

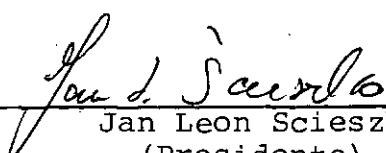
ESTUDO DE UM MODELO TEÓRICO DE

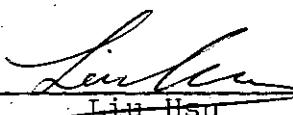
UMA MÁQUINA-FERRAMENTA

CARLOS ALFREDO LAMY

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO  
DE GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

  
Jan Leon Scieszko  
(Presidente)

  
Liu Hsu

  
Luiz Bevilacqua

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

Novembro de 1979

LAMY, CARLOS ALFREDO

Estudo de um Modelo Teórico de uma Máquina-Ferramenta  
[ Rio de Janeiro ] 1979.

viii, 279p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc, Engenharia  
Mecânica, 1976)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Fac. Engenharia

I. Engenharia Mecânica I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A Libânio e Angela, com  
quem vi a força da beleza simples da vida.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Jan Leon Scieszko pela orientação técnica.

À Rosa Maria Alves Belo pelo apoio.

Ao Prof. Ennio Goulart de Andrade pela compreensão e  
boa vontade, facilitando bastante a realização deste trabalho.

Ao Dr. Roberto Esteves pelo apoio inicial a este trabalho e  
pelo estímulo ao meu desenvolvimento profissional.

Ao Charles J. Rosier, Jorge Koyama e Orlando J. A. Gonçalves Filho, colegas de pós-graduação e de trabalho, que muito  
ajudaram na parte técnica e na discussão de problemas mais elaborados.

Àqueles que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

## SINOPSE

Estudamos um modelo teórico de uma máquina-ferramenta que leva em consideração a vibração da peça e da ferramenta relativa à parte da estrutura da máquina que pode ser suposta rígida.

A grande vantagem deste estudo é a simplicidade de sua aplicação prática. Conhecendo os mesmos parâmetros da máquina necessários para o cálculo de modelos clássicos, podemos obter, com um número reduzido de operações matemáticas, as faixas de freqüência em que a máquina deve operar para que ela tenha um bom desempenho.

**ABSTRACT**

A theoretical model of a machine tool is studied which takes into consideration the vibration of the workpiece and the tool in relation to the part of the structure that can be assumed to be rigid.

The greatest advantage of this study is the simplicity of its practical application. Employing the same parameters necessary for the calculation of classical models, one can obtain with a reduced number of mathematical operations the frequency bands in which the machine has good performance.

## FNDICE

IV.1.2.3. Determinação da constante de mola magnética ( $K_{mag} = K_2$ )	78
IV.2. Massas (M)	86
IV.2.1. Obtenção da massa 1 ( $M_1$ )	89
IV.2.2. Obtenção da massa 2 ( $M_2$ )	103
IV.3. Constantes de Amortecimento (C)	105
IV.3.1. Procedimento geral para a obtenção do valor numérico das constantes de amortecimento (C)	111
IV.3.1.1. Cálculo das constantes de amortecimento	116
CAPÍTULO V - CALIBRAÇÃO DA FORÇA DE EXCITAÇÃO DO SISTEMA	136
V.1. Preparação para a Calibração	138
V.2. Calibração da Força	140
V.2.1. Método para obtenção de dados para a construção do gráfico Força (P) x Corrente (i)	142
V.3. Comentários sobre a calibração da Força de Excitação (F)	147
V.3.1. Comentários sobre as distâncias iniciais ( $d_i$ )	147
V.3.2. Comentários sobre a calibração	149
V.3.3. Constatação da validade da calibração	152
CAPÍTULO VI - OBTENÇÃO DA AMPLITUDE (X) E DO ÂNGULO DE FASE ( $\phi$ )	158
VI.1. Comportamento Geral para Obtenção dos Parâmetros X e $\phi$	158
VI.2. Comentários Sobre a Obtenção dos Parâmetros X e $\phi$	160
VI.2.1. Sobre o valor das freqüências	160
VI.2.2. Sobre o ângulo de fase ( $\phi$ )	164
VI.2.3. Sobre a amplitude (X)	166

V.2.4. Sobre o valor obtido das amplitudes (X)	167
V.2.5. Sobre a obtenção do valor das amplitudes (X)	170
V.2.5.1. Foto nº 1	170
V.2.5.1.a. Cálculo da amplitude da força de excitação	171
V.2.5.1.b. Cálculo da amplitude do deslocamento (X)	172
V.2.5.1.c. Cálculo do ângulo de fase ( $\phi$ )	175
V.2.5.2. Foto nº 2	184
V.2.5.2.a. Cálculo da amplitude da força de excitação	186
V.2.5.2.b. Cálculo da amplitude do deslocamento (X)	187
V.2.5.2.c. Cálculo do ângulo de fase ( $\phi$ )	190
CAPÍTULO VII - DISCUSSÃO	197
CAPÍTULO VIII - CONCLUSÕES	203
BIBLIOGRAFIA	205
APÊNDICE I	210
APÊNDICE II	221
APÊNDICE III	228
APÊNDICE IV	233
APÊNDICE V	236

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo estudar um modelo teórico de uma máquina-ferramenta.

Conhecer o comportamento dinâmico de uma máquina-ferramenta é essencial tanto no estágio de seu projeto como no de produção de uma indústria, pois, assim, podemos saber com maior precisão como ela deve trabalhar, ou como e onde ela deve ser alterada para que tenha bom desempenho.

Como bom desempenho entendemos, principalmente, uma maior precisão na usinagem da peça, melhor acabamento superficial, maior vida da ferramenta, e maior taxa de produção.

A meta inicial deste trabalho era fazer um estudo do comportamento dinâmico de retificadoras sem centro ("centerless") usadas, entre outras coisas, na retificação de pastilhas de UO<sub>2</sub> - o combustível de reatores nucleares tipo PWR, ora em implantação no país. Mas como o mecanismo de usinagem de metais dos diferentes tipos de máquinas-ferramentas segue as mesmas leis fundamentais, apesar das grandes diferenças construtivas<sup>1, 2</sup>, este estudo pode ser aplicado a máquinas-ferramentas em

geral.

Existem muitos trabalhos sobre máquinas-ferramentas sendo que a maioria deles é experimental. Alguns dão também um enfoque teórico mas consideram modelos com um, ou no máximo dois graus de liberdade.

Na verdade, a estrutura de uma máquina-ferramenta é um sistema vibratório com um número infinito de graus de liberdade. Porém, experiências mostram que o valor do amortecimento costuma ser maior para os modos de vibração maiores. Devido a isso, conseguimos uma boa precisão nos cálculos, mesmo se desprezarmos os modos de vibração mais altos<sup>1</sup>. Dessa forma, podemos diminuir a complexidade dos cálculos supondo a máquina-ferramenta com menor número de graus de liberdade e obtermos uma boa precisão para a finalidade desejada.

Dentre os vários trabalhos existentes, citamos a seguir os realizados por autores mais conhecidos nesta área da mecânica.

TLUSTÝ<sup>3</sup> ao apresentar três princípios básicos da vibração auto-excitada, chamados de "the mode coupling", "the regenerative chatter", "the velocity component", mostra que o primeiro deles só tem validade para sistemas vibratórios com pelo menos dois graus de liberdade. Desse modo, considera que apenas uma massa (a ferramenta) vibra em relação à outra (a peça) tendo a ela fixadas duas coordenadas, definindo, assim, um sistema com dois graus de liberdade. Mostra ainda que para a aplicação dos outros dois princípios basta que o sistema tenha apenas um grau de liberdade.

TLUSTÝ<sup>4</sup> apresenta também alguns trabalhos experimentais sobre fresadoras, em especial a fresadora horizontal com ação joelho e a fresadora vertical com ação joelho, tornos e fresadoras horizontais.

POLÁCEK<sup>5</sup> estudando amortecedores, supõe fresadoras com apenas um grau de liberdade e ao desenvolver estudos teórico-experimentais de retificadoras<sup>6</sup> considera-as também com um grau de liberdade.

Na bibliografia pesquisada encontramos apenas uma teoria em que se supõe a estrutura da máquina-ferramenta com n graus de liberdade. Foi desenvolvida por TLUSTÝ e POLÁCEK<sup>7</sup>. Ne la são feitas algumas simplificações e são incluídas somente as teorias do "regenerative chatter" e do "mode coupling", sendo omitida a da "velocity component".

Essas teorias consideram, assim como TLUSTÝ<sup>3</sup>, a peça fixa e somente a ferramenta tendo um movimento vibratório relativo à primeira e à parte da estrutura da máquina que foi considerada como sendo estacionária. A aplicação prática desta teoria foi feita supondo sistemas com apenas um e dois graus de liberdade.

Segundo Tlustý, esse modo de análise de estabilidade de estruturas de máquinas-ferramentas desenvolve a solução gráfica do limite de estabilidade no plano dos Complexos, o que o faz diferir dos métodos usados por KUDINOV<sup>8</sup>, TOBIAS<sup>9,1</sup>, e PETERS<sup>10,11</sup>, onde ela é desenvolvida somente no plano dos Reais. A vantagem é que uma solução desenvolvida no plano dos Complexos permite saber como o limite de estabilidade depende dos modos da estrutura e as mudanças adequadas a serem feitas na es-

trutura.

Existem também vários trabalhos experimentais na coleção M.T.D.R.<sup>12</sup> tanto sobre dinâmica de máquinas-ferramentas em geral como para casos particulares (como p. ex.: retificadoras, tornos, "hobbing", etc.), mas que seria extremamente extenso se citássemos todos aqui.

TOBIAS<sup>1</sup> apresenta também uma série de estudos experimentais sobre furadeiras, fresadoras verticais, tornos e retificadoras realizados por diferentes autores. A parte teórica destes estudos é baseada, principalmente, nos princípios básicos de vibração auto-excitadas de TLUSTÝ<sup>3</sup>. Dentre estes trabalhos temos os de TOBIAS e FISHWICK<sup>13</sup>, GALLOWAY<sup>14</sup>, SADOWY<sup>15</sup>, para furadeiras; os de TOBIAS<sup>16</sup>, TLUSTÝ<sup>17</sup>, SADOWY e EISELE<sup>15</sup> para fresadoras verticais; os de ARNOLD<sup>18</sup>, HÖLKEN<sup>19, 20</sup>, DOI e KATO<sup>21</sup>, DOI<sup>22</sup>, TOBIAS e FISHWICK<sup>23</sup>, TLUSTÝ<sup>17</sup>, para tornos; e finalmente os estudos de HAHN<sup>24</sup>, DOI<sup>25</sup>, SALJÉ<sup>26</sup>, para retificadoras.

Como vemos, a maioria dos trabalhos realizados sobre este assunto ou são experimentais, tirados diretamente de máquinas-ferramentas, ou são estudos de modelos teóricos supondo-as com dois graus de liberdade, onde apenas uma massa (a ferramenta) vibra em relação à outra (a peça).

No trabalho aqui apresentado, além de supormos a ferramenta vibrar em relação à peça, consideramos também que ambas possuem um movimento vibratório relativo à parte da estrutura que é fixa, ou que assim pode ser considerada por ser suficientemente rígida, tal que sua vibração é desprezível em função da vibração das duas primeiras.

No capítulo que segue apresentamos o modelo teórico, o desenvolvimento das equações matemáticas com os programas de computador que são necessários, e a montagem dos dispositivo experimental de onde foram tirados os dados para testar o modelo teórico.

No capítulo seguinte a este, mostramos como foi constatado o comportamento linear deste dispositivo.

Logo a seguir (Capítulo IV) mostramos como foram obtidos os valores das massas, constantes de mola e constantes de amortecimento, seguido (Capítulo V) da calibração da força de excitação do dispositivo experimental.

No Capítulo VI vem a obtenção dos últimos dados de entrada de um dos programas de computador, seguida da discussão e das conclusões que podemos tirar do modelo teórico apresentado e da forma usada para estudá-lo.

No final vêm alguns Apêndices onde temos tabelas, gráficos, cálculos e os programas de computador com os seus resultados.

## CAPÍTULO II

### O MODELO TEÓRICO

#### II.1. O Modelo teórico deste trabalho

O modelo teórico da estrutura da máquina-ferramenta a qui estudo está representado na Fig. II.1.a. Para ajudar a comparação, está desenhado adiante, esquematicamente, uma máqui na (Fig. II.1.b) que poderia ser uma retificadora sem centro ("centerless").

Fazendo uma comparação de cada parte do modelo com a estrutura de uma máquina-ferramenta temos as relações:

$$M_1 = \text{massa da ferramenta} + \text{massa que vibra da estru} \\ \text{tura do lado correspondente ao da ferramenta;}$$

$$M_2 = \text{massa da peça} + \text{massa que vibra da estrutura do} \\ \text{lado correspondente ao da peça.}$$

Essas massas poderiam ser chamadas de massas efetivas, pois, na verdade, elas representam uma soma de outras massas da estrutura da máquina (eixos, chapas, soldas, rolamentos, engrenagens, etc.) que se localizam do lado considerado (da ferramen ta ou da peça), mas não são uma massa que sabemos exatamente

onde termina, uma vez que existe um interrelacionamento entre elas na estrutura. Cada tipo de máquina terá a sua massa ( $M_1$  e  $M_2$ ) definida conforme ela fôr construída.

$K_1$  = constante de mola do modelo teórico que representa todo o comportamento elástico da estrutura da máquina que suporta a ferramenta;

$K_3$  = mesma relação de  $K$  válida para a peça;

$K_2$  = mesma relação de  $K$  válida para o acoplamento ferramenta-peça;

$C_1$  = constante de amortecimento do modelo teórico que representa a dissipação de energia existente na estrutura da máquina do lado da ferramenta;

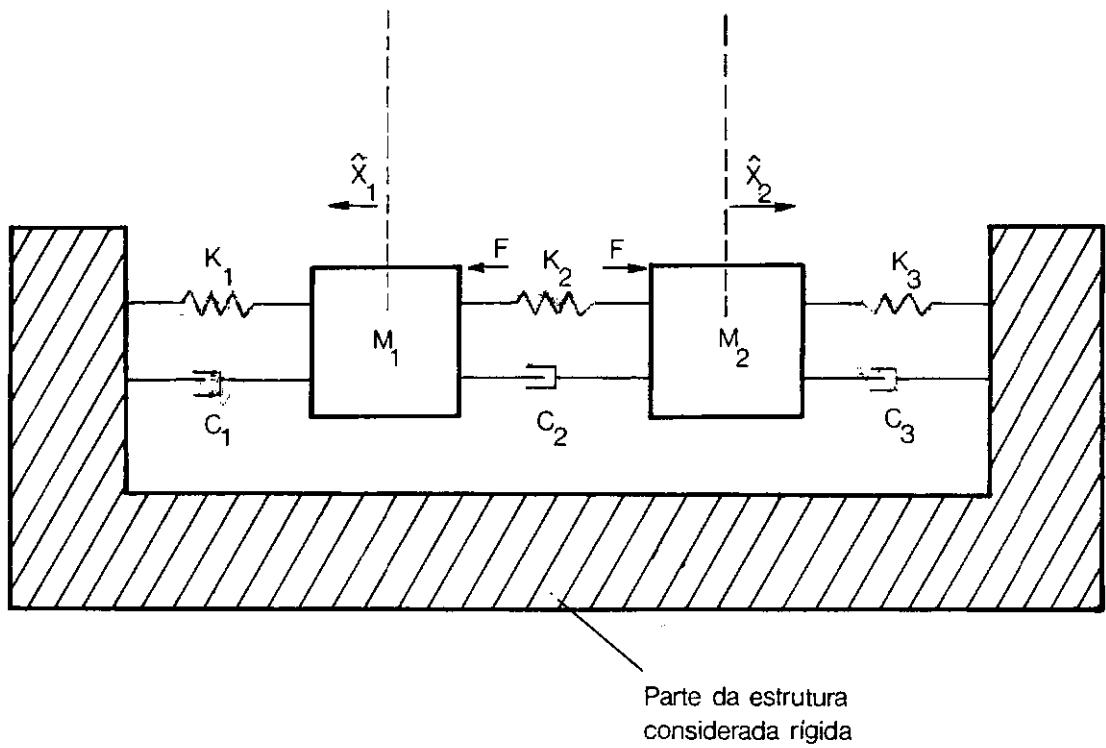
$C_3$  = mesma relação de  $C$  válida para a peça;

$C_2$  = mesma relação de  $C$  válida para o acoplamento ferramenta-peça;

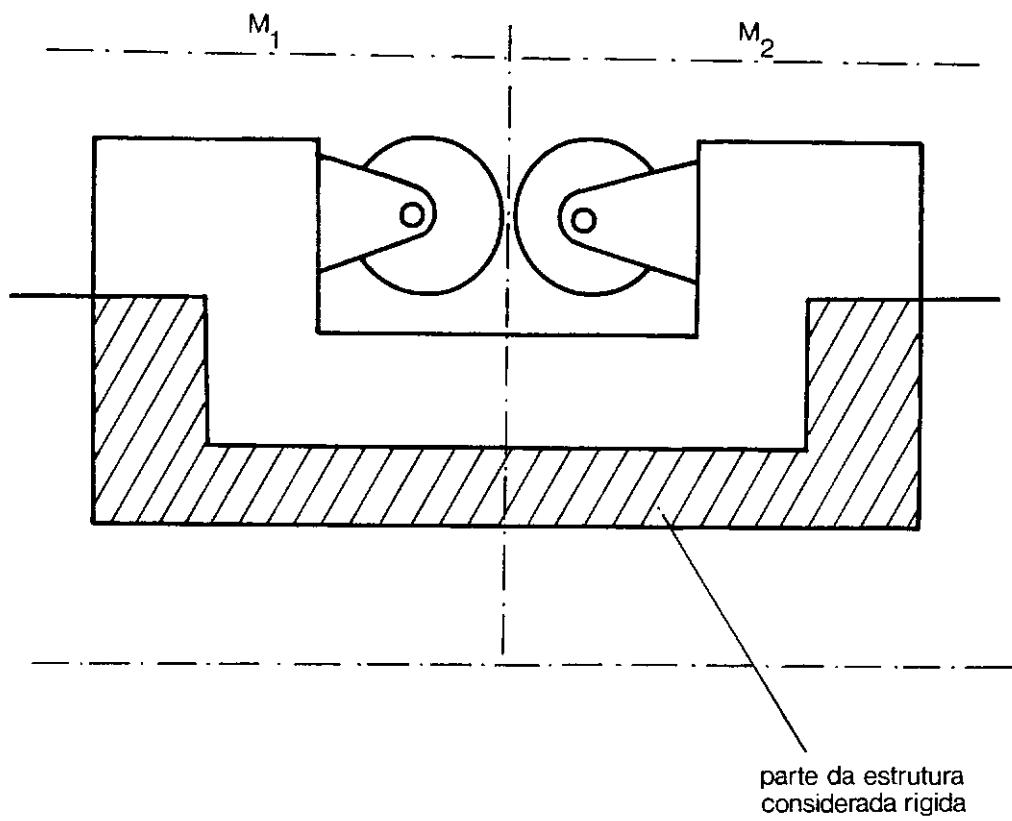
$F$  = força de excitação do sistema existente durante a usinagem que faz com que vibre o lado da estrutura da máquina que suporta a ferramenta em relação ao lado que suporta a peça, e ambos em relação à parte da estrutura que pode ser considerada rígida.

Podemos obter agora as equações que regem o movimento do sistema da Fig. II.1.a. Pela 2<sup>a</sup> Lei de Newton temos:

$$\sum F = Ma$$



- FIG. III.1.a -



- FIG II . 1.b -

Pelo referencial  $\hat{x}_1$  temos:

$$\hat{x}_1 : F = M_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 + C_1 \dot{x}_1 + K_2 (x_1 + x_2) + C_2 (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \quad (\text{II.1})$$

Pelo referencial  $\hat{x}_2$  temos:

$$\hat{x}_2 : F = M_2 \ddot{x}_2 + K_3 x_2 + C_3 \dot{x}_2 + K_2 (x_1 + x_2) + C_2 (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \quad (\text{II.2})$$

Para que o sistema de equações acima deixe de ser de equações diferenciais fazemos uma mudança de variáveis. Temos:

$$F = P e^{j\omega t} = P (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (\text{II.3})$$

Onde:

$P$  = amplitude da força de excitação;

$t$  = tempo.

Fazendo isto, estamos supondo que a força de excitação da máquina que gera a vibração é senoidal. Temos:

$$x = X e^{j\omega t} \rightarrow \dot{x} = j\omega X e^{j\omega t} \rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 X e^{j\omega t} \quad (\text{II.4})$$

Sendo:

$X = R + j U$  = amplitude complexa;

$R$  = parte real da amplitude complexa ( $X$ );

$U$  = parte imaginária da amplitude complexa ( $X$ ).

A Fig. II.2 mostra a representação gráfica para ajudar a interpretação da vibração produzida escrita dessa forma.

Temos:

$\omega$  = velocidade angular do vetor  $\vec{x}$  (amplitude complexa) = frequência circular;

$\phi$  = ângulo de fase entre a excitação e a resposta.

Na Fig. II.2, a força F de excitação está superposta ao eixo dos Reais (R), daí o ângulo da fase ( $\phi$ ) ser o que está representado nesta figura.

Substituindo (II.3) e (II.4) na equação (II.1) com o índice correspondente temos:

$$\begin{aligned} P e^{j\omega t} = & -M_1 \omega^2 X_1 e^{j\omega t} + K_1 X_1 e^{j\omega t} + j\omega C_1 X_1 e^{j\omega t} + \\ & + K_2 (X_1 + X_2) e^{j\omega t} + j\omega C_2 (X_1 + X_2) e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Simplificando vem:

$$P = -M_1 \omega^2 X_1 + K_1 X_1 + j\omega C_1 X_1 + K_2 (X_1 + X_2) + j\omega C_2 (X_1 + X_2) \quad (\text{II.6})$$

Substituindo (II.5) em (II.6) com os índices correspondentes temos:

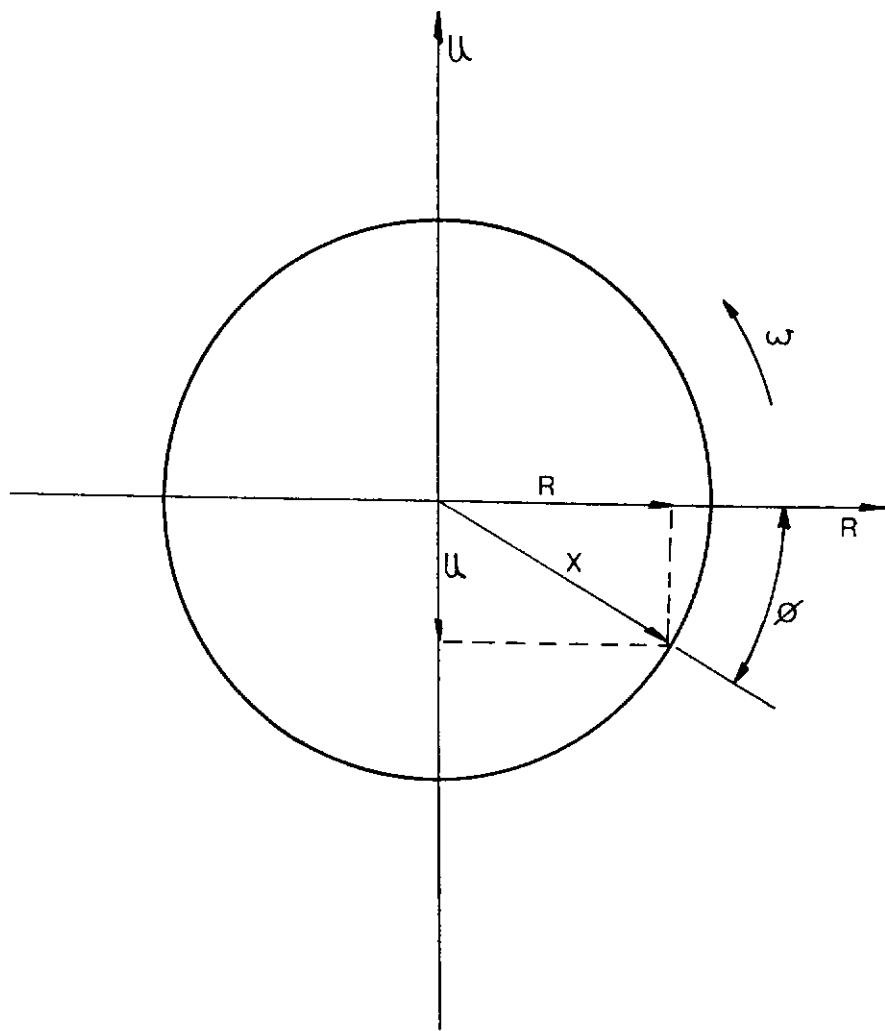
$$P = -M_1 \omega^2 (R_1 + jU_1) + K_1 (R_1 + jU_1) + j\omega C_1 (R_1 + jU_1) +$$

$$+ K_2 (R_1 + jU_1 + R_2 + jU_2) + j\omega C_2 (R_1 + jU_1 + R_2 + jU_2)$$

$$P = -M_1 \omega^2 R_1 - jM_1 \omega^2 U_1 + K_1 R_1 + jK_1 U_1 + j\omega C_1 R_1 - \omega C_1 U_1 + K_2 R_1 +$$

$$+ jK_2 U_1 + K_2 R_2 + jK_2 U_2 + j\omega C_2 R_1 - \omega C_2 U_1 + j\omega C_2 R_2 - \omega C_2 U_2$$

(II.7)



- FIG II . 2 -

Para resolvemos a equação (II.7) separamos a parte Real (Re) da Imaginária (Im) e ficamos com:

$$(Re) : P = -M_1\omega^2R_1 + K_1R_1 - \omega C_1U_1 + K_2R_1 + K_2R_2 - \omega C_2U_1 - \omega C_2U_2$$

$$(Im) : 0 = -M_1\omega^2U_1 + K_1U_1 + \omega C_1R_1 + K_2U_1 + K_2U_2 + \omega C_2R_1 + \omega C_2R_2$$

Colocando em evidência os parâmetros  $R_1$ ,  $U_1$ ,  $R_2$ ,  $U_2$ , ficamos com:

$$(Re) : P = R_1(-M_1\omega^2 + K_1 + K_2) + U_1(-\omega C_1 - \omega C_2) + R_2(K_2) + U_2(-\omega C_2) \quad (II.8)$$

$$(Im) : 0 = R_1(\omega C_1 + \omega C_2) + U_1(-M_1\omega^2 + K_1 + K_2) + R_2(\omega C_2) + U_2(K_2) \quad (II.9)$$

O mesmo procedimento dado à equação (II.1) damos à equação (II.2). Substituindo (II.3) e (II.4) na equação (II.2) com os índices correspondentes temos:

$$\begin{aligned} P e^{j\omega t} = & -M_2\omega^2X_2 e^{j\omega t} + K_3X_2 e^{j\omega t} + j\omega C_3X_2 e^{j\omega t} + \\ & + K_2(X_1 + X_2) e^{j\omega t} + j\omega C_2(X_1 + X_2) e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Simplificando vem:

$$P = -M_2\omega^2X_2 + K_3X_2 + j\omega C_3X_2 + K_2(X_1 + X_2) + j\omega C_2(X_1 + X_2) \quad (II.10)$$

Substituindo (II.5) em (II.10) com os índices corres

pondentes, temos:

$$P = -M_2 \omega^2 (R_2 + jU_2) + K_3 (R_2 + jU_2) + j\omega C_3 (R_2 + jU_2)$$

$$+ K_2 (R_1 + jU_1 + R_2 + jU_2) + j\omega C_2 (R_1 + jU_1 + R_2 + jU_2)$$

$$P = -M_2 \omega^2 R_2 - jM_2 \omega^2 U_2 + K_3 R_2 + jK_3 U_2 + j\omega C_3 R_2 - \omega C_3 U_2 + K_2 R_1 +$$

$$+ jK_2 U_1 + K_2 R_2 + jK_2 U_2 + j\omega C_2 R_1 - \omega C_2 U_1 + j\omega C_2 R_2 - \omega C_2 U_2$$

(II.11)

Para resolvemos a equação (II.11) separamos a parte Real (Re) da Imaginária (Im) e ficamos com:

$$(Re) : P = -M_2 \omega^2 R_2 + K_3 R_2 - \omega C_3 U_2 + K_2 R_1 + K_2 R_2 - \omega C_2 U_1 - \omega C_2 U_2$$

$$(Im) : 0 = -M_2 \omega^2 U_2 + K_3 U_2 + \omega C_3 R_2 + K_2 U_1 + K_2 U_2 + \omega C_2 R_1 + \omega C_2 R_2$$

Colocando em evidência os parâmetros  $R_1$ ,  $U_1$ ,  $R_2$ ,  $U_2$ , ficamos com:

$$(Re) : P = R_1 (K_2) + U_1 (-\omega C_2) + R_2 (-M_2 \omega^2 + K_2 + K_3) + U_2 (-\omega C_3 - \omega C_2)$$

(II.12)

$$(Im) : 0 = R_1 (\omega C_2) + U_1 (K_2) + R_2 (\omega C_2 + \omega C_3) + U_2 (-M_2 \omega^2 + K_2 + K_3)$$

(II.13)

As equações (II.8), (II.9), (II.12) e (II.13) formam um sistema de quatro equações e quatro incógnitas, onde  $R_1$ ,  $U_1$ ,  $R_2$  e  $U_2$  são as incógnitas. Para resolve-lo fizemos um programa

de computador usando a subrotina GELG do SSP ("System/360 Scientific Subroutine Package", da IBM) que resolve sistemas de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss. A este programa de computador daremos o nome de Programa I. Seus dados de entrada são:  $M_1, M_2, K_1, K_2, K_3, C_1, C_2, C_3$ .

Para obtenção de outro programa (Programa II), que é o inverso do primeiro, arrumamos de forma diferente essas mesmas equações. Temos então:

$$(Re) : P = -M_1(\omega^2 R_1) + C_1(-\omega U_1) + C_2(-\omega U_1 - \omega U_2) + K_1(R_1) + K_2(R_1 + R_2) \quad (II.14)$$

$$(Im) : 0 = -M_1(\omega^2 U_1) + C_1(\omega R_1) + C_2(\omega R_1 + \omega R_2) + K_1(U_1) + K_2(U_1 + U_2) \quad (II.15)$$

$$(Re) : P = -M_2(\omega^2 R_2) + C_2(-\omega U_1 - \omega U_2) + C_3(-\omega U_2) + K_2(R_1 + R_2) + K_3(R_2) \quad (II.16)$$

$$(Im) : 0 = -M_2(\omega^2 U_2) + C_2(\omega R_1 + \omega R_2) + C_3(\omega R_2) + K_2(U_1 + U_2) + K_3(U_2) \quad (II.17)$$

As equações (II.14), (II.15), (II.16) e (II.17) formam um sistema de 4 (quatro) equações e 8 (oito) incógnitas que são:  $M_1, M_2, C_1, C_2, C_3, K_1, K_2, K_3$ . Para podermos resolvê-lo precisamos de mais 4 (quatro) equações. O valor dessas incógnitas é constante para qualquer freqüência. Se colocarmos então uma nova freqüência obteremos novos valores para  $R_1, U_1, R_2$  e  $U_2$ , obtendo assim quatro novas equações. Fazemos novo programa de computador (Programa II) da mesma forma que a do Programa I, mas desta vez os dados de entrada são  $R_1, U_1, R_2$  e  $U_2$  para dada freqüência  $\omega_1$ , e novos  $R_1, U_1, R_2, U_2$ , para outra freqüência  $\omega_2$ .

Para ajudar a compreensão do que foi exposto, escrevemos a seguir a notação usada para os sistemas de equações nos programas de computador.

O sistema de equações lineares fica:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$$

Para o Programa I temos:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -M_1\omega^2 + K_1 + K_2 & -\omega(C_1 + C_2) & K_2 & -\omega C_2 \\ \omega(C_1 + C_2) & -M_1\omega^2 + K_1 + K_2 & \omega C_2 & K_2 \\ K_2 & -\omega C_2 & -M_2\omega^2 + K_2 + K_3 & -\omega(C_2 + C_3) \\ \omega C_2 & K_2 & \omega(C_2 + C_3) & -M_2\omega^2 + K_2 + K_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{X}} = \left\{ \begin{array}{c} R_1 \\ U_1 \\ R_2 \\ U_2 \end{array} \right\}$$

$$\underline{\underline{B}} = \left\{ \begin{array}{c} P \\ O \\ P \\ O \end{array} \right\}$$

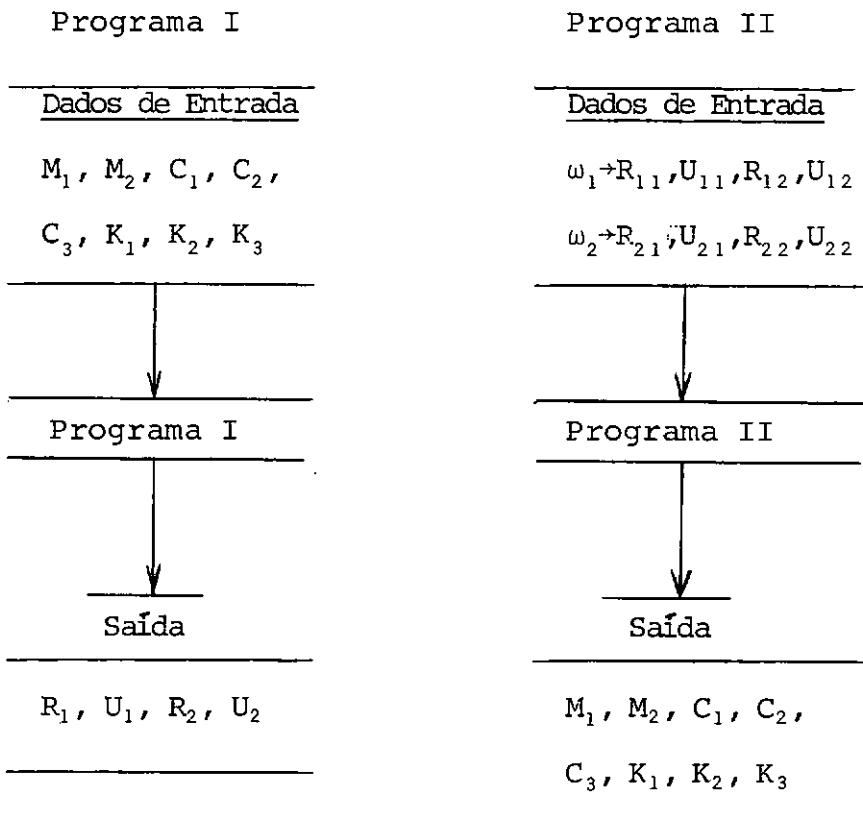
Para o Programa II temos:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 R_{11} & 0 & -\omega_1 U_{11} & -\omega_1 (U_{11} + U_{12}) & 0 & R_{11} & R_{11} + R_{12} & 0 \\ \omega_1^2 U_{11} & 0 & \omega_1 R_{11} & \omega_1 (R_{11} + R_{12}) & 0 & U_{11} & U_{11} + U_{12} & 0 \\ 0 & \omega_1^2 R_{12} & 0 & -\omega_1 (U_{11} + U_{12}) & -\omega_1 U_{12} & 0 & R_{11} + R_{12} & R_{12} \\ 0 & \omega_1^2 U_{12} & 0 & \omega_1 (R_{11} + R_{12}) & \omega_1 R_{12} & 0 & U_{11} + U_{12} & U_{12} \\ \omega_2^2 R_{21} & 0 & -\omega_2 U_{21} & -\omega_2 (U_{21} + U_{22}) & 0 & R_{21} & R_{21} + R_{22} & 0 \\ \omega_2^2 U_{21} & 0 & \omega_2 R_{21} & \omega_2 (R_{21} + R_{22}) & 0 & U_{21} & U_{21} + U_{22} & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \omega_2^2 R_{22} & 0 & -\omega_2 (U_{21} + U_{22}) & -\omega_2 U_{22} & 0 & R_{21} + R_{22} & R_{22} \\ 0 & \omega_2^2 U_{22} & 0 & \omega_2 (R_{21} + R_{22}) & \omega_2 R_{22} & 0 & U_{21} + U_{22} & U_{22} \end{bmatrix}$$

Sendo que  $R_{11}$ ,  $R_{12}$ ,  $U_{11}$ ,  $U_{12}$ , são valores reais e imaginários correspondentes à freqüência  $\omega_1$ . E  $R_{21}$ ,  $R_{22}$ ,  $U_{21}$  e  $U_{22}$  são os valores correspondentes à freqüência  $\omega_2$ . Como vemos, o primeiro índice está associado às freqüências e o segundo às massas.

$$\tilde{x} = \left\{ \begin{array}{c} -M_1 \\ -M_2 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{array} \right\} \quad \tilde{B} = \left\{ \begin{array}{c} P \\ O \\ P \\ O \\ P \\ O \\ P \\ O \end{array} \right\}$$

Esquematicamente temos:



A saída do Programa I é  $R_1, R_2, U_1, U_2$ , isto é, não tem notação para a freqüência. Isto acontece pois podemos usar tanto a freqüência  $\omega_1$  como  $\omega_2$  que obteremos esses valores correspondentes à freqüência de entrada do programa.

Estes dois programas se encontram no Apêndice I, já com os dados obtidos.

Como vemos, os dados de entrada do Programa I, são a saída do Programa II. A necessidade do uso desses dois programas será explicada no Capítulo VII, onde se pode entender com maior facilidade.

## II.2. O Dispositivo Experimental

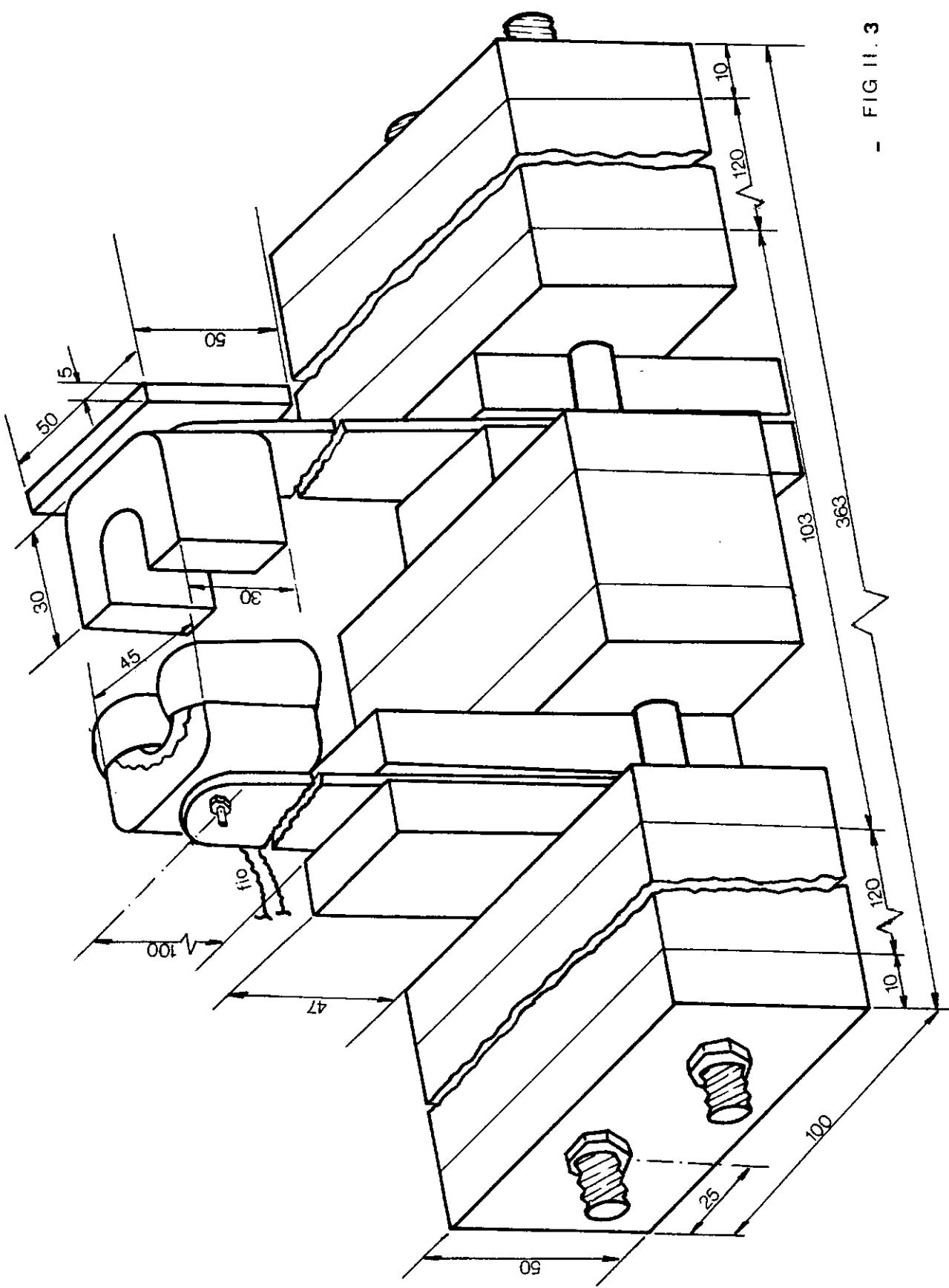
Montamos um dispositivo representando o modelo teórico, para que pudéssemos obter os dados necessários para o estudo deste modelo. A Fig. II.3 mostra o desenho desse dispositivo numa visão tridimensional, enquanto a Fig. II.4 o mostra numa vista de frente. Segundo esta última figura, notamos que ele foi colocado sobre um suporte (2) e este sobre um isolador de vibrações (1) para que as medidas dinâmicas tiradas dele fossem mais precisas e verdadeiras, sem influências do meio exterior.

Sua base rígida (3) é composta de blocos padrões furados no centro, colocados aos pares (Fig. II.3), por onde passa um eixo (11) com rosca nas extremidades, para que possamos fixar esses blocos. Eles possuem comprimentos diferentes e foram colocados da forma adequada para que o dispositivo tivesse bom funcionamento.

Os imãs 1 (6) e 2 (8) fazem parte da massa 1 ( $M_1$ ) e da massa 2 ( $M_2$ ) respectivamente, massas essas que serão definidas e calculadas em capítulo posterior. Esses imãs são fixados a barras flexíveis (5) por um parafuso (10), que além de os sustentarem fazem o papel de mola.

Ao imã 1 foi enrolada uma bobina (7) para que, através de uma corrente alternada, fosse gerado um campo magnético que fizesse o papel da força (F) de excitação do sistema. Estudaremos essa força (F) com mais detalhes no Capítulo V.

Atrás do imã 2 foi fixada uma massa (10) fazendo com que as massas  $M_1$  e  $M_2$  ficassem sensivelmente diferentes.



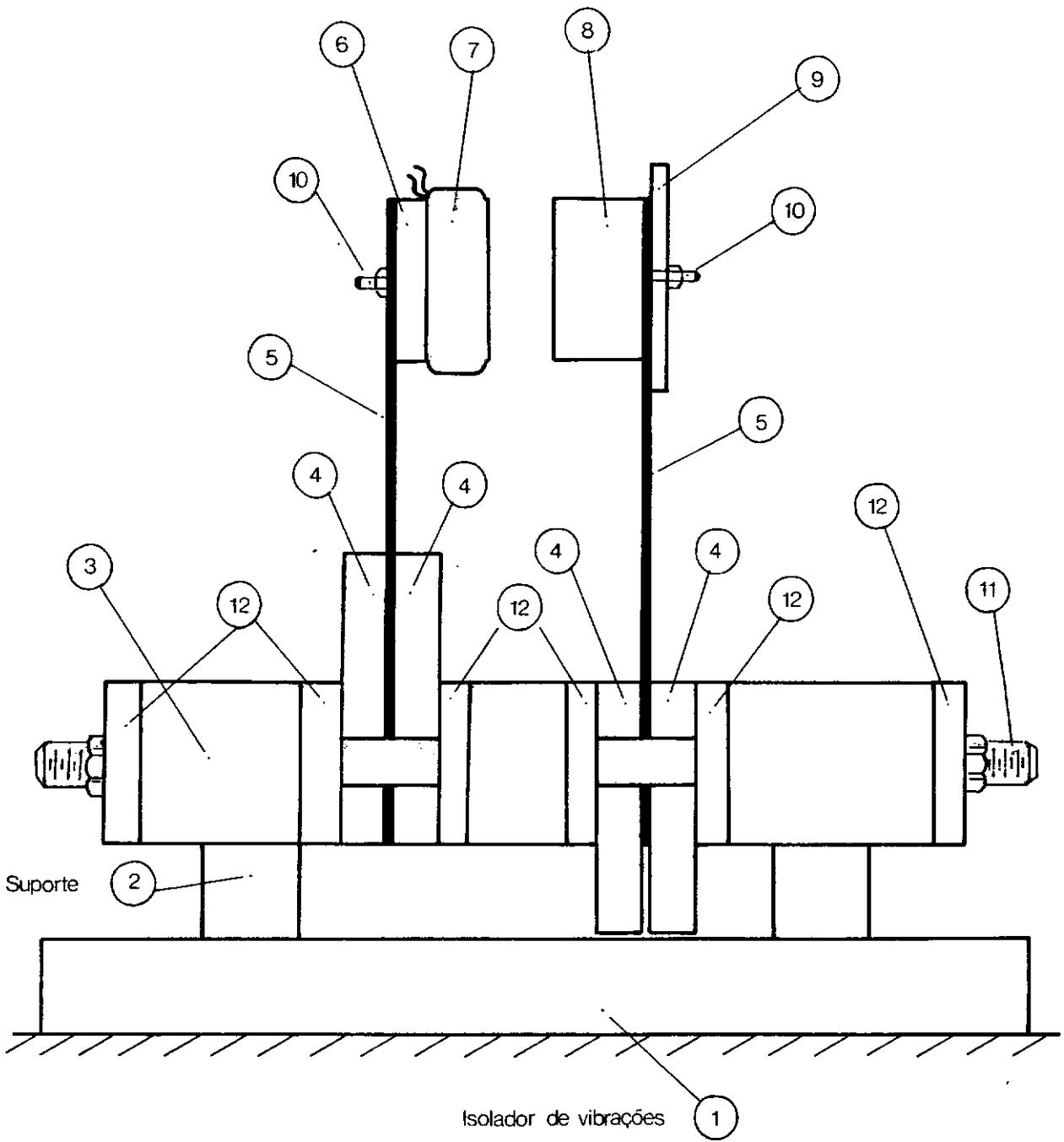
- FIG II. 3 -

Como as duas barras que fazem o papel de mola são iguais, com a finalidade de uma ter rigidez diferente da outra, cada uma delas foi colocada entre duas placas de aço (4) rígidas face à rigidez das barras.

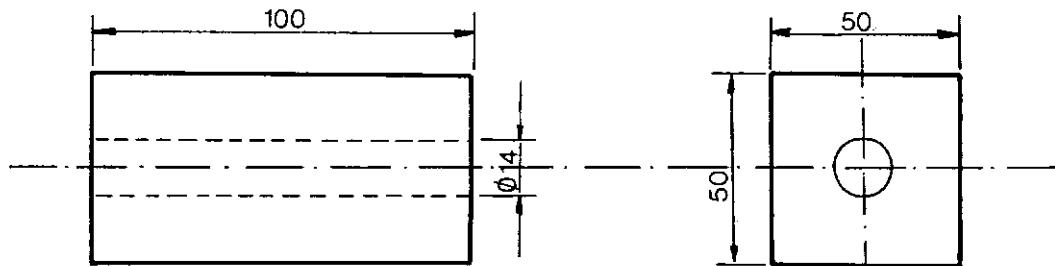
Colocamos essas placas em alturas diferentes em relação à altura de cada barra, dessa forma, a rigidez de uma fica diferente da outra. A Fig. II.3 e a Fig. II.4 mostram como ficou a posição final das placas em relação às barras.

Como já dissemos, a base rígida do dispositivo é feita de pares de blocos padrões (Fig. II.3). Para fixá-las e sustentar as barras, colocamos seis placas de aço inteiriças ((12) - Fig. II.4) que abrangem o comprimento total dos pares dos blocos padrões, de tal forma que, ao apertarmos as porcas nas extremidades dos dois eixos, exista pressão suficiente nas placas (4) para fixar as barras (5) (Fig. II.3 e Fig. II.4).

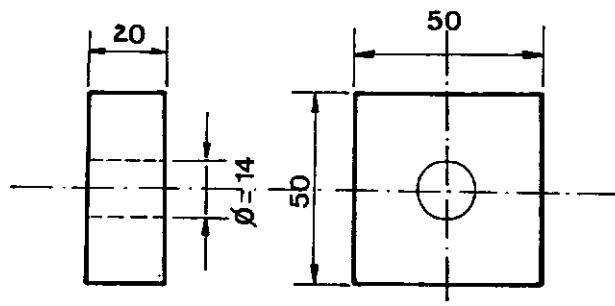
A Fig. II.5 mostra as dimensões dos blocos padrões de aço que fazem a base rígida, das placas de aço (4) que pressionam diretamente as barras e das placas de aço (12) que ajudam a fixar a base rígida.



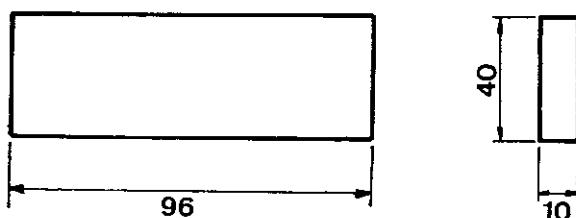
- FIG. II . 4 -



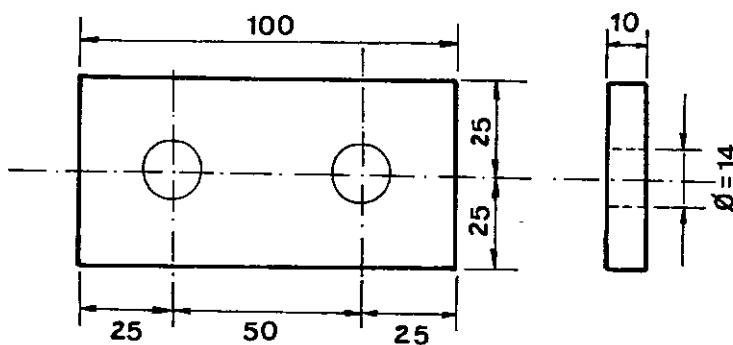
- a -  
bloco padrão de aço da base rígida



- b -  
bloco padrão de aço da base rígida



- c -  
placas de aço que prendem as barras (4)



- d -  
placas de aço que ajudam a fixar a base rígida (12)  
(esc.: 1:2)

## CAPÍTULO III

### VERIFICAÇÃO DA LINEARIDADE DO DISPOSITIVO

Como vimos no Capítulo II, as equações que regem o movimento do sistema são lineares, e é através delas que fizemos os Programas I e II, que são básicos para o estudo realizado neste trabalho, como veremos no Capítulo VII.

Precisamos saber então, se o comportamento dinâmico do dispositivo, montado e descrito no capítulo anterior, é linear, podendo, neste caso, aplicarmos os dados tirados dele nos Programas I e II. Para isso usamos a teoria do fenômeno do salto ("Jump phenomenon").

#### III.1. Breves Considerações sobre o Fenômeno do Salto ("Jump Phenomenon").

A Fig. III.1.a mostra o comportamento de um sistema linear (massa-mola), de 1 grau de liberdade, quando variamos a freqüência da força de excitação. É um gráfico Módulo da Amplitude ( $|A|$ ) X Freqüência de excitação ( $\omega$ ). A freqüência natural

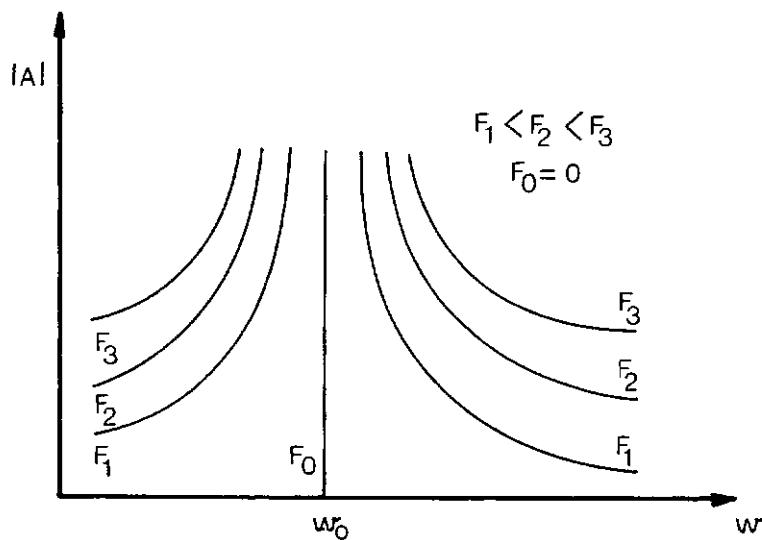
de vibração do sistema é  $\omega_0$ . A vertical que passa nesse ponto re presenta o sistema vibrando livremente ( $F_0=0$ ). As assíntotas a essa vertical são as curvas que representam o sistema excitado pelas forças  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ , sendo  $F_1 < F_2 < F_3$ <sup>27, 28</sup>.

Verifica-se matematicamente<sup>27, 28, 29</sup> que o comportamento de um sistema não linear (massa-mola), de 1 grau de liberdade, pode ser tanto o indicado pela Fig. III.1.b como o da Fig. III.1.c.

Nestas figuras, a curva que passa por  $\omega_0$  é uma curva<sup>28</sup> e não mais uma reta vertical, como no sistema linear (Fig. III.1.a). Sendo assim, no sistema não linear, a sua freqüência natural cresce com o aumento da amplitude (representa uma mola que se torna mais rígida com o aumento da amplitude, conhecida como "Mola dura" - "hard spring" - Fig. III.1.b), ou decresce com o aumento da amplitude (representa uma mola que se torna me nos rígida com o aumento da amplitude, conhecida como "Mola mo le" - "soft spring" - Fig. III.1.c).

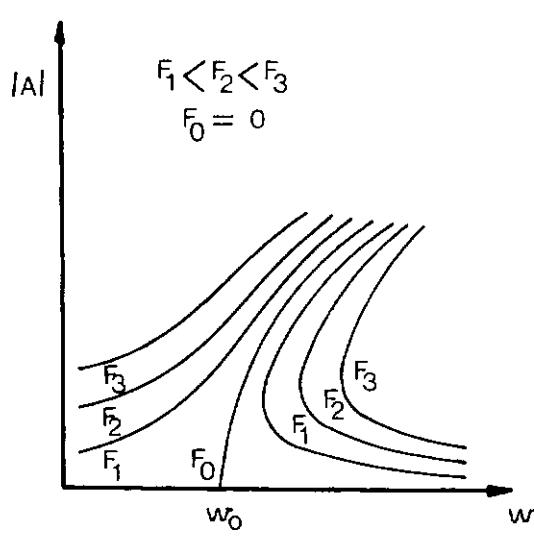
Para os sistemas com amortecimento, que é o que vai nos interessar, existe uma amplitude máxima que o sistema chega, que é onde ocorre a ressonância. É interessante notar que para sistemas massa-mola não lineares, sem amortecimento, o fe nômeno da ressonância não ocorre. No caso da "mola dura", por exemplo, fazendo crescer a freqüência de excitação do sistema ( $\omega$ ), vinda de um valor pequeno de amplitude, não existe nenhum valor finito de  $\omega$  que faça com que essa amplitude fique infini tamente grande, ou seja, não é possível a ocorrência da resso nância<sup>28</sup>.

A Fig. III.2 mostra o que ocorre, na prática, nos sis

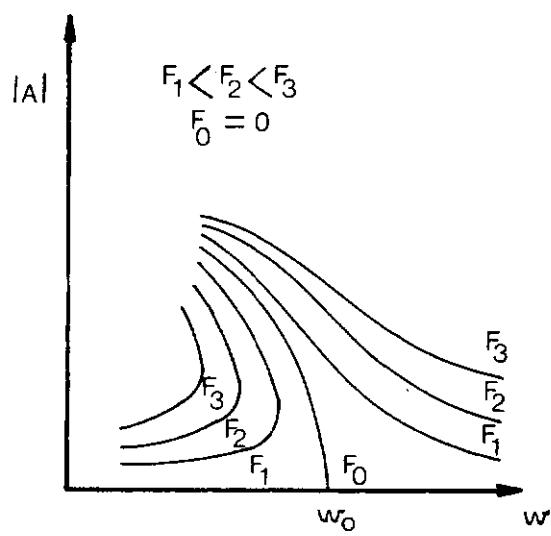


- FIG III . 1 -

- a -



Mola Dura



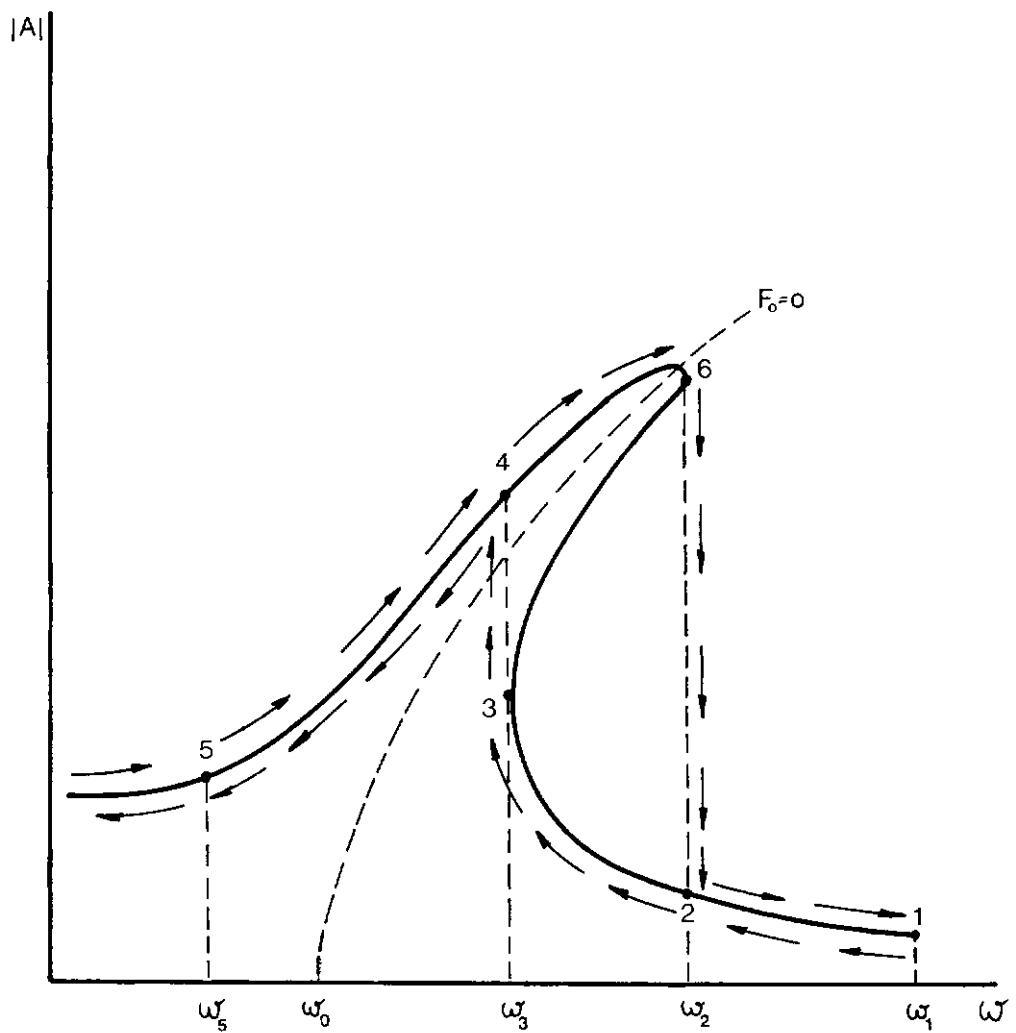
Mola Mole

- FIG III . 1 -

- b -

- FIG III . 1 -

- c -



— FIG. III. 2 —

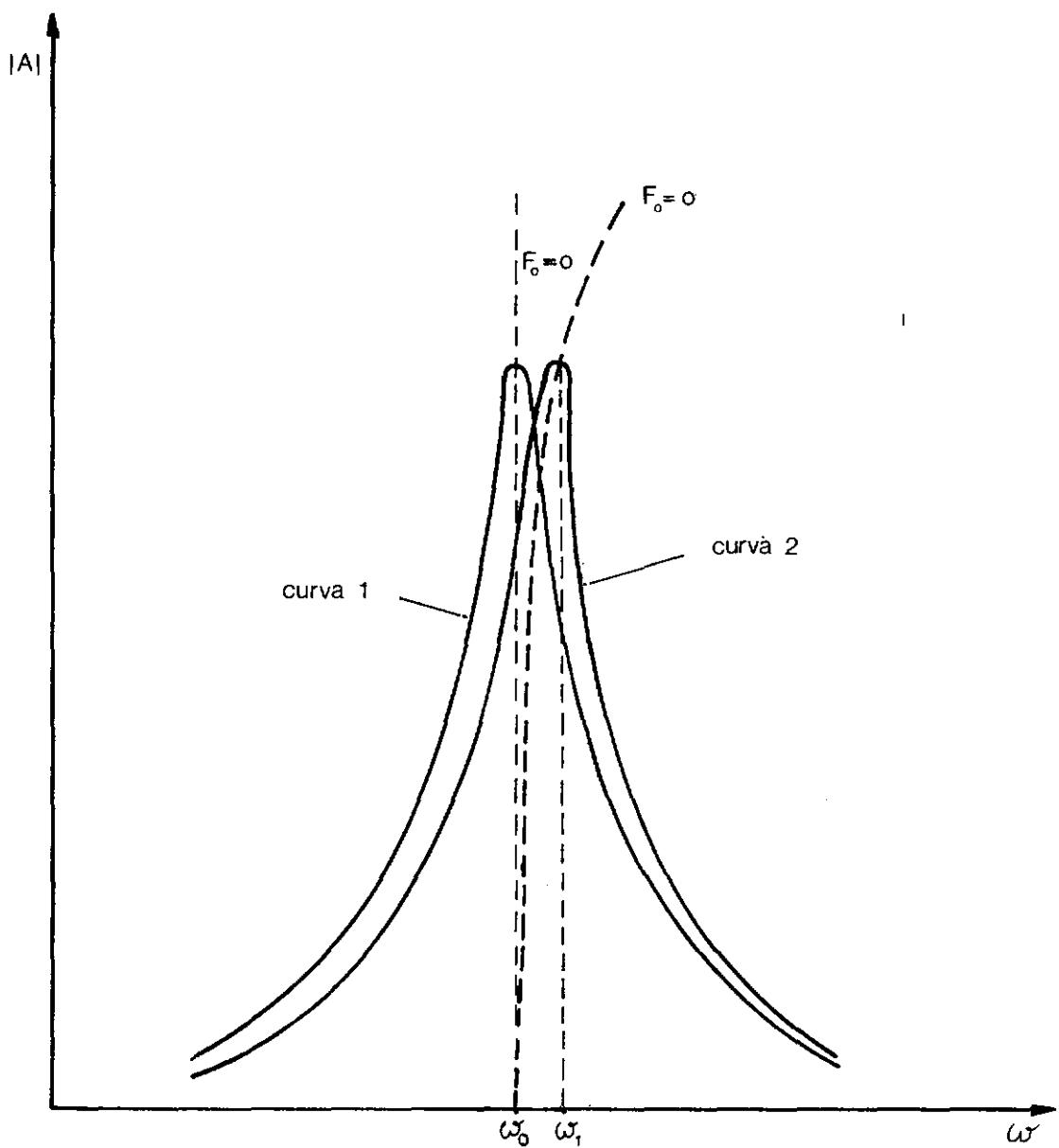
temas massa-mola-amortecedor não lineares. Dada uma força de excitação com uma freqüência baixa ( $\omega_5$ ), à medida que vamos aumentando esta freqüência, ela passa pelo ponto (4) ( $\omega_3$ ) e vai até o ponto (6) ( $\omega_2$ ). Ao chegar aí, que é o ponto onde a tangente à curva é vertical, a amplitude de vibração da massa cai bruscamente para o ponto (2), e passa a diminuir continuamente. Esta queda de amplitude brusca ocorre na freqüência de excitação  $\omega_2$ .

Ao diminuirmos agora a freqüência de excitação a partir do ponto (1) ( $\omega_1$ ), a amplitude passa pelo ponto (2) e vai até o ponto (3) ( $\omega_3$ ). Aí chegando, ela aumenta bruscamente até o ponto (4), vindo, então, a cair de forma contínua.

Como vemos, ocorrem duas alterações bruscas de amplitude, do ponto (6) para o (2) e do ponto (3) para o (4), em duas freqüências respectivas ( $\omega_2$  e  $\omega_3$ ), dependendo se a freqüência de excitação está sendo aumentada ou diminuída. Devido a essas alterações isto é chamado de fenômeno do salto ("Jump phenomenon").

A Fig. III.2 mostra somente o comportamento para "mola-dura", uma vez que o de "mola-mole" é semelhante, tendo apenas a inclinação do pico da amplitude para o outro lado, como mostra o gráfico da Fig. III.2.c.

Podem existir também sistemas que tenham o comportamento não linear para grandes amplitudes, podendo, porém, ser considerados lineares para pequenas amplitudes, ocorrendo, neste caso, um erro considerado desprezível<sup>29</sup>, como mostra a Fig. III.3. Nela, a curva 1 representa um sistema linear e a curva 2 um sistema não linear. Existe uma diferença entre as freqüências naturais de cada um, mas ela é pequena devido à baixa am-



Curv 1 - sistema linear

Curv 2 - sistema não linear

$$\omega_1 \approx \omega_o$$

- FIG III . 3 -

plitude. Notamos, também, que a curva 2 (não linear) não apresenta o fenômeno do salto de forma verificável na prática.

### III.2. Comportamento do Dispositivo

O esquema da Fig. III.4 mostra como montamos, no dispositivo, os aparelhos de medida para esta experiência.

No caso, para facilidade de compreensão, esta figura mostra a disposição da aparelhagem para a obtenção apenas da amplitude de vibração da massa 2.

Tomamos o cuidado de colocar a lingueta na vertical para que não houvesse atrito com a fenda do sensor (Apêndice II), o que faria diminuir a amplitude de vibração da massa.

A corrente que fizemos passar pela bobina foi tal que criava uma força de excitação que provocava a maior amplitude de oscilação das massas, de tal forma que esta não ultrapassava o limite de medida do sensor.

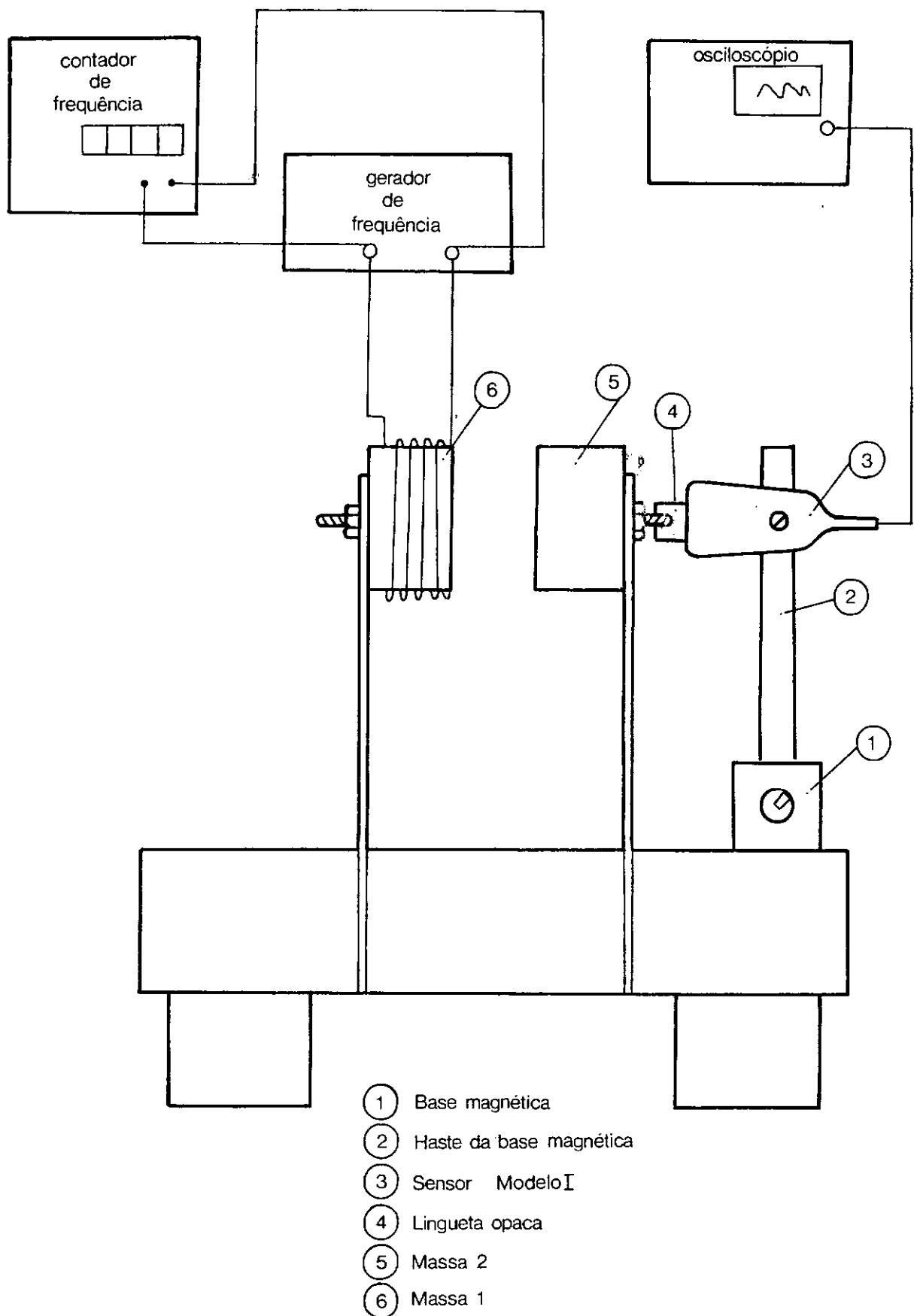
Colocamos um contador de freqüência digital, com precisão de até 0,1 Hz, acoplado ao gerador de freqüência para maior precisão de medida.

Dados:

- Contador de Freqüência Digital - 1191 - B

COUNTER GENERAL RADIO

- Gerador de Freqüência - LEADER - LAG - 120



- FIG III. 4 -

- Osciloscópio de Memória - TEXTRONIX - TYPE 564 B -  
MOD 121 N

Fazendo variar a freqüência de excitação, reparamos que os pontos onde ocorrem oscilação máxima das massas se situa perto de 11,8 Hz e 23,2 Hz. Sendo assim, para este trabalho, fizemos a freqüência variar de 10,5 Hz e 25,0 Hz, pois, desta forma, abrangemos toda a faixa onde ocorrem os picos de amplitude.

Primeiramente, com o sensor acoplado à massa 2, ligamos os aparelhos, e, após o tempo necessário para o seu bom funcionamento, variamos a freqüência de 10,5 Hz a 25,0 Hz, obtendo a primeira tabela de dados para a construção do gráfico Amplitude x Freqüência. Ao chegarmos nessa freqüência mais alta, obtivemos a segunda tabela fazendo a freqüência decrescer. Repetimos essa operação mais duas vezes e obtivemos, assim, 3 gráficos. Agimos do mesmo modo para a massa 1.

Vale notar que, para obtermos maior precisão de medida da freqüência, anotamos as 5 medidas fornecidas pelo contador de freqüência digital enquanto registrávamos a amplitude de vibração da massa em questão. Dessas 5 medidas, tiramos uma média, obtendo, assim, a freqüência mais provável com que o sistema estava sendo excitado.

Dessas medidas, podemos fazer a Tab. III.1 e a Tab. III.2 em que constam as freqüências onde ocorrem os picos de amplitude correspondentes a cada gráfico (ver página seguinte).

Para fazer essas medidas usamos o sensor Modelo I que permite medir um deslocamento maior das massas.

Pela Tab. III.1, da massa 1, notamos que nas freqüências

Tab. III.1

M A S S A 1				
Nº do Gráfico e da Tabela	Frequência Aumentando (10,5 Hz → 25,0 Hz)		Frequência Diminuindo (25,0 Hz → 10,5 Hz)	
	Freq. (Hz)	Ampl. (μm)	Freq. (Hz)	Ampl. (μm)
I	11,80	2,3	11,84	2,6
	23,28	68	23,28	62
II	11,82	2,6	11,84 e 11,80	2,9
	23,28	70	23,30	66
III	11,84	3,0	11,84	3,0
	23,30	94	23,30	96

Tab. III.2

M A S S A 2				
Nº do Gráfico e da Tabela	Frequência Aumentando (10,5 Hz → 25,0 Hz)		Frequência Diminuindo (25,0 Hz → 20,5 Hz)	
	Freq. (Hz)	Ampl. (μm)	Freq. (Hz)	Ampl. (μm)
I	11,84	40	11,84	40
	23,22	2,3	23,20	1,5
II	11,80	55	11,82	55
	23,26	2,2	23,24	2,3
III	11,80	53	11,82	48
	23,24	2,3	23,24	2,3

cias perto de 11,8 Hz, que é onde ocorre o máximo de amplitude da massa 2, a amplitude da massa 1 é muito pequena e por isso menos precisa, daí nos fixarmos somente na freqüência onde ocorre o pico de amplitude, que é onde poderia haver um comportamento não linear verificável na experiência, como já foi explicado quando falamos sobre o fenômeno do salto.

Perto da freqüência de 23,3 Hz, pico máximo de amplitude da massa 1, notamos que para os 3 gráficos (I, II e III), a variação de freqüência é praticamente nenhuma (23,28 Hz e 23,30 Hz). Somente no gráfico III é que a amplitude foi um pouco maior que nos outros dois, devido a um pequeno aumento da corrente que passa pela bobina. Essa tabela mostra que o sistema tem um comportamento linear enquanto essa massa vibrar com uma amplitude até 96  $\mu\text{m}$ .

Para analisar o comportamento do sistema quando ocorre o pico de amplitude da massa 2, usamos o mesmo raciocínio usado acima, isto é, vemos somente os picos de amplitude dessa massa, pois são neles que apareceriam com maior clareza e precisão a não-linearidade do sistema caso houvesse.

Para a massa 2, as variações de freqüência também foram praticamente nenhuma nos 3 gráficos (I, II e III), o que mostra o comportamento linear do sistema quando essa massa vibra até uma amplitude 55  $\mu\text{m}$ .

Devemos observar que essa experiência mostra apenas que quando a massa 1 tem uma amplitude até 96  $\mu\text{m}$ , ou quando a massa 2 tem uma amplitude até 55  $\mu\text{m}$ , o sistema tem um comportamento linear, embora ele ainda possa continuar sendo linear em maiores amplitudes. Só não conseguimos verificar isso devido

à limitação de medida do sensor.

O que vale, entretanto, é saber que existe uma faixa de vibração em que o sistema tem um comportamento linear, embora essa faixa possa ser maior do que a que foi verificada.

## CAPÍTULO IV

### OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS M, C e K

Os parâmetros das equações desenvolvidas no Capítulo II, além de medidos na prática, alguns deles foram também, anteriormente às medidas, calculados teoricamente e comparados com o valor medido para a certificação de sua validade.

#### IV.1. Constantes de Mola (K)

Como foi visto no Capítulo II, a peça que faz papel de mola no dispositivo é uma barra de aço para molas (alto teor de carbono) suficientemente rígida e elástica para sustentar o imã em sua extremidade livre, e ao mesmo tempo atuar como as molas que são representadas no esquema da Fig. II.1.a.

Por melhor conveniência, o campo magnético existente entre os imãs do dispositivo é que age como mola de acoplamento. Só conseguimos obter o valor de sua constante de mola ( $K_2$ ) através de dados experimentais. Mais adiante veremos como foram obtidos os dados necessários ao seu cálculo e como ele foi

realizado.

#### IV.1.1. Determinação analítica

Nesta parte, em que se determina analiticamente os valores das constantes de mola das duas barras, foram feitos dois tipos de cálculos para cada uma delas.

No primeiro obtemos o valor máximo e mínimo que elas podem ter supondo-as com a seção reta não variável e com o maior e o menor valor de suas larguras, respectivamente.

O segundo cálculo é mais preciso, pois supomos a seção reta da barra com variação linear em relação ao seu comprimento (altura). Mesmo neste caso existe algum erro, embora menor que nos outros dois, pois notamos pelas medidas obtidas da barra que esta variação, na realidade, não é linear.

##### - Primeiro Cálculo -

Aqui obtemos o maior e o menor valor que cada barra pode ter.

Pela referência [ 30 ] temos a fórmula para uma viga em balanço com uma massa presa na extremidade livre:

$$K = 3 \frac{EI}{l_e^3} \quad (\text{IV.1})$$

Onde (Fig. IV.1.a) :

$$\ell_e = \ell + \left(\frac{b}{2}\right) \quad (\text{IV.2})$$

Sendo:

$K$  = constante de mola da viga para uma carga na extremidade livre;

$E$  = módulo de elasticidade do material da viga;

$I$  = momento de inércia da seção reta da viga;

$\ell$  = comprimento da viga;

$b$  = comprimento da massa;

$\ell_e$  = comprimento efetivo da viga.

Pela referência [ 31 ] temos:

Aço para molas:

$$E = 22 \cdot 10^5 \text{ kgf/cm}^2 = 22 \cdot 10 \cdot \frac{10^3 \text{ g}}{10^2 \text{ mm}^2} = 22 \cdot 10^6 \text{ g/mm}^2$$

Pela referência [ 32 ] temos: (Fig. IV.1.b):

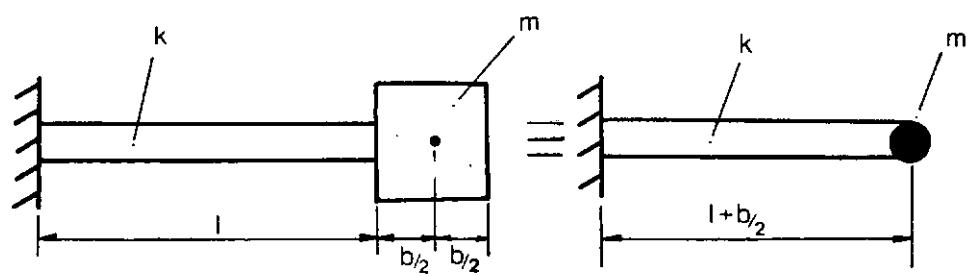
$$I = \frac{b h^3}{12} \quad (\text{IV.3})$$

$I$  = momento de inércia de um retângulo;

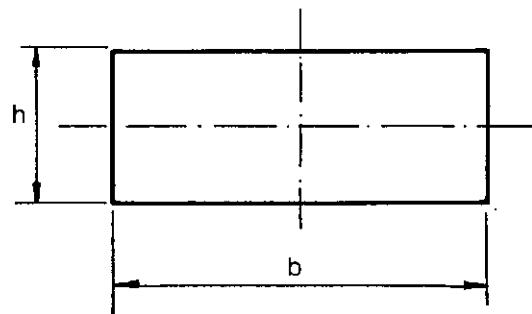
$b$  = base do retângulo;

$h$  = altura do retângulo = espessura da barra.

Pela fórmula (IV.1), o comprimento das barras deve ser considerado a distância que vai da base (ponto de engaste) até



— a —



— b —

o seu furo, que é o lugar por onde passa o parafuso que fixa o imã a elas (Fig. IV.2).

- Para a barra mais rígida (barra 1) -

O comprimento da barra 1 fica valendo então (Fig. IV.2):

$$h_1 = 100 \text{ mm} = l_e$$

Por ter seção reta variável, calculamos o momento de inércia máximo e mínimo que esta barra pode ter que corresponde ao valor máximo ( $I_{1\text{MA}}$ ) e mínimo ( $I_{1\text{MIN}}$ ), respectivamente, da constante de mola para esta barra. Temos:

a)  $I_{1\text{min}} \rightarrow b = 23,7 \text{ mm}; h = 1,5 \text{ mm}$

$$I_{1\text{min}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{23,7 \cdot 1,5^3}{12} \rightarrow I_{1\text{min}} = 6,67 \text{ mm}^4$$

b)  $I_{1\text{max}} \rightarrow b = 28,3 \text{ mm}; h = 1,5 \text{ mm}$

$$I_{1\text{max}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{28,3 \cdot 1,5^3}{12} \rightarrow I_{1\text{max}} = 7,96 \text{ mm}^4$$

Como vemos, o momento de inércia ( $I$ ) da barra 1 está compreendido entre  $6,67 \text{ mm}^4$  e  $7,96 \text{ mm}^4$ . A faixa do valor em que se situa sua constante de mola ( $K_1$ ) vai do valor mínimo ( $K_{1\text{min}}$ ), relativo ao momento de inércia mínimo ( $I_{1\text{min}}$ ), ao máximo ( $K_{1\text{max}}$ ), relativo ao momento de inércia máximo ( $I_{1\text{max}}$ ). Temos:

a)  $K_{1\text{min}} = \frac{3 \cdot 22 \cdot 10^6 \cdot 6,67}{100^3}$

$$\Rightarrow K_{1\min} = 440,22 \text{ g/mm} = 4314,16 \text{ N/m}$$

$$b) K_{1\max} = \frac{3 \cdot 22 \cdot 10^6 \cdot 7,96}{100^3}$$

$$\Rightarrow K_{1\max} = 525,36 \text{ g/mm} = 5148,53 \text{ N/m}$$

- Para a barra menos rígida (barra 2) -

Pela Fig. IV.2, temos:

$$h_2 = 147 \text{ mm} = l_e$$

Fazemos aqui o raciocínio correspondente ao usado para a barra 1. Temos:

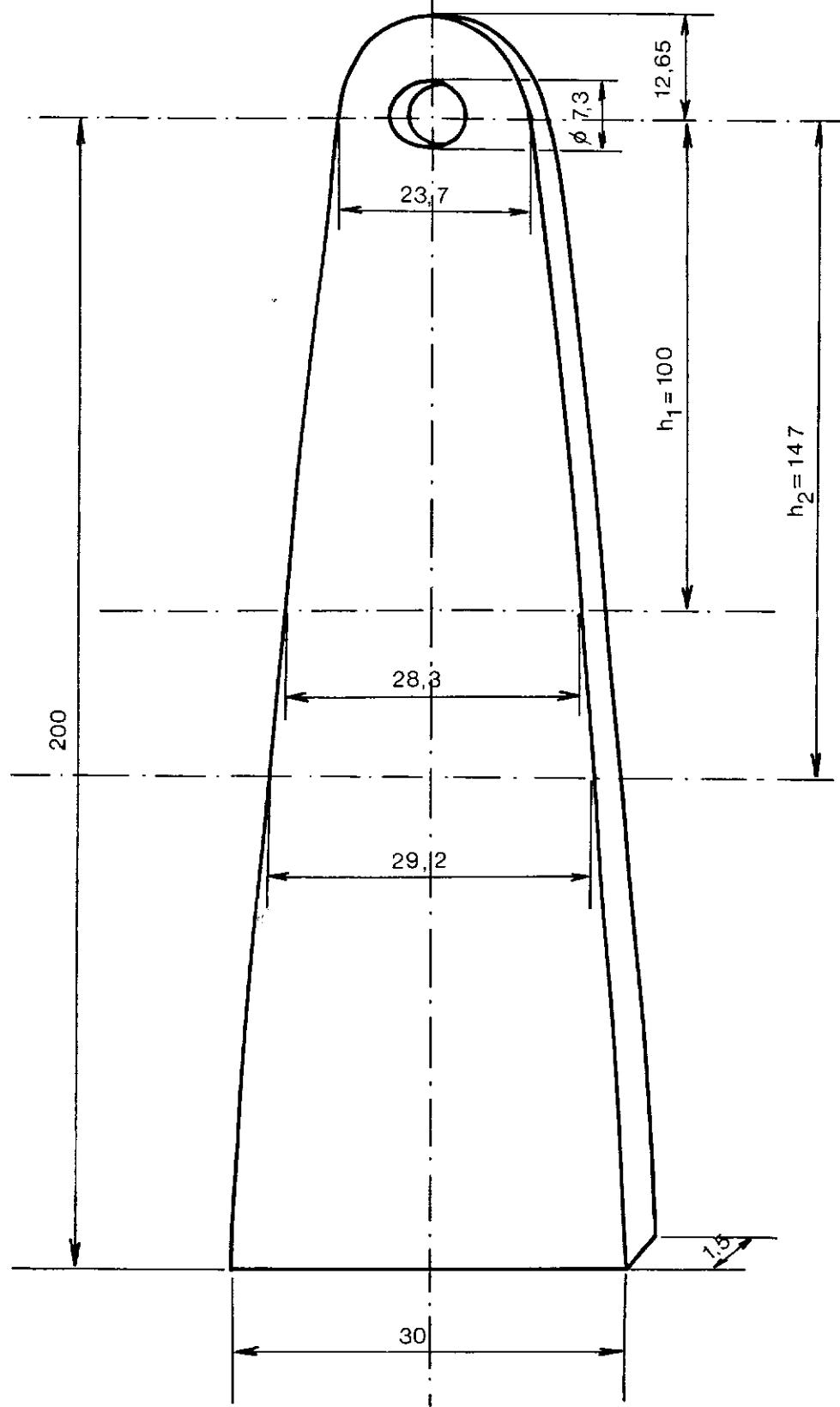
$$a) I_{2\min} = I_{1\min} = 6,67 \text{ mm}^4$$

$$b) I_{2\max} \Rightarrow b = 29,2 \text{ mm} ; h = 1,5 \text{ mm}$$

$$I_{2\max} = \frac{bh^3}{12} = \frac{29,2 \cdot 1,5^3}{12} \Rightarrow I_{2\max} = 8,21 \text{ mm}^4$$

Temos agora:

$$a) K_{3\min} = \frac{3 \cdot 22 \cdot 10^6 \cdot 6,67}{147^3}$$



- FIG IV . 2 -

$$\Rightarrow K_{3\min} = 138,59 \text{ g/mm} = 1358,14 \text{ N/m}$$

$$b) K_{3\max} = \frac{3 \cdot 22 \cdot 10^6 \cdot 8,21}{147^3}$$

$$\Rightarrow K_{3\max} = 170,58 \text{ g/mm} = 1671,71 \text{ N/m}$$

- Segundo Cálculo -

Obtemos aqui o valor da constante de mola de cada barra, supondo uma variação linear da sua largura (b) com seu comprimento (L). Este cálculo é feito através de sua deflexão (v) na extremidade livre.

Podemos obter a fórmula do momento fletor em relação a uma seção que dista x da origem (Fig. IV.3.a).

$$M(x) = + Q(L-x) \quad (\text{IV.4})$$

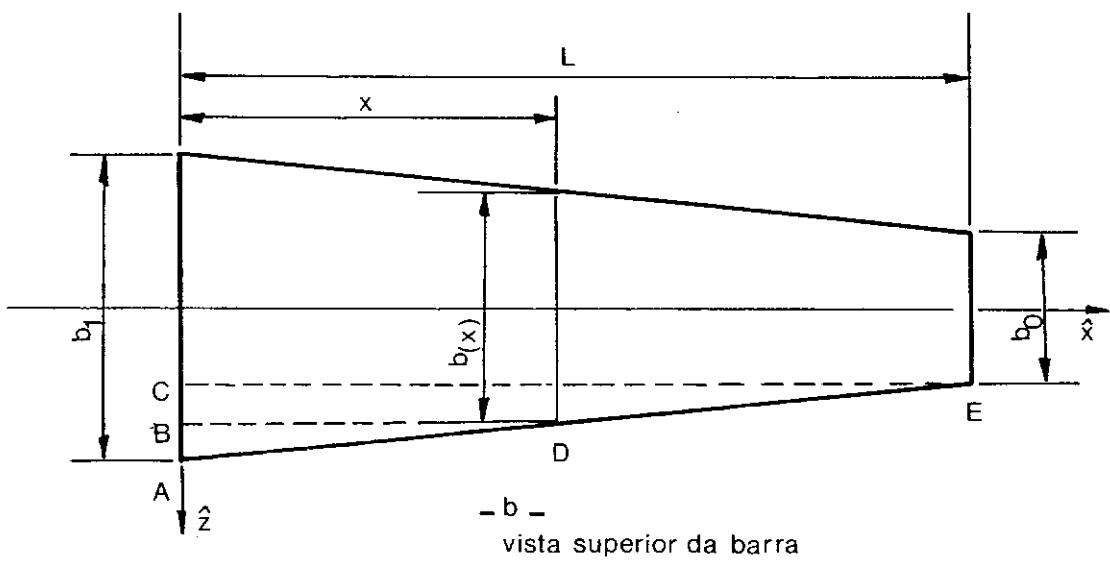
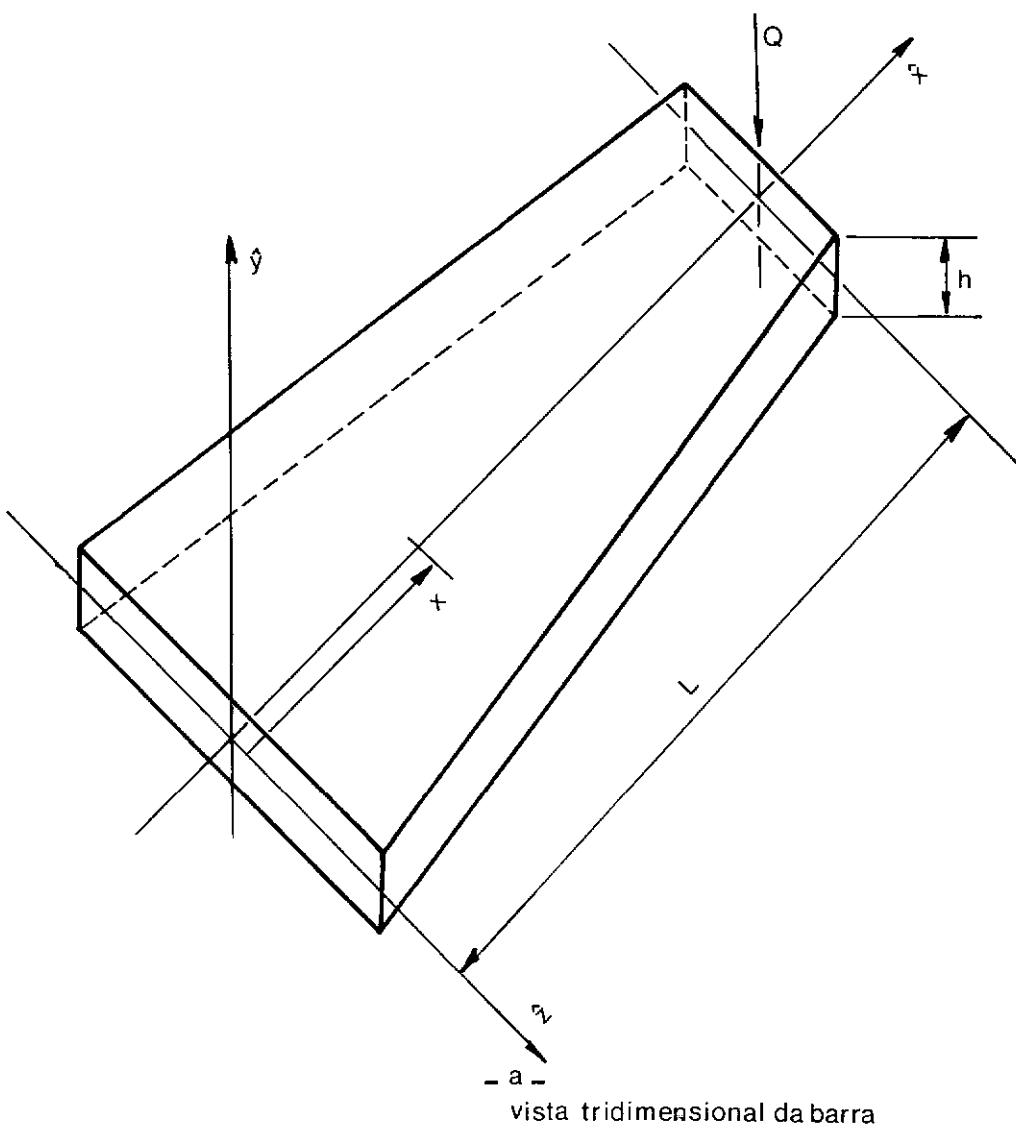
Sendo a convenção usada:

Carga (Q) para baixo: + (positivo).

Deslocamento (v) para cima: + (positivo).

Momento fletor (M) quando traciona as fibras superiores: + (positivo).

Temos para pequenas deformações<sup>33</sup>:



$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_z(x)} \quad (\text{IV.5})$$

Sendo:

$$I_z(x) = \frac{b(x) h^3}{12} \quad (\text{IV.6})$$

Calculamos agora  $I_z(x)$ . Temos a relação entre os triângulos semelhantes  $\triangle A C E$  e  $\triangle A B D$  (Fig. IV.3.b):

$$\frac{\frac{b_1}{2} - \frac{b(x)}{2}}{x} = \frac{\frac{b_1}{2} - \frac{b_0}{2}}{L} \Rightarrow \frac{b_1 - b(x)}{x} = \frac{b_1 - b_0}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b(x) = \frac{x}{L} (b_0 - b_1) + b_1 \quad (\text{IV.7})$$

Substituindo (IV.7) em (IV.6):

$$I_z(x) = \frac{h^3}{12} \frac{x}{L} (b_0 - b_1) + \frac{h^3}{12} b_1 \quad (\text{IV.8})$$

Substituindo (IV.4) e (IV.8) em (IV.5), temos:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Q(L-x)}{E \left[ \frac{h^3 x}{12L} (b_0 - b_1) + \frac{h^3}{12} b_1 \right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{1}{E} \frac{QL}{\frac{xh^3}{12L} (b_0 - b_1) + \frac{b_1 h^3}{12}} + \frac{1}{E} \frac{Qx}{\frac{xh^3}{12L} (b_0 - b_1) + \frac{b_1 h^3}{12}}$$

Fazendo:

$$p = \frac{h^3 (b_0 - b_1)}{12L} ; q = \frac{b_1 h^3}{12}$$

$$r = -\frac{QL}{E} ; s = \frac{Q}{E}$$

Temos:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{r}{px + q} + \frac{sx}{px + q}$$

Integrando temos:

$$\frac{dv}{dx} = r \left[ \frac{1}{p} - \ln (px+q) \right] + s \left[ \frac{x}{p} - \frac{q}{p^2} \ln (px+q) \right] + B \quad (\text{IV.9})$$

Usando as condições de contorno, temos:

$$x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 0$$

Da (VI.9) podemos tirar B:

$$B = (\ln q) \left( \frac{sq}{p^2} - \frac{r}{p} \right) \quad (\text{IV.10})$$

Substituindo (IV.10) em (IV.9) temos:

$$\frac{dv}{dx} = r \left[ \frac{1}{p} - \ln(px+q) \right] + s \left[ \frac{x}{p} - \frac{q}{p^2} \ln(px+q) \right] + (\ln q) \left( \frac{sq}{p^2} - \frac{r}{p} \right)$$

Integrando novamente temos:

$$v(x) = \frac{r}{p} - \frac{sq}{p^2} \left[ \frac{(px+q) \ln(px+q) - (px+q)}{p} \right] + \frac{s}{p} \left( \frac{x^2}{2} \right) +$$

$$+ (\ln q) \left( \frac{sq}{p^2} - \frac{r}{p} \right) x + D \quad (\text{IV.11})$$

Usando as condições de contorno temos:

$$x = 0 \Rightarrow v(0) = 0$$

Da equação (IV.11) podemos tirar D:

$$D = \frac{q}{p} \left( \frac{sq}{p^2} - \frac{r}{p} \right) (\ln q - 1) \quad (\text{IV.12})$$

Substituindo (IV.12) em (IV.11) temos:

$$v(x) = \frac{r}{p} - \frac{sq}{p^2} \left[ \frac{(px+q) \ln(px+q) - (px+q)}{p} \right] + \frac{s}{p} \left( \frac{x^2}{2} \right) +$$

$$+ (\ln q) \left( \frac{sq}{p^2} - \frac{r}{p} \right) x +$$

$$+ \frac{q}{p} \left( \frac{sq}{p^2} - \frac{r}{p} \right) (\ln q - 1) \quad (\text{IV.13})$$

Essa equação (IV.13) nos dá a deflexão (deslocamento) da barra em função da distância (comprimento ( $L$ )) que vai da parte mais larga da barra (base), ou ponto de engaste ( $x$ ), à sua extremidade (parte mais estreita) que é o lugar onde é fixada a sua massa correspondente.

Tendo agora a deflexão (deslocamento ( $v(x)$ ) da barra em função de uma coordenada  $x$  (comprimento da barra), podemos substituir os valores que temos das barras nesta equação (IV.13) obtendo seu deslocamento em função da força aplicada, pois:

$$v(x) = f(Q)$$

Sabemos que para o nosso caso temos:

$$Q = K v(x)$$

Fazendo a força ( $Q$ ) valer 1,0 grama que é a unidade em que colocamos o valor do Módulo Young ( $E$ ), obteremos o valor da constante de mola ( $K$ ) para cada barra calculando o inverso do deslocamento obtido para o seu respectivo comprimento. Temos:

$$Q = K v(x) \Rightarrow 1 = K v(x) = K \frac{1}{v(x)} \left[ \text{g/mm} \right]$$

- Cálculo constante de mola para a barra 1 ( $K_1$ ) -

$$x = L = 100 \text{ mm} \quad E = 22 \cdot 10^6 \text{ g/mm}^2 \quad b_0 = 23,7 \text{ mm}$$

$$Q = 1,0 \text{ g} \quad h = 1,5 \text{ mm} \quad b_1 = 28,3 \text{ mm}$$

$$p = h^3 \frac{(b_0 - b_1)}{12L} = 1,5^3 \frac{(23,7-28,3)}{12 \cdot 100} \Rightarrow p = -1,293750 \cdot 10^{-2}$$

$$q = \frac{b_1 h^3}{12} = \frac{28,3 \cdot 1,5^3}{12} \Rightarrow q = 7,959375$$

$$r = -\frac{QL}{R} = \frac{-1 \cdot 100}{22 \cdot 10^6} \Rightarrow r = -4,545455 \cdot 10^{-6}$$

$$s = \frac{Q}{E} = \frac{1}{22 \cdot 10^6} \Rightarrow s = 4,54545 \cdot 10^{-6}$$

Por parcelas temos:

$$\frac{r}{p} - \frac{sq}{p^2} = -1,8101621 \cdot 10^{-3}$$

$$px + q = 6,665625$$

$$\frac{(px+q) \ln (px+q) - (px+q)}{p} = -462,1313098$$

$$\frac{s}{p} \left( \frac{x^2}{2} \right) = 1,756697 \cdot 10^{-2}$$

$$(ln q) \left( \frac{sq}{p^2} - \frac{r}{p} \right) x = 3,754911 \cdot 10^{-1}$$

$$\frac{q}{p} \left( \frac{sq}{p^2} - \frac{r}{p} \right) (\ln q - 1) = -1,196443$$

Temos então:

$$v(x = 100) = -1,98644 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

O sinal negativo da deflexão ( $v$ ) é devido ao referencial colocado. Para o cálculo da constante de mola ( $K$ ) usamos seu valor absoluto. Temos:

$$K_1 = \frac{1}{|v(x=100)|} = \frac{1}{1,98644 \cdot 10^{-3}}$$

$$K_1 = 503,41 \text{ g/mm} = 4933,45 \text{ N/m}$$

- Cálculo da constante de mola para a barra 2 ( $K_3$ ) -

Dados:

$$x = L = 147 \text{ mm} \quad E = 22 \cdot 10^6 \text{ g/mm}^2 \quad b_0 = 23,7 \text{ mm}$$

$$Q = 1,0 \text{ g} \quad h = 1,5 \text{ mm} \quad b_1 = 29,2 \text{ mm}$$

Cálculos parciais:

$$p = \frac{h^3 (b_0 - b_1)}{12L} = \frac{1,5^3 (23,7 - 29,2)}{12 \cdot 47} \Rightarrow p = -1,052296 \cdot 10^{-2}$$

$$q = \frac{b_1 h^3}{12} = \frac{29,2 \cdot 1,5^3}{12} \Rightarrow q = 8,2125$$

$$r = - \frac{QL}{E} = - \frac{1 \cdot 147}{22 \cdot 10^6} \Rightarrow r = - 6,681818 \cdot 10^{-6}$$

$$s = \frac{Q}{E} = \frac{1}{22 \cdot 10^6} \Rightarrow s = 4,545455 \cdot 10^{-8}$$

Por parcelas temos:

$$\frac{r}{p} - \frac{sq}{p^2} = - 2,73617 \cdot 10^{-3}$$

$$px + q = 6,665625$$

$$\frac{(px+q) \ln (px+q) - (px+q)}{p} = - 568,1694395$$

$$\frac{s}{p} \left( \frac{x^2}{2} \right) = - 4,667068 \cdot 10^{-2}$$

$$\left( \ln q \right) \left( \frac{sq}{p^2} - \frac{r}{p} \right) x = 8,469299 \cdot 10^{-1}$$

Temos então:

$$v(x = 147) = - 6,159427 \cdot 10^{-3}$$

Seguindo o mesmo raciocínio para o cálculo de  $K_1$  temos:

$$K_3 = \frac{1}{|v(x=147)|} = \frac{1}{6,159427 \cdot 10^{-3}}$$

$K_1 = 162,35 \text{ g/mm} = 1591,06 \text{ N/m}$
---

Na parte final deste trabalho, através da comparação entre os programas de computador e os resultados experimentais obtidos, achamos os valores das constantes de mola. Temos a seguinte comparação mostrada nas tabelas abaixo:

B A R R A 1		
CÁLCULO ANALÍTICO	COMPUTADOR (REAL)	ERRO %
$K_1 = 4933,45 \frac{\text{N}}{\text{m}}$	$K_1 = 4370 \frac{\text{N}}{\text{m}}$	12,9

B A R R A 2		
CÁLCULO ANALÍTICO	COMPUTADOR (REAL)	ERRO %
$K_3 = 1591,06 \frac{\text{N}}{\text{m}}$	$K_3 = 1425 \frac{\text{N}}{\text{m}}$	11,7

O resultado obtido é uma boa aproximação do valor real da constante de mola de cada barra. O erro obtido já era es-

perado, uma vez que supusemos para o cálculo uma variação linear da largura em função do comprimento, o que não acontece na realidade. Esse resultado serve, entretanto, como verificação da validade dos valores experimentais obtidos.

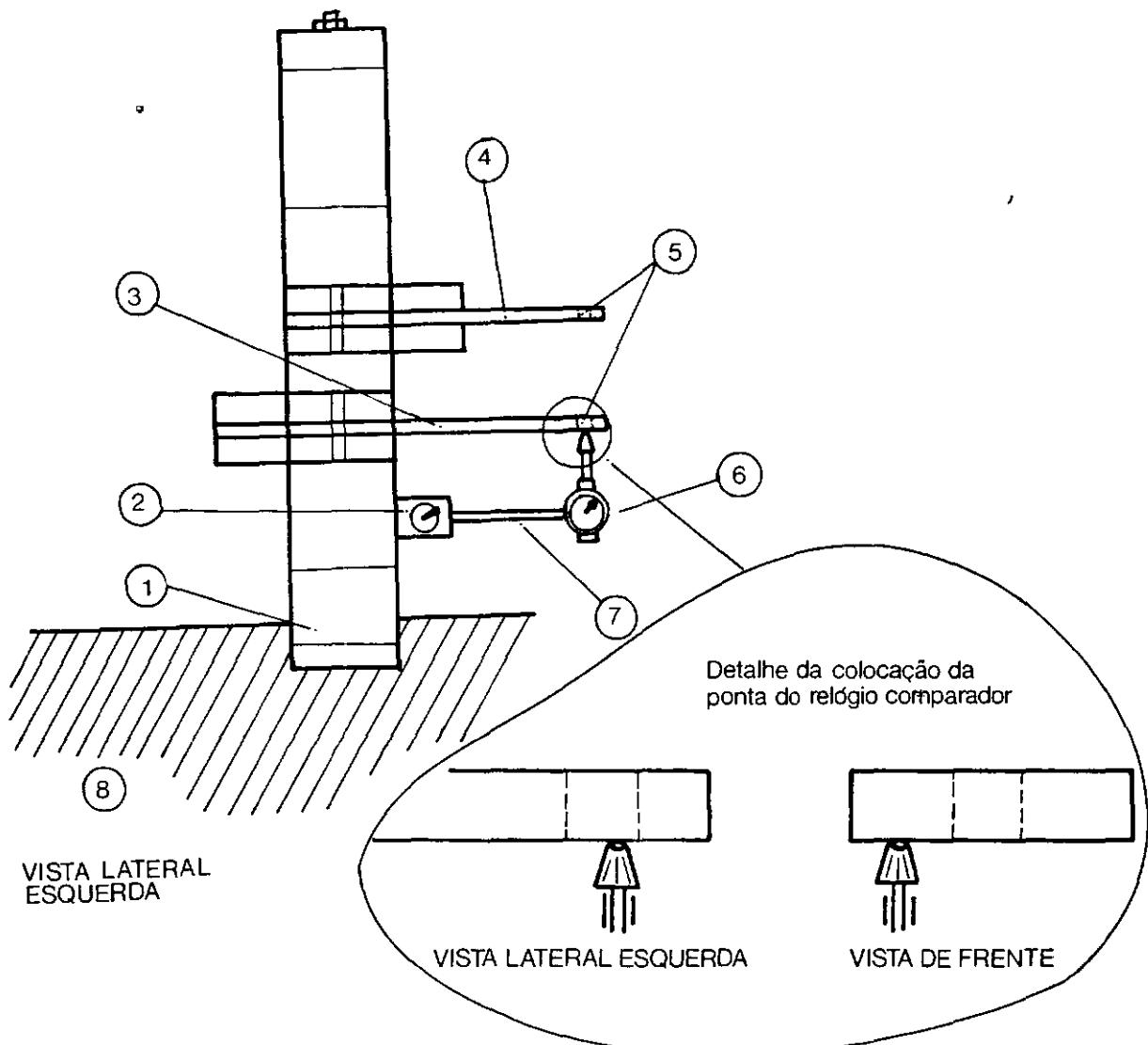
#### IV.1.2. Determinação experimental de $K_1$ e $K_3$

##### IV.1.2.1. Preparação do dispositivo

Para a determinação experimental das constantes de mola das barras 1 e 2, colocamos a base do dispositivo na posição vertical, presa por um dos lados numa bancada como mostra a Fig. IV.4. Tiramos as massas e deixamos apenas a base e as barras. Com o dispositivo nesta posição, fixamos a ele uma base magnética que sustentava, na extremidade de sua haste, um relógio comparador cuja ponta tocava a barra a ser medida, do lado do seu furo (detalhe da Fig. IV.4). Assim, podíamos conseguir medir, da melhor forma possível, o deslocamento sofrido pelo centro de gravidade das massas quando ali estivessem fixadas. O relógio comparador usado era da marca TENSO (HUGGENBERGER-ZURICH), com medida máxima de 5,00 mm e precisão leitura de 0,001 mm (1  $\mu\text{m}$ ).

##### IV.1.2.2. Obtenção dos dados experimentais e cálculos das constantes de mola ( $K$ ) das barras

Após a preparação descrita anteriormente, foram colocados diferentes pesos de valores conhecidos sobre a barra que estava sendo medida, e verificada, através do relógio comparador, a deflexão sofrida por ela.



- (1) Base do dispositivo
- (2) Base magnética
- (3) Barra 2
- (4) Barra 1
- (5) Furo da barra por onde passa o parafuso que fixa as massas nela
- (6) Relógio comparador TENSO
- (7) Haste da base magnética que sustenta o relógio comparador
- (8) Bancada onde está fixo o dispositivo

Foram feitas 4 medidas para cada peso, obtendo, assim, uma região mais provável onde se localiza o valor da verdadeira deflexão da barra em questão.

Esses pesos foram centrados sobre o furo da barra (Fig. IV.4-(5)). Dessa forma, podíamos saber o deslocamento sofrido pelo centro de gravidade das massas em relação à força (peso) sofrida pela barra.

Vale observar que o desenho da Fig. IV.4 mostra a posição do dispositivo para medir a constante de mola da barra 2. Para a barra 1, ele foi colocado em posição inversa, isto é, com esta barra embaixo, facilitando, assim, a disposição do relógio comparador.

A Tab. IV.1 e a Tab. IV.2 dos dados obtidos experimentalmente para a obtenção das constantes de mola das respectivas barra 1 ( $K_1$ ) e 2 ( $K_2$ ) estão nas páginas seguintes.

Notamos, entretanto, que os deslocamentos medidos foram feitos com um relógio comparador cuja ponta está encostada na barra para obtermos a medida desejada, ponta esta que é sustentada por uma mola.

Na verdade, para uma dada barra (1 ou 2), se plotássemos o gráfico Força x Deflexão dos dados da sua tabela teríamos um coeficiente da reta que passa pela origem que é a constante de mola equivalente às duas molas acopladas em paralelo (barra e mola da ponta do relógio comparador).

A princípio, pensamos em calcular a constante de mola da barra através da relação que se encontra na página 58:

Tab. IV.1 - Tabela dos Dados Experimentais para  
Barra 1

Peso (g)	Deslocamento ( $\mu\text{m}$ )
20	43
	42
	43
	42
50	105
	110
	105
	105
70	145
	147
	146
	148
100	215
	214
	210
	213
150	315
	326
	325
	328

Tab. IV.2 - Tabela dos Dados Experimentais para  
Barra 2

Peso (g)	Deslocamento ( $\mu\text{m}$ )
10	55
	55
	55
	55
20	100
	102
	100
	100
50	280
	285
	287
	290
70	420
	416
	420
	418
100	600
	596
	600
	590

$$K_{eq} = K_{rel} + K$$

Sendo:

$K_{eq}$  = constante de mola equivalente dada pelo gráfico Força x Deflexão obtido das Tabs. IV.1 e IV.2;

$K_{rel}$  = constante de mola do relógio comparador;

$K$  = constante de mola real da barra.

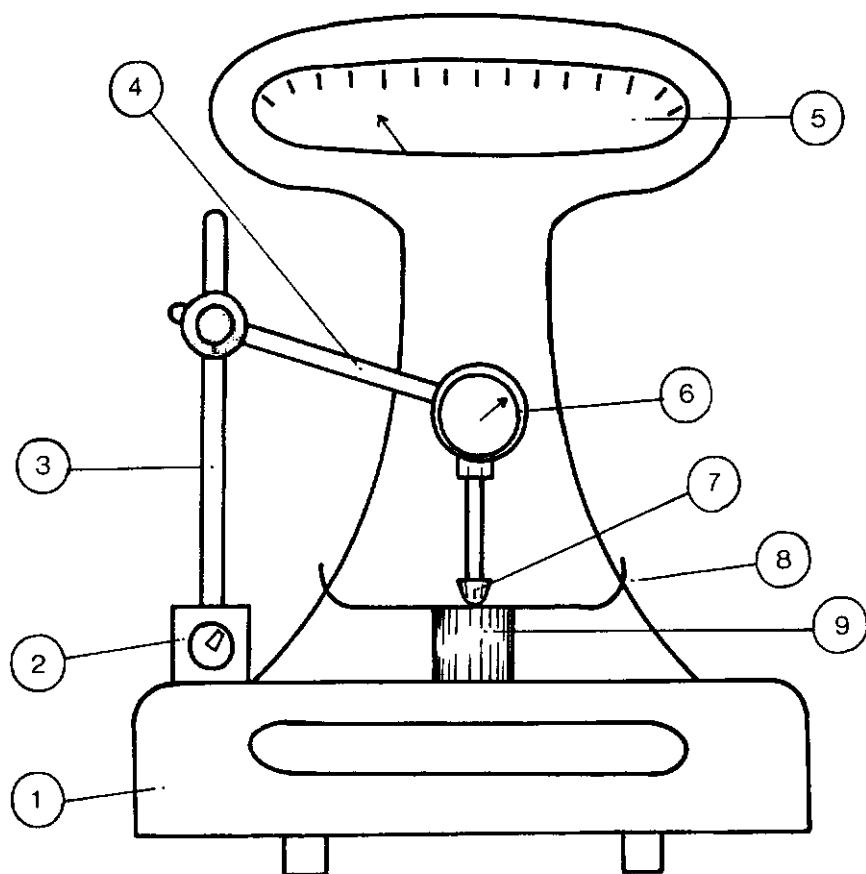
Mas, após a construção do gráfico Força x Deslocamento do relógio comparador, notamos que era necessário outro método para obtermos a constante de mola de cada barra, como mostraremos mais adiante.

#### IV.1.2.2.1. Comentário sobre o cálculo da constante de mola do relógio comparador ( $K_{rel}$ )

Para o cálculo da constante de mola do relógio comparador ( $K_{rel}$ ), foi montado um dispositivo como o da Fig. IV.5.

Uma base magnética (Fig. IV.5 (2)) é fixada no corpo da balança de precisão (Fig. IV.5 (1)). Ela possui uma haste (Fig. IV.5 (3)), que segura outra haste (Fig. IV.5 (4)), e esta, por sua vez, suporta o relógio comparador (Fig. IV.5 (6)) do qual queremos medir a constante de mola.

Sua ponta (Fig. IV.5 (7)) toca o centro do prato da balança (Fig. IV.5 (8)) que é onde se situa o cilindro que transmite a força, que atua no prato, para ser medida (Fig. IV.5 (9)), fazendo, assim, com que ocorra menor erro de precisão.



- (1) Corpo da balança de precisão
- (2) Base magnética fixada no corpo da balança de precisão
- (3) Haste da base magnética
- (4) Haste que suporta o relógio comparador
- (5) Indicador de força fornecida pela balança de precisão
- (6) Relógio comparador
- (7) Ponta do relógio comparador que toca o prato da balança de precisão
- (8) Prato da balança de precisão
- (9) Cilindro que transmite força que atua no prato para balança de precisão

Para a construção do gráfico Força x Deslocamento, o relógio comparador foi colocado em várias posições em relação ao prato da balança, e para cada uma delas foi verificada a força que a ponta do relógio fazia nela através do indicador de força da balança (Fig. IV.5 (5)).

Ora, essa força indicada pela balança é exatamente a força que se faz na ponta do relógio (Fig. IV.5 (7)), que é suportada pela sua mola. Obtendo cada força com o respectivo deslocamento dado pelo relógio podemos construir o gráfico desejado.

Foram feitas duas séries de medidas para podermos obter maior precisão dos dados experimentais. Construímos duas tabelas (Tab. IV.3 e Tab. IV.4) correspondentes a cada série de medidas.

Como notamos pela Fig. IV.6, a relação existente entre a força aplicada na ponta do relógio e seu deslocamento não é toda linear.

Nos deslocamentos iniciais (Fig. IV.7), devido ao atrito interno entre a ponta e o corpo do relógio comparador, precisamos fazer uma força grande para produzir pequenos deslocamentos. A partir de uma força de 48g que produz um deslocamento de 90  $\mu\text{m}$  (Tab. IV.5), a força necessária para produzir o mesmo deslocamento diminui, começando a existir, então, uma faixa que podemos considerar linear em primeira aproximação, e como é nessa faixa que o relógio comparador trabalha com maior precisão e menor atrito interno, foi dentro dela que medimos os deslocamentos das barras para calcular suas constantes de mola.

Tabelas dos Dados Obtidos para Cálculo da Constante  
da Mola do Relógio ( $K_{rel}$ )

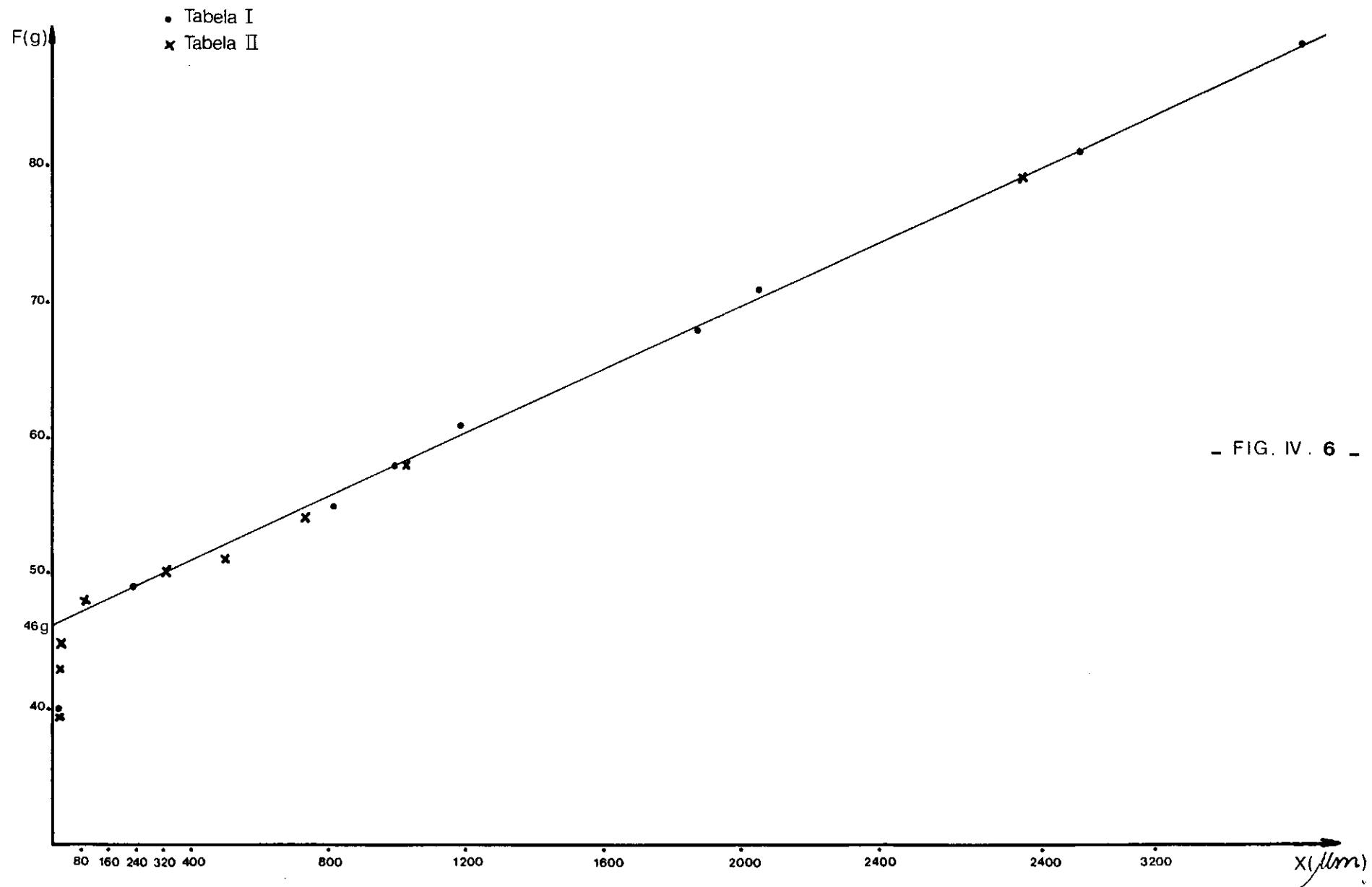
Tab. IV.3

Peso Registrado pela Balança T (g)	Deslocamento Registrado pelo Relógio x ( $\mu\text{m}$ )
40	6
45	30
49	230
55	810
61	1180
68	1870
71	2050
81	2990
89	3630

Tab. IV.4

Peso Registrado pela Balança T (g)	Deslocamento Registrado pelo Relógio x ( $\mu\text{m}$ )
39	3
43	10
45	30
48	90
50	330
51	510
54	730
58	1030
79	2810

Gráfico do Peso Registrado na Balança (F) x Deslocamento Registrado no Relógio (X)



Pela Fig. IV.7, vemos mais claramente que a uma dada força  $T_1$  feita na ponta do relógio corresponde um deslocamento  $x_1$ , a uma força  $T_2$  um deslocamento  $x_2$  e a uma força  $T_3$  um deslocamento  $x_3$ . Temos a relação:

$$\frac{T_1}{x_1} = K_a = \operatorname{tg}\phi_a ; \frac{T_2}{x_2} = K_b = \operatorname{tg}\phi_b ; \frac{T_3}{x_3} = K_c = \operatorname{tg}\phi_c$$

Mas:

$$\phi_a \neq \phi_b \neq \phi_c$$

Logo:

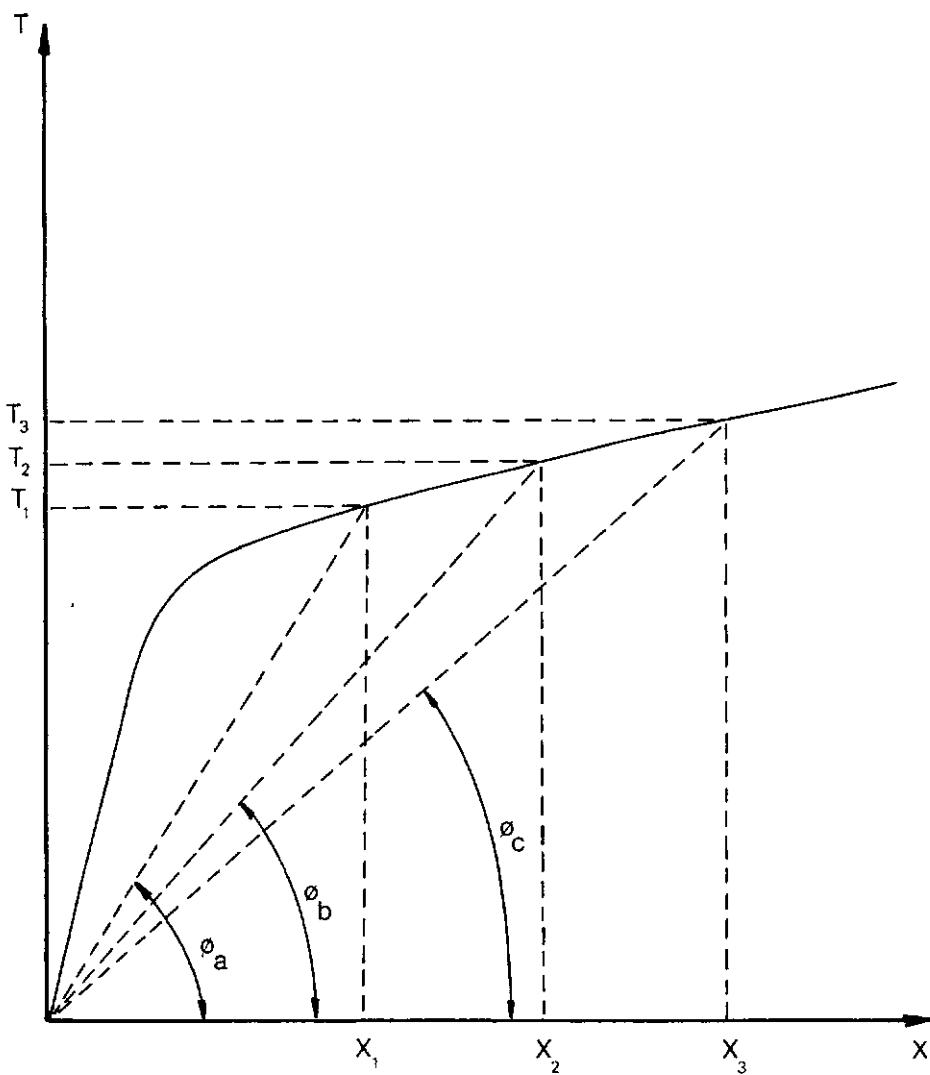
$$\operatorname{tg}\phi_a \neq \operatorname{tg}\phi_b \neq \operatorname{tg}\phi_c \Rightarrow K_a \neq K_b \neq K_c$$

Isto quer dizer que a constante de mola da ponta do relógio varia com o seu deslocamento quando trabalhamos na faixa da relação Força x Deslocamento.

Devido a isso, preferimos não usar o método de obter a constante de mola equivalente como se fossem molas em paralelo, pois dificultaria muito os cálculos.

Uma maneira encontrada para obtermos a constante de mola de uma dada barra foi analisar as forças que atuam nela com o respectivo deslocamento, como mostraremos a seguir.

IV.1.2.2.2. Análise das forças que atuam nas barras 1 e 2 para a obtenção das suas constantes de mola ( $K_1$  e  $K_3$ )



- FIG. IV. 7 -

Quando o dispositivo se encontra na posição em que fizemos as medidas dos deslocamentos sofridos pelas extremidades das barras (Fig. IV.1), elas ficam na posição horizontal se desprezarmos o seu peso. A força da ponta do relógio comparador, entretanto, faz com que a sua extremidade livre levante um pouco, e a barra só voltará à sua posição horizontal, ou sua extremidade livre ficará abaixo dessa posição quando colocarmos certo peso. Temos, assim, duas análises a fazer. Uma é quando o peso colocado ainda não é suficiente para fazer a extremidade livre da barra ficar abaixo da posição horizontal, e a outra é quando ele é suficiente para tal.

### Análise I

- Extremidade livre da barra está acima da sua posição horizontal de equilíbrio (Fig. IV.8.a).
- A Fig. IV.8.a é um desenho esquemático da barra. Sua extremidade livre se encontra em 3 posições:

Posição 1 - Posição em que fica a extremidade livre quando encostamos a ponto do relógio comparador nela. Corresponde a um deslocamento  $x_1$  da posição horizontal.

Posição 2 - Posição em que fica a extremidade livre quando sofre a ação da força da ponta do relógio comparador por este estar encostado nela, e a força do peso. Corresponde a um deslocamento de  $x_3$  de posição horizontal.

Posição 3 - Posição que a barra se encontra na hori

zontal, isto é, as forças que atuam sobre ela são tais que sua extremidade não sofre nenhum deslocamento.

Na Posição 1, temos duas forças agindo em sentidos opositos ( $T_M^1$  e  $T_r^1$ ). Temos que:

$$T_M^1 = Kx_1 \quad (\text{IV.14})$$

$$T_M^1 = T_r^1 \quad (\text{IV.15})$$

Sendo:

$T_M^1$  = força que a barra faz sobre a ponta do relógio comparador quando sofre um deslocamento  $x_1$ ;

$K$  = constante de mola da barra que queremos medir;

$x_1$  = deslocamento para cima da extremidade livre da barra a partir da Posição 3.

Na Posição 2, temos a seguinte relação:

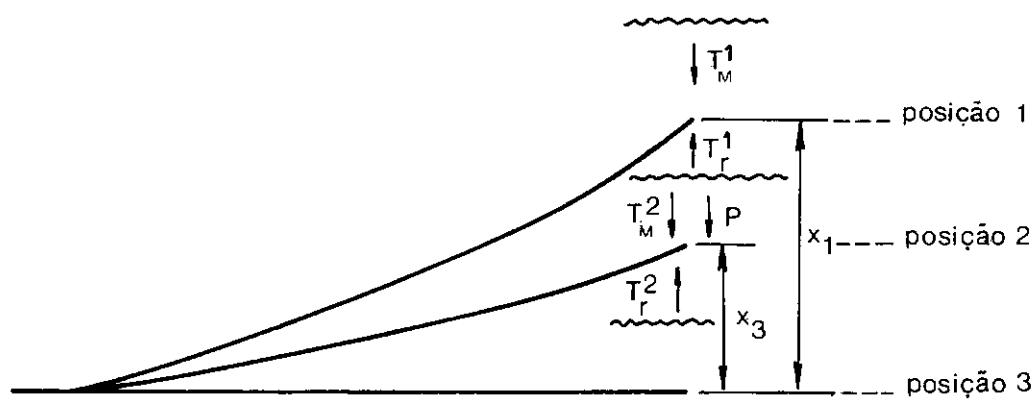
$$T_M^2 = Kx_3 \quad (\text{IV.16})$$

Sendo:

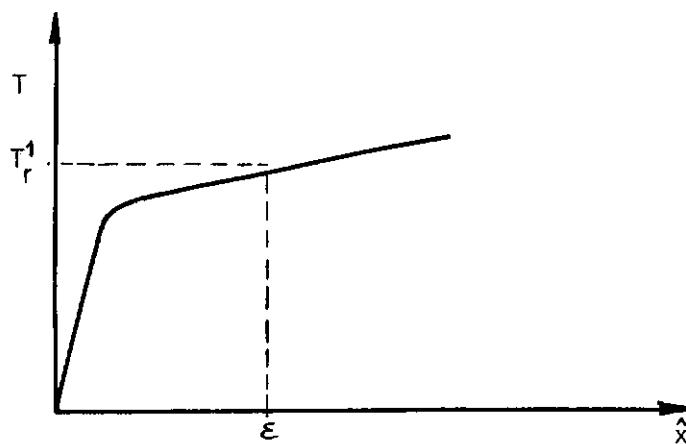
$T_M^2$  = força que a barra faz sobre a ponta do relógio comparador quando ela sofre um deslocamento  $x_3$ ;

$K$  = constante de mola da barra que queremos medir;

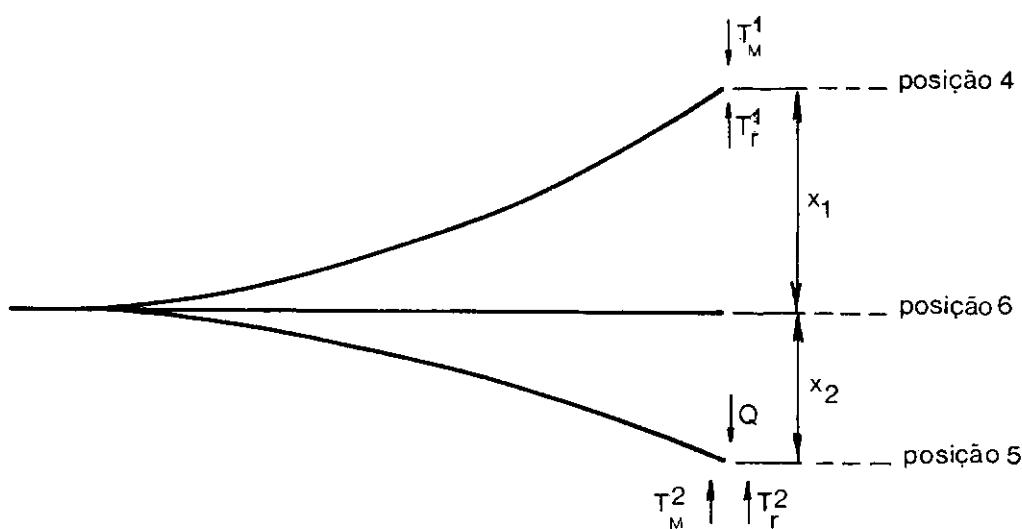
$x_3$  = deslocamento da extremidade livre da barra a partir da Posição 3.



- a -



- b -



- c -

- FIG IV . 8 -

O relógio comparador nos fornece a medida ( $\bar{x}$ ) que é a medida que temos nas tabelas, e que vale:

$$\bar{x} = x_1 - x_3 \quad (\text{IV.17})$$

Nesta Posição 2, temos a relação de forças abaixo (Fig. IV.8.a):

$$T_M^2 + G = T_r^2 \quad (\text{IV.18})$$

Sendo:

$G$  = força do peso colocado;

$T_r^2$  = força feita pela ponta do relógio sobre a extremidade livre da barra quando esta se encontra na Posição 2 = força que sofre a ponta do relógio quando a extremidade livre se encontra na Posição 2;

$T_M^2$  = já está definida no cálculo anterior.

Temos também:

$$T_r^2 = T_r(x) \quad (\text{IV.19})$$

Onde:

$$x = \varepsilon + x_1 - x_3 = \varepsilon + \bar{x}$$

Sendo:

$\varepsilon$  = deslocamento sofrido pela ponta do relógio quando sujeita a uma força  $T_r^1$ , ou seja, a extremidade livre se encontra na Posição 1 (Fig. IV.8.b).

Através de (IV.14) e (IV.16) temos as relações:

$$K = \frac{T_M^1}{x_1} \quad (IV.20)$$

$$K = \frac{T_M^2}{x_3} \quad (IV.21)$$

Igualando (IV.20) a (IV.21) temos:

$$\frac{T_M^1}{x_1} = \frac{T_M^2}{x_3} \quad (IV.22)$$

Substituindo (IV.17) e (IV.15) em (IV.22) temos:

$$\frac{\frac{T_r^1}{x + x_3}}{x_3} = \frac{\frac{T_M^2}{x}}{x_3} \Rightarrow T_r^1 x_3 = T_M^2 (\bar{x} + x_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_r^1 \cdot x_3 = T_M^2 \cdot \bar{x} + T_M^2 \cdot x_3 \Rightarrow T_r^1 \cdot x_3 - T_M^2 \cdot x_3 = T_M^2 \cdot \bar{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3 (T_r^1 - T_M^2) = T_M^2 \cdot \bar{x} \Rightarrow x_3 = \frac{T_M^2 \cdot \bar{x}}{T_r^1 - T_M^2} \quad (IV.23)$$

Substituindo (IV.23) em (IV.16) podemos obter a constante de mola ( $K$ ) da barra considerada.

### Análise II

- Extremidade livre da barra está abaixo da sua posição horizontal de equilíbrio (Fig. IV.8.c).

A Fig. IV.8.c é um desenho esquemático da barra. Sua extremidade livre se encontra em 3 posições a saber:

Posição 4 - Posição 1 (Fig. IV.8.a);

Posição 5 - Posição em que fica a extremidade livre quando sofre a ação da força da ponta do relógio comparador e a força do peso. Corresponde a um deslocamento  $x_2$  da posição horizontal;

Posição 6 - Posição 3 (Fig. IV.8.a).

Na Posição 4 temos as mesmas relações da Posição 1:

$$T_M^1 = Kx_1 \quad (\text{IV.24})$$

$$T_M^1 = T_R^1 \quad (\text{IV.25})$$

Na Posição 5 temos a seguinte relação:

$$T_M^2 = Kx_2 \quad (\text{IV.26})$$

Sendo:

$T_M^2$  = força que a barra faz sobre o peso quando sofre um deslocamento  $x_2$  para baixo;

$K$  = constante de mola da barra que queremos medir;

$x_2$  = deslocamento para baixo da extremidade livre da barra a partir da Posição 6.

O relógio comparador nos fornece a média ( $\bar{x}$ ) que é a

medida que temos nas tabelas, e que vale:

$$\bar{x} = x_1 + x_2 \quad (\text{IV.27})$$

Nesta Posição 5 temos a relação de forças (Fig. IV.8.c).

$$G = T_M^2 + T_r^2 \quad (\text{IV.28})$$

Sendo:

$$T_r^2 = T_r(x) \quad (\text{IV.29})$$

Onde:

$$x = \varepsilon + x_1 + x_2 = \varepsilon + \bar{x}$$

$\varepsilon$  = definido na Análise 1.

Através de (IV.24) e (IV.26) temos a relação:

$$K = \frac{T_M^1}{x_1} \quad (\text{IV.30})$$

$$K = \frac{T_M^2}{x_2} \quad (\text{IV.31})$$

Igualando (IV.30) a (IV.31) temos:

$$\frac{T_M^1}{x_1} = \frac{T_M^2}{x_2} \quad (\text{IV.32})$$

Substituindo (IV.25) e (IV.27) em (IV.32) temos:

$$\begin{aligned} \frac{T_r^1}{\bar{x} - x_2} &= \frac{T_M^2}{x_2} \Rightarrow T_r^1 \cdot x_2 = T_M^2 (\bar{x} - x_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow T_r^1 \cdot x_2 &= T_M^2 \cdot \bar{x} - T_M^2 \cdot x_2 \Rightarrow T_r^1 \cdot x_2 + T_M^2 \cdot x_2 = T_M^2 \cdot \bar{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_2 (T_r^1 + T_M^2) &= T_M^2 \cdot \bar{x} \Rightarrow x_2 = \frac{T_M^2 \cdot \bar{x}}{T_r^1 + T_M^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

Substituindo (IV.33) em (IV.26) podemos obter a constante de mola ( $K$ ) da barra considerada.

Usaremos as fórmulas (IV.23) e (IV.33) para a obtenção da constante de mola de cada barra. Teremos que fazer o cálculo, então, para cada deslocamento obtido com cada peso colocado.

Notamos, entretanto, que para esses cálculos precisamos ter  $T_r^1$  e a equação da reta que passa pela faixa linear do gráfico da força que atua na ponta do relógio e seu deslocamento. Temos as fórmulas<sup>34</sup>:

$$m = \frac{N \sum q_i q_o - (\sum q_i) (\sum q_o)}{N \sum q_i^2 - (\sum q_i)^2}$$

Para obtenção desta equação, usamos o método dos mínimos quadrados que é o mais usado para dados experimentais<sup>34</sup>.

Através desse método, calculamos o coeficiente angular e linear da reta que mais se aproxima dos pontos em que a relação Força x Deslocamento é linear, e seus respectivos erros.

Para isso, construímos a Tab. IV.5 que contém somente

os pontos da Tab. IV.3 e da Tab. IV.4 que se localizam nesta faixa linear do gráfico.

Tab. IV.5

Força Registrada pela Balança T (g)	Deslocamento Registrado pelo Relógio x ( $\mu\text{m}$ )
48	90
49	230
50	330
51	510
54	730
55	810
58	1030
61	1180
68	1870
71	2050
79	2810
81	2990
89	3630

Os dados dessa Tab. IV.5 são todos aqueles das Tabs. IV.3 e IV.4 que pertencem à faixa linear do gráfico Força (T) x Deslocamento (x).

$$b = \frac{(\sum q_o)(\sum q_i^2) - (\sum q_i q_o)(\sum q_i)}{N \sum q_i^2 - (\sum q_i)^2}$$

Onde:

m = coeficiente angular da reta;

$b$  = coeficiente linear da reta;

$q_i$  = deslocamentos registrados pelo relógio comparador ( $x$ );

$q_o$  = força registrada pela balança ( $T$ );

$N$  = número total de pontos.

Para o nosso caso temos:

$$q_i q_o = 1333,75 \text{ g} \cdot \text{mm}$$

$$q_i = 18,26 \text{ mm}$$

$$q_o = 814 \text{ g}$$

$$q_i^2 = 41,785 \text{ mm}^2$$

Logo:

$$m = 11,8 \text{ g/mm}$$

$$b = 46 \text{ g}$$

Por<sup>3 4</sup> temos:

$$\text{Variância de } m: S_m^2 = \frac{N S_{q_o}^2}{N \sum q_i^2 - (\sum q_i)^2}$$

$$\text{Variância de } q_o: S_{q_o}^2 = \frac{1}{N} (m q_i + b - q_o)^2$$

Temos:

$$S_{q_0}^2 = 0,35935 \text{ g}^2 \Rightarrow S_{q_0} = 0,59946 \text{ g}$$

$$S_m^2 = 0,022269 \text{ g}^2/\text{mm}^2 \Rightarrow S_m = 0,149229 \text{ g/mm}$$

Assumindo que os dados obtidos da experiência se aproximam de uma distribuição de Gauss, podemos dizer que se mais dados nessa faixa fossem tomados, o valor do coeficiente angular da reta ( $m$ ) tem 99,7% de probabilidade de cair na faixa compreendida entre  $-3S_m < m < +3S_m$  [34]. Temos então:

$$m = 11,8 \pm 0,45 \text{ g/mm}$$

Por<sup>34</sup> temos:

$$\text{Variância de } b: S_b^2 = \frac{S_{q_0}^2 \cdot \sum q_i^2}{N \sum q_i^2 - (\sum q_i)^2}$$

$$S_b^2 = 0,071579 \text{ g}^2 \Rightarrow S_b = 0,2675 \text{ g}$$

Usando o mesmo raciocínio usado para  $m$  temos:

$$b = 46 \pm 0,8 \text{ g}$$

Através dessa equação da reta que melhor se encaixa na faixa linear do gráfico Força ( $T$ ) x Deslocamento ( $x$ ), podemos fazer os cálculos para a obtenção da constante de mola das baras.

A força inicial ( $T_r^1$ ) feita na ponta do relógio quando

encosta na barra 1 corresponde a um deslocamento de 1000  $\mu\text{m}$  = 1,000 mm, enquanto que a força feita na barra 2 corresponde a um deslocamento de 0,500 mm. Isto acontece porque a barra 1 é mais rígida que a barra 2, podendo então sofrer uma força maior, e, mesmo assim, ter um deslocamento menor que o da outra, não prejudicando, assim, a precisão das medidas.

As fórmulas<sup>35</sup> usadas para a propagação de erro durante os cálculos matemáticos foram:

$$(x \pm \sigma_x) \pm (y \pm \sigma_y) = (x \pm y) \pm \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad (\text{IV.34})$$

$$(x \pm \sigma_x)(y \pm \sigma_y) = xy \pm xy \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}} \quad (\text{IV.35})$$

$$\frac{(x \pm \sigma_x)}{(y \pm \sigma_y)} = \frac{x}{y} \pm \frac{x}{y} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}} \quad (\text{IV.36})$$

Mostramos, através da Tab. IV.6 e da Tab. IV.7, os resultados das constantes de mola de cada barra ( $K_1$  e  $K_3$ ) obtidos dos dados fornecidos por cada peso colocado.

Para os cálculos, supomos que a soma dos erros cometidos na leitura do relógio comparador, do peso desprezado da barra e do peso colocado valesse, ao todo, 5%. Daí, para todo o começo dos cálculos, foi suposto um erro do deslocamento com esse valor, e através das fórmulas de propagação de erro (IV.34), (IV.35) e (IV.36), obtivemos o erro final que deveria haver o valor obtido.

Tab. IV.6

B A R R A 1 - $K_1\text{FINAL} = 4370 \text{ N/m}$				
COLUNA I	COLUNA II	COLUNA III	COLUNA IV	COLUNA V
Peso (g)	$K_1\text{MÉDIA}$ (N/m)	Erro (N/m)	Erro (%) = $= \left  \frac{\text{Coluna III}}{\text{Coluna II}} \right $	Erro (%) = $= \left  \frac{K_1\text{MÉDIA} - K_1\text{FINAL}}{K_1\text{FINAL}} \right $
20	4416,92	$\pm 375,26$	8,5	1,07
50	4440,87	$\pm 641,58$	14,4	1,62
70	4459,00	$\pm 618,40$	13,9	2,04
100	4470,49	$\pm 279,50$	6,2	2,30
150	4442,67	$\pm 233,47$	5,2	1,66

Tab. IV.7

B A R R A 2 - $K_3\text{FINAL} = 1425 \text{ N/m}$				
COLUNA I	COLUNA II	COLUNA III	COLUNA IV	COLUNA V
Peso	$K_3\text{MÉDIA}$ (N/m)	Erro (N/m)	Erro (%) = $= \left  \frac{\text{Coluna III}}{\text{Coluna II}} \right $	Erro (%) = $= \left  \frac{K_3\text{MÉDIA} - K_3\text{FINAL}}{K_3\text{FINAL}} \right $
10	1667,92	$\pm 229,21$	13,7	17,05
20	1821,92	$\pm 160,46$	8,8	27,90
50	1611,79	$\pm 406,97$	25,3	13,11
70	1518,42	$\pm 164,72$	10,9	6,56
100	1530,74	$\pm 94,90$	6,2	7,42

Notamos, entretanto, que os erros percentuais (Tab. IV.6) (COLUNA V) entre o valor obtido experimentalmente da constante de mola da barra 1 ( $K_1\text{MÉDIA}$  - COLUNA II) e seu valor real ( $K_1\text{FINAL}$ ) é bastante pequeno, podendo até ser considerado desprezível. Enquanto que os erros percentuais (Tab. IV.7) para a barra 2 são bem maiores. Isto acontece pois a barra 1 é bem mais rígida que a barra 2 fletindo menos quando a colocamos na posição de medida (Fig. IV.4). O que significa que a soma dos erros cometidos para a obtenção dos valores da barra 2 é superior a 5%, que foi o que supusemos, talvez devido ao seu peso, que é sensível, e à leitura do relógio comparador cuja mola tem uma rigidez mais próxima da desta barra.

#### IV.1.2.3. Determinação da constante de mola magnética ( $K_{\text{mag}} = K_2$ )

O desenho esquemático que representa o dispositivo experimental é o da Fig. II.1, composto de 2 massas, 3 molas, 3 amortecedores, como vimos no Capítulo II, que desenvolve as equações que regem o sistema.

As molas 1 e 3 são facilmente representadas no dispositivo experimental através das barras 1 e 2 que sustentam as respectivas massas. A mola 2 (Fig. II.1), entretanto, que faz o acoplamento entre as duas massas, fica difícil de ser montada na prática devido à sua localização no dispositivo. Sendo assim, a melhor maneira encontrada de haver algo que se comportasse como mola entre as 2 massas, foi colocar os dois imãs dispostos, de tal forma que eles se repelissem, agindo, então, como se existisse uma mola comprimida entre as 2 massas, provocando uma força de repulsão entre elas.

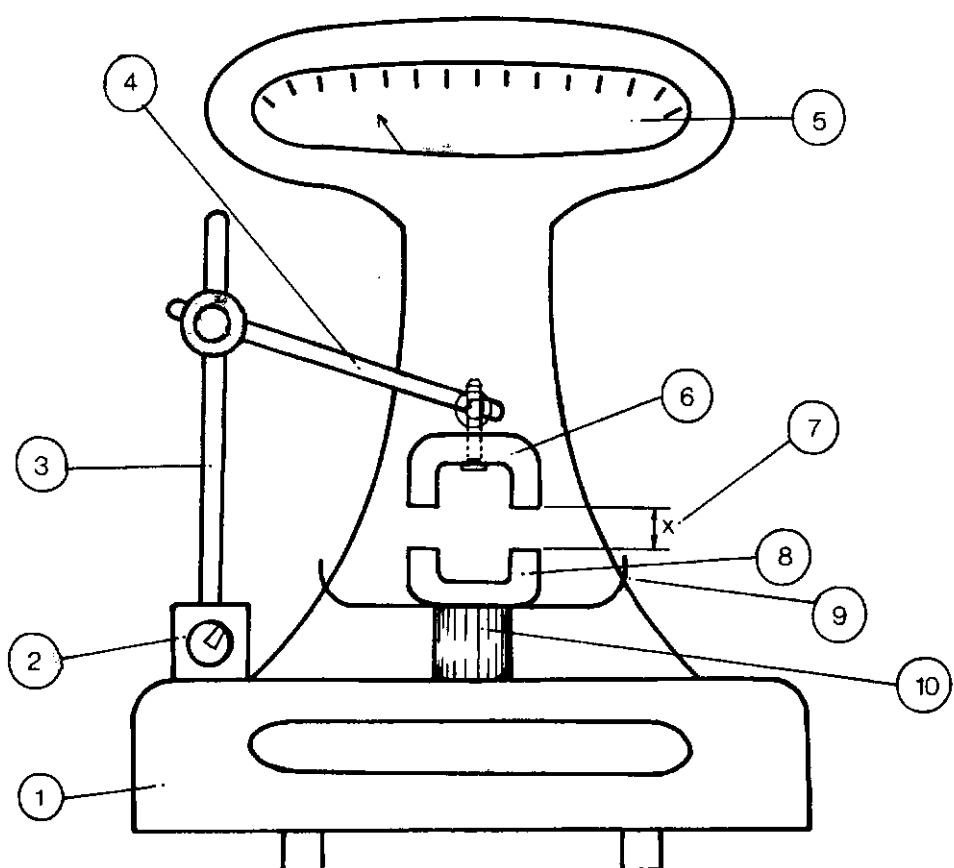
Sabemos, entretanto, que o comportamento da força magnética em função da distância do corpo em que ela atua não é linear<sup>36</sup>. Porém, durante todo o desenvolvimento das equações que regem o movimento do dispositivo é suposto que existem 3 molas, de comportamento linear, com as respectivas constantes de mola  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ . Temos, então, que obter da mola de acoplamento o valor de sua constante de mola ( $K_2$ ). Para isso, calibramos a força magnética que atua de um imã para outro, para diferentes distâncias entre eles, obtendo um gráfico Força x Distância.

Tiramos desse gráfico a "constante de mola ( $K_2$ )" do campo magnético existente, pela reta que obtemos através de uma primeira aproximação dos pontos que se situam em torno de 7,00 mm, que é a distância existente entre os imãs durante a experiência.

Fazendo isso, estamos supondo que para pequenas variações de distâncias entre os imãs, em torno de 7,00 mm, a força que atua varia linearmente com a distância - é o campo magnético existente entre os imãs atuando como uma mola comprimida.

A calibração dessa força magnética em relação à distância entre os imãs, para o cálculo de  $K_2$ , foi feita da seguinte forma.

- Fixamos ao corpo de uma balança de precisão (Fig. IV.9 (1)) uma base magnética (Fig. IV.9 (2)). Sua haste (Fig. IV.9 (3)) sustenta outra haste (Fig. IV.9 (4)) que suporta o imã que regula a distância (Fig. IV.3 (6)) entre os dois imãs para essa calibração, no caso, o imã 2.



- 1 Corpo da balança de precisão
- 2 Base magnética fixa em 1
- 3 Haste da base magnética
- 4 Haste que suporta o ímã que regula a distância(x)
- 5 Indicador de força fornecida pela balança
- 6 Ímã que regula a distância (x)
- 7 Distância(x)entre os dois imãs
- 8 Ímã que reage à força de 6 fazendo essa força no prato da balança na direção do cilindro (10) (FORÇA DE REPULSÃO)
- 9 Prato da balança
- 10 Cilindro que transmite força feita no prato para indicador 5

Vale notar que para esta calibração, qualquer dos dois imãs (1 ou 2) pode estar tanto sobre o prato da balança como seguro pela haste (4) da Fig. IV.9, uma vez que a força que age em cada um deles é a mesma - a criada pelo campo magnético existente.

Como as distâncias que interessam ao nosso caso são aquelas que estão em torno de 7,00 mm, começamos, primeiramente, com os imãs distando entre si 8,88 mm e fomos diminuindo essa distância, passo a passo, até 6,4 mm, observando a força de repulsão entre os imãs que indicava a balança correspondente a uma distância entre eles.

Para medir cada uma dessas distâncias, foi usado um pequeno pedaço de acrílico que as regulava através de sua largura. Daí termos começado de uma distância maior para uma menor entre os imãs. Pois assim, bastava desbastar um pouco o acrílico padrão que regulava as distâncias para obtermos nova largura, e assim poder regular nova distância inferior à anterior.

Para certificarmos das medidas, foi feita nova calibração a partir também de 8,8 mm até 6,5 mm. As distâncias intermediárias foram diferentes devido a dificuldades de sua regulação na balança.

Devemos dizer também, que para calibrador de distância foi usado o acrílico, pois verificamos que qualquer material de boa condutividade elétrica ou magnética (cobre, latão, aço, etc) influía na força de repulsão entre os imãs, prejudicando as medidas, talvez por diminuirem a resistência ao fluxo magnético que o ar possui.

Obtivemos, então, duas tabelas e delas foi construído o gráfico Força de Repulsão dos Imãs ( $\bar{Q}$ ) x Distância entre eles (x) (Fig. IV.10).

Tab. IV.8

Tab. IV.9

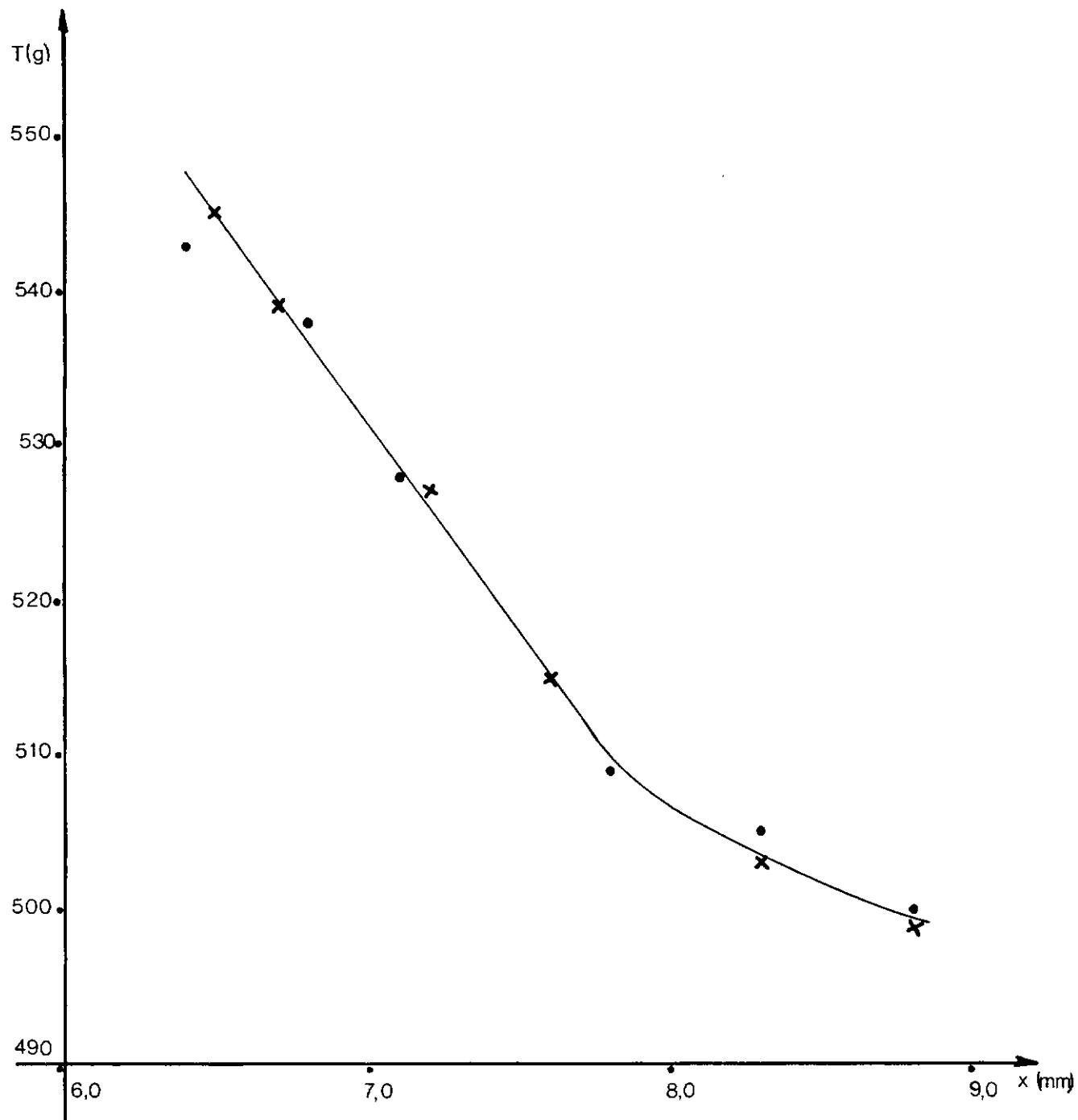
Distância (x) entre os dois imãs (mm)	Força ( $\bar{Q}$ ) registrada pela balan- ça (g)	Distância (x) entre os dois imãs (mm)	Força ( $\bar{Q}$ ) registrada pela balan- ça (g)
8,8	500	8,8	499
8,3	505	8,3	503
7,8	509	7,6	515
7,1	528	7,2	527
6,8	538	6,7	539
6,4	543	6,5	545

Os dados obtidos pelas duas tabelas foram colocados no mesmo gráfico uma vez que correspondia a distâncias diferentes entre os imãs.

Pelo gráfico notamos que podemos ajustar uma linha reta nos pontos que possuem distâncias (x) em torno de 7,0 mm, que é a distância entre os imãs. Através dos 8 pontos mais próxi mos de 7,0 mm, e que são os que fazem a faixa linear, calcula mos, pelo método dos mínimos quadrados, o coeficiente angular da reta que pode passar por esses pontos e seu erro, obtendo, assim, o intervalo em que oscila o valor de  $K_2$ .

- Cálculo algébrico para determinação da "constante de mola magnética ( $K_{MAG} = K_2$ )" -

Para este cálculo, fizemos a Tab. IV.10 que contém os



● . pontos da tabela IV. 3

✗ . pontos da tabela IV. 4

Faixa Linear em 1: Aproximação: 6,4 mm — 7,8 mm

oito pontos mais próximos de 7,0 mm tirados da Tab. IV.8 e da Tab. IV.9, e que compõem, em primeira aproximação, a faixa linear da relação Força ( $\bar{Q}$ ) x Deslocamento (x).

Tab. IV.10

Distância (x) entre os dois imãs (mm)	Força ( $\bar{Q}$ ) registrada pela balança (g)
7,8	509
7,6	515
7,2	527
7,1	528
6,8	538
6,7	539
6,5	545
6,4	543

Usamos aqui as mesmas fórmulas<sup>3 4</sup> usadas para o cálculo da constante de mola do relógio.

Temos então:

$$m = \frac{N\sum q_i q_o - (\sum q_i)(\sum q_o)}{N\sum q_i^2 - (\sum q_i)^2} = K_2$$

$$b = \frac{(\sum q_o)(\sum q_i^2) - (\sum q_i q_o)(\sum q_i)}{N\sum q_i^2 - (\sum q_i)^2}$$

Para este caso temos:

$$m = \text{coeficiente angular da reta} = K_2;$$

$b$  = coeficiente linear da reta;

$q_i$  = distância ( $x$ ) entre os imãs;

$q_o$  = força ( $\bar{Q}$ ) de repulsão entre os imãs registrada pela balança;

$N$  = número total de pontos = 8.

O coeficiente linear ( $b$ ) aqui calculado seria apenas para fazer outros cálculos, como, por exemplo, o do erro cometido quando ajustamos a reta aos pontos, pois, para nós, ele não tem interesse, inclusive porque a força ( $\bar{Q}$ ) registrada pela balança é a soma do peso do imã com a força de repulsão magnética. Mas como estamos interessados em saber apenas "a constante de mola magnética" ( $K_2$ ), que é o coeficiente angular  $m$ , o peso do imã não influenciará no seu cálculo, pois ele apenas translada a reta sem mudar sua inclinação.

Calculando temos:

$$\sum q_i q_o = 29714 \text{ g} \cdot \text{mm}$$

$$\sum q_o = 4244,0 \text{ g}$$

$$\sum q_i = 56,1 \text{ mm}$$

$$\sum q_i^2 = 395,2 \text{ mm}^2$$

Logo:

$$m = K_2 = 253,98 \text{ N/m} = 25,86 \text{ g/mm}$$

$$b = 711,8 \text{ g}$$

Temos também as fórmulas<sup>3 4</sup>:

$$\text{Variância de } m: S_m^2 = \frac{N S_{q_o}^2}{N \sum q_i^2 - (\sum q_i)^2}$$

$$\text{Variância de } q_o: S_{q_o}^2 = \frac{1}{N} \sum (mq_i + b - q_o)^2$$

Temos:

$$S_q^2 = 2,52 \text{ g}^2$$

$$S_m^2 = 1,41 \text{ g}^2/\text{mm}^2 \Rightarrow S_m = 1,19 \text{ g/mm}$$

Seguindo o mesmo raciocínio usado para o cálculo da constante de mola do relógio comparador temos:

$$m = K_2 = 25,86 \pm 3 \cdot 1,19 \text{ g/mm}$$

$$= 25,86 \cdot 9,8 \pm 3 \cdot 1,19 \cdot 9,8 - \frac{N}{m}$$

$$\Rightarrow K_2 = 253,4 \pm 34,9 - \frac{N}{m}$$

$$\Rightarrow 218,5 - \frac{N}{m} < K_2 < 288,3 - \frac{N}{m}$$

#### IV.2. Massas (M)

Através do Programa I, notamos que o valor das massas

que vibram influência muito nos valores das freqüências onde ocorrem os seus picos de amplitude. Sendo assim, tentamos calcular-as da forma mais precisa possível.

A obtenção do valor dessas massas para o programa de computador não é tão simples quanto pode parecer, ou seja, somente pesar os imãs presos às barras. O esquema suposto é o da Fig. II.1.a, em que as massas são presas a molas consideradas sem massa, com apenas as suas constantes mola.

Entretanto, no dispositivo montado, isso não acontece, pois as barras, que fazem o papel de molas, são notadamente dotadas de massa. Podemos esquematizar essas massas e barras do nosso dispositivo segundo a Fig. IV.11.

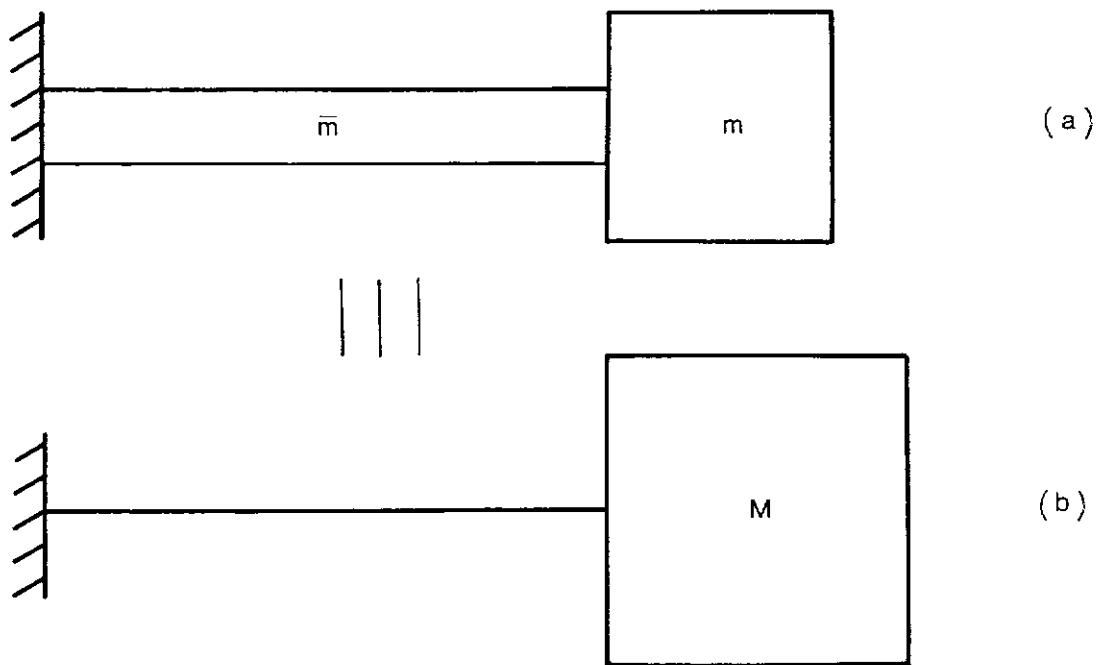
Dessa forma quando a massa  $M$  vibra, as partículas da barra próximas a essa massa vibram praticamente com a mesma amplitude dela, enquanto que as partículas perto da parte engastada quase não vibram. A massa total que está vibrando, na verdade, não é só a massa  $M$ , mas também parte da massa  $\bar{m}$ <sup>36</sup>.

Pelo método de Rayleigh, através do cálculo da energia potencial e cinética de uma massa que vibra quando presa à extremidade livre de uma barra em balanço, podemos obter uma fórmula de uma massa "efetiva", como se fosse a massa total que vibra engastada a uma barra sem massa<sup>36</sup> (Fig. IV.11.b) :

$$M = m + 0,23 \bar{m} \quad (\text{IV.37})$$

Sendo:

$M$  = massa efetiva;



- (a) Desenho esquemático da massa presa à barra do dispositivo para o cálculo da massa efetiva
- (b) Desenho esquemático da massa efetiva presa à barra considerada sem massa que age como mola

Sendo:  $M = m + 0.23 \bar{m}$

$m$  = massa presa à barra que age como mola;

$\bar{m}$  = massa da barra que age como mola.

Como vemos, devemos adicionar à massa  $m$  uma fração da massa da barra ( $0,23 \bar{m}$ ) para melhor representar a massa que vibra quando supomos a massa  $m$  presa a uma barra sem massa, como é o nosso esquema (Fig. II.1) usado para os programas de computador.

#### IV.2.1. Obtenção da massa l ( $M_1$ )

Para a obtenção da massa efetiva l ( $M_1$ ), a fórmula (IV.37) fica:

$$M_1 = m_1 + 0,23 \bar{m}_1$$

A massa ( $m_1$ ) pode ser considerada como a soma de 3 outras:

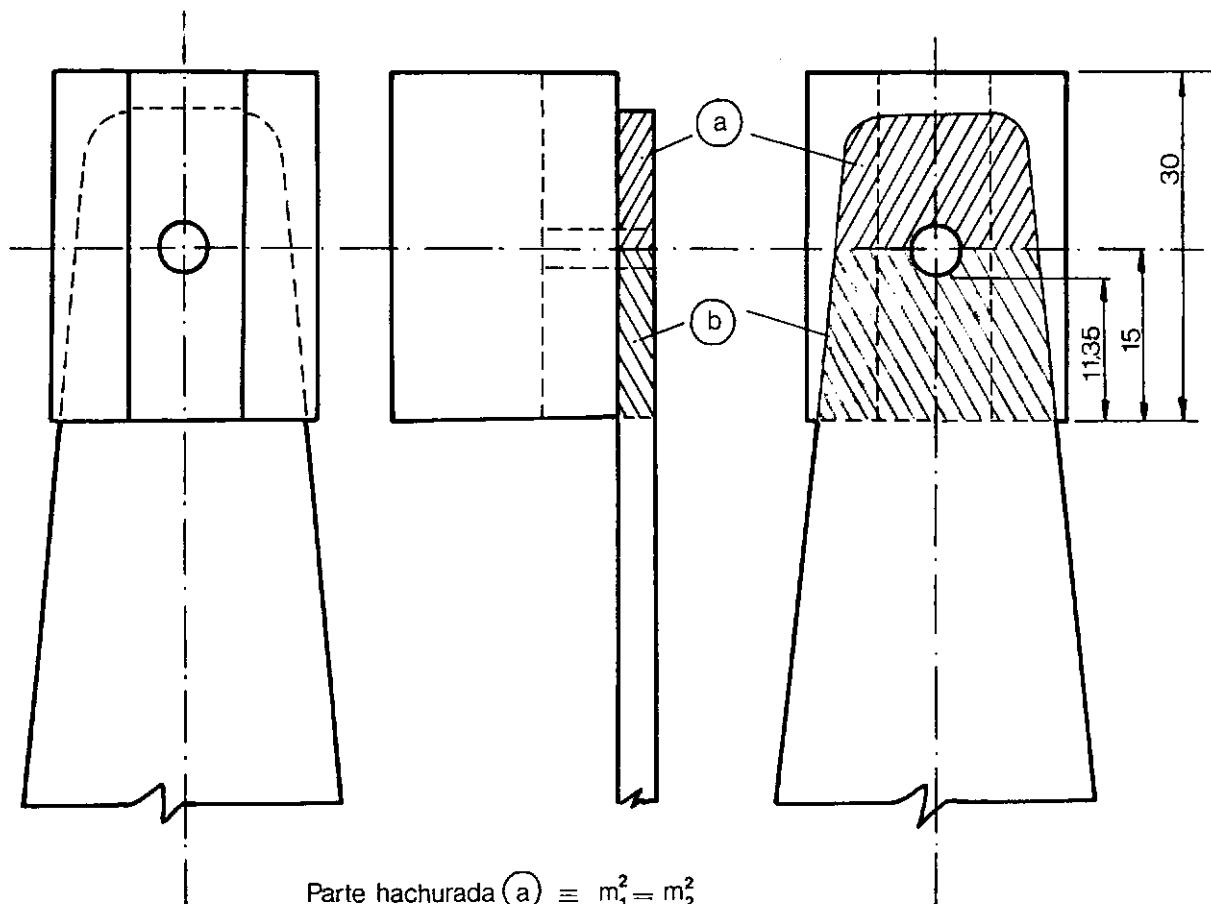
$$m_1 = m_1^1 + m_1^2 + m_1^3$$

Sendo:

$m_1^1$  = soma da massa do imã junto com a bobina, com o parafuso, porca e arruelas;

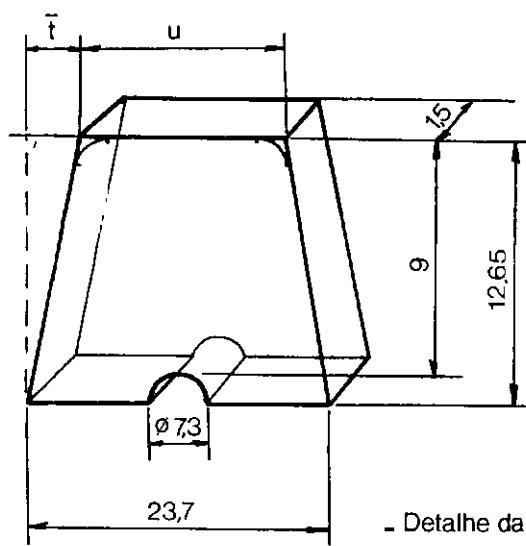
$m_1^2$  = massa da parte da barra acima do seu furo por onde passa o parafuso que fixa nela o imã (Fig. IV.12 - Área hachureada (a));

$m_1^3$  = massa da parte da barra que vai da linha que di



$$\begin{aligned} \text{Parte hachurada } (a) &\equiv m_1^2 = m_2^2 \\ \text{Parte hachurada } (b) &\equiv m_1^3 = m_2^3 \end{aligned}$$

- A parte hachurada (a) da barra corresponde à massa  $m_1^2$  e a massa  $m_1^3$



- Detalhe da parte hachurada (a)

vide o furo ao meio até o limite inferior do imã (Fig. IV.12 - Área hachureada (b)).

A massa  $m_1^1$  pode ser facilmente obtida através da sua pesagem numa balança de precisão. Ela vale:

$$m_1^1 = 205 \text{ g}$$

Para obtermos a massa  $m_1^2$  precisamos de uma elaboração maior. Essa massa corresponde à parte hachureada (a) da Fig. IV.12, e para a obtenção do seu valor fazemos os cálculos seguindo os desenhos da Fig. IV.13. Como vemos, pela Fig. IV.13 - detalhe b, aproximamos os lados arredondados da parte superior da barra para cantos vivos, facilitando, assim, os cálculos da sua massa.

Temos então, pelos triângulos semelhantes  $\triangle CDE$  e  $\triangle CBA$ , a relação:

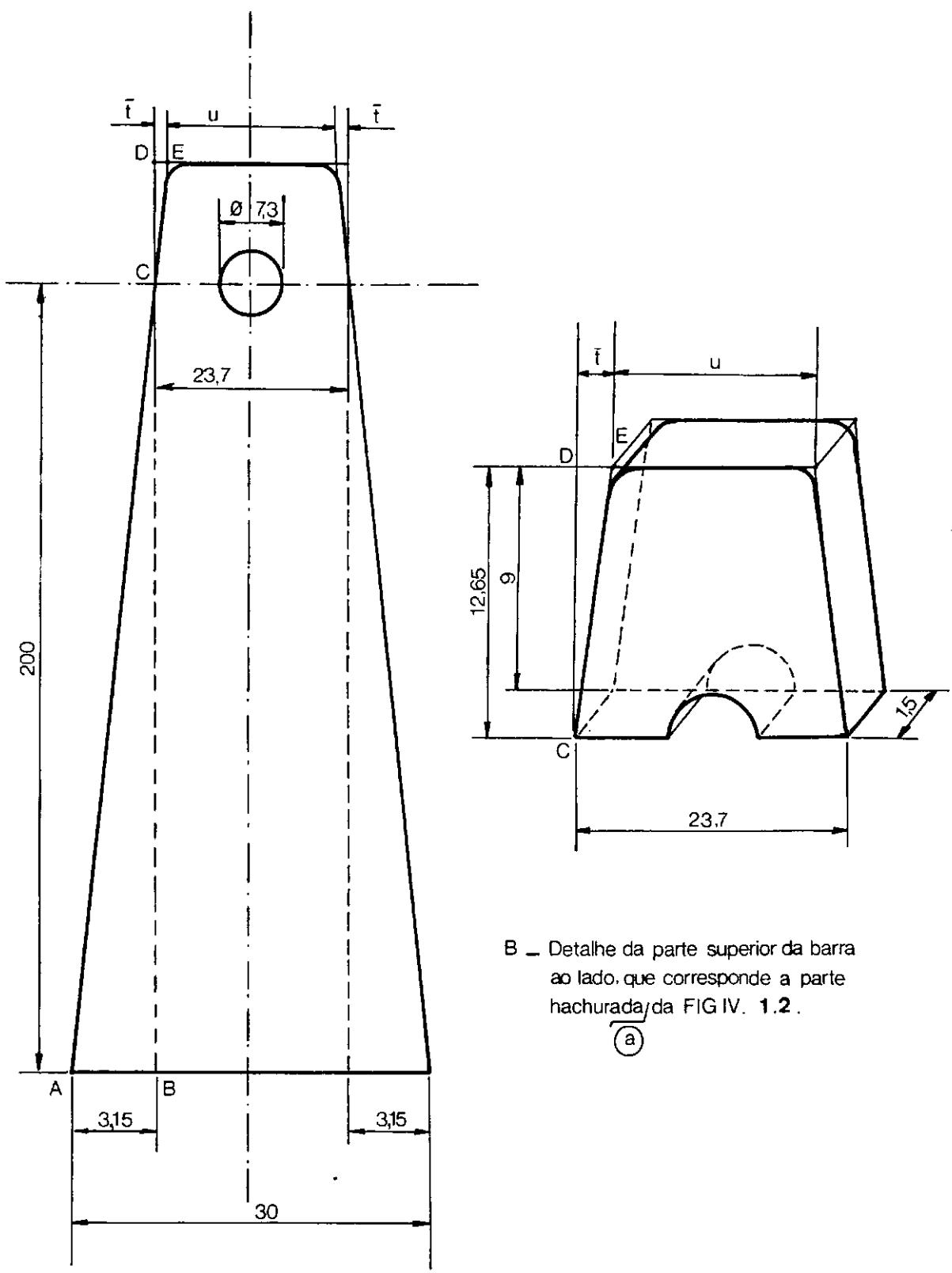
$$\frac{3,15}{200} = \frac{\bar{t}}{12,65} \Rightarrow \bar{t} = \frac{3,15 \cdot 12,65}{200} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\bar{t} = 0,20 \text{ mm}}}$$

$$u = 23,7 - 2\bar{t} = 23,7 - 2 \cdot 0,2 \Rightarrow u = 23,3 \text{ mm}$$

Para a obtenção do volume ( $V_1$ ) dessa parte superior da barra sem contar com o furo da base, nós o dividimos em três outros como mostra a Fig. IV.14.a. Temos então:

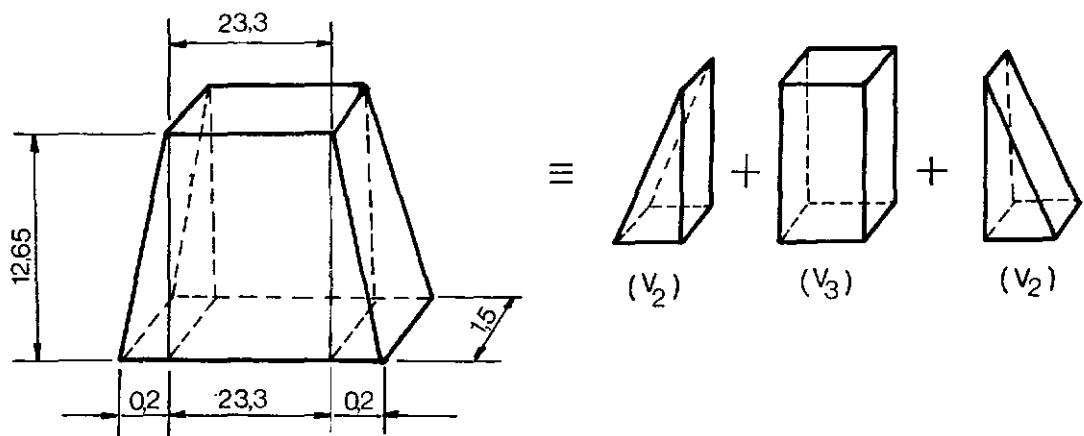
$$V_1 = 2V_2 + V_3$$



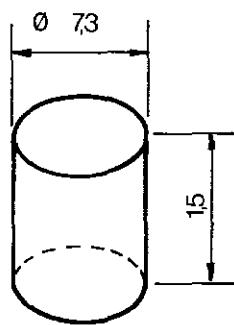
B - Detalhe da parte superior da barra  
ao lado, que corresponde a parte  
hachurada da FIG IV. 1.2.

(a)

A - Toda a barra



- a -



- B - Desenho para o cálculo do furo da barra

- FIG IV. 14 -

$$(\text{face triangular}) V_2 = \frac{0,2 \cdot 12,65 \cdot 1,5}{2} \Rightarrow V_2 = 1,8975 \text{ mm}^3$$

$$(\text{face retangular}) V_3 = 23,3 \cdot 12,65 \cdot 1,5 \Rightarrow V_3 = 442,1175 \text{ mm}^3$$

$$V_1 = 2 \cdot 1,8975 + 442,1175$$

$$V_1 = 445,9125 \text{ mm}^3$$

Temos que subtrair deste volume ( $V_1$ ) metade do volume do furo ( $V_4$ ) para obtermos o volume real da parte superior da barra que está desenhada na Fig. IV.13.b.

Seguindo pela Fig. IV.14.b temos que o volume do furo ( $V_4$ ):

$$V_4 = \frac{\pi (7,3)^2 \cdot 1,5}{4} \Rightarrow V_4 = 62,7808 \text{ mm}^3$$

O volume total da parte superior da barra ( $V_s$ ) (Fig. IV.13.b) será:

$$V_s = V_1 - \frac{V_4}{2} \Rightarrow V_s = 445,9125 - \frac{62,7808}{2}$$

$$V_s = 414,5221 \text{ mm}^3$$

Vamos calcular agora o volume total da barra para que possamos obter a sua massa específica. Como já temos o volume da parte superior do furo, basta calcular o volume que fica do

meio do furo para baixo ( $V_i$ ).

Agindo de forma semelhante ao cálculo da parte superior, vamos dividir esta parte em três outras (Fig. IV.15).

Temos:

$$V_i = 2 V_5 + V_6$$

$$(\text{face triangular}) V_5 = \frac{3,15 \cdot 200 \cdot 1,5}{2} \Rightarrow V_5 = 472,50 \text{ mm}^3$$

$$(\text{face retangular}) V_6 = 23,7 \cdot 200 \cdot 1,5 - \frac{62,7808}{2}$$

$$V_6 = 7078,6096 \text{ mm}^3$$

Logo:

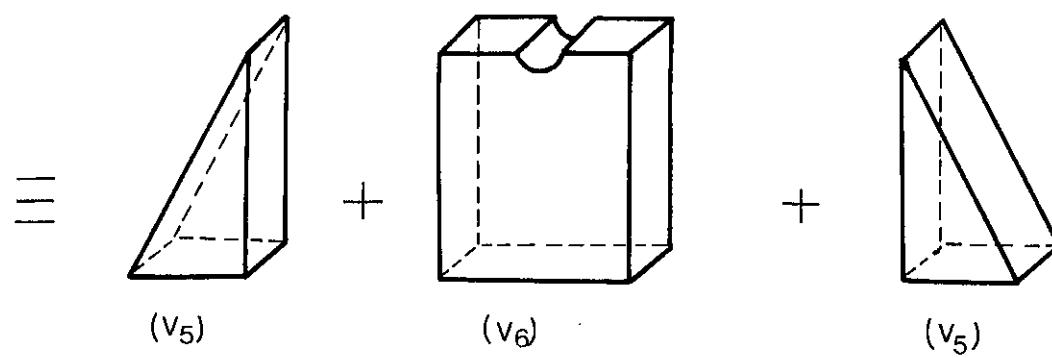
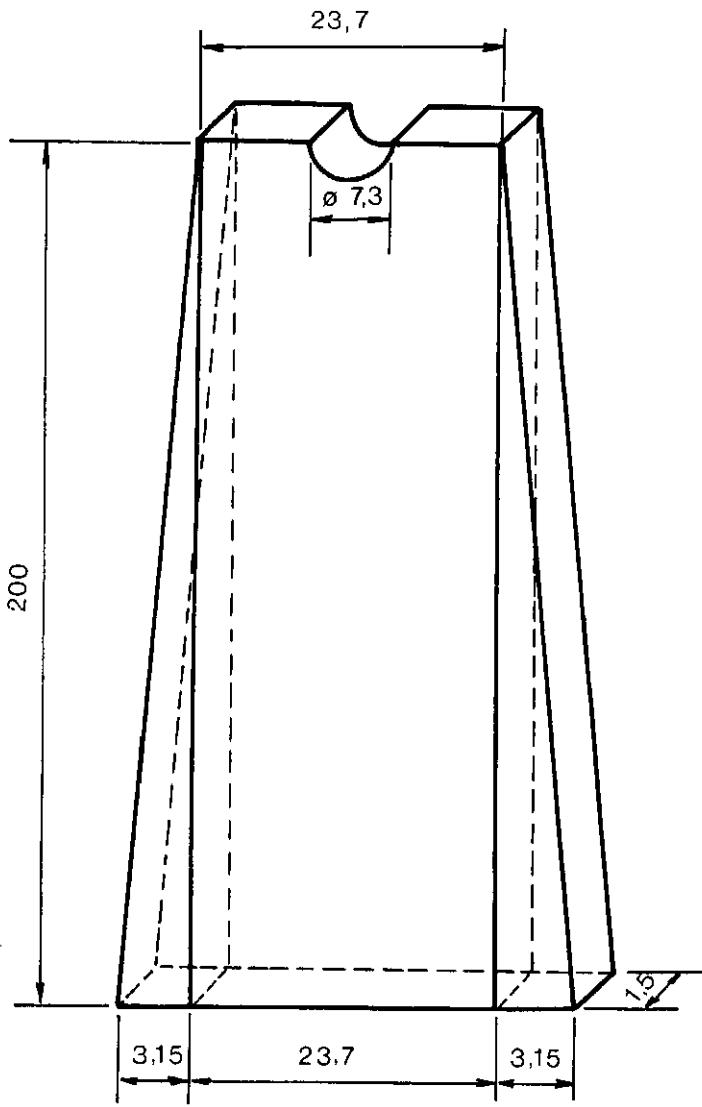
$$V_i = 2 \cdot 472,50 + 7078,6096$$

$$V_i = 8023,6096 \text{ mm}^3$$

O volume total da barra corresponderá à soma dos volumes da parte inferior ( $V_i$ ) com o da parte superior ( $V_s$ ) da barra. Temos então:

$$V_t = V_s + V_i = 414,5221 + 8023,6096$$

$$V_t = 8438,1317 \text{ mm}$$



- FIG IV .15 -

Como sabemos que a barra é um pouco mais larga na metade do seu comprimento, e por isto esse não diminui linearmente com a sua largura como foi considerado nestes cálculos, e que não tem sentido colocarmos uma precisão de quatro casas decimais, podemos aproximar esses valores para:

$$V_t = 8440 \text{ mm}^3$$

$$V_s = 415 \text{ mm}^3$$

$$V_i = 8025 \text{ mm}^3$$

Colocando, agora, toda a barra numa balança de precisão, obtemos seu peso em Kgf que corresponde à sua massa em Kg ( $m_b$ ) no sistema MKS:

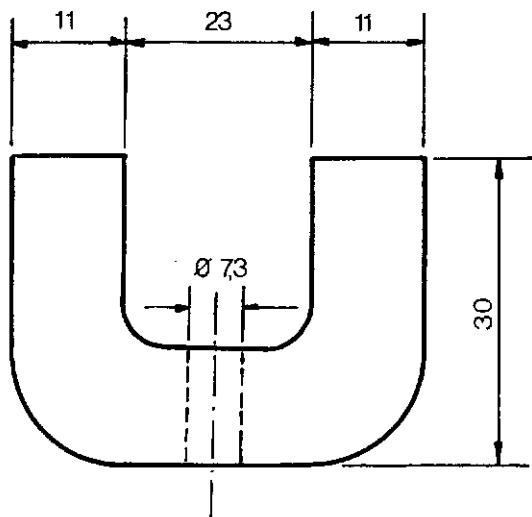
$$m_b = 66 \text{ g}$$

Sua massa específica ( $m_{be}$ ) será então:

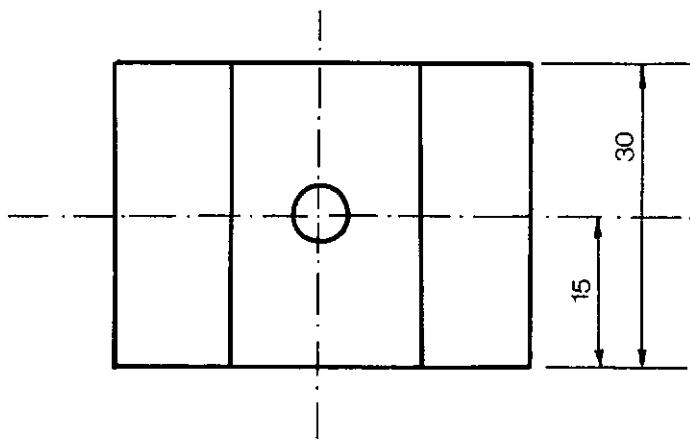
$$m_{be} = \frac{66}{8440} = 0,007820 \text{ Kg/mm}^3$$

Podemos obter, finalmente, a massa da parte superior da barra ( $m_1^2$ ):

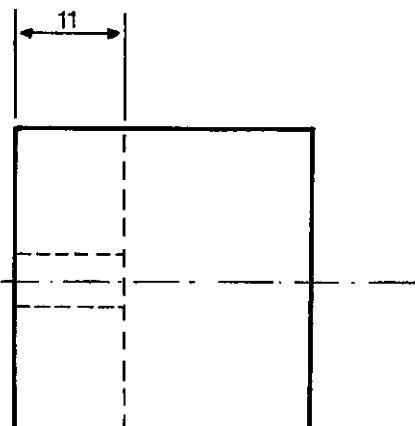
O cálculo da massa  $m_1^3$  também requer certo trabalho. Como mostra a Fig. IV.16, a distância que vai do centro do imã à sua borda inferior vale 15 mm, que é quanto deve valer a altura da barra para o cálculo de  $m_1^3$ .



Vista inferior



Vista de frente



Vista lateral esquerda

Para calcular essa massa, vamos primeiro achar uma fórmula que nos dá o volume da parte inferior da barra (parte abaixo da linha média do furo) em função da sua altura.

Seguindo a Fig. IV.17, vemos que foi colocado o referencial  $\vec{x}$  só no volume  $V_8$  ( $=V_5$ ) da direita, pois ele é igual ao da esquerda, tornando desnecessário colocar nos dois.

Temos então que para uma dada altura  $h$  e distância  $x$ , o volume ( $V_8$ ) vale:

$$V_8 = \frac{h \cdot x \cdot 1,5}{2} \text{ mm}^3 \quad (\text{IV.38})$$

Pelos triângulos semelhantes  $\widehat{\triangle ABC}$  e  $\widehat{\triangle ADE}$  temos a relação abaixo:

$$\frac{x}{3,15} = \frac{h}{200} \Rightarrow x = \frac{3,15 \cdot h}{200} \quad (\text{IV.38.a})$$

Substituindo (IV.38.a) em (IV.38) temos:

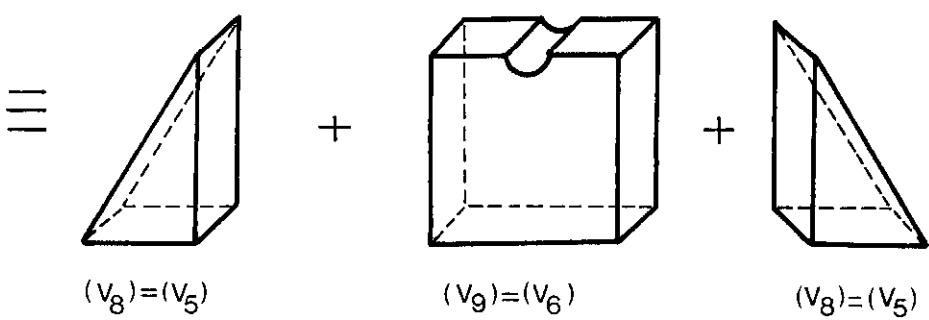
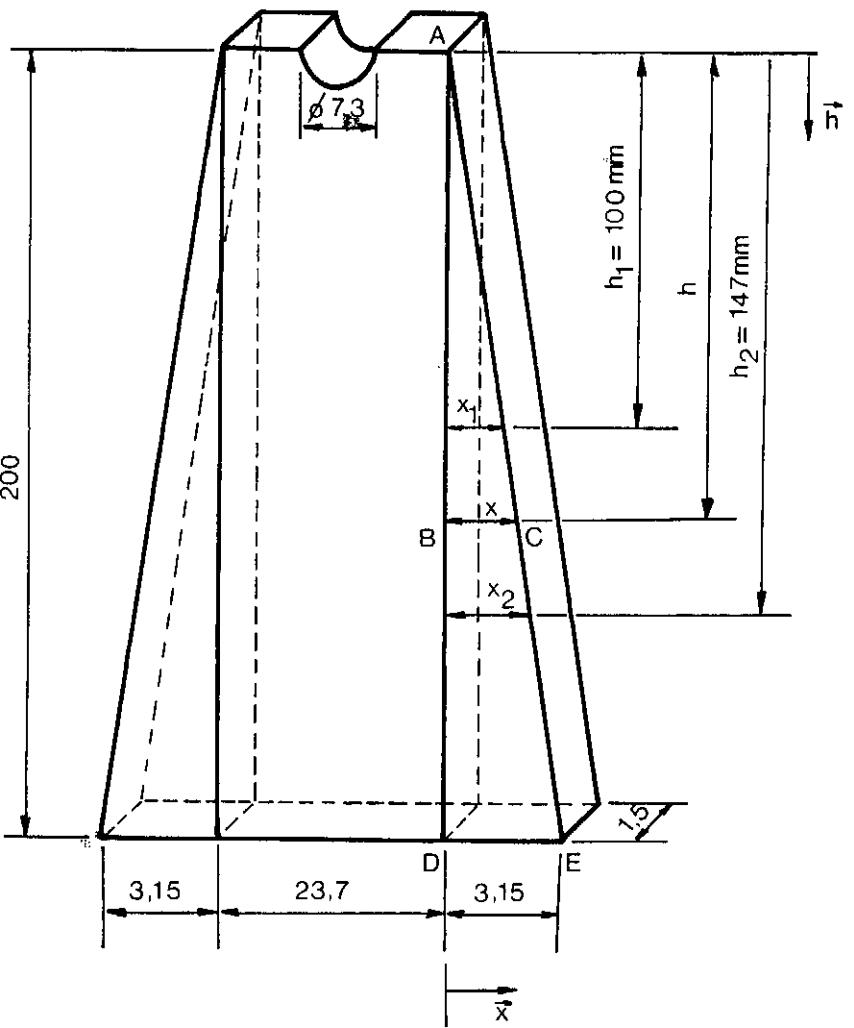
$$V_8 = \frac{h \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{3,15 \cdot h}{200}$$

$$V_8 = 0,00905625 \cdot h^2 \text{ mm}^3$$

Temos também a seguinte relação para o volume ( $V_9$ ):

$$V_9 = 23,7 \cdot h \cdot 1,5 - \frac{V_4}{2}$$

O volume  $V_4$  já temos de cálculos anteriores:



- FIG IV .17 -

$$\frac{V_4}{2} = 31,3904 = \text{metade do volume do furo}$$

$$V_9 = 35,55 \cdot h = 31,3904 \text{ mm}^3 \quad (\text{IV.39})$$

O volume total da parte inferior ( $V_{ti}$ ) em função da altura (h) será:

$$V_{ti} = 2 V_8 + V_9$$

$$V_{ti} = 2 \cdot 0,00905625 \cdot h^2 + 35,55 \cdot h - 31,3904 \quad (\text{IV.40})$$

A unidade da altura (h) é milímetro. O volume que tem a massa  $m_1^3$  será o valor de  $V_{ti}$  para  $h = 15 \text{ mm}$ :

$$V_{ti} = 0,0181125 \cdot 15^2 + 35,55 \cdot 15 - 31,3904$$

$$V_{ti} = 506 \text{ mm}^3$$

A massa  $m_1^3$  será:

$$m_1^3 = \frac{66}{8440} \cdot 506$$

A massa  $m_1$  será:

$$m_1 = 205 + 3,25 + 3,96$$

$$m_1 = 212,21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = 212 \text{ g}$$

Precisamos calcular agora a massa da barra 1 ( $\bar{m}_1$ ). Essa massa ( $\bar{m}$ ) será a massa vinda do volume  $V_{ti}$  subtraída da massa  $m_1^3$ , pois esta foi considerada como pertencente à massa  $m_1$  (e não à massa  $\bar{m}$ ).

Usaremos a fórmula (IV.40) que nos fornece o volume total da parte inferior ( $V_{ti}$ ) até à altura (h) de 100 mm, que é a altura da barra 1.

Temos:

$$V_{ti} = 0,0181125 \cdot h^2 + 35,55 \cdot h - 31,3904$$

$$h = 100 \text{ mm}$$

$$V_{ti} (h = 100) = 0,0181125 \cdot 100^2 + 35,55 \cdot 100 - 31,3904$$

$$V_{ti} (h = 100) = 181,125 + 35,55 - 31,3904$$

$$V_{ti} (h = 100) = 3704,7346 \text{ mm}^3$$

A massa  $\bar{m}_1$  será:

$$\bar{m}_1 = 3704,7346 \cdot \frac{66}{8440} - 3,96$$

$$m_1 = 28,970673 - 3,96 \Rightarrow \bar{m}_1 = 25,0107 \Rightarrow$$

$$\bar{m}_1 = 25 \text{ g}$$

A massa efetiva da esquerda ( $M_1$ ) pode agora ser calculada a partir da fórmula (IV.37):

$$M_1 = m_1 + 0,23 \bar{m}_1$$

$$M_1 = 212 + 0,23 \cdot 25 \Rightarrow M_1 = 212 + 5,75$$

$$M_1 = 217,75 \Rightarrow M_1 = 218 \text{ g}$$

#### IV.2.2. Obtenção da massa 2 ( $M_2$ )

Para obtenção da massa efetiva 2 ( $M_2$ ) seguimos o mesmo raciocínio e usamos as fórmulas desenvolvidas para a massa efetiva 1 ( $M_1$ ).

Temos então a fórmula:

$$M_2 = m_2 + 0,23 \bar{m}_2$$

Assim como foi feito para a massa 1 ( $m_1$ ), a massa 2 ( $m_2$ ) pode ser dividida em 3 outras -  $m_2^1$ ,  $m_2^2$ ,  $m_2^3$ :  $m_2 = m_2^1 + m_2^2 + m_2^3$ . Somente o valor de  $m_2^1$  é que foi alterado, pois além de não ter bobina, foi colocada uma massa adicional, propositalmente, para que elas ficassem sensivelmente diferentes. Pesando a massa  $m_2$ , temos:

$$m_2 = 290 \text{ g}$$

Por serem as duas barras (1 e 2) iguais, podemos considerar que (Fig. IV.18):

$$\bar{m}_1^2 = \bar{m}_2^2 = 3,25 \text{ g} ; \bar{m}_1^3 = \bar{m}_2^3 = 3,96 \text{ g}$$

Assim, temos que:

$$\bar{m}_2 = 290 + 3,25 + 3,96$$

$$\bar{m}_2 = 297,21 \Rightarrow \bar{m}_2 = 297 \text{ g}$$

Para o cálculo da massa da barra 2 ( $\bar{m}_2$ ), usamos a fórmula (IV.40), como fizemos para a barra 1. Alterando agora a altura (h) para 147 mm, que é a altura da barra 2, temos:

$$V_{ti} = 0,0181125 \cdot h + 35,55 \cdot h - 31,3904$$

$$h = 147 \text{ mm}$$

$$V_{ti} (h = 147) = 0,0181125 \cdot (147)^2 + 35,55 \cdot 147 - 31,3904$$

$$V_{ti} (h = 147) = 391,3930 + 5225,85 - 31,3904$$

$$V_{ti} (h = 147) = 5585,8526 \text{ mm}^3$$

De forma análoga ao que fizemos para o cálculo da massa da barra 1 ( $\bar{m}_1$ ) fazemos para a barra 2, isto é, subtraímos da massa correspondente ao volume acima ( $V_{ti} (h = 147)$ ) a massa  $\bar{m}_2^3 (= m_1^3)$  pois ela já foi considerada pertencente à massa 2 ( $m_2$ ).

Temos então que a massa da barra 2 ( $\bar{m}_2$ ) vale:

$$\bar{m}_2 = 5585,8526 \cdot \frac{66}{8440} - 3,96 \Rightarrow$$

$$\bar{m}_2 = 43,6808 - 3,96 \Rightarrow \bar{m}_2 = 39,7208 \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{m}_2 = 40 \text{ g}}$$

A massa efetiva da direita ( $M_2$ ) pode ser, então, calculada a partir da fórmula (IV.37) :

$$M_2 = m_2 + 0,23 \bar{m}_2$$

$$M_2 = 297 + 0,23 \cdot 40$$

$$M_2 = 297 + 9,20 \Rightarrow M_2 = 306,2 \text{ g}$$

$$\boxed{M_2 = 307 \text{ g}}$$

Aproximamos este resultado para um valor superior pois a barra na realidade não diminui de largura ( $x$ ) linearmente com a altura, como foi suposto nos cálculos, mas ela é um pouco mais larga do que a largura obtida fazendo a suposição acima.

#### IV.3. Constantes de Amortecimento (C)

Reparamos que ao colocarmos qualquer uma das massas (1

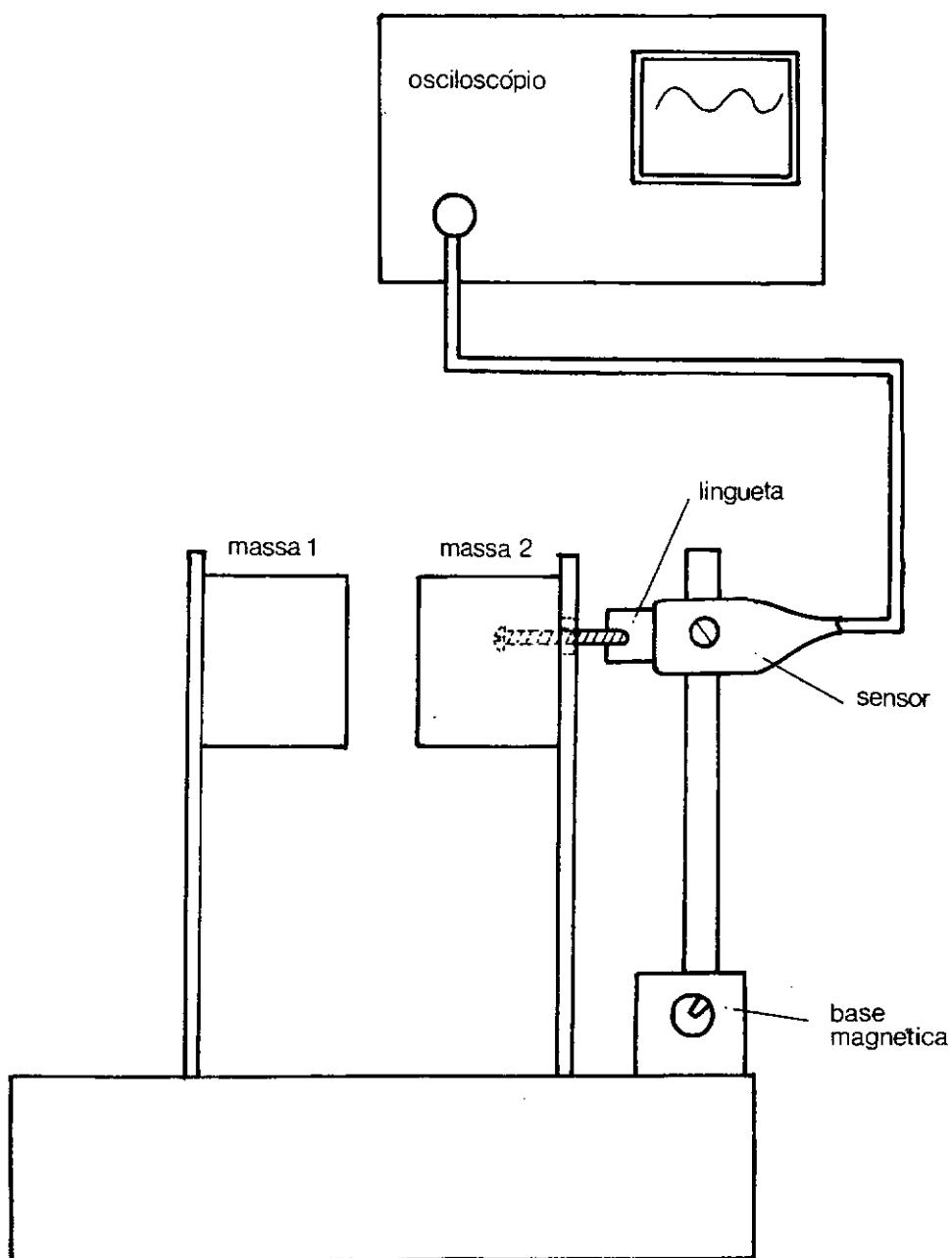
ou 2) para vibrar, devido a um deslocamento inicial, ela diminuía de amplitude gradativamente, isto é, havia uma dissipação de energia no sistema. Restava saber como esta dissipação atuava, ou melhor, até que ponto poderíamos considerá-la como sendo a de um amortecedor viscoso, que é o que supomos no modelo teórico.

Para isso, foi colocado um sensor de deslocamento (Apêndice II) na massa 2 (supomos aqui a massa 2 para facilitar a explicação e a compreensão de todo o desenvolvimento do cálculo), e este, que é suportado por uma haste que está presa a uma base magnética, foi ligado a um osciloscópio (Fig. IV.18). Dado então um pequeno deslocamento inicial nessa massa, o osciloscópio registrava sua queda de amplitude de oscilação.

Como já falamos anteriormente e explicamos mais detalhadamente no Apêndice II, o sensor de deslocamento possui uma fenda por onde entra uma lingueta que é fixada na massa. Notamos, através de um osciloscópio de memória (TEKTRONIX - MOD. 121 N - SERIAL B181660), que quando a lingueta está encostando na fenda do sensor a queda da amplitude de vibração da massa é linear (Amortecimento de Coulomb). Tomamos o cuidado, então, de colocar a lingueta e a fenda na direção vertical de tal modo que não houvesse atrito entre elas durante as oscilações da massa em questão.

O ponto da tela do osciloscópio foi colocado na mais baixa velocidade possível, isto é, na menor velocidade permitida pelo osciloscópio e com o botão descalibrado.

Para medir sua velocidade, foram feitas 4 medidas com um cronômetro digital de uma calculadora eletrônica HP-55, com



- FIG IV. 18 -

precisão de até 0,01 segundo.

1<sup>a</sup> Medida - Foi feita nas 5 primeiras divisões do osciloscópio (cada divisão = 10 mm) -

Tempo cronometrado:  $t = 7,79$  seg

Para cada divisão temos:

$$t = \frac{7,79}{5} \text{ seg/div} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 1,558 \text{ seg/div}$$

2<sup>a</sup> Medida - Foi feita nas 5 últimas divisões do osciloscópio (cada divisão = 10 mm).

Tempo cronometrado:  $t = 7,80$  seg

Para cada divisão temos:

$$t = \frac{7,80}{5} \text{ seg/div} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 1,560 \text{ seg/div}$$

3<sup>a</sup> Medida - Foi feita nas 10 divisões do osciloscópio (cada divisão = 10 mm).

Tempo cronometrado:  $t = 15,57$  seg

Para cada divisão temos:

$$t = \frac{15,57}{10} \text{ seg/div} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 1,557 \text{ seg/div}$$

$4^{\text{a}}$  Medida - Repetição da  $3^{\text{a}}$  Medida:

Tempo cronometrado:  $t = 15,59 \text{ seg}$

Para cada divisão temos:

$$t = \frac{15,59}{10} \text{ seg/div} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 1,559 \text{ seg/div}$$

Dadas as medidas acima, colocamos a velocidade do ponto da tela do osciloscópio como valendo  $1,56 \text{ s/div}$ .

Foi acoplada ao osciloscópio uma máquina fotográfica tipo Polaroid. Antes de bater a foto da oscilação da massa no osciloscópio, vimos qual o deslocamento inicial que deveria ser dado a ela e o tempo que devíamos esperar para que a sua amplitude de oscilação caísse na faixa linear do sensor de deslocamento, e, dessa forma, pudéssemos tirar a foto desejada.

A iluminação da tela do osciloscópio, a intensidade luminosa do seu ponto e a abertura do diafragma da máquina fotográfica foram reguladas para que pudéssemos obter a melhor foto possível.

Tiramos quatro fotos (ver folha seguinte):

FOTO  
Nº 1

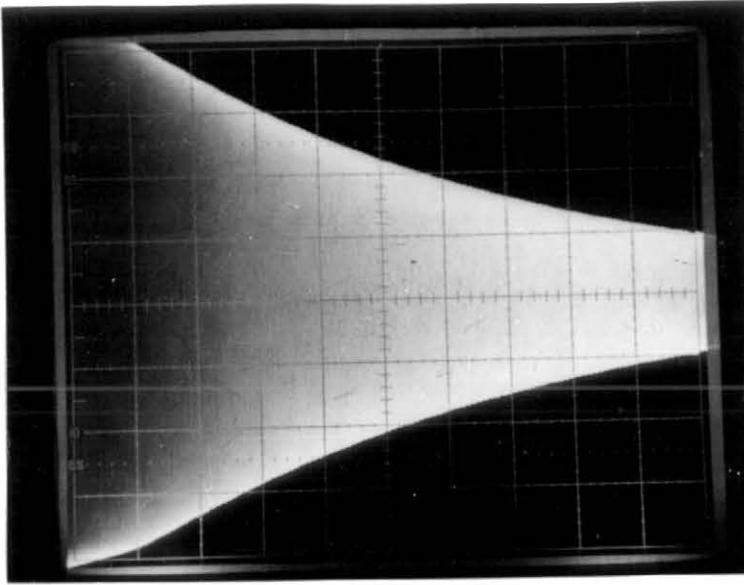


FOTO  
Nº 3

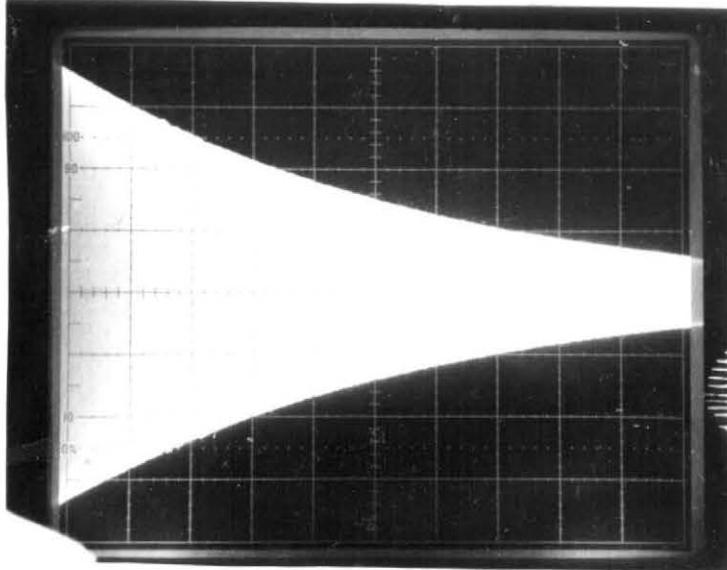


FOTO  
Nº 2

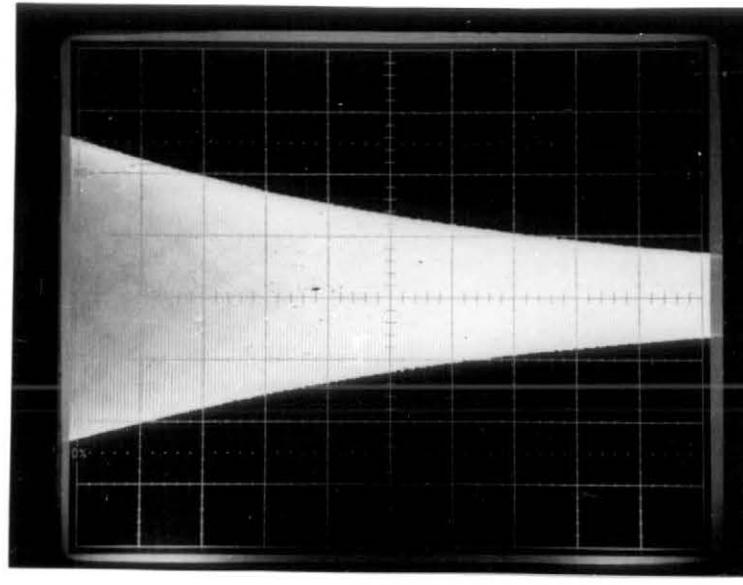


FOTO  
Nº 4

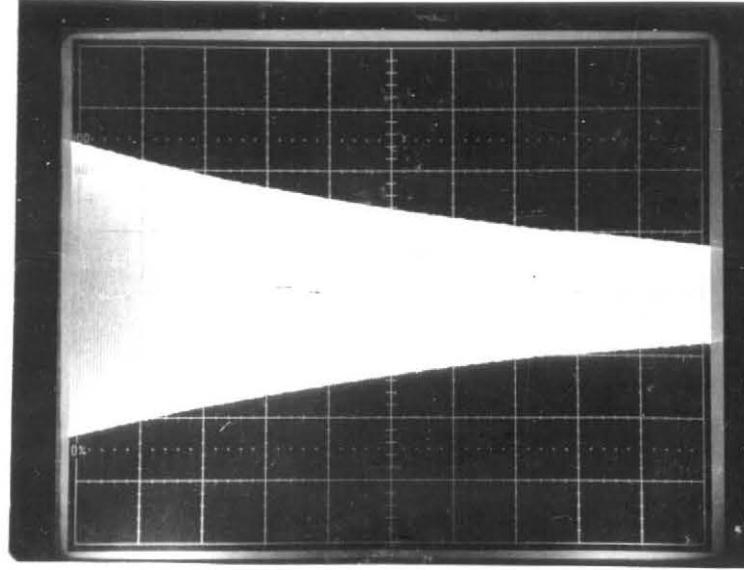


FOTO Nº 1: Foto da oscilação da massa 1 ( $M_1$ ) sozinha, sem ter pela frente a massa 2 ( $M_2$ ).

FOTO Nº 2: Foto da oscilação da massa 2 ( $M_2$ ) sozinha, sem ter pela frente a massa 1 ( $M_1$ ).

FOTO Nº 3: Foto da oscilação da massa 1 ( $M_1$ ), com ela em frente da massa 2 ( $M_2$ ).

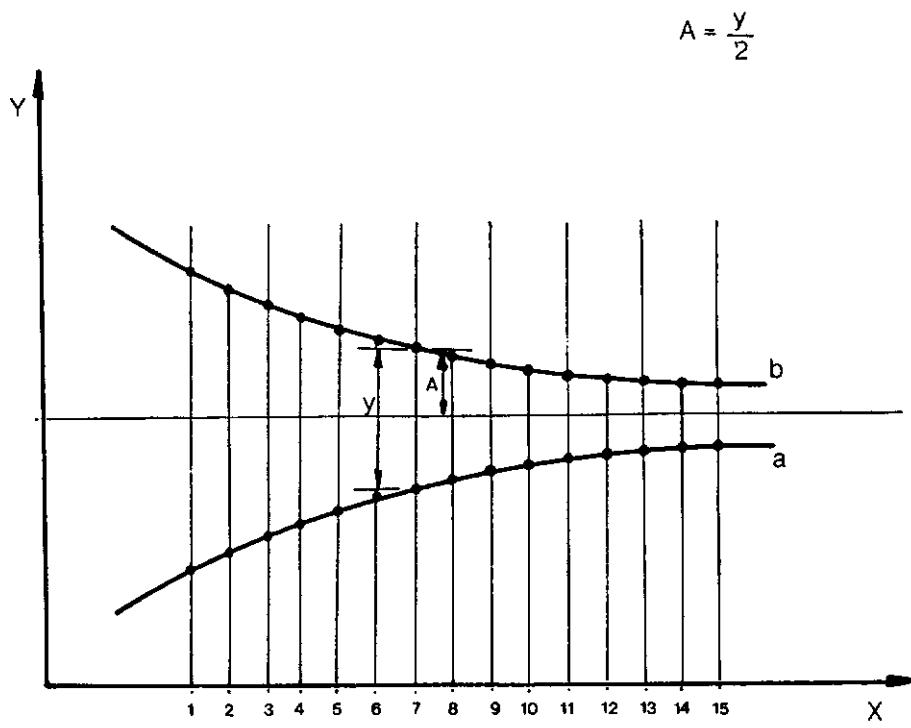
FOTO Nº 4: Foto da oscilação da massa 2 ( $M_2$ ), com ela em frente da massa 1 ( $M_1$ ).

As fotos nº 1 e nº 2, para o cálculo de  $C_1$  e  $C_3$ , respectivamente, foram batidas com as massas sozinhas, isto é, sem a influência da mola de acoplamento ( $K_2$ ). As fotos nº 3 e nº 4 para o cálculo de  $C_2$ , foram batidas com uma massa em frente da outra, isto é, havendo a influência da mola de acoplamento ( $K_2$ ).

#### IV.3.1. Procedimento geral para a obtenção do valor numérico das constantes de amortecimento (C)

As fotos mostram claramente a envoltória da onda. Através de um microscópio GAERTENER, que tem precisão de 1  $\mu\text{m}$  (0,001 mm), podemos ver, na mesma vertical, a distância (y) do ponto superior ao inferior da envoltória. A amplitude (X) da onda nesta abscissa será a metade desta distância (y) (Fig. IV.19).

Nossa finalidade agora é saber se podemos considerar o amortecimento dessas massas como sendo viscoso. Para isto, basta sabermos se o decaimento da amplitude de vibração é exponencial<sup>36</sup>. Tomamos, então, de cada foto, quinze pontos da envoltória superior (Fig. IV.19 - linha b), distando entre si meia



— Desenho esquemático das fotos —

Linha *b* — envoltória superior das oscilações

Linha *a* — envoltória inferior das oscilações

divisão do osciloscópio (5 mm) que, visto pelo microscópio, corresponde a 4,01 mm, pois cada divisão do osciloscópio tem 10 mm e corresponde a 8,02 mm na foto. Podemos, então, construir uma tabela da amplitude de vibração ( $X$ ) em função da abscissa ( $x$ ).

Através de um programa de uma calculadora eletrônica HP-97 do Departamento de Engenharia Mecânica da COPPE, ajustamos a melhor curva exponencial para o conjunto de pontos obtidos. Esse programa fornece um número chamado de "coeficiente de correlação" que mostra o erro cometido durante o ajuste da curva. Para o conjunto de pontos de cada uma das quatro fotos, esse coeficiente vale um, o que quer dizer que praticamente não existe erro. Pelas tabelas do Apêndice III vemos que o maior erro existente entre um ponto obtido da foto e o da exponencial ajustada pelo programa da calculadora é de 1,68%, seguido de outro de 0,8%, o que faz com que possamos considerá-los como erros de leitura no microscópio.

Podemos agora considerar a dissipação de energia existente no dispositivo como sendo a de um amortecedor a óleo, ou seja, um "amortecimento viscoso"<sup>36</sup>. Pelo decremento logarítmico podemos calcular a sua constante de amortecimento ( $C$ ).

Temos as fórmulas<sup>36</sup>:

$$X_{n+1} = X_n e^{-\frac{\pi C}{Mq}} \quad (\text{IV.41})$$

$$q = \sqrt{\frac{K}{M} - \frac{C^2}{4M^2}} \quad (\text{IV.42})$$

Sendo:

$x_n$  = enésima amplitude de vibração;

$x_{n+1}$  = amplitude de vibração seguinte à enésima;

$C$  = constante de amortecimento;

$M$  = massa;

$K$  = constante de mola;

$q$  = freqüência natural amortecida.

Para sabermos o iésimo pico de amplitude depois do ené simo, temos a fórmula:

$$x_{n+i} = x_n e^{\frac{-i\pi C}{Mq}} \quad (\text{IV.43})$$

Se, por exemplo, a freqüência for de 20 Hz, quer dizer que existem 20 picos ( $i$ ) de amplitude em 1 segundo. Podemos calcular, então, a constante de amortecimento pelo decremento logarítmico através das fotos tiradas, pois sabendo a freqüência com que vibra a massa podemos saber quantos picos existem em um segundo, ou seja, o valor de  $i$  na fórmula (IV.43). Temos condição de saber também o valor da amplitude do pico através da exponencial (envoltória) ajustada pela calculadora.

Devemos observar como foram feitos os cálculos para a obtenção das três constantes de amortecimento ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ) do sistema. Para obtermos uma primeira aproximação dos resultados, calculamos, inicialmente, através das fórmulas já vistas, essas constantes de amortecimento ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ), com um dos valores obtidos de cada constante de mola ( $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ) calculados anteriormente com certo erro, e o valor das massas efetivas ( $M_1$  e  $M_2$ ).

Esses oito parâmetros ( $C_1, C_2, C_3, K_1, K_2, K_3, M_1, M_2$ ) são os dados de entrada do Programa I, que nos fornecerá as freqüências em que ocorrem as maiores amplitudes de vibração das massas  $M_1$  e  $M_2$ .

Esse Programa I nos apresenta, para cada freqüência de excitação, a amplitude (X), o ângulo de fase ( $\phi$ ), a parte real (R) e a parte imaginária (U), de cada massa. Através das fotos, que serão mostradas e explicadas em capítulo posterior (Cap. VI), podemos obter, também,  $\phi$ , X, R e U obtidos diretamente do dispositivo montado no laboratório, ou seja, da parte experimental. Essas fotos nos dão os valores em questão em 8 freqüências diferentes - 4 pontos perto da freqüência onde ocorre o pico de amplitude de cada massa (2 antes do pico e 2 depois).

Plotando num gráfico os pontos do Programa I (a amplitude (X), por exemplo), e também a amplitude (X) obtida pelas fotos desse Capítulo VI, podemos verificar a coerência dos resultados.

Na primeira vez, como era esperado, o erro entre os dois pontos deu muito grande. Alterando as constantes de mola (K) fizemos novos cálculos para as constantes de amortecimento (C), até que os pontos do gráfico do Programa I coincidissem com os pontos obtidos pelas fotos do Cap. VI, dentro de um erro aceitável (menor do que 5%).

Toda essa operação descrita acima foi realizada 4 vezes até que todos os dados se encaixassem com os obtidos das fotos, tidos como os reais, pois foram tirados do dispositivo experimental. Transcrevemos para este trabalho apenas os cálculos finais das constantes de amortecimento (C) com o valor das

constantes de mola ( $K$ ) final, uma vez que os outros têm o mesmo procedimento, mudando apenas o valor dos dados.

Como vimos no anteriormente, o valor da constante de mola da mola de acoplamento pode variar de  $K_2 \approx 280 \text{ N/m}$  até  $K_2 \approx 220 \text{ N/m}$ . Experimentamos o Programa I variando os valores de  $K_2$  de 10 em 10 N/m dentro dessa faixa, e notamos que o valor que se encaixa melhor com os dados experimentais e com os cálculos das constantes de mola  $K_1$  e  $K_3$  era  $K_2 = 240 \text{ N/m}$ . Daí ter sido este o valor usado para a constante de mola de acoplamento.

#### IV.3.1.1. Cálculo das constantes de amortecimento

Repetimos as fórmulas

$$x_{n+1} = x_n e^{\frac{-\pi C}{Mq}} \quad (\text{IV.41})$$

$$q = \sqrt{\frac{K}{M} - \frac{C^2}{4M^2}} \quad (\text{IV.42})$$

$$x_{n+i} = x_n e^{\frac{-i\pi C}{Mq}} \quad (\text{IV.43})$$

Já temos os seguintes parâmetros:

$$M_1 = 218 \text{ g} = 0,218 \text{ Kg}$$

$$K_1 = 4370 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \text{ para } K_2 = 240 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

A Tab. A.III.1 do Apêndice III é feita dos dados obtidos da

FOTO Nº 1. Escolhemos dois pontos quaisquer que distem, entre si, cinco divisões do osciloscópio, pois, assim, podemos saber com maior precisão o número de ciclos que existem. Temos:

$$\text{Pt. 4: } x \text{ (abscissa)} = 12,03 \text{ mm} \Rightarrow X \text{ (amplitude)} = 20,38 \text{ mm}$$

$$\text{Pt. 14: } x \text{ (abscissa)} = 52,13 \text{ mm} \Rightarrow X \text{ (amplitude)} = 9,10 \text{ mm}$$

Cada divisão da tela do osciloscópio (10 mm) corresponde na foto a 8,02 mm, temos a correspondência:

$$8,02 \text{ mm (foto)} - 1 \text{ divisão (osciloscópio)} = 1,56 \text{ seg}$$

Esta FOTO Nº 1 não nos permite saber com precisão o número de picos de amplitude existentes numa divisão do osciloscópio. A FOTO Nº 2, entretanto, já permite, e notamos que o resultado final da freqüência com que vibra a sua massa correspondente ( $M_2$ ) é perto da freqüência com que ela vibra quando acoplada à massa 1, que é a freqüência que aparece no Programa 1. Como a freqüência final fornecida pelo Programa I, onde ocorre o pico de amplitude da massa 1, vale 23,18 Hz (com acoplamento), optamos por colocar essa freqüência valendo 24,0 Hz uma vez que o acoplamento aproxima os picos de amplitude.

Para calcular o número de ciclos existentes em 5 divisões do osciloscópio fazemos:

$$f = 24,0 \text{ c/s} \Rightarrow f = 24 \cdot 1,56 \frac{\text{c}}{1,56 \text{s}} = 24 \cdot 1,56 \text{ c/divisão}$$

$$f = 24 \cdot 1,56 \frac{\text{ciclos}}{\text{divisão}}$$

Como estamos colocando 5 divisões da tela do osciloscópio entre os dois picos de amplitude escolhidos (pt. 4 e pt. 14 - Tab. A.III.1 - Apêndice III), temos:

$$f = 24,0 \cdot 1,56 \cdot \frac{5 \text{ ciclos}}{5 \text{ divisões}}$$

$$f = 187,2 \frac{\text{ciclos}}{5 \text{ divisões}} = 187 \text{ ciclos/5 divisões}$$

O que significa dizer que existem 187 picos de amplitude do ponto 4 ao ponto 14.

Vamos calcular agora os verdadeiros deslocamentos sofridos pela massa 1 nos pontos 4 e 14, pois os deslocamentos mostrados até agora foram os medidos pelo microscópio através da foto.

(a) Para o ponto 4

$$x = \bar{x}_n = 20,38 \text{ mm} \text{ (amplitude vinda da exponencial ajustada)}$$

Como cada divisão (10 mm) da tela do osciloscópio corresponde a 8,02 mm na foto (medida pelo microscópio) temos a relação:

$$8,02 \text{ mm} : 10 \text{ mm} \text{ (1 divisão)}$$

$$20,38 \text{ mm} - \bar{x}_n$$

$$\bar{x}_n = \frac{20,38 \cdot 10}{8,02} \Rightarrow \bar{x}_n = 25,41 \text{ mm} = 2,541 \text{ divisões}$$

$\bar{x}$  = amplitude da onda na tela do osciloscópio

Quando a foto foi batida o osciloscópio registrava 1 volt/divisão. Temos então:

$$\bar{x}_n = 2,541 \text{ volts}$$

O sensor Modelo I, tem na sua faixa linear a sensibilidade ( $m$ ) de:

$$m = 0,066 \text{ V}/\mu\text{m}$$

Logo:

$$0,066 \text{ V} = 1 \mu\text{m}$$

$$2,541 \text{ V} = x_n$$

$$x_n = \frac{2,541}{0,066} \mu\text{m} \Rightarrow \boxed{x_n = 38,5 \mu\text{m} = 0,0385 \text{ mm}}$$

(b) Para o ponto 14

$$x = \bar{x}_{n+187} = 9,10 \text{ mm} \text{ (amplitude vinda da exponencial ajustada)}$$

Seguindo o mesmo raciocínio usado para (a) temos:

$$8,02 \text{ mm} = 10 \text{ mm} \text{ (1 divisão)}$$

$$9,10 \text{ mm} = \bar{x}_{n+187}$$

$$\bar{x}_{n+187} = \frac{9,10 \cdot 10}{8,02} \Rightarrow \bar{x}_{n+187} = 11,35 \text{ mm} = 1,135 \text{ divisões} = 1,135 \text{ V}$$

A relação do sensor Modelo I nos fornece:

$$0,066 \text{ V} - 1 \mu\text{m}$$

$$1,135 \text{ V} - x_{n+187}$$

$$x_{n+187} = \frac{1,135}{0,066} \Rightarrow \boxed{x_{n+187} = 17,2 \mu\text{m} = 0,0172 \text{ mm}}$$

A fórmula (IV.43) nos fornece:

$$x_{n+i} = x_n e^{-\frac{i\pi C}{M_1 q}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{x_{n+i}}{x_n} = -\frac{i\pi C}{M_1 q}$$

Substituindo pelos valores já obtidos temos:

$$\ln \frac{x_{n+187}}{x_n} = -\frac{187\pi C_1}{M_1 q} \Rightarrow \ln \frac{17,2}{38,5} = -\frac{187\pi C_1}{M_1 q}$$

$$0,8058 = -\frac{187\pi C_1}{M_1 q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = q \cdot 2,989955 \cdot 10^{-4} \quad (\text{IV.44})$$

Temos a fórmula (IV.42), que para o nosso caso fica

sendo:

$$q = \sqrt{\frac{K_1}{M_1} - \frac{C_1^2}{4M_1^2}} \Rightarrow q^2 = \frac{4370}{0,218} - \frac{C_1^2}{4 \cdot (0,218)^2}$$

$$q^2 = 2,004587 \cdot 10^4 - \frac{C_1^2}{0,1901} \quad (\text{IV.45})$$

De (IV.44) temos:

$$\boxed{C_1^2 = q^2 \cdot 8,939833 \cdot 10^{-8}} \quad (\text{IV.46})$$

Substituindo (IV.45) em (IV.46) temos:

$$C_1^2 = 8,939833 \cdot 10^{-8} \left[ 2,004587 \cdot 10^4 - \frac{C_1^2}{0,1901} \right]$$

$$C_1^2 = 1,792067 \cdot 10^{-3} - 4,702700 \cdot 10^{-7} C_1^2$$

$$C_1^2 = 1,792067 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \boxed{C_1 = 4,233 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Ns}}{\text{m}}}$$

- Cálculo da constante de amortecimento do "amortecedor" acoplado à massa 2 - ( $C_3$ )

As fórmulas usadas serão as mesmas que as do cálculo de  $C_1$ .

Desta vez, porém, a foto é a Nº 2 com os dados na Tab. A.III.2 - Apêndice III.

Os outros dados necessários já foram obtidos e valem:

$$M_2 = 307 \text{ g} = 0,307 \text{ Kg}$$

$$K_3 = \frac{N}{m}, \text{ para } K_2 = \frac{N}{m}$$

Seguindo o mesmo raciocínio usado para o cálculo de  $C_1$ , temos:

$$\text{Pt. 4: } x \text{ (abscissa)} = 12,03 \text{ mm} \Rightarrow X \text{ (amplitude)} = 12,38 \text{ mm}$$

$$\text{Pt. 14: } x \text{ (abscissa)} = 52,13 \text{ mm} \Rightarrow X \text{ (amplitude)} = 6,57 \text{ mm}$$

Mantém-se a relação:

$$8,02 \text{ mm (microscópio)} - 1 \text{ divisão (osciloscópio)} - 1,56 \text{ seg (osciloscópio)}$$

Pela FOTO Nº 2 vemos que existem 18 picos de amplitude, aproximadamente, em 1 divisão da tela do osciloscópio. Como para percorrer cada divisão o ponto da tela leva 1,56 seg, a freqüência natural dessa massa 2 vale aproximadamente:

$$f = \frac{18}{1,56} \Rightarrow f = 11,5 \text{ ciclos/seg}$$

Por estarmos colocando 5 divisões entre os dois picos da amplitude, temos:

$$f = 11,5 \cdot 1,56 \cdot 5 \frac{\text{ciclos}}{5 \text{ divisões}}$$

$$f = 90 \text{ ciclos/5 divisões}$$

Seguindo o raciocínio do cálculo de  $C_1$  temos:

(a) Para o ponto 4:

$$x = \bar{x}_n = 12,38 \text{ mm}$$

$$8,02 \text{ mm} - 10 \text{ mm} \text{ (1 divisão)}$$

$$12,38 \text{ mm} - \bar{x}_n$$

$$\bar{x}_n = \frac{12,38 \cdot 10}{8,02} \Rightarrow \bar{x}_n = 15,44 \text{ mm} = 1,544 \text{ div.}$$

$\bar{x}_n$  = amplitude da onda na tela do osciloscópio

Quando a foto foi batida o osciloscópio registrou 1 volt/divisão. Temos então:

$$\bar{x}_n = 1,544 \text{ div} = 1,544 \text{ volt}$$

O sensor Modelo III tem na sua faixa linear a sensibilidade ( $m$ ) de:

$$m = 0,1056 \text{ V}/\mu\text{m}$$

Logo:

$$0,1056 \text{ V} - 1 \mu\text{m}$$

$$1,544 \text{ V} - x_n (\mu\text{m})$$

$$x_n = \frac{1,544}{0,1050} \Rightarrow x_n = 14,6 \mu\text{m} = 0,0146 \text{ mm}$$

(b) Para o ponto 14

$$x = \bar{x}_{n+90} = 6,57 \text{ mm} \text{ (amplitude vinda da exponencial ajustada)}$$

Temos em seguida a relação:

$$8,02 \text{ mm} - 10,00 \text{ mm} \text{ (1 divisão)}$$

$$6,57 \text{ mm} - \bar{x}_{n+90}$$

$$\bar{x}_{n+90} = \frac{6,57 \cdot 10}{8,02} \Rightarrow \bar{x}_{n+90} = 8,19 \text{ mm} = 0,819 \text{ divisões} = 0,819 \text{ V}$$

A sensibilidade do sensor Modelo III nos fornece:

$$0,1056 \text{ V} - 1 \mu\text{m}$$

$$0,819 \text{ V} - x_{n+90}$$

$$x_{n+90} = \frac{0,819}{0,1056} \mu\text{m} \Rightarrow \boxed{x_{n+90} = 7,76 \mu\text{m} = 0,00776 \text{ mm}}$$

A fórmula (IV.43) nos fornece:

$$x_{n+i} = x_n e^{-\frac{i\pi C}{Mq}} \Rightarrow \ln \frac{x_{n+i}}{x_n} = -\frac{i\pi C}{Mq}$$

Substituindo pelos valores já obtidos temos:

$$\ln \frac{x_{n+90}}{x_n} = \frac{-90\pi C_3}{M_2 q} \Rightarrow \ln \frac{7,76}{14,6} = \frac{-90\pi C_3}{Mq}$$

$$-0,632039 = \frac{-90\pi C_3}{M_2 q}$$

$$C_3 = q \cdot 6,862621 \cdot 10^{-4}$$

$$C_3^2 = q^2 \cdot 4,709557 \cdot 10^{-7} \quad (\text{IV.47})$$

Temos a fórmula (IV.42) que para o nosso caso fica sen do:

$$q = \sqrt{\frac{K_3}{M_2} - \frac{C_3^2}{4M_2^2}} \Rightarrow q^2 = \frac{1425}{0,307} - \frac{C_3^2}{4 \cdot (0,307)^2}$$

$$q^2 = 4,641694 \cdot 10^3 - \frac{C_3^2}{3,76996 \cdot 10^{-1}} \quad (\text{IV.48})$$

Substituindo (IV.48) em (IV.47), temos:

$$C_3^2 = 4,709557 \cdot 10^{-7} \left[ 4,641694 \cdot 10^3 - \frac{C_3^2}{3,76996 \cdot 10^{-1}} \right]$$

$$C_3^2 = 2,186032 \cdot 10^{-3} - 1,24923 \cdot 10^{-6} C_3^2$$

$$C_3^2 = 2,186029 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \left[ C_3 = 4,675 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \right]$$

- Cálculo da constante de amortecimento do "amortecedor" de acoplamento situado entre as duas massas - ( $C_2$ )

As fotos aqui usadas (Nº 3 e Nº 4) são com as massas

frente a frente. Desta forma, calculamos a nova constante de amortecimento de cada uma delas ( $\bar{C}_1$  e  $C_3$ ) e comparamos com as já calculadas anteriormente ( $C_1$  e  $C_3$ ), isto é, com as massas vibrando sozinhas, sem acoplamento.

Caso haja alguma diferença entre os valores das novas constantes de amortecimento ( $C_1$  e  $C_3$ ) com as antigas ( $C_1$  e  $C_3$ ) respectivamente, é porque o acoplamento faz surgir uma dissipação de energia, talvez causado pelo campo magnético existente entre as duas massas. Essa diferença seria então a constante de amortecimento ( $C_2$ ) do "amortecedor" de acoplamento.

Por ser esse cálculo impreciso, calculamos  $C_2$  através da comparação entre duas constantes de amortecimento ( $C_1$  e  $\bar{C}_1$ ) e ( $C_3$  e  $\bar{C}_3$ ) para termos uma idéia mais verdadeira do seu valor.

- Obtenção de  $C_2$  através das FOTOS Nº 1 e Nº 3 ( $C_1$  e  $\bar{C}_1$ )

- Cálculo de  $\bar{C}_1$

Já possuímos os seguintes dados:

$$M_1 = 218 \text{ g} = 0,218 \text{ Kg}$$

$$K_1 = 4370 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \text{ para } K_2 = 240 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Da FOTO Nº 3 - Tab. A.III.3 - Apêndice III, temos os pontos:

Pt. 4:  $x$  (abscissa) = 12,03  $\Rightarrow X$  (amplitude) = 15,28 mm

Pt. 14:  $x$  (abscissa) = 52,13  $\Rightarrow X$  (amplitude) = 6,24 mm

Como fizemos para o cálculo de  $C_1$ , temos a seguinte relação:

8,02 mm (microscópio) - 1 divisão (osciloscópio) - 1,56 seg (osciloscópio)

O número de ciclos existentes em 5 divisões do osciloscópio vale:

- Freqüência:  $f = 23,18 \text{ c/s} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f = 23,18 \cdot 1,56 \text{ c/1,56 s} = 23,18 \cdot 1,56 \text{ c/divisão}$$

Como estamos colocando 5 divisões entre os dois picos da amplitude temos:

$$f = 23,18 \cdot 1,56 \cdot 5 \text{ ciclos/5 divisões}$$

$$f = 180,804 \frac{\text{ciclos}}{5 \text{ divisões}} = 181 \text{ ciclos/5 divisões}$$

O que significa dizer que existem 181 picos de amplitude do Pt. 4 ao Pt. 14. Seguindo o mesmo raciocínio usado para o cálculo de  $C_1$  fazemos:

(a) Para o Pt. 4

$$x = \bar{x}_n = 15,28 \text{ mm} \text{ (amplitude vinda da exponencial ajustada)}$$

8,02 mm - 10 mm (1 divisão do osciloscópio)

$$15,28 \text{ mm} - \bar{x}_n$$

$$\bar{x}_n = \frac{15,28 \cdot 10}{8,02} \Rightarrow \bar{x}_n = 19,05 \text{ mm} = 1,905 \text{ divisão}$$

$\bar{x}_n$  = amplitude da onda na tela do osciloscópio

Quando a foto foi batida o osciloscópio registrava 1 V/divisão. Logo:

$$\bar{x}_n = 1,905 \text{ divisões} = 1,905 \text{ volts}$$

O sensor Modelo I tem na sua faixa linear a sensibilidade (m) de:

$$m = 0,066 \text{ V}/\mu\text{m}$$

Logo:

$$0,066 \text{ V} = 1 \mu\text{m}$$

$$1,905 \text{ V} - x_n$$

$$x_n = \frac{1,905}{0,066} \mu\text{m} \Rightarrow \boxed{x_n = 28,87 \mu\text{m} = 0,0289 \text{ mm}}$$

(b) Para o Pt. 14

$$A = \bar{x}_{n+181} = 6,24 \text{ mm} \text{ (amplitude vinda da exponencial ajustada)}$$

Seguindo o mesmo raciocínio usado para (a) temos:

$$8,02 \text{ mm} - 10 \text{ mm} \text{ (1 divisão)}$$

$$6,24 \text{ mm} - \bar{x}_{n+181}$$

$$\bar{x}_{n+181} = \frac{6,24 \cdot 10}{8,02} \mu\text{m} \Rightarrow \bar{x}_{n+181} = 7,78 \text{ mm} \equiv$$

$$\equiv 0,778 \text{ divisões} = 0,778 \text{ V}$$

A relação do sensor Modelo I nos fornece:

$$0,066 \text{ V} - 1 \mu\text{m}$$

$$0,778 \text{ V} - x_{n+181}$$

$$x_{n+181} = \frac{0,778}{0,066} \Rightarrow \boxed{x_{n+181} = 11,778 \mu\text{m} = 0,0118 \text{ mm}}$$

A fórmula (IV.43) nos fornece:

$$x_{n+i} = x_n e^{\frac{-i\pi C}{Mq}} \Rightarrow \ln \left( \frac{x_{n+i}}{x_n} \right) = - \frac{i\pi C}{Mq}$$

Substituindo pelos valores já obtidos temos:

$$\ln \left( \frac{x_{n+181}}{x_n} \right) = - 181 \frac{\pi \bar{C}_1}{M_1 q} \Rightarrow \frac{\ln 11,778}{28,86} = - \frac{181 \pi \bar{C}_1}{0,218 q}$$

$$\Rightarrow -0,896223 = -\frac{181 \cdot \pi}{0,218} \frac{\bar{C}_1}{q}$$

$$\bar{C}_1 = q \cdot 3,435929 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \bar{C}_1 = q^2 \cdot 1,180561 \cdot 10^{-7}$$

(IV.49)

Temos a fórmula (IV.42) que para o nosso caso fica sen do:

$$q = \sqrt{\frac{K_1}{M_1} - \frac{\bar{C}_1^2}{4M_1^2}} \Rightarrow q^2 = \frac{4370}{0,218} - \frac{\bar{C}_1^2}{4 \cdot (0,218)^2}$$

$$q^2 = 2,004587 \cdot 10^4 - \frac{\bar{C}_1^2}{0,1901} \quad (\text{IV.50})$$

Substituindo (IV.50) em (IV.49) temos:

$$\bar{C}_1^2 = 1,180561 \cdot 10^{-7} \left[ 2,004587 \cdot 10^4 - \frac{\bar{C}_1^2}{0,1901} \right]$$

$$\bar{C}_1^2 = 2,366537 \cdot 10^{-3} - 6,210210 \bar{C}_1^2$$

$$\bar{C}_1^2 = 2,36536 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \boxed{\bar{C}_1 = 4,86471 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Ns}}{\text{m}}}$$

Temos, então, que o valor de  $C_{21}$ , obtido pela massa 1 ( $C_{21}$ ), isto é, através das FOTOS N° 1 e N° 3 vale:

$$C_{21} = \bar{C}_1 - C_1 = 0,04865 - 0,04233 = 6,317 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

$$C_{21} = 6,317 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

- Obtenção de  $C_2$  através das FOTOS Nº 2 e Nº 4 ( $C_3$  e  $\bar{C}_3$ )

- Cálculo de  $\bar{C}_3$

As fórmulas aqui usadas serão as mesmas já vistas anteriormente.

Os dados já obtidos são:

$$M_2 = 307 \text{ g} = 0,307 \text{ Kg}$$

$$K_3 = 1425 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \text{ para } K_2 = 240 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, e usando a FOTO Nº 4 -

Tab. A.III.4 - Apêndice III, temos:

$$\text{Pt. 4: } x \text{ (abscissa)} = 12,03: x \text{ (amplitude)} = 14,24 \text{ mm}$$

$$\text{Pt. 14: } x \text{ (abscissa)} = 52,13: x \text{ (amplitude)} = 8,20 \text{ mm}$$

Mantém-se a relação:

$$8,02 \text{ mm (microscópio)} - 1 \text{ divisão (osciloscópio)} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1,56 \text{ seg (osciloscópio)}$$

O número de ciclos existentes em 5 divisões do osciloscópio são:

$$\text{A freqüência vale: } f = 11,66 \text{ c/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = 11,66 \cdot 1,56 \text{ c/l,56 s} = 11,66 \cdot 1,56 \text{ c/divisão}$$

Por estarmos colocando 5 divisões entre os dois picos de amplitude, temos:

$$f = 11,66 \cdot 1,56 \cdot \frac{5 \text{ ciclos}}{5 \text{ divisões}}$$

$$f = 90,948 \text{ ciclos/5 div} \equiv 91 \text{ ciclos/5 div}$$

(a) Para o Pt. 4

$$x = \bar{x}_n = 14,24 \text{ mm}$$

$$8,02 \text{ mm} - 10 \text{ mm} \text{ (1 divisão)}$$

$$14,24 \text{ mm} - \bar{x}_n$$

$$\bar{x}_n = \frac{14,24 \cdot 10}{8,02} \Rightarrow \bar{x}_n = 17,76 \text{ mm} = 1,776 \text{ div}$$

$\bar{x}_n$  = amplitude da onda na tela do osciloscópio

Quando a foto foi batida o osciloscópio registrava 1 volt/divisão, temos então:

$$\bar{x}_n = 1,776 \text{ volt}$$

O sensor Modelo III tem na sua faixa linear a sensibilidade ( $m$ ) de:

$$m = 0,1056 \text{ V}/\mu\text{m}$$

Logo:

$$0,1056 \text{ V} = 1 \text{ } \mu\text{m}$$

$$1,776 \text{ V} - x_n$$

$$x_n = \frac{1,776}{0,1056} \text{ } \mu\text{m} \Rightarrow \boxed{x_n = 16,81 \text{ } \mu\text{m} = 0,0168 \text{ mm}}$$

(b) Para o Pt. 14

$$A = \bar{x}_{n+91} = 8,20 \text{ mm} \text{ (amplitude vinda da exponencial ajustada)}$$

Temos a relação:

(microscópio) 8,02 mm - 10,0 mm (1 divisão) (osciloscópio)

$$8,20 \text{ mm} - \bar{x}_{n+91}$$

$$\bar{x}_{n+91} = \frac{8,20 \cdot 10}{8,02} \Rightarrow \boxed{\bar{x}_{n+91} = 10,22 \text{ mm} \equiv 1,022 \text{ divisões} = 1,022 \text{ V}}$$

A relação do sensor Modelo III nos fornece:

$$0,1056 \text{ V} = 1 \text{ } \mu\text{m}$$

$$1,022 \text{ V} - x_{n+91}$$

$$x_{n+91} = \frac{1,022}{0,1056} \text{ } \mu\text{m} \Rightarrow \boxed{x_{n+91} = 9,68 \text{ m} = 0,00968 \text{ mm}}$$

A fórmula (IV.43) nos dá:

$$x_{n+i} = x_n e^{\frac{-i\pi C}{Mq}} \Rightarrow \ln \frac{x_{n+i}}{x_n} - \frac{-i\pi C}{Mq}$$

Para o nosso caso a fórmula acima fica:

$$\ln \frac{x_{n+91}}{x_n} = \frac{-91\pi}{M} \frac{\bar{C}_3}{q} \Rightarrow \ln \frac{9,68}{16,81} = - \frac{91\pi}{0,307} \frac{\bar{C}_3}{q}$$

$$\bar{C}_3 = q \cdot 5,926755 \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \bar{C}_3^2 = q^2 \cdot 3,512643 \cdot 10^{-7} \quad (\text{IV.51})$$

Temos a fórmula (IV.42) que para o nosso caso fica sen do:

$$q = \sqrt{\frac{K_3}{M_2} - \frac{\bar{C}_3^2}{4M_2^2}} \Rightarrow q^2 = \frac{1425}{0,307} \frac{N}{m \cdot kg} - \frac{\bar{C}_3^2}{4 \cdot (0,307)^2 kg^2}$$

$$q^2 = 4,641694 \cdot 10^3 - \frac{\bar{C}_3^2}{3,76996 \cdot 10^{-1}} \quad (\text{IV.52})$$

Substituindo (IV.52) em (IV.51) temos:

$$\bar{C}_3^2 = 3,512643 \cdot 10^{-7} \left[ 4,641694 \cdot 10^3 - \frac{\bar{C}_3^2}{3,76996 \cdot 10^{-1}} \right]$$

$$\bar{C}_3^2 = 1,630461 \cdot 10^{-3} - 9,317453 \cdot 10^{-7} \bar{C}_3^2$$

$$\bar{C}_3^2 = 1,630460 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \boxed{\bar{C}_3 = 4,0379 \cdot 10^{-2} \frac{Ns}{m}}$$

Temos, então, que o valor de  $C_2$  obtido da massa 2 ( $C_{22}$ ), através das FOTOS Nº 2 e Nº 4 é:

$$C_{22} = \bar{C}_3 - C_3 = 0,04037 - 0,04675$$

$C_{22} = -0,00638$	$\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$
---------------------	------------------------------

Notamos que o valor de  $C_2$  obtido da comparação de  $C_1$  (massas acopladas e massa sozinha) é positivo, enquanto que o obtido da comparação de  $C_3$  (massas acopladas e massa sozinha) é negativo. Isso deve acontecer devido ao valor muito pequeno de  $C_2$ , e que, durante o seu cálculo, a propagação de erro é muito grande. Usamos, então, no Programa I,  $C_2$  valendo  $5 \cdot 10^{-3}$  Ns/m, pois, após testarmos este programa com 4 diferentes valores de  $C_2$  ( $2 \cdot 10^{-2}$ ;  $1 \cdot 10^{-3}$ ;  $1 \cdot 10^{-6}$  e zero), a variação dos resultados é quase imperceptível entre o maior valor e o menor.

## CAPÍTULO V

### CALIBRAÇÃO DA FORÇA DE EXCITAÇÃO DO SISTEMA

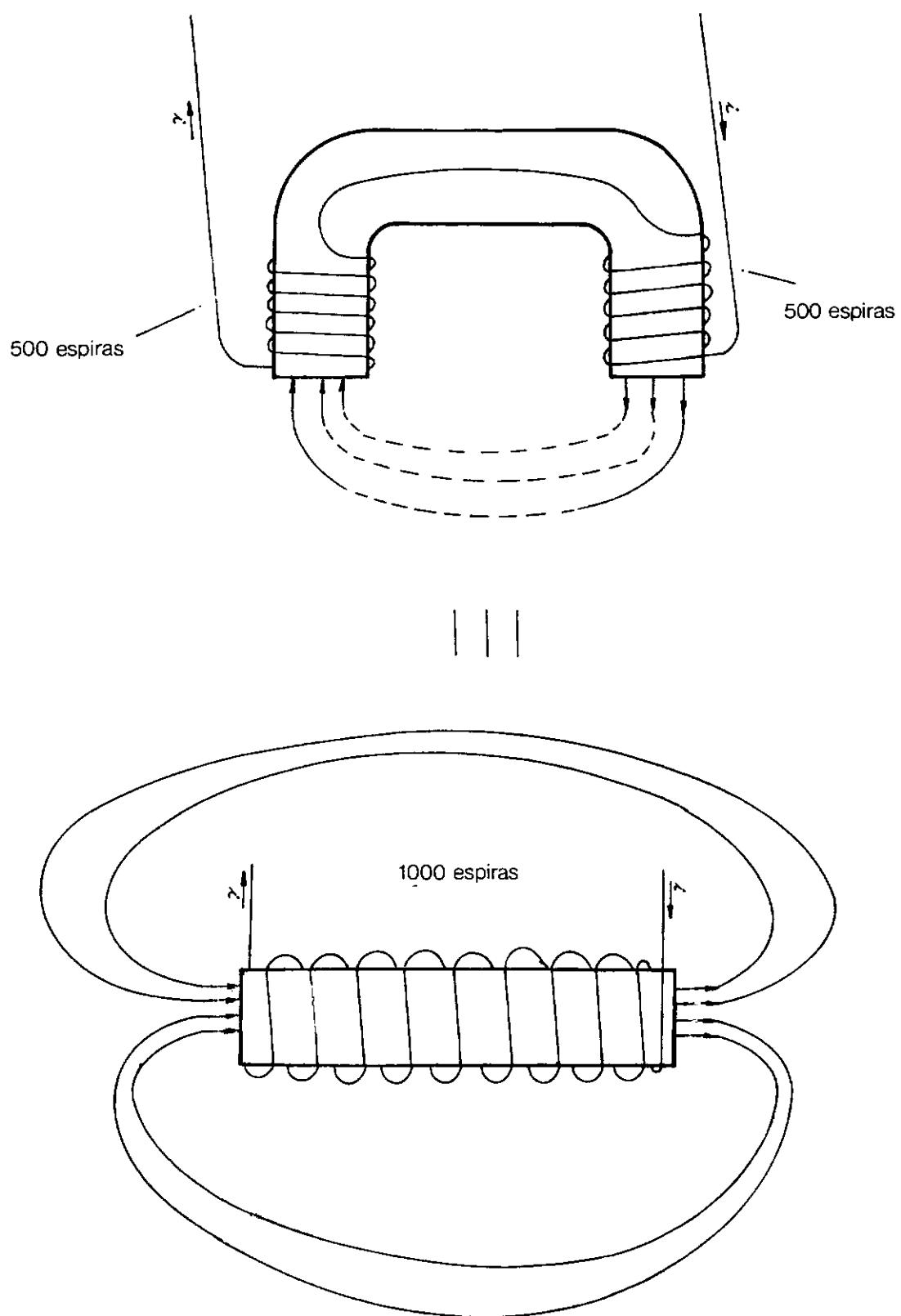
A força de excitação do sistema é gerada por uma bobina enrolada em um dos imãs (imã da massa 1). Ela é dividida em duas partes - metade de cada lado do imã. São conectadas entre si de tal forma que o sentido do enrolamento de uma metade possa gerar um fluxo magnético que se some ao da outra (Fig. V.1).

Como o núcleo (imã 1) da bobina possui seção reta rectangular e superfície áspera, poderia haver um desgaste do esmalte dos fios nas quinas do imã 1 por onde passa o enrolamento. Sendo assim o núcleo (imã 1) foi recoberto por uma fita isolante de forma a impedir esse desgaste e a passagem de corrente de uma espira para outra através do núcleo. Depois da bobina ter sido totalmente enrolada, foi feito um teste que comprovou o isolamento entre ela e o núcleo.

A seguir, ela foi recoberta de cera com a finalidade de protegê-la de qualquer acidente que pudesse danificá-la.

- Dados da bobina

- A bobina possuía as seguintes características:



- FIG. V. 1 -

MARCA DO FIO: PIREQUENT

DIÂMETRO DO FIO: 0,089 mm

BITOLA AWG: 39

NÚMERO DE ESPIRAS DA BOBINA: 1000 espiras

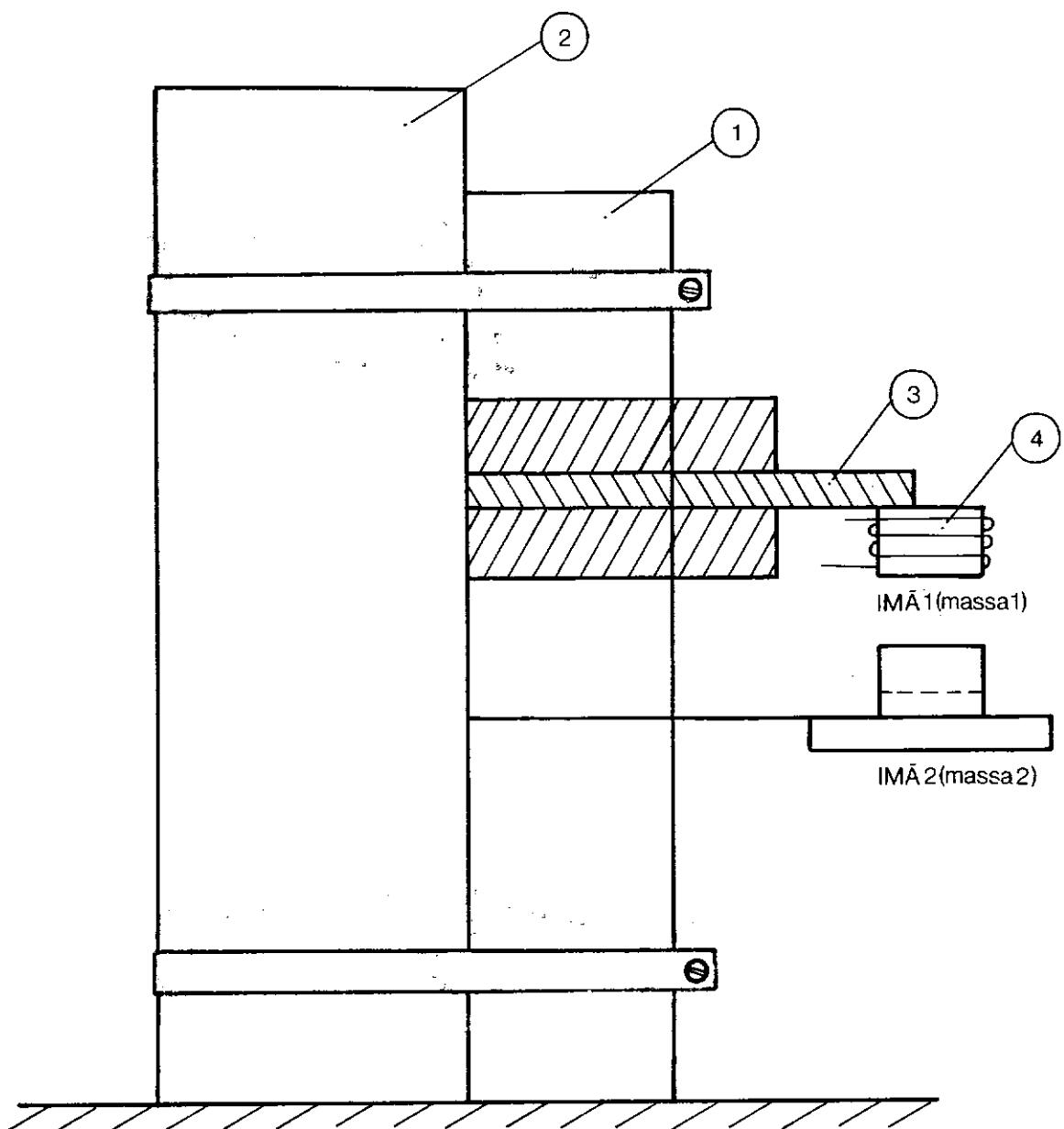
RESISTÊNCIA TOTAL DA BOBINA: 270 ohms

As dimensões do núcleo de cada parte da bobina são as da Fig. IV.16. A força excitadora usada durante as experiências era senoidal (causada por uma corrente senoidal) que gerava então um movimento harmônico das massas 1 e 2, isto é, que pode ser expresso da forma:  $x = x_0 \operatorname{sen} wt$  [36]. Para a sua calibração, foi usada uma força constante (corrente contínua), que provocava apenas um deslocamento na massa 2, proporcional à força, oferecendo, então, condições para a calibração, como veremos mais adiante, o que não acontece para o caso de usarmos a mesma excitação senoidal usada durante as experiências. Esta calibração nos fornece a amplitude da força senoidal excitadora. Para o sistema de equações lineares desenvolvido no Cap. II, essa força, agora calibrada, tem a notação  $P$ .

### V.1. Preparação para a Calibração

Para a calibração, a base do sistema foi colocada na posição vertical, ficando as barras na posição horizontal. Ela foi segura por trás a um pesado volume com boa base, para que o sistema pudesse ficar bem equilibrado nesta posição (Fig. V.2).

Foi introduzida por trás da barra 1 (a que sustenta o imã 1 = massa 1) uma barra rígida em relação à ela. Entre esta



1 Base do sistema

2 Volume com boa base para dar equilíbrio ao sistema nesta posição

3 Barra rígida que não flete com relação às barras.

4 Bobina que gera a força exitadora colocada no IMĀ 1(massa1)

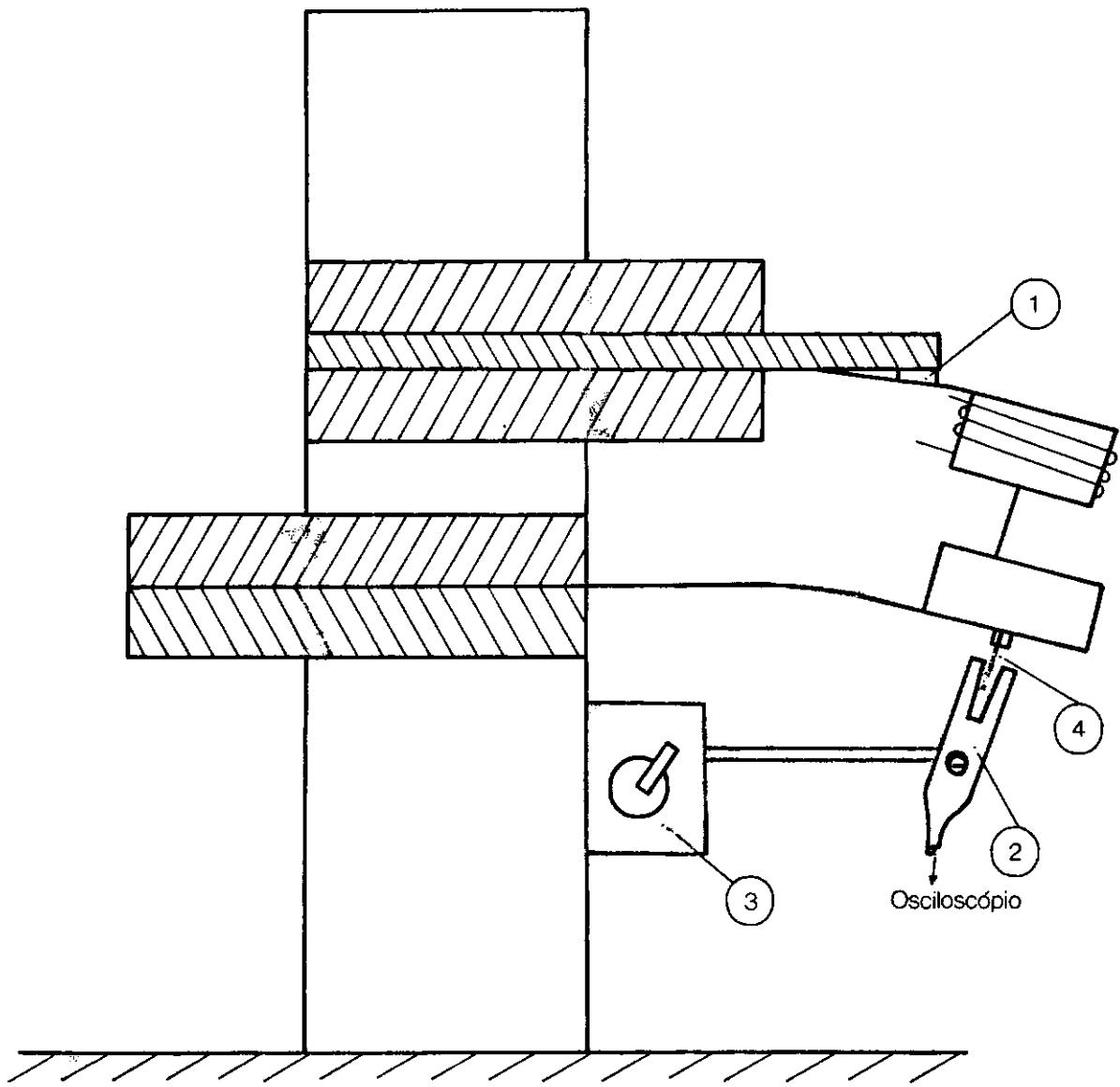
barra rígida e a barra 1 foi introduzida uma pequena barra com a finalidade de aproximar a distância entre os imãs 1 e 2.

A calibração foi feita para 3 distâncias diferentes (a partir de agora chamadas de distâncias iniciais ( $d_i$ )), reguladas por essa pequena barra espaçadora como veremos mais tarde (Fig. V.3).

Por trás do imã 2 (massa 2), foi colocado o sensor de deslocamento Modelo I (Apêndice II). Ele é fixado ao sistema através de base magnética. A lingueta opaca necessária para o funcionamento desse sensor (Apêndice II) deve ser fixado no centro de gravidade da massa 2, para que, assim, o sensor indique, da forma mais precisa possível, o deslocamento dessa massa, causado pela força excitadora. Ela foi presa, então, a um rasgo feito na ponta do parafuso que segura a massa 2 à respectiva barra do sistema, uma vez que esse parafuso se situa no centro geométrico do imã 2.

Um osciloscópio acoplado a esse sensor nos fornece a voltagem que passa por este (proporcional à quantidade de luz que a lingueta deixa passar), através da qual podemos calcular o deslocamento sofrido pela massa 2.

Notamos que peças com propriedades magnéticas, tal como arruelas, parafusos, etc., influíam na força magnética que atuava entre os imãs, então, para a calibração da força, foram usados pequenos pedaços de madeira calibrados numa balança de precisão.



- 1 Pequena barra espaçadora para regular as distâncias iniciais ( $d_i$ ) entre os imãs:
- 2 Base magnética que fixa sensor de deslhecamento modelo I ao sistema
- 3 Sensor de deslocamento modelo I
- 4 Lingueta opaca

Para a calibração da força o sistema ficou montado segundo o esquema da Fig. V.4. Como foi dito, a pequena barra espaçadora (Fig. V.3 (3)) foi colocada para fornecer três distâncias iniciais ( $d_i$ ) entre os imãs. Medimos cada uma dessas distâncias no meio dos dois imãs (Fig. V.3) através de uma placa de baquelite que possuía a largura desejada. Foi feito assim, pois, com o paquímetro, os imãs se aproximariam não permitindo saber a distância ( $d_i$ ) entre eles. Isso talvez ocorria devido a maior facilidade com que o fluxo magnético passa pelo aço (paquímetro) do que pelo ar.

Obtida então a distância inicial ( $d_i$ ) desejada através da pequena barra espaçadora (Fig. V.3 (3)), regulamos o sensor de deslocamento (Fig. V.3 (5)) de tal forma que mostrasse no osciloscópio uma voltagem de 6 V, isto é, que pegasse a sua faixa linear de medida (Apêndice II), fornecendo então maior precisão de leitura.

#### V.2.1. Método para obtenção de dados para a construção do gráfico Força (P) x Corrente (i)

Após regulagem da distância inicial ( $d_i$ ) entre os imãs, ligamos as pontas dos fios da bobina a uma fonte de corrente contínua, de tal forma que a corrente criasse uma força magnética atrativa entre os imãs.

Fornecemos, primeiramente, uma corrente contínua de 10 mA. Esta, ao passar pela bobina, criava uma força magnética que atraía o imã 2 para o imã 1. O deslocamento daquele imã era registrado pelo osciloscópio através da alteração de voltagem ocorrida dentro do sensor (Apêndice II).

Devemos observar que a voltagem caía com a retirada da lingueta de dentro da fenda do sensor. Como dissemos, colocamos a voltagem inicial em 6 V, e com o deslocamento do imã para cima (Fig. V.4), causada pela força magnética atrativa, ela diminuía, continuando, então, o sensor medindo dentro da sua faixa linear.

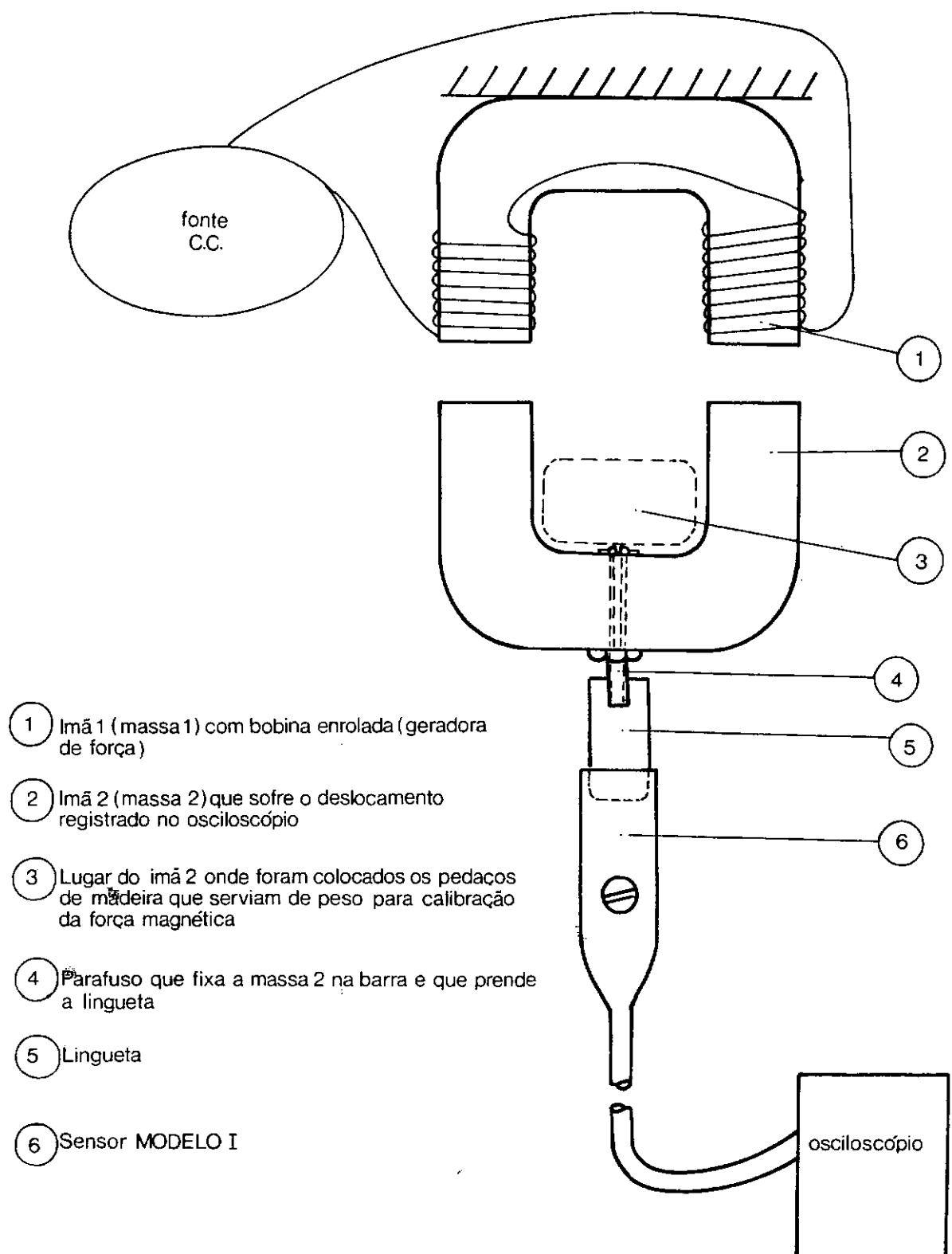
Para compensar o deslocamento do imã 2 para cima, colocamos um peso nele (Fig. V.4 (3)) para que retornasse à posição inicial, ou seja, à posição em que o osciloscópio registrava 6 V. Esse peso, na realidade, era uma porção dos pequenos pedaços de madeira calibrados, como já citamos anteriormente.

A seguir, elevamos a corrente (contínua) que passa pela bobina de 10 em 10 mA, até 100 mA, colocando, sempre, o peso que corresponde ao deslocamento causado pela força magnética atrativa. A análise das forças que atuam veremos adiante.

Chegando em 100 mA diminuímos a corrente (contínua) de 10 em 10 mA, colocando em cada passo desses o peso correspondente, como explicamos antes. Obtemos, dessa forma, a segunda coluna de dados para a calibração da força, para dada distância inicial ( $d_i$ ).

Ao chegar em zero mA, novamente aumentamos a corrente (contínua) de 10 em 10 mA, colocando o peso correspondente ao respectivo deslocamento, como fizemos atrás, havendo, agora, três colunas de dados de medida para podermos saber, com maior precisão, a calibração da força magnética para dada distância inicial ( $d_i$ ).

Realizamos a seqüência de operações acima para 3 dife-



- FIG V . 4 -

rentes distâncias iniciais ( $d_i$ ): 6,00 mm; 5,6 mm e 5,0 mm. As medidas obtidas da calibração da força, para estas três distâncias iniciais ( $d_i$ ), estão nas Tabs. A.IV.1, A.IV.2 e A.IV.3 no Apêndice IV.

Através dos dados dessas tabelas, podemos construir o gráfico da Fig. V.5 para ajudar o cálculo do valor da amplitude da força de excitação (P) do sistema. Neste gráfico, colocamos os valores da corrente (I) em função da força (P) até 30 mA. Fizemos isso pois a corrente (I) usada para a obtenção da amplitude (X) e do ângulo de fase ( $\phi$ ) é muito pequena, no máximo 12,5 mA, como veremos no Capítulo VI. A área hachurada é a região onde se situa a reta da calibração da força. Podemos obter o valor máximo ( $\alpha_1$ ) e mínimo ( $\alpha_2$ ) da relação corrente (I) x Força (P).

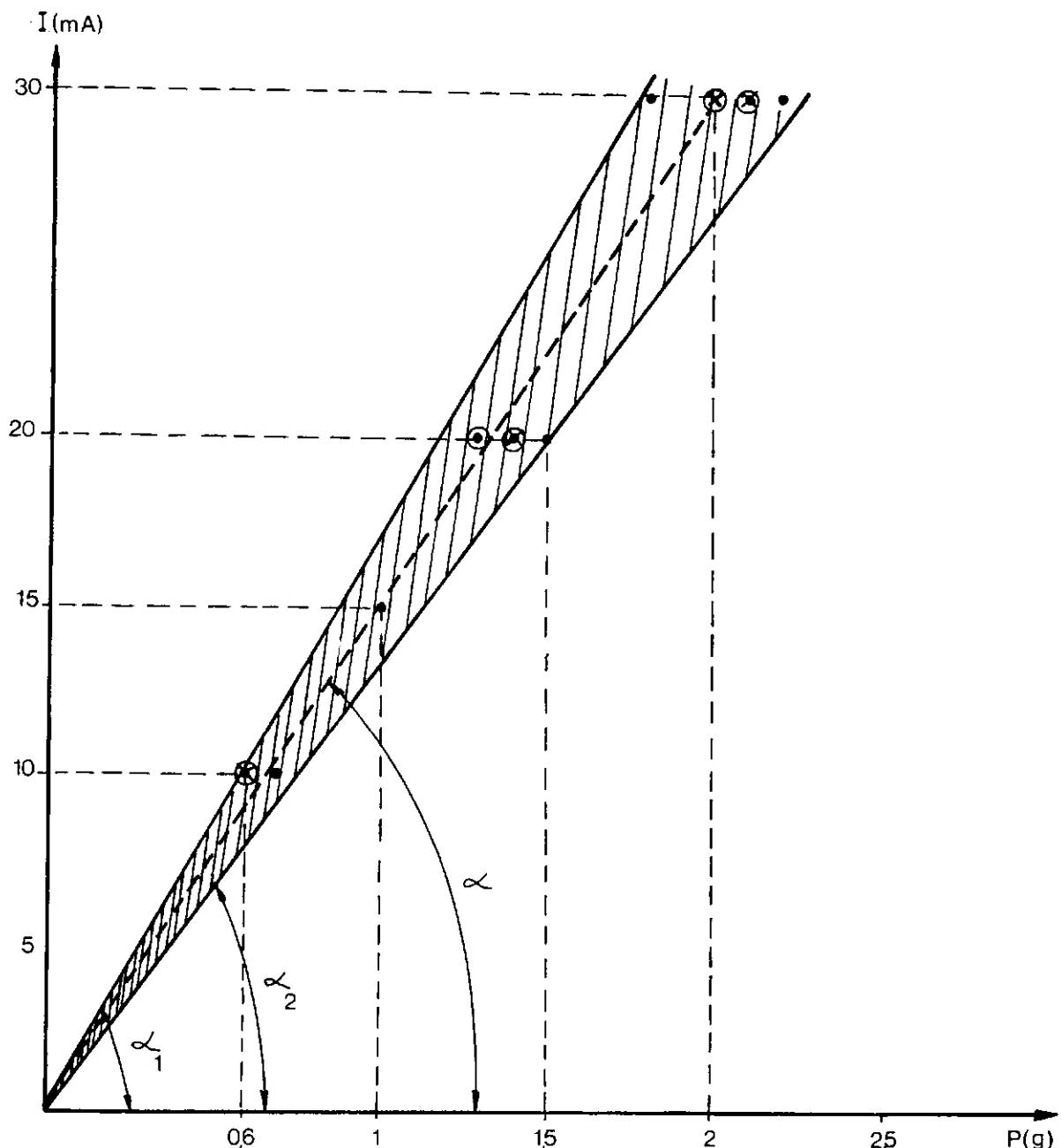
Temos:

$$(\text{MÁXIMO}): \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{10}{0,6} = 16,6 \text{ mA/g}$$

$$(\text{MÍNIMO}): \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{20}{1,5} = 13,3 \text{ mA/g}$$

Notamos que essa força (P) oscilando dentro dessa faixa praticamente não influência nos resultados dos programas de computador. Não havendo necessidade de cálculos mais sofisticados, fizemos a relação acima ser a média. Temos então:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{1} = 15 \text{ mA/g}$$



$\times$  —  $d_i = 5.0\text{ mm}$

$\circ$  —  $d_i = 5.6\text{ mm}$

$\bullet$  —  $d_i = 6.0\text{ mm}$

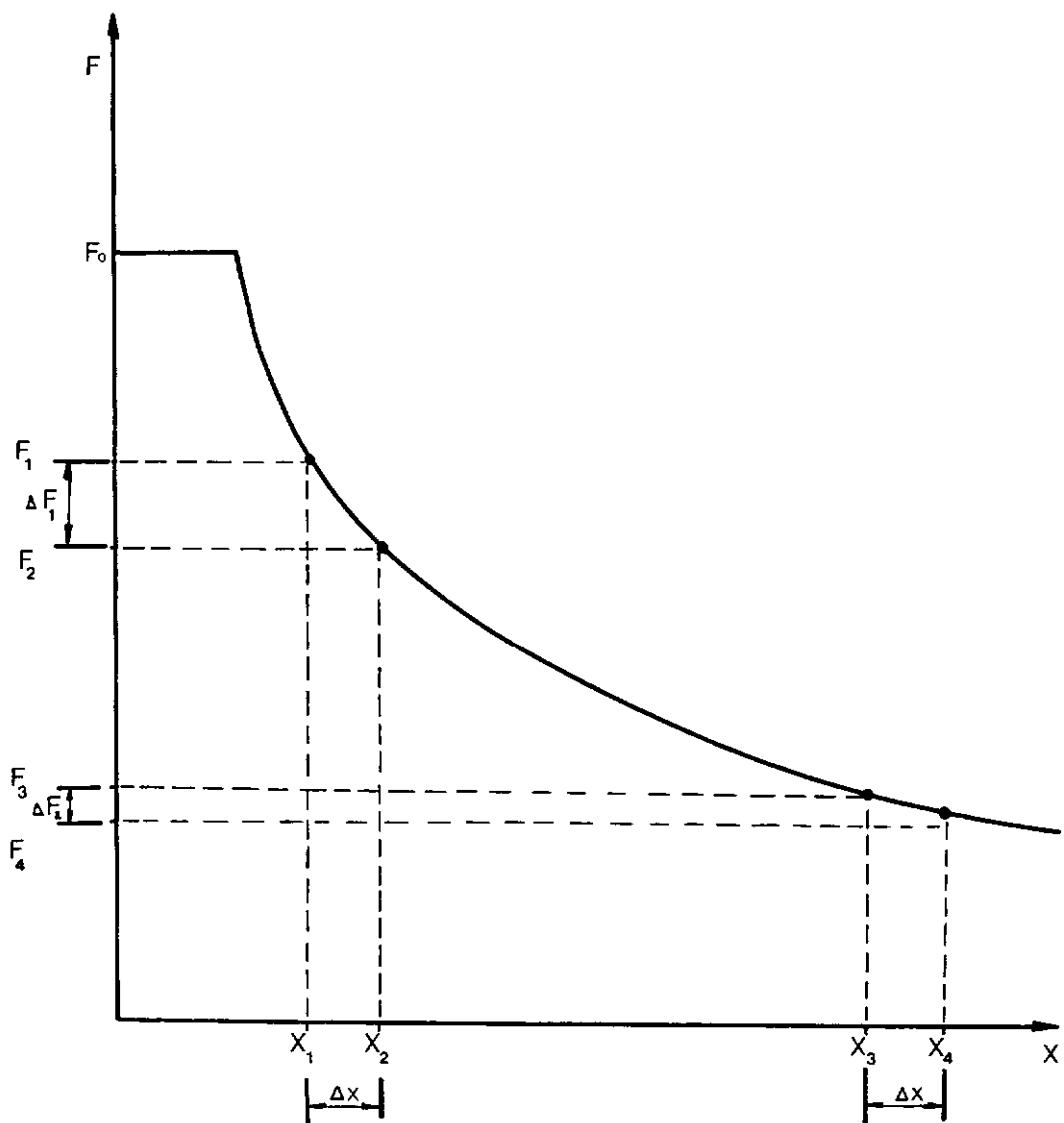
### V.3. Comentários sobre a Calibração da Força de Excitação (F)

#### V.3.1. Comentários sobre as distâncias iniciais ( $d_i$ )

Como vimos, a calibração da força de excitação do sistema (F) foi feita de forma estática e não dinâmica. Assim fizemos pois além de impedirmos os possíveis problemas dinâmicos que apareceriam obtendo de forma imediata, o valor da amplitude da força excitadora (P), que é o que nos interessa nos programas de computador.

A distância existente entre os imãs durante as experiências, isto é, com a base rígida na posição horizontal e as barras na posição vertical, é de 7,0 mm. Entretanto, escolhemos para a calibração da força de excitação distâncias menores (6,0; 5,6 e 5,0 mm). Como vemos pelas tabelas de calibração (Apêndice IV), a força magnética atuante nestas distâncias menores sofre pouca variação de valor de uma distância inicial ( $d_i$ ) para outra, com maior razão, ainda essas variações deverão ser menores para distâncias maiores, como, por exemplo, 7,00 mm.

Podemos ver isto com maior facilidade através do gráfico da Fig. V.6<sup>37</sup>, que mostra a força magnética que atua em função da distância. Vemos que se variarmos a distância de  $x_1$  para  $x_2$  ( $\Delta x$ ) temos uma variação de força de  $F_1$  para  $F_2$  ( $\Delta F_1$ ). E a mesma variação de distância de  $x_3$  para  $x_4$  ( $\Delta x$ ) nos dá uma variação de força de  $F_3$  para  $F_4$  ( $\Delta F_2$ ). Notamos, claramente, que  $\Delta F_2 < \Delta F_1$ , o que mostra que para distâncias pequenas entre os imãs a variação dessa distância implica numa maior variação da força do que para distâncias grandes.



- FIG V. 6 -

### V.3.2. Comentários sobre a calibração

Notamos que a barra que sustenta a massa 1 (Fig. V.2) pode sofrer num deslocamento no sentido da massa 2, quando aplicamos a força atrativa para a calibração. A massa 2, como vimos, sofre uma deflexão bastante sensível, suficiente para que o sensor de deslocamento registre no osciloscópio. Mas de quanto será o deslocamento sofrido pela massa 1 quando da atuação dessa força atrativa? Uma vez que tomamos por base que a massa 1 não se desloca, o que não acontece na realidade, será o deslocamento que ela sofre suficientemente grande a ponto de prejudicar a calibração? É o que vamos analisar a seguir.

Como já vimos, para a calibração da força excitadora, a base do sistema foi colocado na posição vertical ficando as barras, que sustentam as massa 1 e 2, na posição horizontal (Fig. V.3). Nesta posição, as barras fletem, e esta deflexão é proporcional ao peso das massas que atuam sobre as respectivas barras e à rigidez de cada uma.

Analisemos primeiramente de quanto flete a barra que sustenta a massa 2:

$$- \text{ Peso da massa 2: } \bar{P} = 307 \text{ g}$$

Através de cálculos já feitos anteriormente podemos considerar o coeficiente de rigidez da barra que sustenta a massa 2, como sendo perto de:  $K_3 = 145 \text{ g/mm.}$

O deslocamento sofrido pela extremidade da barra que sustenta a massa 2 devido ao seu peso vale:

$$\bar{P} = K_3 \quad x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{307}{145} \text{ mm} \Rightarrow x_1 = 2,1 \text{ mm}$$

As distâncias ( $d_i$ ) entre os imãs para a calibração da força foram 6,0; 5,6 e 5,0 mm. Logo, para que o imã 1 fique distando qualquer dessas distâncias do imã 2, sua barra terá que fletir o que flete a barra que sustenta o imã 2, mais o suficiente para que as distâncias ( $d_i$ ) entre os imãs sejam as desejadas para a calibração (Fig. V.7).

Com as barras na posição vertical os imãs distam 7,0 mm. Nesta posição, para que ocorra a maior distância ( $d_i$ ) entre os imãs (6,0 mm), o valor da menor deflexão da barra que sustenta o imã 1 (massa 1) deverá ser:

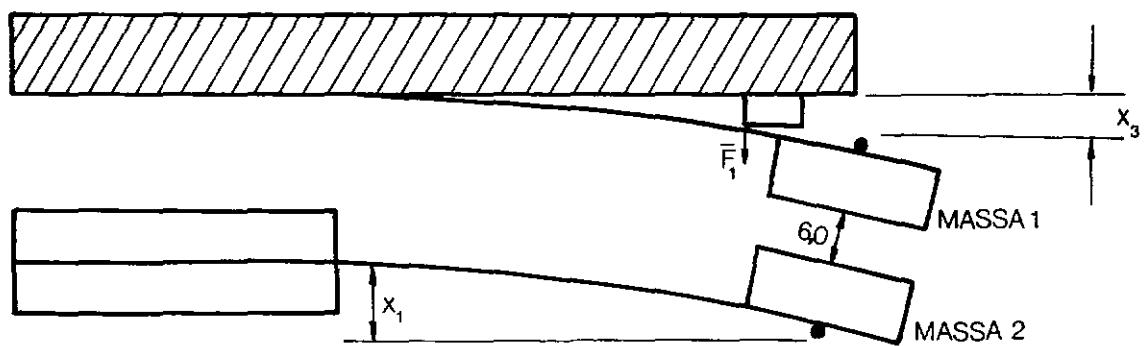
$$x_2 = 7,00 - 6,0 = 1,0 \text{ mm}$$

O deslocamento total mínimo que o imã 1 (massa 1) deve sofrer para que a distância ( $d_i$ ) entre os dois imãs seja de 6,0 mm é a soma de  $x_2$ , calculado acima, com o valor do deslocamento da extremidade da barra 2 ( $x_1$ ) devido ao peso da massa 2:

$$x_3 = 1,0 + 2,1 = 3,1 \text{ mm}$$

Devemos notar que não foi tomado em conta, para essa deflexão  $x_3$ , o deslocamento que deve ter o imã 1 devido também à força de repulsão entre os imãs. Se o fizéssemos, o valor de  $x_3$  seria maior.

A deflexão  $x_3$  é a menor que o imã 1 (massa 1) deve sofrer durante a calibração da força de excitação.



$X_1$  = Deflexão da barra 2 (massa 2) devido ao peso da massa 2

$X_3$  = Deflexão total da barra 1 para que a distância inicial ( $d_i$ ) entre os imãs 1 e 2 seja de 6,0 mm

Quando o deslocamento  $x_3$  ocorre, a força a que está submetida a barra que sustenta a massa 1 será (Fig. V.7) :

$$\bar{F}_1 = K_1 x_3 = 446 \cdot 3,1 \Rightarrow \bar{F}_1 \approx 1383 \text{ g}$$

Essa força  $\bar{F}_1$ , é de cima para baixo sobre a barra 1, praticamente onde começa a massa 1 (Fig. V.7). A força de calibração que a bobina cria com 100 mA é de 8,6 g, como vimos pelas tabelas do Apêndice IV, que pode ser considerado desprezível frente ao valor de  $\bar{F}_1$ , uma vez que aquela (8,6 g) não chega a ser 0,7% desta (1383 g).

### V.3.3. Constatção da validade da calibração

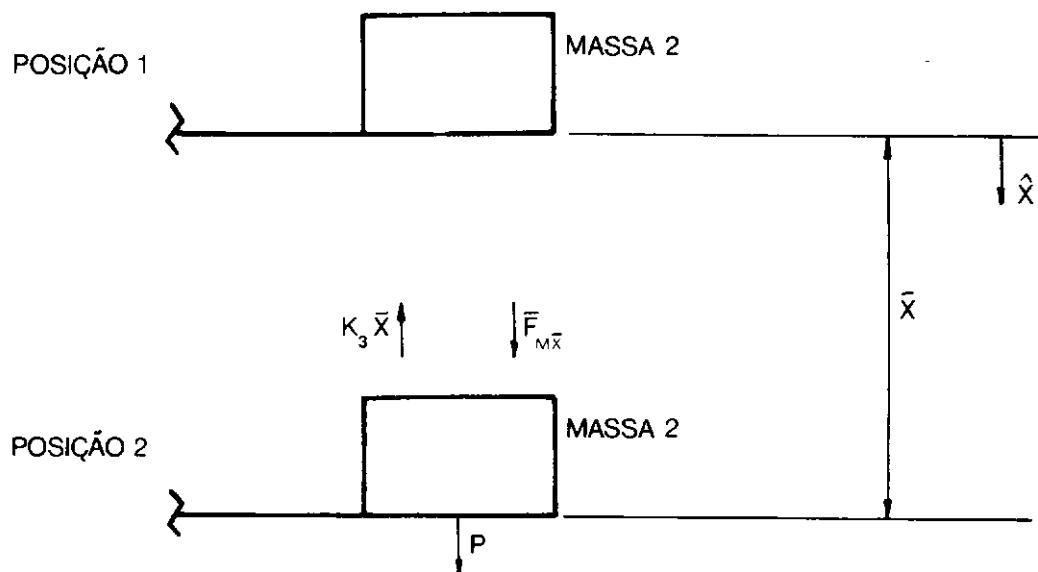
Com a finalidade de podermos ver mais claramente como atua a força magnética durante a calibração fazemos aqui uma análise das forças que atuam quando a massa 2 ocupa duas diferentes posições.

#### Análise 1

A massa 2 se encontra na Posição 2 (Fig. V.8) sem força magnética atrativa e sem os pesos calibrados ( $P_1$ ) que a compensa.

Pela Fig. V.8 temos:

Posição 1 - lugar onde ficaria a massa 2 caso não fossem considerados seu peso e a repulsão magnética do imã 1.



Posição 2 - lugar onde fica a massa 2 quando não está sujeita a nenhuma força magnética atrativa, ou está sujeita a ela e, ao mesmo tempo, suporta o peso ( $P_1$ ) que compensa o deslocamento por ela causada.

$P$  = peso da massa 2.

$K_3 \bar{x}$  = força causada pela barra 2 devido ao deslocamento  $\bar{x}$  sofrido por ela.

$\bar{F}_{Mx}$  = força de repulsão magnética quando a massa 2 se encontra a uma das três distâncias iniciais ( $d_1$ ) da massa 1.

Sendo:

$$\bar{x} = x_1 + x_2$$

$x_1$  = deslocamento sofrido pela massa 2 devido ao seu peso;

$x_2$  = deslocamento sofrido pela massa 2 devido à força de repulsão magnética entre os imãs quando as barras se encontram na horizontal (posição durante a calibração mostrada na Fig. B.7);

$K_3$  = constante de mola da barra 2.

Temos:

$$P + \bar{F}_{Mx} - K_3 \bar{x} = 0 \Rightarrow P + \bar{F}_{Mx} = K_3 \bar{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P + \bar{F}_{Mx} = K_3 x_1 + K_3 x_2$$

Mas:

$$P = K_3 x_1$$

Logo:

$$\bar{F}_{Mx} = K_3 x_2 \quad (V.1)$$

### Análise 2

A massa 2 se encontra na Posição 2 (Fig. V.9). Atua nela tanto a força magnética atrativa como os pesos calibrados ( $P_1$ ).

As posições 1 e 2 onde fica a massa 2 são as mesmas da Análise 1. Pela Fig. V.9 temos:

$F_{Mx}$  = força magnética atrativa a ser calibrada quando o imã 2 se encontra na Posição 2;

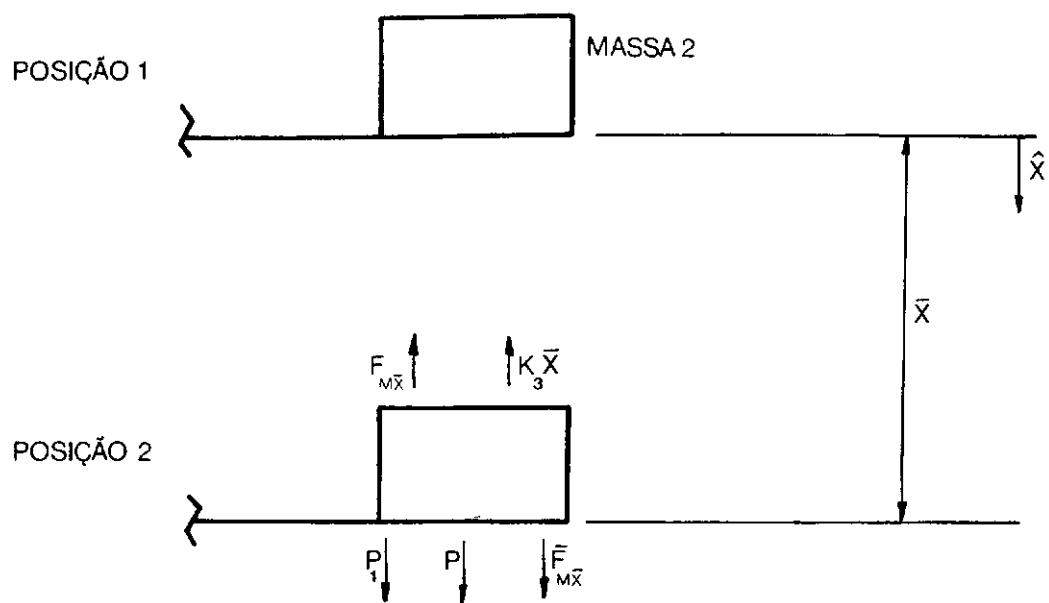
$P_1$  = peso calibrador colocado na massa 2 para dar o deslocamento igual e de sentido contrário ao que ela sofre quando submetida à força magnética atrativa.

Temos:

$$P_1 + P + \bar{F}_{Mx} - F_{Mx} - K_3 \bar{x} = 0 \Rightarrow P_1 + P + \bar{F}_{Mx} = F_{Mx} + K_3 \bar{x}$$

Mas, pela Análise 1, temos que:

$$\bar{x} = x_1 + x_2$$



- FIG V. 9 -

Logo:

$$P_1 + P + \bar{F}_{Mx} = F_{Mx} + K_3 x_1 + K_3 x_2 \quad (V.2)$$

Sendo:

$$P = K_3 x_1 \quad (V.3)$$

Substituindo (V.1) e (V.3) em (V.2) temos:

$$P_1 = F_{Mx}$$

Esse resultado comprova que, apesar de todas as forças que atuam durante a calibração, o peso calibrador ( $P_1$ ) é realmente igual à força magnética atrativa.

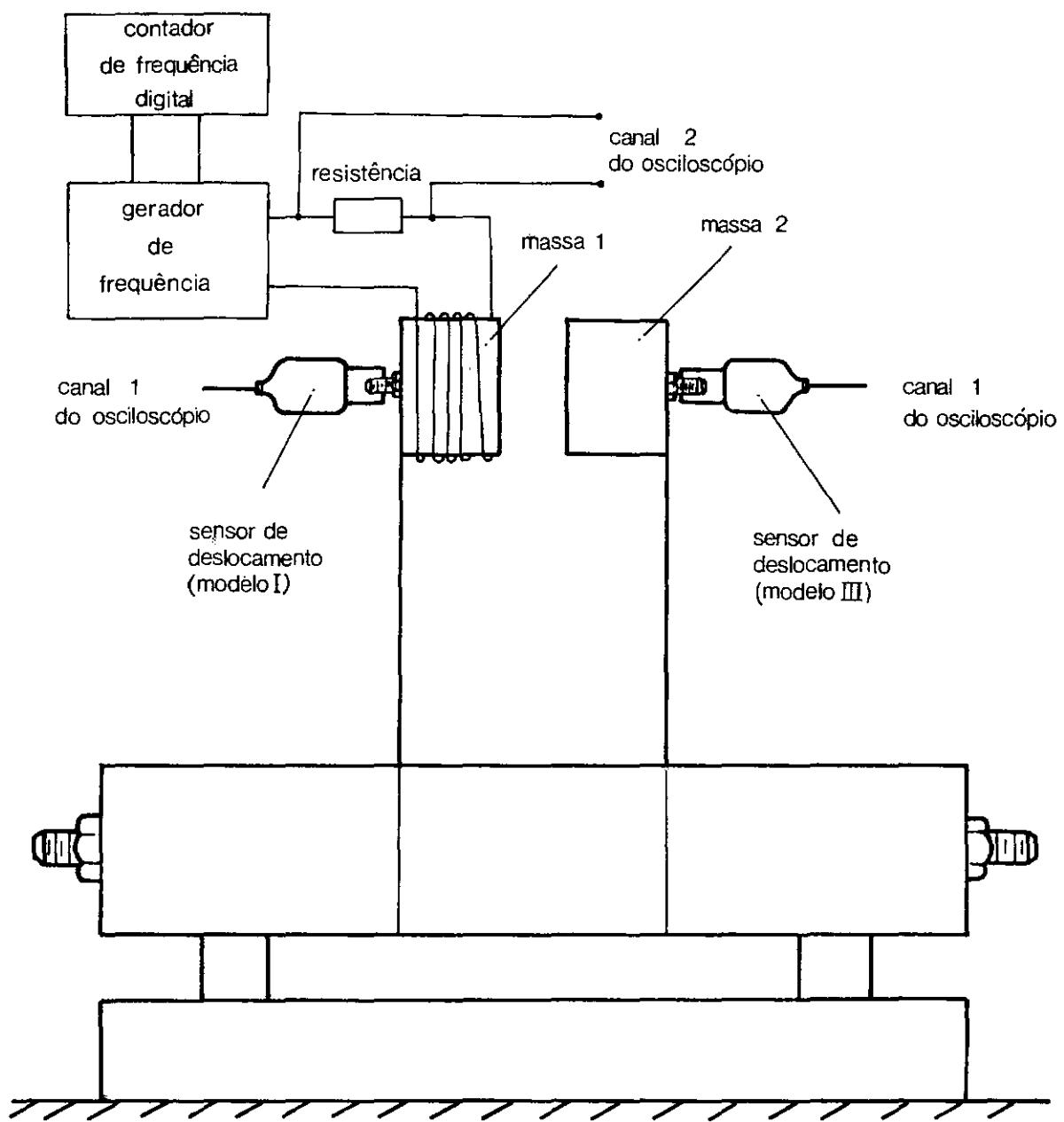
## CAPÍTULO VI

OBTENÇÃO DA AMPLITUDE (X) E DO ÂNGULO DE FASE ( $\phi$ )

Os dados de entrada do Programa II, como vimos no Cap. II, são a parte real (R) e imaginária (U) da amplitude complexa (X). Para obtermos esses dados, basta termos esta amplitude (X) e o ângulo de fase ( $\phi$ ) entre a excitação (F) a resposta (X) (Fig. II.2). Podemos tirá-los do dispositivo montado no laboratório, e, para isso, fizemos a montagem mostrada, esquematicamente, na Fig. VI.1.

VI.1. Comportamento Geral para Obtenção dos Parâmetros X e  $\phi$ 

Colocamos atrás de cada massa (1 e 2) um sensor de deslocamento como mostra esquematicamente a Fig. VI.1, saindo, de cada um deles, um cabo que foi ligado no canal 1 de um osciloscópio, que explicaremos mais detalhadamente adiante. De um dos fios que sai da bobina para o gerador de freqüência, ajustamos uma resistência no valor de 0,4 ohms. Das suas extremidades conectamos um cabo que foi ligado ao canal 2 do osciloscópio.



— FIG. VI.1 —

Ao gerador de freqüência acoplamos um Contador de Freqüência Digital (C.F.D.) para que tivéssemos maior precisão de freqüência da corrente que ia para a bobina, como já explicamos em capítulo anterior.

Dessa forma, ajustamos o gerador de freqüência para a freqüência escolhido, que é mostrado pelo Contador de Freqüência Digital (C.F.D.). Conectamos o cabo do sensor de deslocamento (Modelo I), acoplado à massa 1, ao canal 1 do osciloscópio. Temos, então, na sua tela a onda vinda da queda de voltagem registrada pela resistência de 0,4 ohms, que traduz a força de excitação ( $F$ ) do sistema, e a onda vinda do sensor de deslocamento (Modelo I), que mostra a amplitude ( $X$ ) de vibração de vibração da massa em questão. Explicaremos melhor esta parte mais adiante. Estando a tela do osciloscópio mostrando essas duas ondas, tiramos uma foto. Mantendo a mesma freqüência, conectamos, agora, ao canal 1 do osciloscópio, o cabo do sensor de deslocamento (Modelo III), acoplado à massa 2. Tiramos, dessa forma, outra foto. Obtemos, assim, os pares de onda força e amplitude para cada massa e para as oito freqüências que desejamos.

## VI.2. Comentários Sobre a Obtenção dos Parâmetros $X$ e $\phi$

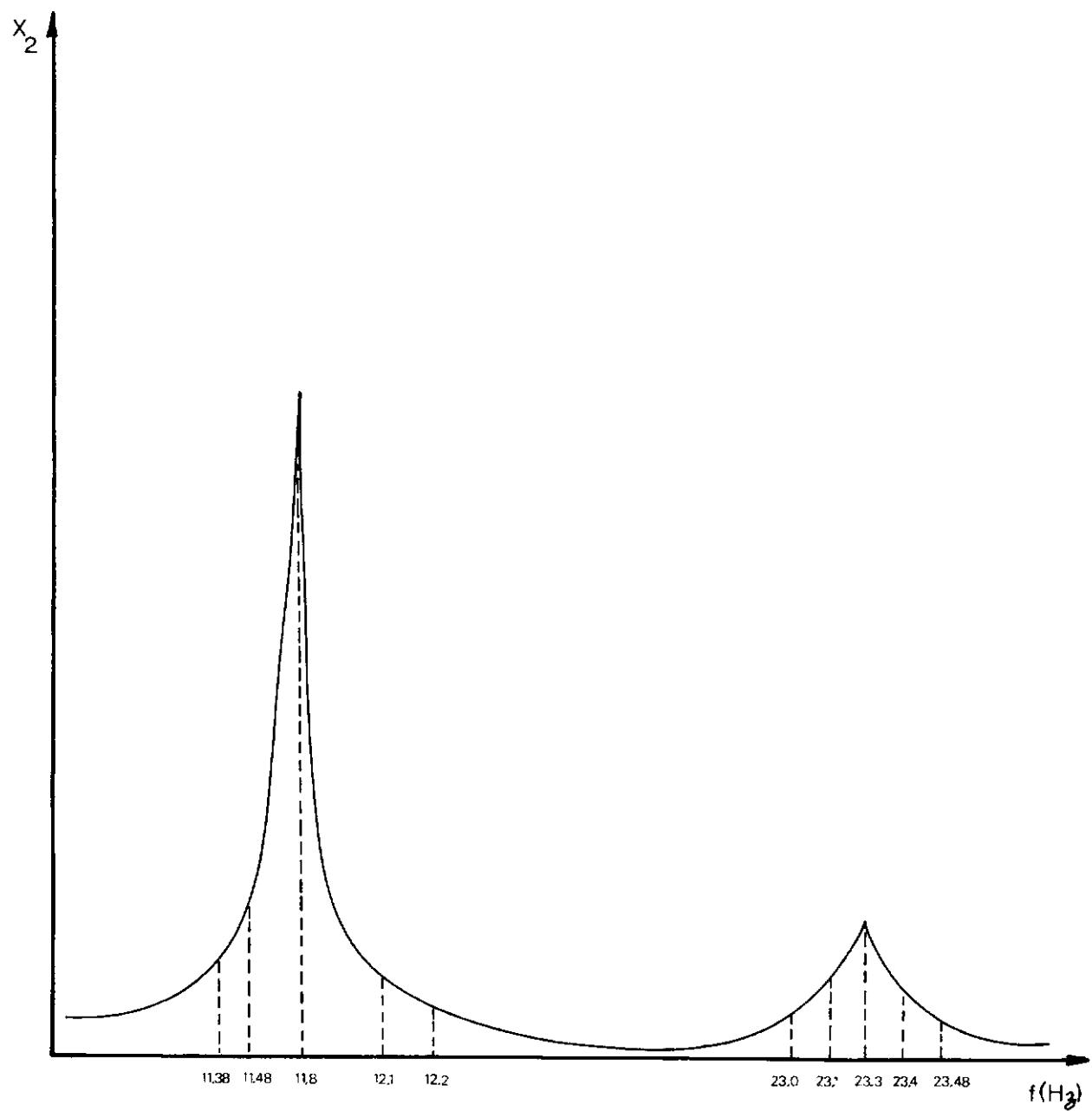
### VI.2.1. Sobre o valor das freqüências

Obtivemos os gráficos de cada massa quando fizemos a freqüência de excitação variar, passando pelas amplitudes máxi-

mas de cada uma delas. Notamos que os picos ocorrem perto das freqüências 11,8 Hz e 23,3 Hz. Pegamos pontos próximos destas freqüências para as fotos dos pares de onda força e deslocamento pois, assim, é maior a precisão de medida e mais fácil a obtenção das ondas na tela do osciloscópio. As freqüências escolhidas foram oito: 11,38 Hz; 11,48 Hz; 12,1 Hz; 12,2 Hz; 23,0 Hz; 23,1 Hz; 23,4 Hz; 23,48 Hz. O gráfico da Fig. VI.2, que mostra as amplitudes da massa 2 para essa faixa de freqüência de excitação, ajuda a visualizar o local das freqüências para a obtenção dos dados do Programa II.

Na verdade, esses são os valores mais prováveis das freqüências quando as fotos foram batidas. Devido a erros dos aparelhos e muita dificuldade em colocar uma freqüência de excitação em que o Contador de Freqüência Digital (C.F.D.) fornece sempre o mesmo valor, resolvemos obter a média dos valores das freqüências. Assim, registramos os cinco valores mostrados pelo Contador de Freqüência Digital (C.F.D.) enquanto eram batidas cada foto, para, a partir daí, tirar uma média e termos o valor mais provável da freqüência com que o sistema estava sendo excitado.

A Tab. VI.1 e a Tab. VI.2 mostra a freqüência registrada enquanto eram batidas as fotos para cada massa:



- FIG VI . . 2 -

Tab. VI.1

## M A S S A 1

Freqüências mostradas pelo C.F.D. (Hz)					Média (Hz)
11,4	11,4	11,3	11,4	11,4	11,38
11,5	11,5	11,4	11,5	11,5	11,48
12,1	12,1	12,1	12,1	12,1	12,10
12,2	12,2	12,2	12,2	12,2	12,20
23,0	23,0	23,0	23,0	23,0	23,00
23,1	23,1	23,1	23,1	23,1	23,10
23,4	23,4	23,4	23,4	23,4	23,40
23,5	23,5	23,5	23,4	23,5	23,48

Tab. VI.2

## M A S S A 2

Freqüências mostradas pelo C.F.D. (Hz)					Média (Hz)
11,4	11,3	11,4	11,4	11,4	11,38
11,5	11,5	11,4	11,5	11,5	11,48
12,1	12,1	12,1	12,1	12,1	12,10
12,2	12,2	12,2	12,2	12,2	12,20
23,0	23,0	23,0	23,0	23,0	23,00
23,1	23,1	23,1	23,1	23,1	23,10
23,4	23,4	23,4	23,4	23,4	23,40
23,5	23,5	23,5	23,4	23,5	23,48

### VI.2.2. Sobre ângulo de fase ( $\phi$ )

Como vimos no capítulo anterior, a força de excitação ( $F$ ) do sistema é gerada pelo campo magnético que vem da bobina, quando por ela passa uma corrente alternada senoidal.

Para sabermos o ângulo de fase ( $\phi$ ) entre a excitação ( $F$ ) e a resposta ( $X$ ) do sistema, precisávamos colocar no osciloscópio uma onda que estivesse em fase com essa força ( $F$ ), e outra com o deslocamento ( $X$ ) da respectiva massa que estivéssemos observando. Para isso, colocamos uma resistência num dos fios que vai da bobina para o gerador de freqüência (Fig. VI.1). Com o osciloscópio registrando a queda de tensão nessa resistência, observamos uma onda em fase com a corrente que passa pela bobina, e que gera o campo magnético. Devemos notar que, embora existam fatores que defasam a corrente da tensão nas extremidades da bobina, a onda mostrada pelo osciloscópio está em fase com a corrente geradora do campo magnético, pois esta onda mostra a queda de tensão causada pela resistência, elemento este que não defasa a tensão da corrente, e esta corrente é a mesma que passa pela bobina, ou seja, já traz todas as defasagens que ocorreram pela sua passagem nesta bobina.

Para nos certificarmos da não existência de defasagem entre a força excitadora ( $F$ ) e a corrente senoidal ( $I$ ) geradora do campo magnético, fazemos a análise abaixo:

Temos a fórmula<sup>38</sup>:

$$d\bar{F} = i_m d\bar{l} \cdot \bar{B} \quad (\text{VI.1})$$

Onde:

$\bar{F}$  = força excitadora;

$i_m$  = corrente de magnetização na superfície lateral do imã;

$\bar{l}$  = comprimento total do imã ao longo do seu formato;

$\bar{B}$  = campo magnético;

Para o nosso caso temos:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 N I}{\ell}$$

Onde:

$\mu_0$  = permeabilidade magnética do imã;

$N$  = número de espiras da bobina;

$I$  = corrente senoidal que passa pela bobina

$$= I_0 \sin \omega t$$

Como vemos,  $\bar{B}$  e  $\bar{l}$  são constantes. Integrando, então, a equação (VI.1) temos:

$$F = i_m \mu_0 N I_0 \sin t = i_m \mu_0 NI$$

Como  $i_m$ ,  $\mu_0$  e  $N$  são constantes, notamos que a força ( $F$ ) está em fase com a corrente ( $I$ ).

Outra coisa que poderia causar essa defasagem é a existência de histerese. Acontece, porém, que durante a calibração, usamos uma corrente contínua até 100 mA, que fazia atrair o outro imã. Ao diminuirmos essa corrente até zero, notamos, pelo osciloscópio, que o imã atraído retornava à sua posição original, não havendo, portanto, nenhum campo magnético residual significativo de forma que o osciloscópio pudesse registrar. Sendo assim, achamos que podíamos desprezar a histerese, que possivelmente existe, uma vez que a maior amplitude de corrente usada neste capítulo é de 12,5 mA, ou seja, oito vezes menor que a verificada.

#### VI.2.3. Sobre a amplitude ( $X$ )

As fotos dos oito pares de onda para cada massa foram obtidas pelo processo Polaroid.

Os sensores de deslocamento acoplados às massas 1 (Modelo I) e 2 (Modelo III) foram regulados para que quando as massas estivessem em repouso eles registrassem no osciloscópio o ponto médio das suas faixas lineares de trabalho, respectivamente, (Apêndice II), sendo assim, as massas oscilam em torno desse ponto.

Para todas as fotos, colocamos a corrente mais alta que sai do gerador de freqüência para que provocasse a maior oscilação das massas de tal forma que não ultrapassasse a faixa linear dos sensores. Assim, poderíamos saber com maior precisão tanto a força de excitação do sistema como a amplitude de oscilação de cada massa. Dessa forma, a amplitude de vibração das massas não ultrapassavam a amplitude de vibração máxima ob-

tida quando verificamos o comportamento linear do dispositivo (Cap. III).

Para a obtenção das fotos, não pudemos colocar a mesma intensidade de corrente na bobina, isto é, a mesma força da excitação do sistema, para as duas massas numa mesma freqüência de excitação, pois se o fizéssemos a força que faz com que a amplitude de uma massa seja suficiente grande para tirarmos uma foto com boa precisão numa dada freqüência perto do pico máximo de amplitude da outra massa, essa força, então, provoca uma amplitude de vibração grande nesta última massa fazendo-a ultrapassar a faixa linear do sensor de deslocamento.

Para melhor compreensão, podemos dar o exemplo seguinte. A massa 2 tem seu pico máximo de amplitude na freqüência de 11,8 Hz. Para as fotos das amplitudes de vibração das massas perto dessa freqüência, temos que colocar a força de excitação do dispositivo menor para a massa 2 do que para a massa 1. Pois com a mesma força, a massa 2 tem amplitude de vibração que ultrapassa à faixa linear do sensor de deslocamento. E, para a foto da amplitude da massa 1, temos que ter uma força de excitação maior do que para a massa 2, pois, só assim, temos uma onda suficientemente grande para que possamos medir. Como o sistema tem um comportamento dinâmico linear, basta multiplicar a amplitude da massa 2 pelo valor com que a força de excitação foi dividida em relação à amplitude da massa 1 quando esta foi fotografada.

#### VI.2.4. Sobre o valor obtido das amplitudes (X)

Devemos observar, entretanto, que no momento em que ti

ramos as fotos das amplitudes para a massa 1, perto da freqüência onde ocorre o pico máximo de amplitude da massa 2, em algumas fotos, tinha uma amplitude de vibração maior do que a amplitude máxima, observada no Cap. III, em que garantíamos o comportamento linear do dispositivo. A Tab. VI.3, nos mostra as amplitudes da massa 2 quando foram obtidas as fotos em torno do pico menor de amplitude da massa 1, e a Tab. VI.4 nos mostra as amplitudes da massa 1 quando foram tiradas as fotos em torno do pico menor de amplitude da massa 2. Ao lado delas, temos o valor máximo de amplitude que os sensores de deslocamento puderam oferecer, e, assim, garantir que até essa amplitude o comportamento dinâmico do dispositivo é linear. Embora ele possa ter este comportamento para amplitude maiores, isto não pode ser verificado devido ao limite de operação dos sensores.

Na Tab. VI.3, nas freqüências de 11,38 Hz e 11,48 Hz, as amplitudes da massa 2 são superiores a 55  $\mu\text{m}$  - limite de amplitude da massa 2, em que o comportamento do dispositivo é linear, já comentado no Cap. III. Isto quer dizer que, quando tiramos essas duas fotos das amplitudes da massa 1, esta massa 1 tinha amplitudes baixas e dentro da faixa em que o dispositivo tem comportamento linear; porém, as amplitudes da massa 2 são maiores que o limite testado (55  $\mu\text{m}$ ), fazendo com que, a priori, não possamos afirmar se o comportamento do dispositivo é realmente linear. O mesmo raciocínio é válido para as amplitudes da massa 1 nas freqüências de 23,0 Hz; 23,1 Hz e 23,4 Hz (Tab. VI.4).

Das dezesseis fotos tiradas que nos fornecem dezesseis pontos para os gráficos (colocados mais adiante), existem cinco pontos que não temos certeza do comportamento dinâmico do dispositivo ser linear. Checamos, porém, esses pontos com os outros

Tab. VI.3

FOTO DA MASSA 1 - Frequências em torno do pico máximo  
de amplitude da massa 2

Freq. (Hz)	Amplitude da massa 1 (μm)	Amplitude da massa 2 (μm)	Amplitude máxima da massa 2. Até onde o Cap. III garante o comportamento linear do dispositivo
11,38	4,2	113,2 *	
11,48	6,7	155,2 *	
12,10	5,0	46,0	Massa 2
12,20	4,8	38,4	55 μm

Tab. VI.4

FOTO DA MASSA 2 - Freqüências em torno do pico máximo  
de amplitude da massa 1

Freq. (Hz)	Amplitude da massa 1 (μm)	Amplitude da massa 2 (μm)	Amplitude máxima da massa 1. Até onde o Cap. III garante o comportamento linear do dispositivo
23,00	2,9	126,3 *	
23,10	3,6	318,8 *	
23,40	4,2	99,6 *	Massa 1
23,48	3,6	63,4	96 μm

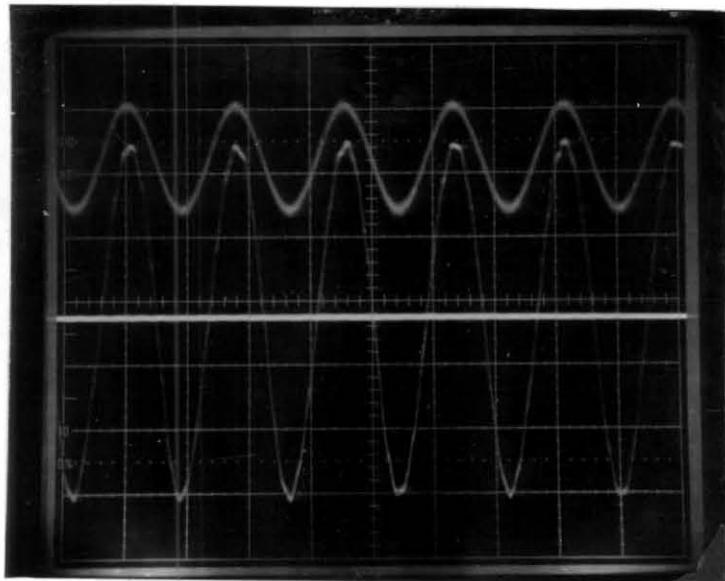
e com os gráficos dos programas de computador, e reparamos que eles são coerentes com os resultados, havendo então grande possibilidade deles ainda estarem numa faixa de amplitude, que o comportamento dinâmico do dispositivo é linear. Notamos também, que, a maior amplitude - 0,318 mm, é a da massa 2, na freqüência de 23,1, e que na prática essa amplitude é ainda quase imperceptível, o que nos leva a crer que o dispositivo deva ter o comportamento linear mesmo com essa amplitude de vibração.

#### VI.2.5. Sobre a obtenção do valor das amplitudes ( $X$ )

As fotos tiradas dos pares de onda (força e deslocamento) estão no Apêndice V. A onda superior representa a força de excitação e a inferior o deslocamento sofrido pela respectiva massa. Mostraremos aqui, apenas os cálculos do  $R$ ,  $U$  e ângulo de fase ( $\phi$ ) da primeira freqüência de excitação (11,38 Hz), para as massas 1 e 2, uma vez que os outros seguem o mesmo raciocínio. Os resultados de todos os cálculos se encontram no Apêndice V.

##### VI.2.5.1. Foto nº 1

Esta foto mostra o par de ondas (força e deslocamento) para a massa 1. Para medir os deslocamentos desta massa usamos o sensor Modelo I que tem para a sua faixa linear a sensibilidade de 0,066 Volt/ $\mu$ m. A freqüência da força de excitação do sistema vale:  $F_1 = 11,38$  Hz.



#### VI.2.5.1.a. Cálculo da amplitude da força de excitação

Quando o canal 2 do osciloscópio registra 0,01 Volt por divisão da tela, a amplitude da força tem 0,4 divisões. A foto foi batida com este canal registrando 0,005 V/div mostrando, então, uma amplitude da força de 0,8 divisões, sendo pico a pico 1,6 divisões.

Temos a relação:

$$0,01 \text{ V} = 1 \text{ div}$$

$$\Rightarrow x = 0,004 \text{ V}$$

$$x = 0,4 \text{ div}$$

Podemos tirar a corrente (I):

$$V = RI \Rightarrow 0,004 = 0,4 I \Rightarrow I = \frac{0,004}{0,04} \Rightarrow I = 10 \text{ mA}$$

Pelo gráfico da calibração da força (Cap. V) temos:

$$\frac{I}{F} = 15 \text{ mA/g}$$

Logo:

$$\begin{aligned} 15 \text{ mA} - 1 \text{ g} \\ \Rightarrow y = \frac{10}{15} \text{ g} \Rightarrow y = 0,66 \text{ g} = P \\ 10 \text{ mA} - y \end{aligned}$$

Esse valor de y é o usado para a amplitude da força (P) nos programas de computador. Passando para o sistema MKS temos:

$$P = 0,66 \cdot \frac{9,8}{1000} \Rightarrow P = 0,0065 \Rightarrow P = 0,007 \text{ N}$$

#### VI.2.5.1.b. Cálculo da amplitude do deslocamento (X)

Esta foto foi batida com o canal 1 do osciloscópio registrando 0,1 Volt por divisão, e fizemos, com o microscópio, três medidas do pico superior ao inferior da onda, de um mesmo ciclo. Vimos, pela foto, que os picos dessa onda - deslocamento apresenta deformações. Isto ocorre devido ao ruído apresentado pelo sensor, que não é blindado, que mede seu deslocamento (Modelo I).

1<sup>a</sup> medida (picos do mesmo ciclo):

Pico superior: 45,81 mm

Pico inferior: 0,93 mm

$$\Rightarrow X_1 = \frac{45,81 - 0,93}{2} \Rightarrow X_1 = \frac{44,88}{2} \Rightarrow X_1 = 22,44 \text{ mm}$$

2<sup>a</sup> medida (picos do mesmo ciclo mas diferentes do anterior):

Pico superior: 45,46

Pico inferior: 0,78

$$\Rightarrow X_2 = \frac{45,46 - 0,78}{2} \Rightarrow X_2 = \frac{44,68}{2} \Rightarrow X_2 = 22,34 \text{ mm}$$

3<sup>a</sup> medida (picos do mesmo ciclo mas diferentes dos dois anteriores):

Pico superior: 45,82

Pico inferior: 0,75

$$\Rightarrow X_3 = \frac{45,82 - 0,75}{2} \Rightarrow X_3 = \frac{45,07}{2} \Rightarrow X_3 = 22,54 \text{ mm}$$

A amplitude usada é a média destas amplitudes, tiradas da foto, medidas pelo microscópio:

$$x = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} = \frac{22,44 + 22,34 + 22,54}{3} = \frac{67,32}{3}$$

$$x = 22,44 \text{ mm} \text{ (pelo microscópio)}$$

Para saber o deslocamento que houve na realidade, temos que passar a medida da amplitude ( $X$ ) do deslocamento obtida pelo microscópio, tirada da foto, para o referencial do osciloscópio, e, finalmente, deste para o verdadeiro deslocamento sofrido pela massa em questão.

Achamos primeiramente a relação entre a foto e o microscópio. Para isto basta medir no microscópio quanto vale uma divisão do osciloscópio, pois esta sabemos que corresponde a 10 mm. Temos então:

$$1 \text{ divisão (osciloscópio)} \equiv 8,2 \text{ mm (microscópio)}$$

Ora, se durante a foto o osciloscópio registrava 0,1 Volt/divisão, temos:

$$0,1 \text{ Volt} \equiv \text{divisão (osciloscópio)} \equiv 8,2 \text{ mm (microscópio)}$$

Assim, para cada uma das amplitudes medidas anteriormente, temos a devida alteração proporcional que corresponde a fazer o mesmo cálculo para a média das três amplitudes obtidas. Temos então para amplitude do deslocamento ( $X$ ) a relação:

$$8,2 \text{ m} \equiv 0,1 \text{ Volt} - 1 \text{ divisão}$$

$$22,44 \text{ mm} \equiv t \text{ Volt}$$

$$t = \frac{22,44 \cdot 0,1}{8,2} \Rightarrow t = 0,2737 \text{ V}$$

Foi usado, para essa massa 1, o sensor de deslocamento Modelo I que, na sua faixa linear, tem a sensibilidade de 0,066 V/ $\mu\text{m}$ . O deslocamento referido pela massa 1, na realidade, vale:

$$0,066 \text{ V} = 1 \mu\text{m}$$

$$0,2737 \text{ V} = u \mu\text{m}$$

$$\Rightarrow u = \frac{0,2737}{0,066} \Rightarrow u = 4,15 \mu\text{m}$$

Como usaremos nos programas de computador as medidas no sistema MKS temos:

$$u = X_{11} = 0,00000415 \text{ m}$$

Temos que:

$$R = X \cos \phi$$

$$U = X \sin \phi$$

Para termos, então, os valores de R e U, parte real e imaginária da amplitude complexa (X), respectivamente, temos que saber o ângulo de fase ( $\phi$ ).

#### VI.2.5.1.c. Cálculo do ângulo de fase ( $\phi$ )

O ângulo de fase ( $\phi$ ) entre a excitação e a resposta foi medido através da comparação dos picos das onda-força e onda-deslocamento.

Para saber o lugar mais provável onde se situa o pico

de cada uma dessas duas ondas, foram obtidos das fotos, pelo microscópio, três pares de pontos com ordenadas diferentes, que medem a abscissa de cada lado do pico da onda senoidal, como mostra a Fig. VI.3.

Foi escolhido o zero da ordenada e da abscissa no lugar mais conveniente para as medidas do microscópio, dependendo de cada foto.

Fazendo a média da abscissa dos pontos de cada par temos o lugar do pico da curva dado pela respectivo par de pontos. Obtemos, dessa forma, três abscissas correspondentes a três picos, associados a cada par de pontos. Achamos, agora, a média aritmética entre essas três abscissas, e ficamos sabendo, assim, a localização mais provável do pico ( $\bar{x}$  - Fig. VI.3). Calculamos essas abscissa ( $\bar{x}$ ) para o pico da onda-força e da onda-deslocamento, podendo, desta forma, obter o ângulo de fase ( $\phi$ ) como veremos a seguir. Para melhor compreensão, descrevemos cada passo do cálculo conforme ele vai sendo executado.

- Cálculo da abscissa do pico da onda-força

1. Medidas do par de ponto (1, 2)

Para a ordenada  $y_1 = 47,45$  mm, as abscissas valem:

$$x_1 = 29,98 \text{ mm}$$

$$x_2 = 25,17 \text{ mm}$$

A abscissa do pico da onda-força para esse par vale:

$$x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{29,98 + 25,17}{2} = \frac{55,15}{2} \Rightarrow \bar{x}_1 = 27,58 \text{ mm}$$

## 2. Medidas do par de pontos (3, 4)

Para a ordenada  $y_2 = 43,45 \text{ mm}$ , as abscissas valem:

$$x_3 = 31,53 \text{ mm}$$

$$x_4 = 23,75 \text{ mm}$$

A abscissa do pico da onda-força para esse par vale:

$$x_2 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{31,53 + 23,75}{2} = \frac{55,28}{2} \Rightarrow \bar{x}_2 = 27,64 \text{ mm}$$

## 3. Medidas do par de pontos (5, 6)

Para a ordenada  $y_3 = 39,45 \text{ mm}$ , as abscissas valem:

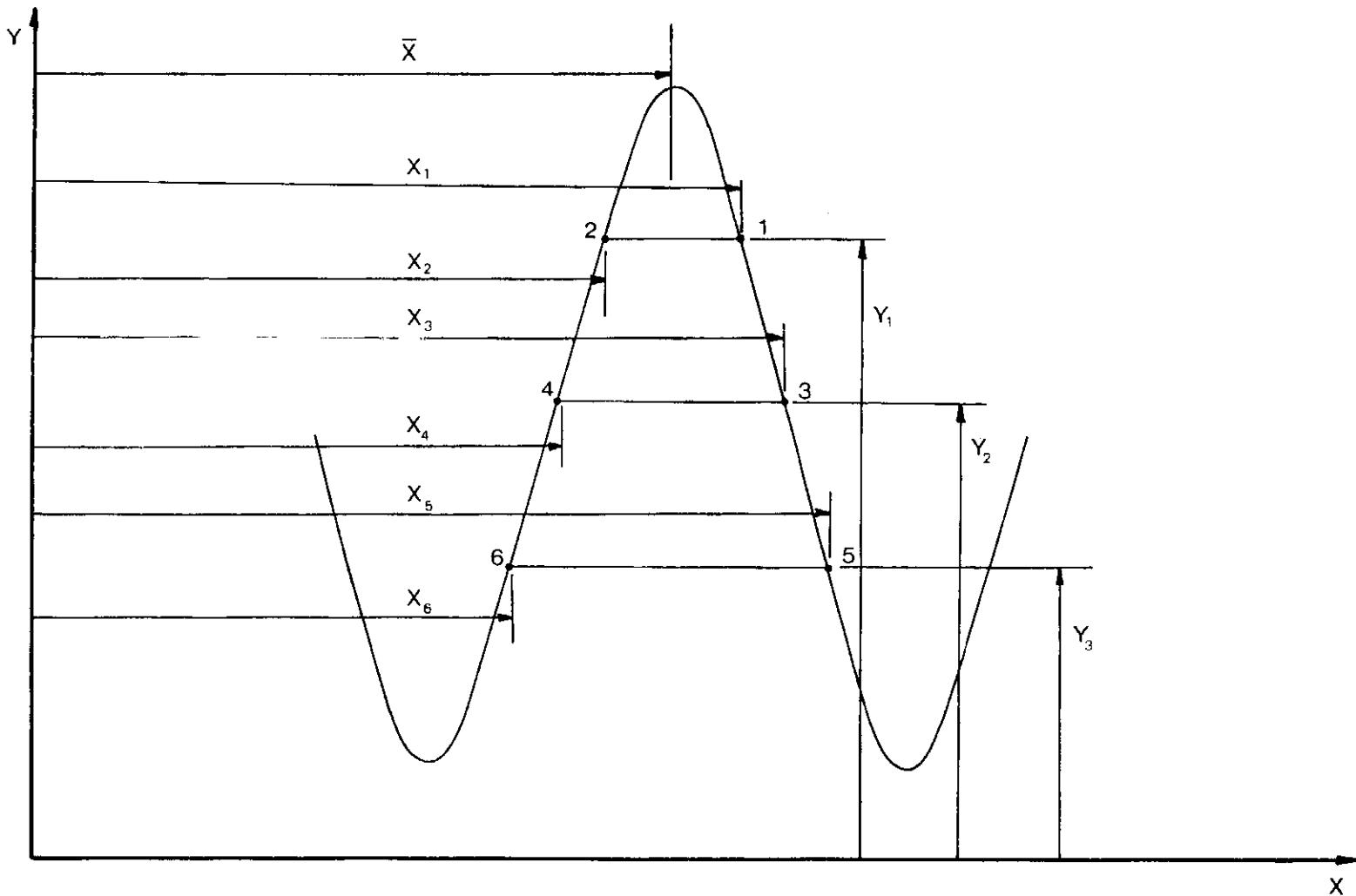
$$x_5 = 33,08 \text{ mm}$$

$$x_6 = 22,06 \text{ mm}$$

A abscissa do pico da onda-força para esse par vale:

$$x_3 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{33,08 + 22,06}{2} = \frac{55,14}{2} \Rightarrow \bar{x}_3 = 27,57 \text{ mm}$$

A abscissa mais provável do pico da onda-força vale:



- FIG. VI . 3 -

$$\bar{x}_F = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{27,58 + 27,64 + 27,57}{3} = \frac{82,79}{3}$$

$$\bar{x}_F = 27,60 \text{ mm}$$

O erro visual do microscópio pode ser considerado de  $\pm 0,020 \text{ mm} = \pm 20 \mu\text{m}$ . O erro provável que pode ter sido cometido vale:

$$\varepsilon_F = 27,64 + 0,02 - 27,60 = 0,04 + 0,02 \Rightarrow \varepsilon_F = \pm 0,06 \text{ mm}$$

Vale observar que, para maior precisão de medida e por ter a onda-força saído muito espessa nas fotos, os pontos obtidos foram aqueles que ficam na parte externa da onda, ao invés de serem no seu interior.

- Cálculo da abscissa do pico da onda-deslocamento

1. Medida do par de pontos (1, 2)

Para a ordenada  $y_1 = 36,55 \text{ mm}$ , as abscissas valem:

$$x_1 = 30,11 \text{ mm}$$

$$x_2 = 25,46 \text{ mm}$$

A abscissa do pico da onda-deslocamento para esse par vale:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{30,11 + 25,46}{2} = \frac{55,57}{2} \Rightarrow \bar{x}_1 = 27,79 \text{ mm}$$

## 2. Medidas do par de pontos (3, 4)

Para a ordenada  $y_2 = 20,55 \text{ mm}$ , as abscissas valem:

$$x_3 = 31,74 \text{ mm}$$

$$x_4 = 23,54 \text{ mm}$$

A abscissa do pico da onda-deslocamento para esse par vale:

$$\bar{x}_2 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{31,74 + 23,54}{2} = \frac{55,28}{2} \Rightarrow \bar{x}_2 = 27,64 \text{ mm}$$

## 3. Medidas do par de pontos (5, 6)

Para a ordenada  $y_3 = 4,55 \text{ mm}$ , as abscissas valem:

$$x_5 = 33,71 \text{ mm}$$

$$x_6 = 21,53 \text{ mm}$$

A abscissa do pico da onda-deslocamento para esse par vale:

$$\bar{x}_3 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{33,71 + 21,53}{2} = \frac{55,24}{2} \Rightarrow \bar{x}_3 = 27,62 \text{ mm}$$

A abscissa mais provável do pico da onda-deslocamento vale:

$$\bar{x}_D = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3}{3} = \frac{27,79 + 27,64 + 27,62}{3} = \frac{83,05}{3}$$

$$\bar{x}_D = 27,68 \text{ mm}$$

O erro que pode ter ocorrido considerando que o erro de leitura é  $\pm 20 \mu\text{m}$ :

$$\varepsilon_D = 27,79 + 0,02 - 27,68 = 0,11 + 0,02 = \varepsilon_D = \pm 0,13 \text{ mm}$$

As ondas desta foto podem ser esquematizadas segundo a Fig. VI.4.

Chamamos de  $\bar{\phi}$  ao ângulo que corresponde ao módulo da diferença entre  $\bar{x}_D$  e  $\bar{x}_F$ . Temos então:

$$\bar{\phi} = \left| \bar{x}_D - \bar{x}_F \right| = \left| 27,68 - 27,60 \right| = 0,08 \text{ mm}$$

Devemos observar que caso  $\bar{x}_F$  seja maior que  $\bar{x}_D$  o ângulo de fase ( $\phi$ ) não será igual a ( $\bar{\phi}$ ), mas sim à diferença entre  $360^\circ$  e  $\bar{\phi}$ , pois a resposta (deslocamento) sempre está atrasada em relação à excitação.

Para obtermos o valor de  $\bar{\phi}$  precisamos saber a relação em um ciclo da onda-força ou deslocamento, uma vez que ambas tem a mesma freqüência, e seu comprimento na foto. Para isso, medimos na foto o comprimento do ciclo da onda-deslocamento pois esta sendo maior oferece maior precisão.

Através da média de três medidas do comprimento do ciclo desta onda, tiramos o seu valor provável (Fig. VI.4).

1.  $x_1 = 16,30 \text{ mm}; x_2 = 30,14 \text{ mm} \Rightarrow x_{C_1} = 30,14 - 16,30 \Rightarrow x_{C_1} = 14,50 \text{ mm}$
2.  $x_1 = 30,14 \text{ mm}; x_2 = 44,80 \text{ mm} \Rightarrow x_{C_2} = 44,80 - 30,14 \Rightarrow x_{C_2} = 14,66 \text{ mm}$
3.  $x_1 = 30,80 \text{ mm}; x_2 = 45,34 \text{ mm} \Rightarrow x_{C_3} = 45,34 - 30,80 \Rightarrow x_{C_3} = 14,54 \text{ mm}$

$$\bar{x}_c = \frac{x_{C_1} + x_{C_2} + x_{C_3}}{3} = \frac{14,50 + 14,66 + 14,54}{3} = \frac{43,70}{3}$$

$$\bar{x}_c = 14,57 \text{ mm}$$

$\bar{x}_c$  = valor do comprimento do ciclo da onda-deslocamento (ou força) que corresponde a  $360^\circ$ .

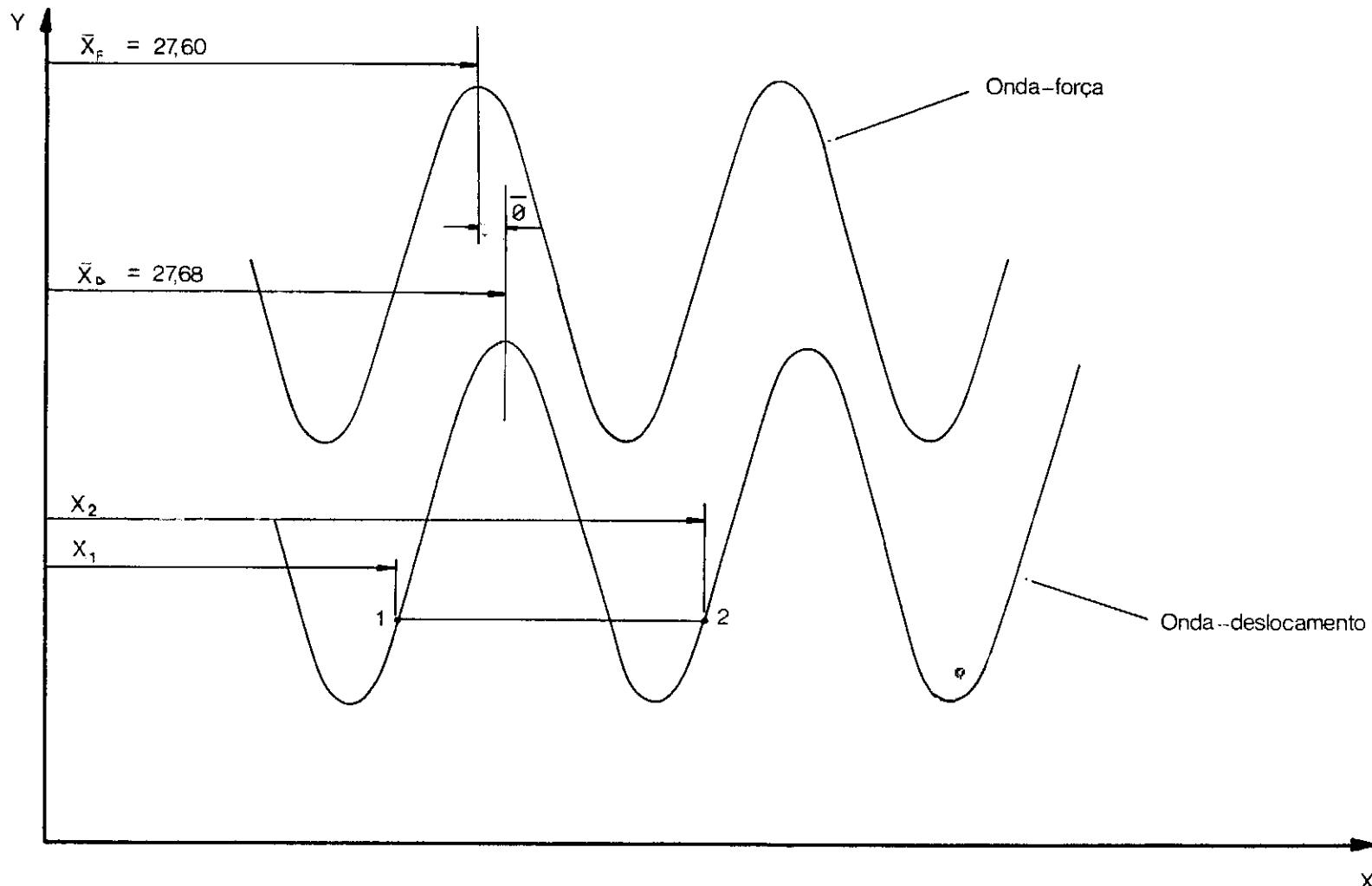
Para termos  $\bar{\phi}$  fazemos a seguinte relação:

$$14,57 \text{ mm} - 360^\circ$$

$$0,08 \text{ mm} - \bar{\phi}$$

$$\bar{\phi} = \frac{0,08 \cdot 360^\circ}{14,57} \quad \bar{\phi} \equiv 2^\circ$$

Vale notar que não sabemos o sinal da amplitude da força de excitação ( $P$ ) na foto, isto é, se a força é positiva no seu pico superior ou inferior. Pois, no referencial colocado no modelo teórico, que corresponde ao dos sensores de deslocamento, a força ( $P$ ) é positiva se repelir as massas 1 e 2, e o pico superior da onda-deslocamento corresponde a um deslocamento positivo. Este sinal só pode ser constatado depois de rodado os programas de computador e ter comparado seus resultados com os das fotos. Após essa comparação, notamos que o pico inferior da onda-força ocorre quando as massas 1 e 2 se repelem,



-FOTO N° 1-

- FIG VI . 4 -

ou seja, é neste pico que a amplitude da força (P) é positiva. Logo, temos a relação abaixo:

$$180 - \bar{\phi} = \phi \Rightarrow \phi = -188^\circ \Rightarrow \phi = +172^\circ$$

Podemos ter, agora, R (parte real da amplitude) e U (parte imaginária da amplitude). Pela Fig. VI.5 podemos ter as relações que nos fornecem R e U:

$$X \cos \phi = R \quad X \sin \phi = U$$

Por ser os valores (R e U) relativos à massa 1 e à primeira freqüência ( $F_1 = 11,38 \text{ Hz}$ ), a notação fica sendo a abaixo:

$$R_{11} = -0,00000415 \cdot \cos 2^\circ = 0,00000415 \cdot 0,9993908$$

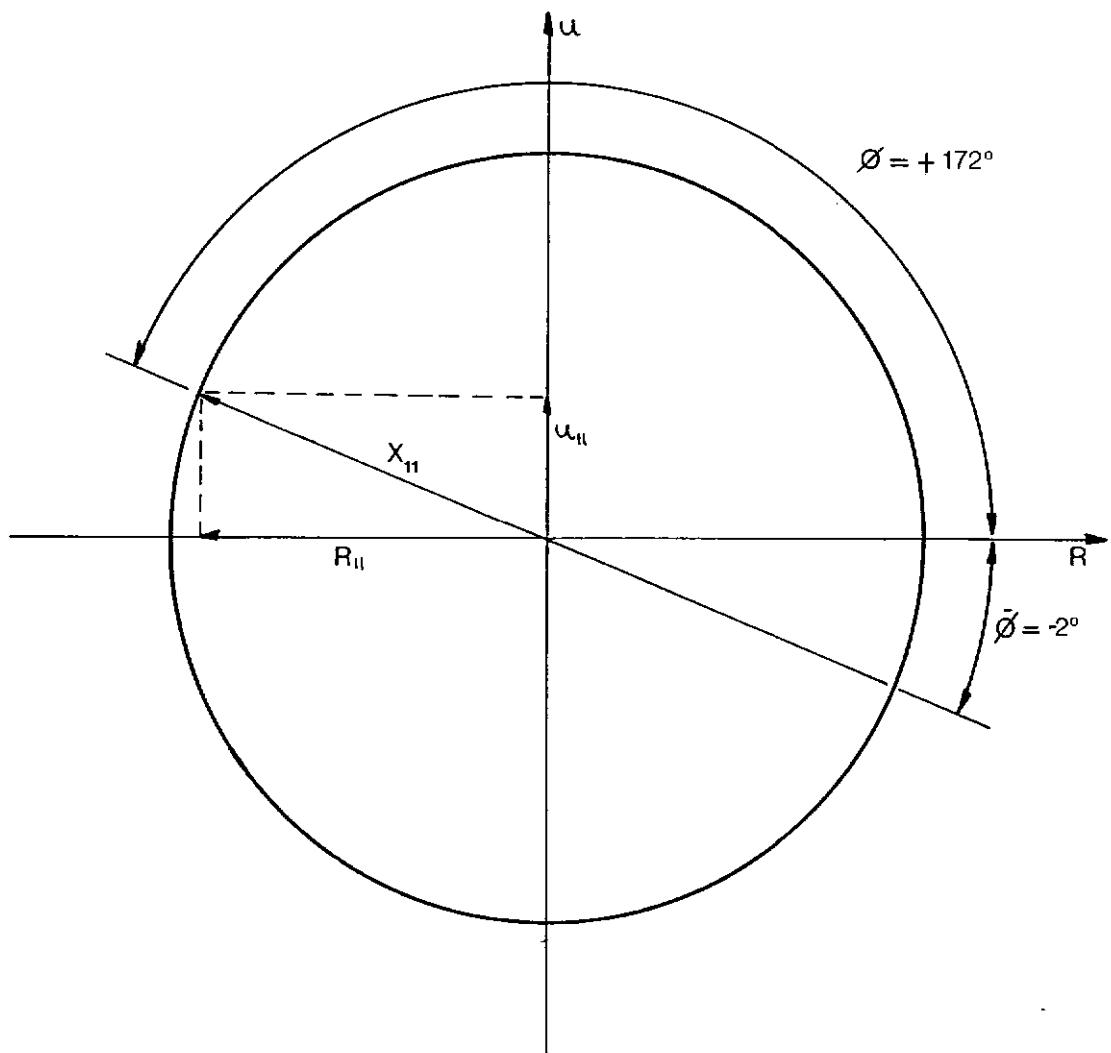
$$R_{11} = -0,000004147 \text{ m}$$

$$U_{11} = +0,00000415 \cdot \sin 2^\circ = 0,00000415 \cdot 0,0348995$$

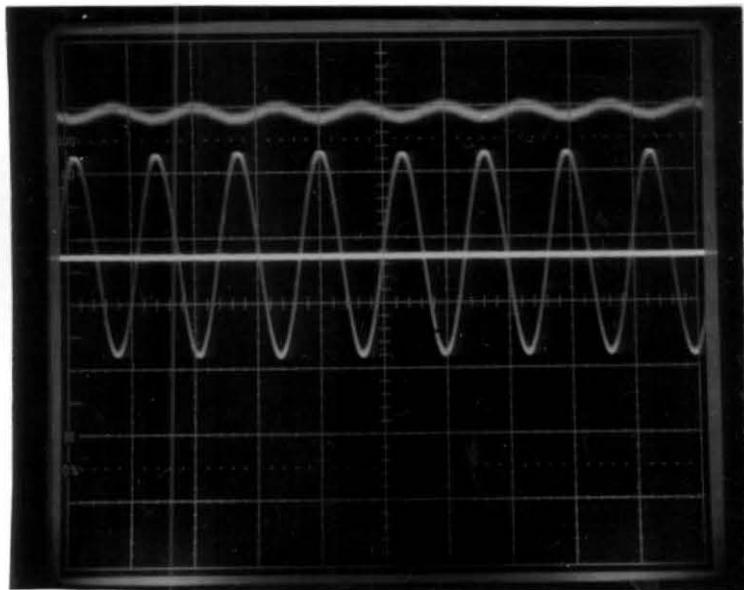
$$U_{11} = +0,00000145 \text{ m}$$

#### VI.2.5.2. Foto nº 2

Esta foto mostra o par de ondas (força e deslocamento) para a massa 2. Para medir os deslocamentos desta massa usamos o sensor Modelo III que tem para a sua faixa linear a sensibilidade de  $0,1056 \text{ Volt}/\mu\text{m}$ . A freqüência da força de excitação do sistema vale:  $F_1 = 11,38 \text{ Hz}$ .



- FIG VI . . . 5 -



#### VI.2.5.2.a. Cálculo da amplitude da força de excitação

Esta foto foi batida com o canal 2 do osciloscópio registrando 0,005 Volt/divisão da tela, o que faz a força ter 0,1 divisões de amplitude.

Temos a relação:

$$0,005 \text{ V} - 1 \text{ div}$$

$$x - 0,1 \text{ div}$$

$$\Rightarrow x = 0,5 \text{ mV}$$

Podemos ter a corrente ( $I$ ) através da fórmula abaixo:

$$V = RI \Rightarrow 0,5 = 0,4 I \Rightarrow I = \frac{0,5}{0,4} \Rightarrow I = 1,25 \text{ mA}$$

Pela foto nº 1, sabemos que a amplitude da força (P) a ser usada pelos programas de computador corresponde a uma corrente (I) de 10 mA. Como a corrente (I) aqui usada é oito vezes menor (1,25 mA) implica que a amplitude da força (P) é também oito vezes menor, logo, a amplitude do deslocamento aqui achada deverá ser multiplicada por oito, como já foi explicado no item VI.2.3.

#### VI.2.5.2.b. Cálculo da amplitude do deslocamento (X)

Esta foto foi batida com o canal 1 do osciloscópio registrando 1,0 Volt/divisão. Seguindo o mesmo raciocínio para a foto nº 1 temos:

1<sup>a</sup> Medida (picos do mesmo ciclo)

Pico superior: 30,4 mm

Pico inferior: 5,8 mm

$$\Rightarrow X_1 = \frac{30,4 - 5,8}{2} = \frac{24,60}{2}$$

$$X_1 = 12,3 \text{ mm}$$

2<sup>a</sup> Medida (picos do mesmo ciclo mas diferentes do anterior)

Pico superior: 30,24 mm

Pico inferior: 5,8 mm

$$\Rightarrow X_2 = \frac{30,24 - 5,8}{2} = \frac{24,44}{2}$$

$$X_2 = 12,22 \text{ mm}$$

<sup>3<sup>a</sup></sup> Medida (picos do mesmo ciclo mas diferentes dos dois anteriores)

Pico superior: 30,26 mm

Pico inferior: 5,8 mm

$$\Rightarrow X_3 = \frac{30,26 - 5,8}{2} = \frac{24,46}{2}$$

$$X_3 = 12,23 \text{ mm}$$

A amplitude usada é a média das três amplitudes, tiradas da foto, medidas pelo microscópio.

$$X = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} = \frac{12,3 + 12,22 + 12,23}{3} = \frac{36,75}{3}$$

$$X = 12,25 \text{ mm} \text{ (pelo microscópio)}$$

Seguindo o raciocínio da foto nº 1 temos:

1 divisão (osciloscópio) ≡ 8,2 mm (microscópio)

Na foto nº 2 o osciloscópio registrava 1 Volt/divisão,

logo:

$$1 \text{ Volt} \equiv 1 \text{ divisão (osciloscópio)} \equiv 8,2 \text{ mm (microscópio)}$$

A amplitude do deslocamento (X) corresponde a:

$$8,2 \text{ mm} - 1 \text{ Volt} - 1 \text{ divisão}$$

$$12,25 \text{ mm} - t$$

$$t = 1,4939 \text{ V}$$

Como o sensor usado (Modelo III) tem na sua faixa li  
near a sensibilidade de  $0,1056 \text{ Volt}/\mu\text{m}$ , temos:

$$0,1056 \text{ V} - 1 \mu\text{m}$$

$$1,4939 \text{ V} - u \mu\text{m}$$

$$\Rightarrow u = 14,15 \mu\text{m}$$

Como a força de excitação usada foi oito vezes menor que a desejada, a amplitude do deslocamento (X) calculada acima deverá ser multiplicada por oito, para termos o valor a ser usado nos programas de computador, como foi explicado no item VI.2.3.

Teremos:

$$x = u \cdot 8 = 14,15 \cdot 8 \Rightarrow X = 113,2 \mu\text{m}$$

No sistema MKS temos:

$$x_{12} = 0,0001132 \text{ mm}$$

Mas temos que:

$$R = X \cos \phi ; \quad U = X \sin \phi$$

Logo, para sabermos os valores de  $R$  e  $U$ , a parte real e imaginária da amplitude complexa ( $X$ ) respectivamente, temos que saber o ângulo de fase ( $\phi$ ).

#### VI.2.5.2.c. Cálculo do ângulo de fase ( $\phi$ )

Seguimos aqui o mesmo raciocínio usado para a foto nº 1.

- Cálculo da abscissa do pico da onda-força (Fig. VI.6).

##### 1. Medidas do par de pontos (1, 2)

Para a ordenada  $y_1 = 41,65$  mm; as abscissas valem:

$$x_1 = 45,28 \text{ mm}$$

$$x_2 = 39,20 \text{ mm}$$

A abscissa do pico da onda-força para esse par vale:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{45,28 + 39,20}{2} = \frac{84,48}{2} = \bar{x}_1 = 42,24 \text{ mm}$$

##### 2. Medidas do par de pontos (3, 4)

Para a ordenada  $y_2 = 41,45$  mm as abscissas valem:

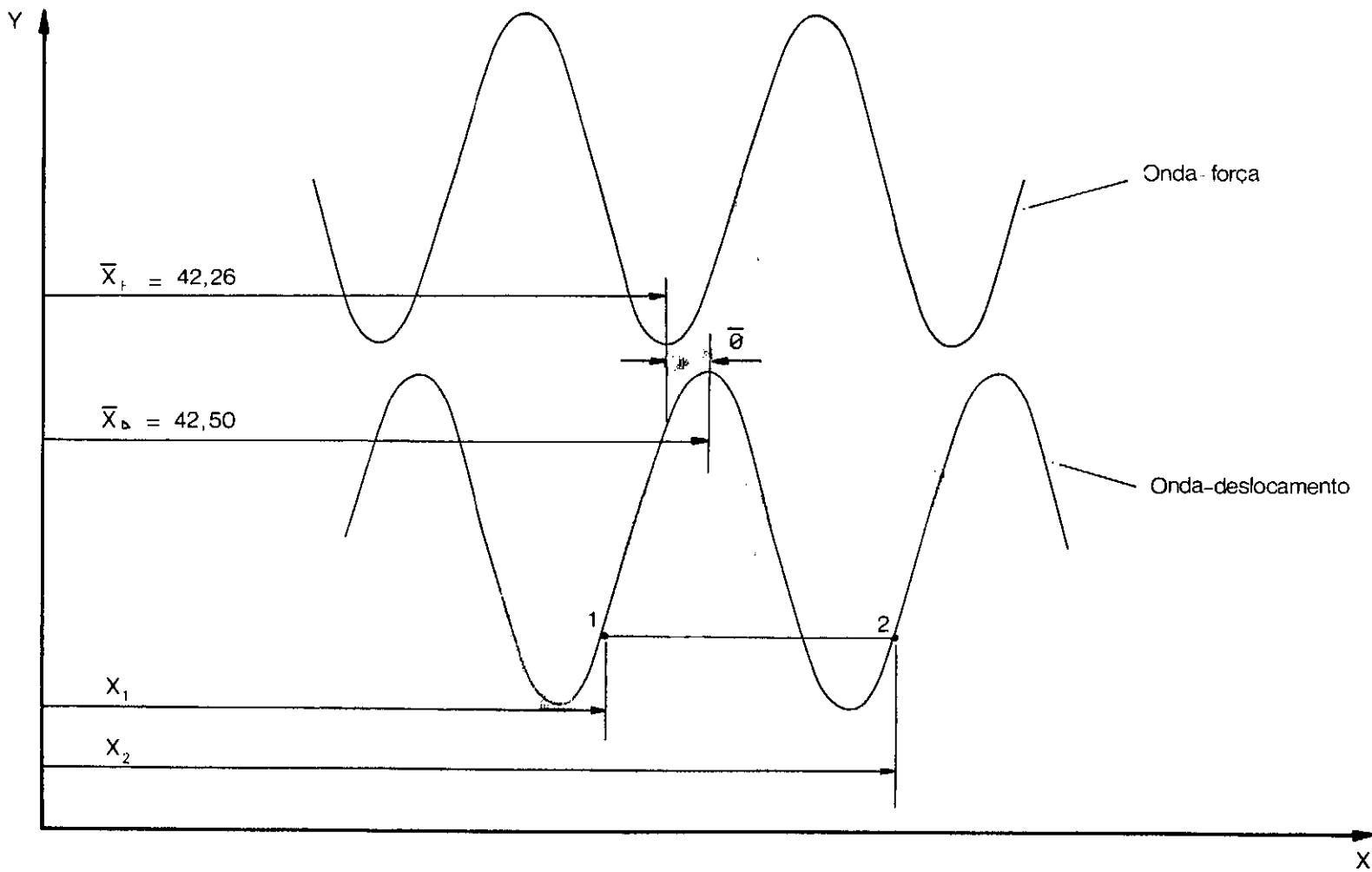


Foto N° 2

- FIG VI. 6 -

$$x_3 = 45,0 \text{ mm}$$

$$x_4 = 39,60 \text{ mm}$$

A abscissa do pico da onda-força para esse par vale:

$$\bar{x}_2 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{45,0 + 39,6}{2} = \frac{84,6}{2} \Rightarrow \bar{x}_2 = 42,3 \text{ mm}$$

### 3. Medidas do par de pontos (5, 6)

Para a ordenada  $y_3 = 41,25 \text{ mm}$  as abscissas valem:

$$x_5 = 44,50 \text{ mm}$$

$$x_6 = 40,00 \text{ mm}$$

A abscissa do pico da onda-força para esse par vale:

$$\bar{x}_3 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{44,5 + 40,0}{2} = \frac{84,5}{2} \Rightarrow \bar{x}_3 = 42,25 \text{ mm}$$

A abscissa mais provável do pico da onda-força vale:

$$\bar{x}_F = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3}{3} = \frac{42,24 + 42,3 + 42,25}{3} = \frac{126,79}{3}$$

$$\bar{x}_F = 42,26 \text{ mm}$$

Considerando o erro visual do microscópio de  $\pm 20 \mu\text{m}$ , podemos dizer que o erro que pode ter sido cometido foi de:

$$\epsilon_F = 42,3 + 0,02 - 42,26 \Rightarrow \epsilon_F = \pm 0,06 \text{ mm}$$

- Cálculo da abscissa do pico da onda-deslocamento

1. Medidas do par de pontos (1, 2)

Para a ordenada  $y_1 = 31,20$  mm, as abscissas valem:

$$x_1 = 44,20 \text{ mm}$$

$$x_2 = 40,74 \text{ mm}$$

A abscissa do pico da onda-deslocamento para esse par vale:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{44,20 + 40,74}{2} = \frac{84,94}{2} \Rightarrow \bar{x}_1 = 42,47 \text{ mm}$$

2. Medidas do par de pontos (3, 4)

Para a ordenada  $y_2 = 25,20$  mm, as abscissas valem:

$$x_3 = 45,10 \text{ mm}$$

$$x_4 = 39,94 \text{ mm}$$

A abscissa do pico da onda-deslocamento para esse par vale:

$$\bar{x}_2 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{45,10 + 39,94}{2} = \frac{85,04}{2} \Rightarrow \bar{x}_2 = 42,52 \text{ mm}$$

3. Medidas do par de pontos (5, 6)

Para a ordenada  $y_3 = 19,20$  mm, as abscissas valem:

$$x_5 = 45,90 \text{ mm}$$

$$x_6 = 39,10 \text{ mm}$$

A abscissa do pico da onda-deslocamento para esse par vale:

$$\bar{x}_3 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{45,9 + 39,1}{2} = \frac{85,00}{2} \Rightarrow \bar{x}_3 = 42,50 \text{ mm}$$

O valor mais provável da abscissa do pico da onda-deslocamento é:

$$\bar{x}_D = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{42,47 + 42,52 + 42,50}{3} = \frac{127,49}{3}$$

$$\bar{x}_D = 42,50 \text{ mm}$$

Considerando o erro visual do microscópio de  $\pm 20 \mu\text{m}$ , podemos dizer que o erro que pode ter sido cometido foi de:

$$\varepsilon_D = 42,50 + 0,02 - 42,47 \Rightarrow \varepsilon_D = \pm 0,05 \text{ mm}$$

As ondas desta foto podem ser esquematizadas segundo a Fig. VI.6.

Temos:

$$\phi = \left| \bar{x}_D - \bar{x}_F \right| = \left| 42,50 - 42,26 \right| = 0,24 \text{ mm}$$

Obtemos agora as três medidas do ciclo da onda-deslocamento para depois termos seu valor mais provável (Fig. VI.6).

1.  $x_1 = 16,10 \text{ mm}; x_2 = 26,70 \text{ mm} \Rightarrow x_{C_1} = 26,70 - 16,10 \Rightarrow x_{C_1} = 10,60 \text{ mm}$
2.  $x_1 = 37,44 \text{ mm}; x_2 = 48,18 \text{ mm} \Rightarrow x_{C_2} = 48,18 - 37,44 \Rightarrow x_{C_2} = 10,74 \text{ mm}$
3.  $x_1 = 24,30 \text{ mm}; x_2 = 35,00 \text{ mm} \Rightarrow x_{C_3} = 35,00 - 24,30 \Rightarrow x_{C_3} = 10,70 \text{ mm}$

$$\bar{x}_c = \frac{x_{C_1} + x_{C_2} + x_{C_3}}{3} = \frac{10,60 + 10,74 + 10,70}{3} = \frac{32,04}{3}$$

$$\bar{x}_c = 10,68 \text{ mm}$$

Temos então a relação:

$$10,68 \text{ mm} - 360^\circ$$

$$0,24 \text{ mm} - \bar{\phi}$$

$$\Rightarrow \bar{\phi} = 8,1^\circ$$

Como vimos, o ciclo inferior da onda-força representa a sua parte positiva, logo, temos que:

$$\bar{\phi} = \phi = 8,1^\circ$$

As partes real (R) e imaginária (U) do deslocamento (X) valerão:

$$R_{12} = X \cos \bar{\phi} = 0,0001132 \cdot \cos 8,1 = 0,0001132 \cdot 0,9900237$$

$$R_{12} = + 0,0001121 \text{ m}$$

$$U_{12} = X_1 \sin \bar{\phi} = 0,001132 \cdot \sin 8,1 = 0,0001132 \cdot 0,1409012$$

$$U_{12} = - 0,00001595 \text{ m}$$

No Apêndice V temos os valores de todos os R's e U's obtidos para a aplicação dos programas do computador.

## CAPÍTULO VII

## DISCUSSÃO

Aplicamos os Programas I e II, já mencionados no Cap. II, após a obtenção de todos os parâmetros do dispositivo montado no laboratório ( $M_1$ ,  $M_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $U_1$ ,  $U_2$ ) → oito freqüências diferentes para cada massa , P).

Usamos aqui a parte real (R) e a parte imaginária (U) e não a amplitude do deslocamento (X) e o ângulo da fase ( $\phi$ ), pois a maioria dos aparelhos existentes para serem acoplados nas máquinas-ferramentas fornecem os primeiros dados e não os últimos.

Os Programas I e II funcionam com a mesma subrotina que resolve sistemas de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss.

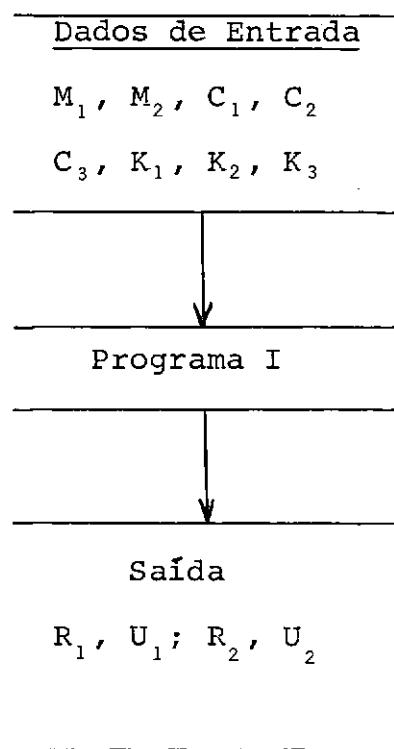
O Programa I tem como dados de entrada as massa 1 e 2 ( $M_1$  e  $M_2$ ), as constantes de amortecimento ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ), e as constantes de mola ( $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ), e obtemos dele as partes real (R) e imaginária (U) da amplitude do deslocamento (X) de cada massa.

O Programa II tem como dados de entradas as partes

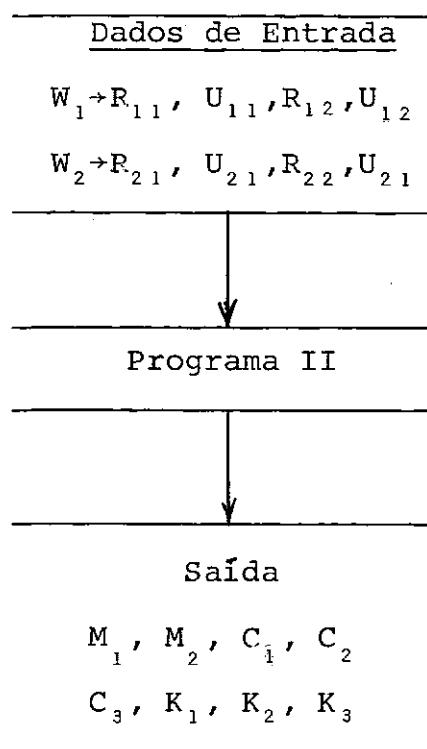
real ( $R$ ) e imaginária ( $U$ ) da amplitude do deslocamento ( $X$ ) de cada massa para duas freqüências diferentes, como já explicamos no Cap. II.

Como vemos, um programa é o inverso do outro. Reproduzimos, a seguir, o esquema de funcionamento dos dois Programas:

**PROGRAMA I**



**PROGRAMA II**



Colocamos num gráfico os oito valores de  $R$ ,  $U$ ,  $X$  e  $\phi$  de cada massa, do dispositivo montado no laboratório, obtidos pelas fotos. Através do Programa I, ajustamos as curvas que melhor se encaixam a eles variando as constantes de mola ( $K$ ), uma vez que esses valores obtidos não foram precisos, mas sim, uma faixa onde eles se situam.

Os pontos obtidos pelos Programas I e II foram através de uma variação de freqüência de 0,02 Hz a 0,02 Hz.

O bom comportamento da máquina-ferramenta, isto é, para que ela tenha bom desempenho é necessário que ela não tenha vibração nenhuma, coisa difícil de acontecer, ou que havendo a vibração a ferramenta e a peça tenham o mesmo sentido de movimento durante esta vibração.

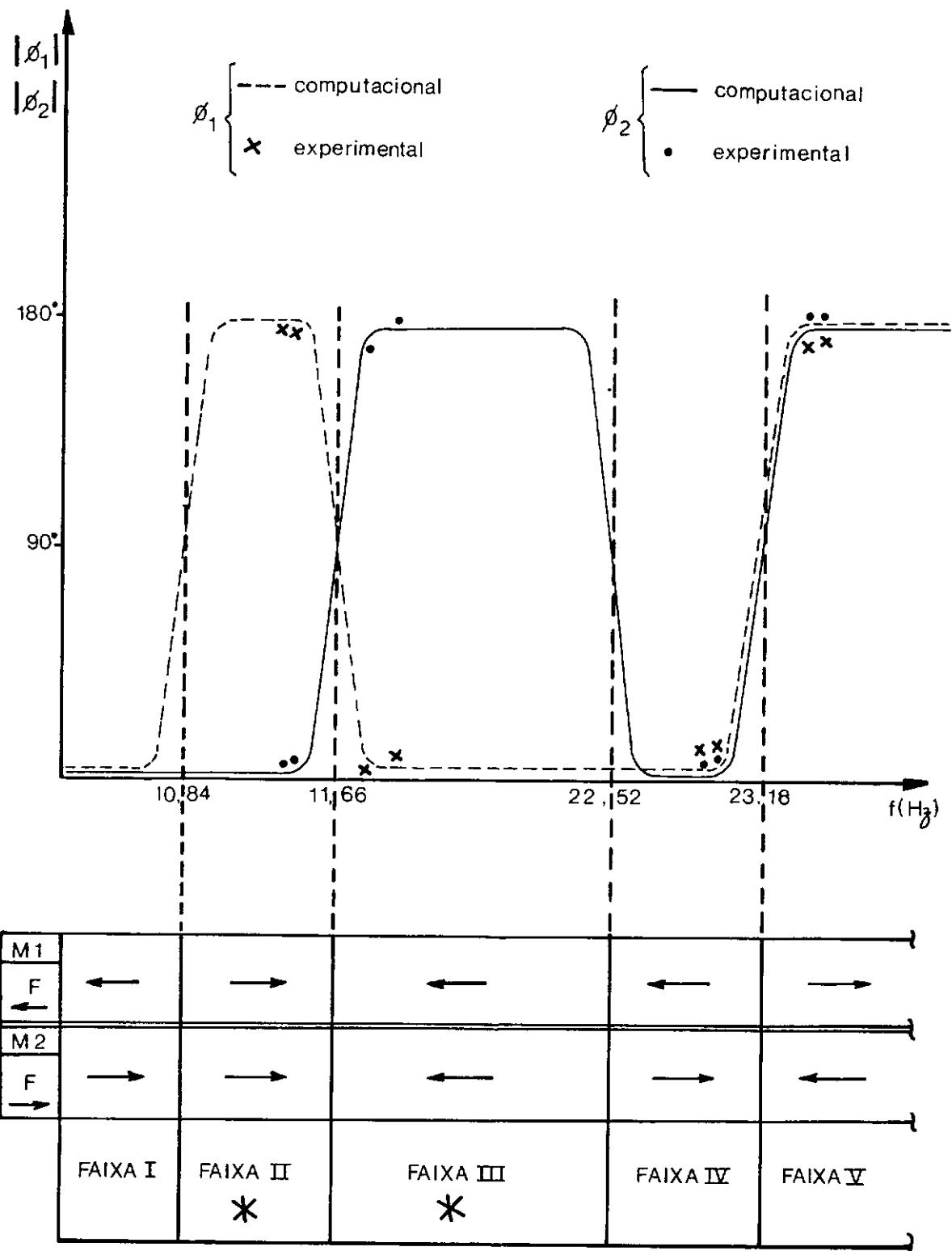
Analizando, então, esse dispositivo como sendo as duas massas que suportam a ferramenta e a peça respectivamente, podemos dizer quando essas massas estarão em fase através do Programa I, pois ele nos fornece todo o comportamento dinâmico do dispositivo. Podemos então construir o gráfico desenhado na parte superior da Fig. VII.1 onde aparece o módulo dos ângulos de fase ( $\phi$ ) entre a excitação e a resposta das duas respectivas massas em função da freqüência de excitação do sistema.

Mostramos apenas o gráfico do módulo dos ângulos de fase ( $\phi$ ) das respectivas massas, pois, como vimos, não nos interessa seu sinal, mas apenas o sentido do movimento das massas.

A parte inferior da Fig. VII.1 nos mostra o sentido do movimento de cada massa ( $M_1$  e  $M_2$ ) dentro da respectiva faixa freqüência.

Qualquer que seja o sentido da força de excitação ( $F$ ) suposto para a massa 1 ( $M_1$ ), o da massa 2 ( $M_2$ ) terá sentido oposto, não influenciando, assim, nos resultados finais. Temos então, no quadro dessa figura, o sentido do movimento das massas 1 ( $M_1$ ) e 2 ( $M_2$ ) para cada uma das faixas de freqüência.

A FAIXA II e a FAIXA III são aquelas onde as massas estão em fase. Caso fosse esse o resultado obtido de uma máquina-ferramenta seria dentro dessas faixas de freqüência que ela



- FIG VII. 1 -

deveria operar para que seu desempenho fosse ótimo.

Para sabermos o comportamento dinâmico de uma máquina-ferramenta, através desse enfoque, devemos ter o seguinte procedimento:

- Acoplamos na estrutura da máquina um dispositivo de excitação ligado à uma instrumentação de medida<sup>2</sup>, que nos fornecerá a parte real ( $R$ ) e parte imaginária ( $U$ ) da amplitude de vibração ( $X$ ), para uma dada amplitude de força de excitação ( $P$ ) e freqüência conhecidas. Obtidos esses parâmetros temos os dados de entrada do Programa II de onde poderemos obter os outros parâmetros da máquina ( $M$ ,  $C$ ,  $K$ ), supondo-a com dois graus de liberdade e sob o enfoque do modelo teórico aqui estudado.

Fazendo isso para várias freqüências de excitação, podemos obter os valores médios de  $M$ ,  $C$  e  $K$ , tornando, assim, menor os possíveis erros de medida. Estes valores médios serão os dados de entrada do Programa I que nos fornecerá os ângulos de fase ( $\phi_1$  e  $\phi_2$ ) entre a excitação e a resposta de cada massa ( $M_1$  e  $M_2$ ) para toda a faixa de freqüência em que a máquina pode operar. Dessa forma, fazendo a análise da Fig. VII.1 podemos obter a(s) faixa(s) de freqüência em que ela deve trabalhar.

Para verificar o bom funcionamento dos Programas I e II colocamos o resultado obtido por um deles no outro para ver se coincidia com o dado de entrada do primeiro. Demos valores arbitrários, mas coerentes na ordem de grandeza, para os dados de entrada do Programa I. Colocamos sua saída ( $R_1$ ,  $U_1$ ,  $R_2$ ,  $U_2$ ), como sendo os dados de entrada do Programa II, e notamos que se estes dados tivessem apenas 3 algarismos significativos, que foi a precisão obtida pelas medidas tiradas do dispositivo

montado no laboratório, o resultado fornecido por esse programa era absurdamente errado, dando inclusive massas e constantes de amortecimento negativas. Os erros só passam a ser aceitáveis, menores do que 5%, com esses dados tendo oito algarismos significativos, e passam a não existir praticamente, erros menores que 0,01%, quando colocamos os dados de entrada com dez algarismos significativos. Vale notar que para todos esses casos usamos a precisão dupla nos programas computador.

Notamos então, que trata-se de um erro computacional devido talvez ao método usado pela subrotina, o da eliminação de Gauss. Existe, porém, um tipo de subrotina que além de empregar o método de eliminação de Gauss usa outro para diminuir o erro que pudesse ter sido cometido durante o cálculo computacional. Uma dessas subrotinas especiais pertence à "The International Mathematical & Statistical Libraries, INC." - (IMSL). Fica aqui apenas a idéia, ou sugestão, pois caso continuássemos a estudar esses programas, tornaria excessivamente extenso esse trabalho além de fugir do seu principal objetivo.

## CAPÍTULO VIII

### CONCLUSÕES

Estudamos um modelo teórico de uma máquina-ferramenta diferente dos comumente usados na literatura mais conhecida. Ele tem dois graus de liberdade, e, além de possuir o movimento da peça em relação à ferramenta, ambas também vibram em relação a uma parte da máquina que pode ser considerada rígida. Pela literatura, apenas o modelo de TLUSTÝ e POLACEK<sup>7</sup> supõe a máquina com n graus de liberdade, porém, na prática, só achamos seu desenvolvimento para sistemas com até dois graus de liberdade.

Notamos que as medidas obtidas da barra mais rígida, do dispositivo montado, foram mais precisas. Sendo o valor desse rigidez mais perto do de uma máquina-ferramenta real, aumenta a viabilidade deste modelo. Entretanto, não foi possível checá-lo na prática devido à falta de aparelhos apropriados no laboratório.

Para a aplicação prática do enfoque aqui dado, devemos usar subrotinas de computador especialmente desenvolvidas para diminuir o erro computacional durante o cálculo de sistemas de equações lineares, pois, caso contrário, o resultado poderá dar muito longe do real.

Não conseguimos obter com precisão a dissipação de energia, dada pelo valor da constante de amortecimento  $C_2$ , causada pelo acoplamento das duas massas no dispositivo montado. Sabemos, entretanto, que seu valor é pequeno comparado com o das outras ( $C_1$  e  $C_3$ ). Testamos vários valores com essa ordem de grandeza e notamos que influenciava muito pouco nos resultados finais.

Assim como a literatura pesquisada, esse modelo teórico supõe que a força de excitação da máquina é senoidal e que seu comportamento dinâmico é linear.

Supomos aqui, o amortecimento constante para toda faixa de freqüência de excitação da máquina, o que não acontece na realidade. Vale notar, porém, que o resultado aqui obtido é semelhante ao experimental, de uma furadeira radial e de uma fresadora vertical, obtido por TOBIAS<sup>1</sup>. SALJÉ<sup>39</sup> também obteve resultado semelhante ao estudar um torno.

A grande vantagem existente neste modelo é a simplicidade de sua aplicação prática. Conhecendo os mesmos parâmetros da máquina necessários para o cálculo de modelos teóricos da bibliografia pesquisada, e colocando-os como dados de entrada do Programa I, através do enfoque aqui apresentado e com o problema de identificação resolvido, podemos obter as faixas de freqüência em que a máquina deve operar para que tenha bom desempenho.

**BIBLIOGRAFIA**

1. TOBIAS, S.A. - "Machine Tool Vibration", London - Traduzido por Burton, A.H. - Blackie & Son Ltda. - 1965.
2. SWEENEY, G. - "Vibration of Machine Tools", The Machinery Publishing Co. Ltda., 1971; p. 50.
3. TLUSTY, J. - "General Features of Chatter", Trabalho publicado em "Machine Tool Structures", editado por Koenigsberger, F. e Tlusty, J., Vol. 1, Pergamon Press, 1970, 115-132 p.
4. \_\_\_\_\_. - "Examples of the Analysis of the Stability of the Machine Tools", Editado por Koenigsberger, F. e Tlusty, J. em "Machine Tool Structures", Vol. I, Pergamon Press, 1970, 213-282 p.
5. POLACEK, M - "Damping and Dampers", Trabalho publicado em "Machine Tool Structures", Editado por Koenigsberger, F. e Tlusty, J., Vol. 1, Pergamon Press, 1970, 283-310 p.
6. \_\_\_\_\_. - "Chatter in Grinding", Trabalho publicado em "Machine Tool Strucures", Editado por Koenigsberger, F. e Tlusty, J., Vol. 1, Pergamon Press, 1970, 311-335 p.

7. TLUSTY, J. - "Basic Theory of Self-excited Vibration in Metal Cutting", Trabalho publicado em "Machine Tool Structures", Editado por Koenigsberger, F. e Tlusty, J., Vol. 1, Pergamon Press, 1970, 145-177 p.
8. KUDINOV, V.A. - "Schwingungen and Wekzeugmaschinen", Technische Rundschau nº 15, 1966.
9. TOBIAS, S.A. e FISHWICK, W. - "Theory of Regenerative Machine Tool Chatter", Engineering, London, Vol. 205, 1958.
10. PETERS, J. e VANHERCK, P. - "Un Critère de Stabilité Dynamique pour Machines-outils", CRIF-Brussels, Agosto 1962.
11. PETERS, J. - "What can Vibration Research Contribute to Machine Tool Development", Prod. Eng. Res. Conference, ASME, Pittsburgh, 1963.
12. TOBIAS, S.A. e KOENIGSBERGER, F. - "Advances in Machine Tool Design and Research", Proceedings do 4º ao 11º International M.T.D.R. Conference, Pergamon Press Ltd, 1963 a 1970.
13. TOBIAS, S.A. e FISHWICK, W. - "The Vibrations of Radial Drilling Machines under Test and Working Conditions", Proceedings Institution of Mechanical Engineers 170, 1956, p. 232.
14. GALLOWAY, D.F. - "Some Experiments on the Influence of Various Factors on Drill Performance", Transactions ASME 79, 1957, p. 191.

15. SADOWY, M. e EISELE, F. - "Rattern und Dynamische Steifigkeit von Werkzeugmaschinen", Partes I e II, Zweites Forschungs, und Konstruktionskolloquium Werkzeugmaschinen (2. FoKoMa), Vogel-Verlag, Coburgo, 1955, p. 151 e 159.
16. TOBIAS, S.A. - "The Vibrations of Vertical Milling Machines under Test and Working Conditions", Proceedings Institution of Mechanical Engineers 173, 1959, p. 474.
17. TLUSTY, J. - "Die Berechnung des Rahmens der Werkzeugmaschine", Schwerindustrie der CSR, 1955, № 1, p. 8.
18. ARNOLD, R.N. - "Mechanism of Tool Vibration in Cutting of Steel", Proceeding Institution of Mechanical Engineers 154, 1946, p. 261.
19. HÖLKEN, W. - "Untersuchungen von Ratterschwingungen an Drehbänken", Diss. TH Aachen 1957 und Forschungsbericht 7, Verlag W. Girardet, Essen, 1957.
20. \_\_\_\_\_. - "Ein Beitrag zur Schwingungsuntersuchung von Drehbänken", Industrie-Anzeiger 77, 1955, № 62, p. 182.
21. DOI, S. e KATO, S. - "Chatter Vibration of Lathe Tools", Transactions ASME 78, 1956, p. 1127.
22. DOI. S. - "On the Chatter Vibrations of Lathe Tools", Memoirs of the Faculty of Engineering, Universidad de Nagoya 5, 1953, № 2, p. 179.

23. TOBIAS, S.A. e FISHWICK, W. - "The Chatter of Lathe Tools under Orthogonal Cutting Conditions", Transactions ASME 80, 1958, p. 1079.
24. HAHN, R.S. - "Vibrations of Flexible Precision Grinding Spindles", Transactions ASME, 1958, Nº 59-A 97.
25. DOI, S. - "An Experimental Study on Chatter Vibrations in Grinding Operations", Transactions ASME 80, 1958, p. 133.
26. SALJÉ, E. - "Ursachen und Minderung von Werkzeugschwingungen" "Aufwand, Leistungen und Wirtschaftlichkeit neuzeitlicher Werkzeugmaschinen", Verlag W. Girardet, Essen, 1953, p. 26.
27. STOKER, J.J. - "Nonlinear Vibration, in Mechanical and Electrical Systems", Vol. II, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2<sup>a</sup> Ed., 1966.
28. MEIROVITCH, L. - "Elements of Vibration Analysis", Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1975.
29. HSU, L. - Notas de aula de "Dinâmica e Controle de Sistemas Não Lineares", COPPE/UFRJ, 2º período de 1978.
30. CREDE, C.E. - "Choque e Vibração nos Projetos de Engenharia", Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1972.
31. SILVA, R.B. - "Manual de Termodinâmica e Transmissão de Calor", Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Mecânica, São Paulo, 4<sup>a</sup> Edição, 1972, p. G-4.2.

32. SHIGLEY, J.E. - "Mechanical Engineering Design", Tokyo, McGraw-Hill Kogajusha, 2<sup>a</sup> Ed., 1972, p. 694.
33. TIMOSHENKO, P.S. - "Resistência dos Materiais", Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, Vol. 1, 1971, Tradução de José Rodrigues de Carvalho.
34. DOEBELIN, E.O. - "Measurement Systems, Application and Design", Tokyo McGraw-Hill Kogakusha, Revised Edition, 1976.
35. DEMING, W.E. - "Statistical Adjustment of Data", Dover Publications, Inc., New York, 1964.
36. DEN HARTOG, J.P. - "Vibrações nos Sistemas Mecânicos", São Paulo, Tradução de Mauro O.C. Amorelli, Ed. Edgar Bücher, 1972.
37. SCHMITZ, N.L. & NOVOTNY, D.W. - "Introductory Eletromechanics", The Ronald Press Company, New York, 1965.
38. QUEVEDO, C.P. - "Eletromagnetismo", McGraw-Hill do Brasil Ltda., 1977.
39. SALJÉ, E. - "Über dynamische und statische Steifigkeitsmessungen an Werkzeugmaschinen, Zweites Forschungs - und Konstruktionskolloquium Werkzeugmaschinen (2. FoKoMa), Vogel-Verlag, Coburg, 1955, p. 105.

**APÊNDICE I**

Apresentamos aqui o Programa I, o Programa II e a subrotina usados.

## PROGRAMA I

```

PROGRAM UM  (INPUT,OUTPUT,TAPE5=INPUT,TAPE6=OUTPUT)
DIMENSION A(4,4),B(4),F(800,5)
REAL M1,M2,K1,K2,K3
N=4
CT=180./3.1415926
READ (5,10) M1,C1,K1,M2,C2,K2,C3,K3,F1,F2,G
10 FORMAT (8F10.5)
WRITE (6,20) M1,M2,C1,C2,C3,K1,K2,K3
20 FORMAT (1H1,/////,20X,21(*!),/,20X,*!, ' DADOS DO ',
1'PROGRAMA ',*!,/,20X,21(*!),/,20X,*!, 'M1=',E10.4,
2' KG',/,20X,'M2=',E10.4,' KG',/,20X,'C1',
3E10.4,' NS/M',/,20X,'C2=',E10.4,' NS/M',/20X,
4'C3=',E10.4,' NS/M',/,20X,'K1=',E10.4,' N/M',/20X,
5'K2=',E10.4,' N/M',/20X,'K3=',E10.4,' N/M')
KLO=1
F(1,1)=F1
30 F(KLO+1,1)=F(KLO,1)+G
KLO=KLO+1
IF ((F(KLO,1)+(G/100.)).LT.F2) GO TO 30
I0=1
DO 80 KL=1,KLO
OM=F(KL,1)*6.2831853
A(1,1)=K1+K2-M1*OM*OM
A(1,2)=-OM*(C1+C2)
A(1,3)=K2
A(1,4)=-C2*OM
A(2,1)=(C1+C2)*OM
A(2,2)=A(1,1)
A(2,3)=-A(1,4)
A(2,4)=A(1,3)
A(3,1)=A(1,3)
A(3,2)=A(1,4)
A(3,3)=K2+K3-M2*OM*OM
A(3,4)=-OM*(C3+C2)
A(4,1)=-A(1,4)
A(4,2)=A(1,3)
A(4,3)=-A(3,4)
A(4,4)=A(3,3)
DO 40 I=1,N
40 B(I)=0.
B(1)= 0.007
B(3)= 0.007
IF (I0.EQ.1) WRITE (6,50) (B(I),I=1,N)
50 FORMAT (/////,20X,*!MATRIZ (COLUNA) B!',//,(/22X,F10.5))
I0=2
CALL GELG (B,A,4,1,1.E-15,IER)

```

```

IF (IER.NE.-1) GO TO 60
F(KL,1)=-F(KL,1)
GO TO 80
60 DO 70 IJ=1,4
70 F(KL,IJ+1)=B(IJ)
80 CONTINUE
DO 160 IK=1,KLO,8
WRITE (6,90)
90 FORMAT (1H1,//,10X,62(**)/10X,**,12X,**,47X,**,/10X,
1** FREQUENCIA *,10X,'SOLUCAO DO SISTEMA 'AX=B*',11X,
2*,/,10X,**,3X,*'(HERTZ) *,5X,'(R,U E A EM METROS ',,
3' PHI EM GRAUS)*,6X,**,/10X,**,12X,**,47X,**,/
410X,62(**)//10X,**,12X,**,47X,**)
I1=IK
I2=IK+7
IF (I2.GT.KLO) I2=KLO
DO 150 IJ=I1,I2
IF (F(IJ,1).LT.0.) GO TO 130
PHI1=(ATAN(F(IJ,3)/F(IJ,2)))*CT
PHI2=(ATAN(F(IJ,5)/F(IJ,4)))*CT
A1=SQRT(F(IJ,2)**2+F(IJ,3)**2)
A2=SQRT(F(IJ,4)**2+F(IJ,5)**2)
WRITE(6,100) F(IJ,1),F(IJ,2),F(IJ,3),A1,PHI1,
1F(IJ,4),F(IJ,5),A2,PHI2
100 FORMAT (10X,**,12X,**,47X,**,/10X,**,3X,F5.2,4X,**,6X,
1'R1=',E10.4,7X,'U1   =',E10.4,6X,**,/10X,**,12X,**,,
26X,*'A1=',E10.4,7X,*'PHI1=',E10.4,6X,**,/10X,**,12X,
3*,6X,*'R2=',E10.4,7X,*'U2   =',E10.4,6X,**,/10X,**,,
412X,**,6X,*'A2=',E10.4,7X,*'PHI2=',E10.4,6X,**,/10X,
5*,12X,**,47X,**)
110 IF (IJ.EQ.I2) WRITE (6,120)
120 FORMAT (10X,**,12X,**,47X,**,/10X,62(**))
GO TO 150
130 F(IJ,1)=-F(IJ,1)
WRITE (6,140) F(IJ,1)
140 FORMAT (10X,**,12X,**,47X,**,/10X,**,3X,F5.2,4X,
1***,6X,*'O SISTEMA NAO PODE SER RESOLVIDO',9X,**,/
210X,**,12X,**,6X,*'PARA ESTA FREQUENCIA',21X,
3*,3(/10X,**,12X,**,47X,**))*
GO TO 110
150 CONTINUE
160 CONTINUE
STOP
END

```

## PROGRAMA II

```

PROGRAM DOIS(INPUT,OUTPUT,TAPE5=INPUT,TAPE6=OUTPUT)
DIMENSION A(8,8), B(8)
DOUBLE PRECISION M1,M2,K1,K2,K3,A,B,W1,W2,W11,W22,F1,F2,R11,R22
* R12,R21,U11,U22,U21,U12
C
C
N = 8
READ(5,10) F1,F2
10 FORMAT( 2F10.4 )
READ(5,2) R11,U11,R12,U12
READ(5,2)R21,U21,R22,U22
2 FORMAT( 4D20.15 )
READ(5,1) P
1 FORMAT( D10.8 )
WRITE(6,100)
100 FORMAT( 1H1,20H -DADOS DO PROGRAMA-      )
WRITE(6,104) F1,R11,U11,R12,U12
WRITE(6,106) F2,R21,U21,R22,U22
104 FORMAT( //,, 5X, 4H F1=,
*F6.2,4X,4HR11=,F20.15,4X,4HU11=,F20.15,4X,4HR12=,F20.15,
* 4X,4HU12=,F20.15 )
106 FORMAT(//,, 5X,4H F2=,F 6.2 ,4X,4HR21=,F20.15,4X,4HU21=,F20.15,
* 4X,4HR22=,F20.15,4X,4HU22,F20.15 )
WRITE(6,105) P
W1 = F1 * 2. * ACOS(-1.0 )
W2 = F2 * 2. * ACOS(-1.0 )
105 FORMAT(//]0X,2HP=,F10.8,/// )
DO 35 I = 1, N
DO 36 J = 1, N
36 A(I,J) = 0.0
35 CONTINUE
W11 = W1 * W1
W22 = W2 * W2
A(1,1)=W11*R11
A(1,3)=W1* (-U11)
A(1,4)=-W1*(U11+U12)
A(1,6)=R11
A(1,7)=R11+R12
A(2,1)=W11*U11
A(2,3)=W1*R11
A(2,4)=W1*(R11+R12)
A(2,6)=U11
A(2,7)=U11+U12
A(3,2)=W11*R12
A(3,4)=-W1*(U11+U12)
A(3,5)=W1*(-U12)

```

```

A(3,7)=R12+R11
A(3,8)=R12
A(4,2)=W11*U12
A(4,4)=W1*(R12+R11)
A(4,5)=W1*R12
A(4,7)=U12+U11
A(4,8)=U12
A(5,1)=W22*R21
A(5,3)=W2*(-U21)
A(5,4)=-W2*(U22+U21)
A(5,6)=R21
A(5,7)=R21+R22
A(6,1)=W22*U21
A(6,3)=W2*R21
A(6,4)=W2*(R21+R22)
A(6,6)=U21
A(6,7)=U21+U22
A(7,2)=W22*R22
A(7,4)=-W2*(U21+U22)
A(7,5)=W2*(-U22)
A(7,7)=R22+R21
A(7,8)=R22
A(8,2)=W22*U22
A(8,4)=W2*(R22+R21)
A(8,5)=W2*R22
A(8,7)=U22+U21
A(8,8)=U22
DO 37 I=1,N
37 B(I)=0.0
B(1) = P
B(3) = P
B(5) = P
B(7) = P
WRITE (6,3)
3 FORMAT (33H SOLUCAO DAS EQUACOES SIMULTANEAS //)
WRITE (6,4)
4 FORMAT (//11H -MATRIZ A- /)
DO 5 I=1,N
5 WRITE (6,6) (A(I,J),J=1,N)
6 FORMAT (//1P8D16.7)
WRITE (6,8)
7 FORMAT (4X,2HB(,I2,2H)=,1PD16.7/)
8 FORMAT (//11H -MATRIZ B- /)
DO 9I=1,N
9 WRITE (6,99) B(I)
99 FORMAT (2X,1PD16.7,/)

CALL GELG(B,A,8,1,1.0-32,IER)
IF (IER.EQ.-1) GO TO 32

```

```
29  WRITE(6,29)IER
 29  FORMAT(//,2X,42H-PARA VER SE HOUVE PERDA DE SIGNIFICANCIA-,/,/
  * 3X,4HIER=,I2)
 29  WRITE(6,30)
 30  FORMAT(///11H -SOLUCOES-//)
 30  DO 31 I=1,N
 31  WRITE(6,7) I,B(I)
 31  M1=-B(1)
 31  M2=-B(2)
 31  C1=B(3)
 31  C2=B(4)
 31  C3=B(5)
 31  K1=B(6)
 31  K2=B(7)
 31  K3=B(8)
 31  WRITE(6,101) M1,C1,K1
 31  WRITE(6,102) M2,C2,K2
 31  WRITE(6,103) C3,K3
101  FORMAT(///10X,3HM1=,F10.4,4X,3HC1=,F10.4,4X,3HK1=,F14.4)
102  FORMAT(/10X,3HM2=,F10.4,4X,3HC2=,F10.4,4X,3HK2=,F14.4)
103  FORMAT(/27X,3HC3=,F10.4,4X,3HK3=,F14.4)
 34  GO TO 34
 32  WRITE(6,33) ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
 33  FORMAT(///37H AS EQUACOES NAO PODEM SER RESOLVIDAS,///
  *39H -MATRIZ FINAL QUE NAO OFERECE SOLUCAO-/, //1P8D16.7)
 34  STOP
 34  END
```

C SUBROTINA DA IBM PARA RESOLVER SIST. DE EQUACOES LINEARES (SIMPLES PRECISAO)  
 C  
 C ..... GELG 10  
 C GELG 20  
 C GELG 30  
 C GELG 40  
 C GELG 50  
 C GELG 60  
 C GELG 70  
 C GELG 80  
 C GELG 90  
 C GELG 100  
 C GELG 110  
 C GELG 120  
 C GELG 130  
 C GELG 140  
 C GELG 150  
 C GELG 160  
 C GELG 170  
 C GELG 180  
 C GELG 190  
 C GELG 200  
 C GELG 210  
 C GELG 220  
 C GELG 230  
 C GELG 240  
 C GELG 250  
 C GELG 260  
 C GELG 270  
 C GELG 280  
 C GELG 290  
 C GELG 300  
 C GELG 310  
 C GELG 320  
 C GELG 330  
 C GELG 340  
 C GELG 350  
 C GELG 360  
 C GELG 370

SUBROUTINE GELG  
 PURPOSE  
 TO SOLVE A GENERAL SYSTEM OF SIMULTANEOUS LINEAR EQUATIONS.  
 USAGE  
 CALL GELG(R,A,M,N,EPS,IER)  
 DESCRIPTION OF PARAMETERS  
 R - THE M BY N MATRIX OF RIGHT HAND SIDES. (DESTROYED) GELG 130  
 ON RETURN R CONTAINS THE SOLUTION OF THE EQUATIONS. GELG 140  
 A - THE M BY M COEFFICIENT MATRIX. (DESTROYED) GELG 150  
 M - THE NUMBER OF EQUATIONS IN THE SYSTEM. GELG 160  
 N - THE NUMBER OF RIGHT HAND SIDE VECTORS. GELG 170  
 EPS - AN INPUT CONSTANT WHICH IS USED AS RELATIVE  
 TOLERANCE FOR TEST ON LOSS OF SIGNIFICANCE. GELG 180  
 IER - RESULTING ERROR PARAMETER CODED AS FOLLOWS  
 IER=0 - NO ERROR, GELG 200  
 IER=-1 - NO RESULT BECAUSE OF M LESS THAN 1 OR  
 PIVOT ELEMENT AT ANY ELIMINATION STEP  
 EQUAL TO 0, GELG 210  
 GELG 220  
 GELG 230  
 GELG 240  
 IER=K - WARNING DUE TO POSSIBLE LOSS OF SIGNIFI- GELG 250  
 CANCE INDICATED AT ELIMINATION STEP K+1, GELG 260  
 WHERE PIVOT ELEMENT WAS LESS THAN OR  
 EQUAL TO THE INTERNAL TOLERANCE EPS TIMES GELG 270  
 ABSOLUTELY GREATEST ELEMENT OF MATRIX A. GELG 280  
 GELG 290  
 GELG 300  
 REMARKS  
 INPUT MATRICES R AND A ARE ASSUMED TO BE STORED COLUMNWISE GELG 310  
 IN M\*N RESP. M\*M SUCCESSIVE STORAGE LOCATIONS. ON RETURN GELG 320  
 SOLUTION MATRIX R IS STORED COLUMNWISE TOO. GELG 330  
 THE PROCEDURE GIVES RESULTS IF THE NUMBER OF EQUATIONS M IS GELG 340  
 GREATER THAN 0 AND PIVOT ELEMENTS AT ALL ELIMINATION STEPS GELG 350  
 ARE DIFFERENT FROM 0. HOWEVER WARNING IER=K - IF GIVEN - GELG 360  
 GELG 370

```

C INDICATES POSSIBLE LOSS OF SIGNIFICANCE. IN CASE OF A WELL Scaled MATRIX A AND APPROPRIATE TOLERANCE EPS, IER=K MAY BE GIVEN IN CASE M=1. GELG 380
C GELG 390
C GELG 410
C GELG 420
C GELG 430
C GELG 440
C GELG 450
C GELG 460
C GELG 470
C GELG 480
C GELG 490
C GELG 500
C GELG 510
C GELG 520
C GELG 530
C GELG 540
C GELG 550
C GELG 560
C GELG 570
C GELG 580
C GELG 590
C GELG 600
C GELG 610
C GELG 620
C GELG 630
C GELG 640
C GELG 650
C GELG 660
C GELG 670
C GELG 680
C GELG 690
C GELG 700
C GELG 710
C GELG 720
C GELG 730
C GELG 740
C GELG 750
C GELG 760

C SUBROUTINES AND FUNCTION SUBPROGRAMS REQUIRED
C NONE
C
C METHOD
C SOLUTION IS DONE BY MEANS OF GAUSS-ELIMINATION WITH
C COMPLETE PIVOTING.
C
C ****
C
C SUBROUTINE GELG(R,A,M,N,EPS,IER)
C
C
C DIMENSION A(1),R(1)
C IF(M)23,23,1
C
C SEARCH FOR GREATEST ELEMENT IN MATRIX A
1 IER=0
PIV=0.
MM=M*M
NM=N*M
DO 3 L=1,MM
TB= ABS(A(L))
IF(TB-PIV)3,3,2
2 PIV=TB
I=L
3 CONTINUE
TOL=EPS*PIV
C A(I) IS PIVOT ELEMENT. PIV CONTAINS THE ABSOLUTE VALUE OF A(I).
C
C START ELIMINATION LOOP
LST=1
DO 17 K=1,M
C

```

```

C      TEST ON SINGULARITY          GELG 770
      IF(PIV)23,23,4                GELG 780
4     IF(IER)7,5,7                GELG 790
5     IF(PIV-TOL)6,6,7            GELG 800
6     IER=K-1                     GELG 810
7     PIVI=1./A(I)                GELG 820
      J=(I-1)/M                  GELG 830
      I=I-J*M-K                  GELG 840
      J=J+1-K                     GELG 850
C     I+K IS ROW-INDEX, J+K COLUMN-INDEX OF PIVOT ELEMENT    GELG 860
C
C     PIVOT ROW REDUCTION AND ROW INTERCHANGE IN RIGHT HAND SIDE R   GELG 870
DO 8 L=K,NM,M
      LL=L+I                      GELG 880
      TB=PIVI*R(LL)                GELG 890
      R(LL)=R(L)                  GELG 900
      R(L)=TB                      GELG 910
      GELG 920
      GELG 930
      GELG 940
      GELG 950
      GELG 960
      GELG 970
      GELG 980
      GELG 990
      GELG1000
      GELG1010
      GELG1020
      GELG1030
      GELG1040
      GELG1050
      GELG1060
      GELG1070
      GELG1080
      GELG1090
      GELG1100
      GELG1110
      GELG1120
      GELG1130
      GELG1140
C
C     IS ELIMINATION TERMINATED
      IF(K=M)9,18,18
C
C     COLUMN INTERCHANGE IN MATRIX A
9     LEND=LST+M-K
      IF(J)12,12,10
10    II=J*M
      DO 11 L=LST,LEND
      TB=A(L)
      LL=L+II
      A(L)=A(LL)
      A(LL)=TB
      GELG1010
      GELG1020
      GELG1030
      GELG1040
      GELG1050
      GELG1060
      GELG1070
      GELG1080
      GELG1090
      GELG1100
      GELG1110
      GELG1120
      GELG1130
      GELG1140
C
C     ROW INTERCHANGE AND PIVOT ROW REDUCTION IN MATRIX A
12    DO 13 L=LST,MM,M
      LL=L+I
      TB=PIVI*A(LL)
      A(LL)=A(L)
      A(L)=TB
      GELG1110
      GELG1120
      GELG1130
      GELG1140

```

```

C      SAVE COLUMN INTERCHANGE INFORMATION          GELG1150
A(LST)=J                                     GELG1160
C      A(LST)=J                                     GELG1170
C      ELEMENT REDUCTION AND NEXT PIVOT SEARCH    GELG1180
PIV=0.                                         GELG1190
LST=LST+1                                      GELG1200
J=0                                            GELG1210
DO 16 II=LST,LEND                            GELG1220
PIVI=-A(II)                                    GELG1230
IST=II+M                                       GELG1240
J=J+1                                         GELG1250
DO 15 L=IST,MM,M                             GELG1260
LL=L-J                                         GELG1270
A(L)=A(L)+PIVI*A(LL)                         GELG1280
TB= ABS(A(L))                                 GELG1290
IF(TB=PIV)15,15,14                           GELG1300
14 PIV=TB                                     GELG1310
I=L                                           GELG1320
15 CONTINUE                                   GELG1330
DO 16 L=K,NM,M                             GELG1340
LL=L+J                                         GELG1350
16 R(LL)=R(LL)+PIVI*R(L)                     GELG1360
17 LST=LST+M                                  GELG1370
      END OF ELIMINATION LOOP                  GELG1380
C      C      BACK SUBSTITUTION AND BACK INTERCHANGE GELG1390
C      C      18 IF(M-1)23,22,19                  GELG1400
19 IST=MM+M                                    GELG1410
LST=M+1                                       GELG1420
DO 21 I=2,M                                    GELG1430
II=LST-I                                     GELG1440
IST=IST-LST                                    GELG1450
L=IST-M                                       GELG1460
L=A(L)+.5                                     GELG1470
DO 21 J=II,NM,M                             GELG1480
TB=R(J)                                       GELG1490
LL=J                                         GELG1500
GELG1510
GELG1520

```

```
DO 20 K=IST,MM,M          GELG1530
  LL=LL+1                  GELG1540
20 TB=TB-A(K)*R(LL)      GELG1550
  K=J+L                  GELG1560
  R(J)=R(K)                GELG1570
21 R(K)=TB                GELG1580
22 RETURN                  GELG1590
C                           GELG1600
C                           GELG1610
C   ERROR RETURN            GELG1620
23 IER=-1                  GELG1630
  RETURN                  GELG1640
  END                      GELG1650
```

## APÊNDICE II

Os sensores de deslocamento usados neste trabalho pertencem ao Laboratório do Departamento de Engenharia Mecânica da COPPE/UFRJ.

A base do seu funcionamento está esquematizada na Fig. A.II.1. Uma fonte de luz constante ( $D_1$ ) está direcionada para um diodo foto-sensível ( $D_2$ ). Uma fonte de corrente contínua (10 V) alimenta o circuito. Uma chapa fina (CP) opaca, que deve ser fixada ao sistema cujo deslocamento queremos medir, intercepta essa luz alterando a resistência desse diodo ( $D_2$ ) e causando assim, uma mudança na diferença de potencial nas extremidades do resistor R2. Tendo a calibração do sensor, podemos saber, através da variação da diferença de potencial da saída, o deslocamento sofrido pelo sistema que estamos medindo. Maiores detalhes de seu funcionamento e construção encontram-se num relatório do Programa de Engenharia Mecânica da COPPE/UFRJ, de março de 1978, chamado "Transdutor Foto-Elétrico para Deslocamento", realizado por Sérgio Exel Gonçalves.

A.II.1. Resultado da Calibração dos Sensores Modelo I e Modelo III

O sensor de deslocamento Modelo I apresenta a curva de calibração mostrada na Fig. A.II.2. Suas características são as seguintes:

- Faixa de resposta linear: 100  $\mu\text{m}$
- Sensibilidade na faixa linear: 0,066 V/ $\mu\text{m}$
- Desvio padrão da calibração: 1,16  $\mu\text{m}$

Supondo os dados com uma distribuição de Gauss, a medida fornecida por este sensor tem a probabilidade de 95% de ter um erro máximo de  $\pm 2,32 \mu\text{m}$  ( $2\sigma$ ) [34].

O sensor de deslocamento Modelo III apresenta a curva de calibração mostrada na Fig. A.II.3. Suas características são as seguintes:

- Faixa de resposta linear: 44  $\mu\text{m}$
- Sensibilidade na faixa linear: 0,1056 V/ $\mu\text{m}$
- Desvio padrão da calibração: 0,61  $\mu\text{m}=\sigma$

Supondo que os dados tenham uma distribuição de Gauss, a medida fornecida pelo sensor tem a probabilidade de 99,7% de ter um erro máximo de  $\pm 1,84 \mu\text{m}$  ( $3\sigma$ ) [34].

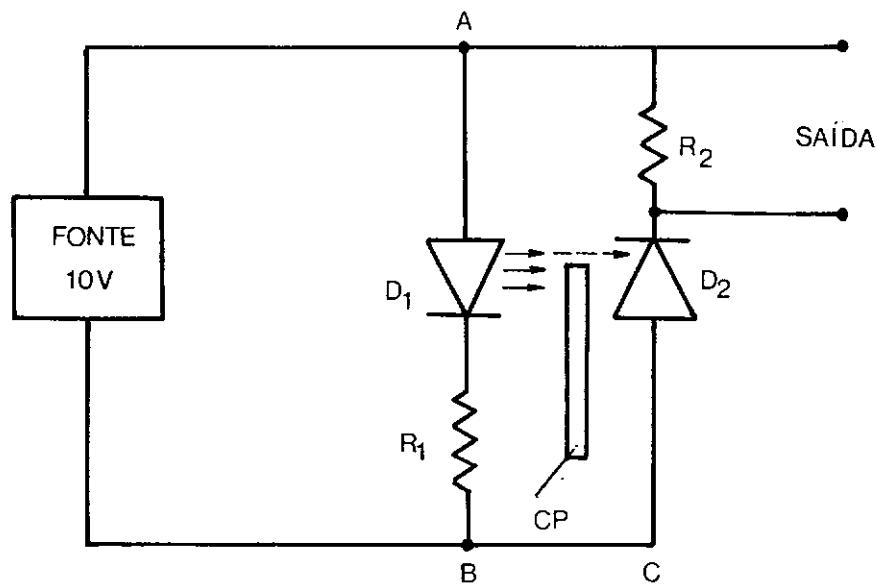
Precisamos fazer novamente a calibração desse sensor depois que colocamos uma blindagem nele para que diminuisse o ruído. Na Tab. A.II.1 mostramos os dados obtidos para a sua calibração.

Tab. A.II.1

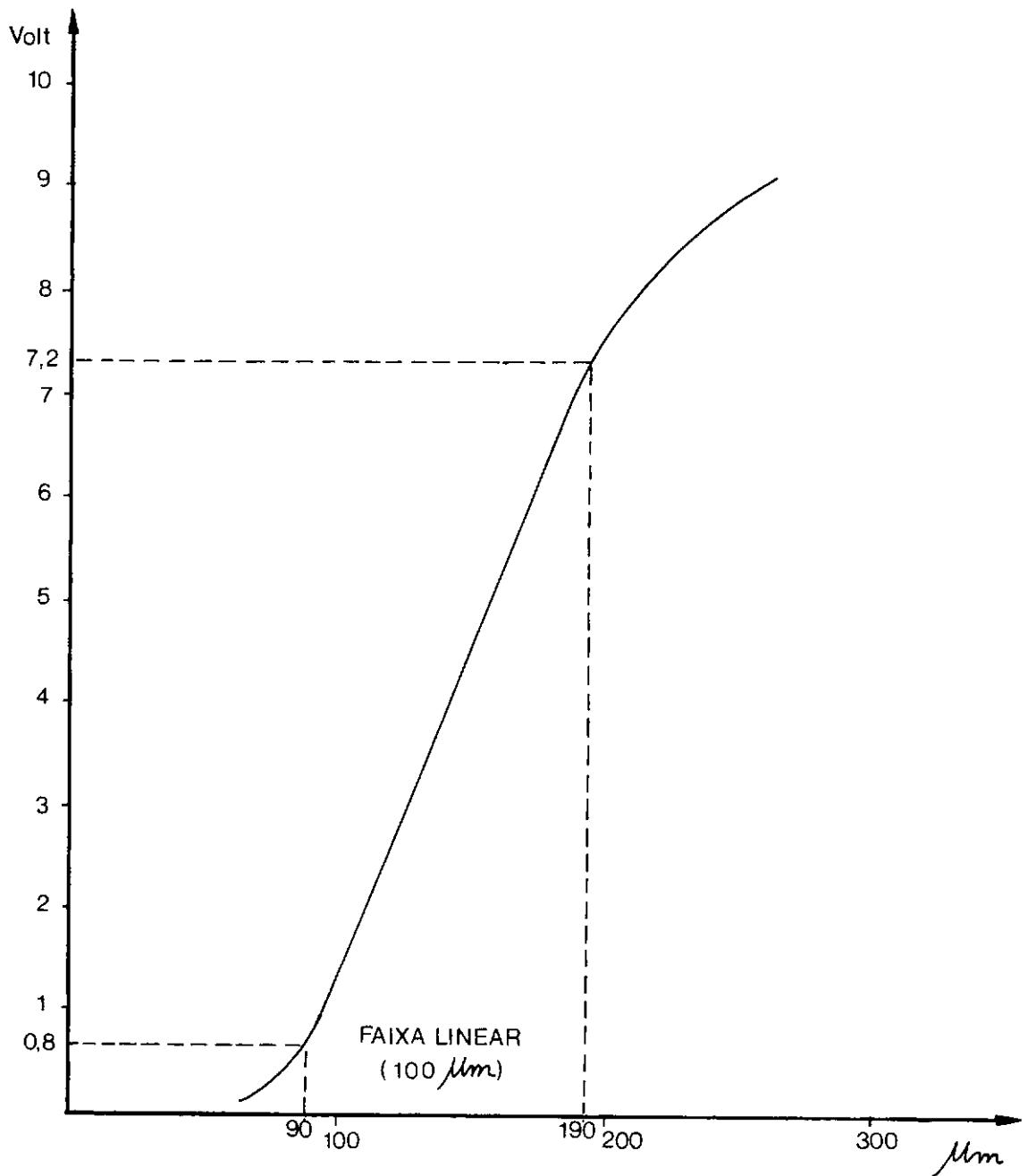
Voltagem (Volts) (q <sub>o</sub> )	Deslocamento (μm) (q <sub>i</sub> )
0,19	0
0,23	10
0,88	20
1,70	27
2,27	33
2,89	37
3,49	44
4,03	49
4,29	52
4,58	54
4,97	59
5,22	62
5,64	68 → 67
5,88	70
6,13	75
6,52	82
6,70	85
6,88	88
7,09	92
7,34	99
7,48	102
7,65	108
7,81	114
8,08	125
8,19	133

Tab. A.II.1 (continuação)

Voltagem (Volts) (q <sub>o</sub> )	Deslocamento (μm) (q <sub>i</sub> )
8,33	143
8,42	152
8,50	163
8,56	174
8,60	184
8,65	195
8,74	224
8,79	244
8,83	264
8,86	285
8,90	334
8,93	355
8,95	380
8,98	405
9,00	420

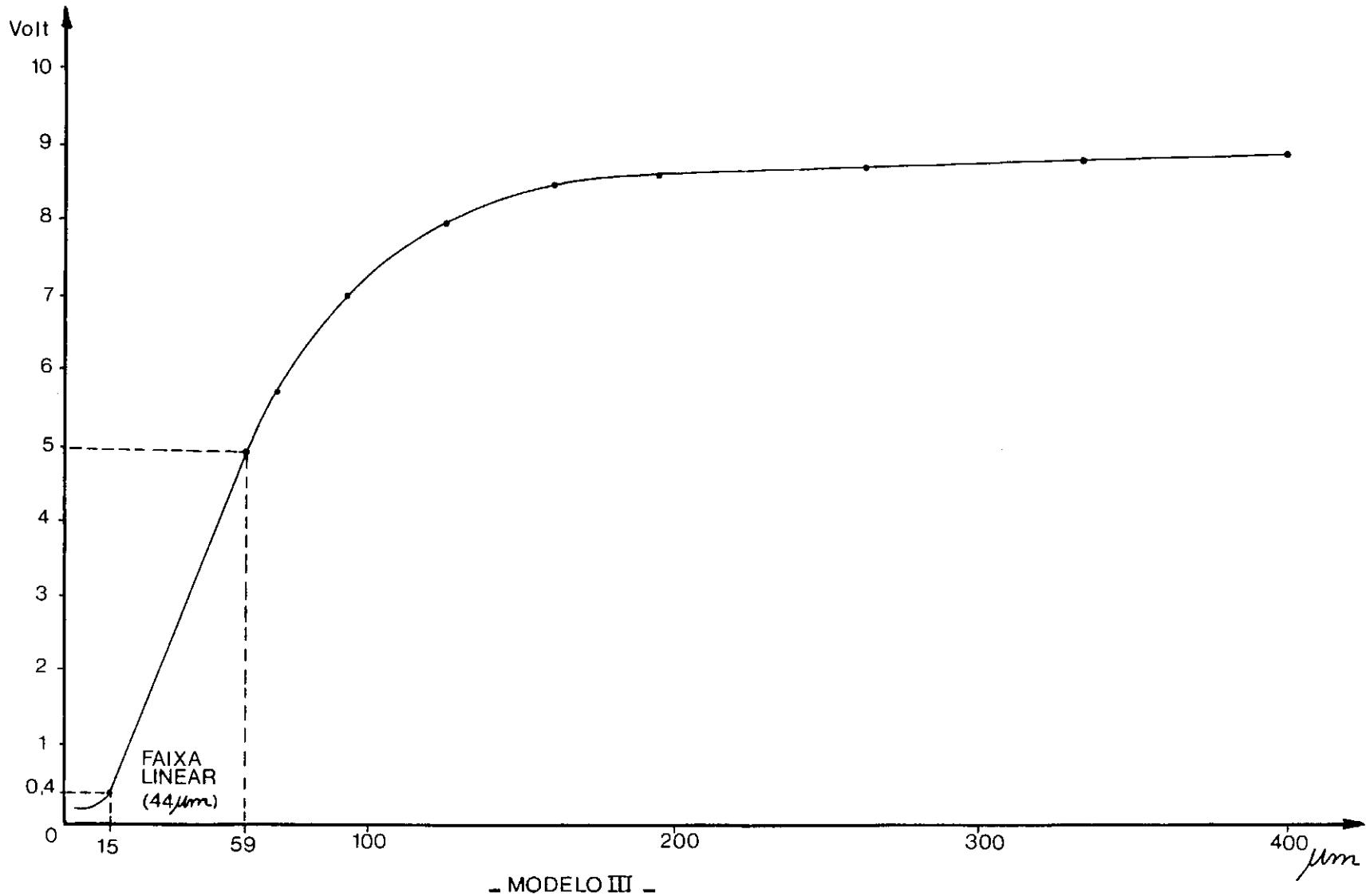


- FIG.A.II.1 -



- MODELO I -

- FIG. A.II.2 -



- FIG. A. II. 3 -

**APÊNDICE III**

Neste Apêndice III, apresentamos quatro tabelas, obtidas da exponencial (envoltória) ajustada às medidas tiradas das FOTOS Nº 1, Nº 2, Nº 3 e Nº 4, usadas para o cálculo das constantes de amortecimento ( $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ ).

Tab. A.III.1 - FOTO N° 1

Nº do Pt	ABSCISSA (X)	AMPLITUDE ( $\bar{A}$ ) (MEDIDA) (mm)	AMPLITUDE (A) (AJUSTADA) (mm)	ERRO % $\left( \frac{ A - \bar{A} }{A} \right)$
1	0	25,87	25,96	0,35
2	4,01	23,88	23,95	0,29
3	8,02	22,08	22,10	0,09
→ 4	12,03	20,36	20,38	0,10
5	16,04	18,82	18,81	0,05
6	20,05	17,37	17,35	0,12
7	24,06	16,06	16,01	0,31
8	28,07	14,81	14,77	0,27
9	32,08	13,68	13,62	0,44
10	36,09	12,60	12,57	0,24
11	40,10	11,62	11,59	0,26
12	44,11	10,70	10,70	0,00
13	48,12	9,86	9,87	0,10
→ 14	52,13	9,07	9,10	0,33
15	56,14	8,36	8,40	0,48

AMPLITUDE ( $\bar{A}$ ) - amplitude obtida pela foto através do microscópio;  
(MEDIDA)

AMPLITUDE (A) - amplitude obtida pela curva exponencial mais bem  
(PROGRAMADA) ajustada pelo programa de computador da HP-97  
aos pontos da foto lidos no microscópio.

Os pontos marcados com as setas foram os escolhidos para os cálculos da constante de amortecimento.

Tab. A.III.2 - FOTO N° 2

Nº do Pt	ABSCISSA (X)	AMPLITUDE (Å) (MEDIDA) (mm)	AMPLITUDE (A) (AJUSTADA) (mm)	ERRO % $\left( \frac{ A - \bar{A} }{A} \right)$
1	0	15,06	14,97	0,60
2	4,01	14,10	14,05	0,36
3	8,02	13,18	13,19	0,08
→ 4	12,03	12,40	12,38	0,16
5	16,04	11,63	11,62	0,09
6	20,05	10,88	10,91	0,27
7	24,06	10,21	10,24	0,29
8	28,07	9,56	9,61	0,52
9	32,08	8,94	9,02	0,89
10	36,09	8,45	8,46	0,12
11	40,10	7,92	7,95	0,38
12	44,11	7,45	7,46	0,13
13	48,12	7,00	7,00	0,00
→ 14	52,13	6,60	6,57	0,46
15	56,14	6,22	6,17	0,81

Tab. A.III.3 - FOTO N° 3

Nº do Pt	ABSCISSA (X)	AMPLITUDE (A) (MEDIDA) (mm)	AMPLITUDE (A) (AJUSTADA) (mm)	ERRO % $\left( \frac{ A - \bar{A} }{A} \right)$
1	0,0	19,87	19,98	0,55
2	4,01	18,20	18,27	0,38
3	8,02	16,66	16,71	0,30
→ 4	12,03	15,28	15,28	0,00
5	16,04	13,98	13,97	0,07
6	20,05	12,82	12,77	0,39
7	24,06	11,75	11,68	0,60
8	28,07	10,75	10,68	0,66
9	32,08	9,76	9,76	0,00
10	36,09	8,96	8,93	0,34
11	40,10	8,18	8,16	0,25
12	44,11	7,49	7,47	0,27
13	48,12	6,80	6,83	0,44
→ 14	52,13	6,21	6,24	0,48
15	56,14	5,68	5,71	0,53

Tab. A.III.4 - FOTO N° 4

Nº do Pt	ABSCISSA (X)	AMPLITUDE ( $\bar{A}$ ) (MEDIDA) (mm)	AMPLITUDE (A) (AJUSTADA) (mm)	ERRO % $A - \bar{A}$ A
1	0,0	16,83	16,81	0,12
2	4,01	15,92	15,91	0,06
3	8,02	15,03	15,05	0,13
→ 4	12,03	14,25	14,24	0,07
5	16,04	13,51	13,48	0,22
6	20,05	12,79	12,75	0,31
7	24,06	12,08	12,07	0,08
8	28,07	11,41	11,42	0,09
9	32,08	10,80	10,81	0,09
10	36,09	10,21	10,23	0,20
11	40,10	9,62	9,68	0,62
12	44,11	9,12	9,16	0,44
13	48,12	8,62	8,66	0,46
→ 14	52,13	8,15	8,20	0,60
15	56,14	7,89	7,76	1,68

## APÊNDICE IV

Neste Apêndice, colocamos as medidas obtidas da calibração da força de excitação, do Capítulo V, nas Tabs. A.IV.1, A.IV.2 e A.IV.3.

Tab. A.IV.1

distância inicial ( $d_i$ )  $\equiv$  5,0 mm

CORRENTE (mA)	PESO (g) $\equiv$ AMPLITUDE DA FORÇA MAGNÉTICA (P)		
	1 <sup>a</sup> série	2 <sup>a</sup> série	3 <sup>a</sup> série
10	0,6	0,6	0,6
20	1,4	1,4	1,4
30	2,1	2,1	2,0
40	3,1	3,1	3,0
50	3,8	3,9	3,8
60	4,8	4,9	4,8
70	5,7	5,5	5,6
80	6,6	6,6	6,5
90	7,7	7,5	7,7
100	8,5	8,6	8,6

Tab. A.IV.2

distância inicial ( $d_i$ ) = 5,6 mm

CORRENTE (mA)	PESO (g) = AMPLITUDE DA FORÇA MAGNÉTICA (P)		
	1 <sup>a</sup> série	2 <sup>a</sup> série	3 <sup>a</sup> série
10	0,6	0,6	0,6
20	1,3	1,4	1,3
30	2,1	2,1	2,0
40	2,9	3,0	2,9
50	3,8	3,9	3,8
60	4,7	4,8	4,7
70	5,4	5,6	5,5
80	6,3	6,5	6,4
90	7,5	7,6	7,5
100	8,3	8,4	8,3

Tab. A.IV.3.

distância inicial ( $d_i$ ) = 6,0 mm

CORRENTE (mA)	PESO (g) ≡ AMPLITUDE DA FORÇA MAGNÉTICA (P)		
	1 <sup>a</sup> série	2 <sup>a</sup> série	3 <sup>a</sup> série
10	0,7	0,6	0,6
20	1,4	1,5	1,3
30	2,1	2,2	1,8
40	2,8	3,4	2,6
50	3,8	4,2	3,8
60	4,7	5,1	4,7
70	5,4	6,0	5,3
80	6,3	7,0	5,8
90	7,5	8,3	6,7
100	8,3	9,2	8,2

## APÊNDICE V

Neste Apêndice apresentamos os valores das partes reais (R) e imaginárias (U) da amplitude complexa (X) do deslocamento, com os respectivos valores obtidos nos cálculos intermedios, tirados das fotos mostradas no item 5 do Capítulo VI. A nomenclatura usada nesse apêndice foi mantida igual à desse capítulo.

### MASSA 1

- Sensor de deslocamento Modelo I - (NÃO BLINDADO)
- Sensibilidade na faixa linear: 0,066 Volt/ $\mu\text{m}$
- Já temos os valores para a primeira freqüência de excitação  $F_1 = 11,38 \text{ Hz}$

---

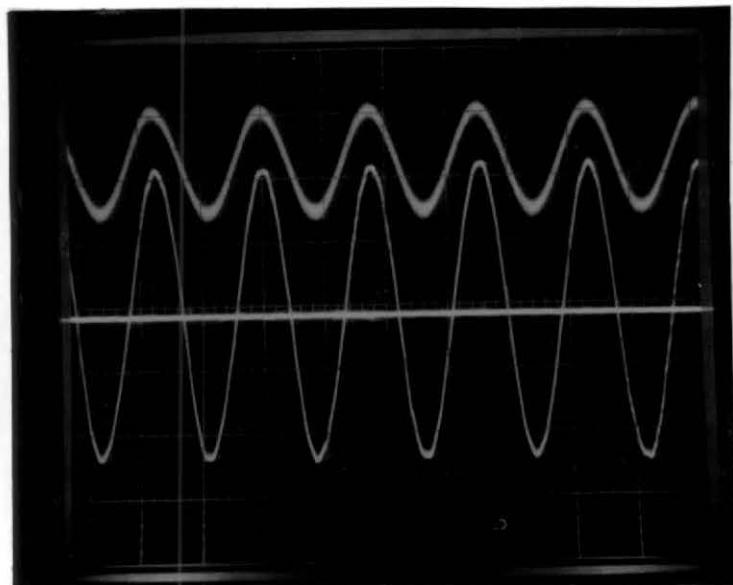
$$R_{11} = -0,000004147 \text{ m}$$

---

$$U_{11} = +0,000000145 \text{ m}$$

---

FOTO N° 3



1 - Freqüência de excitação:  $F_2 = 11,48 \text{ Hz}$

2 - Amplitude da força de excitação (P)  
(Foto: 0,005 V/div) :

$I = 10 \text{ mA} \implies$  Fator de multiplicação da amplitude:

$$\frac{10}{10} = 1$$

3 - Amplitude do deslocamento (X) (Foto em 0,2 V/div) :

$$1^{\text{a}} \text{ Medida: } X_1 = \frac{43,05 - 6,20}{2} \Rightarrow X_1 = 18,43 \text{ mm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Medida: } X_2 = \frac{43,17 - 6,68}{2} \Rightarrow X_2 = 18,25 \text{ mm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Medida: } X_3 = \frac{42,86 - 6,75}{2} \Rightarrow X_3 = 18,06 \text{ mm}$$

$$x = 18,25 \text{ mm} \text{ (pelo microscópio)} \Rightarrow u = 6,74 \mu\text{m}$$

1 divisão osciloscópio  $\equiv$  8,2 mm

---


$$\underline{x_{21}} = 0,00000674 \text{ m}$$


---

#### 4 - Ângulo da fase ( $\phi$ )

Pico da onda força:

$$Y_1 = 45,50 \text{ mm} \Rightarrow x_1 = 30,03 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = 27,26 \text{ mm}$$

$$x_2 = 24,48 \text{ mm}$$

$$Y_2 = 42,50 \text{ mm} \Rightarrow x_3 = 31,40 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_2 = 27,39 \text{ mm}$$

$$x_4 = 23,37 \text{ mm}$$

$$Y_3 = 39,50 \text{ mm} \Rightarrow x_5 = 32,70 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 27,40 \text{ mm}$$

$$x_6 = 22,09 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_F = 27,35 \text{ mm}$$

$$\text{Erro máximo: } \varepsilon_F = \pm 0,11 \text{ mm}$$

Pico da onda de deslocamento:

$$Y_1 = 35,25 \text{ mm} \Rightarrow x_1 = 29,83 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = 27,62 \text{ mm}$$

$$x_2 = 25,41 \text{ mm}$$

$$Y_2 = 29,25 \text{ mm} \Rightarrow x_3 = 30,60 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_2 = 27,59 \text{ mm}$$

$$x_4 = 24,57 \text{ mm}$$

$$Y_3 = 23,25 \text{ mm} \Rightarrow x_5 = 31,33 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_3 = 27,54 \text{ mm}$$

$$x_6 = 23,75 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_D = 27,58 \text{ mm}$$

$$\text{Erro máximo: } \epsilon_D = 0,06 \text{ mm}$$

Valor do ciclo para o microscópio:

$$1 - X_1 = 18,33 \text{ mm}; \quad X_2 = 4,35 \text{ mm} \Rightarrow x_{C1} = 13,98 \text{ mm}$$

$$2 - X_1 = 32,37 \text{ mm}; \quad X_2 = 18,33 \text{ mm} \Rightarrow x_{C2} = 14,04 \text{ mm}$$

$$3 - X_1 = 46,50 \text{ mm}; \quad X_2 = 32,37 \text{ mm} \Rightarrow x_{C3} = 14,13 \text{ mm}$$

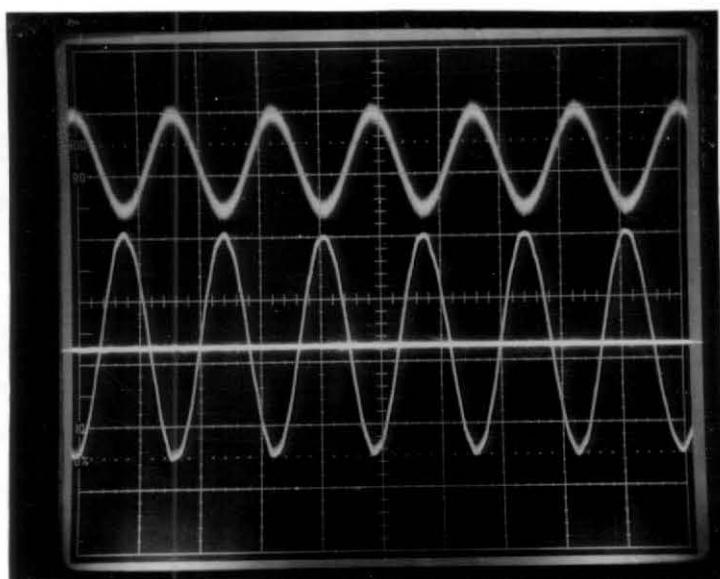
$$\bar{x}_C = 14,05 \text{ mm}$$

$$\bar{\phi} = 5,89^\circ; \quad \phi = +174,11^\circ$$

## 5 - Parte real (R) e parte imaginária (U)

$$\begin{array}{r} \hline R_{21} = -0,00000670 \text{ m} \\ \hline U_{21} = +0,000000692 \text{ m} \end{array}$$

FOTO Nº 5

1 - Freqüência de excitação:  $F_3 = 12,10 \text{ Hz}$ 

2 - Amplitude da força de excitação (P)

(Foto: 0,005 V/div) :

 $I = 9,375 \text{ mA} \implies$  Fator de multiplicação da amplitude:

$$\frac{10}{9,375} = 1,07$$

3 - Amplitude do deslocamento (X) (Foto: 0,2V/div).

$$1^{\text{a}} \text{ Medida: } X_1 = \frac{30,40 - 2,58}{2} \Rightarrow X_1 = 13,91$$

$$2^{\text{a}} \text{ Medida: } X_2 = \frac{30,34 - 2,68}{2} \Rightarrow X_2 = 13,83 \text{ mm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Medida: } X_3 = \frac{30,26 - 2,60}{2} \Rightarrow X_3 = 13,83 \text{ mm}$$

$$X = 13,86 \text{ mm (pelo microscópio)} \Rightarrow u = 5,25 \mu\text{m}$$

$$1 \text{ divisão do osciloscópio} \equiv 8,0 \text{ mm}$$

$$X_{31} = 0,00000562 \text{ m}$$

#### 4 - Ângulo de fase ( $\phi$ )

Pico da onda força:

$$Y_1 = 42,00 \text{ mm}; X_1 = 53,12 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_1 = 48,60 \text{ mm}$$

$$X_2 = 44,08 \text{ mm}$$

$$Y_2 = 41,00 \text{ mm}; X_3 = 52,72 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_2 = 48,62 \text{ mm}$$

$$X_4 = 44,52 \text{ mm}$$

$$Y_3 = 40,00 \text{ mm}; X_5 = 52,37 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_3 = 48,61$$

$$X_6 = 44,85 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_F = 48,61 \text{ mm}$$

$$\text{Erro máximo: } \epsilon_F = \pm 0,03 \text{ mm}$$

Pico da onda deslocamento:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 21,20 \text{ mm} & X_1 &= 51,23 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{x}_1 = 48,59 \text{ mm} \\ X_2 &= 45,94 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= 18,20 \text{ mm} & X_3 &= 51,72 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{x}_2 = 48,61 \text{ mm} \\ X_4 &= 45,50 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= 15,20 \text{ mm} & X_5 &= 52,17 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{x}_3 = 48,59 \text{ mm} \\ X_6 &= 45,00 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_D = 48,60 \text{ mm}$$

$$\text{Erro máximo: } \epsilon_D = \pm 0,003 \text{ mm}$$

Valor do ciclo para o microscópio:

$$1 - X_1 = 51,48 \text{ mm}; \quad X_2 = 38,03 \text{ mm} \Rightarrow \bar{x}_{C1} = 13,45 \text{ mm}$$

$$2 - X_1 = 38,00 \text{ mm}; \quad X_2 = 24,66 \text{ mm} \Rightarrow \bar{x}_{C2} = 13,34 \text{ mm}$$

$$3 - X_1 = 24,66 \text{ mm}; \quad X_2 = 11,36 \text{ mm} \Rightarrow \bar{x}_{C3} = 13,30 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_c = 13,36 \text{ mm}$$

$$\bar{\phi} = 0,27^\circ; \quad \phi = +0,27^\circ$$

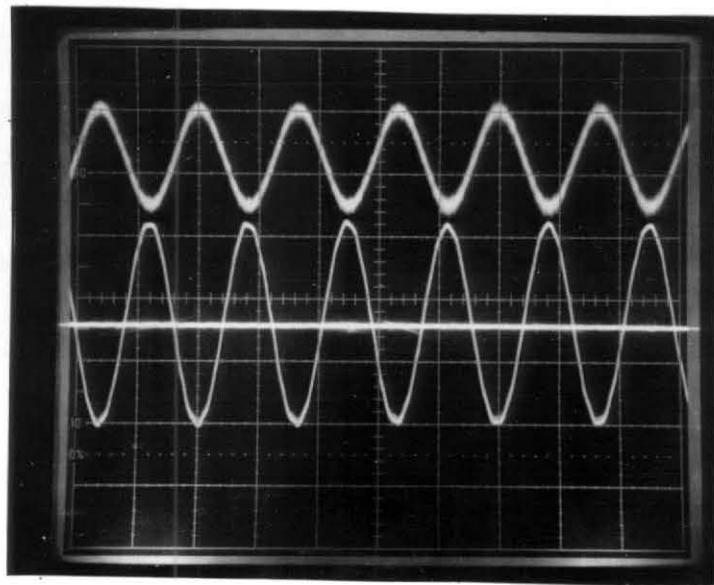
5 - Parte real (R) e parte imaginária (U)

---

$R_{31} = +0,000005617 \text{ m}$
$U_{31} = +0,0000000265 \text{ m}$

---

FOTO Nº 7



1 - Frequência de excitação:  $F_4 = 12,20 \text{ Hz}$

2 - Amplitude da força de excitação (P)

(Foto: 0,05 V/div):

$I = 10 \text{ mA} \implies$  Fator de multiplicação da amplitude:

$$\frac{10}{10} = 1$$

3 - Amplitude do deslocamento (X) (Foto: 0,2 V/div):

$$1^{\text{a}} \text{ Medida: } X_1 = \frac{31,05 - 5,85}{2} \Rightarrow X_1 = 12,60 \text{ mm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Medida: } X_2 = \frac{31,32 - 5,72}{2} \Rightarrow X_2 = 12,80 \text{ mm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Medida: } X_3 = \frac{30,90 - 5,50}{2} \Rightarrow X_3 = 12,70 \text{ mm}$$

$$X = 12,70 \text{ mm (pelo microscópio)} \Rightarrow u = 4,81 \mu\text{m}$$

$$1 \text{ divisão do osciloscópio} \equiv 8,0 \text{ mm}$$

$$X_{4,1} = 0,00000481 \text{ m}$$

4 - Ângulo de fase ( $\phi$ )

Pico da onda-força:

$$Y_1 = 41,00 \text{ mm}; X_1 = 52,36 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_1 = 48,18 \text{ mm}$$

$$X_2 = 44,00 \text{ mm}$$

$$Y_2 = 40,00 \text{ mm}; X_3 = 51,98 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_2 = 48,14 \text{ mm}$$

$$X_4 = 44,30 \text{ mm}$$

$$Y_3 = 39,00 \text{ mm}; X_5 = 51,64 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_3 = 48,14 \text{ mm}$$

$$X_6 = 44,64 \text{ mm}$$

$$\bar{X}_F = 48,15 \text{ mm}$$

$$\text{Erro máximo: } \varepsilon_F = \pm 0,05 \text{ mm}$$

Pico de onda-deslocamento:

$$Y_1 = 25,00 \text{ mm} \quad X_1 = 50,16 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_1 = 48,06 \text{ mm}$$

$$X_2 = 45,96 \text{ mm}$$

$$Y_2 = 20,00 \text{ mm} \quad X_3 = 51,08 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_2 = 48,05 \text{ mm}$$

$$X_4 = 45,02 \text{ mm}$$

$$Y_3 = 10,00 \text{ mm} \quad X_5 = 52,92 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_3 = 48,09 \text{ mm}$$

$$X_6 = 43,26 \text{ mm}$$

$$\bar{X}_D = 48,07 \text{ mm}$$

$$\text{Erro máximo: } \varepsilon_D = \pm 0,04 \text{ mm}$$

Valor do ciclo para o microscópio

$$1 - X_1 = 50,00 \text{ mm}; \quad X_2 = 36,75 \text{ mm} \Rightarrow X_{C1} = 13,25 \text{ mm}$$

$$2 - X_1 = 36,75 \text{ mm}; \quad X_2 = 23,45 \text{ mm} \Rightarrow X_{C2} = 13,30 \text{ mm}$$

$$3 - X_1 = 23,45 \text{ mm}; \quad X_2 = 10,25 \text{ mm} \Rightarrow X_{C3} = 13,20 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_c = 13,25 \text{ mm}$$

$$\bar{\phi} = 2,17^\circ; \quad \phi = +2,17^\circ$$

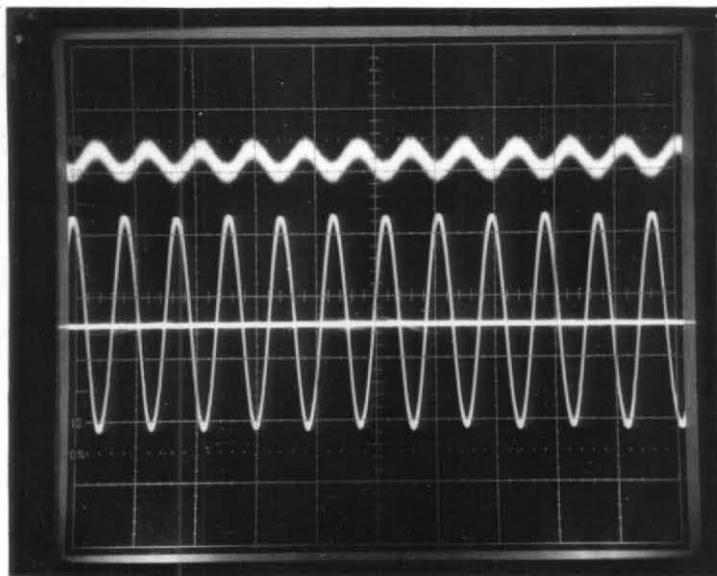
5 - Parte real (R) e parte imaginária (U)

---

$R_{41} = +0,000004807 \text{ m}$
$U_{41} = +0,000000182 \text{ m}$

---

FOTO Nº 9



1 - Frequência de excitação:  $F_5 = 23,00 \text{ Hz}$

2 - Amplitude da força de excitação (P)  
(Foto: 0,005 V/div) :

$I = 2,5 \text{ mA} \implies$  Fator de multiplicação da amplitude:

$$\frac{10}{2,5} = 4$$

3 - Amplitude de deslocamento (X) (Foto: 1,0 V/div):

$$1^{\text{a}} \text{ Medida: } X_1 = \frac{33,87 - 7,27}{2} \Rightarrow X_1 = 13,30 \text{ mm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Medida: } X_2 = \frac{33,77 - 7,27}{2} \Rightarrow X_2 = 13,25 \text{ mm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Medida: } X_3 = \frac{33,90 - 7,26}{2} \Rightarrow X_3 = 13,32 \text{ mm}$$

$$X = 13,29 \text{ mm (pelo microscópio)} \Rightarrow u = 25,30 \mu\text{m}$$

$$1 \text{ divisão do osciloscópio} = 7,96 \text{ mm}$$

$$X_{5,1} = 0,0001012 \text{ mm}$$

4 - Ângulo de fase ( $\phi$ )

Pico da onda-força:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 40,75 \text{ mm} & X_1 &= 27,78 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_1 = 25,43 \text{ mm} \\ X_2 &= 23,07 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= 40,05 \text{ mm} & X_3 &= 27,20 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_2 = 25,43 \text{ mm} \\ X_4 &= 23,65 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= 39,35 \text{ mm} & X_5 &= 26,60 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_3 = 25,40 \text{ mm} \\ X_6 &= 24,20 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_F = 25,42 \text{ mm}$$

$$\text{Erro máximo: } \varepsilon_F = \pm 0,04 \text{ mm}$$

Pico da onda=deslocamento:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 28,50 \text{ mm} & X_1 &= 26,62 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{x}_1 = 25,58 \text{ mm} \\ X_2 &= 24,54 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= 25,50 \text{ mm} & X_3 &= 26,90 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{x}_2 = 25,28 \text{ mm} \\ X_4 &= 24,26 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= 22,50 \text{ mm} & X_5 &= 27,14 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{x}_3 = 25,28 \text{ mm} \\ X_6 &= 24,02 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_D = 25,58 \text{ mm}$$

$$\text{Erro máximo: } \varepsilon_D = \pm 0,02 \text{ mm}$$

Valor do ciclo para o microscópio

$$1 - X_1 = 27,14 \text{ mm}; \quad X_2 = 20,19 \text{ mm} \Rightarrow \bar{x}_{C1} = 6,95 \text{ mm}$$

$$2 - X_1 = 31,00 \text{ mm}; \quad X_2 = 24,02 \text{ mm} \Rightarrow \bar{x}_{C2} = 6,98 \text{ mm}$$

$$3 - X_1 = 37,99 \text{ mm}; \quad X_2 = 31,00 \text{ mm} \Rightarrow \bar{x}_{C3} = 6,99 \text{ mm}$$

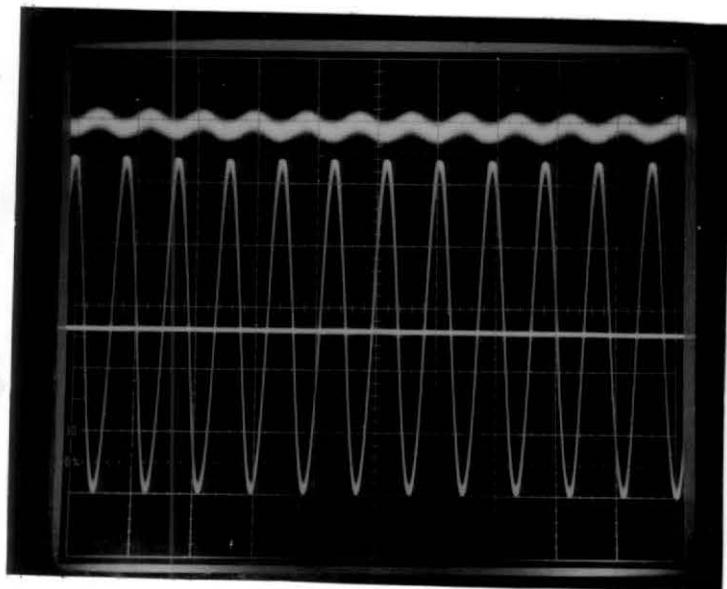
$$\bar{x}_c = 6,97 \text{ mm}$$

$$\bar{\phi} = 8,26^\circ; \quad \phi = -8,26^\circ$$

5 - Parte real (R) e parte imaginária (U)

$R_{51}$	$= + 0,00010015 \text{ m}$
$U_{51}$	$= - 0,00001454 \text{ m}$

FOTO Nº 11



1 - Frequência de excitação:  $F_6 = 23,10 \text{ Hz}$

2 -- Amplitude da força de excitação (P)

(Foto: 0,005 V/div) :

$I = 1,25 \text{ mA} \implies$  Fator de multiplicação da amplitude:

$$\frac{10}{1,25} = 8$$

3 - Amplitude do deslocamento (X) (Foto: 1,0 V/div):

$$1^{\text{a}} \text{ Medida: } X_1 = \frac{46,76 - 4,76}{2} \Rightarrow X_1 = 21,00 \text{ mm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Medida: } X_2 = \frac{46,80 - 4,76}{2} \Rightarrow X_2 = 21,02 \text{ mm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Medida: } X_3 = \frac{46,82 - 4,84}{2} \Rightarrow X_3 = 20,99 \text{ mm}$$

$$X = 21,00 \text{ mm (pelo microscópio)} \Rightarrow u = 39,77 \mu\text{m}$$

$$1 \text{ divisão do osciloscópio} \equiv 8,0 \text{ mm}$$

$$X_{61} = 0,00031818 \text{ m}$$

4 - Ângulo de fase ( $\phi$ )

Pico da onda-força:

$$Y_1 = 50,50 \text{ mm} \quad X_1 = 33,50 \text{ mm} \quad \Rightarrow \bar{X}_2 = 31,24 \text{ mm}$$

$$X_2 = 28,97 \text{ mm}$$

$$Y_2 = 50,30 \text{ mm} \quad X_3 = 33,05 \text{ mm} \quad \Rightarrow \bar{X}_2 = 31,21 \text{ mm}$$

$$X_4 = 29,37 \text{ mm}$$

$$Y_3 = 50,10 \text{ mm} \quad X_5 = 32,65 \text{ mm} \quad \Rightarrow \bar{X}_3 = 31,25 \text{ mm}$$

$$X_6 = 29,85 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_F = 31,23 \text{ mm}$$

$$\text{Erro máximo: } \varepsilon_F = \pm 0,04 \text{ mm}$$

Pico da onda-deslocamento:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 31,00 \text{ mm} & X_1 &= 33,08 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{x}_1 = 31,61 \text{ mm} \\ X_2 &= 30,14 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= 21,00 \text{ mm} & X_3 &= 33,58 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{x}_2 = 31,59 \text{ mm} \\ X_4 &= 29,59 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= 11,00 \text{ mm} & X_5 &= 34,12 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{x}_3 = 31,52 \text{ mm} \\ X_6 &= 28,92 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_D = 31,57 \text{ mm}$$

$$\text{Erro máximo: } \varepsilon_D = \pm 0,07 \text{ mm}$$

Valor do ciclo para o microscópio

$$1 - X_1 = 32,94 \text{ mm}; \quad X_2 = 25,94 \text{ mm} \Rightarrow \bar{x}_{C1} = 7,00 \text{ mm}$$

$$2 - X_1 = 37,40 \text{ mm}; \quad X_2 = 30,32 \text{ mm} \Rightarrow \bar{x}_{C2} = 7,08 \text{ mm}$$

$$3 - X_1 = 40,01 \text{ mm}; \quad X_2 = 32,94 \text{ mm} \Rightarrow \bar{x}_{C3} = 7,07 \text{ mm}$$

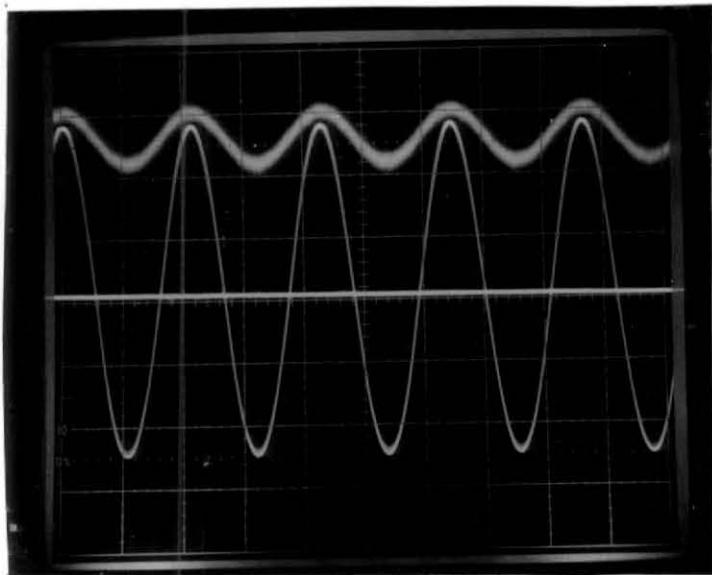
$$\bar{x}_c = 7,05 \text{ mm}$$

$$\bar{\phi} = 17,36^\circ; \quad \phi = -17,36^\circ$$

5 - Parte real (R) e parte imaginária (U)

$R_{61} = +0,00030369 \text{ m}$
$U_{61} = -0,00009494 \text{ m}$

FOTO Nº 13



1 - Frequência de excitação:  $F_7 = 23,40 \text{ Hz}$

2 - Amplitude da força de excitação (P)  
(Foto: 0,005 V/div):

$I = 5 \text{ mA} \implies$  Fator de multiplicação da amplitude:

$$\frac{10}{5} = 2$$

3 - Amplitude do deslocamento (X) (Foto: 1,0 V/div):

$$1^{\text{a}} \text{ Medida: } X_1 = \frac{45,94 - 3,93}{2} \Rightarrow \bar{X}_1 = 21,01 \text{ mm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Medida: } X_2 = \frac{46,01 - 3,97}{2} \Rightarrow \bar{X}_2 = 21,02 \text{ mm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Medida: } X_3 = \frac{46,10 - 4,02}{2} \Rightarrow \bar{X}_3 = 21,04 \text{ mm}$$

$$X = 21,02 \text{ mm (pelo microscópio)} \Rightarrow u = 39,86 \mu\text{m}$$

$$1 \text{ divisão do osciloscópio} \equiv 7,99 \text{ mm}$$

$$X_{71} = 0,00007972 \text{ m}$$

4 - Ângulo de fase ( $\phi$ )

Pico da onda-força:

$$Y_1 = 46,40 \text{ mm} \quad X_1 = 38,90 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_1 = 35,50 \text{ mm}$$

$$X_2 = 32,10 \text{ mm}$$

$$Y_2 = 44,40 \text{ mm} \quad X_3 = 40,73 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_2 = 35,50 \text{ mm}$$

$$X_4 = 30,27 \text{ mm}$$

$$Y_3 = 43,40 \text{ mm} \quad X_5 = 41,67 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_3 = 35,41 \text{ mm}$$

$$X_6 = 29,14 \text{ mm}$$

$$\bar{X}_F = 35,47 \text{ mm}$$

$$\text{Erro máximo: } \varepsilon_F = \pm 0,08 \text{ mm}$$

Pico da onda-deslocamento:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 34,00 \text{ mm} & X_1 &= 38,46 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_1 = 35,35 \text{ mm} \\ X_2 &= 32,23 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= 26,00 \text{ mm} & X_3 &= 39,51 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_2 = 35,33 \text{ mm} \\ X_4 &= 31,15 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= 18,00 \text{ mm} & X_5 &= 40,56 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_3 = 35,33 \text{ mm} \\ X_6 &= 30,08 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\bar{X}_D = 35,33 \text{ mm}$$

$$\text{Erro máximo: } \varepsilon_D = \pm 0,04 \text{ mm}$$

Valor do ciclo para o microscópio

$$1 - X_1 = 38,86 \text{ mm}; \quad X_2 = 21,46 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C1} = 17,40 \text{ mm}$$

$$2 - X_1 = 49,31 \text{ mm}; \quad X_2 = 31,81 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C2} = 17,50 \text{ mm}$$

$$3 - X_1 = 31,81 \text{ mm}; \quad X_2 = 14,38 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C3} = 17,43 \text{ mm}$$

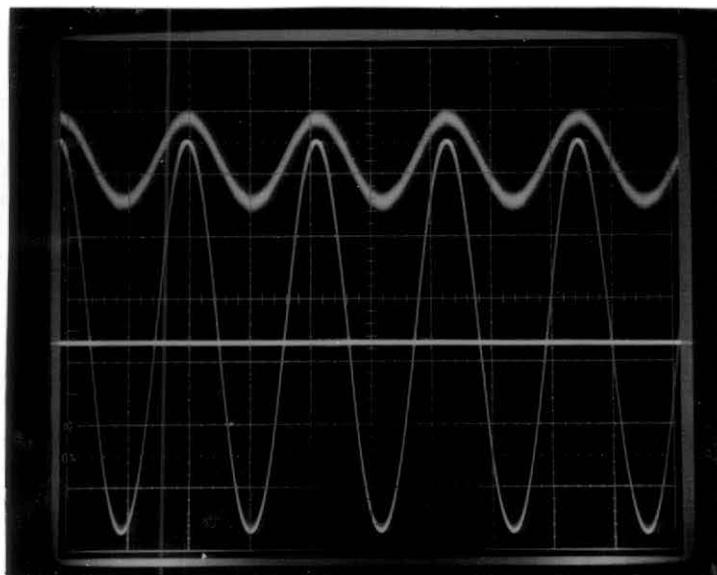
$$\bar{x}_c = 17,44 \text{ mm}$$

$$\bar{\phi} = 2,89^\circ; \quad \phi = 177,11^\circ$$

5 - Parte real (R) e parte imaginária (U)

$R_{71} = -0,00007962 \text{ m}$
$U_{71} = -0,00000402 \text{ m}$

FOTO Nº 15



1 - Frequência da excitação:  $F_8 = 23,48 \text{ Hz}$

2 - Amplitude da força de excitação (P)

(Foto: 0,005 V/div) :

I = 8,75 mm  $\implies$  Fator de multiplicação da amplitude:

$$\frac{10}{8,75} = 1,143$$

3 - Amplitude do deslocamento (X) (Foto: 1,0 V/div):

$$1^{\text{a}} \text{ Medida: } X_1 = \frac{50,91 - 1,04}{2} \Rightarrow X_1 = 24,94 \text{ mm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Medida: } X_2 = \frac{50,93 - 1,13}{2} \Rightarrow X_2 = 24,90 \text{ mm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Medida: } X_3 = \frac{50,98 - 1,10}{2} \Rightarrow X_3 = 24,94 \text{ mm}$$

$$X = 24,93 \text{ mm (pelo microscópio)} \Rightarrow u = 47,16 \mu\text{m}$$

$$1 \text{ divisão do osciloscópio} = 8,01 \text{ mm}$$

$$X_{81} = 0,00005390 \text{ mm}$$

4 - Ângulo da fase ( $\phi$ )

Pico da onda-força:

$$Y_1 = 51,00 \text{ mm} \quad X_1 = 37,31 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_1 = 33,87 \text{ mm}$$

$$X_2 = 30,42 \text{ mm}$$

$$Y_2 = 50,00 \text{ mm} \quad X_3 = 37,85 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_2 = 33,84 \text{ mm}$$

$$X_4 = 29,83 \text{ mm}$$

$$Y_3 = 49,00 \text{ mm} \quad X_5 = 38,38 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_3 = 33,85 \text{ mm}$$

$$X_6 = 29,31 \text{ mm}$$

$$\bar{X}_F = 33,85 \text{ mm}$$

$$\text{Erro máximo: } \varepsilon_F = \pm 0,04 \text{ mm}$$

Pico da onda-deslocamento:

$$Y_1 = 41,00 \text{ mm} \quad X_1 = 36,29 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_1 = 33,75 \text{ mm}$$

$$X_2 = 31,21 \text{ mm}$$

$$Y_2 = 28,00 \text{ mm} \quad X_3 = 37,81 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_2 = 33,75 \text{ mm}$$

$$X_4 = 29,69 \text{ mm}$$

$$Y_3 = 15,00 \text{ mm} \quad X_5 = 39,17 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_3 = 33,68 \text{ mm}$$

$$X_6 = 28,18 \text{ mm}$$

$$\bar{X}_D = 33,73 \text{ mm}$$

$$\text{Erro máximo: } \varepsilon_D = \pm 0,07 \text{ mm}$$

Valor do ciclo para o microscópio

$$1 - X_1 = 36,85 \text{ mm}; \quad X_2 = 19,48 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C1} = 17,37 \text{ mm}$$

$$2 - X_1 = 48,11 \text{ mm}; \quad X_2 = 30,64 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C2} = 17,47 \text{ mm}$$

$$3 - X_1 = 30,64 \text{ mm}; \quad X_2 = 13,31 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C3} = 17,33 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_c = 17,39 \text{ mm}$$

$$\bar{\phi} = 2,48^\circ; \quad \phi = -177,52^\circ$$

5 - Parte real (R) e parte imaginária (U)

---

$R_{g1} = -0,00005385 \text{ m}$
$U_{g1} = -0,00000233 \text{ m}$

---

MASSA 2

- Sensor de deslocamento Modelo III (BLINDADO)
- Sensibilidade na faixa linear:  $0,1056 \text{ Volt}/\mu\text{m}$
- Já temos os valores para a primeira freqüência de excitação  $F_1 = 11,38 \text{ Hz}$ :

---

$R_{12} = +0,0001121 \text{ m}$
$U_{12} = -0,00001595 \text{ m}$

---

3 - Amplitude do deslocamento (X) (Foto 0,5 V/div):

$$1^{\text{a}} \text{ Medida: } X_1 = \frac{44,60 - 6,40}{2} \Rightarrow X_1 = 19,10 \text{ mm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Medida: } X_2 = \frac{44,70 - 6,06}{2} \Rightarrow X_2 = 19,32 \text{ mm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Medida: } X_3 = \frac{44,92 - 6,34}{2} \Rightarrow X_3 = 19,29 \text{ mm}$$

$$x = 19,24 \text{ mm (pelo microscópio)} \Rightarrow u = 11,42 \mu\text{m}$$

$$1 \text{ divisão do osciloscópio} = 7,98 \text{ mm}$$

$$X_{32} = 0,00004568 \text{ mm}$$

#### 4 - Ângulo de fase ( $\phi$ )

Pico da onda-força:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 48,20 \text{ mm} & X_1 &= 40,75 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_1 = 38,40 \text{ mm} \\ X_2 &= 36,05 \text{ mm} \end{aligned}$$

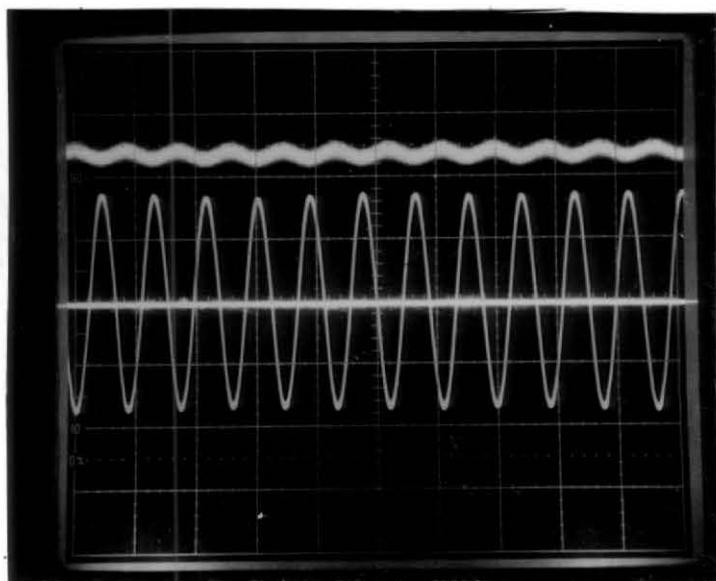
$$\begin{aligned} Y_2 &= 47,20 \text{ mm} & X_3 &= 42,06 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_2 = 38,35 \text{ mm} \\ X_4 &= 34,64 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= 43,20 \text{ mm} & X_5 &= 43,84 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_3 = 38,54 \text{ mm} \\ X_6 &= 33,24 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\bar{X}_F = 38,43 \text{ mm}$$

$$\text{Erro provável: } \varepsilon_F = \pm 0,13 \text{ mm}$$

FOTO N° 4

1 - Freqüência de excitação:  $F_2 = 11,48 \text{ Hz}$ 

2 - Amplitude da força de excitação (P)

(Foto: 0,005 V/div) :

 $I = 1,25 \text{ mA} \implies$  Fator de multiplicação da amplitude:

$$\frac{10}{1,25} = 8$$

3 - Amplitude do deslocamento (X) (Foto: 1,0 V/div) :

$$1^{\text{a}} \text{ Medida: } X_1 = \frac{35,0 - 7,9}{2} \Rightarrow X_1 = 13,55 \text{ mm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Medida: } X_2 = \frac{35,1 - 8,25}{2} \Rightarrow X_2 = 13,43 \text{ mm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Medida: } X_3 = \frac{35,0 - 8,20}{2} \Rightarrow X_3 = 13,40 \text{ mm}$$

$$x = 13,46 \text{ mm} \text{ (pelo microscópio)} \Rightarrow u = 15,54 \mu\text{m}$$

1 divisão do osciloscópio  $\equiv 8,2 \text{ mm}$

$$X_{22} = 0,00012435 \text{ mm}$$

#### 4 - Ângulo de fase ( $\phi$ )

Pico da onda-força:

$$Y_1 = 41,60 \text{ mm} \quad X_1 = 40,26 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_1 = 38,66 \text{ mm}$$

$$X_2 = 37,06 \text{ mm}$$

$$Y_2 = 41,30 \text{ mm} \quad X_3 = 41,04 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_2 = 38,74 \text{ mm}$$

$$X_4 = 36,44 \text{ mm}$$

$$Y_3 = 41,45 \text{ mm} \quad X_5 = 40,53 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_3 = 38,60 \text{ mm}$$

$$X_6 = 36,67 \text{ mm}$$

$$\bar{X}_F = 38,67 \text{ mm}$$

$$\text{Erro provável: } \varepsilon_F = \pm 0,09 \text{ mm}$$

Pico da onda-deslocamento:

$$Y_1 = 28,75 \text{ mm} \quad X_1 = 41,14 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_1 = 38,78 \text{ mm}$$

$$X_2 = 36,42 \text{ mm}$$

$$\begin{array}{ll} Y_2 = 22,75 \text{ mm} & X_3 = 40,64 \text{ mm} \\ & \Rightarrow \bar{X}_2 = 38,81 \text{ mm} \\ X_4 = 36,98 \text{ mm} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Y_3 = 16,75 \text{ mm} & X_5 = 40,12 \text{ mm} \\ & \Rightarrow \bar{X}_3 = 38,80 \text{ mm} \\ X_6 = 37,48 \text{ mm} & \end{array}$$

$$\bar{X}_D = 38,80 \text{ mm}$$

$$\text{Erro provável: } \varepsilon_D = \pm 0,04 \text{ mm}$$

Valor do ciclo para o microscópio

$$1 - X_1 = 35,58 \text{ mm}; \quad X_2 = 28,57 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C^1} = 7,01 \text{ mm}$$

$$2 - X_1 = 42,63 \text{ mm}; \quad X_2 = 35,58 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C^2} = 7,05 \text{ mm}$$

$$3 - X_1 = 21,58 \text{ mm}; \quad X_2 = 14,61 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C^3} = 6,97 \text{ mm}$$

$$\bar{X}_C = 7,01 \text{ mm}$$

$$\bar{\phi} = 6,68^\circ; \quad \phi = -6,68^\circ$$

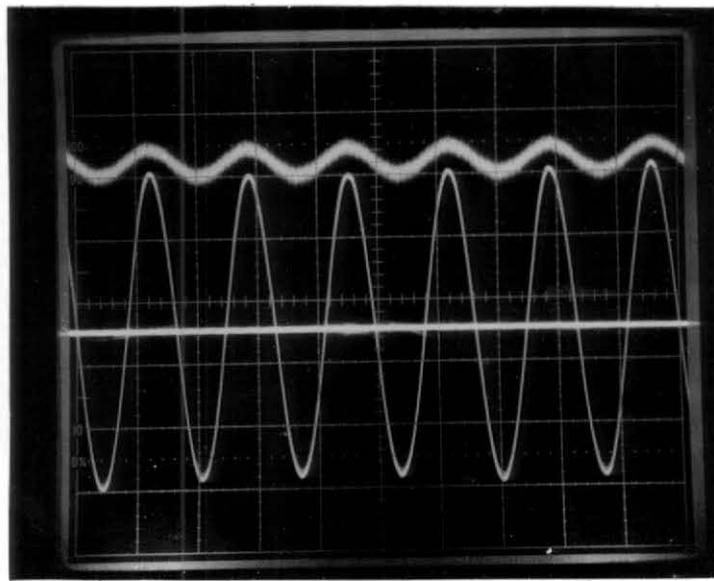
5 - Parte real (R) e parte imaginária (U)

---


$$\begin{array}{l} R_{22} = +0,00012351 \text{ m} \\ U_{22} = -0,00001446 \text{ m} \end{array}$$


---

FOTO N° 6

1 - Freqüência de excitação:  $F_1 = 12,10 \text{ Hz}$ 

2 - Amplitude da força de excitação (P)

(Foto: 0,005 V/div) :

 $I = 2,5 \text{ mA} \implies$  Fator de multiplicação da amplitude:

$$\frac{10}{2,5} = 4$$

Pico da onda deslocamento:

$$Y_1 = 39,00 \text{ mm} \quad X_1 = 39,95 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_1 = 38,26 \text{ mm}$$

$$X_2 = 36,57 \text{ mm}$$

$$Y_2 = 28,00 \text{ mm} \quad X_3 = 41,33 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_2 = 38,28 \text{ mm}$$

$$X_4 = 35,23 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= 17,00 \text{ mm} & X_5 &= 42,55 \text{ mm} \\ && \Rightarrow \bar{X}_3 &= 38,27 \\ X_6 &= 33,98 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\bar{X}_D = 38,27 \text{ mm}$$

$$\text{Erro provável: } \varepsilon_D = \pm 0,03 \text{ mm}$$

Valor do ciclo para o microscópio

$$1 - X_1 = 36,59 \text{ mm}; \quad X_2 = 23,32 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C1} = 13,27 \text{ mm}$$

$$2 - X_1 = 20,66 \text{ mm}; \quad X_2 = 7,45 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C2} = 13,21 \text{ mm}$$

$$3 - X_1 = 33,94 \text{ mm}; \quad X_2 = 20,68 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C3} = 13,26 \text{ mm}$$

$$\bar{X}_C = 13,25 \text{ mm}$$

$$\bar{\phi} = 4,35^\circ; \quad \phi = 175,65^\circ$$

5 - Parte real (R) e parte imaginária (U)

---

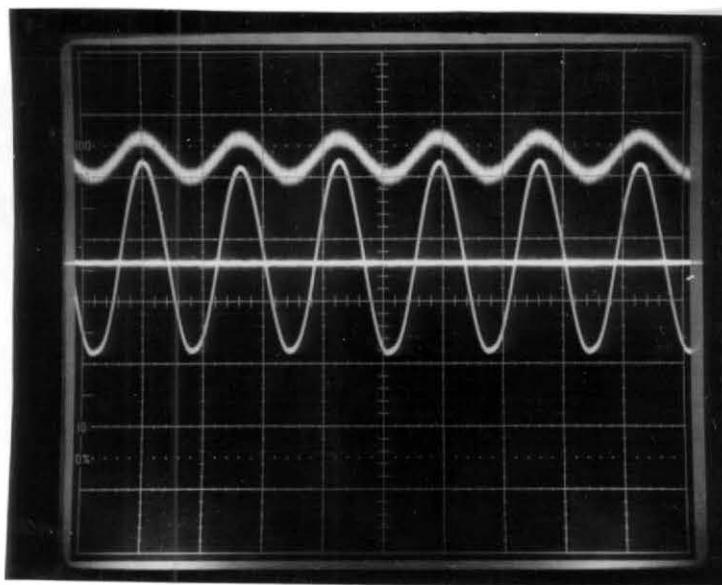

$$R_{32} = -0,00004555 \text{ m}$$


---

$$U_{32} = -0,00000346 \text{ m}$$


---

FOTO N° 8

1 - Freqüência de excitação:  $F_4 = 12,20 \text{ Hz}$ 

2 - Amplitude da força de excitação (P)

(Foto: 0,005 V/div):

 $I = 3,75 \text{ mA} \implies$  Fator de multiplicação da amplitude:

$$\frac{10}{3,75} = \frac{8}{3}$$

3 - Amplitude de deslocamento (X) (Foto: 1,0 V/div):

$$1^{\text{a}} \text{ Medida: } X_1 = \frac{33,04 - 8,80}{2} \Rightarrow X_1 = 12,12 \text{ mm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Medida: } X_2 = \frac{33,00 - 8,62}{2} \Rightarrow X_2 = 12,19 \text{ mm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Medida: } X_3 = \frac{33,20 - 8,86}{2} \Rightarrow X_3 = 12,17 \text{ mm}$$

$$X = 12,16 \text{ mm} \text{ (pelo microscópio)} \Rightarrow u = 14,41 \mu\text{m}$$

1 divisão do osciloscópio  $\equiv 7,99 \text{ microscópio}$

$$X_{42} = 0,00003843 \text{ mm}$$

4 - Ângulo de fase ( $\phi$ )

Pico da onda-força:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 35,50 \text{ mm} & X_1 &= 41,70 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_1 = 39,20 \text{ mm} \\ X_2 &= 36,70 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= 34,50 \text{ mm} & X_3 &= 42,70 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_2 = 39,22 \text{ mm} \\ X_4 &= 35,74 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= 33,50 \text{ mm} & X_5 &= 43,62 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_3 = 39,22 \text{ mm} \\ X_6 &= 34,82 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\bar{X}_F = 39,21 \text{ mm}$$

$$\text{Erro provável: } \varepsilon_F = \pm 0,03 \text{ mm}$$

Pico da onda-deslocamento:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 27,00 \text{ mm} & X_1 &= 41,41 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_1 = 39,29 \text{ mm} \\ X_2 &= 37,17 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} Y_2 = 22,00 \text{ mm} & X_3 = 42,33 \text{ mm} \\ & \Rightarrow \bar{X}_2 = 39,33 \text{ mm} \\ X_4 = 36,32 \text{ mm} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Y_3 = 17,00 \text{ mm} & X_5 = 43,18 \text{ mm} \\ & \Rightarrow \bar{X}_3 = 39,32 \text{ mm} \\ X_6 = 35,46 \text{ mm} & \end{array}$$

$$\bar{X}_D = 39,31 \text{ mm}$$

$$\text{Erro provável: } \varepsilon_D = \pm 0,04 \text{ mm}$$

Valor do ciclo para o microscópio

$$1 - \overset{\wedge}{X}_1 = 50,19 \text{ mm}; \quad X_2 = 36,84 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C1} = 13,35 \text{ mm}$$

$$2 - \overset{\wedge}{X}_1 = 41,76 \text{ mm}; \quad X_2 = 28,40 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C2} = 13,36 \text{ mm}$$

$$3 - \overset{\wedge}{X}_1 = 36,84 \text{ mm}; \quad X_2 = 23,48 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C3} = 13,36 \text{ mm}$$

$$\bar{X}_C = 13,36$$

$$\bar{\phi} = 2,69^\circ; \quad \phi = -182,69^\circ$$

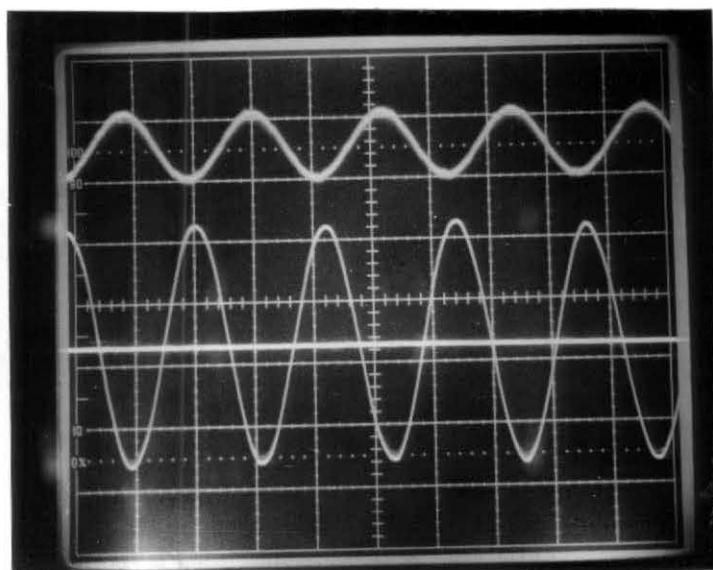
5 - Parte real (R) e parte imaginária (U)

---


$$\begin{array}{l} R_{42} = -0,00003839 \text{ m} \\ U_{42} = +0,00000180 \text{ m} \end{array}$$


---

FOTO N° 10



1 - Freqüência de excitação:  $F_5 = 23,00 \text{ Hz}$

2 - Amplitude da força de excitação (P)

(Foto: 0,01 V/div):

$I = 12,5 \text{ mA} \implies$  Fator de multiplicação da amplitude:

$$\frac{10}{12,5} = \frac{1}{1,25}$$

3 - Amplitude de deslocamento (X) (Foto: 0,2 V/div):

$$1^{\text{a}} \text{ Medida: } X_1 = \frac{36,73 - 5,80}{2} \Rightarrow X_1 = 15,47 \text{ mm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Medida: } X_2 = \frac{36,27 - 6,00}{2} \Rightarrow X_2 = 15,14 \text{ mm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Medida: } X_3 = \frac{36,56 - 5,82}{2} \Rightarrow X_3 = 15,37 \text{ mm}$$

$$x = 15,33 \text{ mm} \text{ (pelo microscópio)} \Rightarrow u = 3,63 \mu\text{m}$$

1 divisão do microscópio  $\equiv 8,0 \text{ mm}$

$$X_{52} = 0,00000290 \text{ m}$$

4 - Ângulo de fase ( $\phi$ )

Pico da onda-força:

$$Y_1 = 47,70 \text{ mm} \quad X_1 = 43,17 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_1 = 37,91 \text{ mm}$$

$$X_2 = 32,64 \text{ mm}$$

$$Y_2 = 46,70 \text{ mm} \quad X_3 = 42,45 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_2 = 37,87 \text{ mm}$$

$$X_4 = 33,29 \text{ mm}$$

$$Y_3 = 45,70 \text{ mm} \quad X_5 = 41,72 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_3 = 37,81 \text{ mm}$$

$$X_6 = 33,90 \text{ mm}$$

$$\bar{X}_F = 37,86 \text{ mm}$$

$$\text{Erro provável: } \varepsilon_F = \pm 0,07 \text{ mm}$$

Pico da onda-deslocamento:

$$Y_1 = 33,20 \text{ mm} \quad X_1 = 40,80 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_1 = 38,77 \text{ mm}$$

$$X_2 = 36,74 \text{ mm}$$

$$\begin{array}{ll} Y_2 = 24,20 \text{ mm} & X_3 = 42,79 \text{ mm} \\ & \Rightarrow \bar{X}_2 = 38,79 \text{ mm} \\ X_4 = 34,78 \text{ mm} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Y_3 = 15,20 \text{ mm} & X_5 = 44,37 \text{ mm} \\ & \Rightarrow \bar{X}_3 = 38,73 \text{ mm} \\ X_6 = 33,08 \text{ mm} & \end{array}$$

$$\bar{X}_D = 38,76 \text{ mm}$$

$$\text{Erro provável: } \varepsilon_D = \pm 0,05 \text{ mm}$$

Valor do ciclo para o microscópio

$$1 - X_1 = 42,83 \text{ mm}; \quad X_2 = 25,03 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C1} = 17,80 \text{ mm}$$

$$2 - X_1 = 52,70 \text{ mm}; \quad X_2 = 34,73 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C2} = 17,97 \text{ mm}$$

$$3 - X_1 = 25,03 \text{ mm}; \quad X_2 = 7,56 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C3} = 17,47 \text{ mm}$$

$$\bar{X}_C = 17,75 \text{ mm}$$

$$\bar{\phi} = 18,25^\circ; \quad \phi = -18,25^\circ$$

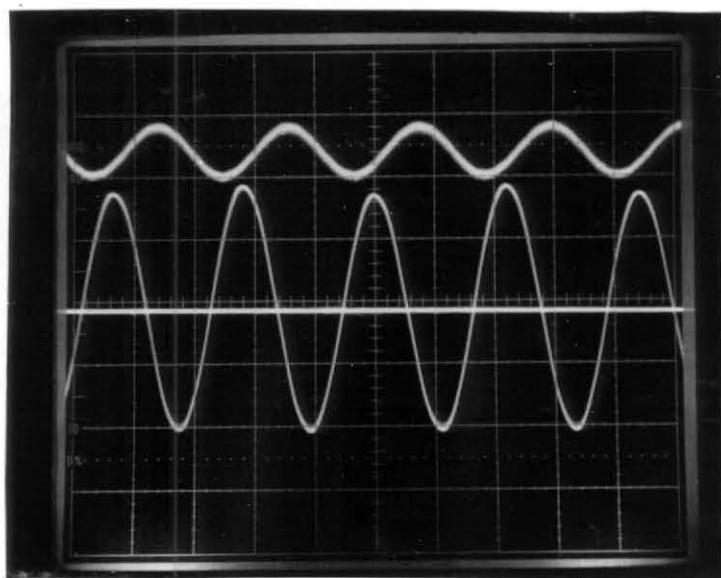
5 - Parte real (R) e parte imaginária (U)

---


$$\begin{array}{l} R_{52} = +0,00000275 \text{ m} \\ U_{52} = -0,00000091 \text{ m} \end{array}$$


---

FOTO N° 12



1 - Freqüência de excitação:  $F_6 = 23,10 \text{ Hz}$

2 - Amplitude da força de excitação (P)

(Foto: 0,01 V/div):

$I = 10 \text{ mA} \implies$  Fator multiplicação da amplitude:

$$\frac{10}{10} = 1$$

3 - Amplitude de deslocamento (X) (Foto: 0,2 V/div):

$$1^{\text{a}} \text{ Medida: } X_1 = \frac{36,00 - 5,98}{2} \Rightarrow X_1 = 15,01 \text{ mm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Medida: } X_2 = \frac{37,12 - 6,13}{2} \Rightarrow X_2 = 15,50 \text{ mm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Medida: } X_3 = \frac{37,53 - 6,2}{2} \Rightarrow X_3 = 15,67 \text{ mm}$$

$$x = 15,39 \text{ mm} \text{ (pelo microscópio)} \Rightarrow u = 3,64 \mu\text{m}$$

$$1 \text{ divisão do microscópio} \equiv 8,00 \text{ mm}$$

$$x_{6,2} = 0,00000364 \text{ m}$$

#### 4 - Ângulo de fase ( $\phi$ )

Pico da onda-força:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 42,50 \text{ mm} & X_1 &= 40,46 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_1 = 34,74 \text{ mm} \\ X_2 &= 29,09 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= 41,50 \text{ mm} & X_3 &= 39,50 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_2 = 34,75 \text{ mm} \\ X_4 &= 30,00 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= 40,50 \text{ mm} & X_5 &= 38,60 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_3 = 34,69 \text{ mm} \\ X_6 &= 30,78 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\bar{X}_F = 34,73 \text{ mm}$$

$$\text{Erro provável: } \varepsilon_F = \pm 0,06 \text{ mm}$$

Pico da onda-deslocamento:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 32,00 \text{ mm} & X_1 &= 39,93 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_1 = 37,52 \text{ mm} \\ X_2 &= 35,10 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= 27,00 \text{ mm} & X_3 &= 40,97 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_2 = 37,49 \text{ mm} \\ X_4 &= 34,00 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= 22,00 \text{ mm} & X_5 &= 41,93 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_3 = 37,54 \text{ mm} \\ X_6 &= 33,14 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\bar{X}_D = 37,52 \text{ mm}$$

$$\text{Erro provável: } \varepsilon_D = \pm 0,05 \text{ mm}$$

Valor do ciclo para o microscópio

$$1 - X_1 = 40,54 \text{ mm}; \quad X_2 = 22,72 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C1} = 17,82 \text{ mm}$$

$$2 - X_1 = 52,30 \text{ mm}; \quad X_2 = 34,45 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C2} = 17,85 \text{ mm}$$

$$3 - X_1 = 34,45 \text{ mm}; \quad X_2 = 17,13 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C3} = 17,32 \text{ mm}$$

$$\bar{X}_C = 17,66 \text{ mm}$$

$$\bar{\phi} = 56,87^\circ; \quad \phi = -56,87^\circ$$

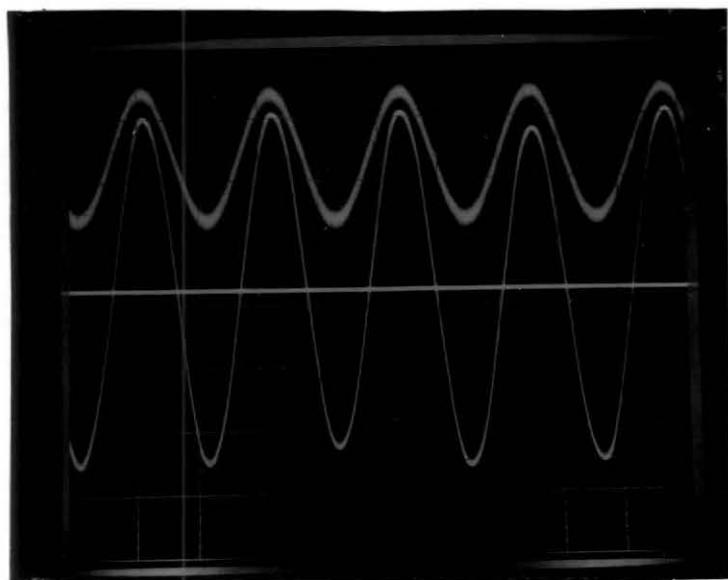
5 - Parte real (R) e parte imaginária (U)

---


$$\begin{aligned} R_{62} &= +0,00000199 \text{ m} \\ U_{62} &= -0,00000305 \text{ m} \end{aligned}$$


---

FOTO N° 14



1 - Freqüência de excitação:  $F_7 = 23,40 \text{ Hz}$

2 - Amplitude da força de excitação (P)

(Foto: 0,005 V/div) :

$I = 12,5 \text{ mA} \implies$  Fator de multiplicação da amplitude:

$$\frac{10}{12,5} = \frac{1}{1,25}$$

3 - Amplitude de deslocamento (X) (Foto: 0,2 V/div) :

$$1^{\text{a}} \text{ Medida: } X_1 = \frac{49,20 - 4,82}{2} \Rightarrow X_1 = 22,19 \text{ mm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Medida: } X_2 = \frac{49,42 - 4,96}{2} \Rightarrow X_2 = 22,23 \text{ mm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Medida: } X_3 = \frac{49,41 - 4,33}{2} \Rightarrow X_3 = 22,54 \text{ mm}$$

$$x = 22,32 \text{ mm} \text{ (pelo microscópio)} \Rightarrow u = 5,28 \mu\text{m}$$

1 divisão do microscópio  $\equiv 8,00 \text{ mm}$

$$x_{72} = 0,00000423 \text{ m}$$

#### 4 - Ângulo de fase ( $\phi$ )

Pico de onda-força:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 48,00 \text{ mm} & X_1 &= 10,27 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_1 = 7,48 \text{ mm} \\ X_2 &= 4,68 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= 46,00 \text{ mm} & X_3 &= 11,02 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_2 = 7,47 \text{ mm} \\ X_4 &= 3,92 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= 44,00 \text{ mm} & X_5 &= 11,65 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_3 = 7,48 \text{ mm} \\ X_6 &= 3,31 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\bar{X}_F = 7,48 \text{ mm}$$

$$\text{Erro provável: } \epsilon_F = \pm 0,03 \text{ mm}$$

Pico da onda-deslocamento:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 38,00 \text{ mm} & X_1 &= 10,61 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_1 = 7,80 \text{ mm} \\ X_2 &= 4,98 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= 28,00 \text{ mm} & X_3 &= 11,93 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_2 = 7,81 \text{ mm} \\ X_4 &= 3,68 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= 18,00 \text{ mm} & X_5 &= 13,18 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_3 = 7,80 \text{ mm} \\ X_6 &= 2,41 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\bar{X}_D = 7,80 \text{ mm}$$

$$\text{Erro provável: } \varepsilon_D = \pm 0,03 \text{ mm}$$

Valor do ciclo para o microscópio

$$1 - X_1 = 21,46 \text{ mm}; \quad X_2 = 4,48 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C1} = 16,98 \text{ mm}$$

$$2 - X_1 = 28,31 \text{ mm}; \quad X_2 = 11,11 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C2} = 17,20 \text{ mm}$$

$$3 - X_1 = 29,80 \text{ mm}; \quad X_2 = 12,65 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C3} = 17,15 \text{ mm}$$

$$\bar{X}_C = 17,11 \text{ mm}$$

$$\bar{\phi} = 6,75^\circ; \quad \phi = -186,73^\circ$$

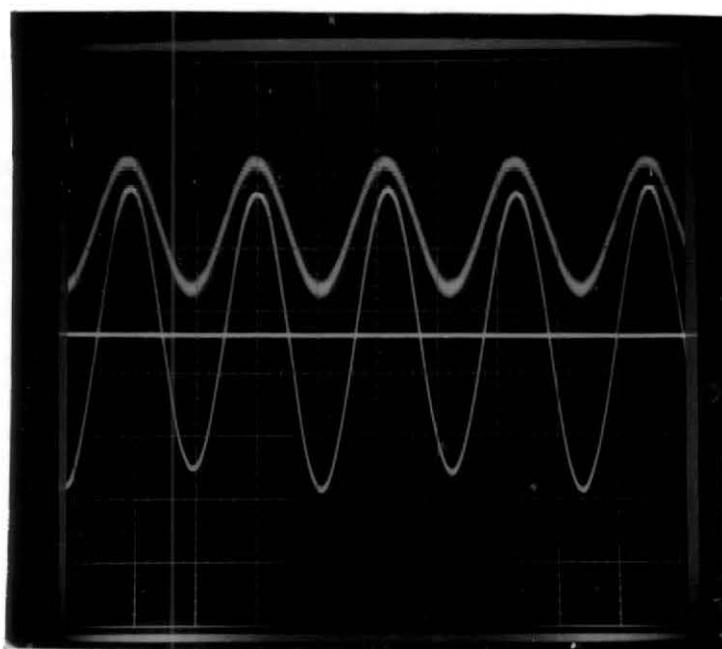
5 - Parte real (R) e parte imaginária (U)

---

<u>R<sub>72</sub></u>	=	- 0,00000420 m
<u>U<sub>72</sub></u>	=	+ 0,00000050 m

---

FOTO N° 16



1 - Freqüência de excitação:  $F_8 = 23,48 \text{ Hz}$

2 - Amplitude da força de excitação (P)  
(Foto: 0,005 V/div).

$I = 12,5 \text{ mA} \Rightarrow$  Fator de multiplicação da amplitude:

$$\frac{10}{12,5} = \frac{1}{1,25}$$

3 - Amplitude de deslocamento (X) (Foto: 0,2 V/div):

$$1^{\text{a}} \text{ Medida: } X_1 = \frac{42,89 - 4,88}{2} \Rightarrow X_1 = 19,01 \text{ mm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Medida: } X_2 = \frac{43,56 - 7,15}{2} \Rightarrow X_2 = 18,21 \text{ mm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Medida: } X_3 = \frac{43,00 - 5,00}{2} \Rightarrow X_3 = 19,00 \text{ mm}$$

$$x = 18,74 \text{ mm} \text{ (pelo microscópio)} \Rightarrow u = 4,44 \mu\text{m}$$

1 divisão do osciloscópio  $\equiv$  8 mm

$$X_{6,2} = 0,00000355 \text{ m}$$

4 - Ângulo de fase ( $\phi$ )

Pico da onda-força:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 43,00 \text{ mm} & X_1 &= 14,22 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_1 = 11,46 \text{ mm} \\ X_2 &= 8,69 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= 41,00 \text{ mm} & X_3 &= 14,99 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_2 = 11,48 \text{ mm} \\ X_4 &= 7,97 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= 39,00 \text{ mm} & X_5 &= 15,71 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_3 = 11,51 \text{ mm} \\ X_6 &= 7,30 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\bar{X}_F = 11,48 \text{ mm}$$

$$\text{Erro provável: } \varepsilon_F = \pm 0,05 \text{ mm}$$

Pico da onda-deslocamento:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 33,00 \text{ mm} & X_1 &= 14,60 \text{ mm} \\ &&&\Rightarrow \bar{X}_1 = 11,63 \text{ mm} \\ X_2 &= 8,66 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} Y_2 = 30,00 \text{ mm} & X_3 = 15,07 \text{ mm} \\ & \Rightarrow \bar{X}_2 = 11,63 \text{ mm} \\ X_4 = 8,18 \text{ mm} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Y_3 = 15,00 \text{ mm} & X_5 = 17,69 \text{ mm} \\ & \Rightarrow \bar{X}_3 = 11,54 \text{ mm} \\ X_6 = 5,39 \text{ mm} & \end{array}$$

$$\bar{X}_D = 11,60 \text{ mm}$$

$$\text{Erro provável: } \varepsilon_D = \pm 0,08 \text{ mm}$$

Valor do ciclo para o microscópio

$$1 - X_1 = 21,86 \text{ mm}; \quad X_2 = 5,06 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C1} = 16,08 \text{ mm}$$

$$2 - X_1 = 33,39 \text{ mm}; \quad X_2 = 16,00 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C2} = 17,39 \text{ mm}$$

$$3 - X_1 = 25,12 \text{ mm}; \quad X_2 = 7,90 \text{ mm} \Rightarrow \bar{X}_{C3} = 17,22 \text{ mm}$$

$$\bar{X}_C = 17,14 \text{ mm}$$

$$\bar{\phi} = 2,52^\circ; \quad \phi = -182,52^\circ$$

5 - Parte real (R) e parte imaginária (U)

---


$$\begin{array}{l} R_{82} = -0,000003547 \text{ m} \\ U_{82} = +0,000000156 \text{ m} \end{array}$$


---