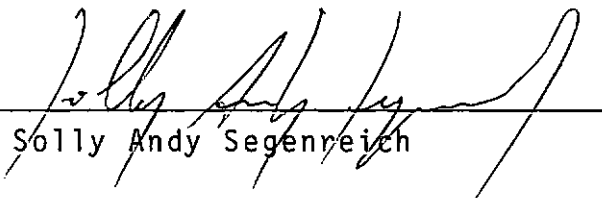


OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EM PROBLEMAS DINÂMICOS

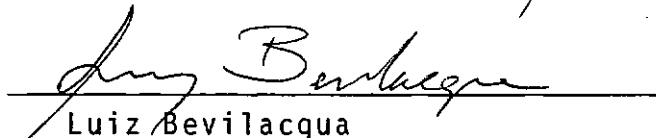
Aécio Freitas Lira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

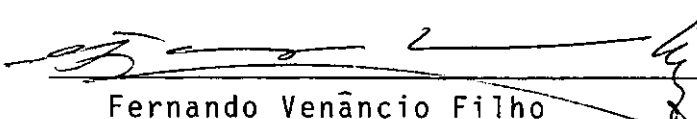
Aprovada por:



Solly Andy Segenreich



Luiz Bevilacqua



Fernando Venâncio Filho

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 1978



AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Solly A. Segenreich pela dedicação como professor e orientador desta tese.

Ao Prof. Jules Slama, do Programa de Engenharia Mecânica, pelos ensinamentos e colaboração na área de análise dinâmica.

Ao Prof. Nestor Zouain pela orientação e colaboração quando da análise dos resultados obtidos..

À Companhia Brasileira de Projetos Industriais (COBRAPI) e ao CNPq pela ajuda econômica.

RESUMO

Este trabalho apresenta um procedimento de otimização estrutural sujeita a restrições dinâmicas.

As restrições impostas no problema de otimização podem ser subdivididas em duas classes: restrição na frequência natural da estrutura e restrição na resposta dinâmica.

É apresentado um programa geral para o elemento de treliça solicitado por cargas harmônicas para efetuar as seguintes análises:

- a) análise estática
- b) frequências naturais
- c) análise em resposta dinâmica ( $P = \bar{P}e^{i\omega t}$ )
- d) otimização em resposta ( $P = \bar{P}e^{i\omega t}$ )
- e) otimização em frequência

ABSTRACT

This work presents an optimization structural procedure under dynamic constraints.

The constraints imposed on the optimization problem can be subdivided into two classes: constraint on the natural frequency of the structure and dynamic response constraint.

It is presented a general computer program for the truss element under harmonic excitation to make the following analysis:

- a) static analysis
- b) natural frequencies
- c) dynamic response ( $P = \bar{P}e^{i\omega t}$ )
- d) dynamic response optimization ( $P = \bar{P}e^{i\omega t}$ )
- e) frequency optimization

ÍNDICE

	<u>PAG.</u>
1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1. Considerações Preliminares .....	1
1.2. Objetivo .....	2
2. A OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL .....	4
2.1. O Modelo Matemático .....	4
2.2. O Algoritmo .....	4
2.3. Determinação de $\alpha$ .....	7
2.4. Parâmetro de Controle K .....	8
2.5. Restrições Inactíveis .....	9
2.6. Resumo do Algoritmo .....	10
3. RESTRIÇÕES DINÂMICAS E SUAS DERIVADAS .....	12
3.1. Otimização em Resposta .....	12
3.2. Otimização em Frequência .....	13
3.3. Cálculo das Derivadas .....	13
3.3.1. Otimização em Resposta .....	13
3.3.2. Otimização em Frequência .....	15
4. ASPECTOS COMPUTACIONAIS .....	18
4.1. Otimização em Resposta .....	18
4.1.1. Fluxograma .....	19
4.2. Otimização em Frequência .....	26
4.2.1. Fluxograma .....	26
5. EXEMPLOS .....	29
5.1. Otimização em Resposta .....	29
5.2. Otimização em Frequência .....	35

ÍNDICE

	<u>PAG.</u>
6. CONCLUSÕES .....	39
REFERÊNCIAS .....	41
APÊNDICE A. MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ PARA O ELEMENTO DE TRELIÇA ESPACIAL .....	45
APÊNDICE B. MÉTODO DA ITERAÇÃO EM SUBESPAÇOS .....	49

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Considerações Preliminares

A análise dinâmica de estruturas lineares encontra-se atualmente em fase bastante avançada em termos de desenvolvimento teórico, bem como quanto a programas computacionais para resolução numérica de grandes sistemas. Os elementos estruturais variam desde elementos de barra do tipo treliça a elementos finitos isoparamétricos; os carregamentos desde excitação harmônica até efeitos dinâmicos aleatórios. Programas como o LORANEDINA, SAPIV, STARDYNE, etc. são exemplos de grandes programas existentes comercialmente e de fácil acesso ao usuário.

Assim sendo, a análise dinâmica tratada isoladamente possui, dentro de determinadas condições, recursos bastante poderosos para a solução completa da mesma.

Quando porém consideramos a análise dinâmica como um problema de projeto, com o objetivo de se conseguir a melhor estrutura que satisfaça as restrições impostas pelo problema, somos obrigados a usar conceitos de otimização estrutural.

Entretanto, ao contrário do anterior, o problema de otimização estrutural e mais ainda, com aplicação a problemas dinâmicos, é bastante necessitado, em nosso meio, de trabalhos de pesquisa teórica como também de programas computacionais dirigidos a grandes sistemas.

Uma apreciação dos trabalhos desenvolvidos na área de otimização estrutural com restrições dinâmicas é feita por Pierson [1].

As estruturas com restrições a frequência foram abordadas por Turner [2] e Taylor [3]. O mesmo problema foi também estudado por



Niordson [4]. Em nossa literatura pode ser citado Rios Neto [5].

Para solução de problemas de otimização estrutural com restrição a deslocamento podem ser citados os trabalhos de Fox e Kapoor [6], Brach [7] e Icerman [8].

## 1.2. Objetivo

O presente trabalho tem como objetivo principal a determinação da estrutura de peso mínimo, denominada estrutura ótima, sujeita a restrições dinâmicas. A estrutura é formada por elementos de barra do tipo treliça espacial.

Em função do tipo de restrição imposta à estrutura, teremos 2 (dois) problemas a considerar:

- a) Otimização em Resposta: a estrutura é solicitada por cargas harmônicas e os deslocamentos são limitados a valores admissíveis;
- b) Otimização em Frequência: as frequências naturais da estrutura são limitadas inferiormente por valores admissíveis.

No Capítulo 2 é apresentado um resumo do algoritmo usado no processo de otimização estrutural [9]. Este algoritmo foi adaptado ao nosso trabalho quase que integralmente sendo modificado apenas em alguns aspectos que oportunamente serão abordados. O algoritmo mais uma vez demonstrou a sua grande eficiência quanto a velocidade de convergência, possibilitando a determinação de uma estrutura bastante próxima da ótima, com poucas iterações, o que em termos de problemas de engenharia já poderia vir a ser a solução indicada.

No Capítulo 3 é desenvolvida a formulação matemática que servirá de base para o tratamento dos problemas dinâmicos aqui discuti

dos.

Foi desenvolvido um programa de computador visando a análise completa do problema e é apresentado resumidamente nos seus principais aspectos no Capítulo 4. Os exemplos analisados com o uso deste programa são apresentados no Capítulo 5.

## 2. A OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Neste capítulo formularemos o problema de otimização estrutural de forma genérica, apresentando, em seguida, o algoritmo de minimização utilizado na solução do problema. Uma descrição completa do algoritmo encontra-se na referência [9].

### 2.1. O Modelo Matemático

O problema de otimização considerado pode ser tratado da seguinte maneira:

$$- \text{determinar } x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

que minimiza  $P(x)$  e verifica as restrições expressas como

$$c_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \ell.$$

No nosso problema, o objetivo é minimizar  $P(x)$  com as seguintes restrições:

- a) restrições de deslocamentos: deslocamentos menores que os admissíveis;
- b) restrições de autovalores: autovalores maiores que os admissíveis.

### 2.2. O Algoritmo

Considerando o caso de restrições de desigualdade, define-se o vetor de variável de desvio,

$$z \equiv (z_1, z_2, \dots, z_\ell)$$

de maneira que verifique

$$c_j + z_j^2 = 0 \quad j = 1, \ell$$

As restrições podem então ser substituídas pelas condições de igualdade,

$$c'_j = c_j + z_j^2 = 0$$

O problema geral é então:

$$\text{- minimizar } P(x) = \sum_{i=1}^m p_i x_i$$

com as restrições  $c'_j(\underline{x}, \underline{z}) = 0 \quad j = 1, \ell$

A função de Lagrange associada ao problema é:

$$\phi'(\underline{x}, \underline{z}, \underline{\lambda}) = P(\underline{x}) + \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j c'_j(\underline{x}, \underline{z})$$

A solução do problema original é obtida resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} p_i + \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \frac{\partial c_j}{\partial x_i} &= 0 & i &= 1, m \\ \lambda_j z_j &= 0 & j &= 1, \ell \\ c_j(\underline{x}) + z_j^2 &= 0 & j &= 1, \ell \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde  $\lambda_j$  são os multiplicadores de Lagrange.

A resolução do sistema é geralmente impossível de forma analítica sendo necessário um algoritmo iterativo que convirja para a solução procurada.

As fórmulas de recorrência propostas em [16] são:

$$x_i^{\gamma+1} = \left[ \alpha^{\gamma} + (\alpha^{\gamma} - 1) \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\lambda_j^{\gamma}}{p_i} \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^{\gamma} \right] x_i^{\gamma} \quad i=1, m \tag{2.2}$$

$$z_j^{\gamma+1} = [1 + (\alpha^{\gamma} - 1) K \lambda_j^{\gamma}] z_j^{\gamma} \quad j=1, \ell \tag{2.3}$$

ou seja:

$$\Delta x_i^\gamma = (\alpha^\gamma - 1) \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\lambda_j^\gamma}{p_i} \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^\gamma \right] x_i^\gamma \quad i = 1, m \quad (2.4)$$

$$\Delta z_j^\gamma = (\alpha^\gamma - 1) K \lambda_j^\gamma z_j^\gamma \quad j = 1, \ell \quad (2.5)$$

onde  $\gamma$  indica a  $\gamma$ -ésima iteração,

$\gamma+1$  indica a  $\gamma+1$ -ésima iteração,

e  $K$  e  $\alpha$  são parâmetros de controle do algoritmo.

Com o objetivo de que cada configuração seguinte seja factível, impõe-se:

$$c_i^{\gamma+1} = 0 \quad (2.6)$$

Considerando uma aproximação linear para as restrições:

$$(\Delta c_j^\gamma)^\gamma \approx \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^\gamma (\Delta x_i)^\gamma + 2z_j^\gamma (\Delta z_j)^\gamma \quad (2.7)$$

Substituindo (2.4) e (2.5) em (2.7)

$$(\Delta c_j^\gamma)^\gamma = (\alpha - 1) \left[ -\beta_j^\gamma + \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k^\gamma \beta_{kj}^\gamma \right] \quad (2.8)$$

em que

$$\beta_j^\gamma = - \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^\gamma x_i^\gamma$$

$$\beta_{kj}^\gamma = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial c_k}{\partial x_i} \right)^\gamma \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^\gamma \frac{x_i^\gamma}{p_i} + 2K(z_j^\gamma)^2 \delta_{kj}$$

$$e \quad \delta_{kj} = 0 \quad k \neq j$$

$$\delta_{kj} = 1 \quad k = j$$

Requerendo que  $(\Delta c_j)^Y = 0$ , obtem-se o sistema de equações:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k^Y \beta_{kj}^Y = \beta_j^Y} \quad (2.9)$$

O sistema (2.9) permite obter os  $\ell$   $\lambda$ 's necessários para a obtenção do novo vetor de projeto (2.2).

### 2.3. Determinação de $\alpha$

O módulo da variação da variável de projeto  $\bar{e}$ , em cada iteração, proporcional a  $(\alpha-1)$  conforme (2.4) e (2.5).

Em cada iteração, determina-se  $\alpha$  de maneira que cumpra certos objetivos.

- i) limitar erros produzidos pela aproximação linear das restrições,

$$|\Delta \bar{x}^Y| \leq t_x |\bar{x}^Y|$$

em que  $0 < t_x < 1$

$$|\alpha^Y - 1| \leq \frac{t_x [\sum x_i^{Y^2}]^{1/2}}{[\sum_{i=1}^m (v_i^Y x_i^Y)^2]^{1/2}} \quad (2.10)$$

sendo

$$v_i^Y = 1 + \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\lambda_j^Y}{P_i} \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^Y$$

- ii) permanência de  $\bar{x}^{Y+1}$  na região factível

$$|\alpha^Y - 1| \leq \frac{t_c}{2K \lambda_j^Y} \quad (2.11)$$

iii) limitação fixa da variável de projeto

$$x_i \geq x_{M,i} \quad i = 1, m$$

$$|\alpha^Y - 1| \leq \frac{x_i^Y - x_{M,i}}{v_i^Y x_i^Y} \quad \text{para todo } i \text{ tal que } v_i^Y x_i^Y > 0 \quad (2.12)$$

onde  $x_{M,i}$  é o valor fixo mínimo para cada variável de projeto.

iv) condição de convergência

$$|\alpha^Y - 1| \leq d \quad (2.13)$$

onde  $d$  é um parâmetro fornecido pelo usuário.

O máximo valor de  $|\alpha - 1|$  que verifique as quatro condições, provocará a maior diminuição de peso.

#### 2.4. Parâmetro de Controle K

Em cada iteração,  $\lambda^Y$  é calculado como solução do sistema

$$\sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k^Y \beta_{kj}^Y = \beta_j^Y \quad (2.14)$$

onde

$$\beta_{kj}^Y = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial c_k}{\partial x_i} \right)^Y \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^Y \frac{x_i^Y}{p_i} + 2K c_j^Y \delta_{kj} \quad \begin{matrix} k = 1, \ell \\ j = 1, \ell \end{matrix}$$

$$\beta_j^Y = - \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^Y x_i^Y \quad j = 1, \ell$$

Na forma matricial teremos para (2.14),

$$[\beta_{kj}^Y] \cdot \lambda^Y = \{\beta_j^Y\} \quad k = 1, \ell \quad ; \quad j = 1, \ell$$

A matriz  $[\beta_{kj}^Y]$  é simétrica pela definição de  $\beta_{kj}^Y$ .

Quando as restrições são proporcionais,

$$c_p(\underline{x}) = a \cdot c_g(\underline{x})$$

as filas correspondentes na matriz  $[\beta_{kj}^Y]$  são também proporcionais exceto para os elementos da diagonal.

Sendo, então, as funções de restrição proporcionais, basta que se tornem ativas para se ter um sistema singular.

No presente trabalho esta situação pode ser encontrada em restrições do tipo deslocamento quando se projeta uma estrutura com simetria geométrica e carga com a mesma simetria.

Em caso de matriz "mal comportada" (próxima a singular) o parâmetro de controle  $K$  passa a ter um significado bastante importante pois o mesmo intervém nos elementos do diagonal de  $[\beta_{kj}^Y]$ .

## 2.5. Restrições Inactíveis

No processo iterativo, algumas restrições podem resultar ligeiramente inactíveis, ou seja, positivas para  $\underline{x}^{Y+1}$ . As igualdades não são válidas para uma nova iteração.

É feito então um redimensionamento que provoque:

$$\Delta c_j(\underline{x}^Y) = -c_j(\underline{x}^Y) \text{ para todo } j \text{ tal que } c_j(\underline{x}^Y) > 0$$

Os coeficientes para resolução do sistema (2.9) deverão ser modificados para:

$$\begin{aligned} \beta_{jj}^Y &= \sum_{k=1}^m \left[ \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_k} \right)^Y \right]^2 \frac{x_k^Y}{p_k} \\ \beta_j^Y &= - \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^Y x_i^Y - \frac{c_j^Y}{(\alpha-1)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

para todo  $j$  tal que  $c_j(\underline{x}^Y) > 0$ .



2.6. Resumo do Algoritmo

INÍCIO	1. É adotada uma configuração de projeto inicial $\underline{x}^1$ . Procede-se o cálculo automático da estrutura com essas dimensões. Esta estrutura deve ser factível ao ser iniciado o processo iterativo.
DERIVAÇÃO	2. Cálculo de $c_j(\underline{x}^Y)$ para $j = 1, \ell$ 3. Cálculo de $\frac{\partial c_j}{\partial x_i}(\underline{x}^Y)$ $j = 1, \ell$ ; $i = 1, v$
REDIMENSIONAMENTO	4. $K = K'/P(\underline{x}^Y)$ 5. Cálculo dos parâmetros $\beta'_s$ $\beta_j^Y = - \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^Y x_i^Y \quad j = 1, \ell$ $\beta_{kj} = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial c_k}{\partial x_i} \right)^Y \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^Y \frac{x_i^Y}{p_i} - 2K c_j^Y \delta_{kj} \quad j=1, \ell$ OBS: Modificada para (2.14) no caso de restrições positivas 6. Resolução do Sistema $\sum_{j=1}^{\ell} \beta_{kj}^Y \lambda_j^Y = \beta_k^Y$ 7. Cálculo de $v_i^Y = 1 + \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\lambda_j^Y}{p_i} \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^Y \quad i = 1, v$ 8. Determinação de $(\alpha^Y - 1) = -\min \left\{ \frac{t_x \cdot [\sum x_i^Y]^2}{\left[ \sum_{i=1}^v v_i^Y x_i^Y \right]^2} \right\}^{1/2}, \frac{t_c}{2K\lambda_j^Y} \left  \begin{array}{l} \lambda_j^Y > 0, \\ c_j^Y < 0 \end{array} \right.$

<p>REDIMENSIO NAMENTO</p>	$\left. \begin{array}{l} \frac{x_i^Y - t_M x_{M,i}}{v_i^Y x_i^Y} \Big  v_i^Y x_i^Y > 0, d \\ j = 1, \ell \\ i = 1, v \end{array} \right\}$ <p>9. Redimensionamento de <math>\underline{x}^Y</math></p> $x_i^{Y+1} = [1 + (\alpha^Y - 1)v_i^Y] x_i \quad i = 1, v$
<p>DETERMINAÇÃO DAS VARIÁVEIS FIXAS</p>	<p>10. Se <math>t_M x_{M,i} \leq x_i^{Y+1} \leq (1+t_a)x_{M,i}</math></p> <p>Se impõe <math>x_i^{Y+1} = x_{M,i}</math></p>
	<p>11. <math>\underline{x}^Y = \underline{x}^{Y+1}</math> voltar a 1.</p>

### 3. RESTRIÇÕES DINÂMICAS E SUAS DERIVADAS

O problema de otimização como aplicado no presente trabalho é abordado sob 2(dois) aspectos:

#### 3.1. Otimização em Resposta

Consideremos uma treliça espacial caracterizada por  $m$  variáveis de projeto. Estas variáveis serão as seções transversais de barras ou grupos de barras. A posição dos nós da estrutura será considerada fixa.

O carregamento é do tipo harmônico  $P = \bar{P} e^{i\omega t}$ . Alguns deslocamentos, por características específicas de cada projeto, não podem ultrapassar determinados limites, e, por isso, constituem as restrições a considerar.

Partindo da estrutura inicial, excitada pelo vetor  $P = \bar{P} e^{i\omega t}$  e estando alguns deslocamentos limitados a valores prefixados, a otimização em resposta tem como objetivo determinar as  $m$  variáveis de projeto que minimizam o peso da treliça, satisfazendo as limitações impostas aos deslocamentos nodais. Esta estrutura é denominada estrutura ótima.

A equação matricial de equilíbrio de um sistema estrutural é dado por:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P(t) \quad (3.1)$$

onde  $M$  e  $K$  são, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez do sistema estrutural (Apêndice A) e  $C$  a matriz de amortecimento.

Analisaremos apenas o caso em que  $C = 0$ .

Sabe-se de [10] que a solução em regime é dada por:

$$U = \bar{U} e^{i\omega t}$$

Com  $C = 0$  e (3.2) em (3.1) teremos,

$$(-\omega^2 M + K) \bar{U} = \bar{P} \quad (3.3)$$

A matriz de massa  $M$  considerada é do tipo consistente (ver Apêndice A).

### 3.2. Otimização em Frequência

É considerada a mesma treliça espacial com  $m$  variáveis de projeto.

A estrutura possui massas aplicadas nos nós.

As restrições são os autovalores, de tal forma que sejam maiores que valores prefixados. Geralmente, limita-se apenas o primeiro autovalor.

Os autovalores e autovetores correspondentes são determinados pelo método da iteração em subespaço [11] considerado um dos mais eficientes processos aplicados a grandes sistemas (ver Apêndice B).

### 3.3. Cálculo das Derivadas

#### 3.3.1. Otimização em Resposta

Necessitaremos neste caso das derivadas dos deslocamentos em relação às variáveis de projeto.

Seja,

$$(-\omega^2 M + K) \bar{U} = \bar{P} \quad (3.4)$$

Derivando (3.4) com respeito a variável de projeto  $x_i$  em ambos os membros,

$$\left(-\omega^2 \frac{\partial M}{\partial x_i} + \frac{\partial K}{\partial x_i}\right) \bar{U} + (-\omega^2 M + K) \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} \quad (3.5)$$

Considerando somente o caso em que as cargas são independentes das variáveis de projeto,

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} = 0 \quad (3.6)$$

Tanto a matriz de massa como a matriz de rigidez são consideradas lineares nas áreas das seções transversais (ver Apêndice A).

Assim,

$$K = \sum_{j=1}^m x_j K_j^u ; K_j^u = \text{matriz de rigidez unitária} \quad (3.7)$$

$$M = \sum_{j=1}^m x_j M_j^u ; M_j^u = \text{matriz de massa unitária} \quad (3.8)$$

Derivando (3.7) e (3.8),

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} = K_i^u \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x_i} = M_i^u \quad (3.10)$$

visto que

$$\frac{\partial K_j^u}{\partial x_i} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial M_j^u}{\partial x_i} = 0 \quad \begin{array}{l} j = 1, m \\ i = 1, m \end{array}$$

Levando (3.6), (3.9) e (3.10) em (3.5),

$$\boxed{(-\omega^2 M + K) \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_i} = (\omega^2 M_i^u - K_i^u) \bar{U}} \quad i = 1, m \quad (3.11)$$

Os valores das restrições são dados em termos dos deslocamentos admissíveis,

$$c_{dj}(\underline{x}) = \frac{|\bar{U}_j| - \bar{U}_j^{\text{adm}}}{U_j^{\text{adm}}} \quad (3.12)$$

Para um desenho factível,

$$-1 \leq c_{dj} \leq 0 \quad (3.12.a)$$

Derivando (3.12)

$$\boxed{\frac{\partial c_{dj}}{\partial x_i} = \frac{S_g(\bar{U}_j)}{U_j \text{ adm}} \cdot \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}} \quad \begin{array}{l} i = 1, m \\ j = 1, \ell \end{array} \quad (3.13)$$

### 3.3.2. Otimização em Frequência

Necessitaremos, neste caso, das derivadas dos autovalores em relação as variáveis de projeto [12].

A equação geral dos autoproblemas é dada por

$$KY = \lambda MY \quad (3.14)$$

Definindo a matriz

$$F_j = F_j(\lambda_j, x_i) = [K - \lambda_j M] \quad (3.15)$$

Nós podemos escrever,

$$F_j Y_j = 0 \quad (3.16.a)$$

Como  $F_j$  é simétrica,

$$Y_j^T F_j = 0 \quad (3.16.b)$$

Premultiplicando (3.16.a) por  $Y_j^T$ ,

$$Y_j^T F_j Y_j = 0 \quad (3.17)$$

Derivando com respeito à variável de projeto  $x_i$ ,

$$\frac{\partial Y_j^T}{\partial x_i} F_j Y_j + Y_j^T \frac{\partial F_j}{\partial x_i} Y_j + Y_j^T F_j \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} = 0 \quad (3.18)$$

Em virtude (3.16) o 1º e 3º termo de (3.18) são nulos e te

remos então,

$$Y_j^T \frac{\partial F_j}{\partial x_i} Y_j = 0 \quad (3.19)$$

Derivando (3.15),

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial K}{\partial x_i} - \lambda_j \frac{\partial M}{\partial x_i} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} M$$

Substituindo em (3.19),

$$Y_j^T \left( \frac{\partial K}{\partial x_i} - \lambda_j \frac{\partial M}{\partial x_i} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} M \right) Y_j = 0$$

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} = \frac{Y_j^T [K_i^u - \lambda_j M_i^u] Y_j}{Y_j^T M Y_j}$$

$$\begin{aligned} i &= 1, m \\ j &= 1, \ell \end{aligned}$$

$$(3.20)$$

Consideremos,

$$c_{dj}(x) = \frac{\lambda_j - \lambda_j^{\text{adm}}}{\lambda_j^{\text{adm}}} \quad (3.21)$$

No caso de otimização em frequência, os autovalores necessitam ser maiores que os autovalores admissíveis.

Necessitamos então de uma mudança de variável, em  $\lambda$ , para permanecer sendo válida a expressão (3.12.a), em caso de desenho factível.

$$-1 \leq c_{dj} \leq 0 \quad (3.22)$$

Seja,

$$\lambda_j' = \frac{1}{\lambda_j} \text{ e } \lambda_j'^{\text{adm}} = \frac{1}{\lambda_j^{\text{adm}}} \quad (3.23)$$

$$c'_{dj} = \frac{\lambda'_j - \lambda'_j \text{adm}}{\lambda'_j \text{adm}} \quad (3.24)$$

A expressão (3.24) satisfaz (3.22).

A derivada da restrição passará a ser,

$$\frac{\partial c'_{dj}}{\partial x_i} = \frac{1}{\lambda'_j \text{adm}} \frac{\partial \lambda'_j}{\partial x_i} \quad (3.25)$$

em virtude dos autovalores serem todos positivos.

De (3.23)

$$\frac{\partial \lambda'_j}{\partial x_i} = - \frac{1}{\lambda_j^2} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i}$$

teremos então,

$$\frac{\partial c'_{dj}}{\partial x_i} = - \frac{1}{\lambda'_j \text{adm}} \cdot \frac{1}{\lambda_j^2} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i}$$

$$\boxed{\frac{\partial c'_{dj}}{\partial x_i} = - \frac{\lambda_j'^2}{\lambda'_j \text{adm}} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i}} \quad (3.26)$$



#### 4. ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Foi desenvolvido um programa de computador em linguagem FORTRAN IV, para resolução de treliças espaciais, com as seguintes opções:

- i) análise estática
- ii) determinação das frequências naturais
- iii) análise em resposta dinâmica ( $P = \bar{P} e^{i\omega t}$ )
- iv) otimização em resposta ( $P = \bar{P} e^{i\omega t}$ )
- v) otimização em frequência

Neste capítulo serão comentados apenas os itens iv) e v) por se tratar do objeto de nossa pesquisa.

##### 4.1. Otimização em Resposta

As equações necessárias para o cálculo das derivadas das restrições em relação às variáveis de projeto, para posterior uso do redimensionamento (Capítulo 2) são:

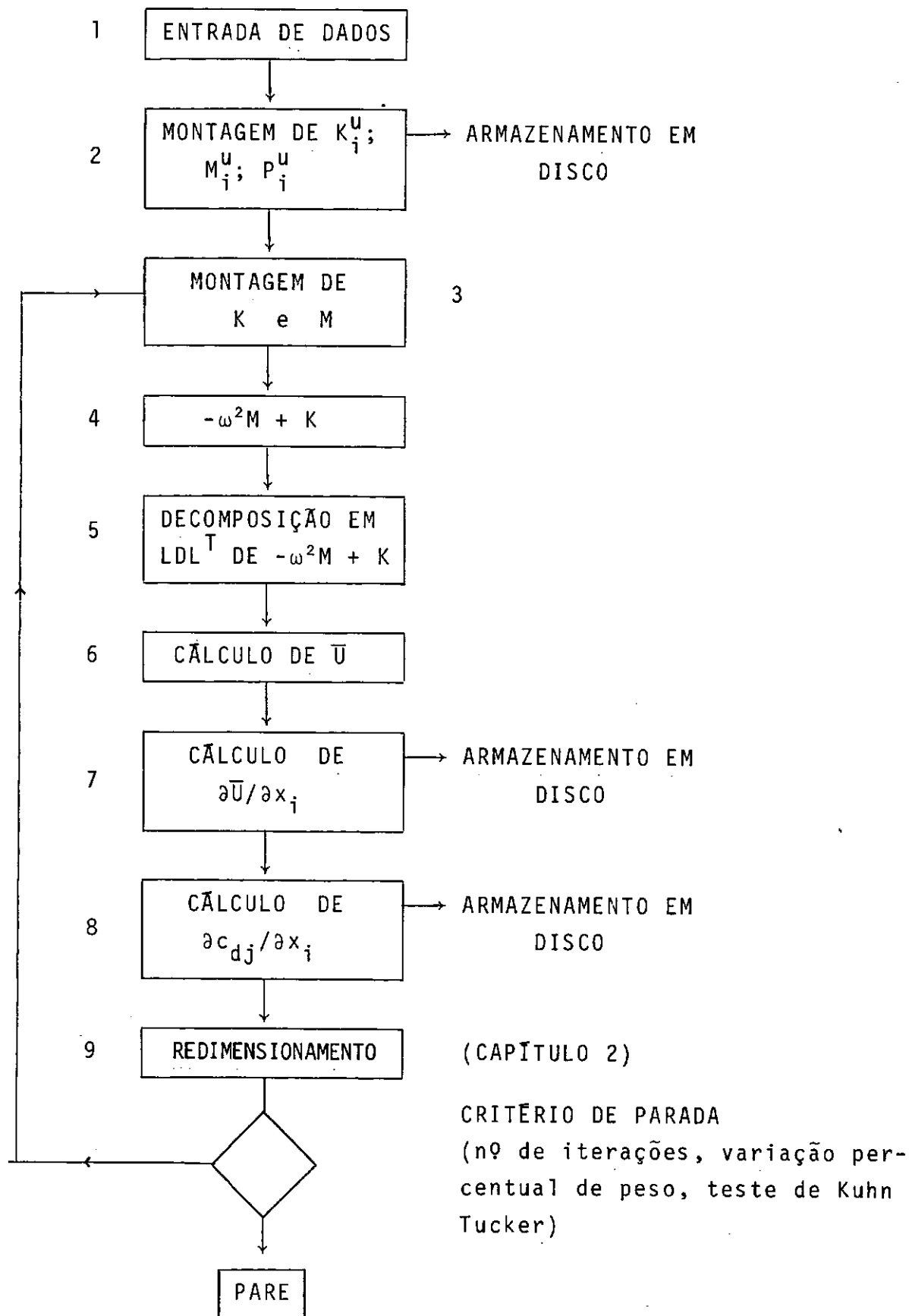
$$(-\omega^2 M + K)\bar{U} = \bar{P} \quad (4.1)$$

$$(-\omega^2 M + K) \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_i} = (\omega^2 M_i^U - K_i^U)\bar{U} \quad i = 1, m \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial c_{dj}}{\partial x_i} = \frac{S_g(\bar{U}_j)}{\bar{U}_j^{adm}} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \quad \begin{matrix} i = 1, m \\ j = 1, n \end{matrix} \quad (4.3)$$

O cálculo computacional pode ser resumido no seguinte fluxograma:

## FLUXOGRAMA



## 1. Entrada de Dados

- tipo de análise;
- número de pontos nodais, número do nó e suas restrições, coordenadas nodais;
- número de elementos, tipo de material, incidências nodais (p/cada grupo de variável de projeto);
- número de variáveis de projeto e respectivas áreas iniciais;
- frequência de excitação  $\omega$ ;
- número de carregamentos do tipo  $P = \bar{P} e^{i\omega t}$ ;
- vetor de cargas nodais  $\bar{P}$  para cada caso de carregamento;
- número de casos de massas nodais não estruturais;
- vetor de massas nodais;
- número de autovalores a serem determinados, número de iterações no algoritmo de otimização, número de iterações no subespaço, controle para uso da sequência de Sturm, limite de convergência para autovalores no método de Jacobi generalizado;
- número de restrições;
- valores limites para as restrições;
- áreas mínimas para as variáveis de projeto;
- parâmetros do algoritmo:  $K'$ ,  $t_x$ ,  $t_a$ ,  $t_m$ ,  $d$ ,  $t_c$ .

## 2. Montagem das Matrizes Unitárias

- para cada grupo de variável de projeto são construídas as matrizes  $K_i^u$ ,  $M_i^u$  e  $P_i^u$ ;
- as matrizes  $K_i^u$ ,  $M_i^u$  e  $P_i^u$  são armazenadas em forma de vetor coluna e posteriormente armazenadas em disco [11];
- cada matriz unitária  $K_i^u$  e  $M_i^u$  tem a mesma dimensão de  $K$  e  $M$  independente do número de elementos para cada grupo de variável de projeto.

- cada uma das matrizes unitárias  $K_i^u$  e  $M_i^u$  ocupa uma área reservada num vetor coluna único na forma,

$$[A] = \left[ \begin{array}{c} (K_1)_i \\ (K_2)_i \\ \vdots \\ (K_n)_i \\ \vdots \\ (M_1)_i \\ (M_2)_i \\ \vdots \\ (M_n)_i \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{c} (K_1)_i \\ (K_2)_i \\ \vdots \\ (K_n)_i \end{array} \right\} K_i^u \\ \left. \begin{array}{c} (M_1)_i \\ (M_2)_i \\ \vdots \\ (M_n)_i \end{array} \right\} M_i^u \end{array} \right\} i = 1, m$$

- cada uma das matrizes unitárias é formada em  $[A]$  e posteriormente armazenada em disco; a área em  $[A]$  é "zerada" para posterior formação de outras matrizes unitárias e assim sucessivamente;
- a matriz unitária  $P_i^u$  é constituída pelos pesos unitários de cada grupo de variável de projeto.

### 3. Montagem das Matrizes Globais K e M

- como cada matriz unitária tem a mesma dimensão da matriz global do sistema,

$$K = \sum_{i=1}^m A_i K_i^u \quad \text{e} \quad M = \sum_{i=1}^m A_i M_i^u,$$

elemento por elemento das matrizes;

- as matrizes unitárias são lidas em disco;
- no caso de massas nodais não estruturais estas são adicionadas convenientemente aos elementos da diagonal da matriz de massa global da estrutura que por sua vez é do tipo consistente;
- as matrizes coluna K e M ocupam a área anteriormente reservada às matrizes unitárias  $K_i^u$  e  $M_i^u$  no vetor coluna  $[A]$ .

$$[A] = \begin{bmatrix} \vdots \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \vdots \\ K_n \\ \vdots \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{l} K \\ M \end{array}$$

#### 4. Cálculo de $-\omega^2 M + K$

- a matriz coluna  $-\omega^2 M + K$  é construída com a soma das áreas de K e M da matriz coluna [A];
- a matriz coluna  $-\omega^2 M + K$  ocupa a área anteriormente reservada a K visando economia de memória.

#### 5. Decomposição em $LDL^T$

- Consideremos a equação para resolução de sistemas lineares,

$$KU = R \quad (5.1)$$

- efetuando-se a decomposição de K em  $LDL^T$  [11] a obtenção de solução de (5.1) é feita em duas etapas:

$$LV = R \quad (5.2)$$

$$DL^T U = V \quad (5.3)$$

onde em (5.2) o vetor R é reduzido para a obtenção de V,

$$V = L_{n-1}^{-1} \dots L_2^{-1} L_1^{-1} R \quad (5.4)$$

e com (5.4) em (5.3)

$$L^T U = D^{-1} V \quad (5.5)$$

determinam o vetor  $U$  solução de (5.1);

- na resolução de (4.1) é necessária a decomposição de  $-\omega^2 M + K$ ;
- a matriz  $-\omega^2 M + K$  decomposta ocupa a área anteriormente reservada a  $-\omega^2 M + K$ .

## 6. Cálculo de $\bar{U}$

- para cada caso de carregamento  $P = \bar{P} e^{i\omega t}$  são calculados os deslocamentos nodais da estrutura;
- os vetores  $\bar{P}$  estão armazenados na mesma matriz  $[A]$  anteriormente comentada,

$$[A] = \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_n \\ \vdots \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \vdots \\ \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_n \\ \vdots \end{array}} \right\} \bar{P}$$

- os vetores do deslocamentos nodais ocupam também uma área reservada na matriz  $[A]$ .
- no caso de vários carregamentos os vetores de deslocamentos nodais são posicionados numa matriz auxiliar  $[B]$  continuamente ou seja,

$$[B] = \left[ \begin{array}{c} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \vdots \\ \bar{U}_n \\ \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \vdots \\ \bar{U}_n \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \vdots \\ \bar{U}_n \\ \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \vdots \\ \bar{U}_n \\ \vdots \\ \vdots \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{carregamento 1} \\ \\ \\ \text{carregamento 2} \\ \vdots \\ \text{etc} \end{array}$$

- o objetivo deste posicionamento visa a construção de um único vetor de restrições a deslocamentos para diversos casos de carregamento conforme ficará melhor esclarecido em 8.

### 7. Cálculo de $\partial\bar{U}/\partial x_i$

- para cada variável de projeto é calculado o vetor coluna  $\partial\bar{U}/\partial x_i$ ;
- os m vetores colunas são armazenados em disco na forma,

$\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_1}$	$\frac{\partial\bar{U}_2}{\partial x_1}$	...	$\frac{\partial\bar{U}_n}{\partial x_1}$	$\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2}$	$\frac{\partial\bar{U}_2}{\partial x_2}$	...	$\frac{\partial\bar{U}_n}{\partial x_2}$	...	$\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_m}$	$\frac{\partial\bar{U}_2}{\partial x_m}$	...	$\frac{\partial\bar{U}_n}{\partial x_m}$
--	--	-----	--	--	--	-----	--	-----	--	--	-----	--

Figura 1

- no caso de vários carregamentos a seguinte sequência é necessária:
  - a) cálculo de  $\bar{U}$  para o primeiro carregamento;
  - b) cálculo de  $\partial\bar{U}/\partial x_i$  para o primeiro carregamento e armazenamento em disco conforme Fig. 1;
  - c) construção da matriz auxiliar [C] com a seguinte forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\bar{U}_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial\bar{U}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\bar{U}_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\bar{U}_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial\bar{U}_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\bar{U}_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\bar{U}_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

- d) cálculo de  $\bar{U}$  para o segundo carregamento;
- e) Cálculo de  $\partial\bar{U}/\partial x_i$  para o segundo carregamento e armazenamento em disco na mesma área ocupada pelo primeiro carregamento conforme Fig. 1;
- f) a matriz [C] é aumentada nas suas colunas ficando com a seguinte forma:

$$[C] = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_i} \\ \text{-----} \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_i} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \text{1º carregamento} \\ \\ \text{2º carregamento} \end{array} \right\}$$

g) o processo continua até o último caso de carregamento.

### 8. Cálculo de $\partial c_{dj}/\partial x_i$

- o vetor coluna  $\bar{U}$  de (4.3) é o vetor  $[B]$  de 6;
- a matriz de derivadas  $\partial \bar{U}/\partial x_i$  de (4.3) é a matriz  $[C]$  de 7;
- com as restrições impostas são selecionadas as linhas correspondentes no vetor coluna  $\bar{U}$  e matriz  $[C]$  para a formação de  $\bar{U}_j$  e  $\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}$  sendo  $j$  o número de restrições;
- a matriz de restrições  $\partial c_d/\partial x_i$  tem a forma,

$$\left[ \frac{\partial c_d}{\partial x_i} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial x_1} & \frac{\partial c_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial c_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial c_2}{\partial x_1} & \frac{\partial c_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial c_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial c_j}{\partial x_1} & \frac{\partial c_j}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial c_j}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

- esta matriz é armazenada em disco na área ocupada por  $\partial \bar{U}/\partial x_i$  conforme 7 para posterior uso no redimensionamento.

### 9. Redimensionamento

- ver resumo do algoritmo de otimização conforme Capítulo 2.



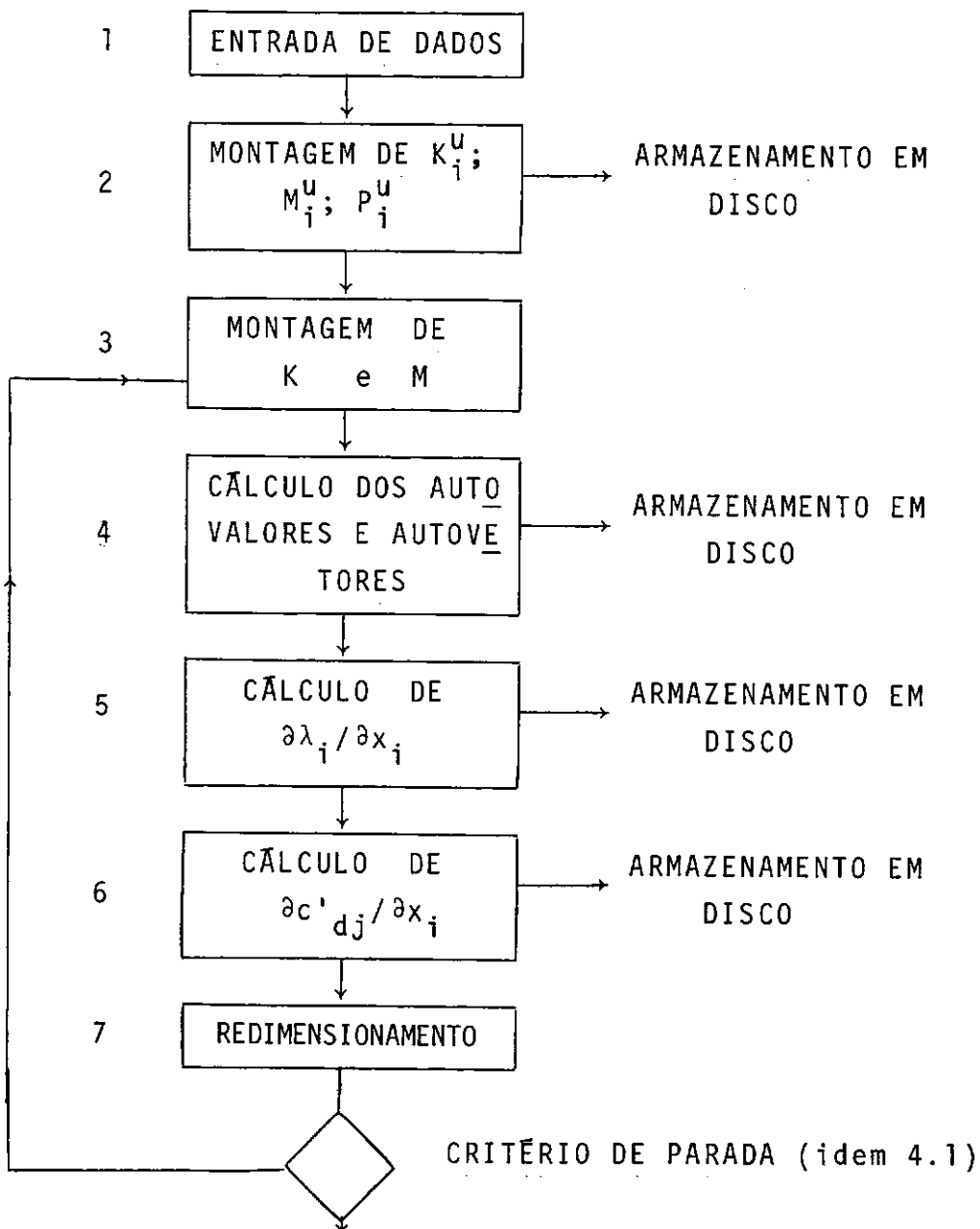
#### 4.2. Otimização em Frequência

As equações necessárias para o cálculo das derivadas das restrições em relação às variáveis de projeto, para posterior uso do redimensionamento (Capítulo 2) são:

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} = \frac{Y_j^T [K_i^U - \lambda_j M_i^U] Y_j}{Y_j^T M Y_j} \quad \begin{array}{l} i = 1, m \\ j = 1, \ell \end{array} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial c'_{dj}}{\partial x_i} = - \frac{\lambda_j'^2}{\lambda_j'^{adm}} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} \quad \begin{array}{l} i = 1, m \\ j = 1, \ell \end{array} \quad (4.5)$$

#### FLUXOGRAMA



### 1. Entrada de Dados

- ver item 1 de 4.1.

### 2. Montagem das Matrizes Unitárias

- ver item 2 de 4.1.

### 3. Montagem das Matrizes Globais K e M

- ver item 3 de 4.1.

### 4. Cálculo de Autovalores de Autovetores

A determinação do "p" primeiro autovalores e respectivos autovetores é feita pelo método da iteração em subespaço conforme resumo no Apêndice B.

O método é aplicado em cada iteração, no processo de otimização.

Os valores determinados são armazenados em disco para posterior uso no cálculo das derivadas.

### 5. Cálculo de $\partial\lambda_i/\partial x_j$

- para cada variável de projeto é calculado o vetor coluna  $\partial\lambda_i/\partial x_j$ ;

- os m vetores colunas são armazenados em disco na forma,

$\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_1}$	$\frac{\partial\lambda_2}{\partial x_1}$	...	$\frac{\partial\lambda_p}{\partial x_1}$	$\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_2}$	$\frac{\partial\lambda_2}{\partial x_2}$	...	$\frac{\partial\lambda_p}{\partial x_2}$	...	$\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_m}$	$\frac{\partial\lambda_2}{\partial x_m}$	...	$\frac{\partial\lambda_p}{\partial x_m}$
--	--	-----	--	--	--	-----	--	-----	--	--	-----	--

- após leitura em disco é construída a matriz auxiliar [C] com a forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \lambda_p}{\partial x_1} & \frac{\partial \lambda_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \lambda_p}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

## 6. Cálculo de $\partial c'_{dj}/\partial x_i$

- a matriz de derivadas  $\partial \lambda_j/\partial x_i$  é a matriz auxiliar  $[C]$  de 5 ;
- os valores de  $\lambda'$  são os inversos de  $\lambda$ ,

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda}$$

- os autovalores são lidos em disco;
- com os autovalores impostos são selecionadas as linhas correspondentes para a formação de  $\partial c'_{dj}/\partial x_i$ ;
- a matriz das restrições  $\partial c'_d/\partial x_i$  tem a forma,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial c'_{dj}}{\partial x_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial c'_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial c'_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial c'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial c'_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial c'_2}{\partial x_m} \\ \frac{\partial c'_j}{\partial x_1} & \frac{\partial c'_j}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial c'_j}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

- esta matriz é armazenada em disco na área ocupada por  $\partial \lambda_j/\partial x_i$  conforme 5 para posterior uso no redimensionamento;

## 7. Redimensionamento

- ver resumo do algoritmo de otimização conforme Capítulo 2;
- observar quanto a possibilidade do aproveitamento de autovalores e autovetores de uma iteração em algumas iterações posteriores.

## 5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

### 5.1. Otimização em Resposta

Os exemplos foram utilizados com a dupla finalidade de de mostrar o funcionamento do programa e servir de suporte para algumas conclusões sobre a otimização estrutural em presença de fenômenos dinâmicos.

Foram comparados apenas os resultados intermediários, por exemplo, análise estática, cálculo de autovalores e autovetores bem como resposta a excitação harmônica.

Os valores comparativos foram obtidos com o LORANE DINA [13] e o SAPIV [14].

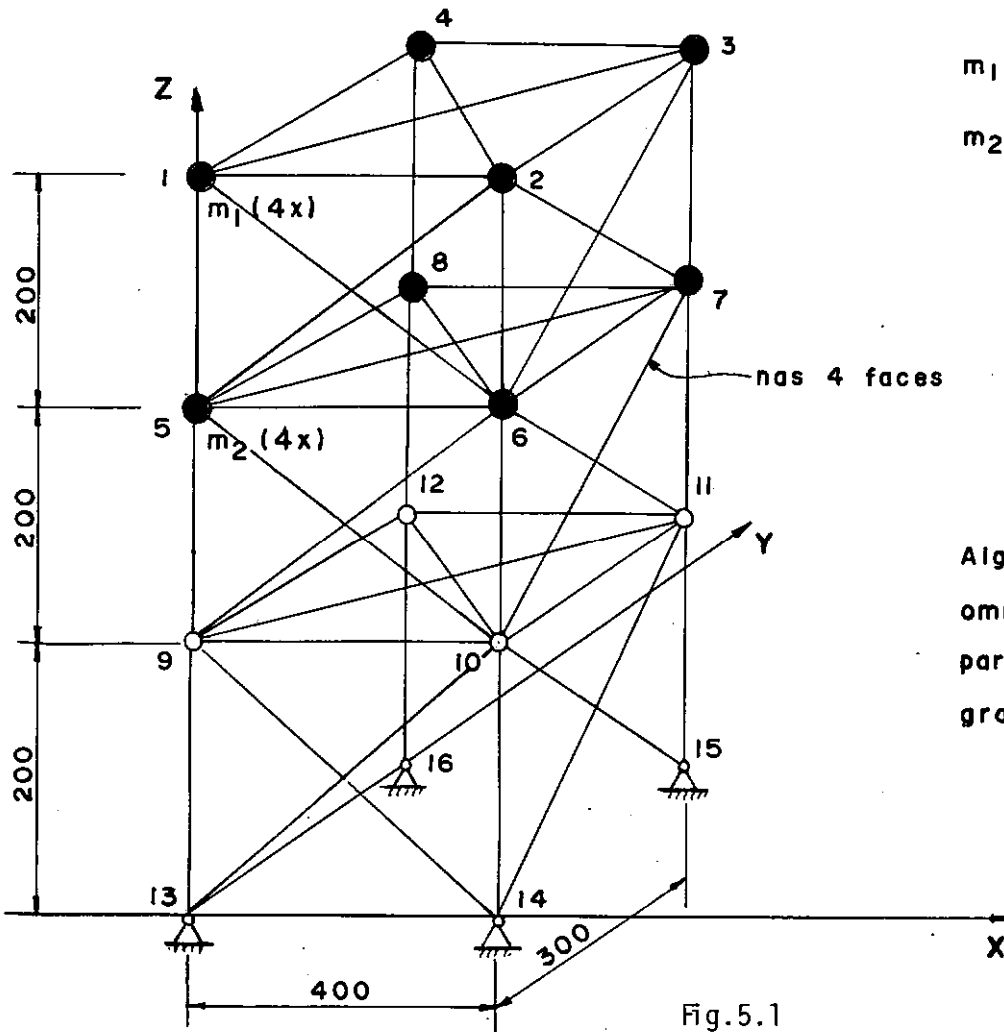
No caso de otimização em resposta a análise do problema requer um certo cuidado quanto a interpretação dos resultados. Serão analisados os seguintes casos:

- a) frequência de excitação periódica,  $\omega_0$ , menor que a 1.<sup>a</sup> frequência natural da estrutura inicialmente projetada:
  - Caso 1 ( $\omega_0 = 8$ ) e Caso 2 ( $\omega_0 = 10$ )
- b) frequência de excitação periódica,  $\omega_0$ , maior que a 1.<sup>a</sup> frequência natural da estrutura inicialmente projetada:
  - Casos 3 e 4 ( $\omega_0 = 25$ ,  $A_{\min}$  diferente)

O programa computacional admite carregamentos simultâneos, independentes, limitados por um único vetor de restrições. A excitação harmônica, em cada estado de carga, pode ter frequência diferente.

Exemplo 5.1.1.

É analisada a treliça espacial conforme Figura 5.1.



$m_1 = 100 \text{ Kgf. s}^2/\text{m}$

$m_2 = 50 \text{ "}$

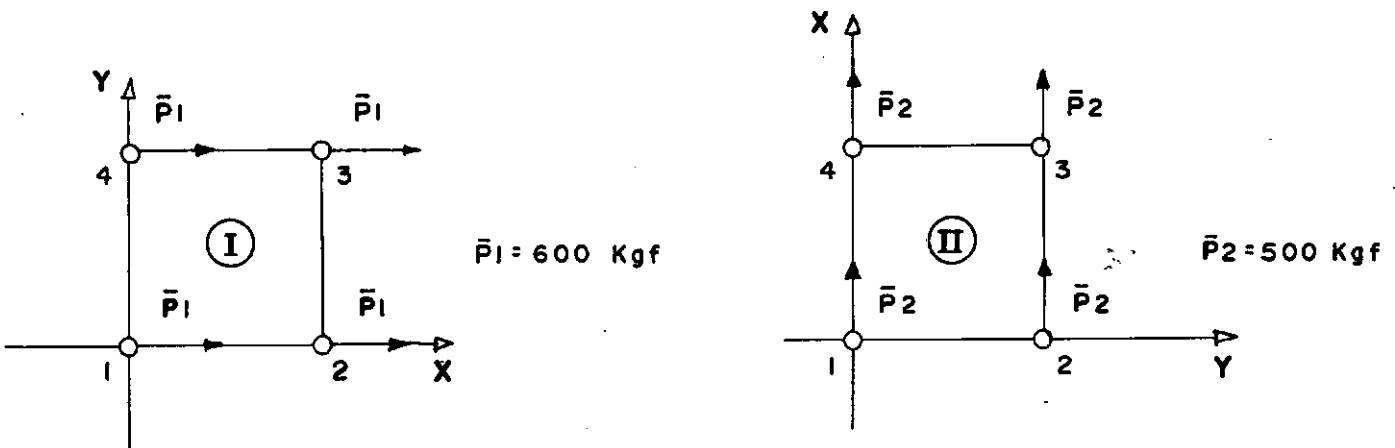
nas 4 faces

Algumas barras foram omitidas no desenho para melhor aspecto gráfico.

Fig.5.1

Carregamentos

A excitação é do tipo harmônica  $P = \bar{P} e^{i\omega_0 t}$ . Os valores de



$\bar{P}_1 = 600 \text{ Kgf}$

$\bar{P}_2 = 500 \text{ Kgf}$

fig. 5.2

̄ são dados na Figura 5.2, para cada carregamento. O exemplo é analisado para diversos valores de  $\omega_0$

A estrutura é definida através da Tabela 5.1.

Elemento	Variável de Projeto	Nós		Elemento	Variável de Projeto	Nós	
1	1	1	5	31	5	1	8
2	1	2	6	32	5	4	5
3	1	3	7	33	6	5	10
4	1	4	8	34	6	6	9
5	1	5	9	35	6	6	11
6	1	6	10	36	6	7	10
7	1	7	11	37	6	8	11
8	1	8	12	38	6	7	12
9	1	9	13	39	6	5	12
10	1	10	14	40	6	8	9
11	1	11	15	41	7	9	14
12	1	12	16	42	7	10	13
13	2	1	2	43	7	10	15
14	2	2	3	44	7	11	14
15	2	3	4	45	7	12	15
16	2	4	1	46	7	11	16
17	3	5	6	47	7	9	16
18	3	6	7	48	7	12	13
19	3	7	8	49	8	1	3
20	3	8	5	50	8	4	2
21	4	9	10	51	9	5	7
22	4	10	11	52	9	8	6
23	4	11	12	53	10	9	11
24	4	12	9	54	10	12	10
25	5	1	6				
26	5	2	5				
27	5	2	7				
28	5	3	6				
29	5	4	7				
30	5	3	8				

OBS:  $E = 2100000 \text{Kgf/cm}^2$        $\rho = 7850 \text{Kgf/m}^3$

Tabela 5.1

A configuração inicial é definida através da Tabela 5.2 (valores iniciais para variáveis de projeto).

Nº	Área(cm <sup>2</sup> )	Nº	Área(cm <sup>2</sup> )
1	180.0	6	60.0
2	15.0	7	60.0
3	20.0	8	10.0
4	30.0	9	10.0
5	40.0	10	10.0

OBS: peso inicial = 8388Kg

Tabela 5.2

### Restrições

As restrições de deslocamentos se referem aos nós do plano xy com z = 600cm.

- para o carregamento 1:  $U_x \leq 0.02\text{cm}$  (nº 2)
- para o carregamento 2:  $U_y \leq 0.02\text{cm}$  (nº 4)
- variáveis mínimas:  $A_{\min} = 2.5\text{cm}^2$  (caso 1,2,3)  
 $A_{\min} = 1.0\text{cm}^2$  (caso 4)
- para os casos 1, 2, 3 e 4 ver itens 5.1.a) e 5.1.b).

### Resultados

#### a) Variáveis Finais de Projeto

Tabela 5.3

Variável Nº	Valores Iniciais	Valores Finais (cm <sup>2</sup> )			
		$\omega_0 = 8.0\text{seg}^{-1}$	$\omega_0 = 10.0\text{seg}^{-1}$	$\omega_0 = 25.0\text{seg}^{-1}$	$\omega_0 = 25.0\text{seg}^{-1}$
1	180.0	125.0	148.3	7.9	7.3
2	15.0	2.5	2.5	2.5	1.0
3	20.0	2.5	2.5	2.5	1.0
4	30.0	2.5	2.5	2.5	1.0
5	40.0	39.6	36.9	8.1	7.1
6	60.0	46.7	58.8	4.7	1.0
7	60.0	49.2	62.9	5.9	1.0
8	10.0	2.5	2.5	2.5	1.0
9	10.0	2.5	2.5	2.5	1.0
10	10.0	2.5	2.5	2.5	1.0
peso final		5936.0	6947.0	760.0	424.0
nº de iterações		15	15	15	30

(Caso 1)

(Caso 2)

(Caso 3)

(Caso 4)

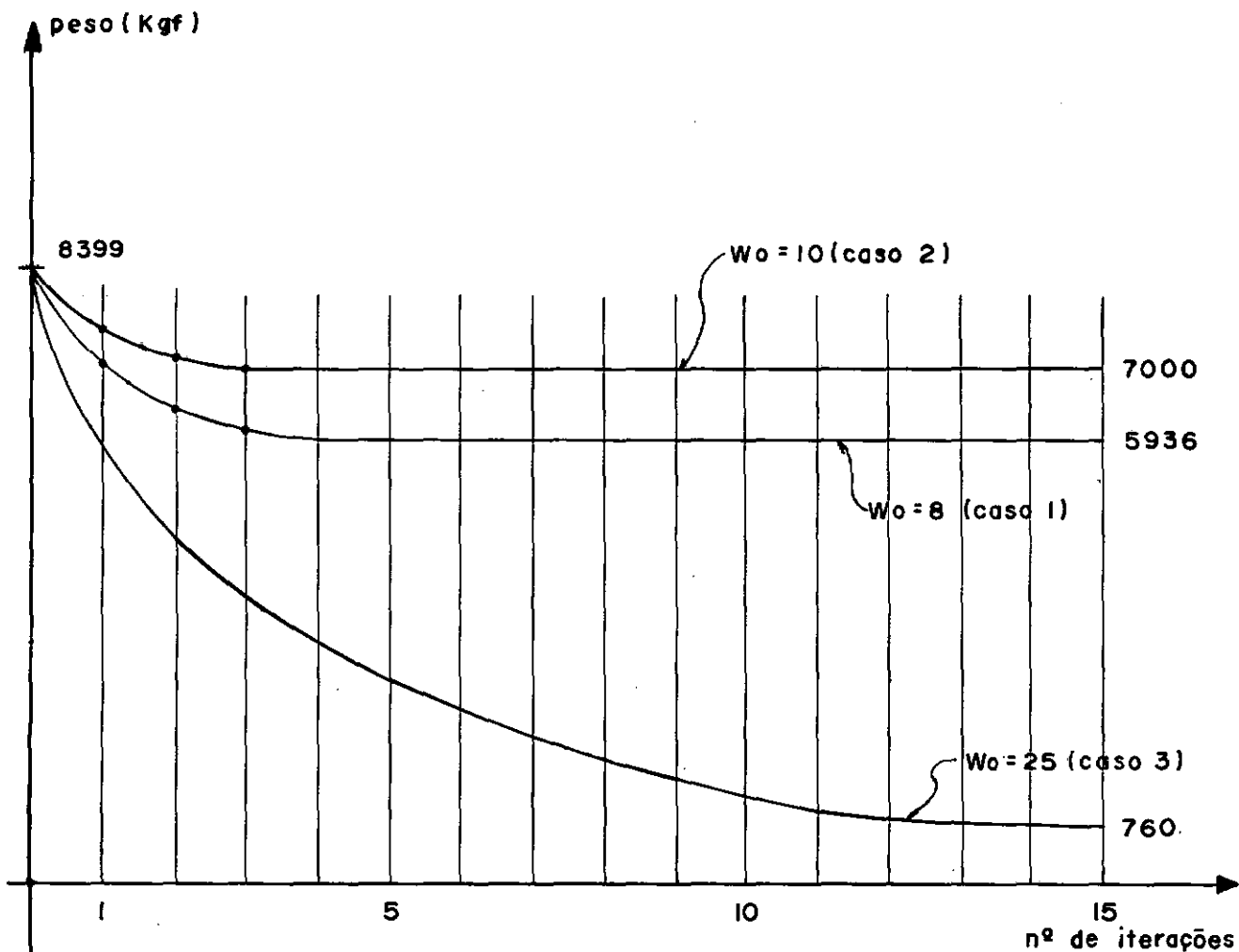
b) Diagrama de Pesos

fig. 5.3

Para explicar o comportamento nos casos 3 e 4 devemos observar os gráficos das Figuras 5.4 e 5.5.

Na Figura 5.4 são mostradas as curvas das amplitudes em função da frequência de excitação  $\omega$  e na Figura 5.5 as curvas das restrições  $c_1$  e  $c_2$  em função do número de iterações.



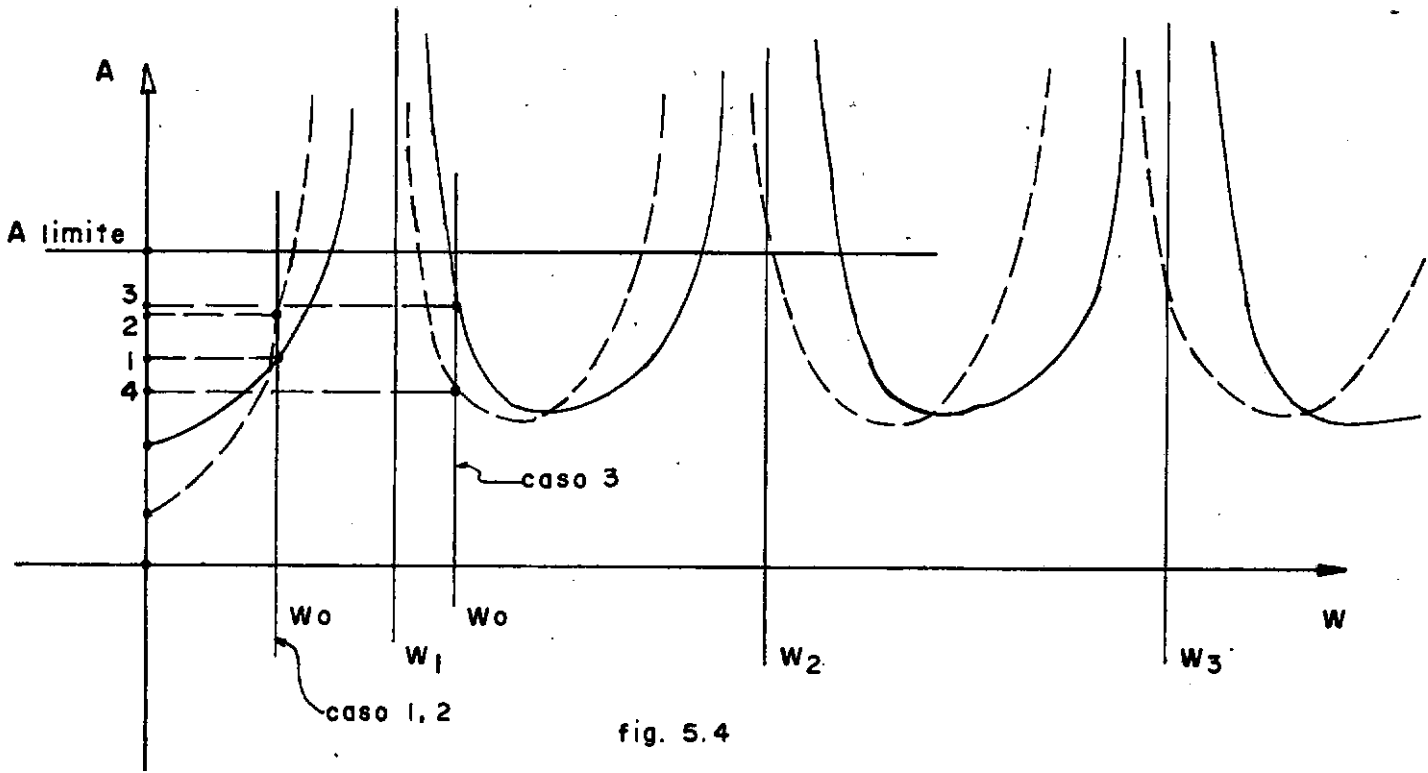


fig. 5.4

— configuração inicial  
 --- configuração com redução de peso

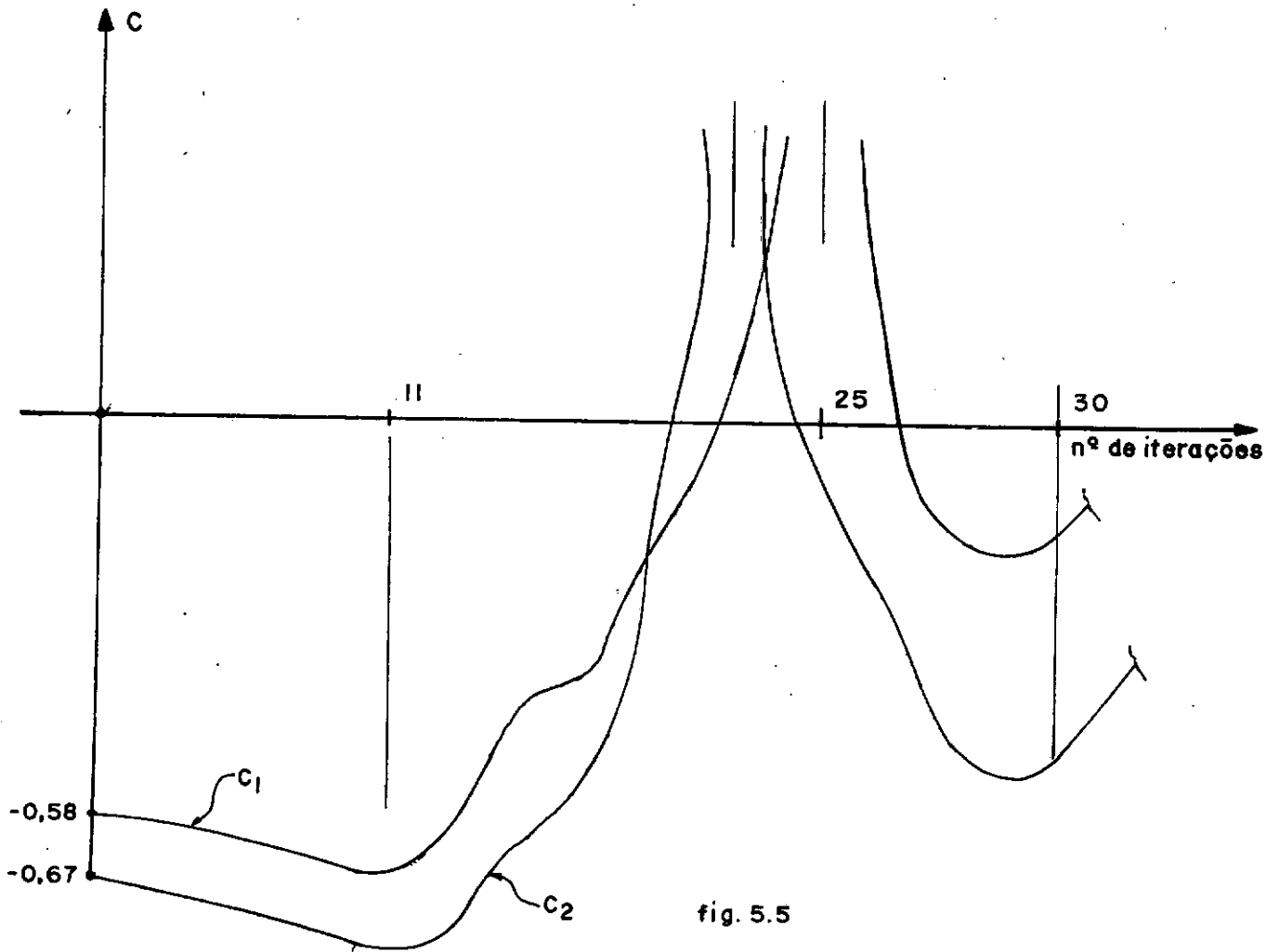


fig. 5.5

Quando da redução de peso as frequências naturais da estrutura diminuem (curva pontilhada - Fig. 5.4). A frequência de excitação  $\omega_0$  sendo maior que a frequência natural da estrutura, no início, com a redução de peso, a estrutura vai se tornando mais infactível conforme se observa na Figura 5.5 (curvas  $c_1$  e  $c_2$ ). Isto se deve ao fato de estarmos na região de amplitudes decrescentes da Figura 5.4. O caso 4 foi necessário, para observarmos o comportamento das curvas  $c_1$  e  $c_2$ , em função do número de iterações. É importante notar o aspecto semelhante entre as curvas  $c_1$  e  $c_2$  (Fig. 5.5) e as curvas das amplitudes em função da frequência de excitação (Fig. 5.4).

### Comentários

- 1) quando a frequência de excitação  $\omega_0$  é menor que a 1.<sup>a</sup> frequência natural da estrutura as restrições de deslocamentos são suficientes para definir um bom comportamento para a solução do problema;
- 2) quando a frequência de excitação  $\omega_0$  é maior que a 1.<sup>a</sup> frequência natural da estrutura as restrições de deslocamentos são insuficientes para limitar o comportamento da estrutura. É exigida neste caso limitação quanto a 1.<sup>a</sup> frequência natural ou seja:

$$\omega_1 \geq \omega_0 \text{ (otimização em frequência)}$$

teremos então uma otimização com restrições de deslocamento e frequência.

## 5.2. Otimização em Frequência

### Exemplo 5.2.1.

É analisada a mesma treliça espacial conforme a Figura 5.1.

Para uma boa convergência do algoritmo é necessário que a 1.<sup>a</sup> frequência própria da estrutura inicialmente projetada seja maior que o valor restrito para a 1.<sup>a</sup> frequência.

Parte da matriz de massa da estrutura deve ser invariante em relação às variáveis de projeto. Isto decorre do fato de que em caso de matriz de massa consistente sem massas nodais, todas as áreas convergem para as áreas mínimas prefixadas, sem variação dos autovalores da estrutura inicialmente projetada.

Como exemplo foi analisada a mesma estrutura do exemplo 5.1.1 para dois casos de massas inercias a saber:

Caso 1:  $m_1 = 100\text{Kgf.s}^2/\text{m}$  ;  $m_2 = 50\text{Kgf.s}^2/\text{m}$

Caso 2:  $m_1 = 300\text{Kgf.s}^2/\text{m}$  ;  $m_2 = 100\text{Kgf.s}^2/\text{m}$

A restrição imposta foi de que o 1º autovalor fosse maior que 81 ( $= \omega_1^2$ )

$$- \lambda_1 \geq 81$$

$$- A_{\min} \geq 2,5\text{cm}^2$$

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 5.4 e Figura 5.6.

a) Variáveis Finais de Projeto

Variável Nº	Valores Iniciais	Valores Finais(cm <sup>2</sup> )	
		Caso 1	Caso 2
1	180.0	38.0	105.6
2	15.0	2.5	2.5
3	20.0	2.5	2.5
4	30.0	4.1	2.5
5	40.0	10.0	30.6
6	60.0	15.1	41.8
7	60.0	16.1	44.5
8	10.0	2.5	2.5
9	10.0	2.5	2.5
10	10.0	2.5	2.5
peso final		2200.0	5089.0
nº de iterações		8	8

Tabela 5.4

## b) Diagrama de Pesos

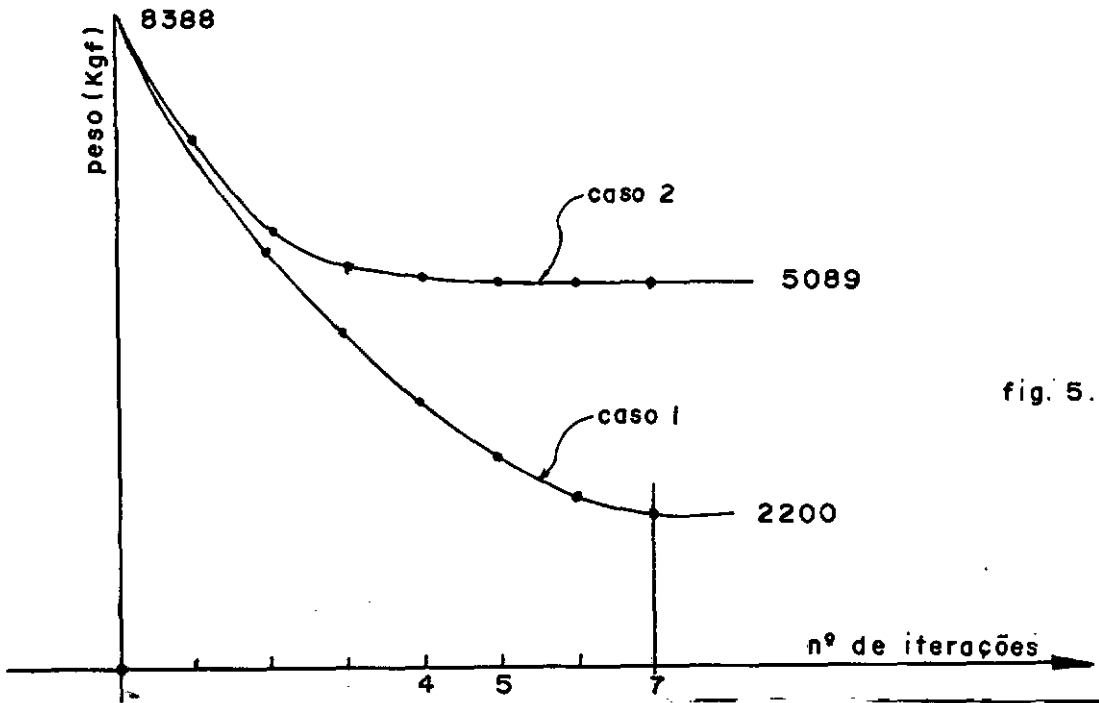


fig. 5.6

Outro gráfico de resultados é apresentado na Figura 5.7.

Neste são mostradas as curvas das restrições para os dois casos.

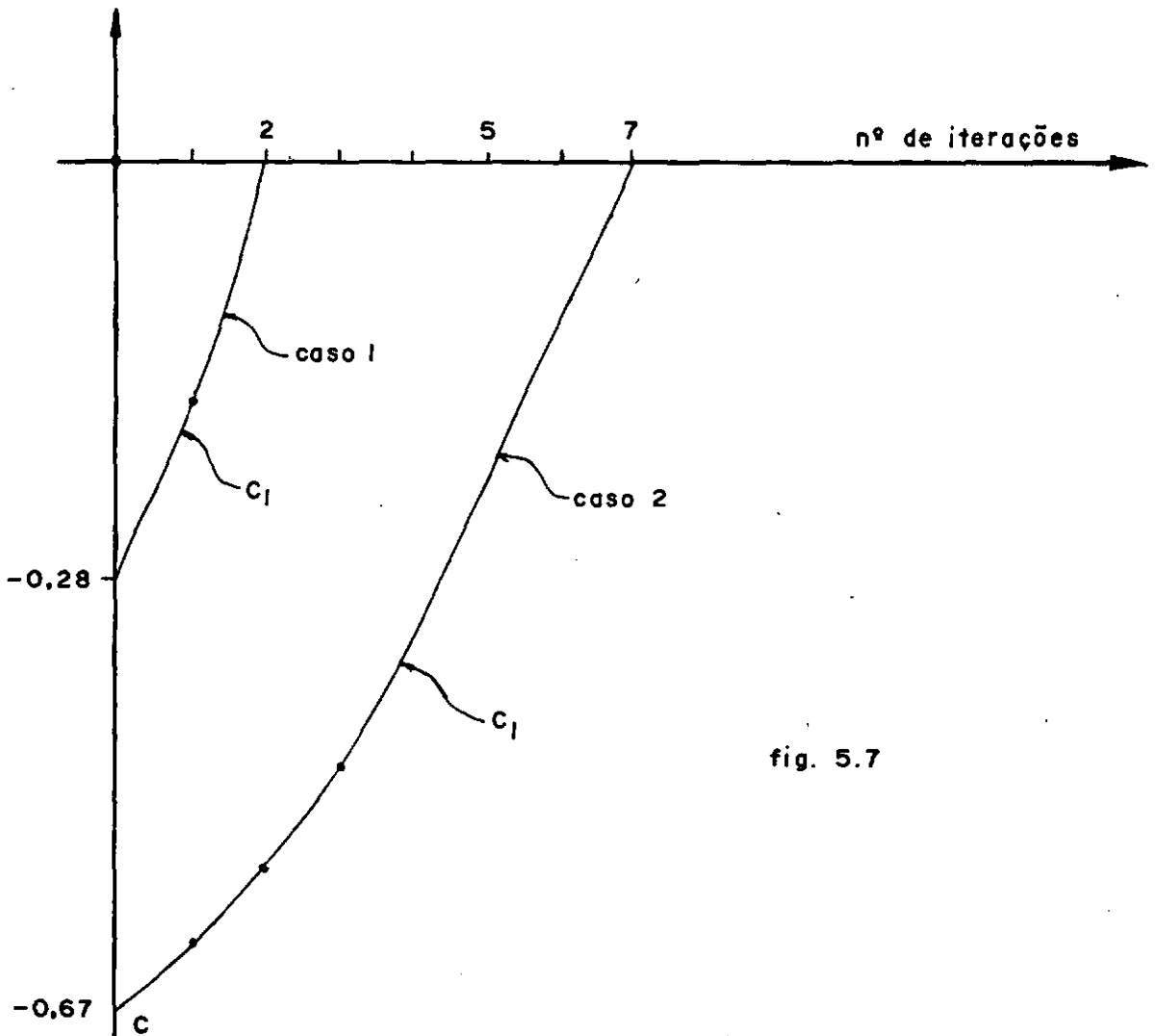


fig. 5.7

É importante ressaltar que em cada iteração novos valores para o autoproblema são determinados. Este aspecto pode tornar-se bastante inconveniente e até mesmo inviabilizar o processo de resolução, em face do grande volume de operações no computador.

Sendo assim, o programa admite a possibilidade de se considerar os autovalores e autovetores de uma iteração como sendo boas aproximações para as iterações seguintes. A escolha do "passo" é feita no início do programa como um dado de entrada. Se  $I = 3$ , os autovalores e autovetores são válidos para as 2(duas) iterações subsequentes não sendo necessária então a resolução do autoproblema na 2.<sup>a</sup> e 3.<sup>a</sup> iteração.

## 6. CONCLUSÕES

Do trabalho apresentado conclui-se que foi conseguido um programa computacional constituído das seguintes características:

- análise estática
- análise dinâmica
- otimização estrutural

A forma de estruturação do programa permite uma fácil ampliação e modificação do mesmo, com adição de subrotinas específicas para cada problema.

O algoritmo de otimização, baseado no conceito de variável de desvio, apresentou resultados bastante satisfatórios demonstrando a fácil adaptação do mesmo ao problema em questão.

Na análise dinâmica a forma de carregamento, excitação harmônica, limitou-se pelo fato de que, em cada estado de carga, a frequência de excitação deve ser a mesma em toda a estrutura. Em caso de frequência de excitação diferente em vários pontos, ou em caso de frequências iguais porém defasadas, a pior hipótese é aquela na qual se somam linearmente os deslocamentos, considerando cada carregamento correspondentemente a cada frequência de excitação. Esta hipótese não é possível de ser analisada no programa desenvolvido.

Como sugestão para futuras pesquisas podemos citar:

- a) inclusão da possibilidade de excitações harmônicas com frequências diferentes;
- b) análise com outras formas de carregamento, como por exemplo: excitação periódica não harmônica, excitações aleatórias, etc;

- c) otimização de estruturas aperticadas, adicionando-se convenientemente algumas subrotinas, com o aproveitamento quase total do programa abordado;
- d) inclusão de subrotinas que permitam representações gráficas para melhor caracterizar o problema.

REFERÊNCIAS

- [1] Pierson, B.L., A Survey of Optimal Structural Design under Dynamic Constraints, Int.J. for Numerical Methods in Engineering, vol.4, pp. 491-499 (1972).
- [2] Turner, M.J., Design of minimum-mass structures with specified natural frequencies, AIAA J., 5, 406-412 (1967).
- [3] Taylor, J.E., Minimum-mass bar for axial vibration at specified natural frequencies, AIAA J., 5, 1911-1913 (1967).
- [4] Niordson, F.I., On the optimal design of a vibration beam, Quarterly of Applied Mathematics, vol. 23, pp. 47-53 (1965).
- [5] Rios Neto, A. e Fleury, A.T., Otimização da frequência fundamental e da distribuição de massa de uma viga em balanço, Anais do IV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, pp.1327-1341 (1977).
- [6] Fox, R.L. and Kappor, M.P., "Structural optimization in the dynamics response regime: a computational approach", AIAA J., 8, 1778 - 1804 (1970).
- [7] Brach, R.M., "Optimum design of beams for sudden loading", J. Engng.Mech.Div.Am.Soc.Civ.Engrs, 94, 1395-1407 (1968).
- [8] Icerman, L.J., "Optimal structural design for given dynamic deflection", Int.J. Solids Struct., 5, 473-490 (1969).
- [9] Zouain, N., "Un Algoritmo de Optimización para Proyecto de Estructuras de Gran Porte", Tesis de M.Sc., COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, diciembre 1976.
- [10] Przemieniecki, J.S., "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw-Hill, New York, 1968.



- [11] Bathe, Klaus-Jürgen and Wilson, Edward, L., "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice Hall, Inc., 1976.
- [12] Fox, R.L., "Optimization Methods for Engineering Design", Addison Wesley, Reading, June 1973.
- [13] Lima, Edison C. Prates de, "Lorane-Dina - Uma Linguagem Orientada para Análise Dinâmica de Estruturas", Tese de D.Sc., COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Maio 1977.
- [14] Bathe, K.J., Wilson, E.L. and Peterson, E., "SAP IV: A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems", Report nº EERC-73-11, University of California, Berkeley June 1973.
- [15] Herskovits, J., "Un Sistema Automatico de Proyecto de Estructuras Optimas", Tesis de M.Sc., COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, outubro 1976.
- [16] Segenreich, S.A., Zouain, N.A., Herskovits, J., "Optimality Criteria Method based on Slack Variable Concept for Large Structural Optimization", Symposium on Application of Computer Methods in Engineering, USC, Los Angeles, August 1977.

NOTAÇÃO

Os principais símbolos utilizados no texto são relacionados a seguir:

$A_i$	área transversal da barra $i$	(Sec. 4.1)
$A_{\min}$	área transversal mínima da barra	(Sec. 4.1)
$c_j(\underline{x})$	função restrição do problema de otimização	(Sec. 2.1)
$\frac{\partial c_j}{\partial x_i}$	$\partial c_j / \partial x_i$ calculada em $\underline{x}^Y$	(2.1)
$c'_j(\underline{x}, \underline{z})$	restrição generalizada	(Sec. 2.1)
$(\Delta c'_j)$	$(c'_j)^{Y+1} - (c'_j)^Y$	(2.7)
$d$	parâmetro de controle de convergência	(2.13)
$E$	módulo de Young	(Sec. 5.1)
$K_i^u$	matriz de rigidez unitária	(3.7)
$\underline{K}$	matriz de rigidez da estrutura	(3.1)
$K$	parâmetro de controle de convergência	(2.3)
$K'$	$K.P$ ; parâmetro de controle de convergência adimensional	(Sec. 2.6)
$\underline{M}$	matriz de massa da estrutura	(3.1)
$M_i^u$	matriz de rigidez unitária	(3.8)
$m$	número de variáveis de projeto	(Sec. 2.1)
$P_i$	$\partial P / \partial x_i$	(2.1)
$P(\underline{x})$	função peso	(Sec. 2.1)
$\underline{P}(t)$	vetor de cargas	(3.1)
$t_a$	tolerância na variável mínima (superior)	(Sec. 2.6)

$t_c$	tolerância na variação de $c_j$	(2.11)
$t_M$	tolerância na variável mínima (inferior)	(Sec. 2.6)
$t_x$	tolerância na variação de $[x]$	(2.10)
$\underline{U}$	vetor de deslocamento generalizado	(3.2)
$U_i^{adm}$	deslocamento admissível	(3.12)
$v_i^Y$	parâmetro auxiliar	(2.10)
$x_i$	variável de projeto	(2.2)
$x_{M,i}$	valor mínimo para a variável $i$	(2.12)
$\underline{x}$	vetor de projeto	(Sec. 2.1)
$\Delta x_i^Y$	$x_i^{Y+1} - x_i^Y$	(2.4)
$z_j$	variável de desvio	(Sec. 2.1)
$\underline{z}$	vetor variável de desvio	(Sec. 2.1)
$\Delta z_j^Y$	$z_j^{Y+1} - z_j^Y$	(2.5)
$Y$	índice de uma sucessão	(2.2)
$\alpha^Y$	parâmetro de relaxação	(2.2)
$\beta_j^Y$	parâmetro auxiliar	(2.8)
$\beta_{jk}^Y$	parâmetro auxiliar	(2.8)
$\phi'(\underline{x}, \underline{z}, \underline{\lambda})$	função de Lagrange (generalizada)	(Sec. 2.1)
$\lambda_j$	parâmetro de Lagrange	(Sec. 2.1)
$\omega$	frequência de excitação harmônica	(3.2)
$Y$	autovetores da estrutura	(3.14)
$\lambda$	autovalores da estrutura	(3.14)

## APÊNDICE A. MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ PARA O ELEMENTO DE TRELIÇA ESPACIAL

### Matriz de Massa

A matriz de massa para o elemento de treliça espacial foi considerada no nosso trabalho como do tipo consistente.

Em caso da existência de massas nodais estas são adicionadas convenientemente na matriz de massa global da estrutura, correspondentemente aos respectivos graus de liberdade.

A matriz de massa consistente conforme [10] é expressa por,

$$M = \int_V \rho a^T a dV \quad (A.1)$$

onde  $\underline{a}$  decorre de  $u = aU$  (A.2)

Considerando a Figura 1,

$$\begin{aligned} u_{\bar{x}} &= U_1 + (U_4 - U_1)\xi \\ u_{\bar{y}} &= U_2 + (U_5 - U_2)\xi \\ u_{\bar{z}} &= U_3 + (U_6 - U_3)\xi \end{aligned} \quad (A.3)$$

onde  $\xi = \frac{x}{l}$

Sob a forma matricial tem a forma,

$$\begin{bmatrix} u_{\bar{x}} \\ u_{\bar{y}} \\ u_{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\xi) & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & (1-\xi) & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & (1-\xi) & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} \quad (A.4)$$

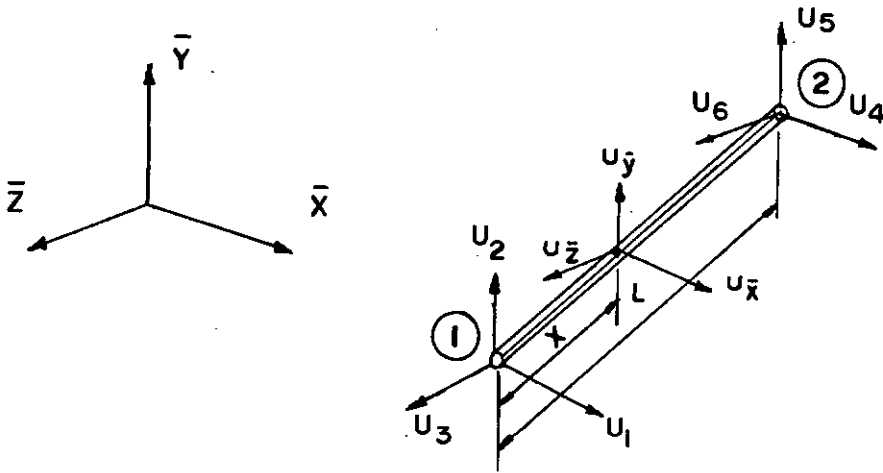


fig. 1

teremos para

$$a = \begin{bmatrix} (1-\xi) & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & (1-\xi) & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & (1-\xi) & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Introduzindo (A.5) em (A.1) e efetuando as integrações teremos,

$$M = \rho A \ell \int_0^{\ell} \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & 0 & 0 & (1-\xi)\xi & 0 & 0 \\ 0 & (1-\xi)^2 & 0 & 0 & (1-\xi)\xi & 0 \\ 0 & 0 & (1-\xi)^2 & 0 & 0 & (1-\xi)\xi \\ \xi(1-\xi) & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi(1-\xi) & 0 & 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi(1-\xi) & 0 & 0 & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi$$

$$M = \frac{\rho A \ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{\rho A \ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & I_3 & I_3 \\ I_3 & 2 & I_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

em que  $A$  = seção transversal da barra.

### Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez conforme [10] é expressa por,

$$K = \int_V \underline{b}^T \chi \underline{b} \, dv \quad \text{em que,}$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \chi = E$$

teremos então

$$K = \int_0^\ell \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{E}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} A \, dx$$

$$K = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A matriz é referida ao sistema local. Em relação ao sistema global,

$$\bar{K} = \lambda^T K \lambda \quad (\text{A.8})$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \ell & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell & m & n \end{bmatrix}$$

$\tilde{\lambda}$  é a matriz de transformação e  $\ell$ ,  $m$ ,  $n$  os cosenos diretores do eixo da barra em relação aos eixos de referência global.

## APÊNDICE B. MÉTODO DA ITERAÇÃO EM SUBESPAÇOS

Na iteração em subespaços o objetivo é determinar os  $p$  menores autovalores e correspondentes autovetores satisfazendo,

$$K\Phi = M\Phi\Lambda$$

onde  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$  e  $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p]$ .

Os autovetores satisfazem,

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda, \quad \Phi^T M \Phi = I.$$

O seguinte algoritmo é então usado,

$$K \bar{X}_{k+1} = M X_k \tag{B.1}$$

em que  $X_1 (k=1)$  é o vetor de partida arbitrado inicialmente. Em [11] o método é descrito com maiores detalhes inclusive quanto a escolha deste vetor.

Calculando as projeções de  $K$  e  $M$ ,

$$K_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T K \bar{X}_{k+1} \tag{B.2}$$

$$M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T M \bar{X}_{k+1} \tag{B.3}$$

teremos então,

$$K_{k+1} Q_{k+1} = M_{k+1} Q_{k+1} \Lambda_{k+1} \tag{B.4}$$

$$\text{com } X_{k+1} = \bar{X}_{k+1} Q_{k+1} \tag{B.5}$$

Quando  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\Lambda_{k+1} \rightarrow \Lambda \quad \text{e} \quad X_{k+1} \rightarrow \Phi$$

De (B.1) através da inversão simultânea dos vetores deter-



minamos a matriz  $\bar{X}_{k+1}$  de dimensão  $(n \times g)$ .

Com  $K_{k+1}$  e  $M_{k+1}$  de dimensão  $g \times g$  a expressão (B.4) representa um autoproblema de dimensão  $g \times g$ . Este é resolvido completamente através do Método de Jacobi generalizado [11], para cada etapa da iteração.

No método os menores autovalores convergem mais rapidamente. Uma melhor aproximação é feita aumentando-se para  $g$ , o número de autovetores participantes da iteração.

Segundo [11] a prática recomenda,

$$g = \min \{2p, p+8\}$$

em que  $p$  é o número dos primeiros autovalores procurados.

O método da iteração em subespaço é fundamentado na análise de Rayleigh-Ritz.

Consideremos o quociente de Rayleigh,

$$\rho(\phi) = \frac{\phi^T K \phi}{\phi^T M \phi} \quad (\text{B.6})$$

Na análise de Ritz nós consideraremos um conjunto de vetores  $\bar{\phi}$  que são uma combinação linear da base de Ritz  $\psi_i$ ,  $i=1, \dots, g$  ou seja,

$$\bar{\phi} \equiv \sum_{i=1}^g x_i \psi_i, \quad (\text{B.7})$$

onde  $x_i$  são as coordenadas de Ritz.

Na análise de Rayleigh-Ritz nós procuramos determinar os vetores  $\bar{\phi}_i$ ,  $i=1, \dots, g$  que melhor se aproximam dos autovetores reais.

Substituindo (B.2) em (B.1) e minimizando o quociente de Rayleigh, teremos:

$$\rho(\bar{\phi}) = \frac{\sum_{j=1}^g \sum_{i=1}^g x_i x_j \tilde{K}_{ij}}{\sum_{j=1}^g \sum_{i=1}^g x_i x_j \tilde{m}_{ij}} = \frac{\tilde{K}}{\tilde{m}} \quad (\text{B.8})$$

onde  $\tilde{K}_{ij} = \psi_i^T K \psi_j$

$$\tilde{m}_{ij} = \psi_i^T M \psi_j$$

A condição necessária de um mínimo de  $\rho(\bar{\phi})$  de (B.8) é que

$$\frac{\partial \rho(\bar{\phi})}{\partial x_i} = 0, \quad i=1, \dots, g \quad \text{em que as variáveis são } x_i.$$

$$\frac{\partial \rho(\bar{\phi})}{\partial x_i} = \frac{2\tilde{m} \sum_{j=1}^g x_j \tilde{K}_{ij} - 2\tilde{K} \sum_{j=1}^g x_j \tilde{m}_{ij}}{\tilde{m}^2}$$

com  $\rho = \tilde{K}/\tilde{m}$  a condição de mínimo é que,

$$\sum_{j=1}^g x_j (\tilde{K}_{ij} - \rho \tilde{m}_{ij}) = 0, \quad i=1, \dots, g \quad (\text{B.9})$$

A equação (B.9) na forma matricial será,

$$\tilde{K} \bar{x} = \rho \tilde{M} \bar{x} \quad (\text{B.10})$$

onde  $\tilde{K}$  e  $\tilde{M}$  têm a dimensão  $g \times g$  e o vetor  $\bar{x}$  é o vetor das coordenadas de Ritz,

$$\bar{x}^{-T} = [x_1, x_2, \dots, x_g].$$