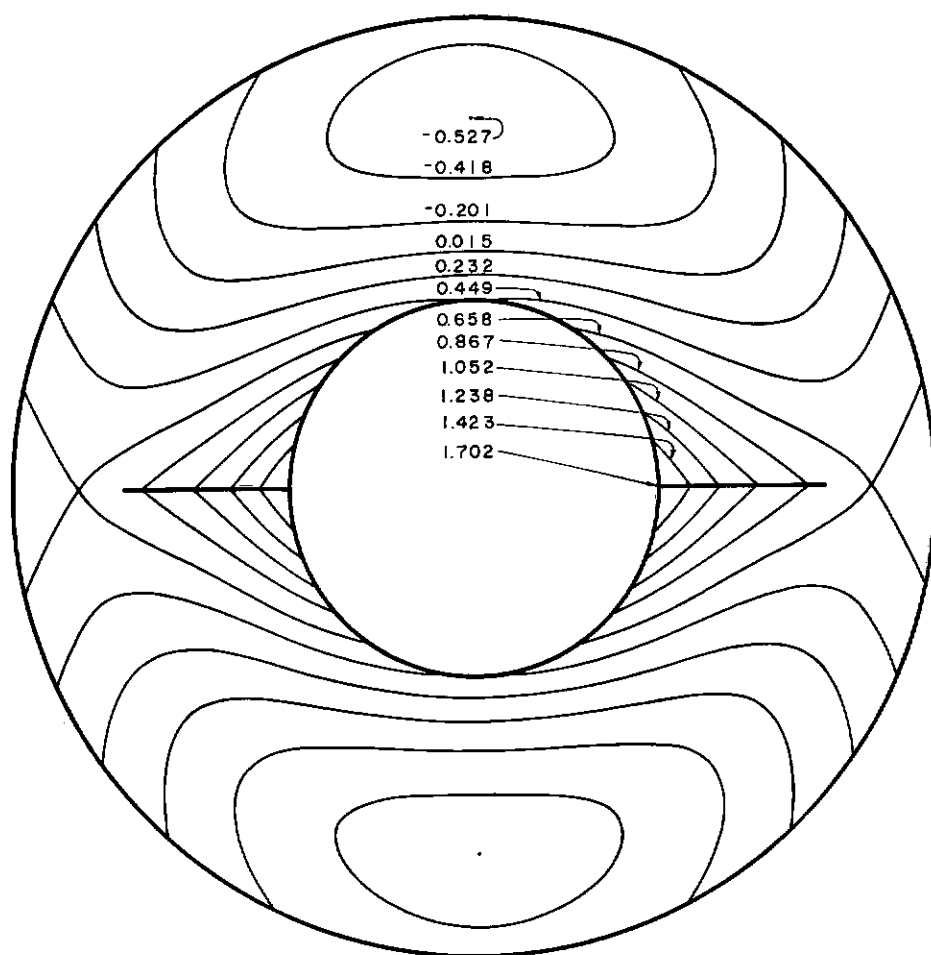


Fig. (VI-24) - Distribuição de temperatura  $(T - T_b)/(T_f - T_b)$  para  $r_i = 0,4$ ,  $L = 0,6$ ,  $m = 2$  e  $W_e = 0,5$

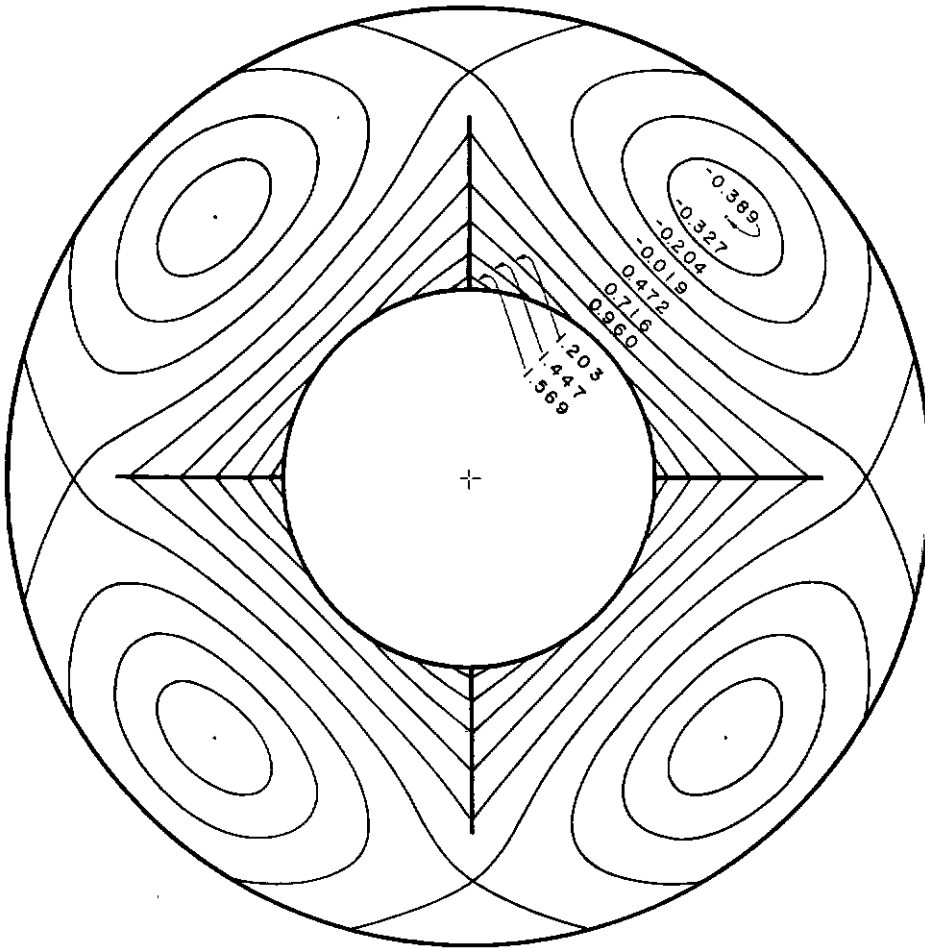


Fig. (VI-25) - Distribuição de temperatura  $(T - T_b)/(T_f - T_b)$  para  $r_i = 0,4$ ,  $L = 0,6$ ,  $m = 4$  e  $W_e = 0,5$ .

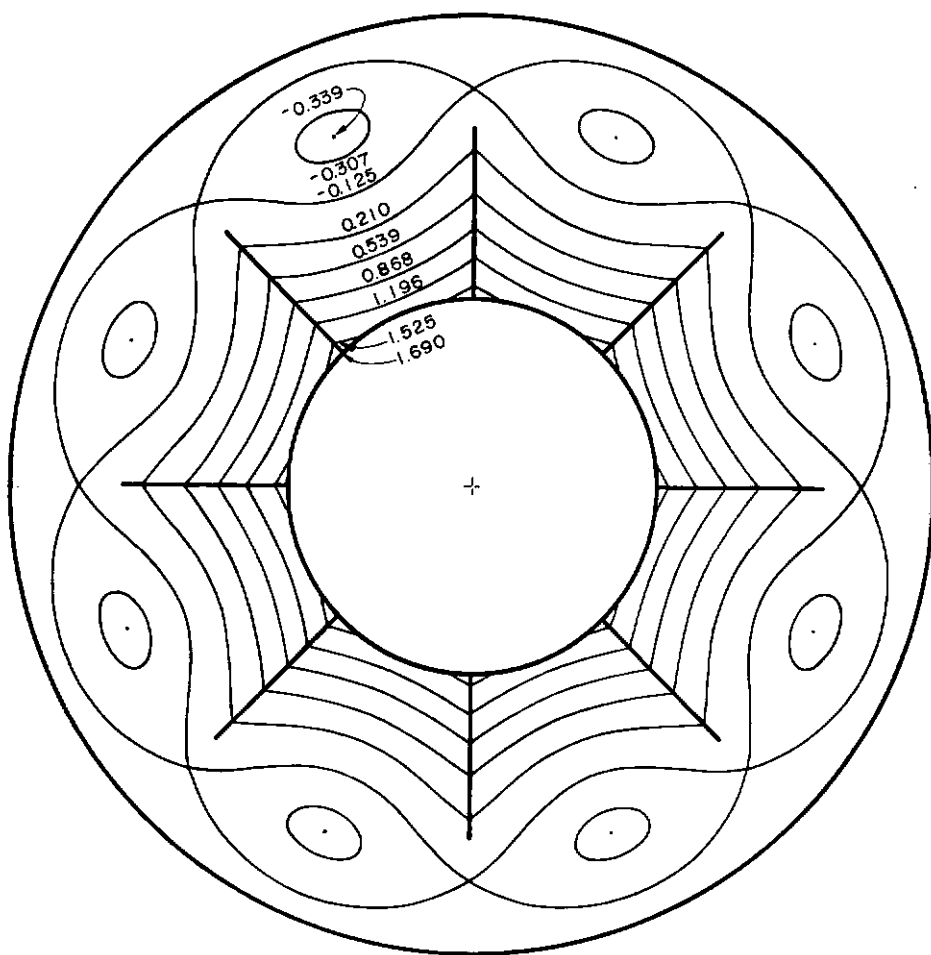


Fig. (VI-26) - Distribuição de temperatura  $(T - T_b)/(T_f - T_b)$  para  $r_i = 0,4$ ,  $L = 0,6$ ,  $m = 8$  e  $W_e = 0,5$ .

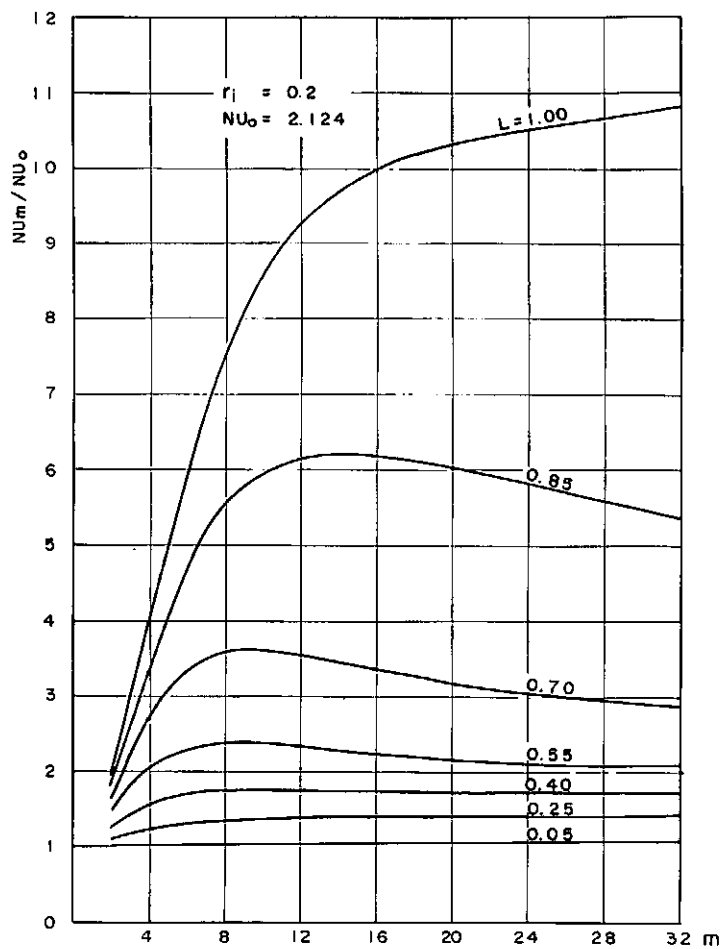


Fig. (VI-27)

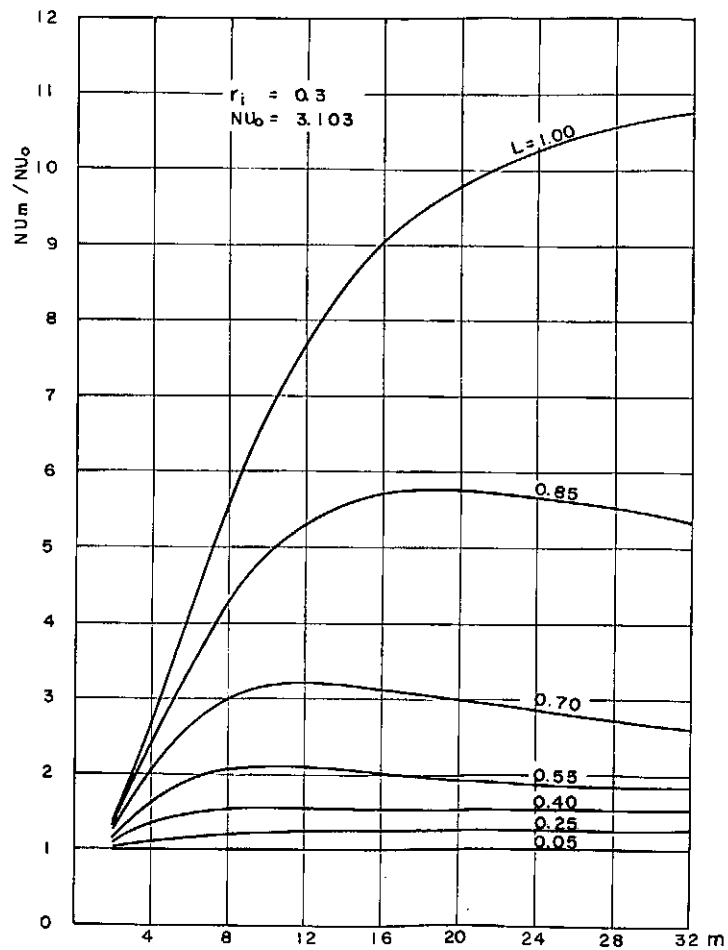


Fig. (VI-28)

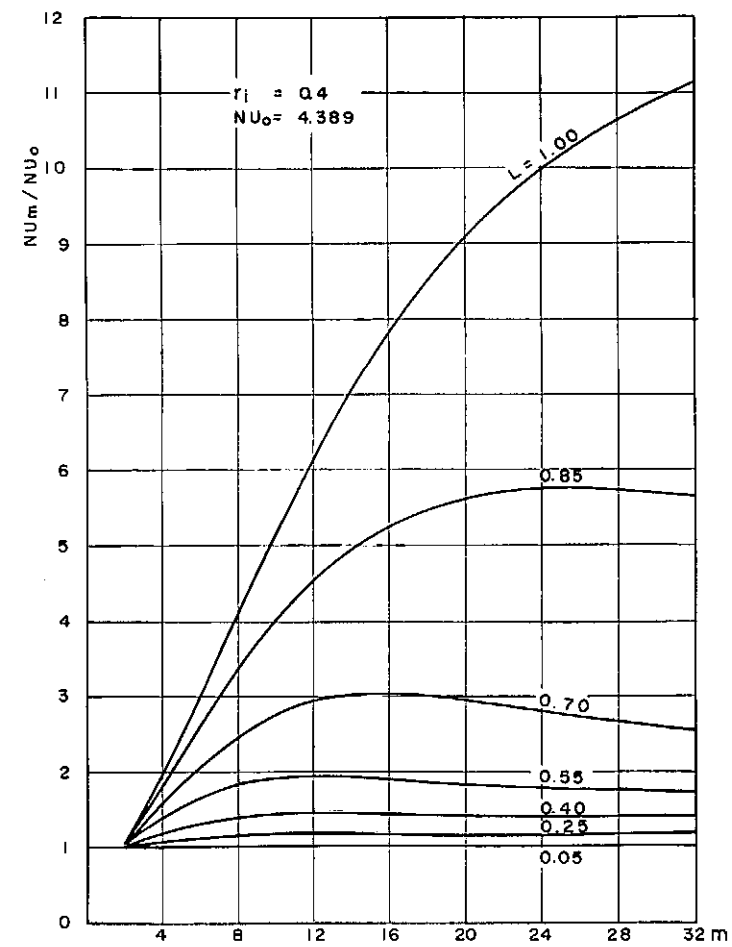


Fig. (VI-29)

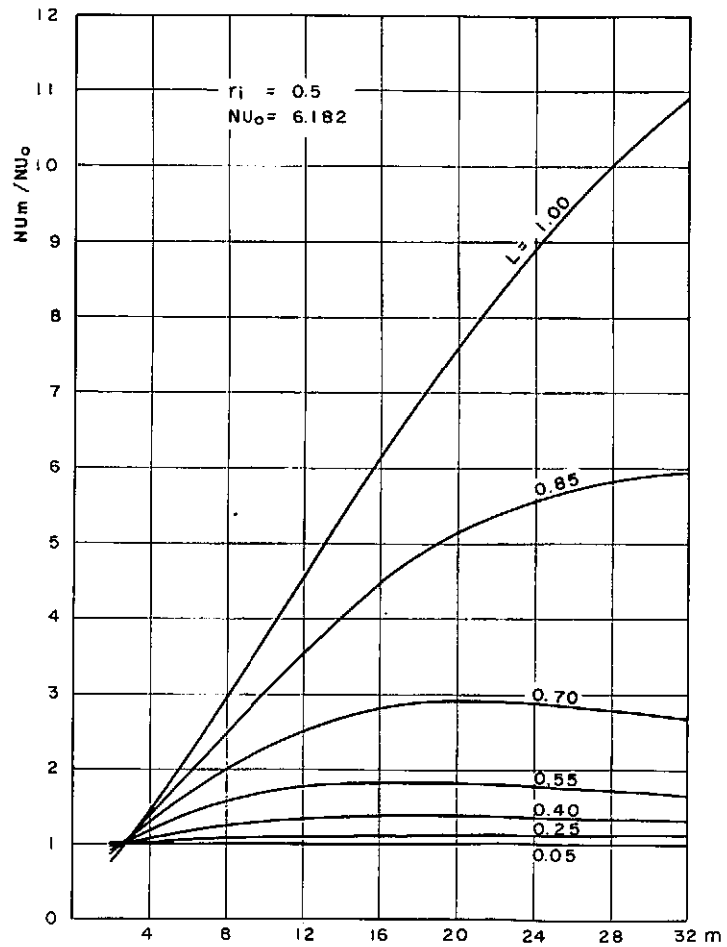


Fig. (VI-30)



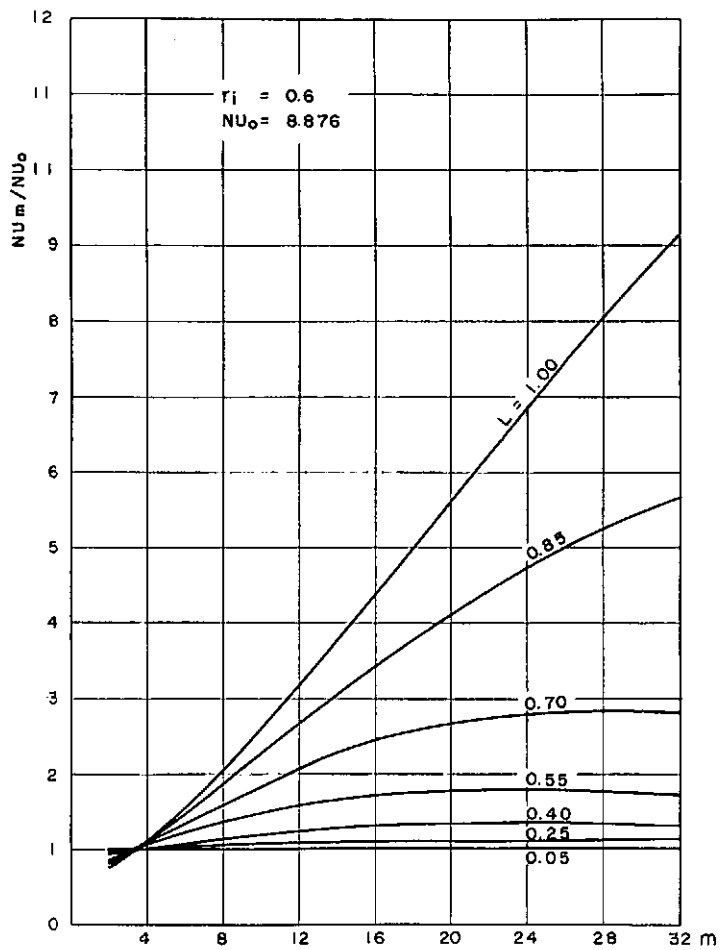


Fig. (VI-31)

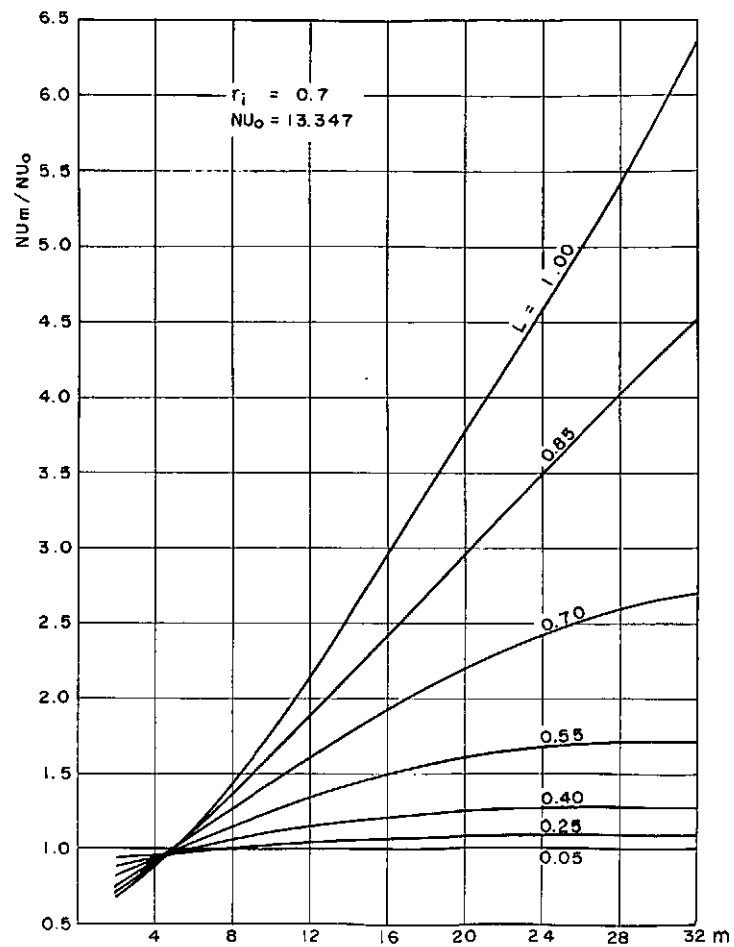


Fig. (VI-32)

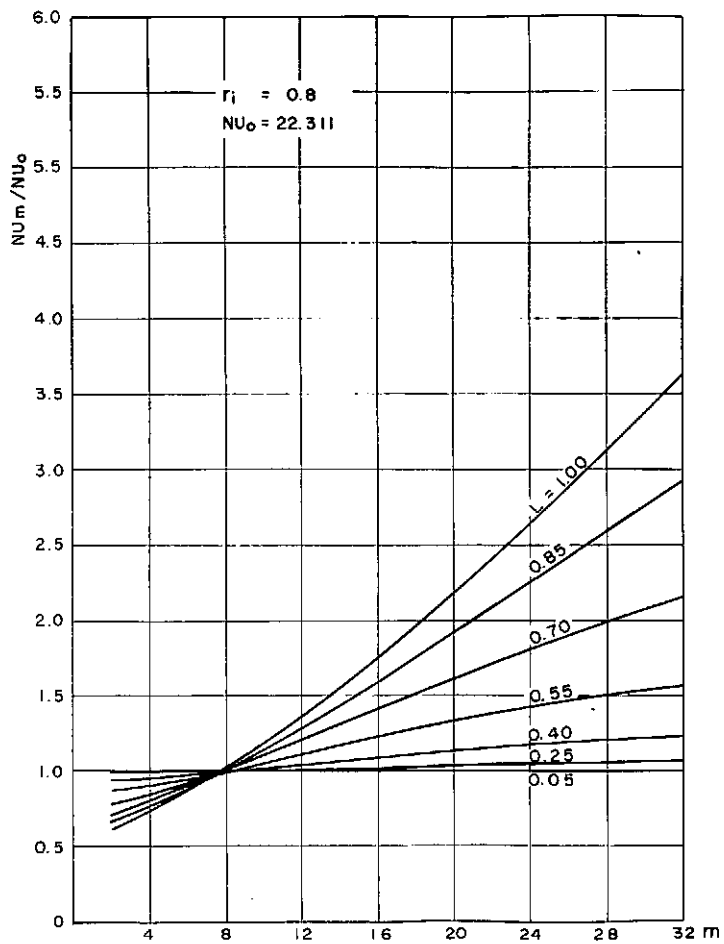


Fig. (VI-33)

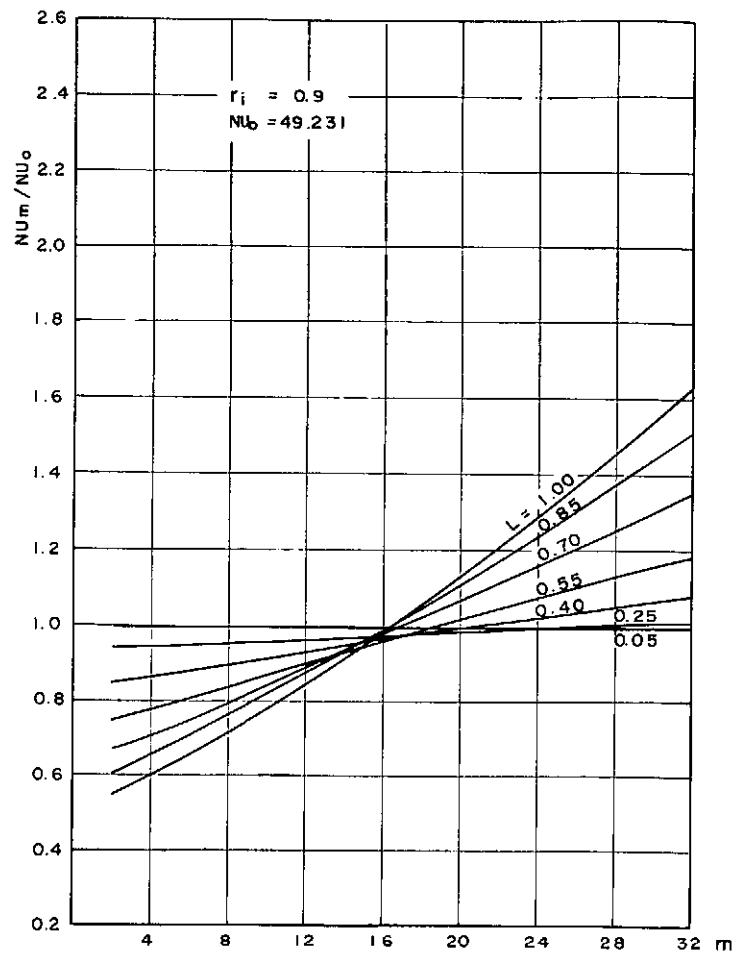


Fig. (VI-34)

$ri = 0,2 \quad ; \quad NU_{i_0} = 2,12$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	2,12	2,14	2,18	2,20	2,22	2,25	2,26	2,27	2,28
0,25	2,36	2,65	2,86	2,93	2,96	2,99	3,00	3,02	3,03
0,40	2,69	3,35	3,68	3,69	3,68	3,66	3,65	3,65	3,64
0,55	3,06	4,39	5,06	4,93	4,76	4,61	4,51	4,44	4,39
0,70	3,39	5,74	7,64	7,56	7,11	6,79	6,49	6,26	6,08
0,85	3,63	7,15	11,72	13,08	13,14	12,80	12,35	11,88	11,41
1,00	3,70	8,14	15,86	19,70	21,24	21,98	22,26	22,57	22,95
$ri = 0,2 \quad ; \quad NU_{h_0} = 8,50$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	7,38	6,55	5,31	4,43	3,76	3,26	2,85	2,52	2,24
0,25	5,21	3,84	2,26	1,48	1,05	0,787	0,612	0,490	0,401
0,40	4,55	3,29	1,73	1,03	0,682	0,485	0,364	0,283	0,227
0,55	4,13	3,15	1,58	0,874	0,544	0,369	0,267	0,202	0,158
0,70	3,76	3,16	1,72	0,929	0,552	0,363	0,254	0,187	0,143
0,85	3,37	3,12	1,99	1,18	0,738	0,491	0,344	0,251	0,189
1,00	2,93	2,89	2,10	1,36	0,904	0,634	0,463	0,355	0,282

Quadro IX

$r_i = 0,3 \quad ; \quad NU_{h_0} = 3,10$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	3,09	3,11	3,13	3,15	3,17	3,20	3,21	3,22	3,23
0,25	3,21	3,50	3,78	3,87	3,92	3,94	3,96	3,97	3,99
0,40	3,42	4,17	4,72	4,79	4,77	4,73	4,71	4,69	4,68
0,55	3,65	5,12	6,39	6,45	6,25	6,03	5,86	5,74	5,64
0,70	3,87	6,29	9,32	9,99	9,70	9,30	8,84	8,45	8,13
0,85	4,02	7,43	13,41	16,60	17,79	17,90	17,59	17,08	16,49
1,00	4,06	8,23	17,27	23,97	28,03	30,40	31,91	32,68	33,38
$r_i = 0,3 \quad ; \quad NU_{h_0} = 7,24$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	6,61	6,10	5,27	4,62	4,08	3,65	3,29	2,97	2,71
0,25	5,02	4,00	2,64	1,85	1,36	1,05	0,834	0,680	0,565
0,40	4,40	3,48	2,11	1,34	0,92	0,671	0,511	0,402	0,325
0,55	3,95	3,30	1,99	1,20	0,77	0,532	0,388	0,296	0,233
0,70	3,57	3,22	2,15	1,32	0,83	0,560	0,394	0,291	0,222
0,85	3,21	3,11	2,39	1,64	1,12	0,783	0,565	0,420	0,320
1,00	2,84	2,87	2,45	1,84	1,36	1,01	0,773	0,603	0,485

$r_i = 0,4 \quad ; \quad NU_{i_0} = 4,39$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	4,38	4,38	4,40	4,42	4,43	4,45	4,46	4,48	4,49
0,25	4,37	4,66	5,01	5,15	5,21	5,23	5,25	5,26	5,28
0,40	4,43	5,24	6,08	6,29	6,29	6,24	6,18	6,14	6,11
0,55	4,51	6,05	7,95	8,47	8,38	8,13	7,89	7,67	7,50
0,70	4,58	6,99	10,91	12,82	13,22	12,90	12,32	11,72	11,16
0,85	4,63	7,86	14,59	19,79	22,97	24,58	25,18	25,13	24,74
1,00	4,60	8,47	17,86	26,94	34,28	39,80	43,84	46,87	49,26
$r_i = 0,4 \quad ; \quad NU_{h_0} = 6,58$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	6,18	5,84	5,25	4,76	4,34	3,98	3,66	3,38	3,13
0,25	4,95	4,17	3,02	2,25	1,74	1,38	1,12	0,930	0,785
0,40	4,33	3,66	2,51	1,73	1,24	0,928	0,719	0,574	0,469
0,55	3,86	3,41	2,40	1,61	1,10	0,780	0,578	0,444	0,352
0,70	3,46	3,24	2,53	1,79	1,23	0,865	0,622	0,462	0,353
0,85	3,11	3,07	2,67	2,11	1,61	1,22	0,930	0,718	0,563
1,00	2,77	2,83	2,66	2,28	1,87	1,52	1,23	1,01	0,846

$$r_i = 0,5 \quad ; \quad NU_{i_0} = 6,18$$

$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	6,16	6,17	6,18	6,19	6,21	6,22	6,23	6,25	6,26
0,25	6,01	6,31	6,72	6,93	7,04	7,08	7,10	7,10	7,11
0,40	5,88	6,73	7,84	8,32	8,45	8,43	8,36	8,28	8,21
0,55	5,76	7,32	9,74	10,96	11,31	11,22	10,96	10,66	10,38
0,70	5,65	7,98	12,43	15,64	17,35	17,90	17,72	17,20	16,53
0,85	5,56	8,59	15,45	22,06	27,50	31,53	34,26	35,93	36,80
1,00	5,43	8,99	18,01	28,09	37,97	46,97	54,85	61,64	67,46

$$r_i = 0,5 \quad ; \quad NU_{h_0} = 6,18$$

$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	5,91	5,68	5,25	4,89	4,56	4,26	4,00	3,76	3,54
0,25	4,98	4,33	3,38	2,69	2,17	1,78	1,49	1,26	1,08
0,40	4,32	3,81	2,90	2,18	1,66	1,28	1,02	0,829	0,686
0,55	3,82	3,49	2,77	2,08	1,54	1,15	0,878	0,686	0,549
0,70	3,40	3,25	2,80	2,25	1,74	1,32	1,00	0,771	0,602
0,85	3,06	3,03	2,84	2,49	2,11	1,75	1,44	1,19	0,980
1,00	2,74	2,78	2,75	2,56	2,31	2,04	1,79	1,57	1,37

Quadro XII

$r_i = 0,6 \quad ; \quad NU_{i_0} = 8,87$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	8,85	8,85	8,85	8,86	8,87	8,89	8,90	8,91	8,93
0,25	8,51	8,80	9,26	9,56	9,75	9,86	9,91	9,93	9,93
0,40	8,10	8,95	10,30	11,13	11,55	11,71	11,71	11,64	11,55
0,55	7,66	9,22	12,00	13,97	15,10	15,57	16,62	15,43	15,13
0,70	7,30	9,53	14,17	18,33	21,54	23,66	24,79	25,16	25,00
0,85	7,01	9,84	16,44	23,53	30,44	36,73	42,15	46,64	50,18
1,00	6,73	10,00	18,27	28,13	38,82	49,82	60,73	71,35	81,56
$r_i = 0,6 \quad ; \quad NU_{h_0} = 5,92$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	5,73	5,57	5,27	5,00	4,75	4,53	4,32	4,12	3,94
0,25	4,93	4,48	3,74	3,14	2,67	2,28	1,97	1,71	1,50
0,40	4,34	3,95	3,26	2,66	2,16	1,77	1,46	1,21	1,03
0,55	3,81	3,57	3,06	2,54	2,06	1,66	1,33	1,08	0,887
0,70	3,37	3,26	2,99	2,63	2,25	1,88	1,55	1,27	1,04
0,85	3,03	3,00	2,91	2,74	2,51	2,26	2,01	1,78	1,56
1,00	2,72	2,34	2,76	2,70	2,59	2,44	2,28	2,12	1,97

$$r_i = 0,7 \quad ; \quad NU_{i_0} = 13,34$$

$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	13,32	13,32	13,32	13,32	13,33	13,34	13,35	13,36	13,37
0,25	12,69	12,97	13,46	13,85	14,14	14,36	14,50	14,59	14,64
0,40	11,81	12,67	14,19	15,37	16,20	16,74	17,05	17,19	17,21
0,55	10,88	12,41	15,38	17,95	19,97	21,40	22,30	22,77	22,91
0,70	10,09	12,23	16,81	21,40	25,66	29,36	32,36	34,62	36,17
0,85	9,49	12,13	18,24	25,11	32,36	39,69	46,89	53,79	60,26
1,00	8,95	11,98	19,34	28,23	38,28	49,19	60,75	72,76	85,11

$$r_i = 0,7 \quad ; \quad NU_{h_0} = 5,72$$

$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	5,60	5,49	5,29	5,10	4,93	4,76	4,60	4,46	4,32
0,25	4,95	4,63	4,07	3,60	3,20	2,86	2,55	2,29	2,07
0,40	4,37	4,09	3,59	3,13	2,73	2,37	2,05	1,79	1,56
0,55	3,82	3,64	3,30	2,95	2,60	2,27	1,96	1,69	1,45
0,70	3,37	3,28	3,11	2,90	2,67	2,42	2,17	1,92	1,69
0,85	3,01	2,98	2,93	2,86	2,75	2,62	2,48	2,32	2,17
1,00	2,71	2,71	2,73	2,74	2,71	2,66	2,59	2,51	2,43



$$r_i = 0,8 \quad ; \quad NU_{i_0} = 22,31$$

$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	22,27	22,27	22,26	22,26	22,26	22,27	22,27	22,28	22,29
0,25	21,09	21,36	21,86	22,31	22,70	23,04	23,33	23,56	23,74
0,40	19,28	20,13	21,75	23,20	24,46	25,50	26,34	26,99	27,47
0,55	17,36	18,86	21,86	24,77	27,46	29,86	31,91	33,60	34,95
0,70	15,75	17,79	22,13	26,72	31,36	35,92	40,27	44,35	48,06
0,85	14,51	16,99	22,52	28,72	35,46	42,59	49,99	57,58	65,26
1,00	1,348	16,28	22,73	30,29	38,86	48,31	58,53	69,43	80,95

$$r_i = 0,8 \quad ; \quad NU_{h_0} = 5,58$$

$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	5,50	5,44	5,32	5,20	5,09	4,98	4,88	4,77	4,68
0,25	4,98	4,78	4,40	4,07	3,77	3,50	3,26	3,03	2,83
0,40	4,41	4,23	3,89	3,59	3,30	3,04	2,79	2,55	2,34
0,55	3,84	3,72	3,50	3,29	3,08	2,86	2,65	2,44	2,24
0,70	3,37	3,31	3,19	3,09	2,97	2,84	2,70	2,56	2,41
0,85	3,01	2,98	2,94	2,91	2,87	2,83	2,77	2,70	2,63
1,00	2,71	2,70	2,71	2,72	2,73	2,73	2,72	2,70	2,68

$r_i = 0,9 \quad ; \quad NU_{i_0} = 49,231$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	49,15	49,14	49,13	49,12	49,10	49,09	49,09	49,08	49,08
0,25	46,26	46,54	47,04	47,52	47,99	48,44	48,84	49,25	49,62
0,40	41,74	42,60	44,25	45,86	47,40	48,90	50,31	51,59	52,81
0,55	36,85	38,28	41,23	44,21	47,17	50,12	52,94	55,72	58,41
0,70	33,11	35,09	39,18	43,43	47,86	52,38	57,00	61,66	66,34
0,85	30,11	32,50	37,54	42,93	48,67	54,75	61,15	67,81	74,71
1,00	27,15	29,78	35,40	41,53	48,21	55,42	63,15	71,39	80,09
$r_i = 0,9 \quad ; \quad NU_{h_0} = 5,470$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	5,43	5,40	5,35	5,29	5,23	5,18	5,13	5,08	5,03
0,25	5,01	4,91	4,72	4,54	4,38	4,22	4,07	3,93	3,79
0,40	4,45	4,36	4,19	4,03	3,88	3,73	3,59	3,46	3,32
0,55	3,87	3,81	3,69	3,59	3,48	3,38	3,28	3,19	3,09
0,70	3,42	3,39	3,32	3,26	3,21	3,15	3,10	3,05	2,99
0,85	3,07	3,05	3,02	2,99	2,97	2,96	2,94	2,92	2,91
1,00	2,72	2,72	2,70	2,70	2,70	2,70	2,71	2,71	2,72

Nas figuras (VI-27) - (VI-34) estão estabelecidas, para cada valor de  $r_i$  entre 0,2 e 0,9, as dependências entre o Número de Nusselt,  $L$  e  $m$ , para  $W_e = 0$ . Os números de Nusselt  $NU_m = NU_{Di}$  foram calculados com base na equação (IV-43), e as curvas foram traçadas com os dados das tabelas IX a XVI. Nas citadas tabelas, para efeito de comparação, são apresentados os valores numéricos do número de Nusselt baseado no diâmetro hidráulico e na temperatura média da parede aletada, os quais foram calculadas pela equação (IV-44) para  $W_e = 0$ .

A influência de  $W_a$  é avaliada na figura (VI-35) onde é

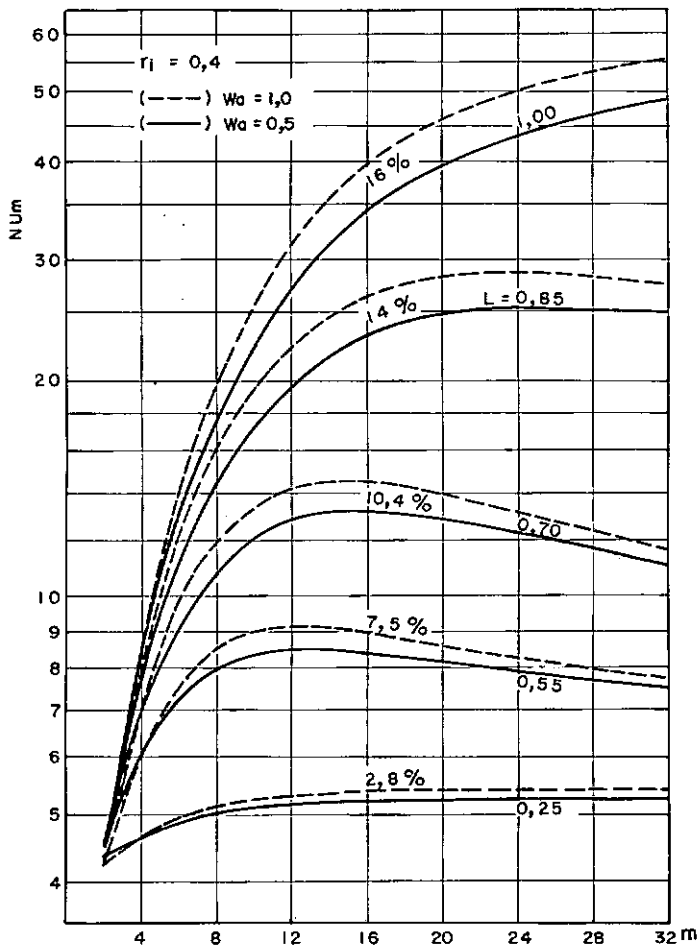


Fig. (VI-35) - Efeito do fluxo das aletas sobre o desempenho da Parede aletada para  $r_i = 0,4$ .

representado o número de Nusselt  $NU_m$  em função do número e da altura das aletas para o caso particular de  $r_i = 0,4$  e  $W_e = 0$ .

A influência de  $W_e$  sobre a dependência do número de Nusselt  $NU_{Di}$  com  $m$  e  $L$ , pode ser avaliada na figura (VI-36), onde, para  $r_i = 0,4$  foram considerados valores moderados de  $W_e$  entre  $-0,2$  e  $0,2$ , isto é, perda e ganho de calor em torno de 20%. Com base nesta figura, a influência de  $W_e$  sobre o número ótimo de aletas também pode ser analisada.

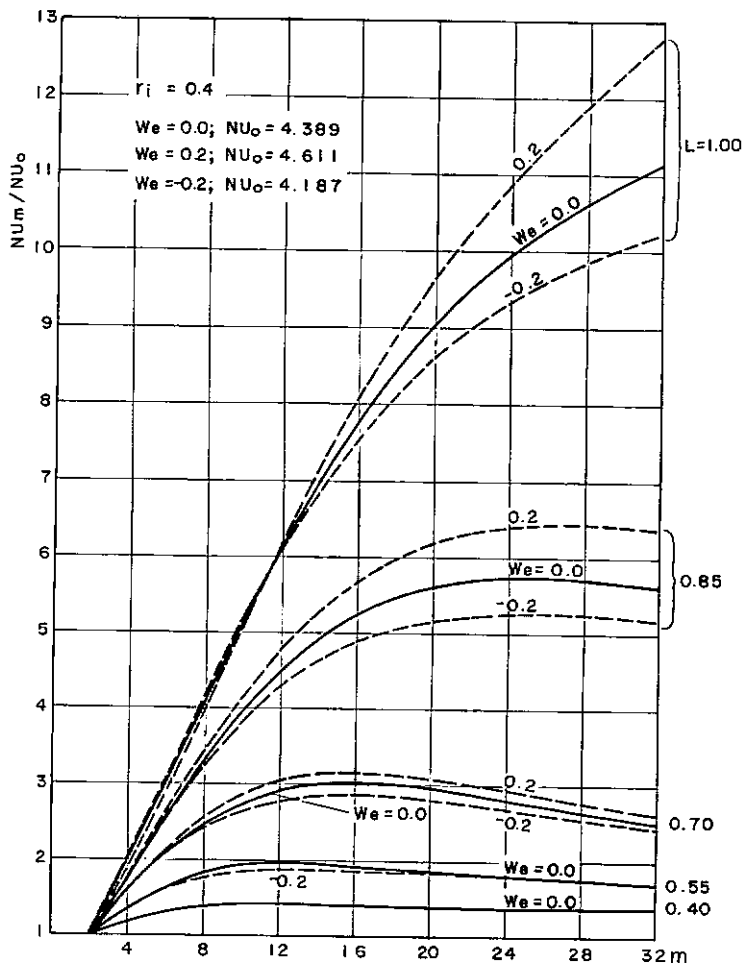


Fig. (VI-36) - Efeito do fluxo externo sobre o desempenho do Duplo Tubo aletado para  $r_i = 0,4$ .

Outros padrões de distribuição de temperatura e curvas de Nusselt podem ser encontrados na referência [46] para o caso especial de  $L = 1$ .

A geração de calor no fluido é um parâmetro de influência considerável sobre o número de Nusselt, como foi observado em [34].

Como o duplo-tubo aletado é considerado no projeto de alguns tipos de reatores nucleares, justifica-se examinar também neste caso o efeito da geração de calor no fluido.

A figura (VI-37) a qual corresponde a  $r_i = 0,4$ , mostra um caso típico, onde  $\lambda$  é o parâmetro de geração de calor no fluido definido no capítulo IV.

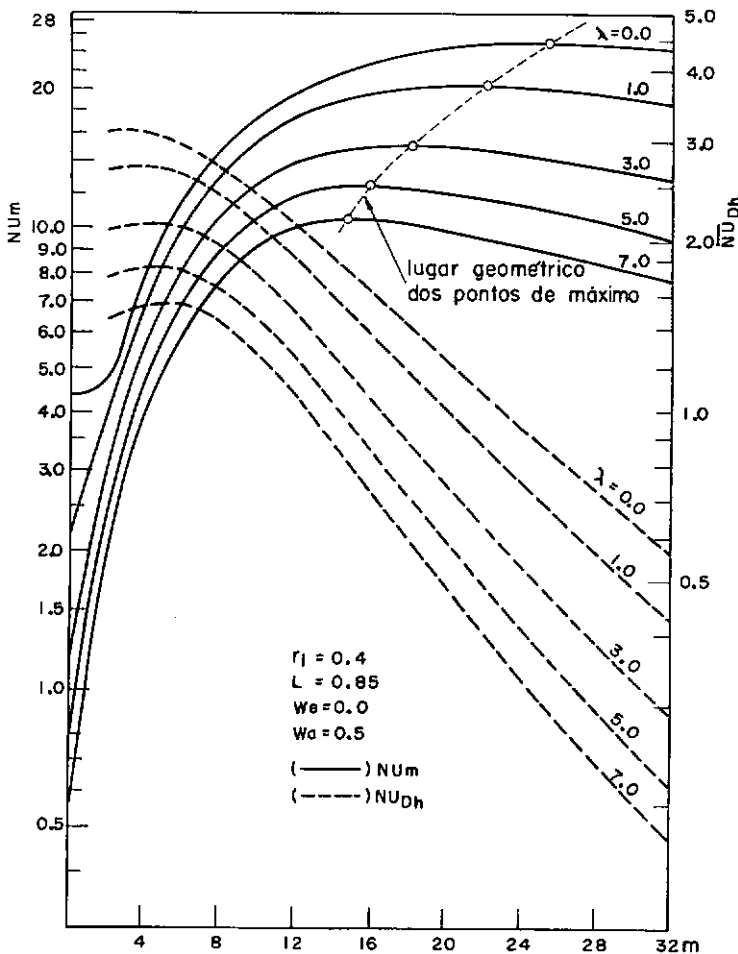


Fig. (VI-37) - Efeito da geração de calor no fluido sobre o número de Nusselt para  $r_i = 0,4$ ,  $L = 0,85$  e  $W_e = 0$ .

### VI.3 - Resultados da transferência de Calor para Temperatura Prescrita

Para compreender certas características locais da transferência do calor nas aletas sob a condição de temperatura constante na parede aletada, é conveniente visualizar algumas soluções da equação integral (V-16).

A figura (VI-38), representa uma família de soluções de (V-16) calculada pela aproximação linear expressa pela equação (V-28) para valores de  $N$  entre 21 e 31. O limite superior de

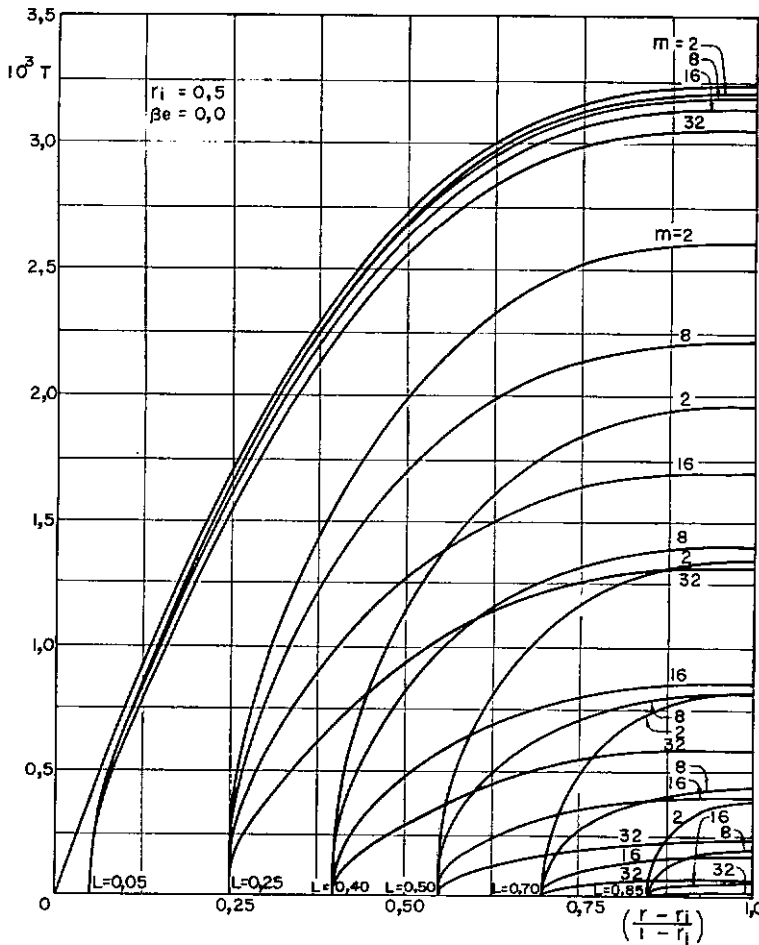


Fig. (VI-38)-Soluções da equação integral (V-16) no intervalo  $r_a \leq r \leq 1$  para  $r_i = 0,5$ ,  $W_e = 0$  e para vários valores de  $m$  e  $L$ .

tais soluções para a relação de raios  $r_i$ , como foi constatado, é o perfil de temperatura associado ao duplo-tubo não-aletado de relação de raio  $r_i$  para as mesmas condições de fluxo externo.

Tais soluções, para cada altura de aleta  $L$  fixa, tem um limite inferior com  $m$ , o qual parece ser o perfil de temperatura correspondente a um duplo-tubo não-aletado cuja relação de raios é  $r_a$ , como pode ser constatado nos casos típicos representados pelas figuras (VI-39) e (VI-40).

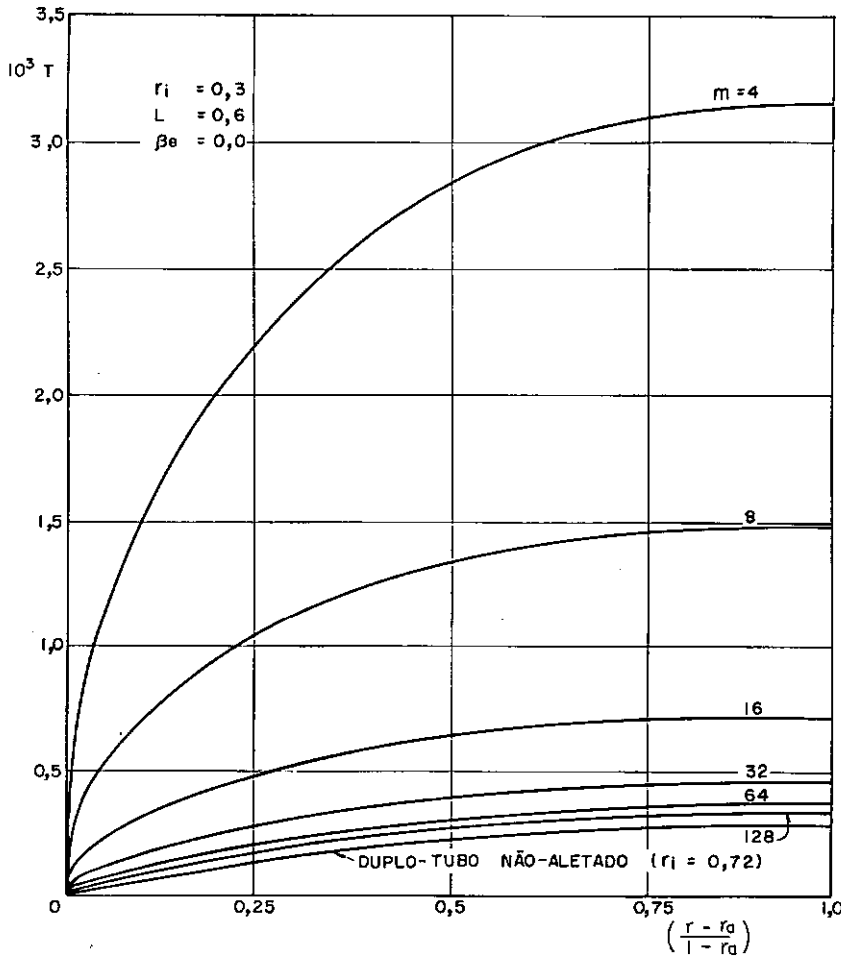


Fig. (VI-39) - Limite inferior das soluções da equação integral (V-16) para  $r_i = 0,3$ ,  $L = 0,6$  e  $W_e = 0$ .

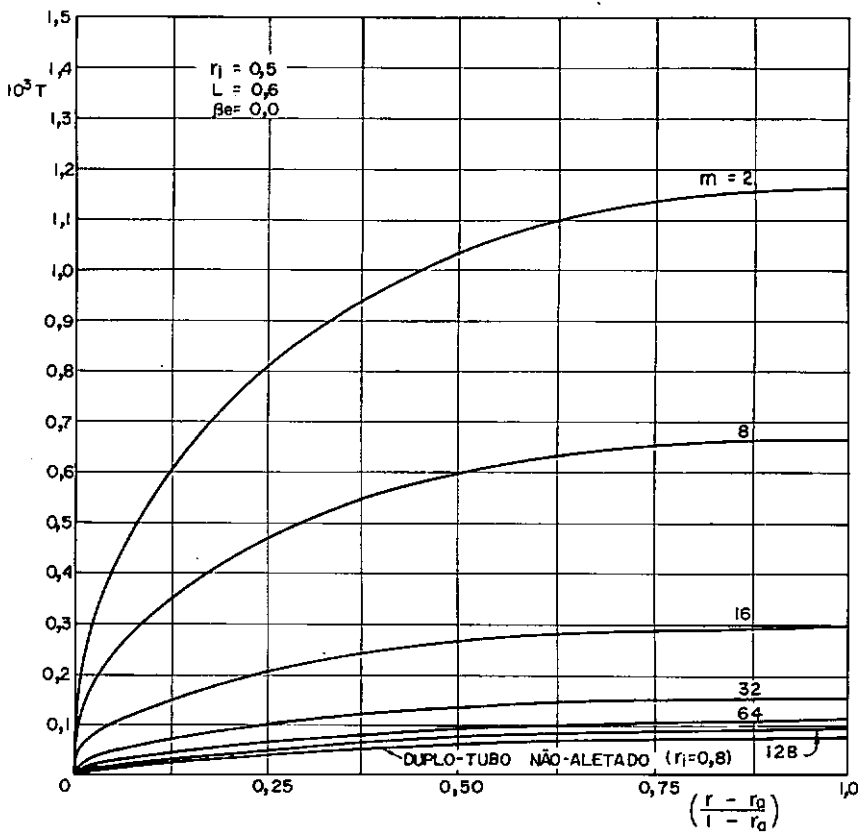


Fig. (VI-40) - Limite inferior das soluções da equação integral (V-16) para  $r_i = 0.5$ ,  $L = 0.6$  e  $W_e = 0$ .

A influência do fluxo externo sobre o comportamento das soluções da equação integral foi também analisada; um caso especial foi representado na figura (VI-41), para valores particulares de  $r_i = 0.4$  e  $L = 0.4$ .

Esta figura representa um comportamento típico das soluções da equação (V-16) sob a influência do fluxo externo, como mostraram os cálculos, para várias relações de raios e várias alturas de aletas arbitrariamente escolhidas.

A distribuição da temperatura na secção transversal do duto foi calculada com base nas equações (V-31) e (V-54); as curvas isotérmicas para este caso, também foram calculadas pelo mesmo



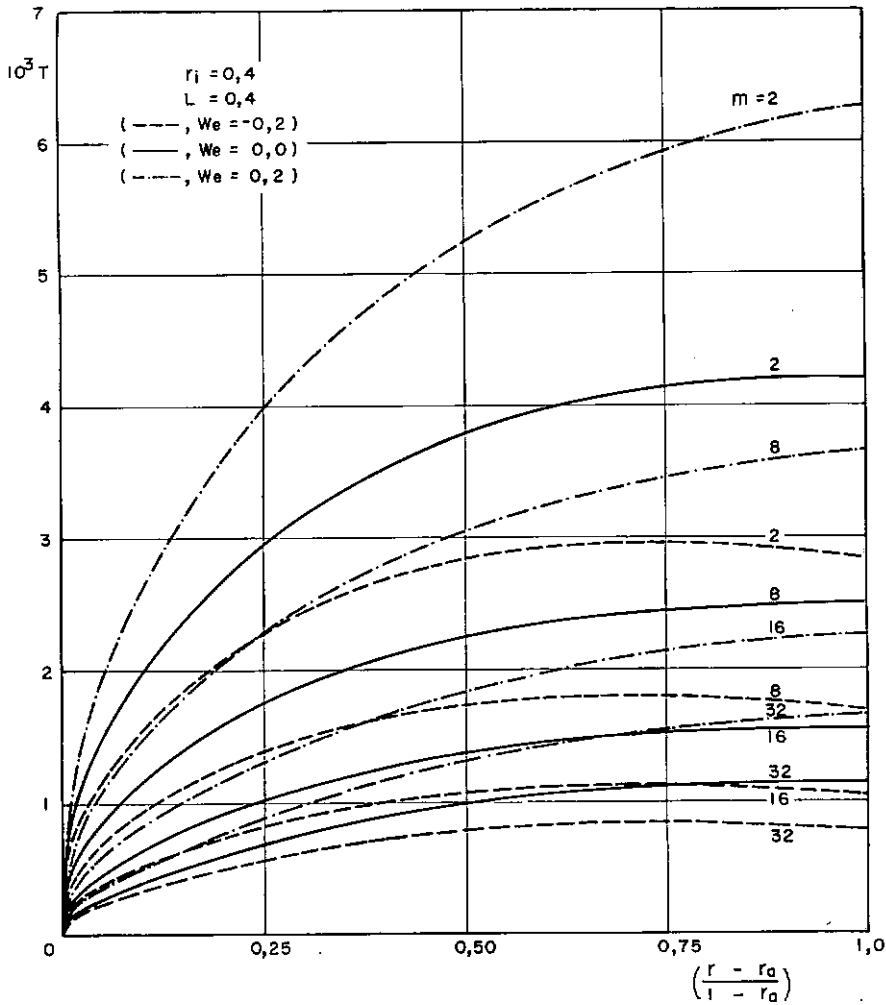


Fig. (VI-41) - Influência do fluxo externo sobre as soluções da equação integral (V-16).

procedimento usado na construção das curvas isocinéticas do capítulo III.

A distribuição de  $T/T_b$ , a qual é equivalente à distribuição de  $(T^* - T_f^*)/(T_b^* - T_f^*)$  no setor, foi calculada para o caso particular de  $r_i = 0,4$  e  $L = 0,6$ , para números de aletas  $m$  iguais a 2, 4, 8 e 16; os resultados são vistos nas figuras (VI-42) - (VI-51).

As figuras (VI-42) - (VI-45), correspondem ao caso de isolamento externo, isto é,  $W_e = 0$ .

O efeito do fluxo externo sobre a distribuição de temperatura foi examinado para valores particulares de  $W_e$  iguais a 0,20 e -0,55.

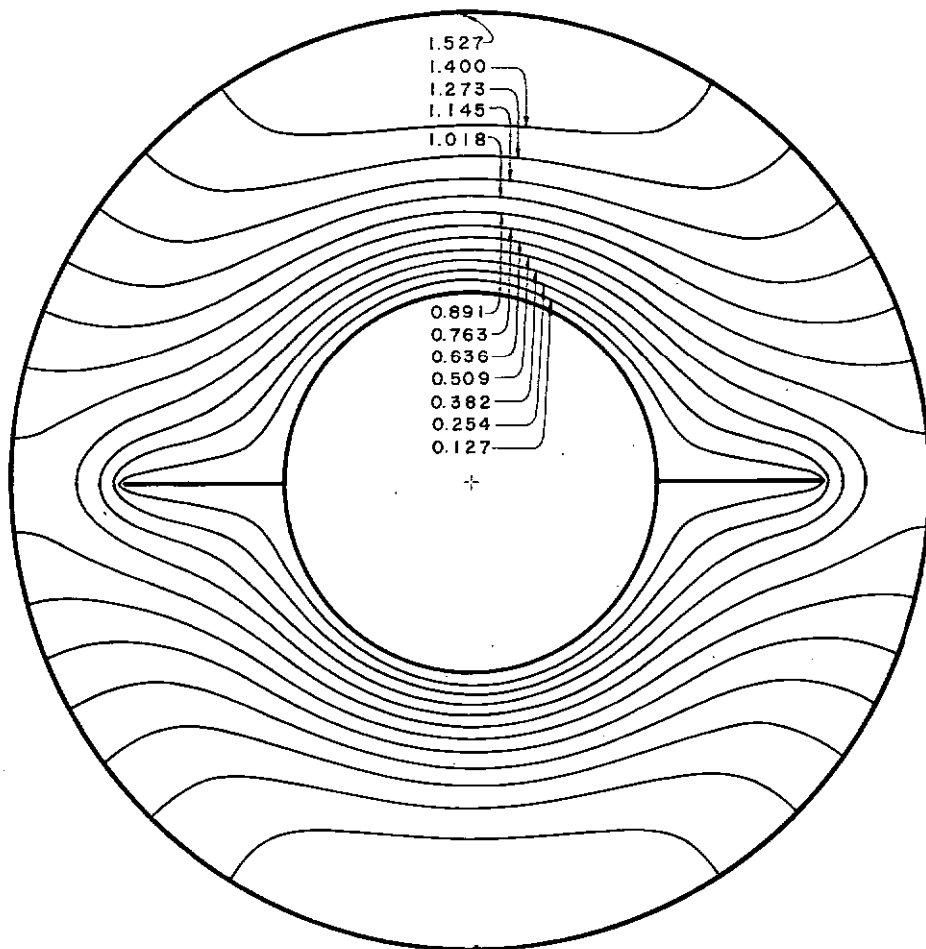


Fig. (VI-42) - Distribuição de temperatura  $T/T_b$  para  $r_i = 0,4$ ,  
 $L = 0,6$ ,  $m = 2$  e  $W_e = 0$ .

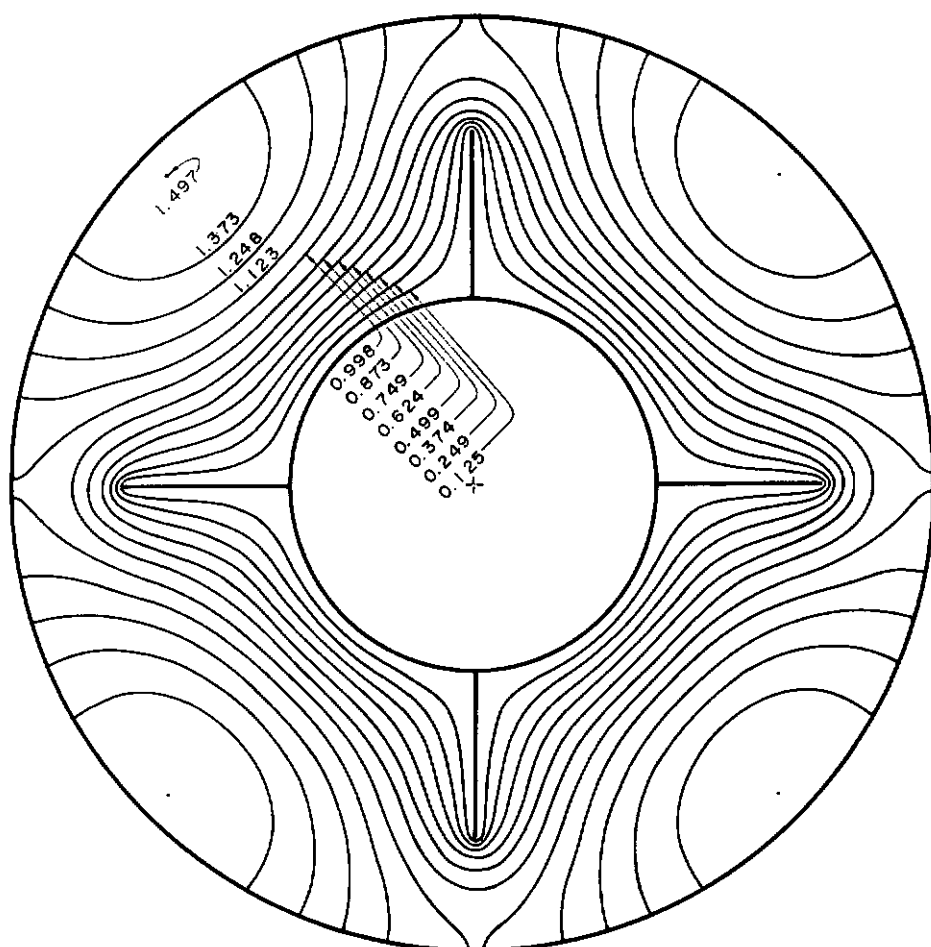


Fig. (VI-43) - Distribuição de temperatura  $T/T_b$  para  $r_i = 0,4$ ,  
 $L = 0,6$ ,  $m = 4$  e  $W_e = 0$ .

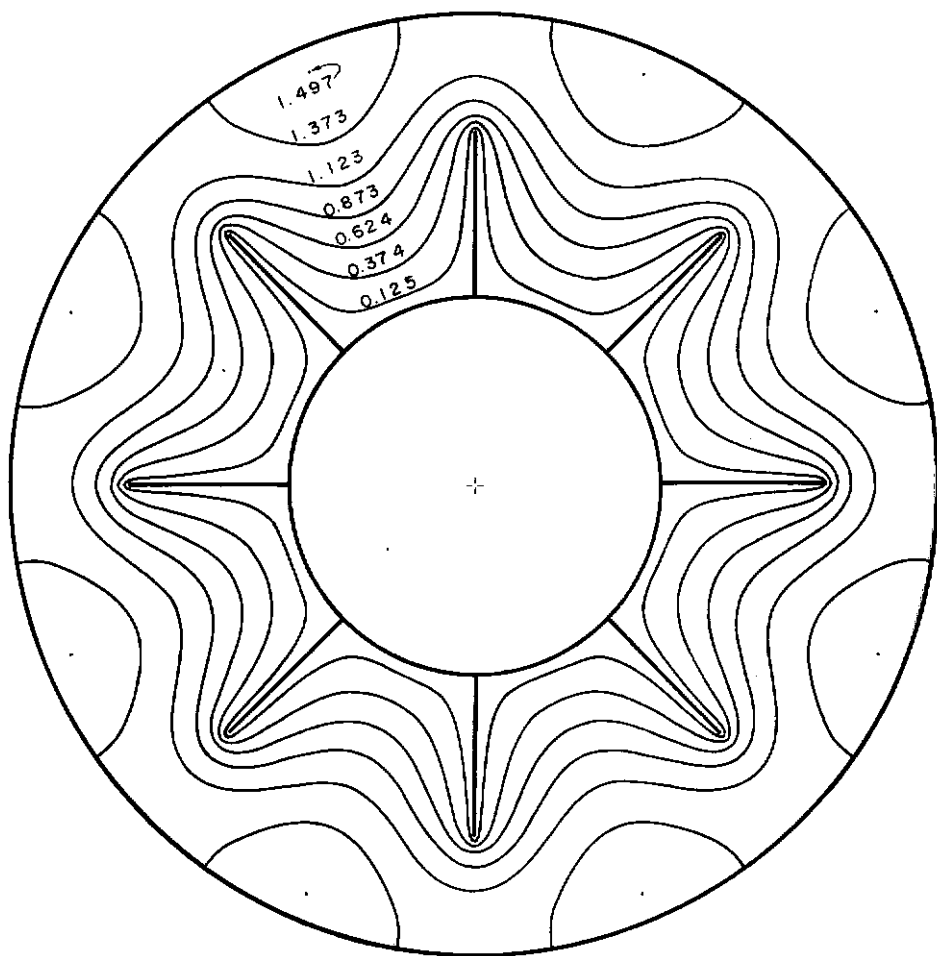


Fig. (VI-44) - Distribuição de temperatura  $T/T_b$  para  $r_i = 0,4$ ,  
 $L = 0,6$ ,  $m = 8$  e  $W_e = 0$ .

Paralelamente ao cálculo da distribuição de temperatura, foi calculada a derivada radial ao longo da parede externa pela equação

$$\beta_e = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_1 ;$$

cujos resultados concordam muito bem com a condição de contorno prescrita pela equação (V-49), isto é,

$$\beta_e = \frac{1}{2} u_m (1 - r_i^2) W_e / (1 - W_e) \quad (\text{VI-2})$$

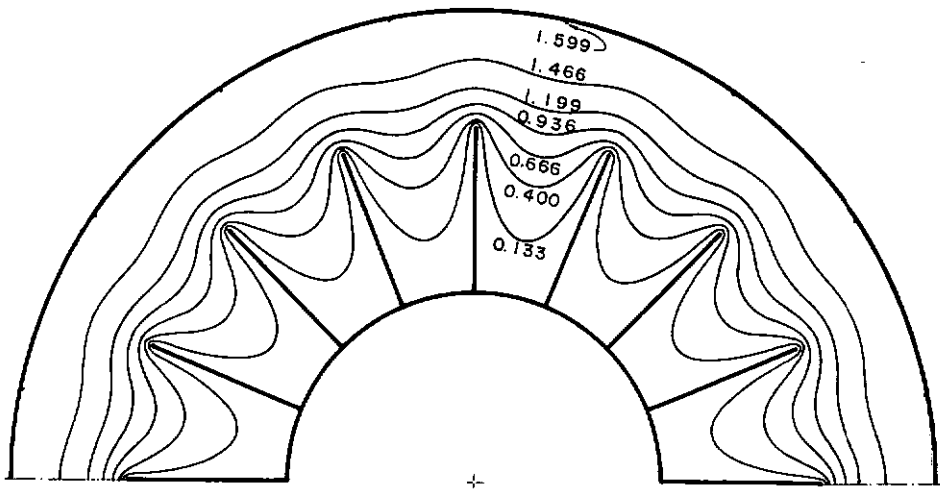


Fig. (VI-45) - Distribuição de temperatura  $T/T_b$  para  $r_i = 0,4$ ,  $L = 0,6$ ,  $m = 16$  e  $W_e = 0$ .

Os padrões de distribuição de temperatura, para esses casos são vistos nas figuras (VI-46) - (VI-51).

Para o caso particular de  $L = 1,0$ , isto é, altura das aletas igual à diferença dos raios dos tubos, foi examinado o efeito da relação de raios e do número de aletas sobre a distri-

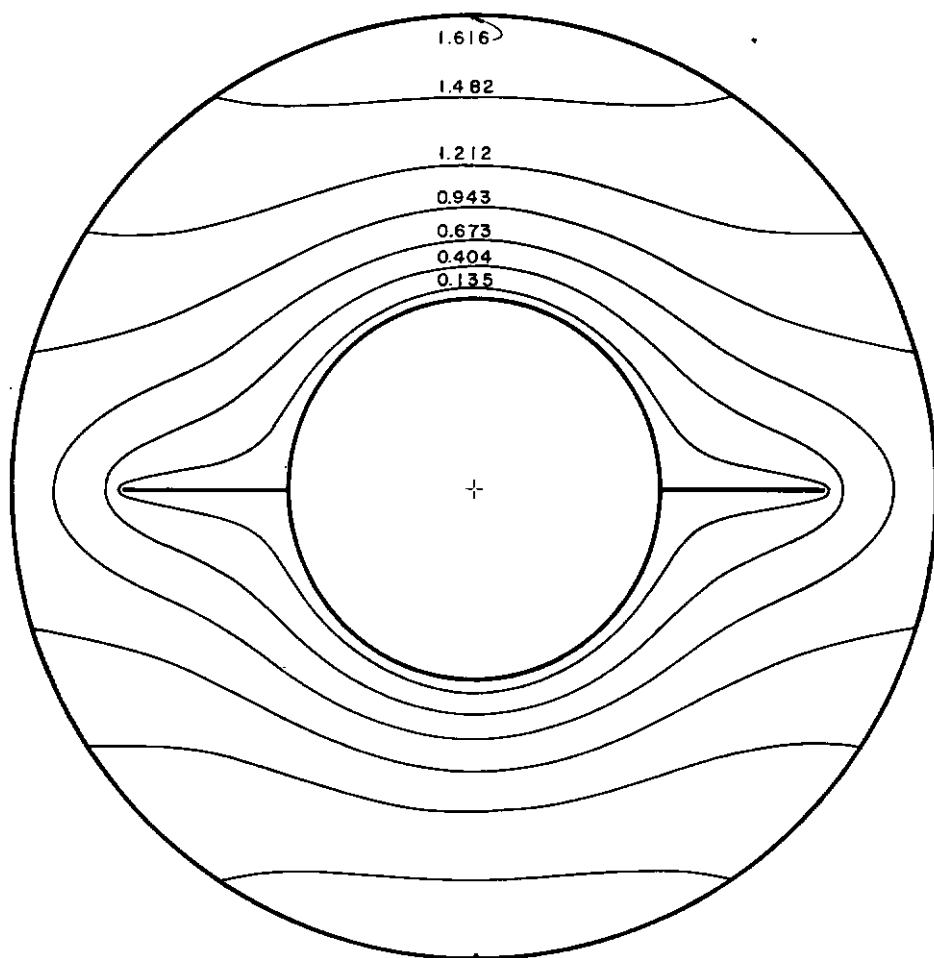


Fig. (VI-46) - Distribuição de temperatura  $T/T_b$  para  $r_i = 0,4$ ,  
 $L = 0,6$ ,  $m = 2$  e  $W_e = 0,2$ .

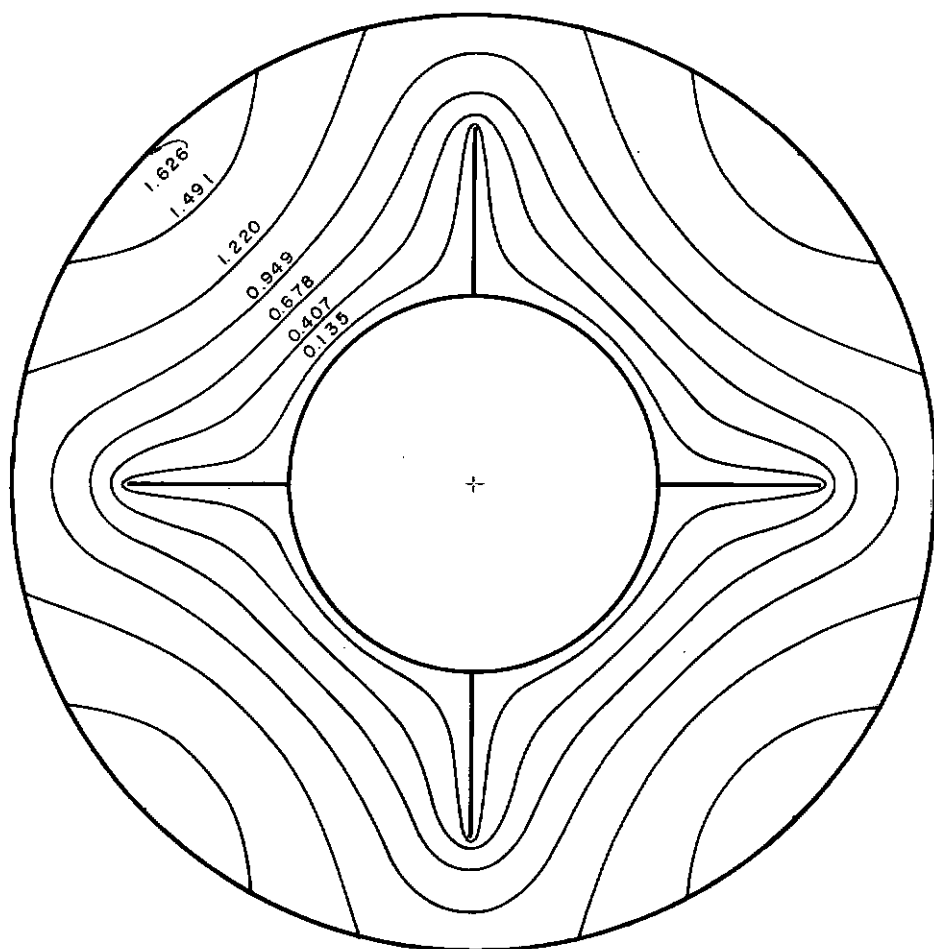


Fig. (VI-47) - Distribuição de temperatura  $T/T_b$  para  $r_i = 0,4$ ,  
 $L = 0,6$ ,  $m = 4$  e  $W_e = 0,2$

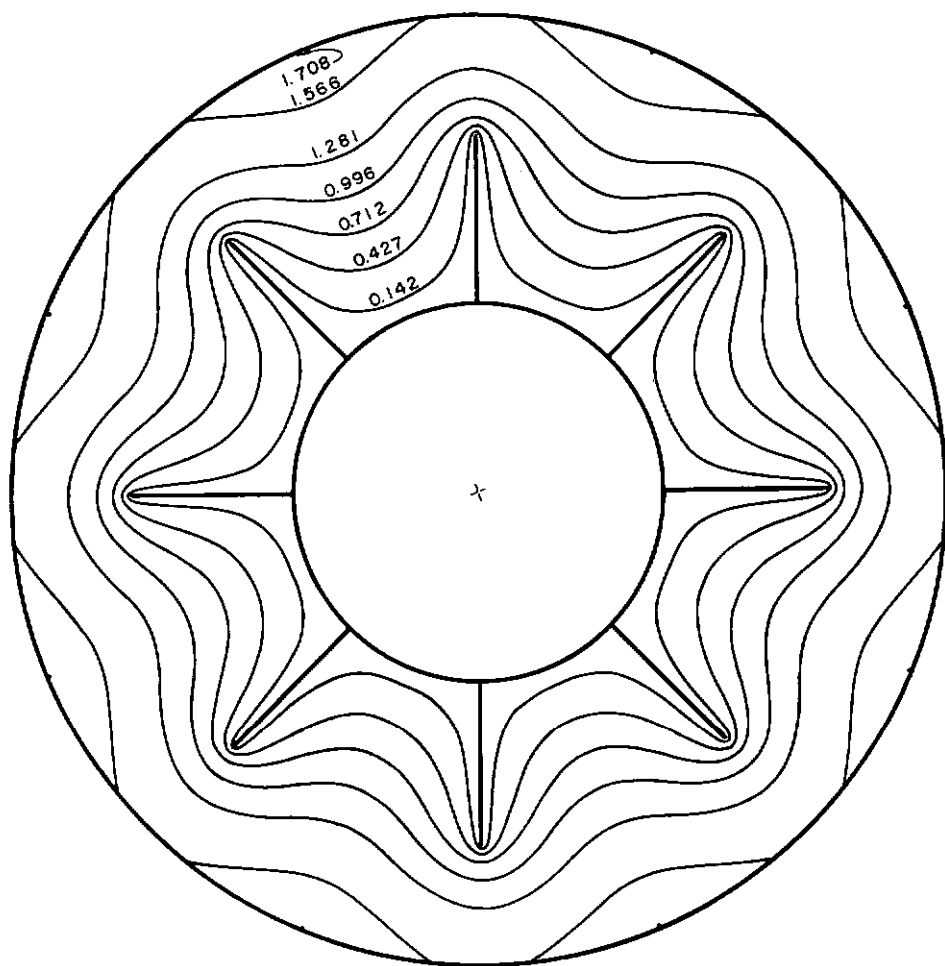


Fig. (VI-48) - Distribuição de temperatura  $T/T_b$  para  $r_i = 0,4$ .  
 $L = 0,6$ ,  $m = 8$  e  $W_e = 0,2$ .



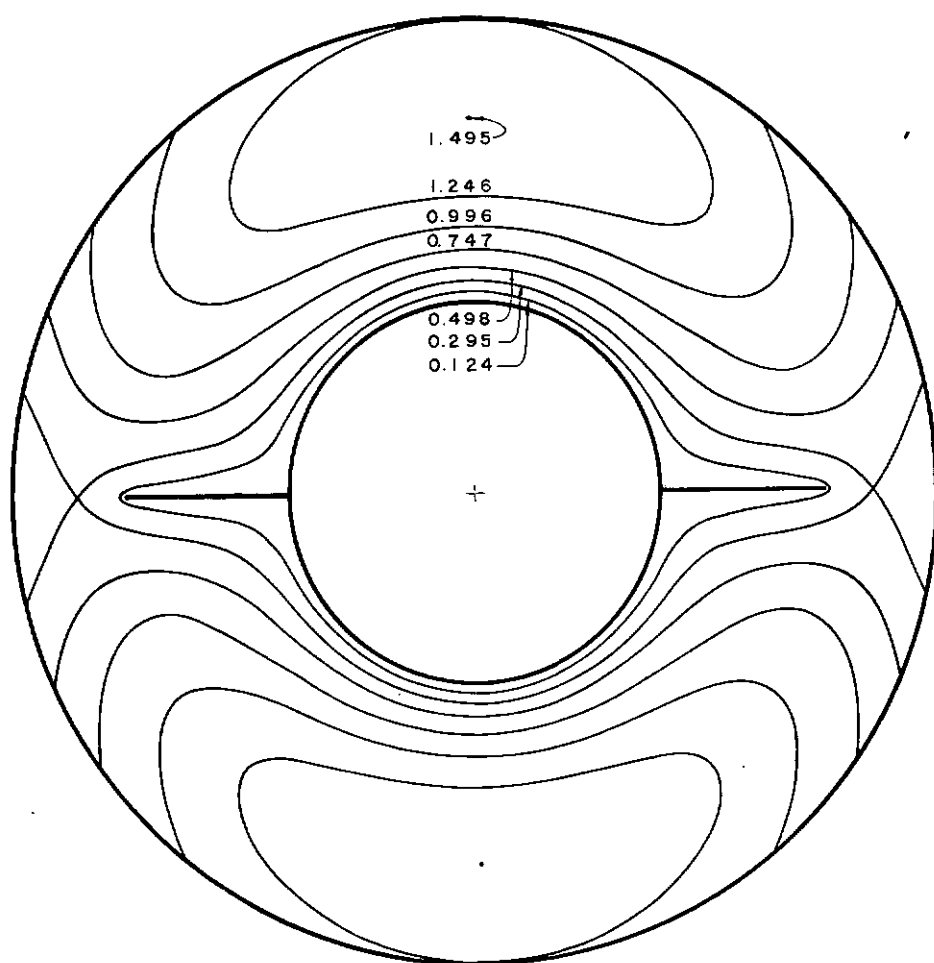


Fig. (VI-49) - Distribuição de temperatura  $T/T_b$  para  $r_i = 0,4$ ,  
 $L = 0,2$ ,  $m = 2$  e  $W_e = -0,55$

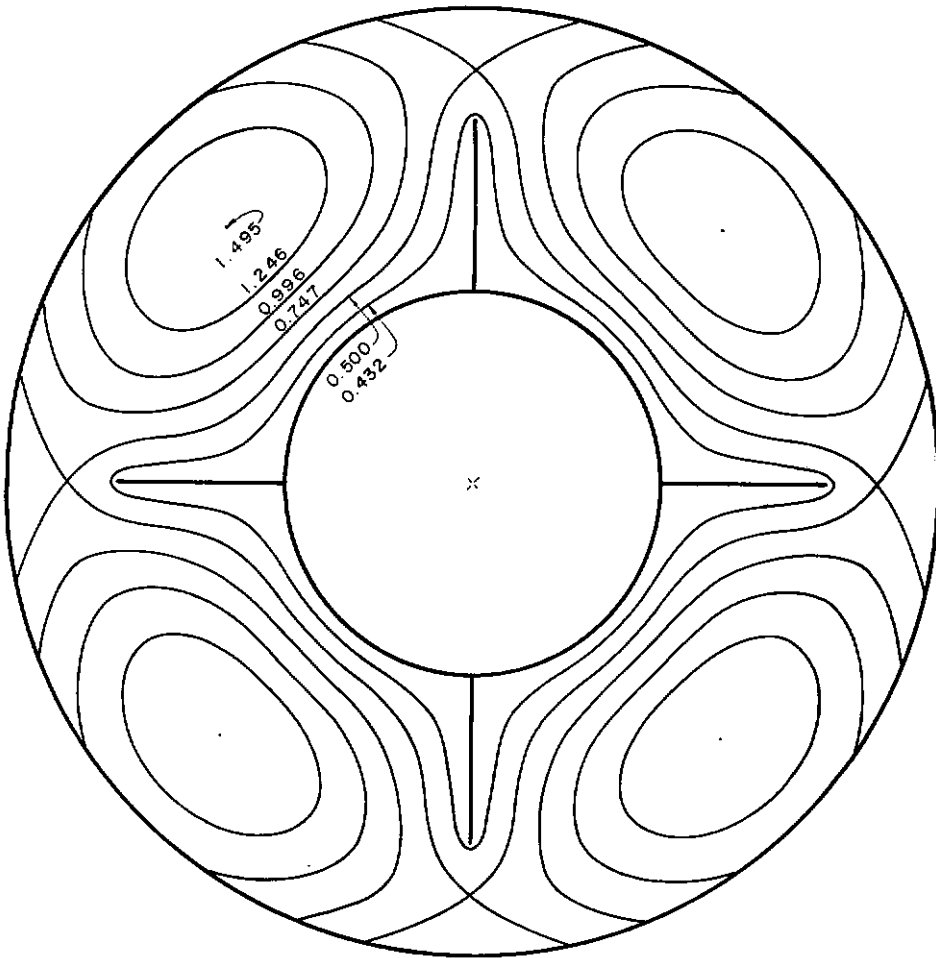


Fig. (VI-50) - Distribuição de temperatura  $T/T_b$  para  $r_i = 0,4$ ,  
 $L = 0,6$ ,  $m = 4$  e  $W_e = -0,55$

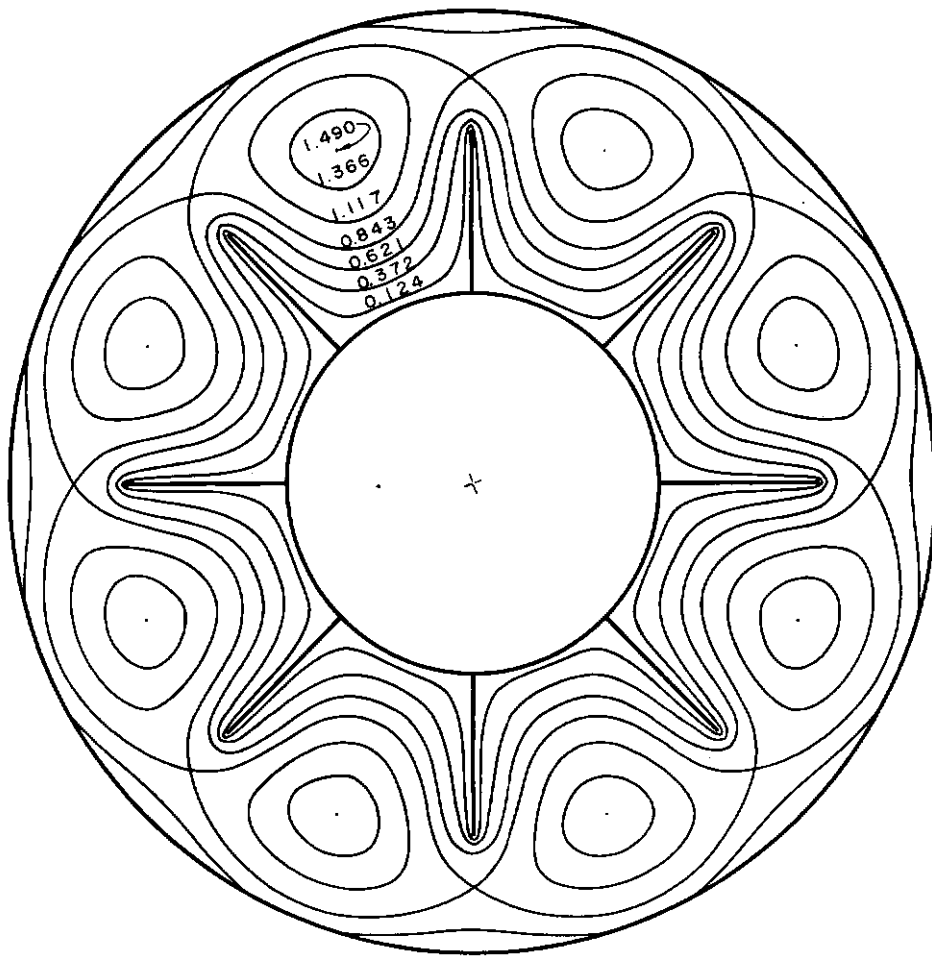


Fig. (VI-51) - Distribuição de temperatura  $T/T_b$  para  $r_i = 0,4$ ,  
 $L = 0,6$ ,  $m = 8$  e  $W_e = -0,55$

buição de temperatura  $T/T_b$ , sobre a linha de simetria do setor de coroa circular da figura (III-1). Paralelamente, foi analisada a influência destes mesmos parâmetros sobre a distribuição de fluxo local  $q_a/\bar{q}_a$ , nas aletas e no tubo interno. As figuras (VI-52)-(VI-57) ilustram essa análise para o caso particular de  $W_e = 0$ , onde o fluxo local foi calculado por aproximação linear da derivada normal da temperatura na parede aletada.

A visualização do efeito produzido pela variação da altura das aletas, sobre a distribuição de fluxo local nas aletas e no tubo interno para  $L < 1$ , é bastante elucidativa, no que concerne à análise de desempenho da parede aletada.

Foram calculados dois padrões dessa distribuição para o caso particular de  $r_i = 0,3$ ; caso onde o desempenho do duplo-tubo aletado é bastante elevado. Os resultados são apresentados nas figuras (VI-58) e (VI-59); o fluxo local foi calculado também por aproximação linear da derivada normal da temperatura na parede aletada. Na extremidade das aletas porém, surge imprecisão de cálculo devido a existência de oscilações de Gibbs, decorrentes da série de Fourier representativa da condição de contorno, isto é, da solução da equação integral (V-16). Por isso, os valores do fluxo local na extremidade das aletas foram extrapolados dos valores próximos da extremidade, correspondentes a  $r < r_a$ .

O desempenho da parede aletada, para a condição de contorno discutida no capítulo V, é avaliado com base nas curvas de dependência, entre o número de Nusselt  $\overline{NU}_m = \overline{NU}_{Di}$  definido pela equação (V-50) e os parâmetros  $r_i$ ,  $m$  e  $L$ , para cada valor de  $W_e$  fixo.

As figuras (VI-60)-(VI-67) mostram as curvas de  $\overline{NU}_m/\overline{NU}_o$  como funções do número de aletas  $m$ , para cada altura de aletas  $L$ , fixa e para cada relação de raios  $r_i$ , no caso particular de  $W_e = 0$  isto é, isolamento no tubo externo, onde  $\overline{NU}_o$  é o número de Nusselt relativo ao duplo-tubo não aletado. Os valores de  $\overline{NU}_m$  foram calculados analiticamente pelas equações (V-44) e (V-54) para  $r_i \geq 0,3$ , e foram calculados numericamente para  $r_i < 0,3$ . A temperatura média de mistura  $T_b$  para  $r_i < 0,3$ , foi calculada numericamente, usando os dados obtidos das equações (V-31) e (III-39).

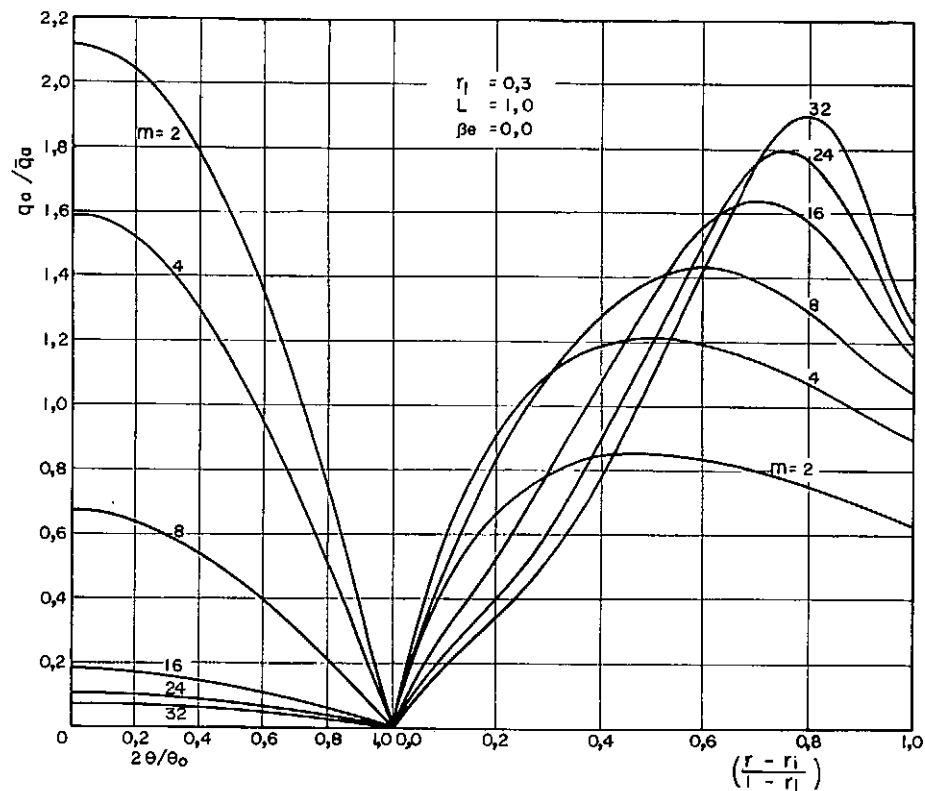


Fig. (VI-52) - Efeito do número de aletas sobre a distribuição de fluxo local nas aletas e no tubo interno para  $r_i = 0,3$  e  $W_e = 0$ .

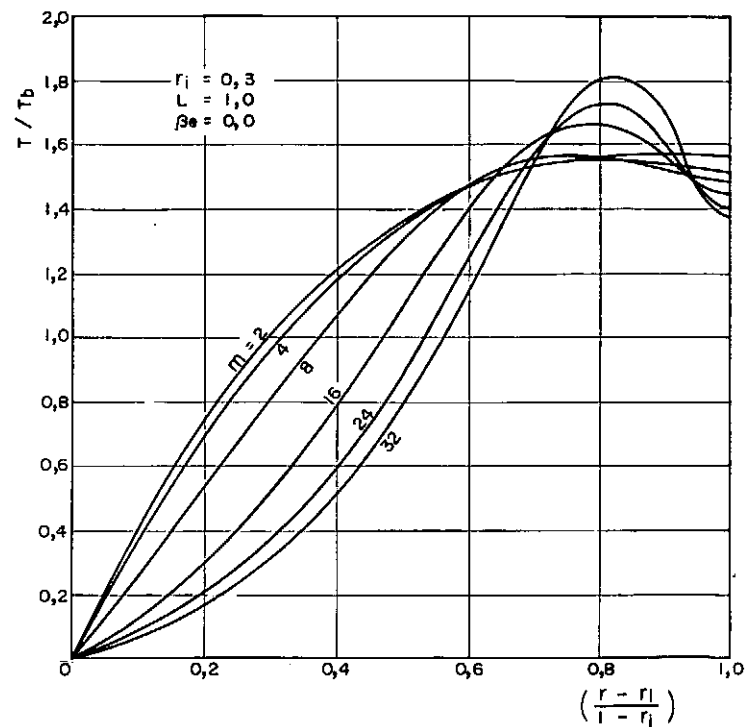


Fig. (VI-53) - Efeito do número de aletas sobre a distribuição de temperatura  $T/T_b$  ao longo da linha de simetria do setor, para  $r_i = 0,3$  e  $W_e = 0$ .

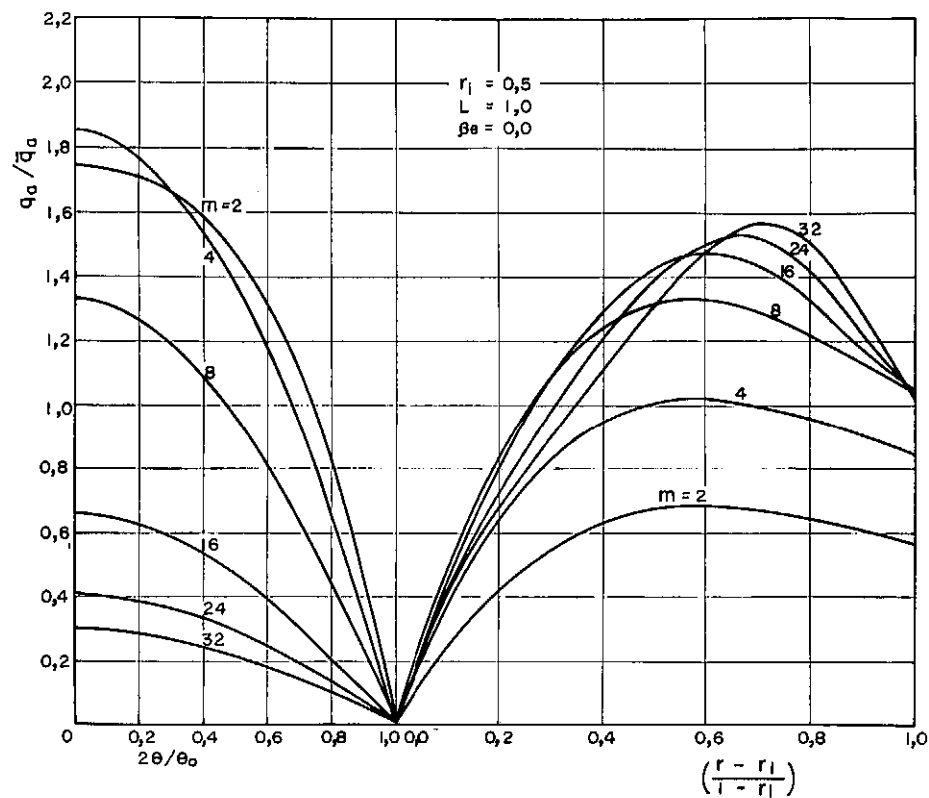


Fig. (VI-54) - Efeito do número de aletas sobre a distribuição de fluxo local nas aletas e no tubo interno para  $r_i = 0,5$  e  $W_e = 0$ .

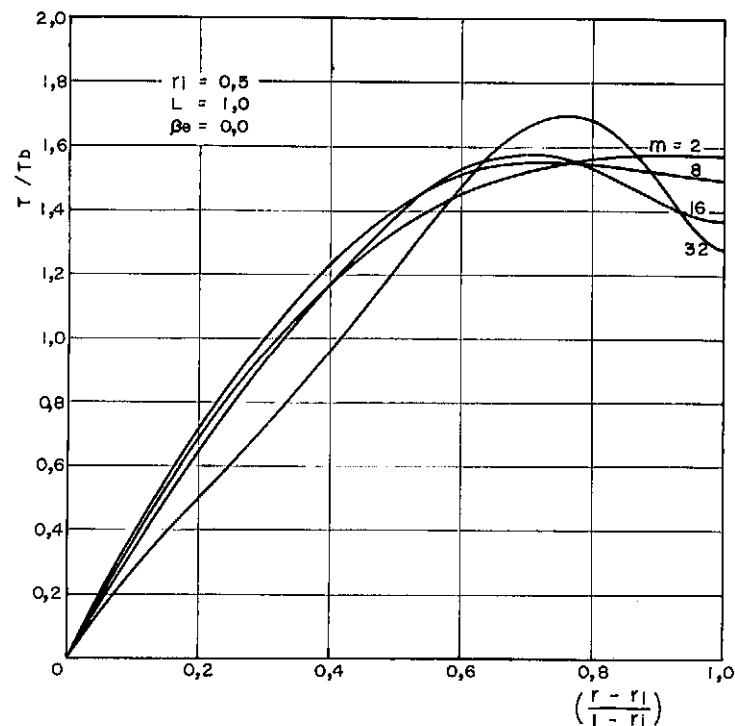


Fig. (VI-55) - Efeito do número de aletas sobre a distribuição de temperatura  $T/T_b$  ao longo da linha de simetria do setor, para  $r_i = 0,5$  e  $W_e = 0$ .

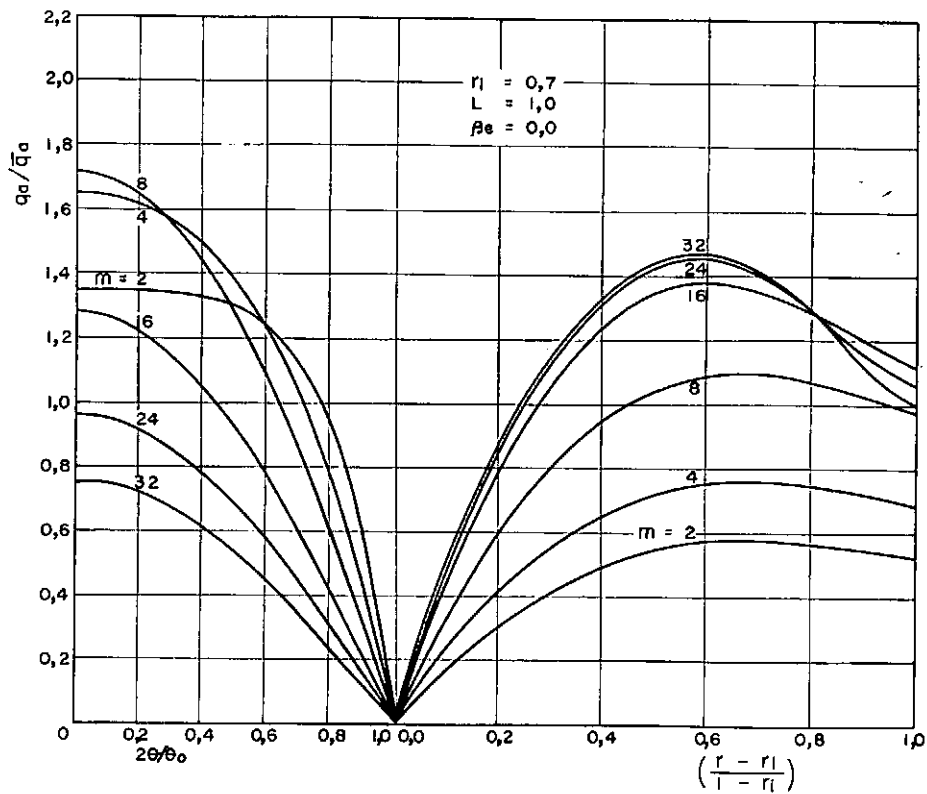


Fig.(VI-56) - Efeito do número de aletas sobre a distribuição de fluxo local nas aletas e no tubo interno para  $r_i = 0,7$  e  $W_e = 0$ .

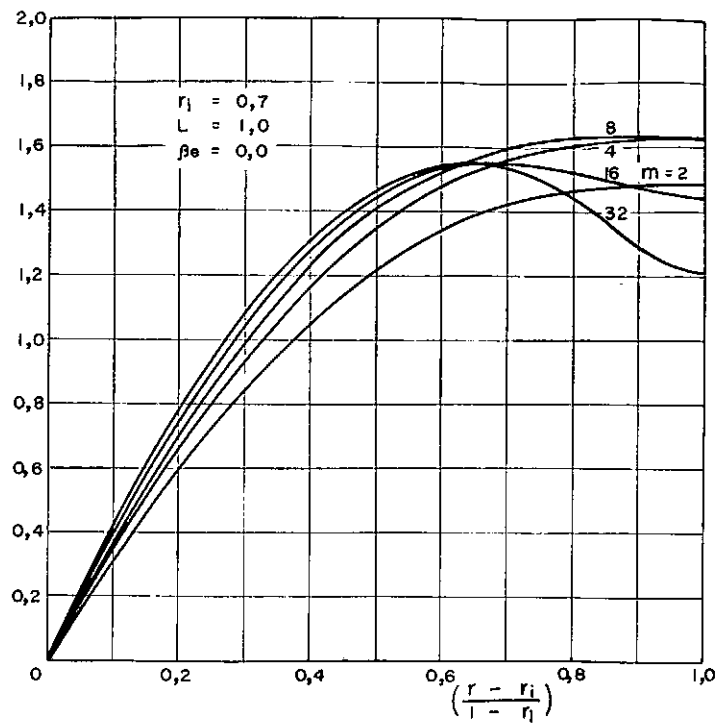


Fig.(VI-57) - Efeito do número de aletas sobre a distribuição de temperatura  $T/T_b$  ao longo da linha de simetria do setor, para  $r_i = 0,7$  e  $W_e = 0$ .

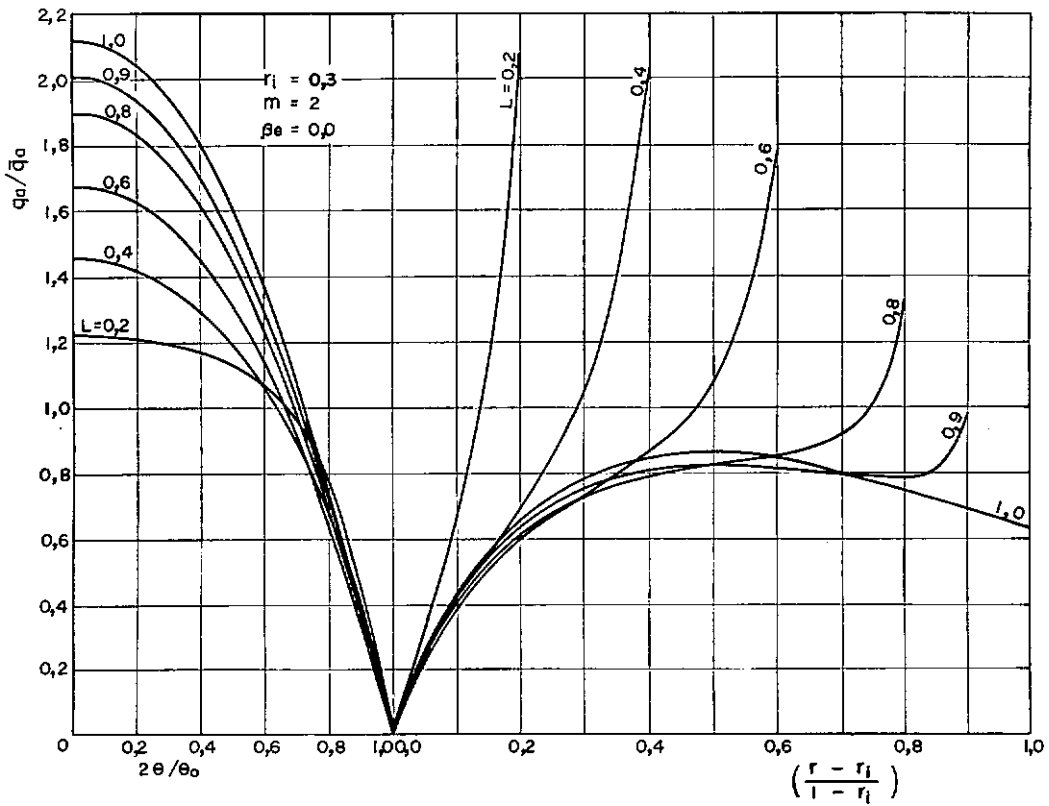


Fig.(VI-58) - Efeito da variação da altura das aletas sobre a distribuição de fluxo térmico local, para  $r_i = 0,3$ ,  $m = 2$  e  $W_e = 0$ .



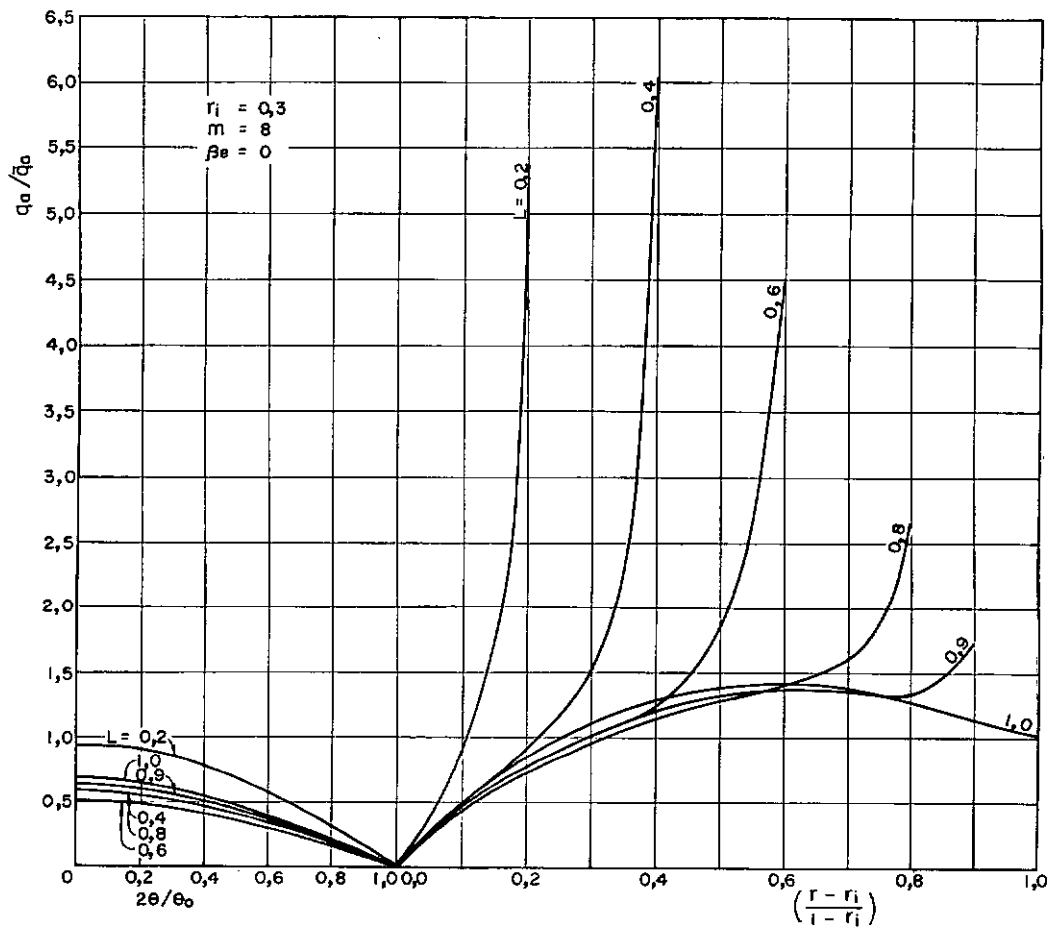


Fig. (VI-59) - Efeito da variação da altura das aletas sobre a distribuição de fluxo térmico local para  $r_i = 0.3$ ,  $m = 8$  e  $W_e = 0$ .

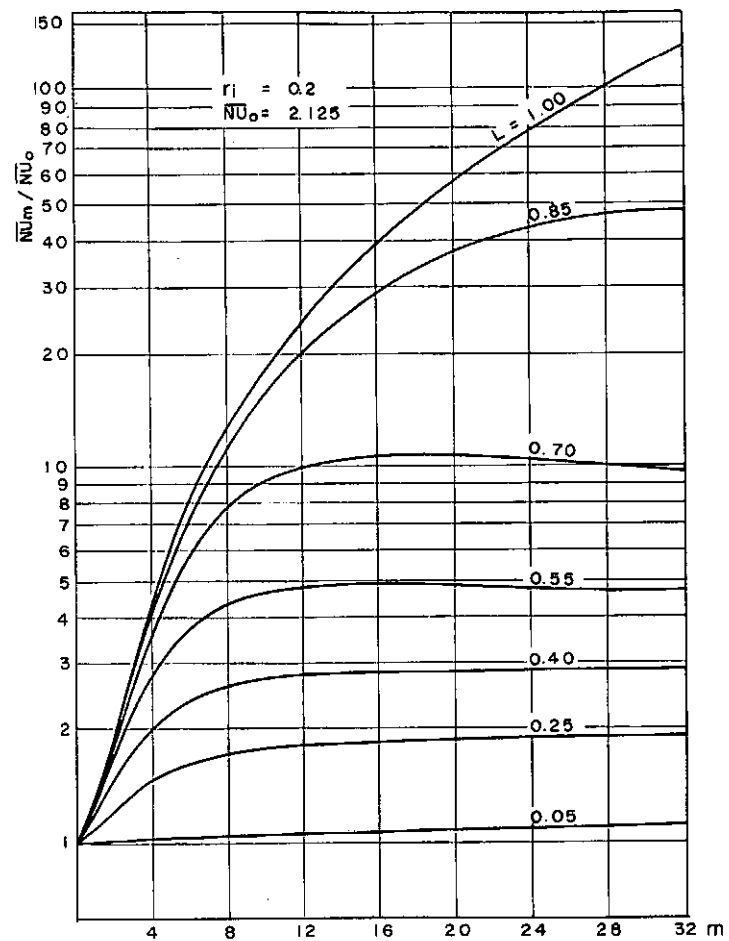


Fig. (VI-60)

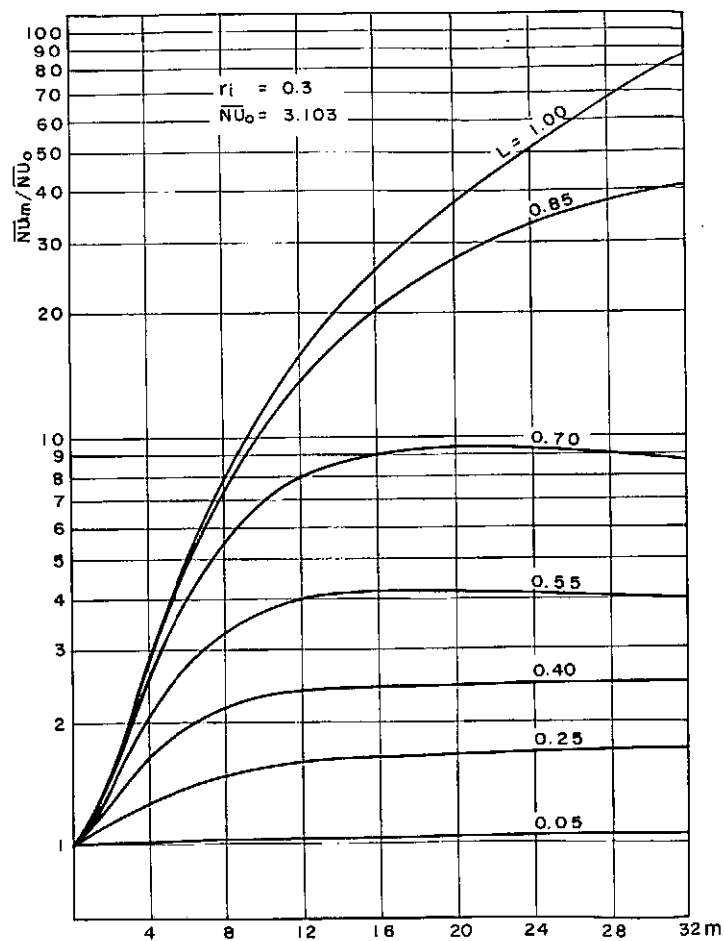


Fig. (VI-61)

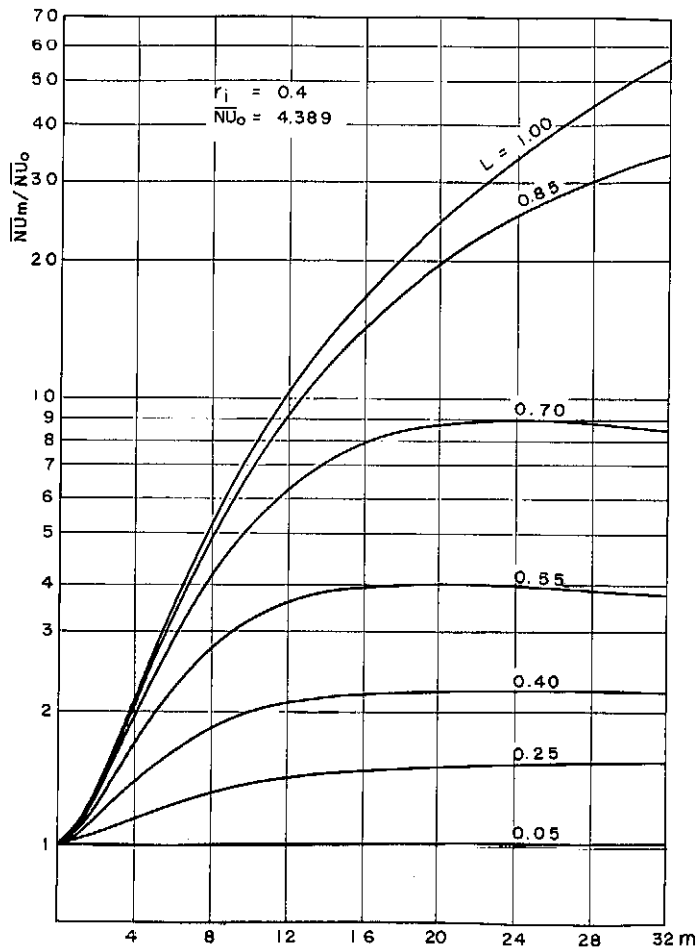


Fig. (VI-62)

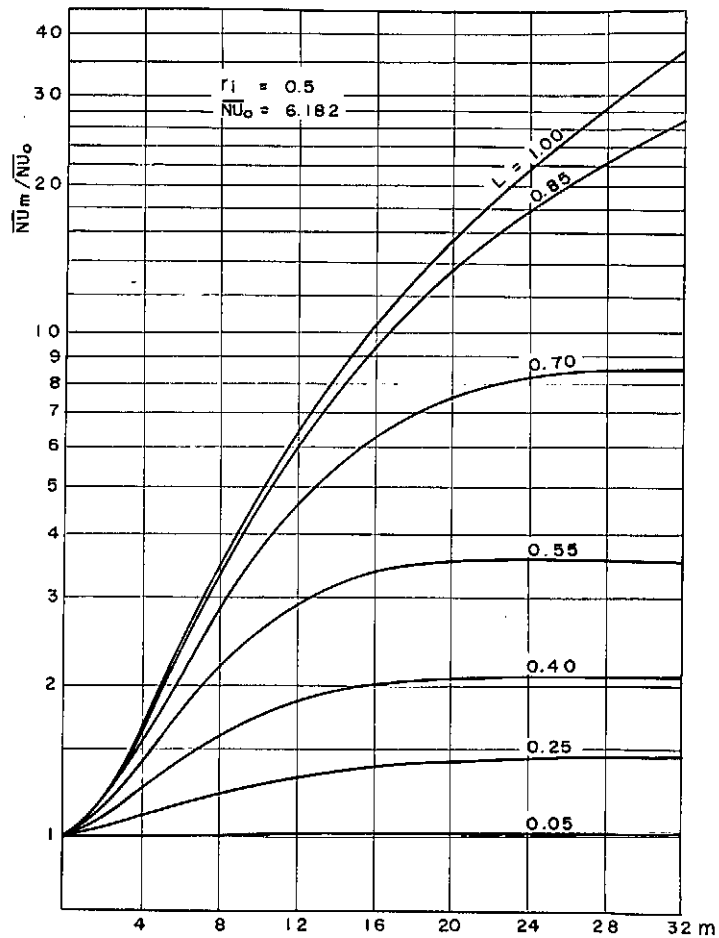


Fig. (VI-63)

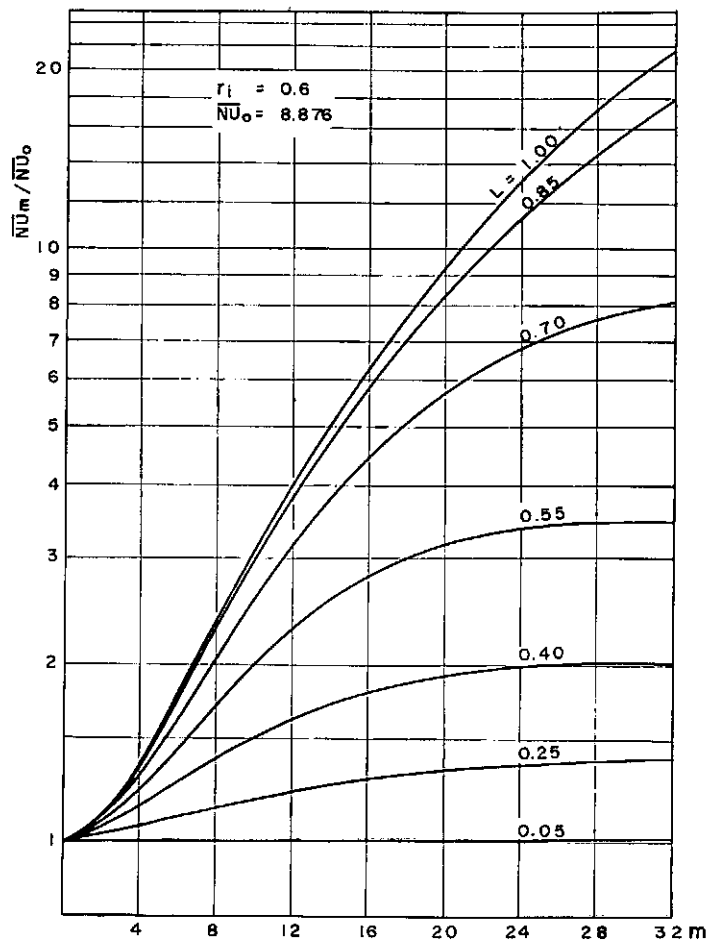


Fig. (VI-64)

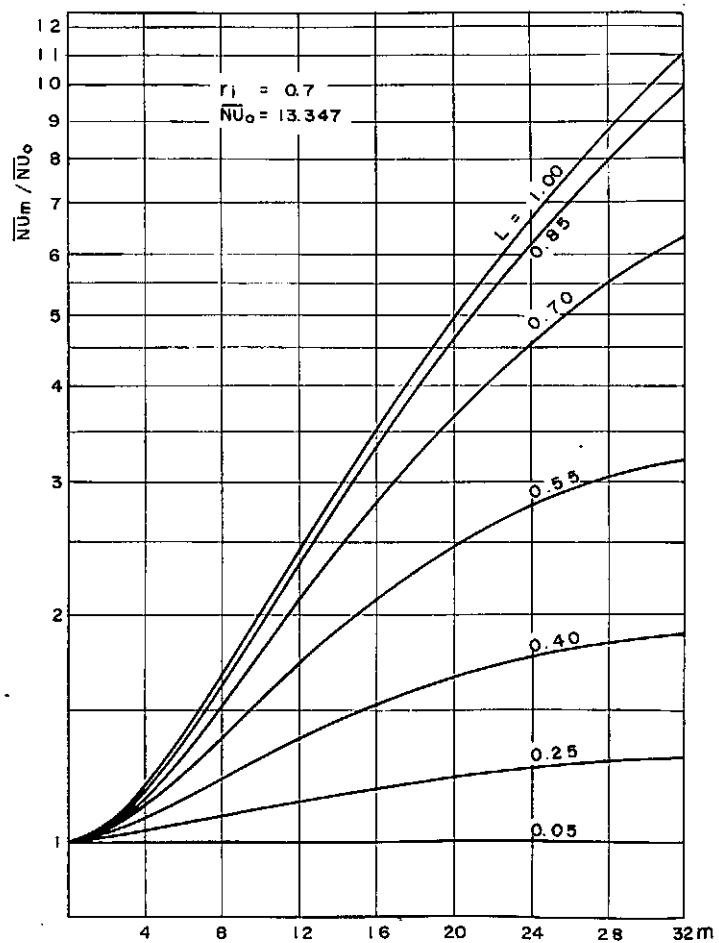


Fig. (VI-65)

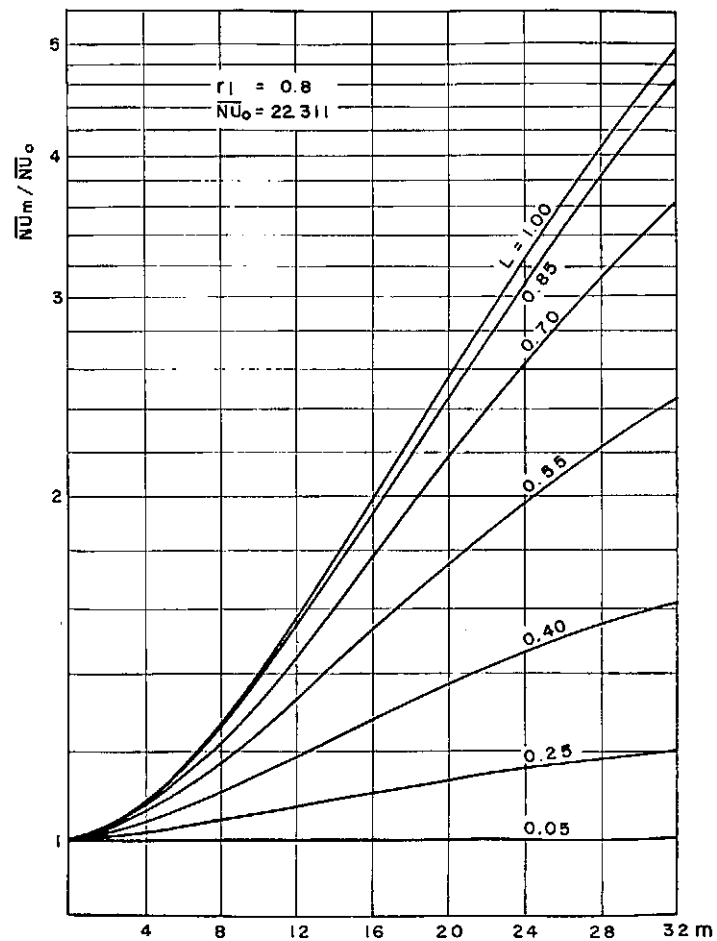


Fig. (VI-66)

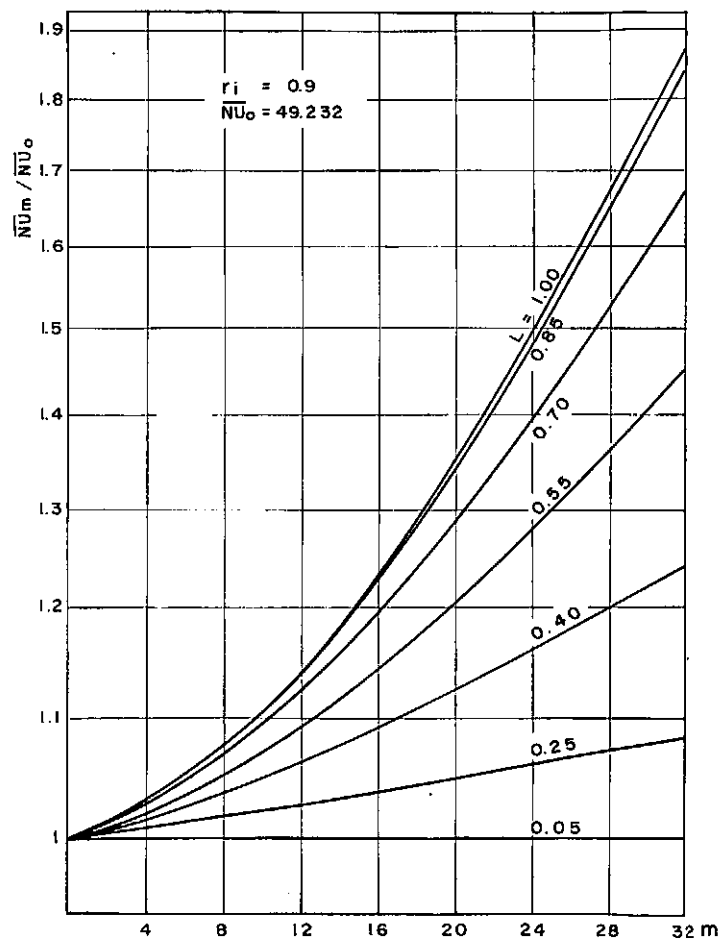


Fig. (VI-67)

Os resultados desses cálculos são apresentados nos quadros XVII a XXIV.

O efeito do fluxo térmico externo sobre o desempenho da parede aletada, foi avaliado para  $r_i = 0,4$  para valores particulares de  $W_e$  iguais a 0,2 e -0,2; este caso está representado na figura (VI-68).

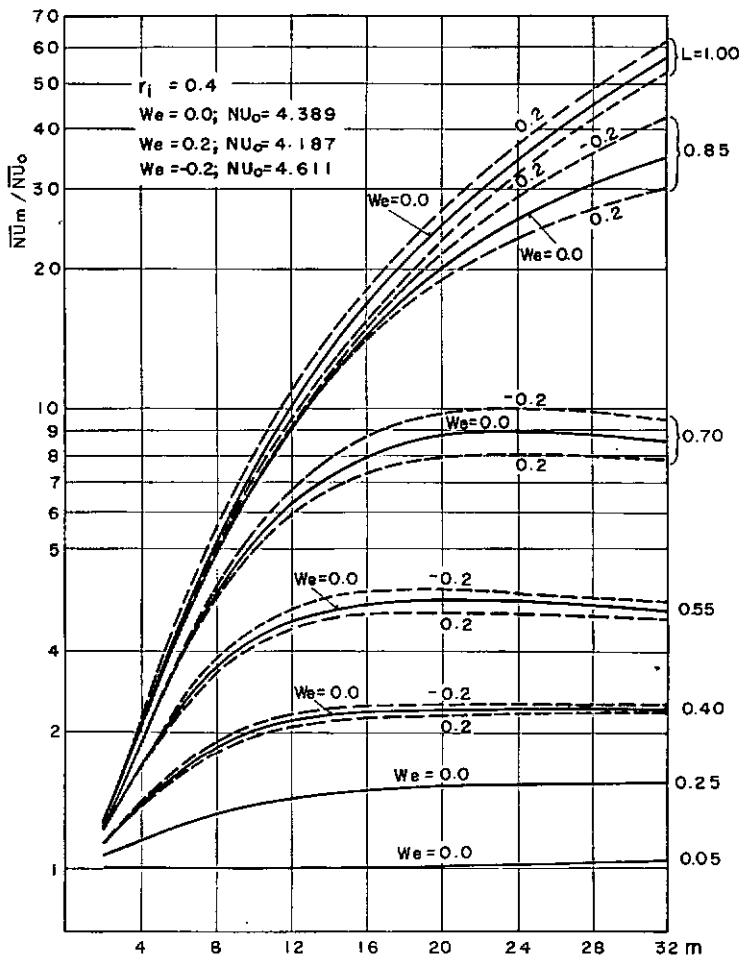


Fig. (VI-68) - Efeito do fluxo externo sobre o desempenho do Duplo-tubo aletado para  $r_i = 0,4$ .

$r_i = 0,2 \quad ; \quad \overline{NU}_{i_0} = 2,12$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	2,15	2,17	2,21	2,24	2,27	2,29	2,31	2,32	2,33
0,25	2,58	3,08	3,62	3,83	3,93	3,99	4,04	4,07	4,10
0,40	3,04	4,31	5,55	5,89	6,02	6,09	6,13	6,17	6,20
0,55	3,45	5,96	9,23	10,10	10,23	10,19	10,13	10,08	10,04
0,70	3,71	7,61	16,23	21,13	22,70	22,74	22,18	21,51	20,89
0,85	3,85	8,61	23,69	42,30	61,27	78,20	90,81	98,66	102,55
1,00	3,90	8,93	26,14	50,72	81,86	120,39	165,28	216,63	275,13
$r_i = 0,2 \quad ; \quad \overline{NU}_{h_0} = 8,50$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	7,45	6,63	5,39	4,51	3,84	3,33	2,91	2,57	2,29
0,25	5,71	4,47	2,86	1,94	1,39	1,05	0,822	0,661	0,543
0,40	5,16	4,23	2,60	1,64	1,12	0,807	0,611	0,479	0,386
0,55	4,66	4,28	2,89	1,79	1,17	0,815	0,599	0,458	0,362
0,70	4,12	4,18	3,65	2,60	1,76	1,22	0,868	0,643	0,492
0,85	3,58	3,75	4,02	3,82	3,44	3,00	2,53	2,08	1,70
1,00	3,09	3,17	3,46	3,51	3,48	3,47	3,44	3,41	3,38

Quadro XVII

$r_i = 0,3 \quad ; \quad \overline{NU}_{i_0} = 3,10$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	3,11	3,13	3,15	3,18	3,20	3,23	3,26	3,27	3,29
0,25	3,47	3,92	4,57	4,89	5,05	5,15	5,21	5,25	5,28
0,40	3,86	5,07	6,78	7,39	7,58	7,67	7,70	7,72	7,75
0,55	4,19	6,51	10,84	12,60	12,97	12,95	12,80	12,65	12,53
0,70	4,40	7,81	17,33	24,92	28,58	29,61	29,20	28,33	27,36
0,85	4,52	8,58	23,03	42,71	64,71	86,21	105,03	119,57	129,15
1,00	4,55	8,82	24,76	48,64	79,50	117,07	161,16	212,10	269,27
$r_i = 0,3 \quad ; \quad \overline{NU}_{h_0} = 7,24$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	6,65	6,15	5,31	4,65	4,12	3,70	3,33	3,02	2,75
0,25	5,44	4,48	3,20	2,33	1,76	1,37	1,10	0,898	0,749
0,40	4,97	4,24	3,03	2,07	1,46	1,09	0,836	0,663	0,539
0,55	4,53	4,19	3,38	2,34	1,60	1,14	0,847	0,652	0,517
0,70	4,06	4,99	4,00	3,29	2,45	1,78	1,30	0,975	0,748
0,85	3,61	3,59	4,10	4,23	4,08	3,77	3,37	2,94	2,51
1,00	3,18	3,07	3,51	3,74	3,85	3,89	3,91	3,91	3,91

Quadro XVIII



$r_i = 0,4 \quad ; \quad \overline{NU}_{i_0} = 4,39$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	4,40	4,41	4,43	4,45	4,47	4,48	4,50	4,52	4,53
0,25	4,71	5,11	5,82	6,28	6,53	6,67	6,75	6,81	6,95
0,40	5,03	6,13	8,19	9,29	9,71	9,84	9,88	9,88	9,88
0,55	5,30	7,32	12,24	15,45	16,75	16,97	16,83	16,45	16,20
0,70	5,47	8,30	17,61	27,61	34,71	38,20	39,10	38,57	37,47
0,85	5,56	8,87	21,55	40,40	63,26	88,11	112,54	133,71	152,23
1,00	5,60	9,07	22,86	44,62	73,52	109,31	151,40	197,10	251,55
$r_i = 0,4 \quad ; \quad \overline{NU}_{h_0} = 6,58$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	6,21	5,88	5,29	4,79	4,37	4,01	3,69	3,41	3,16
0,25	5,34	4,56	3,51	2,75	2,18	1,76	1,44	1,20	1,02
0,40	4,92	4,28	3,38	2,56	1,92	1,46	1,15	0,924	0,759
0,55	4,53	4,12	3,70	2,94	2,19	1,63	1,23	0,952	0,760
0,70	4,13	3,86	4,08	3,85	3,24	2,56	1,97	1,52	1,18
0,85	3,74	3,46	3,95	4,32	4,43	4,37	4,15	3,82	3,46
1,00	3,37	3,03	3,40	3,77	4,01	4,17	4,26	4,27	4,32

$r_i = 0,5 \quad ; \quad \overline{NU}_{i_0} = 6,18$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	6,19	6,20	6,21	6,23	6,24	6,26	6,28	6,29	6,31
0,25	6,46	6,82	7,54	8,11	8,50	8,75	8,91	9,00	9,07
0,40	6,74	7,69	9,88	11,55	12,47	12,88	13,03	13,06	13,04
0,55	6,96	8,62	13,50	18,07	20,92	22,17	22,46	22,29	21,96
0,70	7,97	9,35	17,56	28,33	38,72	46,53	51,09	52,96	52,97
0,85	7,17	9,77	20,24	36,73	58,16	83,21	110,56	138,89	165,62
1,00	7,21	9,93	21,21	39,61	64,70	96,22	134,02	178,30	227,55
$r_i = 0,5 \quad ; \quad \overline{NU}_{h_0} = 6,18$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	5,93	5,71	5,29	4,92	4,59	4,29	4,03	3,79	3,57
0,25	5,29	4,67	3,80	3,15	2,63	2,21	1,87	1,60	1,38
0,40	4,95	4,35	3,65	3,03	2,44	1,96	1,59	1,31	1,09
0,55	4,62	4,11	3,83	3,43	2,85	2,27	1,80	1,43	1,16
0,70	4,27	3,81	3,96	4,08	3,88	3,43	2,89	2,38	1,93
0,85	3,94	3,45	3,72	4,15	4,47	4,63	4,66	4,59	4,41
1,00	3,63	3,06	3,23	3,61	3,94	4,18	4,37	4,53	4,63

$r_i = 0,6 \quad ; \quad \overline{NU}_{i_0} = 8,87$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	8,87	8,88	8,89	8,90	8,91	8,93	8,94	8,95	8,97
0,25	9,11	9,42	10,11	10,74	11,27	11,67	11,97	12,18	12,32
0,40	9,36	10,15	12,23	14,26	15,83	16,86	17,45	17,73	17,84
0,55	9,55	10,86	15,16	20,25	24,79	28,03	29,90	30,71	30,85
0,70	9,66	11,38	18,04	27,84	39,25	50,60	60,36	67,58	72,12
0,85	9,73	11,68	19,86	33,25	51,31	73,62	99,62	128,51	159,41
1,00	9,76	11,80	20,50	35,05	55,15	80,69	111,65	147,96	189,56
$r_i = 0,6 \quad ; \quad \overline{NU}_{h_0} = 5,91$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	5,75	5,59	5,29	5,02	4,78	4,55	4,34	4,14	3,96
0,25	5,28	4,80	4,08	3,53	3,08	2,70	2,37	2,10	1,86
0,40	5,02	4,48	3,87	3,41	2,97	2,55	2,17	1,85	1,58
0,55	4,75	4,20	3,87	3,69	3,39	2,99	2,56	2,16	1,81
0,70	4,47	3,89	3,80	4,00	4,10	4,02	3,77	3,41	3,00
0,85	4,20	3,56	3,52	3,87	4,23	4,53	4,75	4,89	4,96
1,00	3,94	3,23	3,09	3,37	3,68	3,96	4,20	4,40	4,57

$r_i = 0,7 \quad ; \quad \overline{NU}_{i_0} = 13,33$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	13,35	13,36	13,37	13,38	13,39	13,40	13,41	13,42	13,43
0,25	13,57	13,84	14,47	15,12	15,73	16,28	16,75	17,13	17,44
0,40	13,80	14,43	16,24	18,35	20,30	22,14	23,53	24,25	25,24
0,55	13,96	14,95	18,37	23,07	28,21	33,18	37,44	40,72	43,00
0,70	14,06	15,31	20,21	27,97	37,88	49,29	61,41	73,29	84,22
0,85	14,12	15,53	21,35	31,34	44,85	61,97	82,48	106,13	132,78
1,00	14,15	15,62	21,78	32,43	47,28	66,21	89,19	116,25	147,47
$r_i = 0,7 \quad ; \quad \overline{NU}_{h_0} = 5,72$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	5,61	5,55	5,31	5,13	4,95	4,78	4,63	4,48	4,33
0,25	5,30	4,94	4,38	3,93	3,56	3,24	2,95	2,70	2,47
0,40	5,10	4,66	4,11	3,74	3,43	3,13	2,84	2,55	2,29
0,55	4,90	4,39	3,94	3,79	3,68	3,51	3,29	3,02	2,72
0,70	4,69	4,10	3,73	3,79	3,94	4,06	4,11	4,07	3,94
0,85	4,48	3,82	3,43	3,56	3,82	4,09	4,35	4,58	4,79
1,00	4,28	3,54	3,08	3,15	3,35	3,58	3,81	4,02	4,21

$r_i = 0,8 \quad ; \quad \overline{NU}_{i_0} = 22,31$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	22,32	22,32	22,33	22,34	22,35	22,36	22,37	22,38	22,39
0,25	22,52	22,76	23,30	23,91	24,54	25,17	25,76	26,32	26,83
0,40	22,73	23,24	24,64	26,48	28,50	30,59	32,61	34,48	36,19
0,55	22,87	23,64	26,02	29,60	34,05	39,03	44,23	49,44	54,41
0,70	22,96	23,88	27,03	32,21	39,33	48,01	58,03	69,20	81,19
0,85	23,02	24,06	27,70	34,01	42,97	54,48	68,32	84,65	103,23
1,00	23,05	24,13	27,95	34,64	44,28	56,72	71,84	89,60	109,96
$r_i = 0,8 \quad ; \quad \overline{NU}_{h_0} = 5,58$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	5,52	5,45	5,33	5,22	5,11	5,00	4,90	4,80	4,70
0,25	5,32	5,09	4,69	4,36	4,08	3,82	3,59	3,39	3,19
0,40	5,19	4,88	4,41	4,09	3,85	3,64	3,45	3,26	3,08
0,55	5,06	4,67	4,17	3,93	3,82	3,74	3,68	3,59	3,49
0,70	4,92	4,44	3,90	3,72	3,72	3,80	3,89	3,99	4,07
0,85	4,78	4,23	3,62	3,45	3,48	3,61	3,78	3,97	4,16
1,00	4,64	4,01	3,33	3,11	3,11	3,20	3,34	3,49	3,64

$r_i = 0,9 \quad ; \quad \overline{NU}_{i_0} = 49,231$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	49,23	49,24	49,25	49,26	49,27	49,29	49,30	49,31	49,32
0,25	49,42	49,62	50,05	50,53	51,05	51,63	52,17	52,77	53,39
0,40	49,62	50,05	51,05	52,26	53,75	53,39	57,30	59,19	61,15
0,55	49,74	50,32	51,78	53,75	26,28	59,40	63,05	67,16	71,58
0,70	49,87	50,61	52,52	55,15	58,76	63,26	68,84	75,24	82,69
0,85	49,96	50,82	53,03	56,13	60,45	66,10	73,11	81,47	90,99
1,00	49,92	50,74	52,90	56,00	60,34	66,11	73,33	82,09	92,07
$r_i = 0,9 \quad ; \quad \overline{NU}_{h_0} = 5,470$									
$\begin{matrix} m \\ L \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,05	5,44	5,41	5,36	5,31	5,26	5,20	5,15	5,10	5,05
0,25	5,35	5,24	5,03	4,83	4,66	4,50	4,34	4,21	4,08
0,40	5,29	5,13	4,84	4,59	4,40	4,23	4,09	3,97	3,85
0,55	5,22	5,00	4,64	4,36	4,16	4,01	3,91	3,84	3,79
0,70	5,16	4,89	4,45	4,14	3,94	3,81	3,74	3,72	3,73
0,85	5,09	4,77	4,26	3,91	3,69	3,57	3,52	3,51	3,54
1,00	5,01	4,63	4,04	3,64	3,38	3,22	3,14	3,12	3,12

#### VI.4 - Comparação dos Resultados

Parecem existir muito poucos dados experimentais e teóricos disponíveis, referentes ao estudo da convecção forçada laminar em dutos aletados. Até a presente data, os únicos estudos teóricos a respeito parecem estar contidos em [34], [42] e [49].

Contudo, para certos casos-limite, a geometria da secção transversal do duplo-tubo aletado se assemelha a geometrias de secções de dutos para os quais já foram feitos estudos sobre convecção forçada laminar, como é o caso de [3] e [45].

Por exemplo, para  $L = 1$ , a medida que  $r_i$  tende a zero, o setor de coroa circular de raio interno  $r_i$  e ângulo  $\theta_0$ , segundo a figura (III-1), tende a um setor de círculo com mesmo ângulo de abertura  $\theta_0$ . Para várias relações de raios  $r_i$ , foram comparados os resultados obtidos na presente pesquisa, com os resultados de [3].

Na realidade, esta comparação não é apropriada uma vez que na geometria de [3], foram analisadas para a secção de setor circular, duas condições homogêneas de contorno; o fluxo térmico perifericamente constante e temperatura perifericamente constante, com fluxo constante no sentido longitudinal. No presente trabalho, porém, o fluxo térmico no tubo externo é nulo para as duas condições de contorno discutidas. Contudo, para pequenos ângulos, isto é, números de aletas da ordem de 32, espera-se que a condição de fluxo nulo, a qual é reduzida a uma pequena área, tenha papel irrelevante sobre o número de Nusselt. A comparação dos dados do presente trabalho para relações de raios da ordem de 0,1, 0,05 e 0,01, é feita através da figura (VI-69), na qual  $NU_f$  e  $\overline{NU}_t$  são números de Nusselt baseados no diâmetro hidráulico, os quais são expressos pelas equações (IV-48) e (V-51), respectivamente, para  $W_a=1$  e  $W_e=0$ . Esta figura foi construída com base nos dados numéricos do quadro XXV.

É possível escolher valores de  $W_e$  para o caso discutido no capítulo IV, tal que,  $\beta_i = \beta_a = \beta_e$ , isto é, o fluxo térmico seja perifericamente constante. Também é possível escolher va

Valores de $f \cdot Re_{Dh}$ ; $L = 1,0$									
$\begin{matrix} m \\ r_i \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,3	16,86	14,82	14,63	15,24	15,76	16,15	16,46	16,70	16,89
0,2	16,09	14,69	14,83	15,20	15,46	15,64	15,77	15,87	15,95
0,1	15,61	14,80	14,63	14,58	14,54	14,51	14,49	14,48	14,47
0,01	15,57	14,85	14,30	14,02	13,85	13,74	13,67	13,61	13,56
Número de Nusselt $NU_f$ ; $L = 1,0$ ; $W_a = 1,0$ ; $W_e = 0$									
$\begin{matrix} m \\ r_i \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,3	2,60	2,91	2,71	2,09	1,53	1,131	0,858	0,668	0,537
0,2	2,77	3,00	2,32	1,50	0,985	0,682	0,497	0,381	0,305
0,1	2,97	2,97	1,79	1,00	0,610	0,409	0,296	0,229	0,190
0,05	3,08	2,91	1,54	0,816	0,470	0,308	0,217	0,162	0,128
Número de Nusselt $\overline{NU}_t$ ; $L = 1,0$ ; $W_e = 0$									
$\begin{matrix} m \\ r_i \end{matrix}$	2	4	8	12	16	20	24	28	32
0,3	3,18	3,07	3,51	3,74	3,85	3,89	3,91	3,91	3,91
0,2	3,09	3,17	3,46	3,51	3,49	3,47	3,44	3,41	3,38
0,1	3,11	3,23	3,25	3,15	3,08	3,01	2,96	2,91	2,87
0,05	3,17	3,22	3,11	2,98	2,87	2,79	2,72	2,68	2,63

Quadro XXV



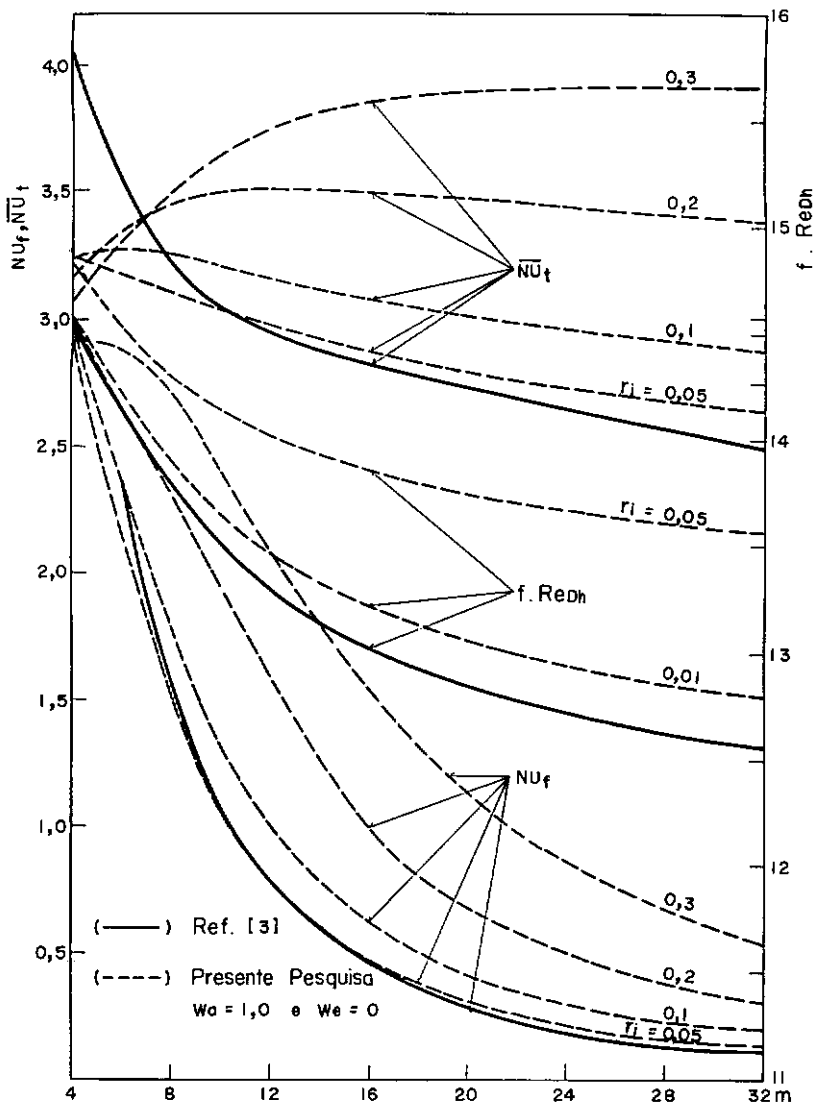
















Fig. (VI-69) Comparação do caso-limite  $L = 1$  e  $r_i = 0,0$  com os resultados obtidos por ECKERT et. Al.<sup>3</sup>.

lores de  $W_e$  para o caso discutido no capítulo V tal que a temperatura média na fronteira se aproxime da temperatura  $T_f^*$  ( $T_f = 0$ ), prescrita na parede aletada. Esses casos especiais são equivalentes às categorias de condições de contorno  $H_1$  e  $H_2$ , discutidas em [45].

Nos quadros XXVI são comparados os resultados relativos a várias formas geométricas semelhantes a secções retangulares. Neste quadro, os números de Nusselt  $NU$  e  $\overline{NU}$  referentes ao caso

			FLUXO PRESCRITO		TEMPERATURA PRESCRITA	
GEOMETRIAS			f. Rep <sub>h</sub>	NU	$\overline{NU}$	$\overline{NU}$
I a/b		$r_i = 0,4361$ $m = 8$	14,352	3,121	3,080	3,253
		$r_i = 0,6718$ $m = 16$	14,257	3,105	3,085	3,271
		$r_i = 0,7685$ $m = 24$	14,240	3,099	3,086	3,272
		$r_i = 0,8212$ $m = 32$	14,235	3,096	3,087	3,272
			14,227		3,091	3,608
II a/b		$r_i = 0,4361$ $m = 16$	15,362	2,720	2,804	3,754
		$r_i = 0,5650$ $m = 24$	15,468	2,946	2,916	3,878
		$r_i = 0,6718$ $m = 32$	15,503	3,054	2,961	3,815
		$r_i = 0,9064$ $m = 32$	15,547	2,736	3,019	3,228
			15,548		3,017	4,123
III a/b		$r_i = 0,3127$ $m = 24$	16,505	1,045	1,255	3,734
		$r_i = 0,4361$ $m = 32$	17,217	1,409	1,658	4,107
		$r_i = 0,9365$ $m = 24$	18,224	2,430	2,931	3,843
			18,233		2,930	5,331

Quadro XXVI - Comparação do caso-limite das geometria equivalentes com os resultados de SHAH & LONDON<sup>4 5</sup>.

do fluxo prescrito foram calculados pelas equações (IV-48) e (IV-49) enquanto que  $\overline{NU}$  e  $\overline{\overline{NU}}$  referentes ao caso da temperatura prescrita foram calculados pelas equações (V-51) e (V-56) respectivamente.

Um outro caso limite interessante de ser analisado é o limite quando  $m$  cresce indefinidamente. Quando o número de aletas cresce indefinidamente, espera-se que o espaçamento entre as aletas possa uniformizar a distribuição de temperatura entre elas. Espera-se portanto que, depois de certo limite, o conjunto das aletas se comporte como um novo tubo interno cujo raio seja o raio da ponta das aletas  $r_a$ . Esta hipótese pode ser inferida das figuras correspondentes às soluções das equações integrais e dos padrões de campo de velocidade e de temperatura para  $m = 16$ . Contudo, este caso-limite foi analisado para  $r_i = 0,5$  e  $W_e = 0$ ; os resultados são vistos na figura (VI-70), onde  $NU_m(r_a/r_i)$  é o número de Nusselt equivalente ao número de Nusselt  $NU_{Da}$  correspondente ao duplo-tubo cujo diâmetro interno é  $D_a$ .

Todos os dados apresentados neste capítulo foram calculados num computador IBM 370/135, através de um programa unificado em linguagem FORTRAN. A listagem do programa e dos dados aqui apresentados estão a disposição dos interessados com o autor.

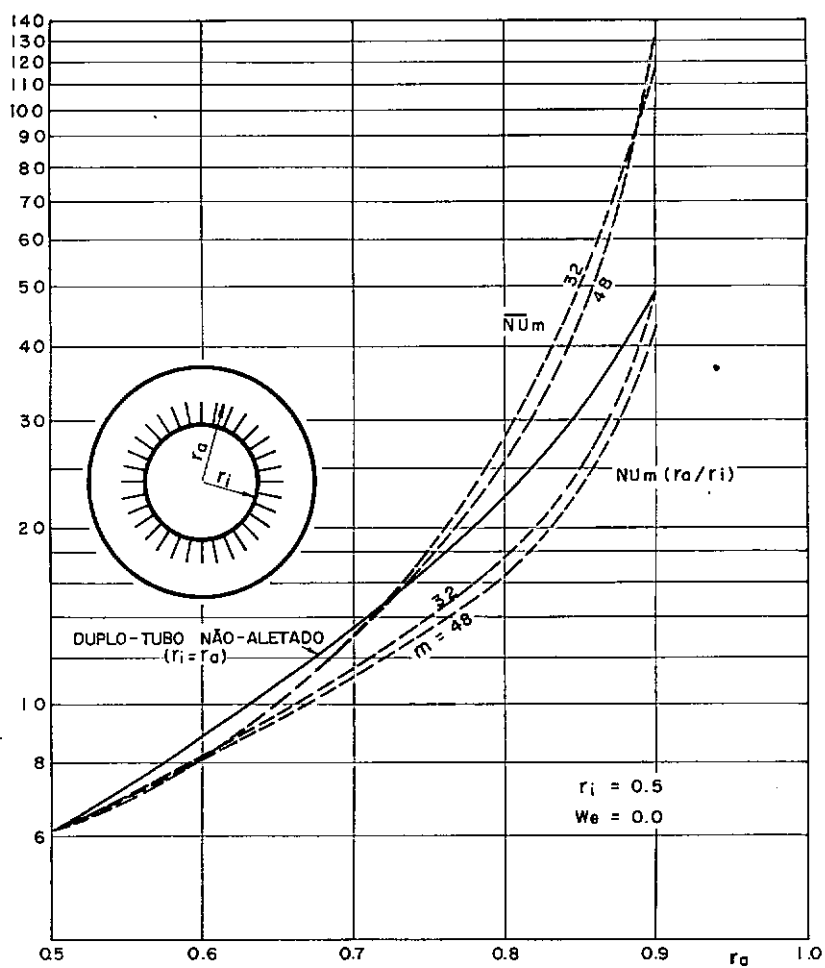


Fig. (VI-70) - Comparação do caso-limite para grandes números de aletas com o duplo-tubo não-aletado de relação de raios  $r_a$ .

## C A P Í T U L O    V I I

## DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

VII.1 - Distribuição de Velocidade e Perda de Carga

Antes de quaisquer discussões de caráter quantitativo sobre a perda de carga no duplo tubo aletado, fazem-se necessárias considerações qualitativas sobre a influência do número de aletas e da altura das mesmas sobre a distribuição de velocidade na seção transversal do duto.

As soluções expostas nas figuras (VII-1)-(VI-3) respondem de certa forma ao estabelecimento da hipótese inicial de que a espessura das aletas é desprezável; pelo comportamento das soluções na vizinhança da extremidade das aletas, não é surpreendente o fato de que as extremidades das aletas sejam pontos de concentração de gradientes ou, então, de tensões viscosas, como pode-se observar nas distribuições de velocidade das figuras (VI-4) - (VI-7). Na prática, esse fenômeno ocorre tanto mais intensamente, quanto mais delgadas forem as aletas.

Nas figuras (VI-2) e (VI-3), constata-se também a existência do limite interior para as soluções da equação (III-22); esses limites ocorrem, como consequência do fato de o aumento do número de aletas deslocar os núcleos individuais de escoamento, separados pelos pontos "sela", para fora da parede aletada, o que resulta, no limite, um escoamento análogo ao escoamento laminar de um duplo-tubo não-aletado cuja relação de raios é  $r_a$ , conforme o padrão de campo de velocidade visto na figura (VI-7). A aproximação do escoamento do duplo-tubo aletado ao limite, na realidade não se faz uniformemente, pelo fato de a derivada radial da velocidade na extremidade das aletas ser singular.

A configuração do campo de velocidade, depende no escoamento laminar, somente da geometria da secção transversal do duto, isto é, do número e altura das aletas. À medida que a altura  $L$  das aletas aumenta, os núcleos de escoamento aumentam sua identidade, até o limite  $L = 1$ , para o qual os escoamentos se tornam independentes. Os padrões de distribuição de velocidade, neste caso, podem ser vistos em [46]. O aumento do número de aletas  $m$ , por outro lado, diminui a identidade desses núcleos de escoamento, gerando no limite quando  $m$  tende ao infinito, o escoamento de um duplo-tubo não-aletado de relação de raios  $r_a$ , onde  $r_a$  é o raio correspondente a uma superfície cilíndrica passando rente a extremidade das aletas.

Esta discussão inicial auxiliará em grande parte, a interpretar o comportamento das curvas de fator de atrito contidas nas figuras (VI-9)-(VI-16). Nessas figuras, para todas as relações de raios  $r_i$  no intervalo  $0,2 \leq r_i \leq 0,9$  as curvas de  $f \cdot \text{Re}_{Dh}$  apresentam um mínimo para valores de  $L$  vizinhos da unidade, sendo que esses mínimos correspondem a valores de  $f \cdot \text{Re}_{Dh}$  próximos de 14,22; esse resultado não é surpreendente, uma vez que para cada relação de raio  $r_i$ , o ponto de mínimo  $m$  para  $L = 1$ , corresponde a secções transversais cujas geometrias se assemelham a geometria da secção transversal de um duto quadrangular, para o qual o produto  $f \cdot \text{Re}_{Dh}$  é igual a 14,22.

A existência dos mínimos para  $L$  vizinho da unidade pode ser interpretada em função da identificação dos núcleos secundários de escoamento, os quais adquirem identidade a medida que  $L$  cresce. O aumento de  $m$ , por sua vez, a partir do valor de  $m$  correspondente ao mínimo, elimina essa identidade, como também pode ser observado na figura (VI-7).

O outro conjunto de curvas, representativas do produto  $f \cdot \text{Re}_{Dh} (D_e/D_h)$ , o qual é função somente do inverso da velocidade média adimensional  $u_m$ , serve para três propósitos; nos mostram a taxa de diminuição de  $u_m$  com o aumento de  $L$  e  $m$ ; nos permitem comparar as soluções para grandes valores de  $m$  com a solução

laminar do duplo-tubo não-aletado de relação de raio  $r_a$  e, finalmente, permitem o cálculo do fator de atrito  $f$  por meio de curvas mais bem comportadas que as curvas correspondentes a  $f \cdot Re_{D_h}$ . Para grandes números de aletas  $m$ , da ordem de 64, para  $L < 1$ , a velocidade média  $u_m$  é levemente superior a velocidade média  $u_{mo}$  correspondente ao duplo-tubo não-aletado de raio  $r_a = r_i + L(1 - r_i)$ ; a diferença se deve ao fato de existir sempre um espaço residual entre as aletas que permite deslizamento do fluido, fato este que não ocorre no duplo-tubo não-aletado de relação de raios  $r_a$ . Na prática, existe um limite para tal comparação que é estabelecido pela espessura finita das aletas. Todavia, com excessão do caso-limite discutido acima, todos os casos-limite são geometrias cujos dados teóricos de comparação foram corroborados experimentalmente.

Um caso-limite que oferece possibilidade de comparação com dados existentes, é o limite quando  $r_i$  tende a zero. Na figura (VI-69) vemos os dados de ECKERT, et.al.<sup>3</sup> representados pela curva cheia, enquanto que os dados da presente análise são representados por curvas tracejadas, para  $r_i = 0,05$  e  $0,01$  e  $L = 1$ . A discrepância que para  $r_i = 0,01$  é aproximadamente de 1,8%, diminui com o decréscimo de  $m$  até o ponto correspondente a  $m = 4$ , onde os dados quase conferem com exatidão. Esta discordância pode ser justificada pelo aumento da influência da presença da superfície do tubo interno a medida que  $m$  aumenta. Para  $L = 1$ , existem relações entre  $r_i$  e  $m$  para as quais as secções transversais dos dutos individuais se assemelham a retângulos das mais variadas formas. Esta particularidade permite comparar os dados da presente análise com o resumo apresentado por SHAH & LONDON em [45]. O quadro XXVI mostra a comparação dessas geometrias e mostra também, a concordância dos dados da presente análise na medida que aumenta a semelhança das secções analisadas.

## VII.2 - Distribuição da Temperatura e Desempenho para Fluxo Prescrito.

Para melhor descrever o desempenho do duplo-tubo aletado,

é indispensável conhecer alguns aspectos qualitativos da distribuição de temperatura na secção e na parede aletada.

A influência do número de aletas sobre a distribuição de temperatura na secção transversal do duto pode ser avaliada pelas figuras (VI-17)-(VI-20). Para o caso de fluxo constante, com a presença das aletas, a máxima temperatura que era a temperatura no tubo interno se desloca para a base das aletas, enquanto que a mínima temperatura a qual era a temperatura do tubo externo, se separa daquela superfície na medida que  $L$  aumenta.

A temperatura média da parede aletada, por sua vez, diminui com o aumento de  $L$  e  $m$ , enquanto que a temperatura média de mistura, aumenta até um valor de  $m$  crítico, acima do qual ela diminui, até o valor correspondente a temperatura média de mistura para o duplo-tubo não-aletado equivalente, cuja relação de raios é  $r_a$ . A aproximação das aletas com o aumento de  $m$ , diminui o gradiente na direção tangencial  $\theta$ , produzindo para grandes valores de  $m$  a distribuição de temperatura semelhante a de um duplo-tubo não-aletado de relação de raio  $r_a$ , como pode ser observado para  $m = 16$  na figura (VI-20) e para  $m = 32$  e  $48$  na fig.(VI-70).

Quando  $L$  tende a unidade, a transferência de calor tende a possuir as mesmas características da transferência de calor em dutos de secção transversal em forma de setor de coroa circular. Os resultados da presente análise, tendem continuamente aos resultados de [46], onde foi analisada a transferência de calor em dutos de secção transversal em forma de setor de coroa circular para  $W_e = 0$  e também para  $\beta_i = \beta_e = \beta_a$ .

O efeito de  $W_e$  sobre a distribuição de temperatura pode ser avaliado pelas figuras (VI-21)-(VI-26). O efeito de  $W_e < 0$ , conforme figuras (VI-21)-(VI-23), é aumentar a diferença  $T_f - T_b$  e, conseqüentemente, diminuir o desempenho do trocador, isto é, o número de Nusselt. Este efeito pode ser explicado se considerarmos o fato de  $Q_i^*$ , o fluxo térmico total na parede aletada, ser independente de  $W_e$ . Em conseqüência, o efeito de  $W_e$  é diminuir a temperatura média da mistura  $T_b^*$  e em menor escala,  $T_f^*$ . O e



feito de  $W_e > 0$ , conforme as figuras (VI-24)-(VI-26), é deslocar o ponto de temperatura mínima para dentro do duplo-tubo. Neste caso, manifestam-se isotermas fechadas e pontos "sela" correspondentes a mínimos relativos para a temperatura. O efeito de  $W_e > 0$  é aumentar  $T_b$  e em menor escala,  $T_f$ ; consequentemente, para  $Q_i^*$  fixo, o desempenho da parede aletada aumentará com relação ao desempenho correspondente a  $W_e = 0$ .

Pela configuração da temperatura na figura (VI-26), pode-se ainda concluir, apesar da manifestação dos laços isotérmicos, que no limite quando  $m$  cresce indefinidamente, a distribuição de temperatura tenderá a distribuição correspondente a de um duplo-tubo não-aletado equivalente de relação de raios  $r_a$ , para a mesma fração de fluxo externo  $W_e$ .

A influência do fluxo externo sobre a temperatura média de mistura é tanto maior quanto maior for  $L$ ; para  $L < 1$ , parte do efeito do fluxo externo é uniformizar a temperatura na parede do tubo externo, enquanto que quando  $L = 1$ , o fluxo externo é dissipado para produzir gradientes de temperatura no fluido, os quais tem papel relevante sobre o valor de  $T_b$ . A discussão apresentada, ajudará em parte a explicar o comportamento do desempenho do trocador com  $m$ ,  $L$  e  $W_e$  nas figuras (VI-27)-(VI-36).

Essas figuras apresentam o desempenho da parede aletada como função de  $m$  para cada  $L$  e para cada relação de raios  $r_i$ . Por razões de ordem prática,  $m$  é limitado pelo intervalo  $2 \leq m \leq 32$ . As figuras (VI-27)-(VI-34) correspondem a  $W_e = 0$  e  $W_a = 0,5$ .

Considerando o fato de que  $Q_i^*$  não varia com  $m$  e  $L$ , os fatores de maior influência sobre o desempenho da parede aletada são, a distribuição de fluxo e a geometria das aletas ou, em última análise, o número e a altura das aletas. Para todas as relações de raio, pelo menos até  $r_i = 0,8$ , ocorrem máximos para alguns valores de  $L$ ; esta ocorrência resulta do fato de a temperatura média na parede aletada para cada  $L$  fixo, decrescer assintoticamente com  $m$ , e de a temperatura média de mistura adquirir um máximo para um valor de  $m$  crítico, acima do qual ela diminui,

tendendo depois a permanecer constante quando  $m$  cresce indefinidamente. Podemos explicar esta particularidade, considerando a equação (IV-54); a temperatura média de mistura é função não somente da distribuição de temperatura como também da distribuição de velocidade na secção transversal do duto. A presença das aletas, altera tanto a distribuição de temperatura quanto a distribuição de velocidade. Sob as condições de  $Q_i^*$  constante e  $L < 1$ , o aumento de  $m$  tende a inibir o campo de velocidade, diminuindo a velocidade média e, ao mesmo tempo, tende a aumentar a temperatura média. Contudo, por definição, a temperatura média de mistura deverá ter um máximo para alguma combinação de  $m$  e  $L$ .

A presença das aletas para alguns valores particulares de  $r_i$  e  $m$  pode apenas prejudicar o desempenho, como se pode observar nas figuras (VI-32)-(VI-34). Para  $r_i = 0,9$ , para se obter o mesmo desempenho do duplo-tubo não-aletado original,  $m$  deve ser no mínimo igual a 16, para valores de  $L$  entre 0,7 e 1,0. Parece que este fato pode ser justificado, se considerarmos que, para  $L = 1,0$  e  $m = 2$ , o aumento percentual de área devido as aletas, para  $r_i = 0,5$ , onde esse fenômeno praticamente não ocorre, é de 280%, para  $r_i = 0,5$  é de 63% e para  $r_i = 0,8$  é de apenas 15%, e que o número de Nusselt aumenta consideravelmente com  $L$  para  $m$  fixo, como é constatado nas figuras (VI-27)-(VI-31). Considerando o fato de que as aletas inibem o campo de velocidade, quanto maior for a altura das aletas, maior deve ser o número de aletas para o qual o número de Nusselt é máximo; este fato é constatado nas figuras correspondentes a relações de raios entre 0,2 e 0,7. Do conjunto das figuras discutidas, podemos ainda concluir que, quanto menor é a relação de raios, tanto maiores são os progressos obtidos com o uso de aletas, e mais intensamente se manifestam os máximos, isto é, os pontos para os quais no intervalo  $2 \leq m \leq 32$  o desempenho do trocador é ótimo.

A consideração de que  $W_a = 0,5$ , isto é, o fluxo na aleta  $\beta_a$ , da ordem de 50% do fluxo do tubo interno  $\beta_i$ , foi feita com base na seguinte consideração: se a espessura de parede do tu

bo interno e das aletas for muito pequena e se a condição de fluxo constante for obtida pela passagem de uma corrente elétrica ao longo do tubo aletado, pelo fato de as aletas terem dois lados, o calor gerado se dissipará igualmente dos dois lados, isto é,  $\beta_i = 0,5 \beta_a$ . Mesmo fazendo a consideração de que as aletas tenham o rendimento do tubo interno, isto é,  $\beta_a = 1$ , a influência de  $\beta_a$  no desempenho acarreta no máximo um acréscimo de 16%, conforme a figura (VI-35). O parâmetro  $\beta_a$ , por outro lado, praticamente não exerce influência sobre os valores ótimos de  $m$  em todos os casos analisados.

Da mesma forma, o fluxo externo também não exerce influência relevante sobre os valores ótimos de  $m$ , como nos mostra a a figura (VI-36). Contrariamente, perdas externas diminuem o desempenho enquanto que ganho de calor externo aumenta o desempenho. O mecanismo que origina esse comportamento já foi discutido anteriormente.

Um outro parâmetro influente sobre o desempenho da parede aletada é a geração de calor  $\lambda$ . A influência deste parâmetro sobre o ponto de ótimo pode ser avaliada pela figura (VI-37), a qual representa um caso particular.

Essa figura nos mostra que a geração de calor no fluido produz dois efeitos básicos; o primeiro é a diminuição desuniforme do número de Nusselt como função do número de aletas, que aumenta em consequência, o desempenho da parede aletada; o segundo efeito é a diminuição do número de aletas correspondente ao máximo do número de Nusselt. Enquanto que para a geometria discutida em [34] o efeito da geração de calor no fluido é apenas diminuir o valor ótimo de  $m$ , na presente análise, além de a geração de calor diminuir o valor ótimo de  $m$  nas mesmas proporções de [34], também favorece no desempenho da parede aletada.

Certos casos-limite da geometria e condições de contorno da presente análise oferecem possibilidades de comparação. Na figura (VI-69), os resultados da presente análise para  $L = 1$ ,  $W_e = 0$  e  $W_a = 1$ , concordam com os resultados de [3] na medida que  $r_i$  tende a zero. A diferença entre essas curvas, reside basicamente no fato de as condições de contorno aqui analisadas, diferirem da condição de fluxo constante na periferia da secção transversal do duto analisado em [3].

No quadro XXVI por outro lado, temos duas comparações: a primeira considera  $W_e = 0$ , enquanto que a segunda considera valores de  $W_e$  tais que  $\beta_i = \beta_e = \beta_a$ . Enquanto que no primeiro caso existem discrepâncias consideráveis, com base na mesma definição do número de Nusselt, no segundo caso essas discrepâncias tendem a desaparecer na medida que os setores de coroa circular se assemelham aos retângulos dos respectivos grupos.

O caso limite visualizado na figura (VI-70) oferece alguma referência adicional de comparação, se admitirmos a hipótese de que para  $L < 1$ , no limite quando  $m$  tende ao infinito o desempenho do duplo-tubo aletado tende aproximadamente ao desempenho de um duplo-tubo não-aletado, cuja relação de raios é  $r_a$ . Nesse limite é fácil provar que o número de Nusselt equivalente deve ser  $NU_m(r_a/r_i)$ .

Comparando este número de Nusselt com os dados referentes ao duplo-tubo não-aletado de relação de raios  $r_a$ , a máxima discrepância é de aproximadamente 20%, a qual corresponde a  $L = 0,6$ . Tal diferença pode ser explicada em parte pelo seguinte argumento: para valores de  $L$  relativamente grandes, a distribuição de temperatura na vizinhança das extremidades das aletas apresenta menor concentração média de gradientes radiais do que a distribuição de temperatura relativa ao duplo-tubo não-aletado-limite de relação de raios  $r_a$ , de onde resulta a diminuição de desempenho observada.

### VII.3 - Distribuição da Temperatura e Desempenho para Temperatura Prescrita.

O conhecimento do comportamento da distribuição de temperatura e do fluxo local ajudará a esclarecer o comportamento do desempenho do trocador com os parâmetros  $m$ ,  $L$  e  $W_e$  sob a condição de temperatura constante na parede aletada.

Como nas soluções relativas a velocidade, as soluções da equação (V-16), vistas na figura (VI-38), tem para cada  $r_i$ , um limite superior correspondente a distribuição de temperatura para o duplo-tubo não-aletado, cuja relação de raios é  $r_i$ , e tem também, para cada  $L < 1$ , um limite inferior, o qual corresponde a distribuição de temperatura do duplo-tubo não-aletado da relação de raios  $r_a$ , como pode-se observar nas figuras (VI-39) e (VI-40). Essa aproximação ao limite inferior não se faz uniformemente, devido a singularidade da derivada radial da temperatura na extremidade das aletas. Essas singularidades concentram os maiores gradientes de temperatura (e, conseqüentemente, os maiores fluxos térmicos locais) na extremidade das aletas, como mostram as figuras (VI-42) - (VI-51).

Nas figuras (VI-42)-(VI-45), onde  $W_e = 0$ , vê-se que os maiores gradientes de temperatura concentram-se em geral na parede aletada, principalmente na extremidade das aletas e sobre a superfície do tubo interno, em pontos igualmente afastados das bases das aletas, onde o fluxo térmico é nulo. Essas figuras nos mostram que o aumento do número de aletas, tende a diminuir a componente tangencial do fluxo térmico, até um limite, para o qual a transferência de calor para o fluido é resultante praticamente da componente radial do fluxo, conforme figura (VI-45). A natureza desse limite já foi discutida em função das figuras (VI-39) e (VI-40). O aumento da altura das aletas  $L$ , por sua vez, tende a aumentar a componente tangencial do fluxo térmico, produzindo em consequência gradientes na direção tangencial, os quais são responsáveis pelo aumento do número de Nusselt com  $L$ , da mesma forma pela qual os

gradientes radiais são responsáveis pelo aumento do número de Nusselt com  $m$ . A medida que  $L$  tende a unidade, o comportamento da distribuição de fluxo adquire características bastante distintas das discutidas acima, conforme mostram as figuras (VI-52) - (VI-57).

A influência do fluxo sobre a distribuição de temperatura é vista nas figuras (VI-46)-(VI-51); uma mesma fração de fluxo  $W_e$ , influência muito mais o campo de temperatura para  $W_e > 0$  do que para  $W_e < 0$ , como mostra a figura (VI-41). O resultado não é idêntico, quando se considera o desempenho da parede aletada, como mostra a figura (VI-68). Desta figura pode-se concluir basicamente o que segue: fluxos externos que aquecem o fluido ( $W_e > 0$ ), em consequência do aumento da temperatura média de mistura, diminuem o desempenho da parede aletada, enquanto que, fluxos externos que resfriam o fluido ( $W_e < 0$ ), diminuem o desempenho da parede aletada. A distribuição de temperatura é bastante susceptível ao fluxo externo, como mostram as figuras (VI-49)-(VI-51);  $W_e < 0$  desloca os pontos de temperatura máxima para dentro do setor produzindo isothermas fechadas a partir desses pontos. Neste caso, pontos "se-la" se manifestam sobre as linhas de prolongamento das aletas, os quais correspondem a máximos relativos da temperatura na secção. As mesmas conclusões e a secção VI.2 são aqui válidas quanto ao limite quando  $m$  tende ao infinito, tanto para  $W_e > 0$  quanto para  $W_e < 0$ .

A segunda distribuição a ser analisada, que ajudará a compreender o mecanismo da transferência de calor na parede aletada, é a distribuição de fluxo normal na parede aletada.

Para  $L = 1$ , a influência de  $m$  sobre a distribuição de fluxo normal a parede aletada  $q_a$  é mostrada nas figuras (VI-52)-(VI-57), onde o fluxo médio  $\bar{q}_a$  é referido ao perímetro da parede aletada  $S_a$ . Destas figuras, várias conclusões podem ser tiradas: para valores de  $m$  baixos, como por exemplo  $m = 2$ , o fluxo normal é mais efetivo no tubo interno, enquanto que para grandes valores de  $m$ , como por exemplo  $m = 32$ , a distribuição de fluxo tér

nico normal é mais efetiva ao longo das aletas; o fluxo térmico é nulo nas regiões de estagnação, isto é, na base das aletas, enquanto que este é finito na direção tangencial no tubo externo, onde existe isolamento; os padrões de distribuição do fluxo normal e da temperatura ao longo da linha de simetria do setor, se assemelham aos padrões de distribuição correspondentes de [3], na medida em que a relação de raio diminui; os máximos da distribuição de fluxo sobre as aletas correspondem aos pontos de máximo da distribuição de temperatura ao longo da linha de simetria do setor, como mostra mais claramente as figuras (VI-52) e (VI-53). Para  $L < 1$ , a distribuição de fluxo tem um padrão bastante distinto dos padrões discutidos anteriormente, como mostram as figuras (VI-58) e (VI-59).

O comportamento da distribuição de fluxo com  $m$ , contudo, é similar ao comportamento da distribuição de fluxo correspondente a  $L = 1$ ; a distribuição de fluxo relativa ao fluxo médio  $\bar{q}_a$ , é grandemente influenciada pela aproximação relativas das aletas, que aumenta os efeitos da convecção forçada na extremidade das mesmas, em consequência do aumento do gradiente de velocidade na vizinhança daqueles pontos; enquanto que o fluxo é nulo na base das aletas, o fluxo é máximo na vizinhança da extremidade das mesmas; a medida que  $L$  aumenta, a distribuição local da extremidade das aletas passa a ter papel cada vez menos relevante no cômputo do fluxo médio, até o limite  $L = 1$ , para o qual a distribuição de fluxo corresponde a distribuição da figura (VI-52), para o valor de  $m$  correspondente. Essa distribuição limite, como sugerem as figuras (VI-58) e (VI-59), parece ser a envolvente das distribuições correspondentes a  $L < 1$ . Essa particularidade pode ser explicada como segue: na medida em que  $L$  cresce, tanto a distribuição de velocidade quanto a distribuição de temperatura no intervalo  $[r_a, 1]$  tendem a se anular, diminuindo o efeito da singularidade do fluxo, a qual tem papel relevante na distribuição do fluxo para valores moderados de  $L$ .

A discussão anterior ajudará em parte a compreender as

figuras (VI-60)-(VI-67). Existem algumas semelhanças notáveis entre esse conjunto de figuras e as figuras (VI-27) e (VI-34). A diferença consiste do fato de que não existe, a exemplo daquelas figuras, nenhum valor de  $m$  que diminua o desempenho do duplo-tubo aletado relativamente ao duplo-tubo não-aletado original.

Das figuras (VI-60)-(VI-67), podemos observar o que se segue: o número de Nusselt baseado no diâmetro nominal aumenta com  $L$  para a faixa de raios  $0,2 \leq r_i \leq 0,9$ ; para todo  $L < 1$ , pelo menos no intervalo  $2 \leq m \leq 32$  analisado, existem valores de  $m$  para os quais o desempenho é máximo, pelo menos para relação de raios  $r_i$  até 0,7 acima da qual, esses valores de  $m$  são maiores que 32; o maior desempenho, a exemplo das figuras (VI-27)-(VI-34) corresponde a  $L = 1$ ; para cada altura  $L$  fixa, o ponto correspondente ao máximo do desempenho se desloca para a direita com o aumento de  $r_i$ , isto é, o aumento de  $r_i$  exige maior números de aletas para produzir o mesmo percentual de superfície estendida. Diferentemente do caso de fluxo prescrito, os máximos para o caso de temperatura prescrita não são tanto delineados; parece que, para cada altura de aletas  $L$  moderada, com o aumento de  $m$ , o número de Nusselt tende assintoticamente ao número de Nusselt correspondente ao duplo-tubo não-aletado, cuja relação de raios é  $r_a = r_i + L(1 - r_i)$  para as mesmas condições de contorno estabelecidas. Este fato é em parte corroborado pela figura (VI-70). Como mostra a figura, valores de  $L$  próximos da unidade, conduzem a resultados que tendem a divergir da curva correspondente ao duplo-tubo não-aletado; o desempenho do trocador, neste caso, é semelhante ao desempenho de dutos individuais cuja secção transversal tem a geometria de um setor de coroa circular. A comparação dos dados referentes a essas geometrias-limite com os dados referentes a dutos retangulares, é feita com base nos dados dispostos no quadro XXVI.

Para  $L = 1$ , a condição estabelecida para  $We$  tal que a temperatura média baseada no perímetro total seja nula, não é equivalente a condição de temperatura nula na periferia da secção



do duto. Porisso, a comparação dos dados dos quadro XXVI resulta em algumas discrepâncias. A condição de fluxo externo não nulo, acarreta temperaturas positivas e negativas na parede do tubo externo. No caso de  $W_e$  positivo, ocorrem inclusive descontinuidades da temperatura na extremidade das aletas, conforme sugere o comportamento anômalo correspondente a  $L = 1$ , na figura (VI-68). Contudo, aquele quadro sugere que existe razoável concordância entre os dados, quando se faz uso do número de Nusselt  $\overline{Nu}_{Dh}$ , baseado no diâmetro hidráulico e no fluxo médio relativamente ao perímetro total. O caso-limite  $L = 1$  e  $r_i = 0$ , oferece também para o caso aqui discutido, a possibilidade de comparação, conforme a figura (VI-69). Como mostra essa figura, os dados da presente análise, tendem continuamente aos dados da análise de [3], a medida que a relação de raios  $r_i$  diminui, apesar de compararmos condições de contorno diferentes no tubo externo. Enquanto que em [3] foi analisada a condição de contorno de temperatura constante perifericamente, na presente análise, além de considerar-se a temperatura constante nas aletas e no tubo interno, considerou-se o fluxo nulo no tubo externo. Para a relação de raios  $r_i = 0,05$ , os dados discordam de [3] para número de aletas moderadas e passam a concordar com [3], dentro de uma tolerância de 5,4% na medida que  $m$  aumenta. Este resultado é um tanto esperado. Na medida em que o número de aletas aumenta, o efeito da condição de contorno externa  $W_e = 0$  é reduzido, enquanto que a presença da condição de contorno de temperatura constante nas aletas passa a influenciar gradativamente a distribuição de temperatura na secção do duto, como se pode concluir da comparação da figura (VI-52) com sua análoga em [3].

## C A P Í T U L O    VIII

## C O N C L U S ã O

VIII.1 - Natureza da Convecção Laminar no Duplo-Tubo Aletado

Em [3] e [15] fora observado que o produto  $f.Re_{Dh}$  para o regime laminar depende somente da geometria do duto e difere em geral do produto correspondente ao duto circular. Adicionalmente, fora observado em [3] que o número de Nusselt depende não somente da geometria do duto mas também da natureza da condição de contorno. Ficou provado também, que o número de Nusselt correspondente a condição de contorno de temperatura constante, para algumas geometrias é até dez vezes maior que o número de Nusselt correspondente a condição de contorno de fluxo constante.

A natureza das equações desenvolvidas nos capítulos III, IV e V nos permitem tirar conclusões semelhantes; o desempenho do duplo-tubo aletado depende das características geométricas da parede aletada ( $L$  e  $m$ ) e da natureza das condições de contorno; o desempenho correspondente a condição de contorno de temperatura constante perifericamente na parede aletada com base no número de Nusselt  $\overline{Nu}_{Di}$  chega a ser até doze vezes maior que o desempenho correspondente a condição de contorno de fluxo constante perifericamente na parede aletada. Este fato pode ser explicado com o argumento usado em [3], segundo o qual, a condição de fluxo constante perifericamente força mais calor nas regiões de estagnação (cantos da secção transversal) do que a condição de temperatura constante perifericamente. Adicionalmente, tanto o produto  $f.Re_{Dh}$  quanto o número de Nusselt  $\overline{Nu}_{Dh}$  diferem em geral dos valores respectivos correspondentes ao duplo-tubo não-aletado. Contudo, o diâmetro hidráulico também para os casos aqui analisados, não é um parâmetro apropriado para descrever a perda de carga e a transferência de calor laminares em dutos aletados.

## VIII.2 - Desempenho Ótimo do Duplo-Tubo

A conclusão básica de [34] foi a previsão do desempenho ótimo de tubos aletados. Dois parâmetros ótimos foram especificados: a altura das aletas  $L = 0,795$  e o número de aletas igual a 22, aos quais corresponde um aumento do número de Nusselt  $NU_{Di}$ , em torno de 20 vezes o número de Nusselt relativo ao tubo não-aletado. O aumento da altura das aletas acima desse valor crítico, acarreta uma diminuição do número de Nusselt, em consequência da formação de cantos (pontos de estagnação) correspondentes ao encontro das aletas quando  $L = 1$ .

Diferentemente, na presente análise, o desempenho ótimo para cada  $m$  crítico, é sempre inferior ao desempenho correspondente a maiores alturas de aletas. Pode-se explicar esse fato, se levarmos em consideração que o aumento da altura das aletas aumenta a distância relativa entre as mesmas, produzindo destarte, efeito inverso àquele produzido em [34].

As figuras (VI-27)-(VI-37) e (VI-60)-(VI-68) nos permitem tirar várias conclusões, a saber:

- a) O desempenho do duplo-tubo aletado aumenta com a relação de raios  $r_i$ . O desempenho alcançado com a condição de fluxo constante na parede aletada é da ordem de 1,6 a 11 vezes o desempenho do duplo-tubo não-aletado de mesma relação nominal  $r_i$ , enquanto que o desempenho alcançado com a condição de temperatura constante na parede aletada é da ordem de 2 a 130 vezes o desempenho do duplo-tubo não-aletado de mesma relação nominal  $r_i$ .
- b) Os pontos de ótimo são mais efetivos para menores relações de raios, as quais permitem maiores aumentos relativos de área de superfície estendida, conforme a figura (VIII-1). Esta figura mostra também que os valores ótimos de  $m$  para cada  $L$ , dependem fortemente do tipo de condição do contorno.

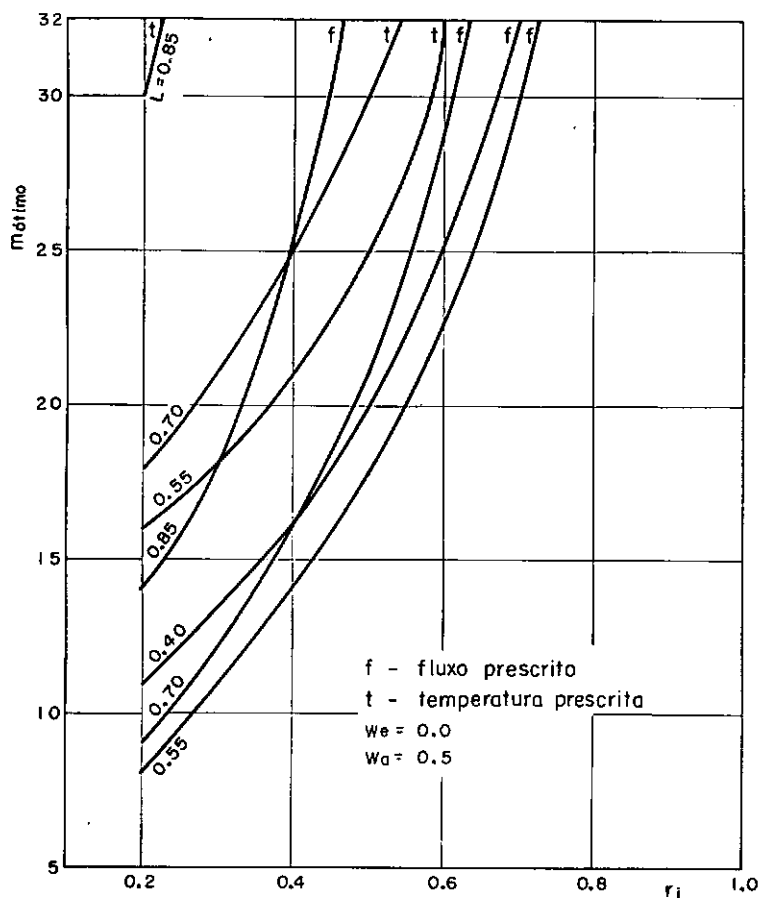


Fig. (VIII-1) - Bandas de valores ótimos de  $m$ .

- c) Fluxo térmico externo de mesmo sentido do fluxo térmico da superfície estendida favorece o desempenho, enquanto que fluxo térmico externo de sentido contrário ao fluxo térmico da superfície estendida desfavorece o desempenho, apesar de esses fluxos externos praticamente não influenciarem os valores ótimos de  $m$ , para cada  $L$  fixo.
- d) A geração de calor no fluido favorece tanto ao desempenho do duplo-tubo, quanto o número de aletas ótimo, para cada altura de aletas  $L$  segundo as quais esses ótimos se manifestam.
- e) O número de Nusselt relativo ao diâmetro nominal  $Di = 2r_i$ , para o duplo-tubo aletado em regime laminar, chega a superar o número de Nusselt correspondente ao duplo-tubo não-aletado em regime turbulento para algumas combinações do número de Reynolds e do número de Prandtl.

A referência [16], oferece dados referentes ao escoamento turbulento no duplo-tubo isolado externamente sob a condição de fluxo constante no tubo interno no sentido longitudinal para  $r_i = 0,2$ .

O diâmetro hidráulico adimensional para aquele caso é

$$D_h = 2(1 - r_i) = 1,6 ;$$

consequentemente ,

$$NU_{Di} = NU_{Dh} / 4 .$$

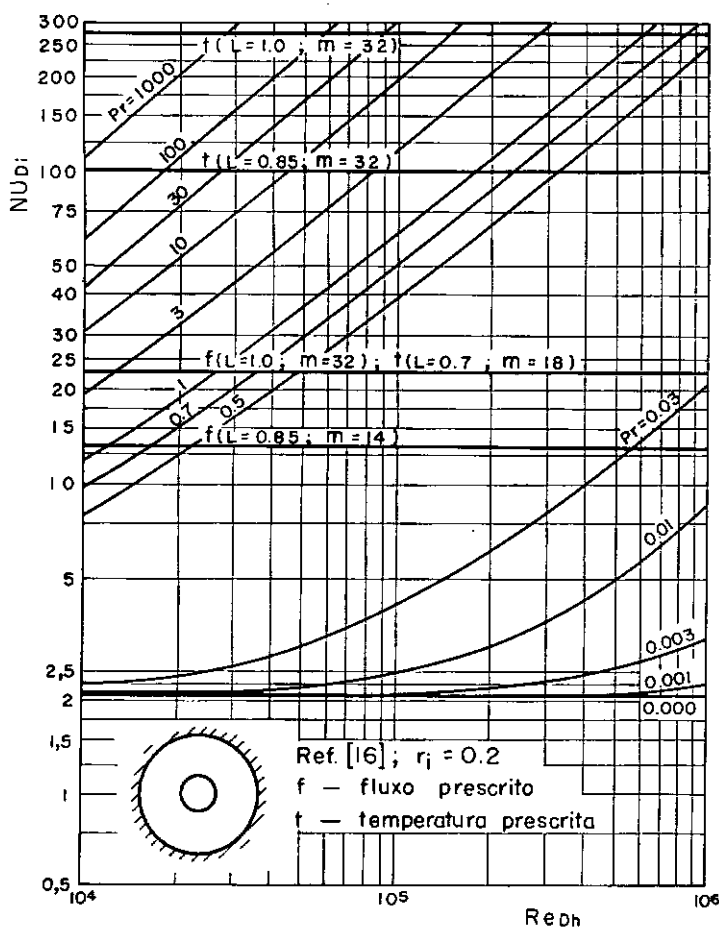


Fig. (VIII-2)

A figura (VIII-2), extraída de [16] nos mostra as linhas horizontais correspondentes aos dados da presente análise, abaixo das quais se situam as regiões turbulentas de número de Nusselt inferior ao número de Nusselt laminar referente ao duplo-tubo aletado. Pela figura, pode-se observar que é possível substituir um escoamento turbulento com  $Re_{Dh} = 10^4$  e  $Pr = 1000$ , ou então,  $Re = 3 \cdot 10^5$ ,  $Pr = 0,5$  por um escoamento laminar num duplo-tubo aletado com  $m=32$  e  $L=0,85$ , sob a condição de temperatura constante.

Na prática, porém, os materiais metálicos usados na construção de tubos aletados apenas aproximam a condição de contorno de temperatura constante perifericamente. Contudo, pode-se afirmar unicamente que os casos reais se situam dentro desta faixa de comparação, na medida em que o material da parede aletada tem boa condutibilidade térmica.

f) O efeito da dissipação viscosa sobre o número de Nusselt não foi aqui analisado. Para a geometria discutida em [34], foi comprovado em [42] que os efeitos produzidos pela dissipação viscosa sobre o número de Nusselt são irrelevantes em comparação, por exemplo, aos efeitos produzidos pela geração de calor no fluido. Espera-se, portanto, para a geometria aqui discutida, que a hipótese  $C_2 = 0$ , admitida nas equações da transferência de calor, seja uma simplificação razoável no estudo do desempenho do duplo-tubo aletado.

g) Agrupando os dados de [32] com os dados do presente estudo, pode-se estabelecer algumas referências para o projeto ótimo de duplo-tubos aletados, utilizando os dados de [32] para o projeto das aletas internas, e os dados da presente análise para o projeto das aletas externas ao tubo interno como sugere a figura (VIII-3). Tais tipos de duplo-tubo são considerados no projeto de trocadores de calor <sup>20</sup>.

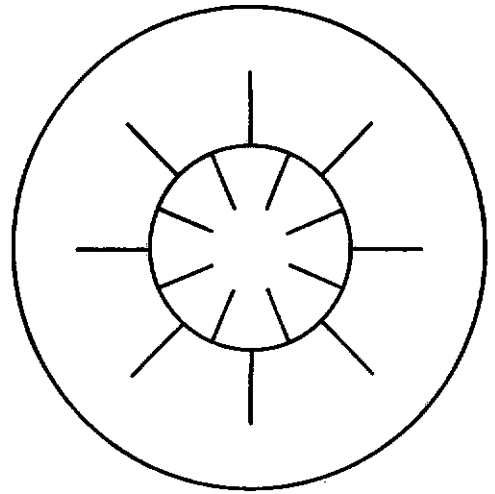


Fig. (VIII-3)

### VIII.3 - Extensão da Aplicação do Método Inverso - Sugestões para Desenvolvimento Posterior.

Na presente análise, para os dois problemas discutidos, utilizou-se o método inverso para a redução dos problemas a valores de contorno mais simples. Na solução das equações integrais, discretizações de apenas 21 ou 31 sub-intervalos, conduziram a resultados bastante satisfatórios, fazendo uso de funções de Green com

pletas. De fato, quanto mais completa for a função de Green, isto é, quanto mais essa função satisfizer as condições de contorno na região, maior será a velocidade de convergência daquele método numérico utilizado na solução da equação integral, como foi comprovado em [35].

Recentemente, o método dos elementos finitos foi utilizado em [49], na solução do problema de transferência de calor laminar para a geometria discutida em [34], considerando aletas do tipo visto na fig. (VIII-4).

O método inverso poderia muito bem ser aplicado na análise do escoamento laminar e da transferência de calor no duplo-tubo aletado, considerando-se a geometria das aletas discutida em [49], conforme a figura (VIII-4).

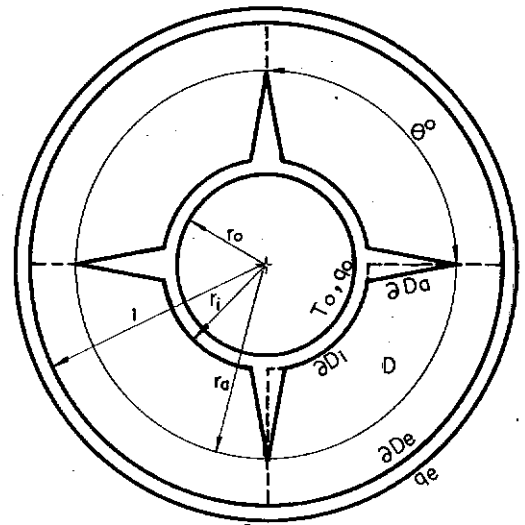


Fig. (VIII-4)

Dois problemas poderiam ser analisados de acordo com o grau de influência das aletas, a saber:

#### a) Aletas Promotoras da Condição de Contorno

Neste caso, a condução de calor nas aletas não interfere na convecção. As aletas atuam como promotoras de superfície de troca de calor sujeita a determinada condição de contorno.

Para o caso de temperatura prescrita na parede aletada (vide capítulos III e V), as seguintes equações podem ser facilmente obtidas pela segunda fórmula de Green:

##### a.1 - Escoamento Laminar;

$$u(r, \theta) = \int_D g(r, \theta | r', \theta') r' dr' d\theta' + \int_{\partial D_a} g(r, \theta | r', \theta') \frac{\partial u}{\partial \tilde{n}} \Big|_{\partial D_a} ds_{a'} ; \quad (\text{VIII-1})$$

$$u|_{\partial D_i} = u|_{\partial D_a} = u|_{\partial D_e} = 0 \quad (\text{VIII-2})$$

onde  $D$  é a região do escoamento, correspondente ao semi-setor da figura (VIII-4) e  $g$  é a função de Green incompleta (vide apêndice A), a qual satisfaz as condições de contorno:

$$g(r_i, \theta) = g(1, \theta) = 0 \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0/2 \quad (\text{VIII-3})$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta_0/2) = 0 \quad ; \quad r_i \leq r \leq 1 \quad (\text{VIII-4})$$

A condição de contorno  $\frac{\partial u}{\partial \tilde{n}} \Big|_{\partial D_a}$ , por (VIII-2), é calculada pela seguinte equação integral:

$$\int_D g(r, \theta | r', \theta') r' dr' d\theta' + \int_{\partial D_a} g(r, \theta | r', \theta') \cdot \frac{\partial u}{\partial \tilde{n}} \Big|_{\partial D_a} ds_{a'} = 0 \quad ; \quad (r, \theta) \in \partial D_a \quad (\text{VIII-5})$$

## a.2 - Transferência de Calor;

$$T(r, \theta) = \int_D g(r, \theta | r', \theta') u(r', \theta') r' dr' d\theta' +$$



$$\begin{aligned}
& \int_{\partial D_a} g(r, \theta | r', \theta') \left. \frac{\partial T}{\partial \tilde{n}} \right|_{\partial D_a} ds_{a'} + \\
& + \int_{\partial D_e} g(r, \theta | 1, \theta') \left. \frac{\partial T}{\partial \tilde{n}} \right|_{\partial D_e} ds_{e'} \quad ; \quad (\text{VIII-7})
\end{aligned}$$

$$T|_{\partial D_i} = T|_{\partial D_e} = T|_{\partial D_a} = 0 \quad (\text{VIII-8})$$

onde  $g$  é a função de Green incompleta (vide apêndice A), a qual satisfaz as condições de contorno:

$$g(r_i, \theta) = \frac{\partial g}{\partial r}(1, \theta) = 0 \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0/2 \quad (\text{VIII-9})$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta_0/2) = 0 \quad ; \quad r_i \leq r \leq 1 \quad (\text{VIII-10})$$

A derivada normal  $\left. \frac{\partial T}{\partial \tilde{n}} \right|_{\partial D_e}$  é especificada, enquanto que a derivada normal  $\left. \frac{\partial T}{\partial \tilde{n}} \right|_{\partial D_a}$ , por (VIII-8), é calculada pela seguinte equação integral:

$$\begin{aligned}
& \int_D g(r, \theta | r', \theta') u(r', \theta') r' dr' d\theta' + \int_{\partial D_e} g(r, \theta | 1, \theta') \cdot \\
& \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial \tilde{n}} \right|_{\partial D_e} ds_{e'} + \int_{\partial D_a} g(r, \theta | r', \theta') \left. \frac{\partial T}{\partial \tilde{n}} \right|_{\partial D_a} ds_{a'} = 0 \quad (\text{VIII-11}) \\
& ; \quad (r, \theta) \in \partial D_a .
\end{aligned}$$

Expressões similares podem ser desenvolvidas para a condição de contorno de fluxo constante na parede aletada, usando a função de Green do item (a.2).

#### b) Aletas Promotoras da Parede Original

Neste caso, a condução do calor nas aletas é considerada na análise da convecção. Considerando que a geometria da aleta na figura (VIII-4) é semelhante a geometria do setor de círculo, para pequenos ângulos de ápice da aleta, poderemos resolver o problema usando duas funções de Green; uma para a região da aleta e outra para a região da seção transversal do duto.

Considerando a temperatura do tubo interno constante, uma equação integral pode ser desenvolvida, partindo da condição de igualdade de fluxos na interface sólido-fluido. Essa equação integral, determinaria a distribuição de fluxo térmico na superfície das aletas, a qual seria utilizada no cálculo da distribuição de temperatura no fluido.

Além dos problemas propostos acima, outros aspectos da transferência de calor laminar em dutos poderiam ser examinados, como por exemplo, o estudo dos seguintes tópicos:

#### c) Análise dos efeitos de entrada no duplo-tubo aletado.

Esse estudo poderia ser conduzido baseando-se num método geral desenvolvido em [14] e [26], método este que poderia facilmente ser aplicado a dutos cuja seção transversal tem a geometria mostrada na figura (VIII-5).

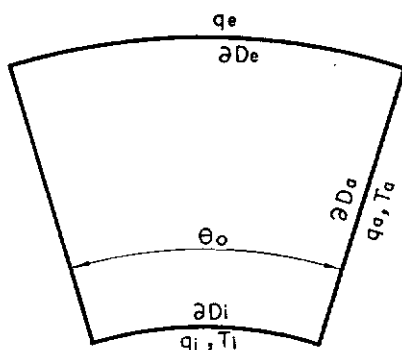


Fig. (VIII-5)

d) Análise da convecção natural no duplo-tubo aletado.

Estudos experimentais comprovam que a convecção natural em dutos circulares aumenta consideravelmente o desempenho desses dutos em relação ao desempenho resultante da convecção forçada laminar <sup>27</sup>. Espera-se portanto, que a convecção natural laminar produza efeitos semelhantes sobre a convecção forçada laminar nos dutos aletados aqui estudados.

Recentemente, HONG & BERGLES<sup>50</sup> examinaram teórica e experimentalmente os efeitos da convecção natural sobre a convecção laminar em dutos circulares horizontais, submetidos às condições de contorno de fluxo e de temperatura constantes, considerando a variação da viscosidade do fluido com a temperatura. Os resultados de [50] para a maioria dos casos práticos analisados, concordam com os dados experimentais dos próprios autores, dentro de uma tolerância bastante satisfatória. Sugere-se, portanto, que aquele método seja adaptado ao duplo-tubo aletado com a geometria da figura (VIII-5), para que se possa obter a partir deste caso-limite, uma previsão da influência da convecção natural sobre o desempenho da parede aletada. Para completar o estudo, um programa experimental poderia ser desenvolvido, para analisar experimentalmente o efeito da convecção natural em dutos, a exemplo do que foi feito em [27] e [50].

BIBLIOGRAFIA

1. KELLOG, O.D., Foundations of Potential theory, New York, Murray, 1953.
2. MARCO, S.M. & HAN, L.S., A note on limiting laminar Nusselt numbers in ducts with constant temperature gradients by analogy to thin-plate theory, Trans. ASME, 77: 665. 1955.
3. ECKERT, E.R.G., IRVINE, T.F. Jr. & YEN, J.T., Local laminar heat transfer in wedge shaped passages, ASME Paper n° 57-A-133, 1958.
4. TIMOSHENKO, S.P., WOINNOWSKY-KRIEGER, S., Theory of plates and shells, New York, McGraw-Hill, 1959. 580 p.
5. BIRD, R.B., STEWART, W.E. & LIGHTFOOT, F.N., Transport phenomena, New York, John Wiley, 1960. 780 p.
6. ECKERT, E.R.G. & IRVINE, T.F. Jr., Pressure drop and heat transfer in a duct with triangular cross section, J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", Paper n° 59-HT-10, Maio 1960.
7. CARLSON, L.W. & IRVINE, T.F. Jr., Fully developed pressure drop in triangular shaped duct, J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", Paper n° 60-WA-100, Nov. 1961.
8. SPARROW, E.M., LOEFFLER, A.L. Jr & HUBBARD, H.A., Heat transfer to longitudinal laminar flow between cylinders, J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", Paper n° 60-WA-40, Nov. 1961.
9. HARTNETT, Y.P., KOH, J.C.Y. & McCOMAS, S.T., A comparison of predicted and measured friction factors for turbulent flow through rectangular ducts, J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", 84: 82-88. 1962.

10. JAWSON, M.A., Integral equation methods in potential theory-I  
Proc. R. Soc. 275A, 23. 1963.
11. SYMM, G.T., Integral equation methods in potential theory-II  
Proc. R. Soc. 275A, 33. 1963.
12. KAPLAN, W., Advanced Calculus, London, Addison Wesley, 1963.  
679 p.
13. SPARROW, E.M., LIN, S.H. & LUNDGREN, T.S., Flow development  
in the hydrodynamic entrance region of tubes and ducts,  
Physics of Fluids, 7 (3): 338-47. 1964.
14. LUNDGREN, T.S., SPARROW, E.M. & STARR, J.B., Pressure drop  
due to the entrance region in ducts of arbitrary cross  
section, J. Basic Engineering, Trans. ASME "D", 86 (3):  
620-26. 1964.
15. SPARROW, E.M., CHEN, T.S. & JONSSON, V.K., Laminar flow and  
pressure drop in internally finned tubes - annular ducts,  
Int. J. Heat Mass Transfer, 7 (5): 583-85. 1964.
16. KAYS, W. & LONDON, A.L., Compact heat exchangers, New York,  
McGraw-Hill, 1964. 272 p.
17. SOBOLEV, S.L., Partial differential equations of mathematical  
physics, Oxford, Pergamon Press, 1964.
18. HILDING, W.E. & COOGAN, C.H. Jr., Heat transfer and pressure  
loss measurements in internally finned tubes, Symposium  
on Air-cooled heat exchangers, ASME, New York, 1964.  
p. 53-85.
19. SPARROW, E.M., HAJI-SHEIKH, A. & LUNDGREN, T.S., The inverse  
problem in transient heat conduction, J. Appl. Mechanics  
31: 369-75, 1964.
20. FRAAS, A.P. & OZISIK, M.N., Heat exchanger design, New York,  
John Wiley, 1965. 386 p.

21. SPARROW, E.M. & HAJI-SHEIKH, A., Flow and heat transfer in ducts of arbitrary shape with arbitrary thermal boundary conditions, J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", 88 (4): 351-58. 1966.
22. KAYS, W.M., Convective heat transfer, New York, McGraw-Hill, 1966. 387 p.
23. KREIDER, D.L., et al., An introduction to linear analysis, Reading, Ma., Addison-Wesley, 1966. 773 p.
24. SPARROW, E.M., HIXON, C.W. & SHAVIT, G., Experiments on laminar flow development in rectangular ducts, J. Basic Engineering, Trans. ASME "D", 89 (1): 116-24. 1967
25. BERGLES, A.E., Survey and evaluation of techniques to augment convective heat and mass transfer. In: Progress in Heat and mass transfer, Vol. 1, Oxford, Pergamon Press, 1969.
26. FLEMING, D.P. & SPARROW, E.M., Flow in the hydrodynamic entrance of ducts of arbitrary cross section, J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", 91 (3): 345-54. 1969.
27. BERGLES, A.E. & SIMONDS, R.R., Combined forced and free convection for laminar flow in horizontal tubes with uniform heat flux, Int. J. Heat & Mass Transfer, 14 (12): 1989-2000. 1971.
28. AIHARA, T., Natural convection heat transfer from vertical rectangular-fin arrays; part 4 - Heat transfer characteristics of nonisothermal-fin arrays, Bull. of JSME, 14 (74): 818-28. 1971.
29. BERGLES, A.E., BROWN, G.S. Jr. & SNIDER, W.P., Heat-transfer performance of internally finned tubes, ASME Paper n° 71-HT-31, 1971.

30. STAKGOLD, I., Boundary value problems of mathematical physics  
Vol. 1, New York, Macmillan, 1971. 340 p.
31. STAKGOLD, I., Boundary value problems of mathematical physics  
Vol. 2, New York, Macmillan, 1971. 408 p.
32. LEVITSKY, M., The criterion of validity of the fin approximation, Int. J. Heat & Mass Transfer, 15 (10): 1960-63. 1972.
33. FITZROY, N.D., Optimum spacing of fins cooled by free convection, J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", 94 (3): 273-75. 1972.
34. HU, M.H., CHANG, Y.P., Optimization of finned tubes for heat transfer in laminar flow, J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", 95 (3): 332-38. 1973.
35. CHANG, Y.P., KANG, C.S. & CHEN, D.J., The use of fundamental Green's functions for the solution of problems of heat conduction in anisotropic media, Int. J. Heat & Mass Transfer, 16 (10): 1905-18. 1973.
36. MARSH, B.L. & COSTELLO, F.A., Stochastic optimization of convective-fin design, J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", 95 (3): 339-43. 1973.
37. BHARGAVA, S., DUFFIN, R.J., Dual extremum principles relating to cooling fins, Quart. Applied Mathematics, 31 (1): 27-41. 1973.
38. CAMPO, A., WOLKO, H.S., Optimum rectangular radiative fins having temperature - variant properties, J. Spacecraft & Rockets, 10 (12): 811-12. 1973.
39. LEAY, R.W. & BARROW, H., Theoretical analysis of forced laminar convection heat transfer in the entrance region of an elliptic duct, Int. J. Heat & Mass Transfer, 16 (7): 1501-03. 1973.

40. OTA, T., A. Riemann - Hilbert problem for a heat conduction in a finned surface, ZAMM, 53 (18): 488-91. 1973.
41. HUSSAIN, M.A. & PU, S.L., A variational principle for singular integral equations with bounded solutions, Int. J. Engng. Science, 11 (7): 767-81. 1973.
42. HU, M.H., Flow and thermal analysis for mechanically enhanced heat transfer tubes, Ph.D. Thesis, New York, State Univ., New York, 1973.
43. OU, J.W. & CHENG, K.C., Viscous dissipation effects on thermal entrance region heat transfer in pipes with uniform heat flux, Appl. Sci. Research, 28 (4/5): 289-301. 1973.
44. BEREZHINSKII, R. A. & GEISHTOVT, M.A., The problem of Heat transfer through finned surfaces, J. Engng. Physics, 19 (2): 1011-15. 1973.
45. SHAH, R.K. & LONDON, A.L., Thermal boundary conditions and some solutions for laminar duct flow forced convection, J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", 96 (2): 159-65. 1974.
46. MALISKA, C.R., Estudo dinâmico e término do escoamento laminar em duplo-tubo aletado, Tese de M.Sc., Centro Tecnológico/UFSC, Agosto, 1975.
47. COLLE, S. & MALISKA, C.R., Otimização de duplo-tubo aletado para a transmissão do calor em regime laminar, Anais do III Congresso Bras. Eng. Mecânica, COPPE/UFRJ, Vol. B: 475-489. 1975.
48. MEAGLER, V.R., Temperature distributions and heat-transfer characteristics of vee-fin array, Int. J. Heat & Mass Transfer, 18 (2): 339-41. 1975.
49. MASLIYAH, J.H. & NANDAKUMAR, K., Heat transfer in internally finned tubes, J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", 98 (2): 257-61. 1976.



50. HONG, S.W. & BERGLES, A.E., Theoretical solutions for combined forced and free convection in horizontal tubes with temperature - dependent viscosity, J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", 98 (3): 459-65. 1976.

## A P Ê N D I C E S

## A P Ê N D I C E A

PROBLEMAS A VALORES DE CONTORNO  
FUNÇÕES DE GREEN E MÉTODO INVERSOA.1 - Problemas de Dirichlet, Neumann e de Caráter Misto

Uma discussão completa sobre a natureza desses problemas pode ser vista em [17] e [31].

Embora o que foi apresentado vale para o operador de Sturm-Liouville no  $\mathbb{R}^n$ , vamos restringir esta revisão ao operador laplaceano no  $\mathbb{R}^n$ ;

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Seja  $D$  uma região normal do  $\mathbb{R}^n$ , isto é, uma região aberta e simplesmente conexa a qual podemos aplicar o teorema integral de Gauss<sup>31</sup> e;

Seja  $\partial D$ , a fronteira de  $D$ , a qual é constituída de curvas e superfícies regulares segundo O.D. KELLOG<sup>1</sup>;

Seja  $\bar{D} = D + \partial D$  o fêcho de  $D$  e  $f \in C^0(\bar{D})$ , isto é, uma função  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $\bar{D}$ ;

Existem três problemas a valores de contornos básicos, a saber:

$$-\nabla^2 u = f(x) \quad ; \quad x \in D \quad (A.1)$$

$$u|_{\partial D} = h(x) \quad ; \quad h \in C^0(\partial D) \quad (A.2)$$

(Problema de Dirichlet) ,

$$-\nabla^2 u = f(x) \quad ; \quad x \in D \quad (A.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \underline{n}} \Big|_{\partial D} = \text{grad } u \cdot \underline{n} \Big|_{\partial D} = r(x) ; \quad (\text{A.4})$$

$r \in C^0(\partial D)$  ; com a condição de consistência,

$$\int_{\partial D} r(x) \, dA = \int_D f(x) \, dx ; \quad dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

onde  $A$  é a área de  $\partial D$ .

(Problema de Neumann) e,

$$-\nabla^2 u = f(x) ; \quad x \in D \quad (\text{A.5})$$

$$u \Big|_{\partial D_i} = h_i(x) \quad (\text{A.6.1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial \underline{n}} \Big|_{\partial D_j} = r_j(x) ; \quad i \neq j ; \quad \partial D = \bigcup_{i=1}^N \partial D_i ; \quad (\text{A.6.2})$$

onde as superfícies  $\partial D_i$  e  $\partial D_j$  são disjuntas duas a duas para  $i \neq j$  e  $r_j \in C^0(\partial D_j)$ ,  $h_i \in C^0(\partial D_i)$ .

A função  $u \in C^2(\bar{D})$ , isto é,  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  é duas vezes continuamente diferenciável em  $\bar{D}$ .

As soluções destes problemas a valores de contorno existem e são únicas, exceto para o problema (A.3) e (A.4), cuja solução é única a menos de uma constante arbitrária <sup>17</sup>.

## A.2 - Método das Funções de Green

### A.2.1 - Formulação

Seja  $D$  a região considerada na secção anterior. Se a única solução do problema a valores de contorno,

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$u|_{\partial D} = 0 \quad (A.8)$$

for a solução trivial, existe a função de Green associada ao problema (A.1)-(A.2) e esta é univocamente determinada pelo seguinte problema a valores de contorno <sup>17,31</sup>:

$$-\nabla^2 g(x, \zeta) = \delta(x, \zeta) \quad \text{em } D \quad (A.9)$$

$$g(x, \zeta)|_{\partial D} = 0 \quad \text{para todo } x \in \partial D \quad (A.10)$$

onde  $\delta$  é a distribuição singular de Dirac definida pelas condições:

$$(i) \quad \delta(x, \zeta) = 0 \quad \text{para todo } x \neq \zeta \quad \text{em } D \quad (A.11)$$

$$(ii) \quad \int_D \delta(x, \zeta) \cdot f(x) dx = f(\zeta) \quad (A.12)$$

;  $dx = dx^1 dx^2 \dots dx^n$ , para toda função

$$f \in C^0(\bar{D})$$

Pela segunda identidade de Green, pode-se provar<sup>31</sup> que a solução de (A.1)-(A.2) é da forma,

$$u(x) = \int_D g(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta + \int_{\partial D} \frac{\partial g}{\partial \bar{n}}(x, \zeta) \cdot h(\zeta) \cdot dS(\zeta) \quad (A.13)$$

Do mesmo modo, se a única solução do problema a valores de contorno,

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{em } D \quad (A.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}|_{\partial D} = 0 \quad (A.15)$$

for uma constante real, a função de Green associada ao problema (A.3)-(A.4) existe, é única a menos de uma constante real, e é determinada pelas condições seguintes:

$$-\nabla^2 g(x, \zeta) = \delta(x, \zeta) - 1/V(D) \quad (A.16)$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \bar{n}} \right|_{\partial D} = 0 \quad \text{para todo } x \in \partial D \quad (A.17)$$

onde  $V(D) = \int_D dx$

Pela segunda identidade de Green, a solução de (A.3) - (A.4) é a seguinte:

$$u(x) = \int_D g(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta + \int_{\partial D} g(x, \zeta) r(\zeta) dS(\zeta) + C \quad (A.18)$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária.

Finalmente, se a única solução do problema a valores de contorno associado ao problema (A.5)-(A.6.2);

$$\nabla^2 u = 0 \quad (A.19)$$

$$u \Big|_{\partial D_i} = \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Big|_{\partial D_i} = 0 \quad ; \quad i \neq j \quad (A.20)$$

for a solução trivial, a função de Green associada ao problema (A.5)-(A.6.2) existe, é única e é determinada pelas condições seguintes:

$$-\nabla^2 g(x, \zeta) = \delta(x, \zeta) \quad (A.21)$$

$$g(x, \zeta) \Big|_{\partial D_i} = \frac{\partial g}{\partial \bar{n}} \Big|_{\partial D_j} = 0 \quad \text{para todo } x \in \partial D \quad (A.22)$$

$; \quad j \neq i$

Pela segunda identidade de Green, prova-se que a solução a valores de contorno (A.5)-(A.6.2) é a seguinte:

$$u(x) = \int_D g(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta + \sum_i \int_{\partial D_i} \frac{\partial g}{\partial \bar{n}_i}(x, \zeta) h_i(\zeta) dS_i(\zeta) +$$

$$+ \sum_j \int_{\partial D_i} g(x, \zeta) r_j(\zeta) dS_j(\zeta) \quad ; \quad i \neq j \quad (A.23)$$

onde,

$$\partial D = \bigcup_{k=1}^N \partial D_k \quad ; \quad \partial D_i \cap \partial D_j \text{ é vazio para } i \neq j .$$

Adicionalmente as funções de Green para os problemas (A.1)-(A.2) e (A.5)-(A.6.2) tem as seguintes propriedades:

- (i)  $g(x, \zeta)$  é positiva para todo  $\zeta \in D$ .
- (ii)  $g(x, \zeta) = g(\zeta, x)$  para todo  $\zeta \in D$ .
- (iii)  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B_\zeta} \frac{\partial g}{\partial \tilde{n}}(x, \zeta) dS(x) = -1$ , onde  $B_\zeta$  é uma esfera aberta de raio  $r$  centrada em  $\zeta \in D$ .
- (iv)  $g(x, \zeta) \in C^2(\bar{D})$ , para todo  $x \neq \zeta$

A função de Green do problema (A.3)-(A.4), obedece à e quação (iii), porém, a simetria (i) só se verifica se a seguinte condição for satisfeita <sup>31</sup>:

$$\int_D g(x, \zeta) dx = 0 \quad , \quad \text{para todo } \zeta \in D \quad (A.24)$$

### A.2.2 - Método de Cálculo

O grau de convergência das séries da solução dos problemas a valores de contorno citados, depende fundamentalmente do mêtodo de cálculo utilizado na construção das funções de Green.

Um dos métodos mais eficazes para resolver problemas de Dirichlet, de Neumann e do tipo misto, cujos operadores permitam separar as variáveis, é o método da expansão parcial em auto-funções <sup>31</sup>.

Este método será aqui utilizado para o cálculo das funções de Green necessárias no decorrer dos estudos do presente trabalho.

## a) Problema de Dirichlet

As equações (A.9)-(A.10) expressas em coordenadas polares no  $R^2$  tem a forma seguinte:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial g}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \delta(r - r') \delta(\theta - \theta')/r \quad (\text{A.25})$$

$$g(a, \theta | r', \theta') = g(b, \theta | r', \theta') = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$g(r, 0 | r', \theta') = g(r, \alpha | r', \theta') = 0 \quad (\text{A.27})$$

para todo par  $(r', \theta') \in D$  onde,

$$D = \{ (r, \theta) \in R^2 \mid a < r < b ; 0 < \theta < \alpha \}$$

A separação das variáveis do operador de (A.25) conduz aos seguintes problemas de auto-valores:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi}{dr} \right) + \frac{\lambda^2}{r^2} \psi = 0 \quad (\text{A.28})$$

$$\psi(a) = \psi(b) = 0 \quad (\text{A.29})$$

e,

$$\frac{d^2 \phi}{d\theta^2} + \lambda^2 \phi = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$\phi(0) = \phi(\alpha) = 0 \quad (\text{A.31})$$

cuja soluções são, respectivamente, as sequências,

$$\psi_n(r) = \text{sen}(\beta_n \ln r/a) ; n = 1, 2, \dots \text{ etc. } e,$$

$$\phi_n(\theta) = \text{sen}(\alpha_n \theta) ; n = 1, 2, \dots \text{ etc. } \text{ com}$$

$$\beta_n = n\pi/\ln(b/a) \quad e \quad \alpha_n = n\pi/2$$



O método consiste basicamente da construção de uma série de Fourier para a função de Green em auto-funções de  $r$  ou de  $\theta$ ;

Seja por exemplo a série,

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \phi_n(\theta) \quad (\text{A.32})$$

onde,

$$g_n = \frac{1}{||\phi_n||^2} \int_0^{\alpha} g \phi_n(\theta) d\theta \quad ; \quad (\text{A.33})$$

$$||\phi_n||^2 = \int_0^{\alpha} \phi_n^2(\theta) d\theta = \alpha/2$$

Multiplicando a equação (A.25) por  $\phi_n(\theta)/||\phi_n||^2$  e integrando ambos os membros da equação em  $[0, \alpha]$ , por (A.26), (A.33) e pela propriedade (ii) da função  $\delta(\theta - \theta')$  resulta,

$$-\frac{d}{dr} \left( r \frac{dg_n}{dr} \right) + \frac{\alpha n^2}{r} g_n = \frac{1}{||\phi_n||^2} \delta(r-r') \phi_n(\theta') \quad (\text{A.34})$$

De (A.26) e (A.33) resulta,

$$g_n(a) = g_n(b) = 0 \quad (\text{A.35})$$

O problema agora, reduz-se na construção da função de Green unidimensional  $g_n$ , do problema (A.34)-(A.35). Pela teoria, a função de Green,  $g_n$  é contínua em todo  $r' \in [a, b]$ ; segue-se que,

$$g_n(r'^+) - g_n(r'^-) = 0 \quad (\text{A.36})$$

A condição (iii) para o caso unidimensional, reduz-se a equação do salto da derivada em  $r'$ ; isto é,

$$g_n'(r'^+) - g_n'(r'^-) = -\frac{2}{\alpha r'} \phi_n(\theta') \quad (\text{A.37})$$

Para  $r \neq r'$  a solução geral de (A.34) é,

$$g_n = C_{1n} r^{\alpha_n} + C_{2n} r^{-\alpha_n} ;$$

$C_{1n}$  e  $C_{2n}$  são constantes a determinar, para  $r < r'$  e para  $r > r'$ .

Para  $r < r'$ , a condição  $g_n(a) = 0$  implica,

$$g_n = A_n \left[ (r/a)^{\alpha_n} - (r/a)^{-\alpha_n} \right]$$

Do mesmo modo, para  $r > r'$  a condição  $g_n(b) = 0$  implica,

$$g_n = B_n \left[ (r/b)^{\alpha_n} - (r/b)^{-\alpha_n} \right]$$

Aplicando as condições (A.36) e (A.37), para o cálculo de  $A_n$  e  $B_n$ , resulta finalmente,

$$g_n = \frac{1}{n\pi} \phi_n(\theta') \left[ (r/b)^{\alpha_n} - (r/b)^{-\alpha_n} \right] \left[ (r'/a)^{\alpha_n} - (r'/a)^{-\alpha_n} \right] / \left[ (b/a)^{\alpha_n} - (b/a)^{-\alpha_n} \right] \quad \text{para } r < r' \quad (\text{A.38})$$

e,

$$g_n = \frac{1}{n\pi} \phi_n(\theta') \left[ (r'/b)^{\alpha_n} - (r'/b)^{-\alpha_n} \right] \left[ (r/a)^{\alpha_n} - (r/a)^{-\alpha_n} \right] / \left[ (b/a)^{\alpha_n} - (b/a)^{-\alpha_n} \right] \quad \text{para } r > r' \quad (\text{A.39})$$

Repetindo as operações análogas, para a expansão parcial em  $r$  chega-se ao seguinte:

$$\frac{d^2 g_n}{d\theta^2} - \beta_n^2 g_n = - \frac{1}{||\psi_n||^2} \delta(\theta - \theta') \psi_n(r') \quad (\text{A.40})$$

$$g_n(\theta) = g_n(\alpha) = 0 \quad (\text{A.41})$$

onde,

$$g_n = \frac{1}{||\psi_n||^2} \int_a^b g \psi_n(r) \frac{dr}{r}$$

$$||\psi_n||^2 = \frac{1}{2} \ln(b/a) ;$$

A solução  $g_n$  para  $\theta \neq \theta'$  é da forma,

$$g_n = C_{1n} \sinh(\beta_n \theta) + C_{2n} \cosh(\beta_n \theta) \quad (A.42)$$

As condições de continuidade e de salto da derivada de  $g_n$  em  $\theta'$  são respectivamente,

$$g_n(\theta'^+) - g_n(\theta'^-) = 0 \quad (A.43)$$

$$g_n'(\theta'^+) - g_n'(\theta'^-) = -2 \psi_n(r') / \ln(b/a) \quad (A.44)$$

A determinação das constantes  $C_{1n}$  e  $C_{2n}$  para  $\theta < \theta'$  e  $\theta > \theta'$  conduz aos seguintes resultados:

$$g_n = \frac{2}{n\pi} \psi_n(r') \sinh(\beta_n \theta) \sinh(\beta_n(\alpha - \theta')) / \sinh(\beta_n \alpha/2) \quad (A.45)$$

para  $\theta < \theta'$

e,

$$g_n = \frac{2}{n} \psi_n(r') \sinh(\beta_n \theta') \sinh(\beta_n(\alpha - \theta)) / \sinh(\beta_n \alpha/2) \quad (A.46)$$

para  $\theta > \theta'$

#### b) Problema de Neumann

As equações (A.16) e (A.17) em coordenadas polares tem a forma abaixo:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial g}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \delta(r-r') \delta(\theta-\theta') - \frac{1}{A} \quad (A.47)$$

onde,

$$A = \int_D dA = \frac{\alpha}{2} (b^2 - a^2) ;$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} (a, \theta | r', \theta') = \frac{\partial g}{\partial r} (b, \theta | r', \theta') = 0 \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} (r, 0 | r', \theta') = \frac{\partial g}{\partial \theta} (r, \alpha | r', \theta') = 0 \quad (\text{A.49})$$

As auto-funções em  $\theta$  e  $r$ , associadas às condições de contorno (A.48) e (A.49), são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \phi_n(\theta) &= \text{sen}(\alpha_n \theta) \quad ; \quad \alpha_n = (2n - 1) \pi / 2\alpha \\ & \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \text{etc.} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi_n(r) &= \cos(\beta_n \ln r/a) \quad ; \quad \beta_n = n\pi / \ln(b/a) \\ & \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{etc.} \end{aligned}$$

A expansão parcial de  $g$  em auto-funções de  $r$  é,

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \psi_n(r) \quad (\text{A.50})$$

onde,

$$g_n = \frac{1}{||\psi_n||^2} \int_a^b g \psi_n(r) \frac{dr}{r} \quad (\text{A.51})$$

com,

$$\begin{aligned} ||\psi_0||^2 &= 1 \quad \text{e} \quad ||\psi_n||^2 = \frac{1}{2} \ln(b/a) \quad ; \\ & \quad n = 1, 2, \dots \text{etc.} \end{aligned}$$

Multiplicando (A.47) por  $\psi_0/r ||\psi_0||^2$  e integrando o resultado em  $[a, b]$ , por (A.49), (A.51) e pela propriedade (ii) de  $\delta$  resulta,

$$\frac{d^2 g_0}{d\theta^2} = -\delta(\theta - \theta') / \ln(b/a) + 1/(\alpha \ln b/a) \quad (\text{A.52})$$

$$g_0'(0) = g_0'(\alpha) = 0 \quad (\text{A.53})$$

As condições de continuidade e de salto da derivada, para  $g_0$  em  $\theta'$  são, respectivamente, as seguintes:

$$g_0(\theta'^+) - g_0(\theta'^-) = 0 \quad (\text{A.54})$$

$$g_0'(\theta'^+) - g_0'(\theta'^-) = -1/\ln(b/a) \quad (\text{A.55})$$

A solução do problema, (A.52)-(A.55) para  $\theta < \theta'$  e  $\theta > \theta'$ , é da forma,

$$g_0 = \frac{\theta^2}{2\alpha \ln b/a} - \frac{\theta'}{\ln b/a} + D \quad \text{para } \theta < \theta'$$

e

$$g_0 = \frac{\theta^2}{2\alpha \ln b/a} - \frac{\theta}{\ln b/a} + D \quad \text{para } \theta > \theta',$$

onde  $D$  é uma constante arbitrária.

A constante  $D$  é determinada de tal forma que  $g$  seja simétrica. Para que  $g$  seja simétrica, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\int_a^b g_0(\theta, \theta') d\theta' = 0, \quad \text{para todo } \theta \in [0, \alpha].$$

Calculando  $D$  desta condição, resulta finalmente que,

$$g_0 = \frac{\theta^2 + \theta'^2}{2\alpha \ln b/a} - \frac{\theta}{\ln b/a} + \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\ln b/a} \quad (\text{A.56})$$

para  $\theta < \theta'$

e,

$$g_0 = \frac{\theta^2 + \theta'^2}{2\alpha \ln b/a} - \frac{\theta'}{\ln b/a} + \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\ln b/a} \quad (\text{A.57})$$

para  $\theta > \theta'$

Multiplicando (A.47) por  $\psi_n(r)/r ||\psi_n||^2$  e integrando o resultado em  $[a, b]$ , por (A.49), (A.51) e pela propriedade (ii)

de  $\delta$  vem,

$$\frac{d^2 g_n}{d\theta^2} - \beta_n^2 g_n = - \frac{1}{||\psi_n||^2} \delta(\theta - \theta') \psi_n(r') \quad (\text{A.58})$$

$$g_n'(0) = g_n'(\alpha) = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \text{etc.} \quad (\text{A.59})$$

As condições de continuidade e de salto da derivada de  $g_n$  em  $\theta'$  são expressas por,

$$g_n(\theta'^+) - g_n(\theta'^-) = 0 \quad (\text{A.60})$$

e

$$g_n'(\theta'^+) - g_n'(\theta'^-) = -2 \psi_n(r') / \ln(b/a) \quad (\text{A.61})$$

A solução do problema (A.58)-(A.61) para  $\theta < \theta'$  e  $\theta > \theta'$  é dada pelas equações,

$$g_n = \frac{2}{n\pi} \psi_n(r') \cosh(\beta_n(\theta - \alpha)) \cosh(\beta_n \theta') / \sinh(\beta_n \alpha) \quad (\text{A.62})$$

para  $\theta < \theta'$

e,

$$g_n = \frac{2}{n\pi} \psi_n(r') \cosh(\beta_n(\theta' - \alpha)) \cosh(\beta_n \theta) / \sinh(\beta_n \alpha) \quad (\text{A.63})$$

para  $\theta > \theta'$

### c) Problema do Tipo Misto

As equações (A.5)-(A.6.2) expressas em coordenadas polares resultam,

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r' \frac{\partial g}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \quad (\text{A.64})$$

$$g(a, \theta | r', \theta') = \frac{\partial g}{\partial r}(b, \theta | r', \theta') = 0 \quad (\text{A.65})$$

$$g(r, 0|r', \theta') = g(r, \alpha|r', \theta') = 0 \quad (\text{A.66})$$

A separação das variáveis do operador associado a (A.64) e as condições de contorno (A.65) e (A.66), conduz as seguintes seqüências de auto-funções:

$$\psi_n(r) = \text{sen}(\beta_n \ln r/a) \quad ; \quad \beta_n = (2n-1) \pi/2 \ln b/a$$

$$; \quad ||\psi_n||^2 = \frac{1}{2} \ln(b/a) \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \text{etc.}$$

e,

$$\phi_n(\theta) = \text{sen}(\alpha_n \theta) \quad ; \quad \alpha_n = n\pi/\alpha$$

$$||\phi_n||^2 = \alpha/2 \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \text{etc.}$$

Aplicando o mesmo procedimento anterior, para a expansão,

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \phi_n(\theta) \quad ; \quad g_n = \frac{1}{||\phi_n||^2} \int_0^{\alpha} g \phi_n(\theta) d\theta \quad ;$$

chega-se às seguintes condições:

$$-\frac{d}{dr} \left( r \frac{dg_n}{dr} \right) + \frac{\alpha_n^2}{r} g_n = \frac{1}{||\phi_n||^2} \delta(r-r') \phi_n(\theta') \quad (\text{A.67})$$

$$g_n(a) = \frac{dg_n}{dr}(b) = 0 \quad (\text{A.68})$$

$$g_n(r'^+) - g_n(r'^-) = 0 \quad (\text{A.69})$$

$$g_n'(r'^+) - g_n'(r'^-) = -\frac{2}{\alpha r'} \phi_n(\theta') \quad (\text{A.70})$$

A solução deste problema é,

$$g_n = \frac{1}{n\pi} \phi_n(\theta') [(r'/b)^{\alpha_n} + (r'/b)^{-\alpha_n}] [(r/a)^{\alpha_n} - (r/a)^{-\alpha_n}]$$

$$/ [(b/a)^{\alpha_n} + (b/a)^{-\alpha_n}] \quad ; \quad \text{para } r < r' \quad (\text{A.71})$$

e,

$$g_n = \frac{1}{n\pi} \phi_n(\theta') [(r/b)^{\alpha_n} + (r/b)^{-\alpha_n}] [(r'/a)^{\alpha_n} - (r'/a)^{-\alpha_n}]$$

$$/ [(b/a)^{\alpha_n} + (b/a)^{-\alpha_n}] \quad ; \quad \text{para } r > r' \quad (\text{A.72})$$

Para a expansão,

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \psi_n(r) \quad ; \quad g_n = \frac{1}{||\psi_n||^2} \int_a^b g \psi_n(r) \frac{dr}{r}$$

tem-se as seguintes condições:

$$\frac{d g_n}{d \theta^2} - \beta_n^2 g_n = - \frac{2}{\ln(b/a)} \delta(\theta - \theta') \psi_n(r') \quad (\text{A.73})$$

$$g_n(0) = g_n(\alpha) = 0 \quad (\text{A.74})$$

$$g_n(\theta'^+) - g_n(\theta'^-) = 0 \quad (\text{A.75})$$

$$g_n'(\theta'^+) - g_n'(\theta'^-) = - \frac{2}{\ln(b/a)} \psi_n(r') \quad (\text{A.76})$$

A solução deste problema é,

$$g_n = \frac{2 \psi_n(r')}{\beta_n \ln(b/a)} \sinh(\beta_n(\alpha - \theta')) \sinh(\beta_n \theta) / \sinh(\beta_n \alpha) \quad (\text{A.77})$$

$$\text{para } \theta < \theta'$$

e,

$$g_n = \frac{2 \psi_n(r')}{\beta_n \ln(b/a)} \sinh(\beta_n(\alpha - \theta)) \sinh(\beta_n \theta') / \sinh(\beta_n \alpha) \quad (\text{A.78})$$

$$\text{para } \theta > \theta'$$



Agrupando os resultados da substituição dos ramos  $g_n$  nas séries respectivas, resulta o que segue:

a - Problema (A.25)-(A.27)

a.1 - Expansão em  $\theta$ ;

$$g(r, \theta | r', \theta') = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{[(r'/b)^{-\alpha_n} - (r'/b)^{\alpha_n}]}{[(b/a)^{\alpha_n} - (b/a)^{-\alpha_n}]} \cdot [(r/a)^{\alpha_n} - (r/a)^{-\alpha_n}] \phi_n(\theta') \phi_n(\theta) ; \text{ para } r < r' \quad (\text{A.79})$$

$$\phi_n(\theta) = \text{sen } (\alpha_n \theta) ; \quad \alpha_n = n\pi/2$$

a.2 - Expansão em  $r$ ;

$$g(r, \theta | r', \theta') = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\text{senh}(\beta_n \theta)}{\text{senh}(\beta_n \alpha/2)} \cdot \text{senh}(\beta_n (\alpha - \theta')) \cdot \psi_n(r') \psi_n(r) ; \quad \text{para } \theta < \theta' \quad (\text{A.80})$$

$$\psi_n(r) = \text{sen } (\beta_n \ln r/a) ; \quad \beta_n = n\pi/\ln(b/a)$$

b - Problema (A.47)-(A.49)

b.1 - Expansão em  $r$ ;

$$g(r, \theta | r', \theta') = \frac{\theta^2 + \theta'^2}{2 \alpha \ln(b/a)} - \frac{\theta}{\ln(b/a)} + \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\ln(b/a)} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cosh(\beta_n (\theta - \alpha))}{\text{senh } (\beta_n \alpha)} \cosh(\beta_n \theta') \psi_n(r') \psi_n(r) \quad (\text{A.81})$$

$$\text{para } \theta < \theta' ; \quad \psi_n(r) = \cos (\beta_n \ln r/a); \quad \beta_n = n\pi/\ln b/a$$

c - Problema (A.64)-(A.66)

c.1 - Expansão em  $\theta$  ;

$$g(r, \theta | r', \theta') = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{[(r'/b)^{\alpha_n} + (r'/a)^{-\alpha_n}]}{[(b/a)^{\alpha_n} + (b/a)^{-\alpha_n}]} \cdot [(r/a)^{\alpha_n} - (r/a)^{-\alpha_n}] \phi_n(\theta) \phi_n(\theta') ; \text{ para } r < r' \quad (\text{A.82})$$

$$\phi_n(\theta) = \text{sen}(\alpha_n \theta) ; \quad \alpha_n = n\pi/\alpha$$

c.2 - Expansão em  $r$  ;

$$g(r, \theta | r', \theta') = \frac{2}{\ln b/a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} \cdot \frac{\text{senh}(\beta_n(\alpha - \theta'))}{\text{senh}(\beta_n \alpha)} \text{senh}(\beta_n \theta) \cdot \psi_n(r') \psi_n(r) ; \text{ para } \theta < \theta' \quad (\text{A.83})$$

$$\psi_n(r) = \text{sen}(\beta_n \ln r/a) ; \quad \beta_n = (2n-1) \pi/2 \ln(b/a)$$

A expansão de  $g$  para  $r > r'$  e  $\theta > \theta'$  em todos os três casos, são obtidas das equações respectivas, trocando  $r$  por  $r'$  e  $\theta$  por  $\theta'$ .

### A.3 - Método Inverso

O método das funções de Green basicamente, nos fornece uma forma explícita para a solução dos problemas a valores de contorno, em função das condições de contorno e dos valores da função  $f$  em  $D$ . Tal método na transferência do calor é comumente denominado de método direto. Contudo, em algumas circunstâncias, algumas condições de contorno são desconhecidas; é o caso por exemplo, da condição de contorno expressa pela convecção na parede de

um sólido.

Neste caso, as equações (A.13), (A.18) e (A.23) , quando aplicadas ao contorno da região, nos permitem avaliar as condições de contorno em função das informações dadas pela função  $f$  e pela função de Green em  $D$  . Tais equações são caracterizadas como equações integrais e o método neste caso é, então, denominado de método inverso.

Em primeira instância não é necessária uma função de Green completa para resolver tais problemas; basta a função de Green fundamental <sup>35</sup>. A convergência do método, contudo, depende fundamentalmente da completividade da função de Green. Quanto mais completa for a função de Green, isto é, quanto mais condições de contorno essa função satisfizer, maior será a convergência do método inverso <sup>35</sup>. Uma das vantagens do método, é que este permite o cálculo da função desconhecida, em sub-regiões da região considerada, desde que informações adicionais sobre o comportamento da função naquela sub-região sejam oferecidas. Uma outra vantagem, diante das dificuldades de cálculo da função de Green completa para uma região de geometria irregular, é que o método é aplicável para regiões de geometria irregular . De um modo geral, uma vez conhecida a função de Green fundamental ou incompleta, existe menos dificuldade em resolver-se o problema a valores de contorno pelo método inverso do que pelo método direto <sup>35</sup>.

## A P Ê N D I C E B

TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM DUTOS DE  
SECÇÃO MULTIPLAMENTE CONEXAB.1 - Formulação do Problema de Transferência de Calor Laminar

Será aqui abordado o problema de transferência de calor no caso de um duto cilíndrico de secção transversal  $D$ , onde o contorno de  $D$  é constituído de  $N+1$  contornos, isto é, o contorno relativo ao duto externo  $\partial D_0$  e os contornos relativos aos dutos envolvidos;  $\partial D_1, \partial D_2 \dots \partial D_N$  (vide Fig. (B.1)).

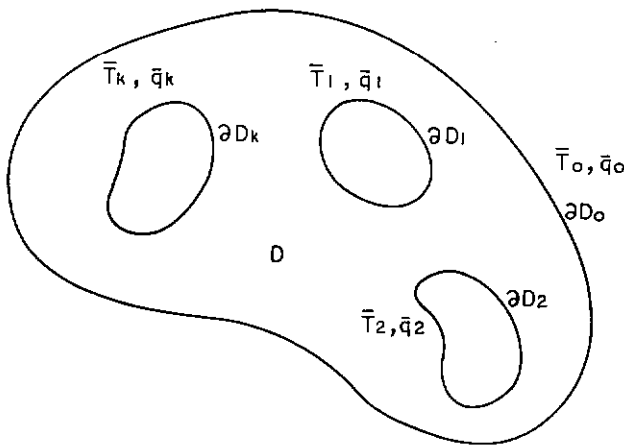


Fig. (B.1)

As condições de contorno serão do tipo misto, isto é, fluxo térmico ou temperatura, prescritos separadamente em cada contorno  $\partial D_k$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots N$ .

Define-se a temperatura média em  $\partial D_j$  por ,

$$\bar{T}_j^* = \frac{1}{S_j} \int_{\partial D_j} T_j^*(s_j^*) ds_j^* ; \quad S_j^* = \int_{\partial D_j} ds_j^* \quad (B.1)$$

Do mesmo modo, define-se o fluxo térmico médio em  $\partial D_j$  por,

$$\bar{q}_j^* = - \frac{1}{S_j^*} \int_{\partial D_j} k \frac{\partial T^*}{\partial \underline{n}_j} ds_j^* \quad (B.2)$$

onde  $\underline{n}_j$  é a normal exterior a  $\partial D$  em  $\partial D_j$  e  $k$  é a condutibilidade térmica do fluido.

O coeficiente médio de transferência de calor por convecção em  $\partial D_j$  é definido por,

$$\bar{q}_j^* = \bar{h}_j^* (\bar{T}_j^* - T_b^*) \quad (B.3)$$

onde  $T_b^*$  é a temperatura média de mistura do fluido definida como segue:

$$T_b^* = \frac{1}{u_m^* A^*} \int_D T^* u^* dA^* \quad (B.4)$$

onde,

$$A^* = \int_D dA^* \quad \text{e} \quad u_m^*$$

é a velocidade média definida pela equação,

$$u_m^* = \frac{1}{A^*} \int_D u^* dA^* ; \quad (B.5)$$

sendo  $u^*$  o campo de velocidade em  $D$ .

O problema da transferência de calor para o escoamento laminar de um fluido newtoniano incompressível com propriedades físicas constantes, num duto cilíndrico, com a geometria da figura (B.1), é caracterizado pelo seguinte problema a valores de contor

no:

$$\operatorname{div} \underline{v}^* = 0 \quad (\text{equação da Continuidade}) \quad (\text{B.6})$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial t} + (\operatorname{grad} \underline{v}^*) \cdot \underline{v}^* \right] = - \operatorname{grad} p^* + \mu \nabla^2 \underline{v}^* \quad (\text{B.7})$$

(equação do Movimento)

$$\nabla^2 T^* = \frac{\rho C_p}{k} \left( \frac{\partial T^*}{\partial t} + \underline{v}^* \cdot \operatorname{grad} T^* \right) - \frac{\mu}{k} \phi^* - \frac{1}{k} Q_g^* \quad (\text{B.8})$$

(equação da Energia) ;

$$\underline{v}^* \Big|_{\partial D_k} = 0 \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (\text{B.9})$$

$$T^* \Big|_{\partial D_i} = T_k^* \quad (\text{Temperatura Prescrita}) \quad (\text{B.10})$$

$$-k \frac{\partial T^*}{\partial \underline{n}} \Big|_{\partial D_j} = q_j^* \quad (\text{Fluxo Prescrito}) \quad (\text{B.11})$$

para  $j \neq k$

onde,

$$T_k^* = T_k^*(x^*) \quad ; \quad q_k^* = q_k^*(x^*)$$

$\phi^*$  = função dissipação viscosa

$Q_g^*$  = geração de calor no fluido

$\rho$  = massa específica do fluido

$C_p$  = calor específico do fluido a pressão constante, e

$\mu$  = viscosidade

## B.2 - Perfis de Velocidade e de Temperatura Plenamente Desenvolvidos.

No escoamento estacionário, quando um fluido entra num duto cilíndrico, com velocidade uniforme  $v_0^*$  e temperatura uniforme  $T_0^*$ , existem condições segundo as quais, tanto o perfil de velocidade quanto o perfil de temperatura tendem assintoticamente, a se tornarem invariantes com  $x^*$ . Essa invariância é comprovada teórica e experimentalmente em dutos de secção arbitrária no caso particular de o fluxo térmico médio não variar com  $x^{*13,14,24,26}$ .

Para números de Reynolds moderados, na ausência de geração de calor, em pontos suficientemente afastados da região de entrada do duto, as equações (B.6)-(B.8) se reduzem às equações seguintes <sup>21</sup>:

$$\nabla^2 u^* = - \frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dx^*} \quad (B.12)$$

e,

$$\nabla^2 T^* = \frac{\rho C_p}{k} u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (B.13)$$

onde  $u^*$  é a velocidade do escoamento na direção longitudinal do duto  $x^*$ .

Nessa região,  $u^*$  e  $T^*$  satisfazem às seguintes condições de perfil plenamente desenvolvido:

$$\frac{\partial}{\partial x^*} (u^*/u_m^*) = \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{T^* - T_b^*}{\bar{T}_j^* - T_b^*} \right) = 0 \quad (B.14)$$

para todo contorno  $D_j$  ;  $j = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Adicionalmente tem-se a seguinte identidade:

$$\int_{\partial D_j} \frac{\partial}{\partial n_j} \left( \frac{T^* - T_b^*}{\bar{T}_j^* - T_b^*} \right) ds^* = \frac{1}{\bar{T}_j^* - T_b^*} \int_{\partial D_j} \frac{\partial T^*}{\partial n_j} ds^* \quad (B.15)$$

De (B.2), (B.3) e (B.15), resulta,

$$\bar{h}_j^*/k = - \frac{1}{S_j^*} \int_{\partial D_j} \frac{\partial}{\partial n_j} \left( \frac{T^* - T_b^*}{\bar{T}_j^* - T_b^*} \right) ds^* \quad (B.16)$$

Para perfil de temperatura plenamente desenvolvido, por (B.14) e (B.16) segue-se que  $\bar{h}_j^*/k$  é invariante com  $x^*$ . É interessante examinar particularmente o caso em que cada  $\bar{q}_j^*$  é constante no sentido longitudinal. Em consequência, por (B.3) e pela conclusão anterior, vem,

$$\bar{T}_j^* - T_b^* = \text{constante}, \text{ para todo } j \quad (B.17)$$

Da equação (B.14) resulta,

$$(T^* - T_b^*) \frac{\partial}{\partial x^*} (\bar{T}_j^* - T_b^*) - (\bar{T}_j^* - T_b^*) \frac{\partial}{\partial x^*} (T^* - T_b^*) = 0 \quad (B.18)$$

Por (B.17) e (B.18) temos a igualdade,

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{\partial T_b^*}{\partial x^*} = \frac{dT_b^*}{dx^*}$$

e novamente por (B.17) segue-se finalmente que,

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{d\bar{T}_j^*}{dx^*} = \frac{dT_b^*}{dx^*} \quad (B.19)$$

Por outro lado, integrando (B.13) em  $D$  e aplicando o teorema da divergência ao primeiro membro dessa equação, por (B.2) resulta a equação seguinte:



$$\sum_{j=0}^N \bar{q}_j^* S_j^* = - \int_D \rho C_p u^* dA^* \frac{dT_b^*}{dx^*}$$

Supondo as propriedades físicas do fluido constantes, por (B.5) resulta,

$$\sum_{j=0}^N \bar{q}_j^* S_j^* = - \rho C_p u_m^* A^* \frac{dT_b^*}{dx^*} \quad (\text{B.20})$$

A secção D do duto, pode ser parametrizada por coordenadas cartesianas ( $y^*$ ,  $z^*$ ). Define-se  $\ell^*$  como uma medida linear de D. O problema a valores de contorno,

$$\nabla^2 T^* = \frac{\rho C_p}{k} \frac{dT_b^*}{dx^*} \quad (\text{B.21})$$

com as condições de contorno,

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial n_j} \right|_{\partial D_j} = - \bar{q}_j^* / k \quad (\text{B.22})$$

e,

$$T^* \Big|_{\partial D_k} = \bar{T}_k^* , \quad \text{para } k \neq j \quad (\text{B.23})$$

pode ser adimensionalizado pelas seguintes variáveis:

$$y = y^* / \ell^* , \quad z = z^* / \ell^* \quad (\text{B.24})$$

$$u = -u^* / \ell^{*2} \frac{dp^*}{dx^*} / \mu \quad (\text{B.25})$$

$$T = T^* / \ell^{*4} \frac{dT_b^*}{dx^*} \frac{dp^*}{dx^*} / \alpha \mu , \quad \text{onde } \alpha = k / \rho C_p \quad (\text{B.26})$$

O resultado da substituição destas variáveis em (B.21) - (B.23) nos dá o seguinte problema adimensional:

$$\nabla^2 T = -u \quad (\text{B.27})$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n_j} \right|_{\partial D_j} = \bar{q}_j \quad (\text{B.28})$$

$$T \Big|_{\partial D_k} = \bar{T}_k \quad ; \quad \text{para } k \neq j \quad (\text{B.29})$$

onde,

$$\bar{q}^* = \bar{q} \ell^{*3} \frac{dT_b^*}{dx^*} \frac{dp^*}{dx^*} \quad k/\alpha\mu$$

Repetindo as operações que originaram (B.20) em (B.27)-(B.29), chega-se a seguinte identidade adimensional:

$$\sum_{j=0}^N \bar{q}_j S_j = u_m A \quad (\text{B.30})$$

onde,

$$u_m = - u_m^* / \ell^{*2} \frac{dp^*}{dx^*} / \mu$$

$$A = A^* / \ell^{*2}$$

$$S_j = S_j^* / \ell^*$$

A equação (B.30) é a equação de compatibilidade, a qual, os problemas de transferência de calor do tipo (B.21)-(B.23) devem satisfazer no regime plenamente desenvolvido, com a substituição das variáveis adimensionais (B.24)-(B.26).

## APÊNDICE C

## PROBLEMA DO FLUXO PRESCRITO:

## CAMPO DE TEMPERATURA - TEMPERATURAS MÉDIAS

C.1 - Cálculo do Campo de Temperatura

A função de Green modificada para o problema de Neumann, é a seguinte:

$$g(r, \theta | r', \theta') = g_0(\theta, \theta') + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\theta, \theta') \Psi_n(r) \Psi_n(r') \quad (C.1)$$

Com

$$g_0(\theta, \theta') = \begin{cases} -\theta'^2/\theta_0 \ln r_i + \theta'/\ln r_i \\ \text{para } \theta < \theta' \\ -\theta'^2/\theta_0 \ln r_i + \theta/\ln r_i \\ \text{para } \theta > \theta' \end{cases} \quad (C.2)$$

e

$$g_n(\theta, \theta') = \begin{cases} -\frac{2}{n\pi} \cosh [\beta_n(\theta' - \theta_0/2)] \cosh (\beta_n \theta) / \sinh (\beta_n \theta_0/2) \\ \text{para } \theta < \theta' \\ -\frac{2}{n\pi} \cosh [\beta_n(\theta - \theta_0/2)] \cosh (\beta_n \theta') / \sinh (\beta_n \theta_0/2) \\ \text{para } \theta > \theta' \end{cases} \quad (C.3)$$

onde  $\Psi_n(r) = \cos (\beta_n \ln r/r_i)$ ;  $\beta_n = n\pi/\ln r_i$

O campo de velocidade é expresso pela equação:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n \cosh(\beta_n \theta)) \phi_n(r) \quad (C.4)$$

$$A_n = 2(\cos n\pi - r_i^{-2})/(n\pi(4 + \beta_n^2))$$

$$B_n = A_n - C_n ; C_n \text{ é definido no capítulo III.}$$

$$\phi_n(r) = \sin(\beta_n \ln r/r_i); \quad \beta_n = n\pi/\ln r_i$$

As integrais associadas ao campo de temperatura (vide capítulo IV) são:

$$I_1 = \int_0^{\theta_0/2} g(r, \theta | r_i, \theta') d\theta' \quad (C.5)$$

$$I_2 = \int_0^{\theta_0/2} g(r, \theta | 1, \theta') d\theta' \quad (C.6)$$

$$I_3 = \int_{r_i}^{r_a} g(r, \theta | r', \theta_0/2) dr' ; \quad \theta < \theta' \quad (C.7)$$

$$I_4 = \int_{r_i}^1 \int_0^{\theta_0/2} g(r, \theta | r', \theta') r' dr' d\theta' \quad (C.8)$$

$$I_5 = \int_{r_i}^1 \int_0^{\theta_0/2} g(r, \theta | r', \theta') u(r', \theta') r' dr' d\theta' \quad (C.9)$$

Cálculo de  $I_1$ :

$$\int_0^{\theta_0/2} g_0(\theta, \theta') d\theta' = \int_0^{\theta} g_0(\theta, \theta') d\theta' + \int_{\theta}^{\theta_0/2} g_0(\theta, \theta') d\theta' =$$

$(\theta > \theta') \qquad \qquad \qquad (\theta < \theta')$

$$= (\theta^2 + \theta_0^2/6)/(2 \ln r_i) \quad (C.5.1)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta_0/2} g_n(\theta, \theta') d\theta' &= \int_0^{\theta} g_n(\theta, \theta') d\theta' + \int_{\theta}^{\theta_0/2} g_n(\theta, \theta') d\theta' = \\ &\quad (\theta > \theta') \quad (\theta < \theta') \\ &= -2 \ln r_i / (n\pi)^2 \end{aligned} \quad (C.5.2)$$

Por (C.5), (C.5.1) e (C.5.2) vem,

$$I_1 = (\theta^2 + \theta_0^2/6)/(2 \ln r_i) - (2 \ln r_i / \pi^2) \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(r)/n^2$$

Substituindo a expansão de Fourier acima, resulta,

$$\begin{aligned} I_1 &= (\theta^2 + \theta_0^2/6)/(2 \ln r_i) - \ln r_i [1/3 - \ln(r/r_i)/\ln r_i + \\ &\quad + (\ln(r/r_i)/\ln r_i)^2/2] \end{aligned} \quad (C.10)$$

### Cálculo de $I_2$ :

De modo semelhante ao que foi feito para  $I_1$ , resulta,

$$I_2 = (\theta^2 + \theta_0^2/6)/(2 \ln r_i) - \ln r_i [1/3 - (\ln(r/r_i)/\ln r_i)^2]$$

### Cálculo de $I_3$ :

$$\int_{r_i}^{r_a} g_0(\theta, \theta_0/2) dr' = - (r_a - r_i) \theta_0 / (4 \ln r_i) \quad (\theta < \theta') \quad (C.11)$$

$$\text{Seja } H_n = \int_{r_i}^{r_a} \psi_n(r') dr' = \{ r_a [\cos(\beta_n \ln r_a/r_i) +$$

$$+ \beta_n \operatorname{sen} (\beta_n \ln r_a/r_i)] - r_i\}/(1 + \beta_n^2) \quad (\text{C.7.2})$$

Portanto,

$$I_3 = - (r_a - r_i)\theta_0/(4 \ln r_i) + (2/\pi) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cosh (\beta_n \theta) \Psi_n(r)/\sinh (\beta_n \theta_0/2) \quad (\text{C.12})$$

Cálculo de  $I_4$ :

$$I_4 = \int_{r_i}^1 \int_0^{\theta_0/2} g_0(\theta, \theta') r' dr' d\theta' + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{\theta_0/2} g_n(\theta, \theta') d\theta' \right) \left( \int_{r_i}^1 \Psi_n(r') r' dr' \right) \Psi_n(r) \quad (\text{C.8.1})$$

$$\int_{r_i}^1 \Psi_n(r') r' dr' = 2(\cos n\pi - r_i^2)/(4 + \beta_n^2) \quad (\text{C.8.2})$$

De (C.5.1), (C.5.2), (C.8.2) e (C.8.1), resulta,

$$I_4 = - (1 - r_i^2) (\theta^2 + \theta_0^2/6)/(4 \ln r_i)^2 + (4 \ln r_i/\pi^2) \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n\pi - r_i^2) \Psi_n(r)/(n^2 (4 + \beta_n^2)) \quad (\text{C.13})$$

Cálculo de  $I_5$ :

$$\begin{aligned}
I_5 = & \int_{r_i}^1 \int_0^{\theta_0/2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n \cosh(\beta_n \theta')) \phi_n(r') \right] [g_0(\theta, \theta') + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\theta, \theta') \psi_k(r) \psi_k(r')] r' dr' d\theta' \quad (C.9.1)
\end{aligned}$$

As integrais acima são do tipo:

$$\int_{r_i}^1 \phi_n(r) r dr = \alpha_n (r_i^2 - \cos n\pi) / (4 + \alpha_n^2) \quad (C.9.2)$$

$$H_{nk} = \int_{r_i}^1 \phi_n(r) \psi_k(r) r dr = (\pi/2 \ln r_i) (r_i^2 - \cos(n+k)\pi) \cdot$$

$$\cdot \left[ (n+k)/(4 + (\beta_n + \beta_k)^2) + (n-k)/(4 + (\beta_n - \beta_k)^2) \right] \quad (C.9.3)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\theta_0/2} g_0(\theta, \theta') \cosh(\beta_n \theta') d\theta' &= \frac{1}{n\pi} \left[ 2 (\ln r_i)^2 / (\theta_0 (n\pi)^2) - \theta_0/4 \right] \cdot \\
&\cdot \left[ \sinh(\beta_n \theta_0/2) - \ln r_i \cosh(\beta_n \theta) \right] \quad (C.9.4)
\end{aligned}$$

$$G_{kn} = \int_0^{\theta_0} g_k(\theta, \theta') \cosh(\beta_n \theta') d\theta' =$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n\pi} \left[ (\theta_0 \operatorname{tgh}(\beta_n \theta_0/2)/2 + (\ln r_i)/(n\pi)) \cos(\beta_n \theta) - \right. \\
&\left. - \theta \sinh(\beta_n \theta) \right] \quad \text{se } n = k;
\end{aligned}$$

$$= \left[ 2 \ln r_i / (\pi^2 k(k^2 - n^2)) \right] \left[ k \sinh(\beta_k \theta_0/2) \cosh(\beta_n \theta) - \right.$$

$$- n \sinh (\beta_n \theta_o / 2) \cosh (\beta_k \theta) ] / \sinh (\beta_k \theta_o / 2) \quad \text{se } n \neq k \quad (C.9.5)$$

Os fatores de  $(\theta^2 + \theta_o^2/6)$  na soma das integrais calculadas, podem ser somados resultando a constante,

$$H = \frac{1}{2 \ln r_i} \left[ (\beta_i r_i + \beta_e + \lambda(1 - r_i^2)/2 - C_1 \frac{\pi^2}{2 \ln r_i} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2) \right] \quad (C.14)$$

Por outro lado, a velocidade para duplo-tubo não aletado é dada pela equação:

$$u(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(r),$$

cuja integração na secção transversal do duto conduz ao que segue:

$$\frac{\pi^2}{2 \ln r_i} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2 = - u_{mo} (1 - r_i^2)/2 \quad (C.15)$$

onde  $u_{mo}$  é a velocidade média para o duplo-tubo não aletado.

Adicionalmente, pela definição de  $C_1$  resulta,

$$\beta_i r_i + \beta_e + \lambda(1 - r_i^2)/2 = -C_1 u_m (1 - r_i^2)/2 - 2\beta_a (r_a - r_i)/\theta_o \quad (C.16)$$

Por (C.14), (C.15) e (C.16) vem,

$$H = \frac{1}{2 \ln r_i} \left[ C_1 (1 - r_i^2) (u_{mo} - u_m)/2 - 2\beta_a (r_a - r_i)/\theta_o \right]$$

Somando as integrais (C.10) - (C.9.5) e associando os termos semelhantes chega-se a uma equação do tipo:



$$\begin{aligned}
T(r, \theta) = & C + H(\theta^2 + \theta_o^2/6) + \beta_i r_i \ln r_i [1/3 + \ln(r/r_i)/\ln r_i + \\
& + (\ln(r/r_i)/\ln r_i)^2/2] - \beta_e \ln r_i [1/3 - (\ln(r/r_i)/ \\
& \ln r_i)^2] + \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \cosh(\beta_n \theta)/\cosh(\beta_n \theta_o/2) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} [A_{2n} + A_{3n} \cosh(\beta_n \theta)/\sinh(\beta_n \theta_o/2) + \\
& + A_{4n} \theta \sinh(\beta_n \theta)/\cosh(\beta_n \theta_o/2) + \\
& + A_{5n} \cosh(\beta_n \theta)/\cosh(\beta_n \theta_o/2)] \Psi_n(r) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} [Q_{nk} + P_{nk} \cosh(\beta_n \theta)/\cosh(\beta_n \theta_o/2) + \\
& + S_{nk} \cosh(\beta_k \theta)/\sinh(\beta_k \theta_o/2)] \Psi_k(r)
\end{aligned} \tag{C.17}$$

onde,

$$A_{1n} = C_1 A_n (A_n - C_n)/2;$$

$$A_{2n} = -A_n [C_1 (r_i^2 - 1)/(2(1 + \beta_n^2)) + 2\lambda \ln r_i]/n\pi$$

$$\begin{aligned}
A_{3n} = & 2\beta_a \{r_i - r_a [\cos(\beta_n \ln(r_a/r_i)) + \\
& + \beta_n \sin(\beta_n \ln(r_a/r_i))] \} / (n\pi(1 + \beta_n^2));
\end{aligned}$$

$$A_{4n} = C_1 (1 - r_i^2) (A_n - C_n) / (4 \ln r_i (1 + r_i^2))$$

$$A_{5n} = -A_{4n} [(\theta_o/2) \cotgh(\beta_n \theta_o/2) + \ln r_i / (n\pi)];$$

$$Q_{nk} = -C_1 A_{nk} A_n / (\pi k^2)$$

$$A_{nk} = (2 \ln r_i / \pi) H_{nk}$$

$$P_{nk} = C_1 (A_n - C_n) A_{nk} / (\pi (k^2 - n^2))$$

e

$$S_{nk} = - P_{nk} (n/k) \operatorname{tgh} (\beta_n \theta_0 / 2)$$

## C.2 - Temperatura Média na Parede Aletada

Por definição,

$$T_f = \frac{1}{S_a} \int_{S_a} T \, ds \quad (C.18)$$

$$S_a = r_i \theta_0 / 2 + r_a - r_i$$

ou

$$T_f = \frac{1}{S_a} \left[ \int_0^{\theta_0/2} T(r_i, \theta) r_i \, d\theta + \int_{r_i}^{r_a} T(r, \theta_0/2) \, dr \right] \quad (C.19)$$

Efetuada as integrações indicadas acima com base na equação (C.17) resulta o que segue:

$$\begin{aligned} T_f = & \{ H(\theta_0/2)^2 (r_i \theta_0/2 + 5(r_a - r_i)/3) + F_i [(\theta_0 r_i/2 + \\ & + r_a - r_i)/3 + (r_a F - r_a + r_i)/\ln r_i + (2(r_a - r_i) + \\ & + r_a F(F - 2))/(2(\ln r_i)^2)] + F_e [(\theta_0 r_i/2 + r_a - r_i)/3 + \\ & - (2(r_a - r_i) + r_a F(F - 2))/(\ln r_i)^2] + F_1 + F_2 + F_3 \} / S_a + \\ & + T_m \quad \text{onde } T_m \text{ é a temperatura média,} \end{aligned} \quad (C.20)$$

$$F_i = -\beta_i r_i \ln r_i ; \quad F_e = \beta_e \ln r_i / 2 ; \quad F = \ln r_a / r_i ;$$

$$F_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} (r_a - r_i + r_i T_n / \beta_n)$$

$$\begin{aligned}
F_2 = & \sum_{n=1}^{\infty} \{ A_{2n} (\theta_o r_i / 2 - n A_{3n} / a) + A_{3n} [r_i / \beta_n - n A_{3n} / (a T_n)] + \\
& + A_{4n} [\theta_o n A_{3n} T_n / (2a) + r_i (\theta_o / 2 - T_n / \beta_n) / \beta_n] + \\
& + A_{5n} (n A_{3n} / a + r_i T_n / \beta_n) \}
\end{aligned}$$

onde,  $a = 2\beta_a / \pi$  e

$$T_n = \operatorname{tgh} (\beta_n \theta_o / 2) \text{ e,}$$

$$\begin{aligned}
F_3 = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} Q_{nk} (r_i \theta_o / 2 - k A_{3n} / a) + P_{nk} (r_i T_n / \beta_n - \\
& - k A_{3k} / a) + S_{nk} [r_i / \beta_k - k A_{3k} / (a T_n)]
\end{aligned}$$

### C.3 - Temperatura Média de Mistura

Por definição,

$$T_b = \frac{1}{u_m A} \int_0^{\theta_o/2} \int_{r_i}^1 T(r, \theta) u(r, \theta) r dr d\theta \quad (C.21)$$

onde  $A = (1 - r_i^2) \theta_o / 4$

Uma estimativa de  $T_b$  é obtida pela desigualdade abaixo:

$$\min_D T(D) \int_D u/u_m dA/A \leq \int_D T u/u_m dA/A \leq \max_D T(D) \int_D u/u_m dA/A \quad (C.22)$$

Por (C.21),

$$\min T(D) \leq T_b \leq \max T(D) \quad (C.23)$$

onde D é a região do semi-setor em consideração.

Substituindo as equações (C.4) e (C.17) em (C.21) e efetuando os cálculos indicados resulta:

$$T_b = \frac{1}{A u_m} (T_{b1} + T_{b2} + T_{b3} + T_{b4} + T_{b5}) + T_m \quad (C.24)$$

onde,

$$T_{b1} = H \{ (\theta_0/2)^3 \sum_{n=1}^{\infty} A_n S_n - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - C_n) [(5(\theta_0/2)^2/3 + 2/\beta_n^2) T_n - \theta_0/\beta_n] S_n/\beta_n \} \quad (C.25)$$

onde,

$$S_n = \frac{n\pi}{\ln r_i} (r_i^2 - \cos n\pi)/(4 + \beta_n^2) = -n^2 \pi^2 A_n/(2 \ln r_i);$$

$$T_{b2} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \theta_0/2 - (A_n - C_n) T_n/\beta_n) (F_i C_{1n} + F_e C_{2n}) \quad (C.26)$$

onde

$$\begin{aligned} C_{1n} &= \int_{r_i}^1 \phi_n(r) \left[ 1/3 - \frac{\ln r/r_i}{\ln r_i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\ln r/r_i}{\ln r_i} \right)^2 \right] r dr = \\ &= S_n/3 + \frac{\beta_n}{\ln r_i (4 + \beta_n^2)} (2n\pi A_n + \ln r_i \cos n\pi) + \\ &+ \frac{\beta_n}{2(\ln r_i)^2 (4 + \beta_n^2)} \left[ n\pi A \left( \frac{\beta_n^2 - 12}{\beta_n^2 - 4} \right) - \frac{2 \ln r_i \cos n\pi}{4 + \beta_n^2} + \right. \\ &\left. + \cos n\pi (\ln r_i) \right]; \end{aligned}$$

$$C_{2n} = \int_{r_i}^1 \phi_n(r) \left[ 1/3 + \left( \frac{\ln r/r_i}{\ln r_i} \right)^2 \right] r dr =$$

$$= S_n/3 - \frac{\beta_n}{2(\ln r_i)^2(4 + \beta_n^2)} \left[ n\pi A_n \left( \frac{\beta_n^2 - 12}{\beta_n^2 + 4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{8 \cos n\pi \ln r_i}{4 + \beta_n^2} + \cos n\pi (\ln r_i)^2 \right]$$

$$T_{b3} = (\pi^2/2 \ln r_i) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \{A_{1k} A_n T_k/\beta_k - (A_n - C_n) A_{1k} C_{nk}\} S_n \\ (C.27)$$

onde,

$$C_{nk} = \begin{cases} (\beta_n T_n - \beta_k T_k)/(\beta_n^2 - \beta_k^2); & n \neq k \\ \frac{1}{2} [T_n/\beta_n + \theta_0(1 - T_n^2)/2] & ; n = k \end{cases}$$

$$T_{b4} = (\pi/2 \ln r_i) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \{A_n [A_{2k} \theta_0/2 + A_{3k}/\beta_k + A_{4k}(\theta_0/2 + \\ - T_k/\beta_k)/\beta_k + A_{5k} T_k/\beta_k] - (A_n - C_n) [A_{2k} T_n/\beta_n + \\ + A_{3k} H_{kn} + A_{4k} D_{kn} + A_{5k} C_{kn}]\} A_{nk}$$

onde,

$$D_{kn} = \begin{cases} (\theta_0/2) [\beta_n T_n T_k - \beta_k]/(\beta_n^2 - \beta_k^2) - [(\beta_n^2 + \beta_k^2) T_k + \\ - 2\beta_n \beta_k T_n]/(\beta_n^2 - \beta_k^2)^2 & ; n \neq k \\ \frac{1}{4} \beta_n [(\theta_0/2)(1 + T_n^2) - T_n/\beta_n] & ; n = k \end{cases}$$

$$H_{kn} = \begin{cases} (\beta_n T_n/T_k - \beta_k)/(\beta_n^2 - \beta_k^2) ; & n \neq k \\ \frac{1}{2} [1/\beta_n + (\theta_o/2)(1 - T_n^2)/T_n] ; & n = k \end{cases}$$

e finalmente,

$$\begin{aligned} T_{b5} = (\pi/2 \ln r_i) \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \{ A_p [Q_{nk} \theta_o/2 + P_{nk} T_n/\beta_n + \\ + S_{nk}/\beta_k] - (A_p - C_p) [Q_{nk} T_p/\beta_p + P_{nk} C_{pn} + S_{nk} H_{kp}] \} A_{pk} \end{aligned} \quad (C.29)$$

#### C.4 - Temperatura Média

Por definição,  $T_m$  é tal que,

$$\int_0^{\theta_o/2} \int_{r_i}^1 T(r, \theta) r dr d\theta = 0 \quad (C.30)$$

Desta forma, a constante  $C$ , a equação (C.17) é a própria temperatura média adimensional. Efetuando os cálculos indicados em (C.30) resulta,

$$\begin{aligned} T_m = [M_1 + M_2 - F_i \theta_o ((1 - r_i^2)(1/3 - 1/(2 \ln r_i)) + 1/(2(\ln r_i)^2) \\ + 1/(2 \ln r_i) - 1/2)/4 - F_e \theta_o ((1 - r_i^2)(1/3 - 1/(2(\ln r_i)^2) \\ - 1/\ln r_i - 1)/4 - (1 - r_i^2) H (\theta_o/2)^3/2] / A, \text{ onde} \end{aligned} \quad (C.31)$$

$$M_1 = - ((1 - r_i^2)/2) \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} T_n/\beta_n + \sum_{n=1}^{\infty} [A_{2n} \theta_o/2 +$$

$$+ (A_{3n} + A_{4n} (\theta_0/2 - T_n/\beta_n) + A_{5n} T_n/\beta_n) n\pi A_n], \quad e \quad (C.32)$$

$$M_2 = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ k \neq n}}^{\infty} (Q_{kn} \theta_0/2 + P_{kn} T_n/\beta_n + S_{kn}/\beta_k) \pi k A_k \quad (C.33)$$