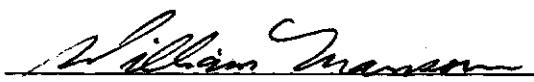


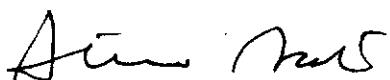
O MÉTODO QUASI-FÍNITO E O MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS PARA CAMPOS TÉRMICOS

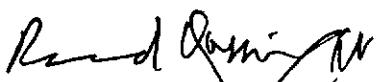
Domingos de Farias Brito David

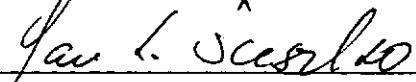
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

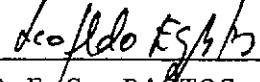
Aprovada por:


WILLIAM MITTIAS MANSOUR (Ph.D.)
(Presidente)


ATUO SATO (Ph.D.)


RAAD YAHYA QASSIM (Ph.D.)


JAN LEON SCIESKO (D.Sc.)


LEOPOLDO E.G. BASTOS (D.Sc.)

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 1978

DAVID, DOMINGOS DE FARIAS BRITO

O Método Quasi-Finito e o Método dos
Elementos Finitos para Campos Térmicos [Rio de Ja-
neiro] 1978.

XII, 161p. 29,7cm (COPPE/UFRJ, M.Sc. En-
genharia Mecânica, 1978).

Tese - Univ. Fed. do Rio de Janeiro - Fac. Enge-
nharia.

1. Cálculo de Campos Térmicos I.COPPE/UFRJ II.Tí-
tulo(série).

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor William Mansour pela orientação e amizade demonstrada.
- A todos aqueles que de alguma forma contribuiram para o estabelecimento e a continuidade da COPPE/UFRJ.

RESUMO

Uma repassagem no clássico método dos elementos finitos é feita, juntamente com o estudo das técnicas numéricas a serem usadas para tratar campos térmicos transientes e permanentes. O método quasi-finito é, também utilizado, com vários aspectos da estratégia apresentados em detalhes. Este método é aplicável a problemas que não podem ser tratados facilmente pelo método dos elementos finitos. Exemplo comparativo dos métodos e exemplos onde se mostra a flexibilidade do método quasi-finito são apresentados.

ABSTRACT

A review of the classical finite element method is given together with a study of the numerical techniques to be used to deal with transient and steady state thermal fields. The quasi-finite approach is also used with various aspects of the strategy presented in detail. This method is applied to handle problems which cannot be treated easily with the finite element method. A comparative example of the two methods and examples showing the flexibility of the quasi-finite method are presented.

SIMBOLOGIA

- a_i - Cap.II, coeficientes de funções de interpolação
 $\{a\}$ - Cap.II, vetor cujos termos são os a_i
 a_1, a_2, a_3 - Cap.III, variáveis dependentes das coordenadas dos vértices de um triângulo
 a - Cap.IV, difusividade térmica
 A - Cap.II, operador matemático genérico
 A_1, A_2, A_3 - Coeficientes de função de interpolação linear sobre um triângulo
 A_{ij}^r - Cap.IV, área projetada de troca de calor entre dois elementos
 b_1, b_2, b_3 - Cap.III, variáveis dependentes das coordenadas dos vértices de um triângulo
 B_i - Cap.II, operador matemático genérico
 $[B]$ - Cap.III, matriz quadrada proveniente do produto $\{N\}\{N\}^T$
 B - Cap.IV, número de Biot
 c - $c_p \gamma/g$
 c_p - Calor específico
 $c_{ij}^v, c_{ij}^c, c_{ij}^r, c_{ij}^m$ - Coeficiente de troca de calor respectivamente por convecção, condução, radiação e transferência de massa
 C - Cap.II, operador matemático genérico
 C - Cap.V; matriz de armazenamento de dados físicos
 C - Cap.VI, graus Celsius
 d - Indicativo de diferenciação
 d_{ij} - Distância entre centros de troca de calor
 D - Cap.II, operador matemático genérico
 $e_n(\dots)$ - Conjunto de elementos finitos
 E_{ij} - Fator de emissividade(multiplicado pela constan-

te de Stefan-Boltzmann)

f - Função genérica

F - Função solução

\bar{F} - Função solução aproximada

g - Aceleração da gravidade

G - Cap.III, total de pontos em um domínio discretizado pelo método dos elementos finitos, ou, Cap. IV, total de elementos no método do equacionamento finito

h - Coeficiente de convecção

h - Apêndice B, intervalo de tempo

I - Funcional

J - Cap.VI, Joule

k - Condutividade térmica

k_x, k_y, k_z, k_r - Cap.III, condutividades nas direções, x,y,z e r

k_1, k_2 - Cap.IV, condutividades dos elementos 1 e 2

k_{12}, k_{ij} - Cap.IV, condutividades equivalentes

k_1, k_2, k_3, k_4 - Apêndice B, valores aproximados da derivada de uma função em pontos do intervalo de tempo

K - Total de pontos associados a um elemento ou número de parcelas de uma série

${}^{\circ}\text{K}$ - Graus Kelvin

ℓ - Comprimento da aresta de um elemento finito triangular

ℓ - Cap.IV, altura de um elemento cilíndrico axisimétrico

L - Total de elementos finitos em que se divide um domínio

m - Cap.III, índice indicativo de tempo

m - Cap.VI, metro

[M] - Matriz quadrada simétrica

- $[M_0], [M_1]$ - Matrizes quadradas coeficientes de uma equação matricial
- $[M_{0,11}], [M_{0,12}]$ - Sub matrizes
- n_i - Total de conexões térmicas associadas a um elemento
- $n_i^v, n_i^c, n_i^r, n_i^m$ - Total de conexões térmicas associadas a um elemento por convecção, condução, radiação e transferência de massa
- $n_i^{v,f}, n_i^{c,f}, n_i^{r,f}, n_i^{m,f}$ - Total de conexões térmicas associadas a um elemento "i" respectivamente pelos quatro modos de troca com temperatura fixa
- $n_i^{v,d}, n_i^{c,d}, n_i^{r,d}, n_i^{m,d}$ - Total de conexões térmicas associadas a um elemento "i" respectivamente pelos quatro modos de troca com temperatura desconhecida
- N_i - Funções de interpolação
- $\{N\}$ - Vetor de funções de interpolação
- N - Cap.IV, matriz de armazenamento de dados de numeração
- $n_{p_i}(\dots)$ - Conjunto de pontos associados a um elemento n
- $P_j(\dots)$ - Conjunto de pontos indicativos de elementos finitos
- $\{P\}$ - Vetor cujos elementos são os P_j
- q_k - Calor perdido por unidade de área a uma taxa conhecida
- q_{ij} - Fluxo de calor entre dois elementos
- $q_{ij}^v, q_{ij}^c, q_{ij}^r, q_{ij}^m$ - Fluxo de calor entre dois elementos respectivamente por convecção, condução, radiação e transferência de massa
- q_h - Cap.IV, fluxo de calor hipotético
- Q - Geração de calor por unidade de tempo
- r - Coordenada radial

r_1, r_2, r_3	- Coordenada radial dos vértices de um triângulo
\bar{r}	- $(r_1 + r_2 + r_3)/3$
{R}	- Vetor independente de equação matricial
{R}_1, {R}_2	- Sub matrizes
S	- Superfície de um elemento finito
S _r	- Superfície axisimétrica oriunda da revolução da aresta de um triângulo
t	- Tempo
[T] _n	- Matriz associativa da numeração global dos <u>pontos</u> de um domínio, e local associada ao <u>elemento</u> finito "n"
ⁿ u _i (...)	- Cap.II e III, conjunto dos valores de função de aproximação em pontos do elemento finito "n"
u _i	- Apêndice B, valor aproximado de uma função
{u} _n	- Vetor cujos elementos são os ⁿ u _i (...)
U _j (...)	- Cap.II, conjunto dos valores de função de <u>aproximação</u> sobre pontos do domínio
{U}	- Vetor cujos elementos são os U _j
U	- Cap.III e IV, temperaturas
v	- Cap.II, função de peso associada ao domínio
¹ v	- Cap.II, função de peso associada ao contorno
v _i	- Cap.IV, volume de um elemento
V	- Cap.IV, velocidade de fluido
W	- Cap.II, função de peso associada ao domínio em uma formulação discreta
¹ W	- Cap.II, função de peso associada ao contorno em uma formulação discreta
W	- Cap.VI, Watts
x	- Coordenada cartesiana
y	- Coordenada cartesiana
y	- Função

$\{y_i\}$	- Apêndice B, vetor reunindo um conjunto de ordenadas de funções
$\{\bar{y}_i\}, \{\bar{\bar{y}}_i\}, \{\bar{\bar{\bar{y}}}_i\}$	- Apêndice B, conjunto de ordenadas de funções em pontos do intervalo de tempo
z	- coordenada cartesiana ou axial

SÍMBOLOS GREGOS

α	- Cap.II, variável escalar
$\alpha_1, \alpha_2, \dots$	- Cap.III e Apêndice A, valores oriundos da integração sobre triângulos e segmentos de reta
α_i	- Cap.IV, $= \rho_i v_i c_{p_i}$
β	- Cap.IV, coeficiente
γ	- Peso específico
γ	- Cap.IV, coeficiente
Γ	- Fronteira genérica
δ	- Indicativo de variação
Δ	- Indicativo de incremento finito
ζ	- Cap.II, função de uma variável
ζ	- Cap.III, coeficiente
θ	- Coordenada angular
λ	- Cap.VI, auto-valores
ξ	- Cap.III, $t/\Delta t$
$\{\xi\}$	- Cap.III, vetor genérico
ρ	- Massa específica
\sum	- Indicativo de somatório
Φ	- Domínio genérico
ψ	- Valor da temperatura em um ponto do contínuo
ψ_∞	- Temperatura do contínuo em ponto distante do contorno
∂	- Indicativo de derivação parcial

ÍNDICE

	pág.
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - MÉTODOS DE DISCRETIZAÇÃO DO CONTÍNUO	3
2.1 Modelo Matemático	3
2.2 Métodos de Solução Residuais e Variacionais	4
2.2.1 O Método dos Resíduos Ponderados	4
2.2.2 O Método das Variações	7
2.3 Funções de Interpolação	14
2.4 Elementos Finitos	15
2.4.1 Discretização do Domínio	15
2.4.2 Discretização da Função de Aproximação	17
2.5 Elementos Finitos e Métodos Residuais e Variacionais	18
CAPÍTULO III - SOLUÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	25
3.1 Estabelecimento do Funcional	25
3.2 Minimização do Funcional	27
3.3 Elementos Finitos Triangulares com Funções de interpolação	34
3.3.1 Derivação das Funções de Interpolação	34
3.3.2 Integração Analítica	38
3.4 Anéis Triangulares Para Campos Axi-simétricos	43
3.4.1 Generalidades	43
3.4.2 Integração Analítica Sobre Elementos axi-simétricos	44

	pág.
3.5 Métodos de Solução	51
3.5.1 Regime Permanente	51
3.5.2 Regime Transiente	52
3.5.3 Problemas com Temperaturas Fixas no Domínio	56
CAPÍTULO IV - O MÉTODO QUASI-FINITO APLICADO A PROBLEMAS TÉRMICOS	58
4.1 Generalidades	58
4.2 Troca de Calor Entre Elementos	59
4.2.1 Condução	60
4.2.2 Convecção	69
4.2.3 Radiação	71
4.3 Caracterização dos Elementos e Ligações Térmicas	73
4.4 Equacionamento do Problema	76
4.5 Solução do Problema	80
4.5.1 Regime Permanente	80
4.5.2 Regime Transiente	81
4.6 Extensão do Método Para Problemas com Transferência de Massa	82
CAPÍTULO V - ESTRATÉGIA PARA A UTILIZAÇÃO DO MÉTODO QUASI-FINITO	88
5.1 Numeração dos Elementos	88
5.2 Propriedades Físicas	89
5.3 Definição das Ligações Térmicas	91
5.4 Armazenamento de Dados de Conexões Térmicas	93
5.5 Montagem do Sistema Linear	99
5.6 Regime Permanente	101
5.7 Regime Transiente	103

CAPÍTULO VI - APLICAÇÕES	105
6.1 Solução do Campo Térmico Transiente em um Cilindro Imerso em Fluido	105
6.2 Solução do Campo Térmico em um Ra- diador Solar	113
6.3 Campo de Temperaturas no Espelho de um Trocador de Calor	117
CONCLUSÕES	123
APÊNDICE A - INTEGRAIS	124
APÊNDICE B - O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4. ^a ORDEM	128
APÊNDICE C - PROGRAMAS DE COMPUTADOR	133
BIBLIOGRAFIA	160

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O comportamento dos campos térmicos é um fator importante para a análise de tensões em partes estruturais, em construção de máquinas térmicas, e em vários ramos da engenharia atual.

Com o avanço da técnica lança-se mão de formas geométricas cada vez mais elaboradas sobre as quais as soluções analíticas clássicas tornam-se de aplicação problemática. Esta dificuldade aliada ao desenvolvimento de computadores eletrônicos proporcionou o desenvolvimento de processos de cálculo que utilizam grande número de operações aritméticas, denominados métodos numéricos.

Destes o método dos elementos finitos é bastante conhecido, sendo indicado para a determinação do campo de temperaturas em peças sólidas mantidas em meio fluido com temperatura determinada. Infelizmente, para problemas onde além do campo de temperaturas no sólido desconhece-se "a priori" o valor do campo no meio fluido, o método torna-se de difícil aplicação.

Devido a este fato, utiliza-se além do método dos elementos finitos, o denominado método quasi-finito. Este método apresentado por MAZZANI¹ e MANSOUR^{2,3} para problemas em regime permanente é estendido para situações transientes e

também para a análise de problemas onde existem tubulações conduzindo fases líquidas com temperaturas desconhecidas. Como se rá visto, o método quasi-finito é eficiente em problemas onde o método dos elementos finitos é de aplicabilidade difícil.

O desenvolvimento teórico do método quasi-finito é feito no Capítulo IV e no capítulo seguinte apresenta-se o algoritmo para sua utilização. As listagens de programas de computador podem ser vistas no Apêndice C.

Para o método dos elementos finitos faz-se o desenvolvimento analítico, partindo de um operador diferencial arbitrário, no Capítulo II. A aplicação do mesmo a problemas de condução é feita no Capítulo III para campos planos e axisimétricos, utilizando-se a formulação variacional. O algoritmo para a aplicação do método é omitido por ser bem conhecido atualmente.

Finalizando, aplica-se no Capítulo IV os dois métodos a um mesmo problema com solução determinada para fins de comparação e apresenta-se casos que podem ser resolvidos com base no método quasi-finito mas que tem solução problemática pelo método dos elementos finitos.

CAPÍTULO II

MÉTODOS DE DISCRETIZAÇÃO DO CONTÍNUO

A finalidade inicial deste capítulo é revisar os fundamentos das teorias dos métodos dos resíduos pesados e das variações. É repassado, também, o tratamento do método dos elementos finitos devido a ODEN⁴. Finalmente faz-se a associação do método dos elementos finitos com as teorias acima.

2.1 MODELO MATEMÁTICO

O primeiro passo para a solução de um problema, é a procura da expressão matemática do equilíbrio de grandezas envolvidas no mesmo, como forças, pressões, temperaturas e deslocamentos, entre outras, presentes na natureza.

Normalmente idealiza-se elementos infinitesimais nos quais o equilíbrio físico é feito, chegando-se à condição genérica $A(F)=0$, a ser satisfeita em todo um domínio. A função F é a solução procurada, em geral dependente do tempo, do espaço e de propriedades físicas.

Deve ser considerada, ainda, a interação existente na fronteira com o exterior do domínio, expressa em uma condição de contorno $B(F)=0$.

Finalmente, para problemas com variação no tempo, necessita-se do estabelecimento de condições em um instante inicial.

Resumindo, tem-se que a solução $F(t,x,y,z)$ de um problema, onde t , x , y e z representam o tempo e as coordenadas espaciais, respectivamente, deve satisfazer a:

$$A(F)=0 \quad , \quad \text{no domínio } \Phi \quad (2-1.a)$$

$$B(F)=0 \quad , \quad \text{no contorno } \Gamma \quad (2-1.b)$$

$$F(t, x, y, z) = f_0(x, y, z) \quad (2-1.c)$$

onde $f_0(x,y,z)$ representa a condição inicial.

2.2 MÉTODOS DE SOLUÇÃO RESIDUAIS E VARIACIONAIS

Em muitos problemas pode-se chegar à uma solução transformando as equações que os regem em uma forma integral. Como exemplos deste procedimento são citados o método dos resíduos ponderados e o método das variações, descritos brevemente a seguir.

2.2.1 O MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

O método é fundado na hipótese de que a solução do problema descrito em (2-1) será encontrada, se para quaisquer funções de peso v e ψ definidas sobre Φ e Γ , tem-se:

$$\int_{\Phi} v A(F) d\phi = 0, \quad \text{e} \quad (2-2.a)$$

$$\int_{\Gamma} {}^1v B(F) d\Gamma = 0 \quad (2-2.b)$$

O argumento é justificado, pois se F não satisfizer (2-1.a) e (2-1.b), ou seja,

$$A(F) \neq 0$$

ou

$$B(F) \neq 0$$

será possível encontrar-se funções v e 1v que tornem as integrais em (2-2) não nulas.

Uma única relação equivalente às duas equações (2-2) é obtida por soma, ou seja,

$$\int_{\Phi} v A(F) d\phi + \int_{\Gamma} {}^1v B(F) d\Gamma = 0 \quad (2-3)$$

Observa-se que devido à arbitrariedade das funções de peso, com a escolha de v e 1v nulas recae-se em uma das duas integrais em (2-2).

Um modo de desenvolver-se (2-3) consiste em supor-se que a função solução F pode ser aproximada por \bar{F} , como a seguir,

$$F \approx \bar{F} = \sum_{i=1}^K a_i N_i \quad (2-4)$$

onde, os N_i são funções conhecidas sobre Φ que tornem definidas todas as operações associadas a A e B (como derivabilidade definida até as ordens existentes em A e B); os a_i escalares fixos ou dependentes do tempo a serem determinados e K o número de termos da série.

Utilizando-se (2-4), pode-se garantir (FINLAYSON⁵) que \bar{F} se aproxima da solução, se para K funções W_j ($j=1, \dots, K$) e K funções 1W_j ($j=1, \dots, K$), é válido

$$\int_{\Phi} W_j A \left(\sum_{i=1}^K a_i N_i \right) d\Phi + \int_{\Gamma} {}^1W_j B \left(\sum_{i=1}^K a_i N_i \right) d\Gamma = 0 \quad (2-5)$$

$$j = 1, \dots, K$$

A equação acima é a forma discreta de (2-3). As funções de peso W e 1W são fixados "a priori".

O procedimento leva a um sistema de ordem K, onde as incógnitas são os a_i , que uma vez encontrados e substituídos em (2-4) completam a solução do problema.

Casos particulares do método dos resíduos ponderados, dependendo do tipo de função de peso escolhida são os métodos da colocação, método da colocação por subdomínio e o método de Galerkin.

2.2.2 O MÉTODO DAS VARIAÇÕES

O método foi desenvolvido ao tentar-se resolver situações físicas que procuravam o valor mínimo da integral de uma função, como o caminho de mais rápida queda entre pontos fora da mesma vertical, ou a menor distância entre dois pontos sobre uma dada superfície.

Problemas deste tipo podem ser modelados por uma aplicação de um espaço de funções em um espaço escalar, que recebe a denominação de funcional, e do qual se procura o valor mínimo.

A exemplo do cálculo diferencial associado ao estudo das funções, tem-se para os funcionais o cálculo das variações, cujos fundamentos são apresentados ao longo desta sub-seção.

Entende-se por variação $\delta[y]$, onde y é função de x , como a seguinte diferença:

$$\delta[y] = y(x) - y_1(x) \quad (2-6)$$

onde $y_1(x)$ é uma função qualquer definida no mesmo domínio de $y(x)$. A área assinalada na figura 2.1 representa uma possível variação de $y(x)$.

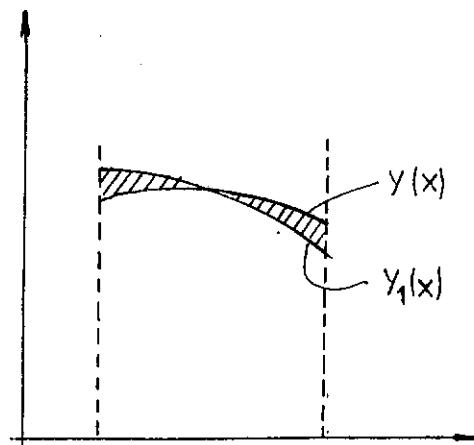


FIGURA 2.1 - (Variação de uma função)

Observa-se que $\delta[y]$ é, também, uma função de x , sendo válido:

$$\frac{d}{dx} \{\delta[y]\} = y'(x) - y'_1(x) = \delta[y'], \quad (2-7)$$

onde o índice na variável y representa diferenciação com respeito a x .

Pode-se ver por (2-7) que a variação da derivada de uma função iguala a derivada da variação. Também é válido o fato de que a variação da soma é igual a soma das variações, citado sem demonstração.

Estando-se em presença de um funcional, por exemplo, do tipo:

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} C(x, y, y', y'', \dots) dx \quad (2-8)$$

onde y é função de x , pode-se definir a sua variação $\delta[y]$, como:

$$\delta \llbracket y \rrbracket = \frac{\partial}{\partial \alpha} \{ I(y + \alpha \delta \llbracket y \rrbracket) \} \Big|_{\alpha=0} \quad (2-9)$$

onde:

α - é uma variável escalar .

$\delta \llbracket y \rrbracket$ - é uma variação qualquer em y , mas que uma vez escolhida mantém-se fixa.

Com a definição (2-9), pode-se demonstrar que caso a função $y_0(x)$ aplicada a um funcional $I(y)$, tenha como resposta um máximo, mínimo ou ponto de inflexão, então é nula a variação do funcional em y_0 .

A afirmativa pode ser provada, considerando-se que por $y_0(x)$ e $\delta \llbracket y \rrbracket$ serem fixos, tem-se:

$$I(y_0 + \alpha \delta \llbracket y \rrbracket) = \zeta(\alpha) \quad (2-10)$$

sendo $\zeta(\alpha)$ função da única variável α .

Como, por hipótese, $I(y_0)$ é um valor máximo, mínimo, ou um ponto de inflexão, o valor de $\zeta(\alpha)$ para α nulo também o é, pois por (2-10):

$$\zeta(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = I(y_0) \quad (2-11)$$

Assim, de acordo com a definição (2-9) e pela teoria das funções de uma única variável,

$$\delta \lceil I(y_0) \rceil = \left. \frac{d \zeta(\alpha)}{d \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (2-12)$$

Os argumentos e definições acima, relativos a (2-8), podem ser estendidos a funcionais mais complexos dependentes de várias variáveis (Ver ELSGOLD⁶ e ARTHURS⁷).

Uma propriedade importante dos funcionais é a de que a função que anula as suas variações é, também, solução das equações diferenciais a eles associadas.

Como exemplo, seja:

$$I_1(y) = \int_{x_0}^{x_1} C(x, y, y') dx \quad (2-13)$$

onde y é função de x e x_0 e x_1 extremos do intervalo considerado.

Tem-se, realizando a variação de (2-13) (ver detalhes ELSGOLD⁶), que:

$$\delta \lceil I_1(y) \rceil = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial C}{\partial y'} \right) \delta \lceil y \rceil dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial C}{\partial y'} \delta \lceil y \rceil \right) \Big|_{x_0}^{x_1} \quad (2-14)$$

Considerando a variação $\delta[y]$ nula em x_0 e x_1 , por argumento idêntico ao apresentado na justificativa de (2-2), chega-se a:

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial C}{\partial y'} = 0 \quad (2-15)$$

A equação diferencial associada ao funcional (2-13) é, portanto, (2-15).

Para um funcional é sempre possível encontrar se a equação associada. A situação inversa é, resolvível em certos casos apenas.

Para o problema (2-1) onde tem-se,

$$A(F) = 0, \text{ no domínio } \Phi$$

$$B(F) = 0, \text{ no contorno } \Gamma$$

a solução pode ser encontrada ao minimizar-se um funcional associado, desde que existente, da forma:

$$I(F) = \int_{\Phi} C(F) d\Phi + \int_{\Gamma} D(F) d\Gamma = 0 \quad (2-16)$$

onde os operadores C e D tem, em geral, ordem mais baixa que A e B , o que é bastante vantajoso.

Uma vez encontrada uma relação associada a A e B como em (2-16) a solução pode ser obtida pelo método pro-

posto a seguir atribuído a Ritz.

Como na sub-seção 2.2.1 pode-se aproximar F por (2-4), mas com a escolha das funções N_i facilitadas devido às mais baixas ordens dos operadores C e D .

Assim, (2-4) e (2-16) implicam em:

$$I(F) \equiv I(\bar{F}) = I \left(\sum_{i=1}^K a_i N_i \right)$$

$$I(\bar{F}) = \int_{\Phi} C \left(\sum_{i=1}^K a_i N_i \right) d\phi + \int_{\Gamma} D \left(\sum_{i=1}^K a_i N_i \right) d\Gamma \quad (2-17)$$

Desde que os N_i são conhecidos, o funcional a cima passa a depender apenas dos escalares a_i , ou seja:

$$I(\bar{F}) = I(a_1, a_2, \dots, a_K) \quad (2-18)$$

Ao se definir

$$\{a\} = (a_1, a_2, \dots, a_K) , \quad (2-19)$$

tem-se, ao substituir (2-19) em (2-18), que:

$$I = I(\{a\}) \quad (2-20)$$

Partindo-se da definição (2-9),

$$\delta I = \frac{\partial}{\partial \alpha} \{I(\{a\} + \alpha \delta \{a\})\} \Big|_{\alpha=0}$$

Aplicando a regra da cadeia,

$$\delta I = \frac{\partial I\{a\} + \alpha \delta \{a\}}{\partial \{a\} + \alpha \delta \{a\}} \quad \left. \frac{\partial \{a\} + \alpha \delta \{a\}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{\partial I}{\partial \{a\}} \quad \partial \{a\} \quad (2-21)$$

Como $\partial \{a\}$ é arbitrário, a única possibilidade de anular-se δI é que

$$\frac{\partial I}{\partial \{a\}} = 0$$

(Este argumento é idêntico ao utilizado para a justificativa de (2-2)).

$$\text{Se } \frac{\partial I}{\partial \{a\}} = 0, \text{ então}$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0 ; \quad \frac{\partial I}{\partial a_2} = 0 ; \quad \dots ; \quad \frac{\partial I}{\partial a_K} = 0 \quad (2-22)$$

que é um sistema de equações de ordem K.

Com a determinação dos escalares a_i de (2-22), pode-se por substituição em (2-3) obter a solução aproximada F do problema.

Finalmente, convém comparar-se os métodos das

variações com o método dos resíduos, concluindo-se que a opção pelo primeiro simplificará a escolha das funções de interpolação N_i . Por outro lado, a integral que ocorre no método dos resíduos é imediata uma vez definidas as funções de peso, o que não se dá com a formulação variacional.

2.3 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

As funções de interpolação N_i podem ser quaisquer funções definidas no domínio do problema, que tornem definidas, como já citado, as operações inerentes aos operadores que modelam cada situação física.

Normalmente procuram-se funções que sejam semelhantes à forma esperada para a solução, a fim de que se tenha boas aproximações. É comum a utilização de funções polinomiais, trigonométricas ou exponenciais.

Devido à complexidade das formas encontradas na engenharia atual as funções clássicas da matemática são aplicáveis nos métodos residuais e variacionais a um número restrito de casos de geometria simples. Uma forma de sobrepor-se esta limitação vem a seguir.

2.4 ELEMENTOS FINITOS

No método dos elementos finitos ODEN⁴ e ZIENKIEWICS⁵ trata-se o domínio como a união de um conjunto de elementos com formas bem determinadas, sobre os quais uma função de aproximação é definida. O método discretiza, além da função de aproximação, o domínio, aumentando significativamente os casos possíveis de serem tratados.

2.4.1 DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO

Seja um domínio Φ que é dividido em formas determinadas, denominadas elementos finitos.

Um elemento típico e a divisão do domínio são mostrados nas figuras 2.2 e 2.3

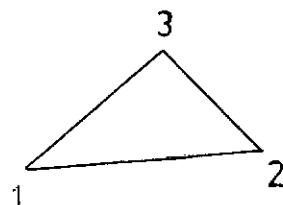


FIGURA 2.2 (Elemento finito típico)

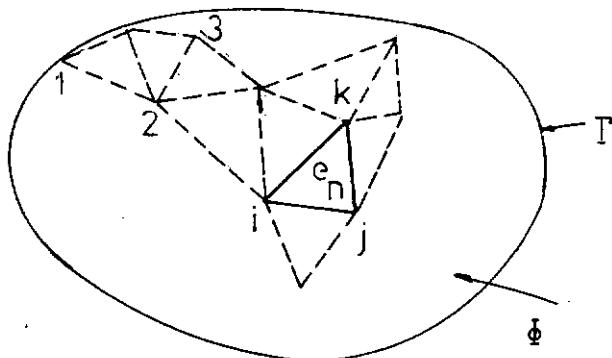


FIGURA 2.3 (Divisão do domínio)

O domínio é dividido em um total de L elementos e_n ($n = 1, \dots, L$).

Cada nó do elemento e_n é associado a um conjunto, denominado local, de K numerais n_{p_i} ($i = 1, \dots, K$). Para o caso particular mostrado na figura 2.2, K é igual a 3.

Em todo o domínio os nós são numerados globalmente, resultando em um conjunto de G pontos P_j ($j=1, \dots, G$).

Para cada elemento e_n deve-se ter a correspondência entre a numeração inherente ao mesmo (figura 2.2) com a numeração global (figura 2.3), o que é feito por uma matriz $[T]_n$, associada ao elemento, da seguinte forma.

Se,

$$\{p\}_n = n_{p_i} \quad (i = 1, \dots, K) \quad (2-23)$$

$$(K \leq G)$$

então

$$\{p\}_n = [T]_n \{P\} \quad (2-25)$$

Cada elemento t_{ij} de $[T]_n$ toma o valor 1 se o ponto p_i coincide com P_j , e zero em caso contrário. Observa-se que $[T]_n$ é matriz retangular $K \times G$, onde K é o número de nós de cada elemento e G o total de nós no domínio, já definidos.

2.4.2 DISCRETIZAÇÃO DA FUNÇÃO DE APROXIMAÇÃO

Seja, novamente, a solução procurada F . A sua aproximação \bar{F} pode ser obtida do seguinte modo:

O valor de \bar{F} em cada nó global P_j ($j = 1, \dots, G$) é expresso por U_j ($j = 1, \dots, G$).

Em cada elemento e_n , o conjunto local dos valores U_j é representado por n_{u_i} ($i = 1, \dots, K$).

Se,

$$\{u\}_n = n_{u_i} \quad (i = 1, \dots, K) \quad (2-26)$$

então

$$\{u\}_n = [T]_n \{U\} \quad (2-27)$$

onde $[T]$ foi apresentada em (2-25).

Sobre cada elemento e_n define-se uma função \bar{F}_n restrita ao seu subdomínio, da forma:

$$\bar{F}_n = \sum_{i=1}^K n_{u_i} N_i \quad (2-28)$$

onde N_i é uma função com as características definidas na subseção 2.2.1, ao se discutir o método dos resíduos ponderados. Os coeficientes das funções de interpolação u_i (2-28) fazem o papel dos a_i (2-3), mas têm, agora um sentido físico facilmente interpretável, pois são os valores da função solução em cada nó dos elementos.

A função estendida a todo o domínio é obtida compondo-se as L funções \bar{F}_n .

2.5 ELEMENTOS FINITOS E MÉTODOS RESIDUAIS E VARIACIONAIS

Os métodos dos resíduos e das variações apresentados em 2.2.1 e 2.2.2, levam à solução de um sistema de equação diferencial e condições de contorno.

Em ambos os métodos chegou-se, em geral, a certas condições sobre integrais no domínio somadas a integrais

ao longo da fronteira (ver (2-3) e (2-16)) que devem ser válidas para todos os subdomínios da região de definição do problema, além de, logicamente, o domínio global em si.

Com este argumento e tomando-se por base o apresentado em 2.4.1 e 2.4.2, pode-se observar que existem formulações restritas a cada elemento finito e_n pertencente ao domínio, ou seja, as equações (2-3) e (2-16) tornam-se:

$$\int_{\Phi_n} v A(F) d\Phi_n + \int_{\Gamma_n} {}^1 v B(F) d\Gamma_n = 0 , \quad (2-29)$$

para quaisquer funções v e ${}^1 v$ definidas sobre o elemento finito e_n , e,

$$\int_{\Phi_n} C(F) d\Phi_n + \int_{\Gamma_n} D(F) d\Gamma_n = 0 \quad (2-30)$$

onde Φ_n e Γ_n são os domínios e os contornos de cada elemento finito, mostrados na figura 2.4.

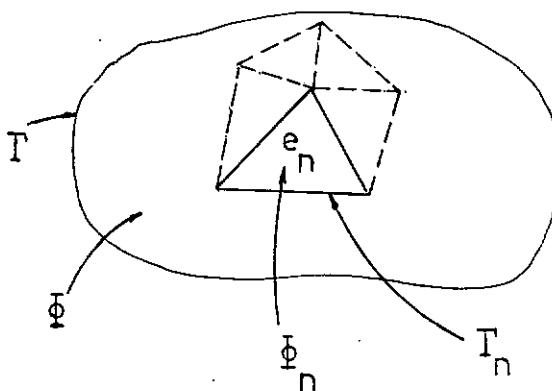


FIGURA 2.4 - (Domínio e contorno de um elemento finito)

Surge, então, a possibilidade de aplicar-se (2-28) a cada uma das duas formas integrais (2-29) ou (2-30).

Uma dificuldade se apresenta, pois existem os contornos dos elementos sobre os quais as duas parcelas a esquerda de (2-29) e (2-30) devem ser integradas.

Um fato importante, porém, é que as integrais sobre os contornos tem um sentido fixo. Deste modo, ao considerar-se dois elementos adjacentes, as contribuições associadas ao contorno comum cancelam-se (ver figura 2.5), desde que o valor das funções de aproximação sobre cada um dos elementos tenha iguais valores^(*) sobre a fronteira que separa os dois elementos adjacentes, até a ordem de derivação que aparece nos operadores B ou D. (Formulações com esta propriedade recebem a denominação de conformes).

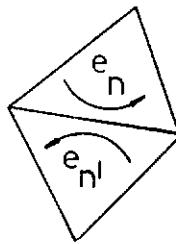


FIGURA 2.5 - (Sentido da integral de linha sobre elementos adjacentes)

Constatada a nulidade da soma das contribuições dos contornos para formulações conformes, torna-se possível obter-se a equação matricial que leva à solução de um pro-

^(*)Para o método dos resíduos deve-se cuidar, também, que as funções de peso tenham iguais valores sobre a fronteira comum aos elementos adjacentes considerados.

blema através da composição das equações restritas aos diversos elementos, como segue:

Uma vez escolhida a função de aproximação em (2-28), utiliza-se a forma residual ou a forma variacional sobre um elemento, apresentadas em (2-29) e (2-30).

Para os elementos internos, como na figura 2.4, considera-se apenas as parcelas integrais sobre Φ_n em (2-29) ou (2-30) (desde que seja nula a contribuição dos contornos internos).

Quando o elemento pertence ao contorno global, devem-se computar as integrais de linha sobre a parte da fronteira global comum à fronteira do elemento (ver figura 2.6).

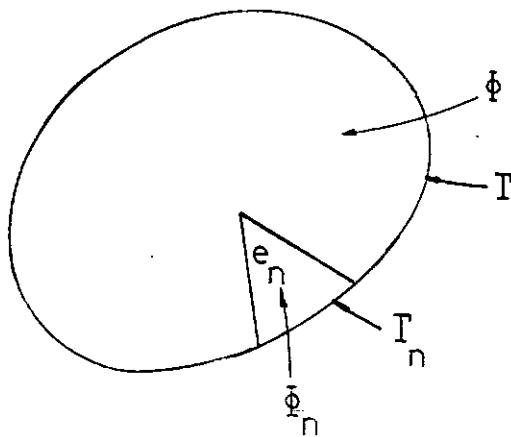


FIGURA 2.6 - (Elemento pertencente ao contorno global)

Procedendo-se da maneira acima, chega-se para cada elemento e_n , a um sistema de K equações (ver (2-5) ou (2-22)), onde K é o número de nós do elemento, que pode ser escrito em uma forma matricial do tipo abaixo,

$$\{R\}_n + [M_0]_n \{u\}_n + [M_1]_n \{\dot{u}\} + \dots = 0 \quad (2-31)$$

onde $\{u\}_n$ é o vetor definido em (2-26), $\{\dot{u}\}_n$, etc., suas derivadas temporais e as matrizes $[M_0]_n$, $[M_1]_n$, etc., oriundas da integração de (2-29) ou (2-30).

A equação (2-31) não é solucionável sozinha, pois não considera a influência dos contornos internos. Compondo-se os L (nº total de elementos finitos, já definido) sistemas, obtém-se, entretanto, um sistema global de ordem G (ver definição na sub-seção 2.4.2) representativo do problema estendido a todo o domínio, pois a contribuição do total dos contornos internos é nula, como já foi discutido nesta seção.

A composição dos L sistemas (2.31) é feita por soma das equações matriciais. É preciso, porém, que as mesmas estejam formuladas no sistema global de numeração (ver subseção 2.4.2), o que é feito, genericamente, a seguir.

Primeiramente, deve-se estender a equação (2-27) até as ordens de derivação existentes em (2-31), ou seja:

$$\{\ddot{u}\}_n = [T]_n \{\ddot{U}\} \quad (2-32)$$

$$\{\ddot{u}\}_n = [T]_n \{\ddot{U}\}$$

onde $\{\ddot{U}\}$, etc., são as derivadas do vetor global das incógnitas (ver 2.4.2) relativas ao tempo.

Substituindo-se (2-27) e as relações (2-32) em (2-31), chega-se a

$$\begin{aligned} \{R\}_n + [M_0] [T]_n \{U\} + \\ + [M_1] [T]_n \{\dot{U}\} + \dots = 0 \quad (2-33) \end{aligned}$$

Pré-multiplicando-se (2-33) por $[T]^T_n$,

$$\begin{aligned} [T]^T_n \{R\}_n + [T]^T_n [M_0] [T]_n \{U\} + \\ + [T]^T_n [M_1] [T]_n \{\dot{U}\} + \dots = 0 \quad (2-34) \end{aligned}$$

Definindo-se

$$\{R\}_n^G = [T]^T_n \{R\}_n \quad (2-35.a)$$

$$[M_0]_n^G = [T]^T_n [M_0]_n^T [T]_n \quad (2-35.b)$$

$$[M_1]_n^G = [T]^T_n [M_1]_n^T [T]_n \quad (2-35.c)$$

obtém-se:

$$\{R\}_n^G + [M_0]_n^G \{U\} + [M_1]_n^G \{\dot{U}\} + \dots = 0 \quad (2-36)$$

que representa a equação matricial do problema estudado, associada ao elemento e_n no sistema global de numeração. As contribui-

ções dos L elementos podem ser, agora, somadas, chegando-se para todo o domínio à seguinte equação que leva à solução do problema:

$$\{R\}^G + [M_0]^G \{U\} + [M_1]^G \{\dot{U}\} + \dots = 0 \quad (2-37)$$

onde

$$\{R\}^G = \sum_{n=1}^L \{R\}_n^G \quad (2-38.a)$$

$$[M_0]^G = \sum_{n=1}^L [M_0]_n^G \quad (2-38.b)$$

$$[M_1]^G = \sum_{n=1}^L [M_1]_n^G \quad (2-38.c)$$

A equação (2-37) é resolvível pelas teorias conhecidas do cálculo matricial.

Obtido o vetor $\{U\}$, pode-se aplicar sobre o mesmo (2-27) para a cada elemento e_n , chegando-se a $\{u\}_n$ (ver (2-26)), que resulta imediatamente nos conhecimentos das funções \bar{F}_n (2-28), resolvendo-se o problema.

CAPÍTULO III

SOLUÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Utiliza-se a formulação variacional associada ao método dos elementos finitos. Formas fechadas são obtidas por integração analítica sobre elementos triangulares planos e axi-simétricos.

3.1 ESTABELECIMENTO DO FUNCIONAL

As equações que regem o campo de temperaturas de um sólido interagindo com um fluido, tem respectivamente no domínio e contorno as seguintes formas (ARPACI⁹).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k_x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k_y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k_z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] + Q = c \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3-1)$$

onde $c = \frac{c_p \gamma}{g}$

e,

$$k_x \ell_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_y \ell_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + k_z \ell_z \frac{\partial \psi}{\partial z} + q_k + h (\psi - \psi_{\infty}) = 0 \quad (3-2)$$

onde:

- x, y e z - coordenadas espaciais
- t - tempo
- ψ - função temperatura
- ψ_{∞} - temperatura em um ponto distante do contorno
- k_x , k_y e k_z - condutividades térmicas nas direções x, y e z
- Q - geração de calor
- c_p - calor específico
- γ - peso específico
- g - aceleração da gravidade
- ℓ_x , ℓ_y e ℓ_z - cosenos diretores da normal exterior a um ponto de contorno
- q_k - calor perdido por unidade de área a uma taxa conhecida
- h - coeficiente de convecção

De acordo com DESAI and ABEL¹⁰ o funcional associado às equações (3.1) e (3.2) é,

$$\begin{aligned}
 I(\psi) = & \int_{\Phi} \left[\frac{1}{2} \left[k_x \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] - \right. \\
 & \left. - \left[Q - c \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] \psi \right] d\Phi + \\
 & + \int_{\Gamma} q_r \psi d\Gamma + \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} h (\psi - \psi_{\infty})^2 \right) d\Gamma \quad (3-3)
 \end{aligned}$$

onde Φ e Γ representam o domínio e a fronteira em questão.

Observa-se que as duas parcelas sobre Γ em (3-3) ocorrem em regiões desconexas do contorno, ou seja, em uma parte da fronteira pode existir troca de calor a uma taxa q_r e em outra troca de calor por convecção.

Retornando-se ao capítulo II, reconhece-se que as equações (3-1) e (3-2) são representadas genericamente pelos operadores A e B em (2-1). Da mesma forma pode-se identificar C e D em (2-16), observando-se o funcional (3-3).

3.2 MINIMIZAÇÃO DO FUNCIONAL

Como discutido no capítulo precedente, seção 2.4, no método dos elementos finitos divide-se o domínio global em um certo número de subdomínios e trata-se sobre cada um deles a equação (3-3).

A aproximação sugerida em (2-28) pode ser escrita matricialmente, ou seja, sobre cada elemento e_n

$$\psi(t, x, y, z) = \sum_{i=1}^K u_i N_i = \{N\}^T \{u\} = \{u\}^T \{N\} \quad (3-4)$$

onde $\{N\}$ é o vetor de funções de interpolação e $\{u\}$ é o vetor dos valores da função de aproximação sobre os nós dos elementos. Como já citado, o vetor $\{N\}$ depende do espaço e $\{u\}$ do tempo.

Na seção 2.5, utilizou-se um sub-índice "n" nas matrizes associadas a cada elemento finito. Neste capítulo, o mesmo, será omitido a fim de simplificar-se a notação, ficando o leitor advertido para o fato.

Como em (3-3) a função ψ aparece diferenciada em relação a t , x , y e z , tem-se que,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \{N\}^T \{\dot{u}\}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \{N_x\}^T \{u\}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \{N_y\}^T \{u\}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \{N_z\}^T \{u\} \quad (3-5)$$

onde os subdomínios x , y e z representam diferenciação da matriz com respeito à variável e o ponto indica derivada relativa ao tempo.

Para os termos quadráticos, pode-se escrever,

$$\psi^2 = \{\mathbf{u}\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} \{\mathbf{u}\}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 = \{\mathbf{u}\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \end{bmatrix} \{\mathbf{u}\}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 = \{\mathbf{u}\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}_y \end{bmatrix} \{\mathbf{u}\}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = \{\mathbf{u}\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}_z \end{bmatrix} \{\mathbf{u}\} \quad (3-6)$$

onde $\begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_y \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_z \end{bmatrix}$ são matrizes simétricas da

das por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} &= \{\mathbf{N}\} \{\mathbf{N}\}^T \\ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \end{bmatrix} &= \{\mathbf{N}_x\} \{\mathbf{N}_x\}^T \\ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_y \end{bmatrix} &= \{\mathbf{N}_y\} \{\mathbf{N}_y\}^T \\ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_z \end{bmatrix} &= \{\mathbf{N}_z\} \{\mathbf{N}_z\}^T \end{aligned} \quad (3-7)$$

Substituindo-se (3-4), (3-5) e (3-6) em (3-3), chega-se ao funcional aproximado, agora dependente de $\{\mathbf{u}\}$.

$$\begin{aligned} I(\psi) &\approx I(\{\mathbf{u}\}) = \\ &= \int \int \int \left[\frac{1}{2} \left(k_x \{\mathbf{u}\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \end{bmatrix} \{\mathbf{u}\} + k_y \{\mathbf{u}\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}_y \end{bmatrix} \{\mathbf{u}\} + k_z \{\mathbf{u}\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}_z \end{bmatrix} \{\mathbf{u}\} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left[Q - c \{\mathbf{N}\}^T \{\dot{\mathbf{u}}\} \right] \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{N}\} \right] d\Phi + \\ &+ \int \int (\mathbf{q} \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{N}\}) d\Gamma + \int \int \frac{1}{2} h (\{\mathbf{u}\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} \{\mathbf{u}\} - 2 \psi_\infty) d\Gamma \end{aligned} \quad (3-8)$$

A fim de minimizar-se (3-8), deve-se anular a sua variação. Para tal, serão úteis as variações das relações a) e b) abaixo.

$$a) \quad I_1(\{\xi\}) = \int_{\Phi} \{\xi\}^T [M] \{\xi\} d\Phi$$

$\{\xi\}$ - matriz coluna

$[M]$ - matriz simétrica

$$I_1(\{\xi\} + \alpha \delta\{\xi\}) =$$

$$= \int_{\Phi} (\{\xi\} + \alpha \delta\{\xi\}^T) [M] (\{\xi\} + \alpha \delta\{\xi\}) d\Phi =$$

$$= \int_{\Phi} \left(\{\xi\}^T [M] \{\xi\} + 2\alpha \delta\{\xi\}^T [M] \{\xi\} + \alpha^2 \delta\{\xi\}^T [M] \{\xi\} \right) d\Phi$$

Como, de acordo com (2-9)

$$\delta I_1(\{\xi\}) = \frac{\partial}{\partial \alpha} I_1(\{\xi\} + \alpha \delta\{\xi\}) \Big|_{\alpha=0},$$

tem-se

$$\delta I_1(\{\xi\}) = \int_{\Phi} 2 \delta \{\xi\}^T [M] \{\xi\} d\Phi \quad (3-9)$$

$$b) \quad I_2(\{\xi\}) = \int_{\Phi} \{\xi\}^T \{R\} d\Phi$$

$\{\xi\}$ - matriz coluna

$\{R\}$ - matriz coluna

$$I_2(\{\xi\} + \alpha \delta\{\xi\}) =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Phi} (\{\xi\} + \alpha \delta\{\xi\}^T)^T \{R\} d\Phi = \\ &= \int_{\Phi} (\{\xi\}^T \{R\} + \alpha \delta\{\xi\}^T \{R\}) d\Phi \end{aligned}$$

E de (2-9),

$$\delta I_2\{\xi\} = \int_{\Phi} \delta\{\xi\}^T \{R\} d\Phi \quad (3-10)$$

Posteriormente será visto em 3.5 que para a solução de um problema transiente são utilizados métodos passo-a-passo. Nestes métodos procura-se o valor de uma função em um dado instante, a partir daquele do instante anterior, considerando-se inalteráveis as propriedades do sistema em cada intervalo de tempo. É razoável, portanto, considerar-se o termo $\{\dot{u}\}$ em (3-8) como constante. Observa-se que a equação obtida, terá uma validade limitada ao intervalo de tempo em que tal consideração for válida.

Utilizando-se o fato acima e as relações (3-6) e (3-7), a variação de (3-8) sobre o domínio Φ_n e a fronteira do elemento finito Γ_n (se o mesmo pertencer ao contorno global como na figura 2.6) resulta em:

$$\begin{aligned}
& \delta \cdot I \cdot (\{u\}) = \\
& = \delta \{u\}^T \left[\int \int \int_{\Phi_n} (k_x [B_x] + k_y [B_y] + k_z [B_z]) d\Phi_n \{u\} + \right. \\
& + \left. \int \int \int_{\Phi_n} Q \{N\} d\Phi_n - \int \int \int_{\Phi_n} C [B] d\Gamma \{\dot{u}\} \right] + \\
& + \delta \{u\}^T \left[\int \int_{\Gamma_n} q_k \{N\} d\Gamma_n \right] + \\
& + \delta \{u\}^T \left[\int \int_{\Gamma_n} q [B] d\Gamma_n \{u\} - \int \int_{\Gamma_n} h \psi_\infty \{N\} d\Gamma_n \right]
\end{aligned}$$

Pondo-se a variação $\delta\{u\}^T$ em evidência e recordando que a mesma é arbitrária, chega-se, ao anular-se a variação em (3-11), à seguinte equação matricial:

$$[M_0] \{u\} = \{R\} - [M_1] \{\dot{u}\} \quad (3-12)$$

onde as matrizes envolvidas são dadas por:

$$[M_0] = \iiint ((k_x [B_x] + k_y [B_y] + k_z [B_z]) d\Phi_n + \Phi_n)$$

$$+ \iint q [B] d \Gamma_n \quad (3-13.a)$$

$$[M_1] = \iint c [B] d \Phi_n \quad (3-13.b)$$

$$\{R\} = \iiint Q \{N\} d \Phi_n + \iint q_k \{N\} d \Gamma_n -$$

$$- \iint h \psi_\infty \{N\} d \Gamma_n \quad (3-13.c)$$

Retornando-se ao capítulo II, seção 2.5 observa-se que a equação matricial (3-12) corresponde à forma genérica (2-31) associada a cada elemento finito.

3.3 ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES COM FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO LINEARES

3.3.1 DERIVAÇÃO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

O elemento triangular é definido pelos nós locais 1, 2, e 3, numerados no sentido anti-horário,

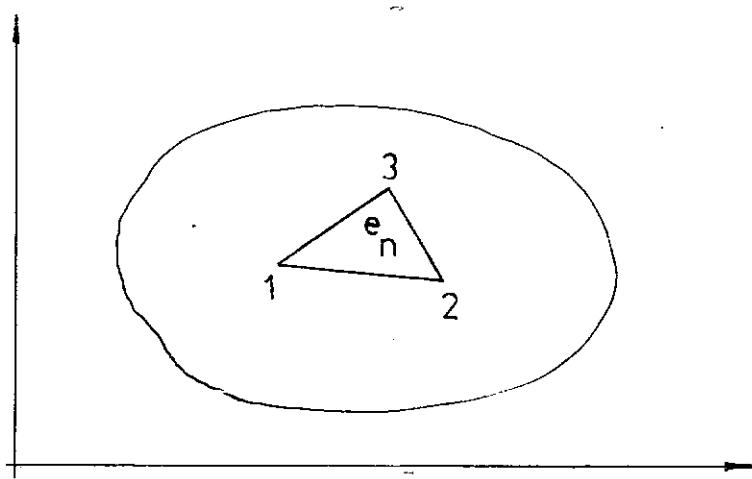


FIGURA 3.1 - (Elemento triangular)

As coordenadas nodais são (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) .

De acordo com o exposto em 2.4.2, o conjunto n_{p_i} associado ao elemento e_n é $(1, 2, 3)$.

O valor do campo de temperaturas será dado pelo vetor (matriz coluna)

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (3-14)$$

A função de aproximação linear, tem a forma:

$$\psi(x, y) = A_1 + A_2 x + A_3 y \quad (3-15)$$

Como os valores nodais de $\psi(x, y)$ são aqueles em (3-14), a relação (3-15) fornece

$$u_1 = A_1 + A_2 x_1 + A_3 y_1$$

$$u_2 = A_1 + A_2 x_2 + A_3 y_2$$

$$u_3 = A_1 + A_2 x_3 + A_3 y_3 \quad (3-16)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \quad (3-17)$$

Resolvendo-se (3-17), obtém-se os coeficientes A_1 , A_2 e A_3 de (3-15)

$$\left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right\} = \frac{1}{2S} \left[\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} \quad (3-18)$$

onde

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$b_2 = y_2 - y_3$$

$$c_3 = x_3 - x_2$$

$$2S = y_1 c_1 + y_2 c_2 + y_3 c_3 \quad (3-19)$$

Os outros coeficientes (a_2 , b_2 , c_2) e (a_3 , b_3 , c_3) são obtidos por permutações cíclicas nos índices 1, 2, e 3. S é a área do triângulo.

A função $\psi(x,y)$ pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \psi(x,y) = \frac{1}{2S} & ([a_1 + b_1 x + c_1 y] u_1 + \\ & [a_2 + b_2 x + c_2 y] u_2 + \\ & [a_3 + b_3 x + c_3 y] u_3) \quad (3-20) \end{aligned}$$

o que leva a identificação da matriz $\{N\}$ associada ao elemento considerado, dependente das variáveis espaciais. As expressões de $\{N_x\}$ e $\{N_y\}$ são obtidas por derivação, não cabendo ao problema considerar-se $\{N_z\}$.

$$\{N\} = \frac{1}{2S} \left\{ \begin{array}{l} a_1 + b_1x + c_1y \\ a_2 + b_2x + c_2y \\ a_3 + b_3x + c_3y \end{array} \right\}$$

$$\{N_x\} = \frac{1}{2S} \left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right\} ; \quad \{N_y\} = \frac{1}{2S} \left\{ \begin{array}{l} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \right\}$$

(3-21)

As matrizes $[B]$, $[B_x]$ e $[B_y]$, tomam
as formas

$$[B] = \{N\} \{N\}^T = \frac{1}{4S^2} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

(3-22.a)

$$[B_x] = \{N_x\} \{N_x\}^T = \frac{1}{4S^2} \begin{bmatrix} b_1b_1 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_2b_1 & b_2b_2 & b_2b_3 \\ b_3b_1 & b_3b_2 & b_3b_3 \end{bmatrix} \quad (3-22.b)$$

$$[B_y] = \{N_y\} \{N_y\}^T = \frac{1}{4S^2} \begin{bmatrix} c_1c_1 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_2c_1 & c_2c_2 & c_2c_3 \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3c_3 \end{bmatrix} \quad (3-22.c)$$

3.3.2 INTEGRAÇÃO ANALÍTICA

Com as matrizes $\{N\}$, $[B]$, $[B_x]$ e $[B_y]$ em (3-21) e (3-22), as parcelas das matrizes em (3-13) referentes ao domínio, podem ser calculadas sobre a superfície S do triângulo.

Como k_x e k_y são constantes ao longo da superfície S , assim como as matrizes $[B_x]$ e $[B_y]$, é válido:

$$\begin{aligned} & \iint_S (k_x [B_x] + k_y [B_y]) dx dy = \\ & = k_x [B_x] \iint_S dx dy + k_y [B_y] \iint_S dx dy \quad (3-23) \end{aligned}$$

Substituindo os valores de $[B_x]$ e $[B_y]$ de (3-22) em (3-23),

$$\begin{aligned} & \iint_S (k_x^c [B_x] + k_y [B_y]) dx dy = \\ & = \frac{k_x}{4S} \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{bmatrix} + \frac{k_y}{4S} \begin{bmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{bmatrix} \quad (3-24) \end{aligned}$$

No caso de c permanecer constante em S ,

$$\iint_S c \llbracket B \rrbracket dx dy = c \iint_S \llbracket B \rrbracket dx dy =$$

$$= \frac{c}{4S^2} \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ x & xy & y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right) dx dy \quad (3-25)$$

Com as definições de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ e α_5
no apêndice A, (3-25) toma a forma

$$\iint_S c \llbracket B \rrbracket dx dy = \frac{c}{4S} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_2 & \alpha_5 & \alpha_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (3-26)$$

O produto matricial (3-26), reduz-se após as
devidas simplificações a:

$$\iint_S c \llbracket B \rrbracket dx dy = \frac{cS}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

A parcela associada à geração de calor Q re-
sulta, com α_1 e α_2 , do apêndice A, considerando-se Q constan-
te em todo o elemento, em:

$$\iint_S Q \{N\} dx dy = \\ = \frac{Q}{2} \left\{ \begin{array}{l} a_1 + b_1 \alpha_1 + c_1 \alpha_2 \\ a_2 + b_2 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 \\ a_3 + b_3 \alpha_1 + c_3 \alpha_2 \end{array} \right\} = \frac{QS}{3} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \quad (3-28)$$

Quando o elemento considerado pertence ao contorno (ver figura 2.6), deve-se realizar as integrais de linha em (3-13) como discutido na seção 2.5. A fronteira genérica Γ em (3-13), é, para o elemento triangular, o segmento de reta mostrado na figura 3.2, com comprimento ℓ .

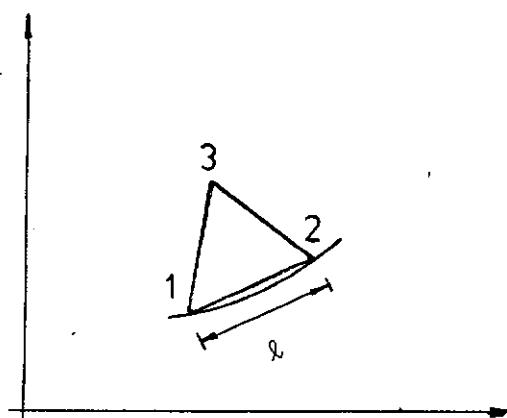


FIGURA 3.2 - (Elemento triangular na fronteira)

Utilizando-se $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$ e α_{10} do apêndice A, e considerando-se o coeficiente de convecção h constante ao longo de ℓ ,

$$\int_{\ell} h \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} d\ell = \\ = \frac{h \ell}{4S^2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ \alpha_6 & \alpha_8 & \alpha_{10} \\ \alpha_7 & \alpha_{10} & \alpha_9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (3-29)$$

que após a realização do produto matricial e rearrumação, fornece,

$$\int_{\ell} h \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} d\ell = \frac{h\ell}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{nós locais 1 e 2} \\ \text{no contorno} \end{array} \quad (3-30)$$

Supondo q_k constante ao longo de ℓ , tem-se:

$$\int_{\ell} q_k \{N\} d\ell = \frac{q_k \ell}{2S} \left\{ \begin{array}{l} a_1 + b_1 \alpha_6 + c_1 \alpha_7 \\ a_2 + b_2 \alpha_6 + c_2 \alpha_7 \\ a_3 + b_3 \alpha_6 + c_3 \alpha_7 \end{array} \right\} \quad (3-31)$$

Com os valores de α_6 e α_7 no apêndice A,

$$\int_{\ell} q_k \{N\} d\ell = \frac{q_k \ell}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3-32)$$

De modo idêntico ao da integral acima, supondo-se o produto $h \psi_\infty$ constante,

$$\int_{\ell} h \psi_\infty \{N\} d\ell = \frac{h\psi_\infty \ell}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-33)$$

Com (3-24), (3-27), (3-28), (3-32) e (3-33), as matrizes em (3-11) podem ser reescritas nas suas formas integradas

$$\begin{aligned} [M_0] &= \frac{k_x}{4S} \begin{vmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{vmatrix} + \frac{k_y}{4S} \begin{vmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{vmatrix} + \\ &+ \frac{h\ell}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ Nós locais 1 e 2 no contorno} \quad (3-34.a) \end{aligned}$$

$$[M_1] = \frac{cS}{12} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (3-34.b)$$

$$\{R\} = \frac{QS}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{q_k l}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{h \psi_{\infty} l}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

nós locais
1 e 2 no
contorno

nós lo
cais 1
e 2 no
contor
no

(3-34.c)

OBS.: Sobre (3-34.c) deve ser notado que somente uma das duas parcelas sobre o contorno é aplicável, dependendo do tipo de troca de calor existente (perda de calor a uma taxa conhecida ou convecção forçada) na região onde situa-se o elemento.

3.4 ANEIS TRIANGULARES PARA CAMPOS AXI-SIMÉTRICOS

3.4.1 GENERALIDADES

Em problemas axi-simétricos o campo de temperaturas fica bem determinado em todo o domínio, conhecendo-se a sua distribuição em um semi-plano meridional. Este semi-plano, pode então, ser dividido em elementos triangulares que definirão os anéis mostrados na figura 3.3.

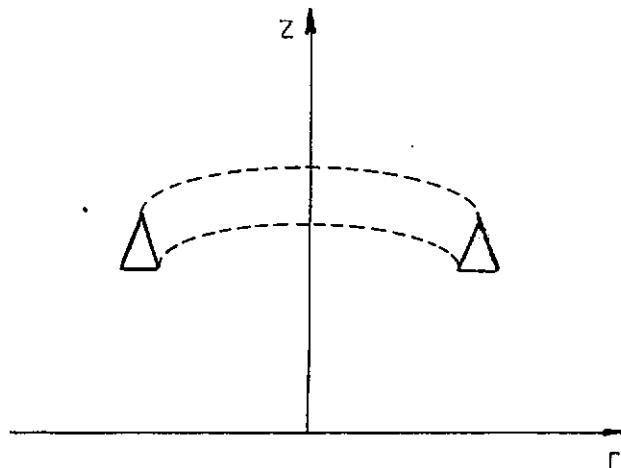


FIGURA 3.3 - (Elementos triangulares axi-simétricos)

O sistema de coordenadas cilíndrico é o indicado para se trabalhar em problemas com simetria axial. O valor de uma função axisimétrica independe da coordenada angular, o que torna o desenvolvimento feito na seção anterior dirigido a problemas planos válido para o presente caso.

3.4.2 INTEGRAÇÃO ANALÍTICA SOBRE ELEMENTOS AXISIMÉTRICOS

As equações (3-13) ao serem tratadas em domínios axisimétricos tem os elementos de volume e fronteira $d\Phi$ e $d\Gamma$ expressos por:

$$d\Phi = r \, d \, r \, d \theta \, d \, z$$

$$d\Gamma = r \, d \, \theta \, d \, \ell \quad (3-35)$$

onde $d\Gamma$ é a área gerada por um segmento de reta de comprimento ℓ , da fronteira. O fator multiplicativo r será responsável por

um maior grau de dificuldade na integração analítica de (3-13).

Com (3-35) e observando-se a troca de x e y por r e z , respectivamente nas matrizes em (3-21) e (3-22), as parcelas de (3-13) correspondentes ao domínio podem ser integradas sobre o volume V de cada anel triangular.

Caso k_r e k_z mantenham-se constantes ao longo do elemento, tem-se, realizando-se a integração ao longo da coordenada angular θ ,

$$\iiint_V (k_r [B_r] + k_z [B_z]) r d r d z d \theta =$$

$$= 2\pi (k_r [B_r] + k_z [B_z]) \iint_S r d r d z \quad (3-36)$$

Substituindo-se $[B_r]$ e $[B_z]$ de (3-22), (e cuidando-se em trocar x e y por r e z , como já foi citado) em (3-26) chega-se a:

$$\iiint_V (k_r [B_r] + k_z [B_z]) r d r d z d \theta =$$

$$= \frac{\pi \bar{r} k_r}{2 S} \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{bmatrix} + \frac{\pi \bar{r} k_z}{2 S} \begin{bmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

$$\text{onde } \bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$$

Com as definições para α_1 , α_3 , α_5 , α_{11} , α_{12} , α_{13} (Apêndice A) e considerando c constante no elemento,

$$\iiint_V c [B] r dr dz d\theta = 2\pi c \iint_S [B] r dr dz = \\ = \frac{\pi c}{2S} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_3 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_5 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

Realizando-se as operações matriciais acima, chega-se a:

$$\iiint_V c [B] r dr dz d\theta = \\ = \frac{\pi c S}{30} \begin{vmatrix} (6r_1+2r_2+2r_3) & (2r_1+2r_2+r_3) & (2r_1+r_2+2r_3) \\ (2r_1+2r_2+r_3) & (2r_1+6r_2+2r_3) & (r_1+2r_2+2r_3) \\ (2r_1+r_2+2r_3) & (r_1+2r_2+2r_3) & (2r_1+2r_2+6r_3) \end{vmatrix} \quad (3-39)$$

Continuando, supondo Q inalterável em cada anel triangular,

$$\iiint_V Q \{N\} r dr dz d\theta = 2\pi Q \iint_S \{N\} r dr dz \quad (3-40)$$

com as definições para α_1 , α_3 e α_5 do apêndice A,

$$\iiint_V Q \{N\} r d r d z d \theta =$$

$$= \pi Q \begin{Bmatrix} a_1 \alpha_1 + b_1 \alpha_3 + c_1 \alpha_5 \\ a_2 \alpha_1 + b_2 \alpha_3 + c_2 \alpha_5 \\ a_3 \alpha_1 + b_3 \alpha_3 + c_3 \alpha_5 \end{Bmatrix} = \frac{\pi Q S}{6} \begin{Bmatrix} 2r_1 + r_2 + r_3 \\ r_1 + 2r_2 + r_3 \\ r_1 + r_2 + 2r_3 \end{Bmatrix}$$

(3-41)

No caso do elemento considerado pertencer ao contorno, as integrais ao longo de Γ em (3-13) devem ser calculadas.

No caso de h permanecer inalterável ao longo da superfície de integração,

$$\iint_{S_r} h [B] r d \ell d \theta = 2\pi h \int_{\ell} [B] r d \ell, \quad (3-42)$$

onde ℓ é o segmento de reta mostrado na figura 3.2 para elementos planos, e S_r a área gerada pela revolução do segmento ℓ .

Lançando-se mão de $\alpha_6, \alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_{14}, \alpha_{15}$ e α_{16} no apêndice A,

$$\iint_{S_r} h [B] r d \ell d \theta =$$

$$= \frac{h\ell\pi}{2S_r^2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_6 & \alpha_8 & \alpha_{10} \\ \alpha_8 & \alpha_{14} & \alpha_{15} \\ \alpha_{10} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (3-43)$$

A relação acima quando convenientemente transformada, fornece:

$$\iint_{S_r} h[B] r d\ell d\theta = \frac{\pi h\ell}{6} \begin{vmatrix} 3r_1 + r_2 & r_1 + r_2 & 0 \\ r_1 + r_2 & r_1 + 3r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3-44)$$

(A área da seção triangular de cada anel S não deve ser confundida com a área S_r gerada pela revolução do segmento de reta ℓ).

Supondo a perda de calor q_k invariável ao longo da superfície S_r ,

$$\iint_{S_r} q_k[N] r d\ell d\theta = 2\pi q_k \int_{\ell} r [N] d\ell \quad (3-45)$$

Com as definições de α_6 , α_8 e α_{10} no apêndice A,

$$\iint_{S_r} q_k \{N\} r d\ell d\theta = \frac{\pi q_k \ell}{S} \left\{ \begin{array}{l} a_1 \alpha_6 + b_1 \alpha_8 + c_1 \alpha_{10} \\ a_2 \alpha_6 + b_2 \alpha_8 + c_2 \alpha_{10} \\ a_3 \alpha_6 + b_3 \alpha_8 + c_3 \alpha_{10} \end{array} \right\} \quad (3-46)$$

Rearrumando (3-44),

$$\iint_{S_r} q_k \{N\} r d\ell d\theta = \frac{\pi q_k \ell}{S} \left\{ \begin{array}{l} 2r_1 + r_2 \\ r_1 + 2r_2 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3-47)$$

Considerando o produto $h \psi_\infty$ constante e com o desenvolvimento idêntico ao feito para a obtenção de (3-47), chega-se a:

$$\iint_{S_r} h \psi_\infty \{N\} r d\ell d\theta = \frac{\pi h \psi_\infty \ell}{S} \left\{ \begin{array}{l} 2r_1 + r_2 \\ r_1 + 2r_2 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3-48)$$

Pode-se reunir as parcelas de (3-13) em (3-37), (3-39), (3-41), (3-44), (3-47) e (3-48), chegando-se às formas integradas de $[M_0]$, $[M_1]$ e $\{R\}$ em (3-13) para elementos triangulares axi-simétricos.

$$\begin{aligned}
 \boxed{M_0} &= \frac{\pi \bar{r} k_r}{2S} \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{bmatrix} + \frac{\pi \bar{r} k_z}{2S} \begin{bmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{bmatrix} + \\
 &+ \frac{\pi h \ell}{6} \begin{bmatrix} (3r_1 + r_2) & (r_1 + r_2) & 0 \\ (r_1 + r_2) & (r_1 + 3r_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ nos locais } \\
 &\text{1 e 2 no contorno} \\
 &\quad (3-49.a)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{M_1} = \frac{\pi c S}{30} \begin{vmatrix} (6r_1 + 2r_2 + 2r_3) & (2r_1 + r_2 + r_3) & (2r_1 + r_2 + 2r_3) \\ (2r_1 + 2r_2 + r_3) & (2r_1 + 6r_2 + 2r_3) & (r_1 + 2r_2 + 2r_3) \\ (2r_1 + r_2 + 2r_3) & (r_1 + 2r_2 + 2r_3) & (2r_1 + 2r_2 + 6r_3) \end{vmatrix} \quad (3-49.b)$$

$$\{R\} = \frac{\pi Q S}{6} \begin{Bmatrix} 2r_1 + r_2 + r_3 \\ r_1 + 2r_2 + r_3 \\ r_1 + r_2 + 2r_3 \end{Bmatrix} - \frac{\pi q_k \ell}{3} \begin{Bmatrix} 2r_1 + r_2 \\ r_1 + 2r_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \\
 \text{nos locais } \\
 \text{1 e 2 no contorno}$$

$$+ \frac{\pi h \psi_\infty \ell}{3} \begin{Bmatrix} 2r_1 + r_2 \\ r_1 + 2r_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ nos locais } \\
 \text{1 e 2 no contorno}$$

(3-49.c)

OBS.: ver nota sobre equação (3-34.c).

3.5 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Através de (3-34) e (3-49) obteve-se as formas integradas das matrizes coeficientes da equação restrita ao elemento finito em (3-12), respectivamente sobre elementos planos e axisimétricos. Com o procedimento discutido na seção 2.5 obtém-se, de imediato, a equação para o sistema global expressa por

$$[\underline{M}_0] \{U\} = \{R\} - [\underline{M}_1] \{\dot{U}\} \quad (3-50)$$

onde as ordens das matrizes acima igualam o número total G de pontos sobre o domínio. (Ver seção 2.4.2).

3.5.1 REGIME PERMANENTE

Ao procurar-se o campo estacionário de temperaturas, (3-50) reduz-se a:

$$[\underline{M}_0] \{U\} = \{R\} \quad (3-51)$$

Havendo independência de $[\underline{M}_0]$ e $\{R\}$ relativa ao vetor de temperaturas $\{U\}$, o mesmo é obtido pela solução do sistema linear em (3-51).

Um procedimento iterativo será necessário, quando as propriedades físicas influentes no estabelecimento das matrizes $[\underline{M}_0]$ e $\{R\}$ variam com a temperatura. Supõe-se um

campo inicial $\{U_0\}$, com o que se calcula as duas matrizes dependentes acima, obtendo-se então, o vetor $\{U_1\}$. Com este, por sua vez, serão recalculadas $[M_0]$ e $\{R\}$. O processo é repetitivo até a obtenção de campos de temperaturas com diferenças desprezíveis entre si.

Um fluxograma pode ser visto na figura(3.4).

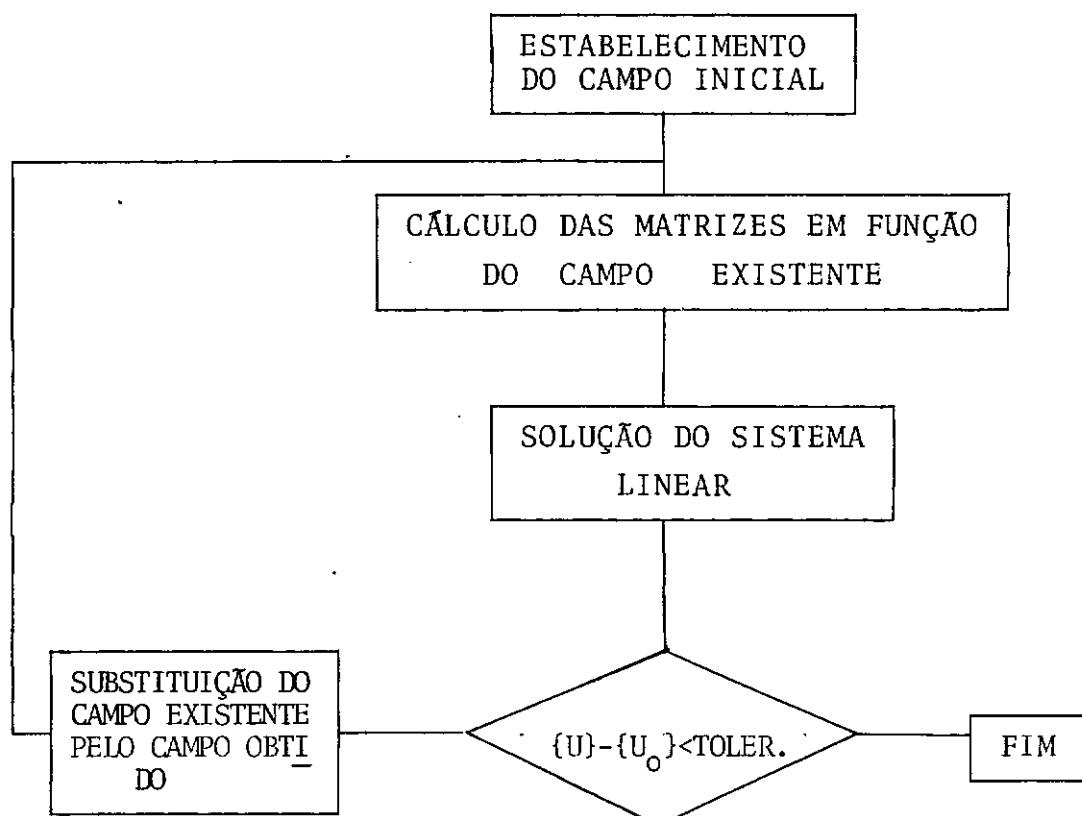


FIGURA 3.4 - (Iteração para solução do problema com matrizes dependentes da temperatura)

3.5.2 REGIME TRANSIENTE

Regimes transientes descritos por (3-50) requerem a aplicação de métodos iterativos ao longo do tempo, em que o valor da variável procurada em um certo instante permite

o conhecimento do seu valor após um intervalo de tempo Δt . Caso as propriedades físicas dependam da temperatura, elas podem ser recalculadas a cada iteração. Estes processos recebem a denominação de passo-a-passo e requerem o conhecimento de um campo inicial de temperaturas, como citado na seção 2.1.

Caso o tamanho do intervalo de tempo Δt seja pequeno o suficiente de modo que $\{\dot{U}\}$ possa ser considerado constante tem-se

$$\{U\}_{m+1} = \{U\}_m + \frac{1}{2} (\{\dot{U}\}_m + \{\dot{U}\}_{m+1}) \Delta t \quad (3-52)$$

onde "m" representa um instante genérico.

A combinação de (3-50) e (3-52), fornece a seguinte aproximação, atribuída a Euler:

$$(\lfloor M_0 \rfloor + \frac{1}{\Delta t} \lfloor M_1 \rfloor) \{U\}_{m+1} = \frac{1}{2} (\{R\}_m + \{R\}_{m+1}) + \frac{1}{\Delta t} \lfloor M_1 \rfloor \{U\}_m \quad (3-53)$$

para $m = 0, 1, 2, \dots$

Observa-se que permite-se $\{R\}$ variar no intervalo de tempo.

Outro modo de tratar o problema transiente consiste na aplicação do método dos resíduos ponderados em 2.2.1 a um domínio tendo o tempo como variável independente e dimensão Δt .

No intervalo de tempo tem-se:

$$\{U\} = \sum_{i=1}^2 N_i(t) \{U\}_i \quad (3-54)$$

onde, agora, $N_i(t)$ varia com o tempo e $\{U\}_1$ e $\{U\}_2$ são os vetores de temperaturas ao início e ao fim do intervalo de tempo.

Possíveis formas para $N_1(t)$ e $N_2(t)$ podem ser vistas na figura 3.5

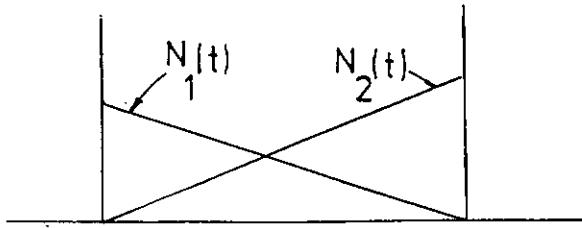


FIGURA 3.5 - (Funções de interpolação no domínio do tempo)

As expressões de $N_1(t)$ e $N_2(t)$ são dadas por

$$\xi = t/\Delta t$$

$$N_1(t) = 1 - \xi$$

$$N_2(t) = \xi \quad (3-55)$$

Observa-se que a aproximação de $\{U\}$ por (3-54), com as funções de interpolação dadas por (3-55), torna coerente a hipótese que a derivada da temperatura mantinha-se constante, desde que se trabalhasse com intervalos de tempo pequenos.

Em ZIENKIEWICS⁸ está bem apresentado o desenvolvimento de (3-50) segundo o método dos resíduos, dando origem à seguinte fórmula de recorrência:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [M_1] + v [M_0] \right) \{U\}_{m+1} - \left(\frac{1}{\Delta t} [M_1] + (1-v) [M_0] \right) \{U\}_m - \{\bar{R}\} = 0 \quad (3-56)$$

onde

$$v = \int_0^1 w_j \xi d\xi \quad / \quad \int_0^1 w_j d\xi$$

O valor de $\{\bar{R}\}$ é dado por

$$\{\bar{R}\} = \{R\}_{m+1} v + \{R\}_m \{1 - v\} \quad (3-57)$$

O valor de v depende da função de peso w_j escolhida. Para w_j mostrado na figura abaixo, o valor de v torna-se igual a unidade, e é interessante notar que (3-56) recai em (3-53), desde que $\{R\}$ seja constante.

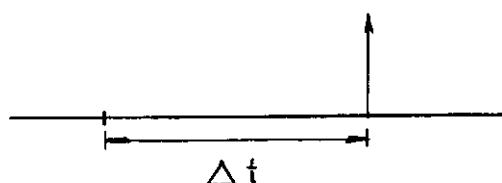


FIGURA 3.6 - (Função de Peso)

3.5.3 PROBLEMAS COM TEMPERATURAS FIXAS NO DOMÍNIO

Muitos problemas levam a modelos onde tem-se regiões do domínio com a temperatura conhecida, tanto para regimes permanentes como transientes. Este fato reflete-se no método dos elementos finitos pela fixação da temperatura em um subconjunto de nós, permitindo reescrever-se a equação (3-50) da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} M_{o,11} & M_{o,12} \\ \hline M_{o,21} & M_{o,22} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} U_d \\ U_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} - \begin{vmatrix} M_{1,11} & M_{1,21} \\ \hline M_{1,12} & M_{1,22} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_d \\ \dot{U}_f \end{Bmatrix} \quad (3-58)$$

onde os índices "f" e "d" indicam temperaturas fixas ou desconhecidas e $M_{o,11}$, $M_{o,12}$, R_1 , ..., etc., são as regiões das matrizes coeficientes da equação (3-40) que associam-se a nos com temperaturas fixas ou desconhecidas.

A equação (3-58) pode ser reescrita da forma abaixo:

$$\begin{aligned} [M_{o,11}] \{U_d\} = \{R_1\} - [M_{o,12}] \{U_f\} - [M_{1,12}] \{\dot{U}_f\} - \\ - [M_{1,11}] \{\dot{U}_d\} \quad (3-59) \end{aligned}$$

que é um sistema de igual ordem ao número de pontos com temperatura desconhecida.

A equação matricial reduzida (3-59) é resolvível pelos métodos citados nas subseções 3.5.1 e 3.5.2.

CAPÍTULO IV

O MÉTODO QUASI-FINITO APLICADO A PROBLEMAS TÉRMICOS

O método é uma forma alternativa de estudar se problemas térmicos, apresentando, sob certos pontos de vista, vantagens sobre a formulação dos elementos finitos.

4.1 GENERALIDADES

De modo diverso do método dos elementos finitos no qual procura-se uma solução discretizada a partir da formulação infinitesimal, como apresentado no capítulo II, pode-se tratar diretamente um problema realizando-se o equacionamento supondo o meio contínuo como um conjunto de formas com dimensão finita.

Uma distinção do método é a possibilidade de considerar-se elementos constituídos de fluido, o que lhe dá grande flexibilidade. Outra vantagem do mesmo é a forma do sistema linear obtido que simplifica o desenvolvimento do problema transiente, como será visto posteriormente.

A divisão do contínuo é feita, por exemplo, como na figura 4.1, dando origem a um total de G subdomínios.

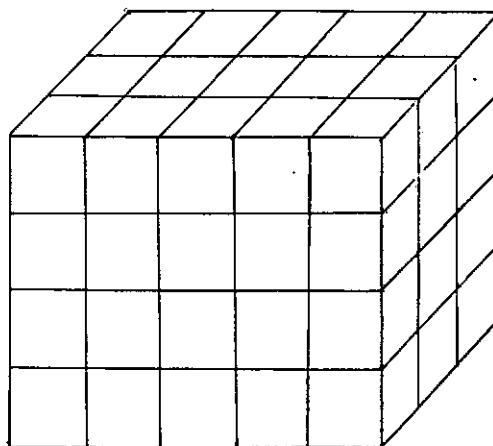


FIGURA 4.1 - (Divisão do Contínuo)

As características determinantes de cada elemento são um ponto onde é determinada a temperatura, denominado centro de troca de calor (normalmente coincidente com o centro de gravidade, mas com excessão a ser vista posteriormente) e a área de troca de calor. A sua forma é arbitrária dependendo do problema.

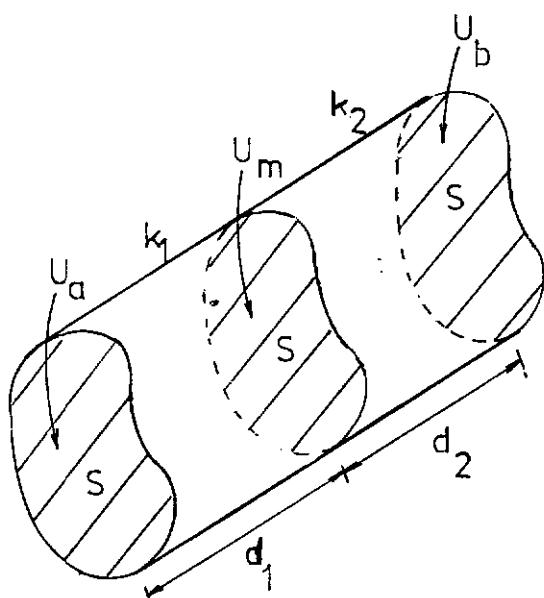
4.2 TROCA DE CALOR ENTRE ELEMENTOS

Como já citado o domínio é dividido em um certo número de elementos. Nesta seção estuda-se a interação entre dois quaisquer elementos oriundos da discretização, para o posterior estabelecimento do sistema relativo a todo o conjunto. É feita também demonstração cuidadosa da validade do método para elementos cilíndricos (ou cúbicos) e para anéis circunferenciais ao estudar-se o fenômeno da condução. Os possíveis modos de troca de calor, ou seja, condução, convecção e radiação são estudados a seguir.

4.2.1 CONDUÇÃO

No presente método considera-se as propriedades físicas como constantes em cada elemento, fato que associado à utilização da média de temperatura no mesmo torna o equacionamento bastante simplificado.

Sejam dois elementos cilíndricos justapostos com fluxo de calor na direção axial (observa-se que elementos em forma de cubo, são cilindros de seção quadrada), mostrados na figura 4.2.



k_1, k_2 - condutividades
 S - área da seção reta
 U_a, U_m, U_b - temperaturas

FIGURA 4.2 - (Troca de calor entre dois cilindros justapostos)

O fluxo de calor em cada um dos cilindros será dado por: (KREITH¹¹)

$$q_1 = \frac{U_m - U_a}{\frac{d_1}{S k_1}} \quad \therefore \quad U_m - U_a = q_1 \frac{d_1}{S k_1} \quad (4-1.a)$$

$$q_2 = \frac{U_b - U_m}{\frac{d_2}{S k_2}} \quad \therefore \quad U_b - U_m = q_2 \frac{d_2}{S k_2} \quad (4-1.b)$$

onde q_1 e q_2 são os fluxos considerados constantes nos elementos 1 e 2.

Como o fluxo q na interface é o mesmo para os dois elementos, tem-se:

$$q = \frac{U_b - U_a}{\frac{d_1}{S k_1} + \frac{d_2}{S k_2}} = \frac{(U_b - U_a) S k_1 k_2}{d_1 k_2 + d_2 k_1} \quad (4-2)$$

Neste ponto faz-se as seguintes hipóteses, utilizadas no método do equacionamento finito:

- Ambos os cilindros estão com temperaturas uniformes dadas pela média das temperaturas dos extremos.

Assim,

$$U_1 = \frac{U_a + U_m}{2} \quad a) \quad ; \quad U_2 = \frac{U_b + U_m}{2}, \quad b) \quad (4-3)$$

- Existe uma condutividade equivalente, dada por:

$$k_{12} = \frac{2 k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (4-4)$$

- O centro de troca de calor coincide com o centro de gravidade dos cilindros, o que implica em uma distância equivalente de troca de calor expressa por:

$$d_{12} = \frac{1}{2} (d_1 + d_2) \quad (4-5)$$

Com as hipóteses acima pode-se supor a existência de um fluxo de calor hipotético q_h dado por

$$q_h = \frac{\frac{U_2 - U_1}{d_{12}}}{S k_{12}} \quad (4-6)$$

Substituindo-se (4-3), (4-4) e (4-5) em (4-6),

$$q_h = \frac{\frac{U_b + U_m}{2} - \frac{U_a + U_m}{2}}{\frac{\frac{1}{2} (d_1 + d_2)}{S \frac{2 k_1 k_2}{k_1 + k_2}}} , \quad (4-7)$$

que rearrumando fornece:

$$q_h = \frac{\frac{(U_b - U_a) S k_1 k_2}{(d_1 + d_2)(k_1 + k_2)}}{2} \quad (4-8)$$

Definindo-se:

$$\zeta = \frac{(U_b - U_a) S k_2}{d_2} \quad (4-9.a)$$

$$\beta = \frac{k_1}{k_2} \quad (4-9.b)$$

$$\gamma = \frac{d_1}{d_2} \quad (4-9.c)$$

As relações (4-2) e (4-8) tomam as seguintes formas com as definições em (4-9):

$$q = \frac{(U_b - U_a) S k_2 \frac{k_1}{k_2}}{d_2 \left(\frac{d_1}{d_2} + \frac{k_1}{k_2} \right)} = \frac{\zeta \beta}{\gamma + \beta} \quad (4-10)$$

$$q_h = \frac{(U_b - U_a) S k_2 \frac{k_1}{k_2}}{\frac{1}{2} d_2 \left(1 + \frac{d_1}{d_2} \right) \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right)} = \frac{\zeta \beta}{\frac{1}{2} (1 + \gamma)(1 + \beta)} \quad (4-11)$$

Caso $\beta = 1$, ou seja, a condutividade é a mesma nos dois elementos

$$\left. \begin{array}{l} q = \frac{\zeta}{1 + \gamma} \\ q_h = \frac{\zeta}{1 + \gamma} \end{array} \right\} \Rightarrow q = q_h \quad (4-12)$$

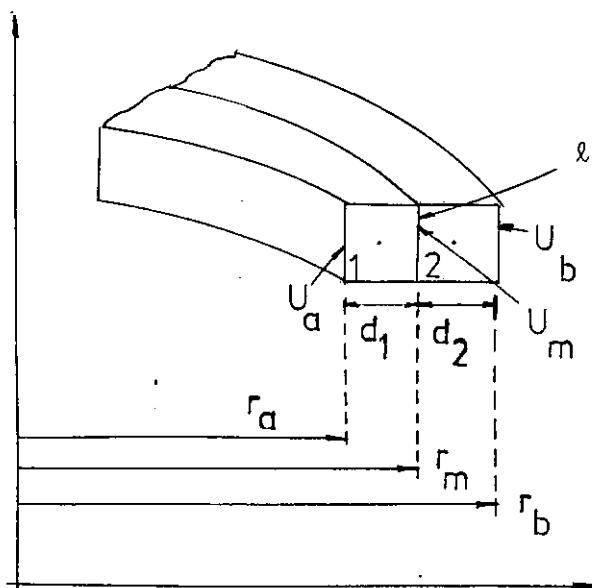
Caso $\beta \neq 1$, é necessário ter-se a igualdade de d_1 e d_2 , tornando $\gamma = 1$, resultando em:

$$\left. \begin{array}{l} q = \frac{\zeta}{1 + \beta} \\ q_h = \frac{\zeta}{1 + \beta} \end{array} \right\} \Rightarrow q = q_h \quad (4-13)$$

Assim conclui-se que o fluxo q_h calculado por (4-6) com as hipóteses feitas para a condutividade equivalente e centros de troca de calor, iguala o fluxo q dado por (4-2), uma vez respeitadas as hipóteses feitas para a obtenção de (4-12) e (4-13).

Observa-se que o apresentado para os dois cilindros mostrados na figura 4.2 é válido para as três dimensões de um cubo, desde que os fluxos em cada direção sejam independentes, permitindo a análise de problemas tridimensionais.

Um outro processo de troca de calor muito comum é aquele entre dois cilindros concêntricos, aplicável a problemas axisimétricos.



ℓ - comprimento do segmento oriundo da seção de superfície de separação

FIGURA 4.3 - (Troca de calor entre cilindros concêntricos)

O fluxo de calor radial nos dois cilindros é dado por: (KREITH¹¹)

$$q_1 = \frac{\frac{U_m - U_a}{\ln \frac{r_m}{r_a}}}{\frac{2 \pi \ell k_1}{}}, \quad a) \quad q_2 = \frac{\frac{U_b - U_m}{\ln \frac{r_b}{r_m}}}{\frac{2 \pi \ell k_2}{}}, \quad b) \quad (4-14)$$

Ou, reunindo-se as duas relações acima, observando-se que o fluxo na interface é o mesmo.

$$q = \frac{(U_b - U_a) \times 2 \pi \ell}{\frac{\ln \frac{r_m}{r_a}}{k_1} + \frac{\ln \frac{r_b}{r_m}}{k_2}} \quad (4-15)$$

A expansão do termo logarítmico em série de

Taylor é dada por (SPIEGEL¹²) .

$$\ln x = 2 \left\{ \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \dots \right\} \quad x > 0$$

(4-16)

Desde que os elementos tenham dimensões radiais pequenas, e que $r_a \neq 0$, pode-se afirmar:

$$\frac{r_m}{r_a} \approx \frac{r_b}{r_m} \approx 1 \quad (4-17)$$

Pode-se, então, utilizar apenas o primeiro termo da série em (4-16), e tem-se:

$$\ln \frac{r_m}{r_a} \approx 2 \left\{ \frac{\frac{r_m}{r_a} - 1}{\frac{r_m}{r_a} + 1} \right\} \quad (4-18.a)$$

$$\ln \frac{r_b}{r_m} \approx 2 \left\{ \frac{\frac{r_b}{r_m} - 1}{\frac{r_b}{r_m} + 1} \right\} \quad (4-18.b)$$

Substituindo-se (4-18) em (4-15) e rearrumando-se, chega-se a:

$$q \equiv \frac{(U_b - U_a) \times 2 \pi \ell}{\frac{2(r_m - r_a)}{k_1(r_m + r_a)} + \frac{2(r_b - r_m)}{k_2(r_2 + r_a)}} \quad (4-19)$$

Observa-se que:

$$r_m - r_a = d_1 \quad (4-20.a)$$

$$r_b - r_m = d_2 \quad (4-20.b)$$

Utilizando-se a consideração em (4-17), tem-se:

$$r_a + r_m \approx 2 r_m \quad (4-21.a)$$

$$r_b + r_m \approx 2 r_m \quad (4-21.b)$$

Com (4-20) e (4-21) a relação (4-19) toma a forma:

$$q \equiv \frac{(U_b - U_a) \times 2 \pi \ell r_m \times k_1 k_2}{k_2 d_1 + k_1 d_2} \quad (4-22)$$

A validade da equação acima restringe-se a elementos de pequenas dimensões na direção radial, sendo interessante a observação da similaridade da mesma com (4-2).

Com as definições para U_1 , U_2 , k_{eq} e fluxo q_h , respectivamente em (4-3), (4-4) e (4-6), e mudando-se o centro de troca de calor para o centro de gravidade da semiseção

transversal dos anéis mostrados na figura 4.2, chega-se ao seguinte valor para q_h :

$$q_h = \frac{\frac{U_b - U_a}{d_{12}}}{S \times k_{eq}} = \frac{\frac{U_b + U_m}{2} - \frac{U_a + U_m}{2}}{\frac{\frac{1}{2} (d_1 + d_2)}{2 \pi r_m \ell \times 2 \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}} \quad (4-23)$$

ou seja,

$$q_h = \frac{(U_b - U_a) \times 2\pi\ell r_m \times k_1 k_2}{(d_1 + d_2) (k_1 + k_2)} \quad (4-24)$$

Como o produto $2\pi\ell r_m$ é a superfície de contato dos cilindros, permanecem válidas as definições em (4-9) e pode-se fazer uma análise comparativa de (4-22) e (4-24) idêntica à já feita para (4-2) e (4-8).

Conclui-se pela possibilidade de estabelecer-se o fluxo de calor entre os dois elementos mostrados na figura 4.3, também pela relação (4-6).

Definindo-se para dois elementos quaisquer "i" e "j":

- S_{ij} - Área de contato
 d_{ij} - Distância entre centros de troca de calor
 k_i, k_j - Condutividades térmicas
 U_i, U_j - Temperaturas médias
 q_{ij}^c - Fluxo de calor por condução

Tem-se, de acordo com (4-6), que:

$$q_{ij}^c = \frac{k_{ij} S_{ij}}{d_{ij}} (U_j - U_i) \quad (4-25)$$

onde k_{ij} é a condutividade equivalente dada por (4-4).

Pode-se definir o coeficiente de troca de calor por condução como:

$$c_{ij}^c = \frac{k_{ij} S_{ij}}{d_{ij}} \quad (4-26)$$

chegando-se a:

$$q_{ij}^c = c_{ij}^c (U_j - U_i) \quad (4-27)$$

4.2.2 CONVEÇÃO

O fenômeno da troca de calor por convecção ocorre entre um elemento "i" pertencente à fronteira do sólido estudado, e outro "j" que descreve as características de um fluido de troca de calor.

Os fatores físicos envolvidos no caso, são:

- S_{ij} - Área de troca de calor
- h_{ij} - Coeficiente de convecção na interface de "i" e "j"
- U_i - Temperatura do sólido "i"
- U_j - Temperatura do fluido "j", em um ponto distante da superfície sólida.

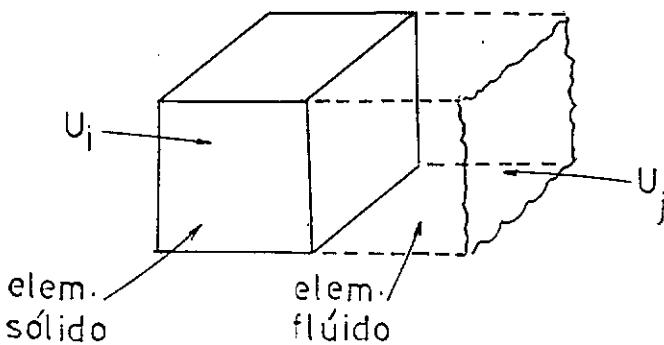


FIGURA 4.4 - (Interação entre elemento sólido na fronteira e elemento fluido)

O fluxo de calor por convecção q_{ij} entre os dois elementos genéricos mostrados na figura 4.4 é aproximado por:

$$q_{ij} = h_{ij} S_{ij} (U_j - U_i) \quad (4-28)$$

Convém notar que a temperatura U_i é a média daquelas na extremidade do elemento (ver (4-3)). Assim comete-se uma impropriedade, pois dever-se-ia considerar a temperatura na parede de contato sólido-fluido. Desde que os elementos sejam convenientemente pequenos, e que a variação da temperatura

próximo à fronteira não seja demasiadamente acentuada, o erro introduzido é aceitável.

Definindo-se, então, o coeficiente de troca de calor por convecção c_{ij}^V como:

$$c_{ij}^V = h_{ij} S_{ij}, \quad (4-29)$$

obtém-se por substituição de (4-29) em (4-28),

$$q_{ij} = c_{ij}^V (U_j - U_i) \quad (4-30)$$

4.2.3 RADIAÇÃO

A troca de calor por radiação q_{ij}^r entre os dois elementos "i" e "j" é dada por:

$$q_{ij}^r = A_{ij}^r E_{ij} \{ (U_j + U_{ABS})^4 - (U_i + U_{ABS})^4 \} \quad (4-31)$$

onde

A_{ij}^r - área projetada de troca de calor associada a "i" e "j"

E_{ij} - fator que leva em conta a emissividade térmica e a constante de Stefan Boltzmann

U_i, U_j - temperaturas

U_{ABS} - parcela constante para mudança de unidades de temperatura.

A equação (4-31) pode ser fatorada, obtendo

se

$$q_{ij}^r = A_{ij}^r E_{ij} \{ (U_j + U_{ABS})^2 + (U_i + U_{ABS})^2 \} \times \\ \times \{ (U_j + U_{ABS}) + (U_i + U_{ABS}) \} \times (U_j - U_i) \quad (4-32)$$

Definindo-se o coeficiente de troca de calor por radiação

$$c_{ij}^r = A_{ij}^r E_{ij} \{ (U_j + U_{ABS})^2 + (U_i + U_{ABS})^2 \} \times \\ \times \{ (U_j + U_{ABS}) + (U_i + U_{ABS}) \} \quad (4-33)$$

Tem-se, então:

$$q_{ij}^r = c_{ij}^r (U_j - U_i) \quad (4-34)$$

Observa-se que o coeficiente c_{ij}^r é diretamente dependente das temperaturas dos elementos a princípio com uma delas, ao menos, indeterminada. Este fato obriga a utilização de esquemas iterativos como mostrados na seção 3.5.1 para a solução de problemas onde toma parte o fenômeno radiativo.

4.3 CARACTERIZAÇÃO DOS ELEMENTOS E LIGAÇÕES TÉRMICAS

O domínio, como já citado na seção 4.1, é dividido em um total de G elementos. Este conjunto constitui-se de dois sub-grupos, ou seja, aqueles com temperaturas a serem determinadas e outro com elementos de temperatura conhecida, oriundos da discretização do contorno.

Os dois sub-conjuntos tem os totais de G^f e G^d elementos, onde:

G^f - nº de nós com temperaturas fixas(*)

G^d - nº de nós com temperaturas desconhecidas
(a serem determinadas)

Um conceito utilizado no presente método é o de ligações térmicas, também chamado de conexões térmicas.

Cada ligação consiste numa dupla de elementos trocando calor. O total das ligações modela o problema extendido a todo o domínio.

1	2	3	10
4	5	6	11
7	8	9	12

FIGURA 4.5 - (Divisão do Contínuo)

(*) As palavras nós e elementos são utilizadas indistintamente para indicar um subdomínio no presente método.

Observando-se a figura acima, que pode ser uma placa plana trocando calor por convecção com o exterior por um dos lados apenas, formam conexões térmicas os elementos 1 e 2; 1 e 4; 3 e 10; etc. As ligações térmicas podem representar troca por condução, convecção ou radiação de acordo com a seção 4.1, devendo as mesmas terem índices associados a fim de serem diferenciadas..

Para cada tipo de ligação deve-se considerar os diferentes fatores físicos envolvidos como condutividade, convectividade, emissividade, etc., a fim de serem calculados os coeficientes c_{ij}^c , c_{ij}^v e c_{ij}^r definidos em (4-26), (4-29) e (4-33).

Para cada elemento com temperatura a determinar deve-se definir as conexões térmicas associadas. Os elementos com temperaturas fixas tem sua influência dada pelas conexões com elementos de temperaturas desconhecidas, não tendo sentido definir-se a troca de calor entre dois elementos com temperaturas determinadas.

O total de conexões térmicas associadas ao elemento "i" será n_i .

O total n_i , será, por sua vez, dado pela soma abaixo:

$$n_i = n_i^c + n_i^v + n_i^r \quad (4-35)$$

onde n_i^c , n_i^v e n_i^r são respectivamente os números de elementos

com os quais um dado elemento troca de calor por condução, convecção e radiação. Para o elemento (6) na figura 4.5, por exemplo,

$$n_i^c = 3$$

$$n_i^v = 1 ,$$

não existindo radiação.

Os números n_i^c , n_i^v e n_i^r são, por sua vez, a soma de conexões térmicas de "i" com nós de temperaturas conhecidas ou desconhecidas

$$n_i^c = n_i^{c,f} + n_i^{c,d}$$

$$n_i^v = n_i^{v,f} + n_i^{v,d}$$

$$n_i^r = n_i^{r,f} + n_i^{r,d} \quad (4-36)$$

Onde os índices "f" e "d" indicam temperaturas fixas e desconhecidas.

Voltando-se, mais uma vez, para a figura 4.5, desde que os nós de (1) a (9) tenham temperaturas desconhecidas e os nós de (10) a (13) temperaturas fixas:

$$n_6^{c,f} = 0 ; \quad n_6^{c,d} = 3$$

$$n_6^{v,f} = 1 ; \quad n_6^{v,d} = 0$$

4.4 EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

A lei de Fourier para a massa contida em um elemento é traduzida por:

"O fluxo de calor total somado à geração de calor em cada elemento é proporcional à taxa de variação da temperatura no mesmo."

O fluxo de calor total q em um determinado elemento, é proveniente dos três possíveis modos de troca, q_i^c ; q_i^v e q_i^r , definidos em 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3, ou seja

$$q_i = q_i^c + q_i^v + q_i^r \quad (4-37)$$

onde q_i^c , q_i^v e q_i^r são respectivamente os fluxos térmicos em "i" por condução, convecção e radiação.

Com as grandezas abaixo relativas ao elemento i ,

ρ_i - peso específico

v_i - volume específico

c_{p_i} - calor específico

Q_i - geração de calor(*)

(*) Neste termo além da geração de calor clássica, pode-se considerar uma troca por unidade de área q_k a uma taxa conhecida multiplicando-se q_k pela área do elemento onde se dá a troca.

e a equação (4-37), pode-se afirmar para "i", de acordo com a lei de Fourier:

$$q_i^c + q_i^v + q_i^r + Q_i = \alpha_i \frac{d U_i}{dt} \quad (4-38)$$

onde α_i é a constante de proporcionalidade dada por

$$\alpha_i = \rho_i v_i c p_i \quad (4-39)$$

Os valores dos fluxos q_i^c , q_i^v e q_i^r serão a soma dos fluxos oriundos das diversas conexões térmicas, ou seja:

$$q_i^c = \sum_{j=1}^{n_i^c} q_{ij}^c \quad (4-40.a)$$

$$q_i^v = \sum_{j=1}^{n_i^v} q_{ij}^v \quad (4-40.b)$$

$$q_i^r = \sum_{j=1}^{n_i^r} q_{ij}^r \quad (4-40.c)$$

Substituindo-se (4-27), (4-30) e (4-34) na correspondente equação de (4-40), chega-se a:

$$q_i^c = \sum_{j=1}^{n_i^c} c_{ij}^c (U_j - U_i) \quad (4-41.a)$$

$$q_i^v = \sum_{j=1}^{n_i^v} c_{ij}^v (U_j - U_i) \quad (4-41.b)$$

$$q_i^r = \sum_{j=1}^{n_i^r} c_{ij}^r (U_j - U_i) \quad (4-41.c)$$

De acordo com (4-36) os somatórios acima podem ser separados, resultando em:

$$q_i^c = \sum_{j=1}^{n_i^c, f} c_{ij}^c (U_j - U_i) + \sum_{j=1}^{n_i^c, d} c_{ij}^c (U_j - U_i) \quad (4-42.a)$$

$$q_i^v = \sum_{j=1}^{n_i^v, f} c_{ij}^v (U_j - U_i) + \sum_{j=1}^{n_i^v, d} c_{ij}^v (U_j - U_i) \quad (4-42.b)$$

$$q_i^r = \sum_{j=1}^{n_i^r, f} c_{ij}^r (U_j - U_i) + \sum_{j=1}^{n_i^r, d} c_{ij}^r (U_j - U_i) \quad (4-42.c)$$

Substituindo-se as relações acima em (4-38)

chega-se a:

$$\begin{aligned}
& - \left[\sum_{j=1}^{n_i^c, d} c_{ij}^c U_i + \sum_{j=1}^{n_i^c, f} c_{ij}^c U_i + \sum_{j=1}^{n_i^v, d} c_{ij}^v U_i + \sum_{j=1}^{n_i^v, f} c_{ij}^v U_i + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=1}^{n_i^r, d} c_{ij}^r U_i + \sum_{j=1}^{n_i^r, f} c_{ij}^r U_i \right] + \\
& + \sum_{j=1}^{n_i^c, d} c_{ij}^c U_j + \sum_{j=1}^{n_i^v, d} c_{ij}^v U_j + \sum_{j=1}^{n_i^r, d} c_{ij}^r U_j + \\
& + \sum_{j=1}^{n_i^c, f} c_{ij}^c U_j + \sum_{j=1}^{n_i^v, f} c_{ij}^v U_j + \sum_{j=1}^{n_i^r, f} c_{ij}^r U_j + \\
& + Q_i = \alpha_i \frac{d U_i}{dt} \quad (4-43)
\end{aligned}$$

Dividindo-se ambos os lados de (4-43) por

α_i e rearrumando-se,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\alpha_i} \left\{ - \left[\sum_{j=1}^{n_i^c} c_{ij}^c + \sum_{j=1}^{n_i^v} c_{ij}^v + \sum_{j=1}^{n_i^r} c_{ij}^r \right] U_i + \right. \\
 & + \left. \sum_{j=1}^{n_i^{c,d}} c_{ij}^c U_j + \sum_{j=1}^{n_i^{v,d}} c_{ij}^v U_j + \sum_{j=1}^{n_i^{r,d}} c_{ij}^r U_j \right\} + \\
 & + \frac{1}{\alpha_i} \left\{ \sum_{j=1}^{n_i^{c,f}} c_{ij}^c U_j + \sum_{j=1}^{n_i^{v,f}} c_{ij}^v U_j + \sum_{j=1}^{n_i^{r,f}} c_{ij}^r U_j \right\} + \\
 & Q_i \quad \left. \right\} = \frac{d U_i}{dt} \quad i = 1, \dots, G \quad (4-44)
 \end{aligned}$$

Um fato importante é a identificação de (4-44) como uma relação matricial da forma

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\mathbf{U}\} + \{\mathbf{R}\} = \{\dot{\mathbf{U}}\} \quad (4-45)$$

onde os coeficientes das matrizes envolvidas são:

a) Matriz $[\mathbf{M}]$

$$M_{ii} = - \frac{1}{\alpha_i} \left[\sum_{j=1}^{n_i^c} c_{ij}^c + \sum_{j=1}^{n_i^v} c_{ij}^v + \sum_{j=1}^{n_i^r} c_{ij}^r \right]$$

$$M_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se o nó "i" não troca calor com "j"} \\ \frac{c_{ij}^C}{\alpha_i} \text{ ou } \frac{c_{ij}^V}{\alpha_i} \text{ ou } \frac{c_{ij}^R}{\alpha_i}, \text{ caso "i" troque calor} \\ \text{com "j", por um dos modos de troca} \end{cases}$$

b) VETOR $\{R\}$

$$R_i = \frac{1}{\alpha_i} \left\{ \sum_{j=1}^{n_i^C,f} c_{ij}^C U_j + \sum_{j=1}^{n_i^V,f} c_{ij}^V U_j + \sum_{j=1}^{n_i^R,f} c_{ij}^R U_j + Q_i \right\}$$

c) VETOR $\{\dot{U}\}$

$$\dot{U}_i = \frac{d U_i}{dt}$$

4.5 SOLUÇÃO DO PROBLEMA

A exemplo do apresentado no capítulo III, a equação (4-45) é utilizada para regimes transientes, em geral, podendo recair no caso de regime permanente.

4.5.1 REGIME PERMANENTE

Para um problema de calor permanente a equa

ção (4-45) reduz-se a uma forma similar a obtida em (3-51), sendo aplicável o método iterativo na seção 3.5.1. Caso considere-se apenas condução e convecção a variação das propriedades físicas não é, normalmente, acentuada, o que permite, na maioria dos casos, dispensar-se a iteração. Quando existe no sistema estudado trocas por radiação, a utilização do esquema iterativo mostrado na figura 3.3 é indispensável por ser o coeficiente c_{ij}^r definido em (4-33), altamente variável com a temperatura.

4.5.2 REGIME TRANSIENTE

Neste caso reside uma das vantagens do presente método relativamente à formulação por elementos finitos.

Comparando-se as equações (3-50) e (4-45) observa-se que a segunda, obtida neste capítulo, tem o vetor derivada temporal da temperatura independente, ao contrário do que ocorre com a equação obtida pelo método dos elementos finitos.

Este fato aparentemente sem maiores implicações, permite que (4-45) seja eficientemente desenvolvida ao longo do tempo pelo método de Runge-Kutta apresentado no apêndice B.

O método de Runge-Kutta evita a inversão de matriz (ou solução do sistema linear) a cada iteração, como acontece com (3-53) ou (3-56) obtidas a partir de (3-50).

Para efeito de comparação, o erro obtido em cada iteração de (3-50) é proporcional ao quadrado do espaçoamento de tempo, ao passo que o erro de (4-45) desenvolvida pelo método de Runge-Kutta de 4^a ordem é proporcional à quarta potência do intervalo de tempo utilizado, aliado ao fato de evitar-se inversões de matrizes.

Em problemas onde são necessários grande número de passos, as constatações acima são de importância considerável ao ponto de vista de precisão e esforço de cálculo.

4.6 EXTENSÃO DO MÉTODO PARA PROBLEMAS COM TRANSFERÊNCIA DE MASSA

Problema muito encontrado na engenharia é o de interação sólido-fluido por meio de tubulações, como na figura abaixo.

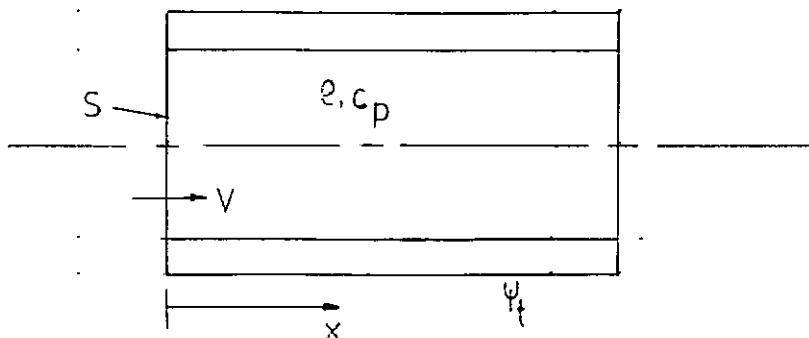


FIGURA 4.6 - (Interação sólido-fluido)

Nestes casos, se a seção transversal S e a massa específica ρ forem constantes, a temperatura do fluido ψ_f deve satisfazer em qualquer posição longitudinal x e num deter-

minado instante, à seguinte equação diferencial (ARPACI⁹):

$$\frac{\partial \psi_f}{\partial t} + V \frac{\partial \psi_f}{\partial x} + b (\psi_f - \psi_t) = 0 \quad (4-46)$$

onde:

$$b = \frac{h P}{\rho c_p S}$$

P - perímetro da seção

h - coeficiente convectivo

c_p - calor específico do fluido

S - área transversal

ψ_f - temperatura do fluido

ψ_t - temperatura do tubo

V - velocidade do fluido

De acordo com a filosofia do método do equacionamento finito, o fluido no interior do tubo pode ser considerado como o conjunto de elementos de dimensões finitas, mostrado na figura abaixo.

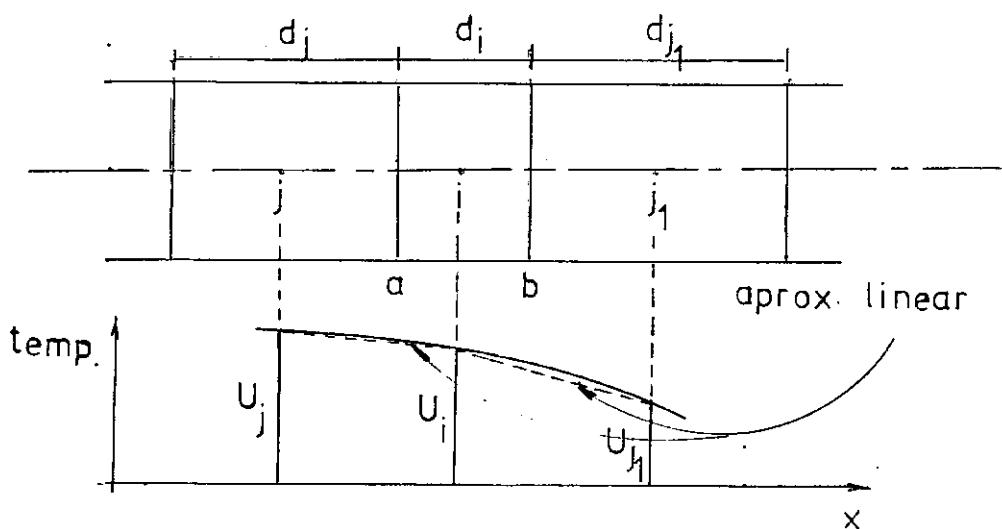


FIGURA 4.7 - (Discretização do fluido)

As temperaturas no centro dos elementos "i", "j" e "j₁" serão U_i, U_j e U_{j1}.

As temperaturas nas fronteiras a e b do elemento "i" (fig. 4.7), serão aproximadas por:

$$U_a = U_i + (U_j - U_i) \frac{d_i}{d_i + d_j} \quad (4-47.a)$$

$$U_b = U_i + (U_{j_1} - U_i) \frac{d_i}{d_i + d_{j_1}} \quad (4-47.b)$$

onde d_i, d_j e d_{j₁} são os comprimentos dos elementos.

Os fluxos de calor por transferência de massa nas posições "a" e "b", mostradas na figura 4.4, serão:

$$q^a = \rho S V c_p U_a \quad (4-48.a)$$

$$q^b = \rho S V c_p U_b \quad (4-48.b)$$

O fluxo por convecção no elemento "i" será:

$$q^v = h S_c (U_c - U_i) \quad (4-49)$$

onde S_c é a superfície de contato sólido-líquido e U_c é a temperatura no tubo, considerada constante ao longo do elemento.

Desprezando-se a troca de calor por condução no fluido, o equilíbrio térmico no elemento "i", será approximado por

$$\rho_i v_i c_{p_i} \frac{\partial U_i}{\partial t} = q^a - q^b + q^v \quad (4-50)$$

Substituindo-se (4-48) e (4-49) em (4-50) e rearrumando-se, chega-se a:

$$\begin{aligned} \rho_i c_{p_i} v_i \frac{\partial U_i}{\partial t} &= \rho_i c_{p_i} S \ell_i \times \frac{V}{d_i + d_j} (U_j - U_i) - \\ &- \rho_i c_{p_i} S \ell_i \times \frac{V}{d_i + d_{j_1}} (U_{j_1} - U_i) + \\ &+ h S_c (U_c - U_i) \end{aligned} \quad (4-51)$$

Utilizando-se (4-39), e observando-se que:

$$S d_i = v_i$$

$$d_i + d_j = 2 d_{ij}$$

$$d_i + d_{j_1} = 2 d_{ij_1},$$

chega-se a:

$$\begin{aligned} \alpha_i \frac{\partial U_i}{\partial t} &= \alpha_i \frac{V}{2d_{ij}} (U_j - U_i) - \alpha_i \frac{V}{2d_{ij_1}} (U_{j_1} - U_i) + \\ &+ h S_c (U_c - U_i) \end{aligned} \quad (4-52)$$

Neste ponto convém fixar que considerando-se as dimensões dos intervalos da figura 4.7 como infinitesimais, a equação (4-52) recai na forma diferencial (4-46), como

não poderia deixar de ser.

Observando-se (4-52) identifica-se a terceira parcela da direita da mesma como uma ligação térmica de convecção cuja influência no sistema pode ser modelada através do desenvolvimento na sub-seção 4.2.2. Os dois termos restantes serão as ligações por transferência de massa. Ou seja,

$$q_{ij}^m = \alpha_i \frac{V}{2d_{ij}} (U_j - U_i) \quad (4-53.a)$$

$$q_{ij_1}^m = \alpha_i \frac{V}{2d_{ij_1}} (U_{j_1} - U_i) \quad (4-53.b)$$

Pode-se, a exemplo do feito para ligações térmicas de condução, convecção e radiação, definir o coeficiente de troca de calor por transferência de massa para dois elementos "i" e "j" ("j", no caso, é o elemento que precede "i" tendo-se como referência a direção da velocidade), como:

$$c_{ij}^m = \alpha_i \frac{V}{2d_{ij}} \quad (4-54)$$

Para os elementos "i" e "j₁" ("j₁" é o elemento que segue "i") tem-se, de acordo com (4-52), que definir o coeficiente de troca de calor com o sinal negativo.

$$c_{ij_1}^m = - \alpha_i \frac{V}{2d_{ij}} \quad (4-55)$$

Com as definições (4-54) e (4-55) chega-se a seguinte formulação para a troca de calor por movimento de

massa para quaisquer dois elementos "i" e "j" oriundos da discretização de um fluido em tubulação.

$$q_{ij}^m = c_{ij}^m (U_j - U_i) \quad (4-56)$$

Observando-se (4-56) constata-se a sua similaridade com (4-27), (4-28) e (4-34), permitindo, este fato, considerar a influência da troca de calor por transferência de massa considerando-se no desenvolvimento feito para a obtenção de (4-44) o termo c_{ij}^m , da mesma maneira como o foram c_{ij}^c , c_{ij}^v e c_{ij}^r e definindo-se n_i^m como o total de ligações térmicas de um elemento devido ao movimento do fluido.

CAPÍTULO V

ESTRATÉGIA PARA A UTILIZAÇÃO DO MÉTODO QUASI-FINITO

A finalidade deste capítulo é desenvolver uma formulação para a utilização do método quasi-finito associado a computadores eletrônicos. Parte do trabalho é uma extensão do apresentado por MAZZAWI¹ para regimes permanentes.

5.1 NUMERAÇÃO DOS ELEMENTOS

Como citado no capítulo IV, os elementos no qual o domínio é dividido podem ter temperaturas fixas ou não. O total de elementos deve ser numerado sequencialmente, iniciando-se por aqueles com temperaturas desconhecidas e continuando com os de temperaturas determinadas. Caso no sistema existam tubulações (ver seção 4.6), deve-se numerar os elementos que as discretizam de modo ordenado, isto é, de maneira crescente ou decrescente, mas não necessariamente sequencial.

Estes ordenamentos são necessários para simplificar-se a programação e a identificação de erros.

5.2 PROPRIEDADES FÍSICAS

As propriedades físicas como calor específico, condutividade térmica, densidade, emissividade e coeficiente de convecção, dependem, em geral, da temperatura.

Uma possibilidade simples e eficaz de modela-las é a aproximação linear. A cada tipo de material ou superfície de contato sólido-fluido (no caso de convecção), com diferentes propriedades, associa-se variações desta com a temperatura.

As diferentes aproximações são definidas por dois pontos convenientes, como mostrado na figura 5.1. Com a dupla de pontos escolhida, pode-se definir os coeficientes das funções lineares que devem ser associados a índices para posterior utilização.

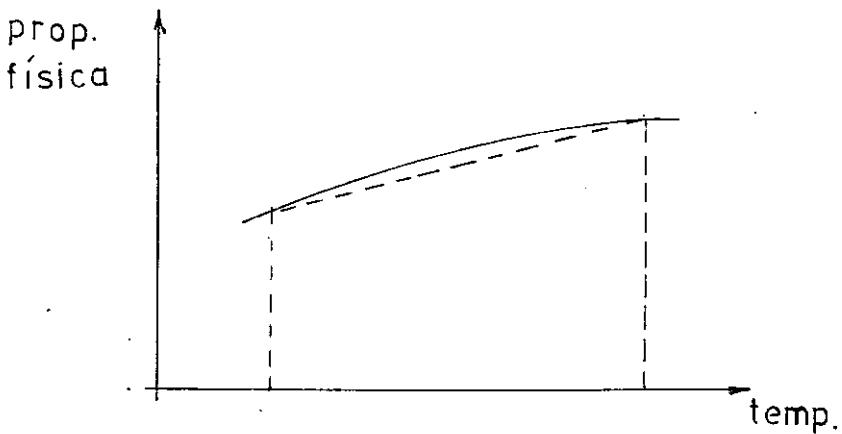


FIGURA 5.1 - (Aproximação linear de uma grandeza física)

5.3 DADOS INICIAIS

Todo problema transiente necessita da defini-

ção do campo inicial de temperaturas. O mesmo pode ser estabelecido, associando-se a cada elemento, numerado como exposto na seção 5.1, o valor da temperatura inicial.

Para problemas em regime permanente, o campo inicial é necessário nos elementos com temperaturas a determinar, apenas para "dar-se partida" no processo iterativo da procura da solução (ver figura 3.4).

O campo inicial pode ser obtido, entre outros modos, atribuindo-se a cada elemento a média das temperaturas dos elementos do contorno, que são conhecidas.

Caso haja geração de calor procede-se para a sua definição de modo idêntico ao citado para o campo inicial, atribuindo-se o seu valor a cada elemento.

O tipo de material pode variar ao longo do domínio, devendo-se associar a cada elemento o índice da curva de aproximação das propriedades físicas do mesmo em função da temperatura, como exposto em 5.2.

O volume dos elementos, são, também, fornecidos como dados iniciais.

5.3 DEFINIÇÃO DAS LIGAÇÕES TÉRMICAS

Como discutido na seção 4.3 a interação entre os elementos em que se divide o corpo estudado é modelada por conexões térmicas que devem ser diferenciadas por meio de índices. Os adotados são:

- a) convecção - 1
- b) condução - 2
- c) radiação - 3
- d) transferência de massa - 4

Os totais de ligações térmicas máximas que um elemento pode ter são limitados respectivamente a 3, 6, 8 e 2 para convecção, condução, radiação e transferência de massa. O número de 3 ligações de convecção refere-se a um cubo no canto de um sólido tridimensional interagindo com o meio fluido por três faces; o de 6 ligações de condução, a um cubo no interior de um sólido; o de 8, um número considerado suficiente para modelar o fluxo de radiação entre um elemento e o resto do sistema; e, finalmente, o de 2 ligações por transferência de massa que é correspondente às ligações possíveis dentro de um tubo.

As características associadas a cada modo de troca de calor serão:

- a) convecção - Numeração dos elementos envolvidos:
 - Área de troca de calor
 - Índice indicativo da curva de aproximação do coeficiente convectivo.

(ver seção 5.2)

- Índice 1 (relativo ao modo de troca)

- b) condução:
- Numeração dos elementos envolvidos
 - Área de troca de calor
 - Distância entre centros de troca de calor
 - Índice 2 (indicativo do modo de troca)

OBS.: A condutividade equivalente será calculada em função da condutividade de cada elemento, de acordo com a definição 4.4.

- c) radiação:
- Numeração dos elementos envolvidos
 - Área equivalente de troca de calor
 - Índice indicativo da curva de aproximação da emissividade
 - Índice 3 (relativo ao modo de troca)

- d) transferência de massa:
- Numeração dos elementos envolvidos
 - Velocidade do fluido
 - Distância entre centros de troca
 - Índice indicativo da curvas das propriedades físicas (calor e massa específica)
 - Índice 4 (indicativo do modo de troca).

OBS.: A velocidade deve ser fornecida como positiva caso a numeração dos elementos oriundos da discretização do fluido na tubulação estudada seja crescente com a sua direção e negativa em caso contrário. (Ver definição do coeficiente de troca de calor por transferência de massa em (4-54) e (4-55)).

5.4 ARMAZENAMENTO DE DADOS DE CONEXÕES TÉRMICAS

Além dos dados iniciais citados na seção 5.2, existem aqueles referentes às conexões térmicas. A forma de armazenamento destes é importante para a funcionalidade de um programa baseado no método quasi-finito.

Duas matrizes C e N são utilizadas. A primeira é reservada para as características físicas com as quais se calcula os coeficientes de troca de calor definidos em (4-26), (4-29), (4-33), (4-54) e (4-55) (a excessão das temperaturas no caso de radiação), e na matriz N são mantidos os dados de numeração dos elementos envolvidos em ligações térmicas.

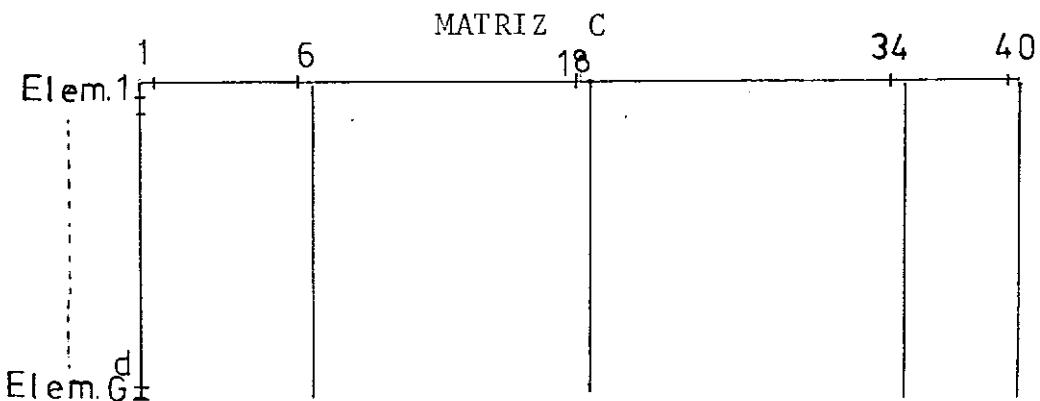
Como o balanço térmico é feito para os elementos com temperaturas desconhecidas, apenas (ver equação (4-45)), os dados de conexões térmicas são armazenados de modo associado a estes elementos. Assim, em cada linha das matrizes C e N são mantidos os dados correspondentes ao elemento com temperatura desconhecida de mesma numeração que a referida linha. Por conseguinte, o total de linhas das matrizes C e N é função do

valor G^d definido na seção 4.3.

As duas matrizes de armazenamento são divididas em regiões associadas a cada modo de troca de calor, como pode ser visto nas figuras 5.2 e 5.3. Desde que o máximo de ligações térmicas de convecção é 3, e para o cálculo do coeficiente de troca de calor c_{ij}^V (ver (4-29)) necessita-se da área de contato e do índice da curva approximativa do coeficiente convectivo (ver seção precedente), é reservado o total de 6 colunas (2 para cada ligação) na matriz C. Argumentos semelhantes levam à reserva de 12 colunas para condução, 16 para radiação e 6 para ligações envolvendo transferência de massa.

Da mesma forma, guarda-se as 4 primeiras colunas de N para os totais de ligações térmicas associadas a cada elemento, sendo cada coluna reservada para um dos quatro modos de troca previstos.

Os grupos de 3, 6, 8 e 2 colunas seguintes de N são previstas para o armazenamento dos números dos possíveis elementos que formam ligações térmicas respectivamente por convecção, condução, radiação e transferência de massa, com o elemento de mesma numeração que cada linha de N considerada.



Em cada linha são armazenados dados referentes ao elemento "i" como abaixo:

Colunas

- 1 } - Armazenamento dos dados da 1.^a ligação de convenção.
(Coluna 1 - área de troca de calor; coluna 2 - índice da aproximação linear do coeficiente de convenção)
- 2 }
- 3 } - Armazenamento dos dados da 2.^a ligação de convenção.
(Coluna 3 - área de troca de calor; coluna 4 - índice de aproximação linear do coeficiente de convenção)
- 4 }
- 5 }
- 6 }
- 7 } - Armazenamento dos dados da 1.^a ligação de condução.(Coluna 7 - área de troca; coluna 8 - distância entre centros de troca de calor).
- 8 }
- 9 }
- 10 }
- 11 }
- 12 }
- 13 }
- 14 }
- 15 }
- 16 }
- 17 }
- 18 }
- 19 } - Armazenamento dos dados da 1.^a ligação de radiação.(Coluna 19 - área de troca de calor; coluna 20 - fator de emissividade).
- 20 }
- 21 }
- 22 }
- 23 }
- 24 }
- 25 }
- 26 }
- 27 }
- 28 }
- 29 }
- 30 }
- 31 }
- 32 }
- 33 }
- 34 }
- 35 } - Armazenamento dos dados da 1.^a ligação por transferência de massa (Coluna 35 - velocidade; coluna 36 - distância de troca de calor; coluna 37 - índice indicativo das propriedades físicas).
- 36 }
- 37 }
- 38 }
- 39 }
- 40 }

FIGURA 5.2 - (Matriz de armazenamento dos dados físicos)

MATRIZ N

	1	4	7	13	21	23
Elem. 1						
Elem. G ^d						

Em cada linha são armazenados dados referentes ao elemento "i" como descrito abaixo:

Coluna

- 1 - Total de ligações de convecção
- 2 - Total de ligações de condução
- 3 - Total de ligações de radiação
- 4 - Total de ligações de transferência de massa
- 5 - Numeração da 1^a ligação de convecção
- 6 - Numeração da 2^a ligação de convecção
- 7 - Numeração da 3^a ligação de convecção
- 8 - Numeração da 1^a ligação de condução
- 9 - Numeração da 2^a ligação de condução
-
-
-
- 13 - Numeração da 6^a ligação de condução
- 14 - Numeração da 1^a ligação de radiação
-
-
- 21 - Numeração da 8^a ligação de radiação
- 22 - Numeração da 1^a ligação de transferência de massa
- 23 - Numeração da 2^a ligação de transferência de massa

FIGURA 5.3 - (Matriz de armazenamento de dados de numeração)

Os dados são colocados sequencialmente em C e N a medida que são definidos (ou lidas por intermédio de cartões) nas conexões térmicas. É feita, inicialmente, a verificação da coerência dos dados de numeração, sendo recusados erros do seguinte tipo:

- Ligações térmicas entre elementos com temperaturas conhecidas (facilmente identificável desde que seja seguido o procedimento para a numeração citado na seção 5.1).

- Ligação entre um elemento consigo mesmo.

Após esta fase verifica-se o modo de troca de calor utilizado (1, 2, 3 ou 4). Para o elemento de menor numeração incrementa-se de uma unidade o valor do total de ligações térmicas em uma das quatro colunas de N, na linha de mesma numeração que este elemento e guarda-se o número do outro na coluna livre mais a esquerda da seção de N reservada para o modo de troca (ver figura 5.3). Procede-se de maneira similar com os dados físicos, para o armazenamento na matriz C.

Completado o processo para o elemento de mais baixa numeração, verifica-se se o de maior número pertence ao sub-conjunto dos elementos de temperaturas desconhecidas. Em caso afirmativo, repete-se o processo descrito acima destinando-se os dados, para a linha de C ou N correspondente a este elemento. Caso contrário, ou seja, o elemento pertence ao contorno, não se armazenam dados, passando-se à outra ligação térmica. Um fluxograma pode ser visto na figura 5.4.

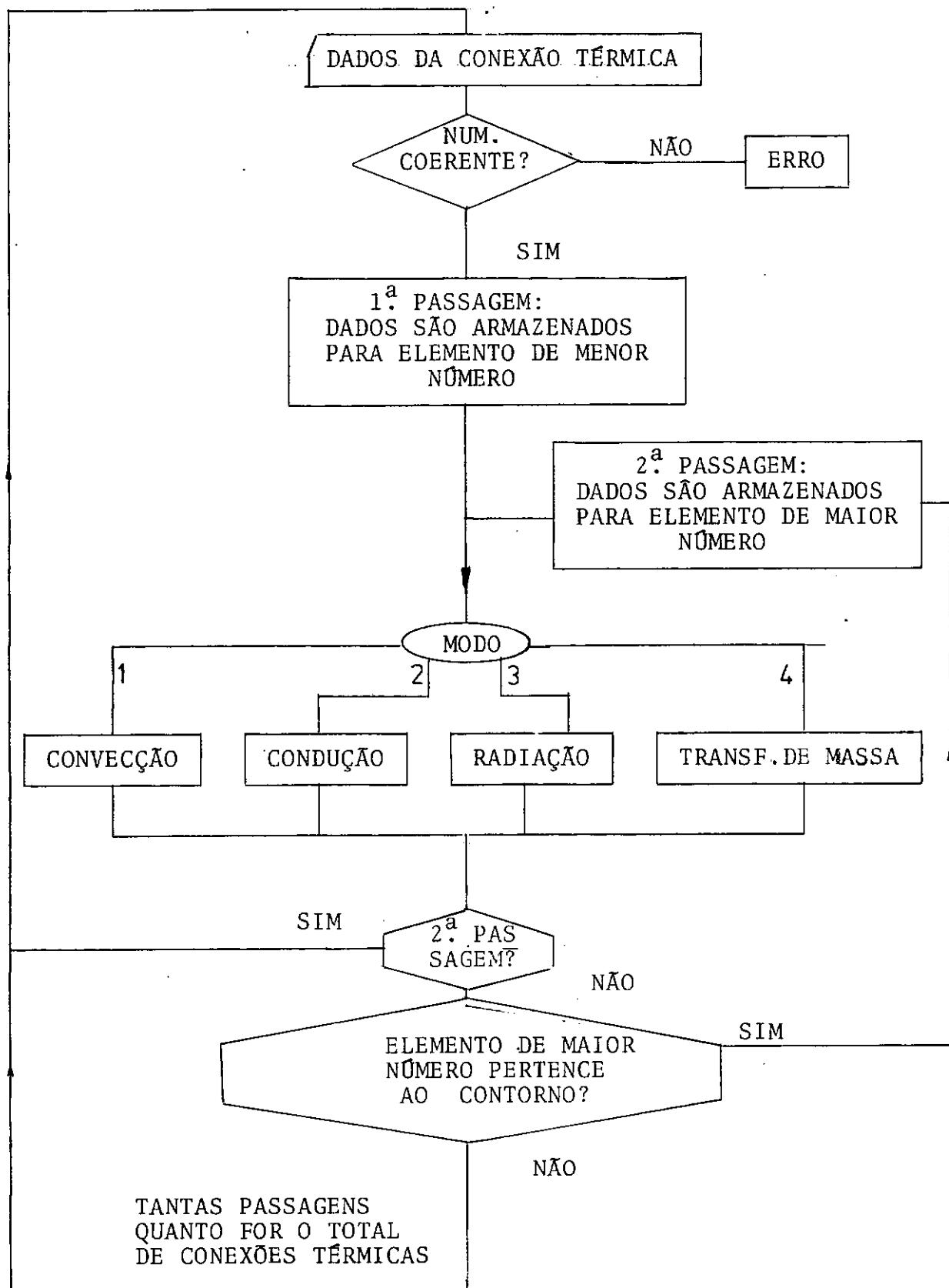


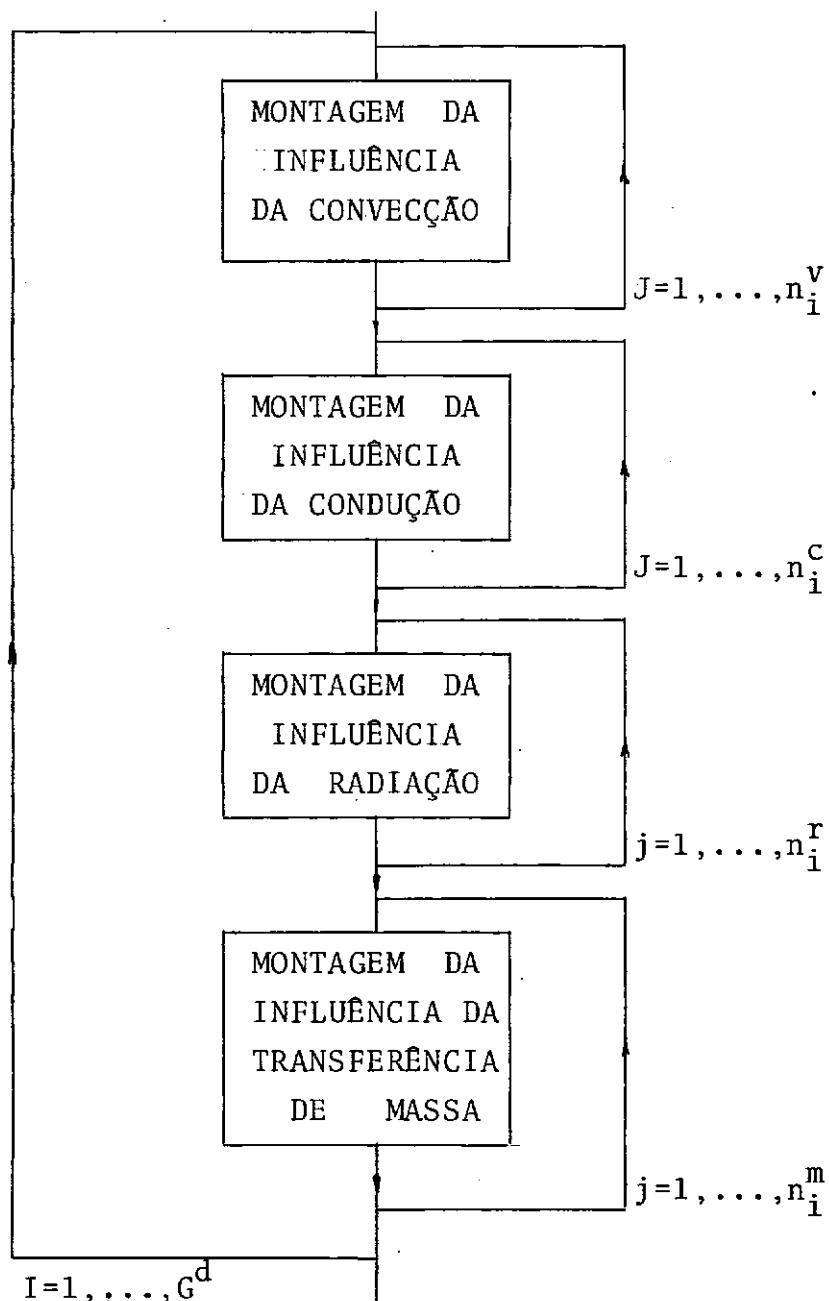
FIGURA 5.4 - (Fluxograma para armazenamento de dados de conexões térmicas)

5.5 MONTAGEM DO SISTEMA LINEAR

Em geral as propriedades físicas envolvidas variam com a temperatura, implicando na variação dos coeficientes de troca de calor, o que traz a necessidade de montagem das matrizes em (4-45) sucessivamente para os campos de temperatura que se obtém ou pelo processo iterativo para regimes permanentes, ou pela evolução do regime transiente (ver seções 4.5.1 e 4.5.2).

O estabelecimento das matrizes coeficientes da equação (4-45) é feito linha a linha, ou seja, compõe-se para cada elemento com temperatura desconhecida a equação (4-44) utilizando-se os dados físicos e de numeração contidos nas matrizes C e N apresentadas na seção precedente.

Como mostrado na figura 5.5 faz-se um circuito percorrendo todos os elementos com temperaturas desconhecidas, sendo que em cada volta obtém-se uma linha das matrizes do sistema (4-45). Dentro do circuito exterior existem quatro outros percorrendo o total de ligações térmicas de cada modo de troca (este total fica armazenado em uma das quatro primeiras colunas de N). Em cada volta dos circuitos internos obtém-se a numeração do elemento envolvido na ligação térmica na própria matriz N (ver fig. 5.3), sendo os dados físicos necessários para o cálculo de c_{ij} (coeficiente de troca de calor por um dos quatro modos previstos) obtidos na matriz C. Observa-se que c_{ij}^r é função, ainda, da temperatura dos elementos que formam a ligação térmica para o fluxo por radiação.



Obs. 1: G^d , n_i^V , n_i^C , n_i^r e n_i^m estão definidos no Capítulo IV.

Obs. 2: Os valores de n_i^C , n_i^r e n_i^m ficam nas 4 primeiras colunas da linha "i" da matriz N.

FIGURA 5.5 (Montagem do sistema)

A localização dos dados em C e N é fácil, uma vez que o armazenamento nas duas matrizes é feita de maneira sequencial, permitindo o acesso a estes dados, seguindo-se o ordenamento mostrado na figura 5.2 e 5.3.

5.6 REGIME PERMANENTE

Para problemas em regime permanente o fluxograma básico é o mostrado na sub-seção 3.5.1. Deve-se, porém, ter o cuidado de definir um número máximo de iterações ao fim do qual será interrompido o processo.

Caso as propriedades físicas variem com a temperatura e/ou o problema inclua radiação, será preciso arbitrar-se um campo inicial, sem sentido físico mas necessário para o cálculo dos coeficientes de troca de calor (dependentes da temperatura) ao início do processo iterativo. Uma possibilidade, como já citado, é utilizar-se a média aritmética das temperaturas dos elementos com temperaturas conhecidas.

É preciso, no presente caso, resolver-se um sistema linear a cada iteração. O método utilizado será o de substituição de Gauss cuja descrição pode ser vista em FORSYTHE and MOLER¹³.

O fluxograma utilizado em regime permanente está na figura 5.6.

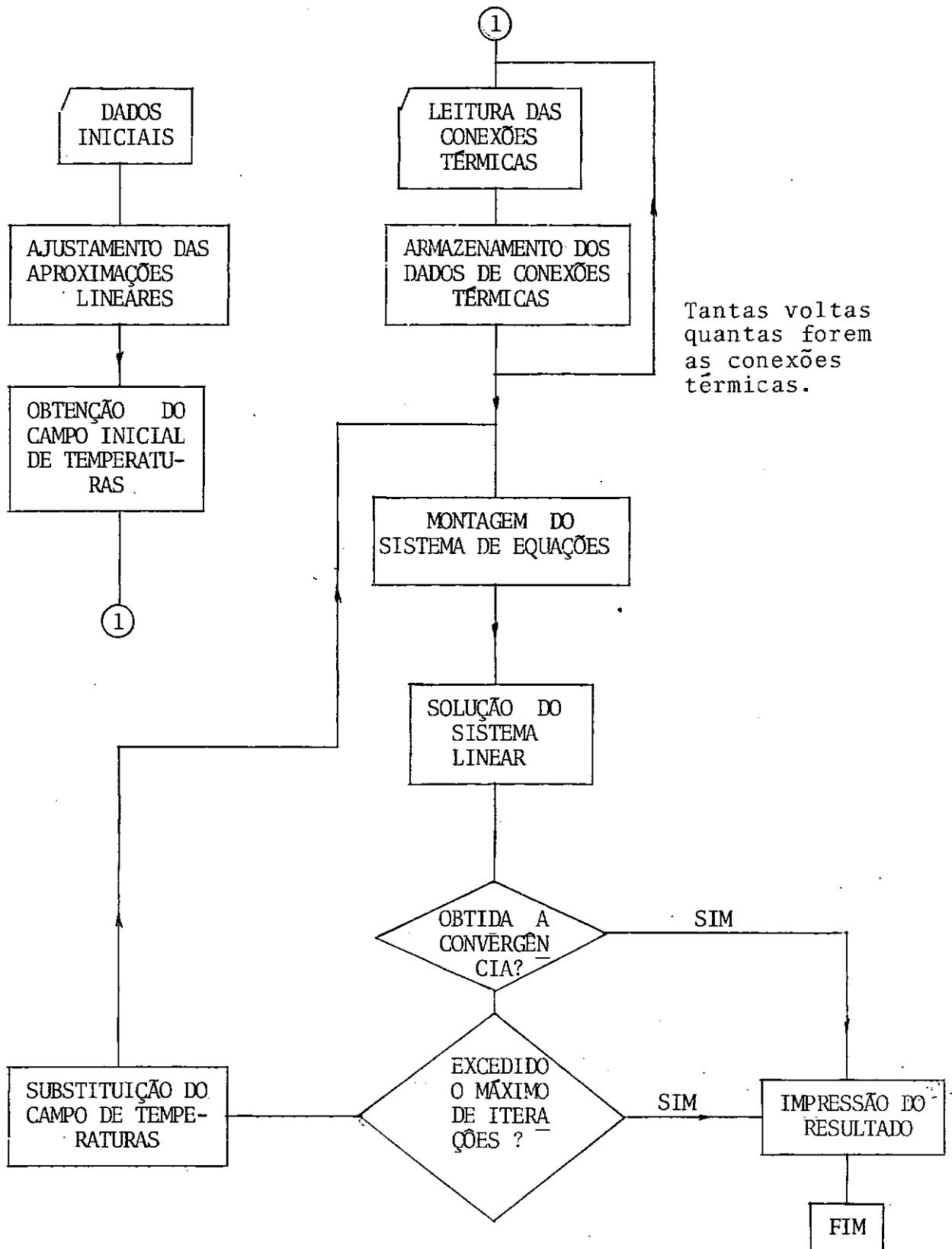


FIGURA 5.6 - (Fluxograma para problema em regime permanente)

5.7 REGIME TRANSIENTE

Um problema transiente é resolvido passo-a-passo. Normalmente, nos instantes iniciais as variações no campo de temperaturas são mais bruscas, sendo conveniente a utilização de menores intervalos de tempo ao iniciar o processo iterativo, aumentando-os progressivamente com o tempo.

Definindo-se um certo número de grupos de espaçamento, pode-se cobrir as diversas faixas de precisão necessárias para a modelagem do problema. Para cada grupo precisa-se estabelecer o espaçamento e o total de passos, como na figura 5.7.

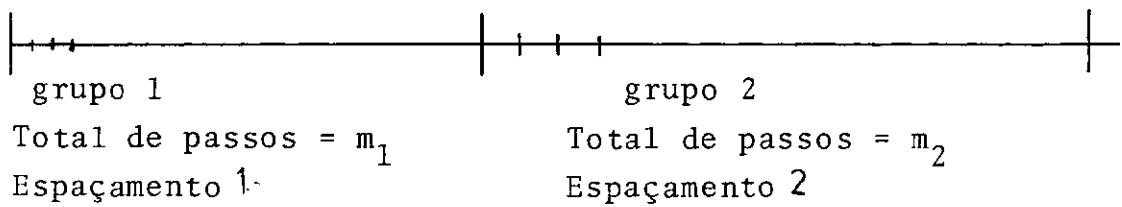


FIGURA 5.7 - (Discretização no domínio de tempo)

De acordo com a seção 4.5.2, o método utilizado para desenvolver o regime transiente será o de Runge-Kutta de 4.^a ordem, com apresentação e fluxograma mostrados no apêndice B.

O algoritmo para a solução de problemas térmicos transientes pelo método quasi-finito está na figura 5.8.

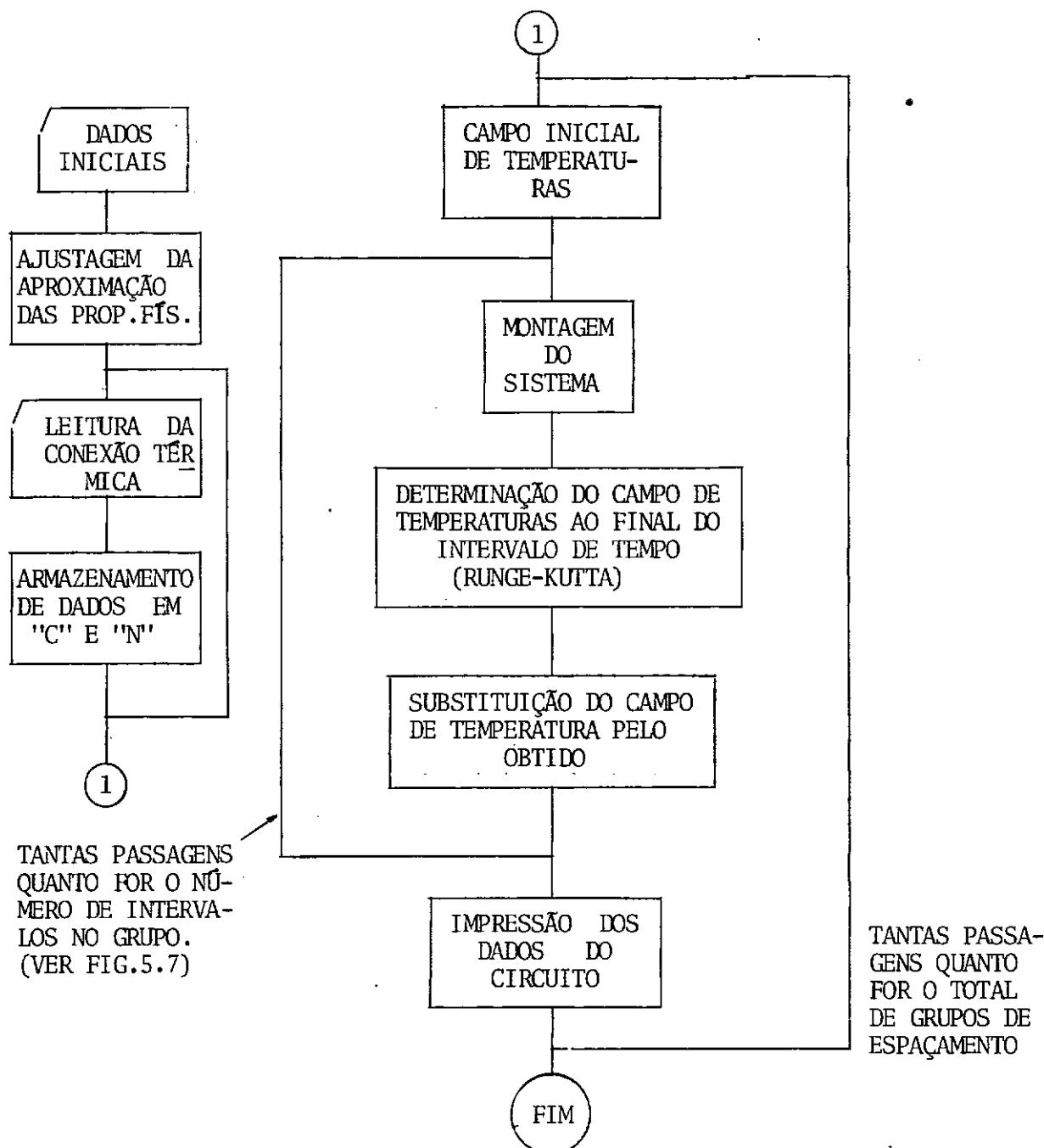


FIGURA 5.8 - (Fluxograma para regime transiente)

CAPÍTULO VI

APLICAÇÕES

Exemplos dos métodos e comparações são apresentados.

6.1 SOLUÇÃO DO CAMPO TÉRMICO TRANSIENTE EM UM CILINDRO IMERSO EM FLUIDO

O primeiro exemplo escolhido é o problema de um cilindro imerso em fluido como na fig. 6.1.

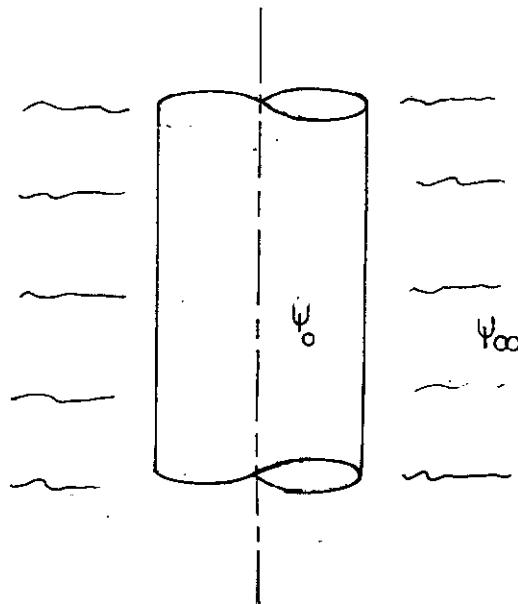


FIGURA 6.1 - (Cilindro imerso em fluido)

A partir de um instante inicial supõe-se o fluido a uma temperatura diferente daquela do cilindro e procura-se o campo de temperaturas no sólido em um instante qualquer.

A solução do problema utilizando-se séries de Fourier-Bessel é conhecida (ARPACI⁹) e dada por:

$$\frac{\psi(r, t) - \psi_\infty}{\psi_0 - \psi_\infty} = 2 \text{Bi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n^2 R^2 + \text{Bi}^2) J_0(\lambda_n R)} \quad (6-1)$$

onde os auto-valores λ_n , são as enésimas raízes da equação

$$(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R) - \text{Bi} J_0(\lambda_n R) = 0 \quad (6-2)$$

As demais variáveis tem as seguintes definições:

r - coordenada radial

t - tempo

$\psi(r, t)$ - temperatura

ψ_∞ - temperatura do fluido em ponto distante do cilindro

ψ_0 - temperatura do cilindro no instante inicial

h - coeficiente de convecção

R - raio do cilindro

k - condutividade do material

Bi - hR/k (Número de Biot)

ρ - massa específica do material do cilindro

C_p - calor específico do material do cilindro

a - $k/(\rho C_p)$ difusividade térmica

O modelo para a solução do problema pelo método dos elementos finitos (Cap. II e III) tem a seguinte forma, lançando-se mão de elementos triangulares axisimétricos

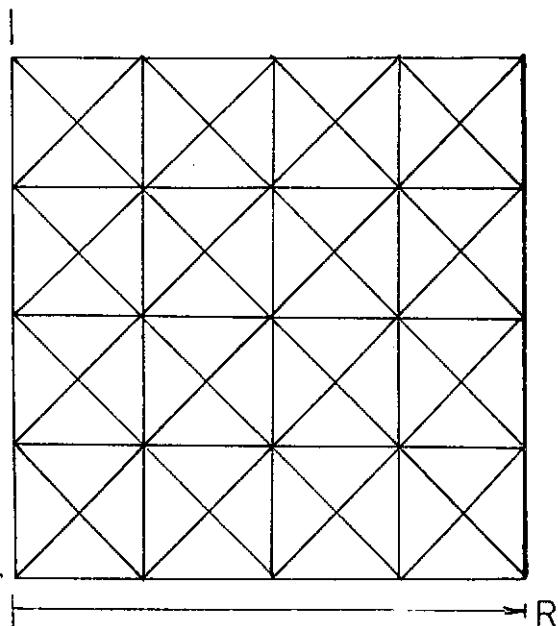


FIGURA 6.2 - (Malha de elementos triangulares axisimétricos para a formulação de elementos finitos)

Para o método quasi-finito (Capítulos IV e V) construiu-se a malha da figura 6.3.a.

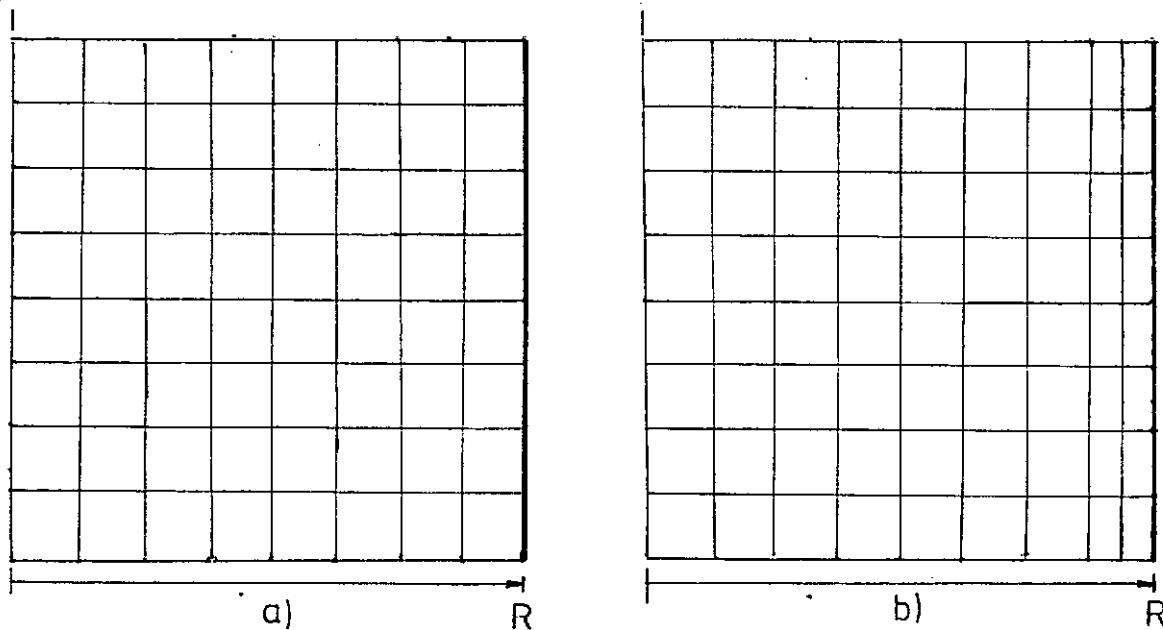


FIGURA 6.3 (Elementos axisimétricos para o método quasi-finito)

De modo a minorar-se o erro devido à troca de calor por convecção, quando não se considera a temperatura na superfície de contato sólido-fluido como deveria ser, mas aque-

la do centro dos elementos sólidos exteriores (ver sub-seção 4.2.2), faz-se um modelo alternativo na figura 6.3.b.

Arbitrando-se os seguintes valores para as propriedades físicas envolvidas:

$$h = 1$$

$$\rho = 2$$

$$c_p = 2$$

$$k = 5$$

E, considerando-se,

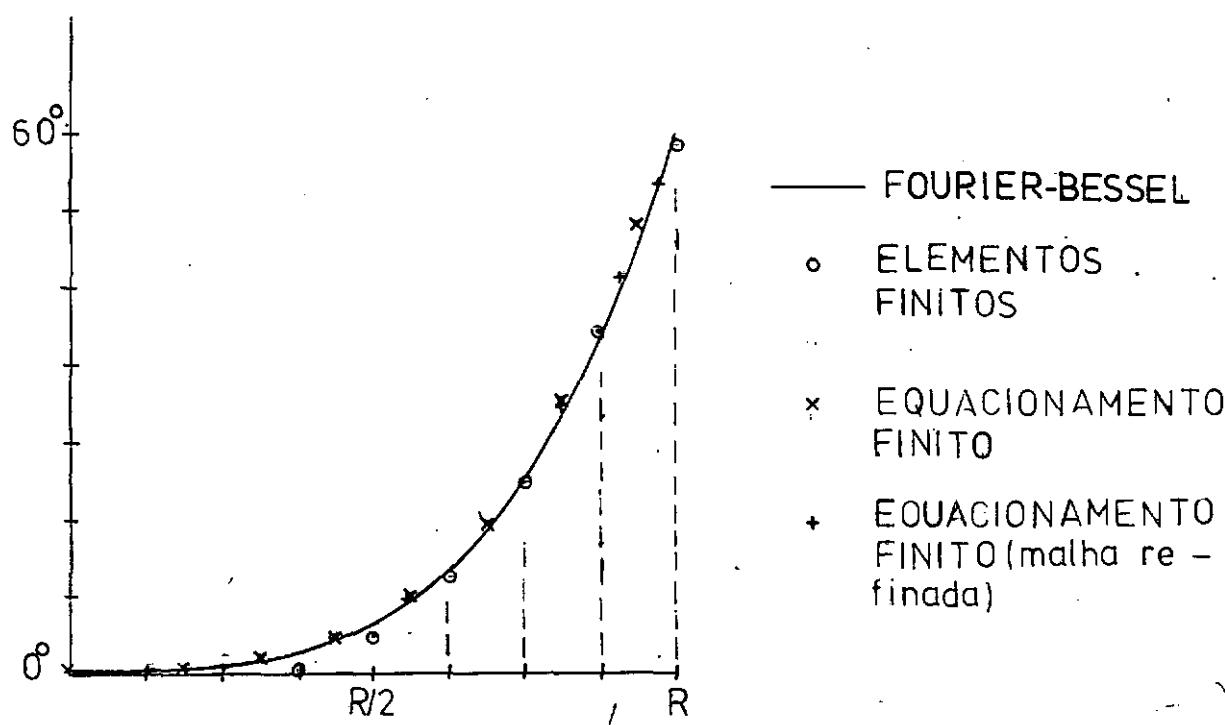
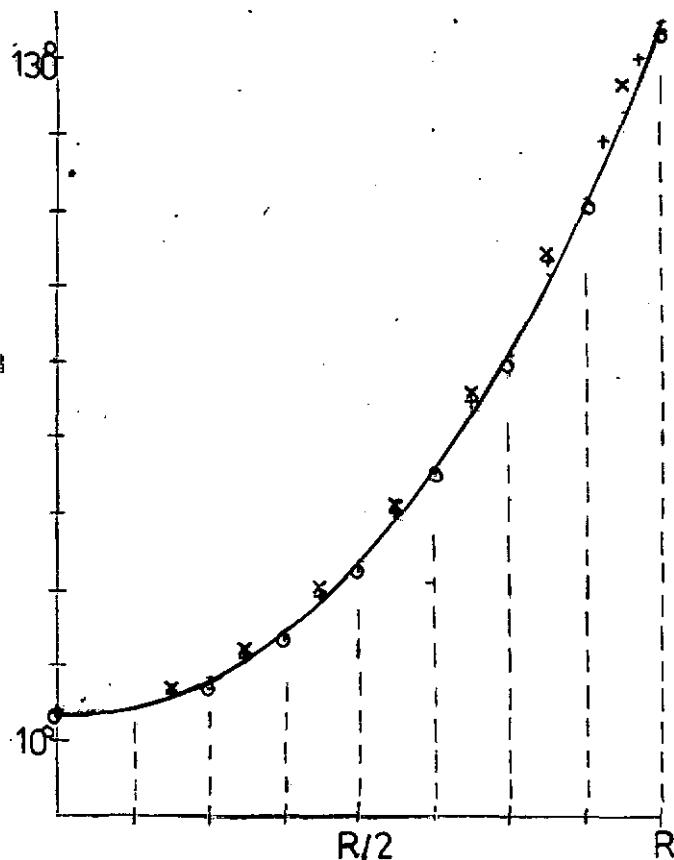
$$\psi_0 = 0$$

$$\psi_\infty = 300$$

são obtidos os seguintes campos de temperaturas mostrados nas figuras 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8, pelos três modos de cálculo (Fourier-Bessel, com 5 auto-valores, elementos finitos e quasi-finito).

Observa-se que os resultados obtidos pelos métodos dos elementos finitos e Fourier-Bessel muito se aproximam.

O método quasi - finito com o modo mostrado na figura 6.4.a tem uma evolução do campo de temperaturas mais rápida que a obtida pelos outros dois métodos. Este fato pode ser explicado pelo maior fluxo de calor do fluido para o cilindro considerado pois leva-se em conta para o cálculo do fluxo por convecção a temperatura no centro dos elementos

FIGURA 6.4 - (Distribuição de temperatura para $t = 10$)FIGURA 6.5 - (Distribuição de temperatura para $t = 25$)

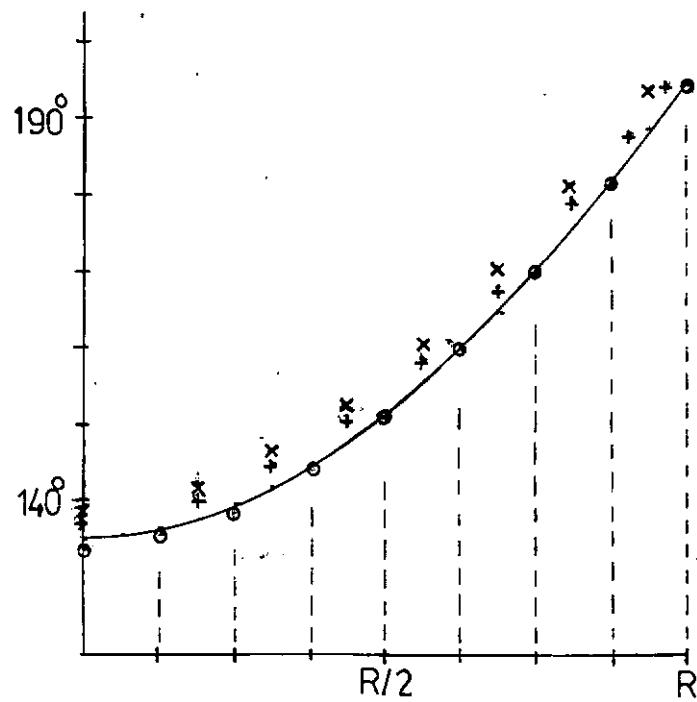


FIGURA 6.6 - (Distribuição de temperatura para $t = 100$)

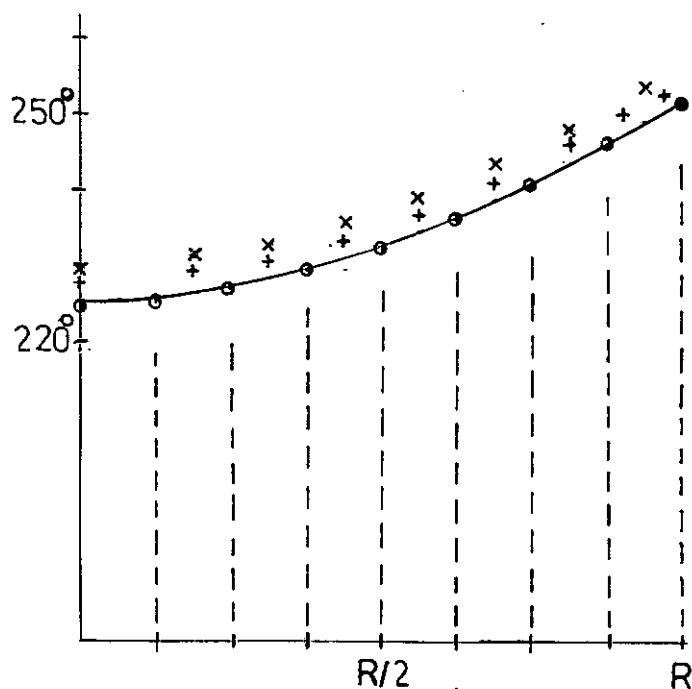


FIGURA 6.7 - (Distribuição de temperatura para $t = 200$)

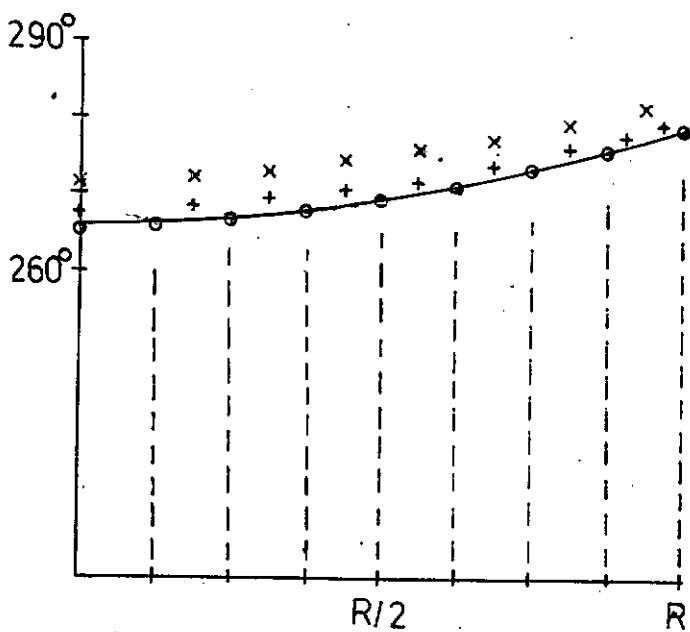


FIGURA 6.8 (Distribuição de temperatura para $t = 300$)

sólidos exteriores e não na superfície sólido-fluido como já discutido (ver seção 4.2.2). Observa-se, também, que a maior parcela do erro é adquirida ao início do processo transiente quando são maiores os gradientes, tornando significativa a diferença de temperatura da parede para o centro dos elementos externos. A medida que os gradientes de temperatura diminuem o erro passa a ter um aumento pequeno.

Para o modelo na figura 6.4.b minora-se o efeito citado acima, ficando o erro aproximadamente com a metade do valor obtido com o modelo em 6.4.a.

Com respeito ao fator tempo de processamento,

convém lembrar o discutido no Capítulo V, quando citou-se a possibilidade de definir grupos de intervalos de tempo, sendo que ao início do processo transiente pequenos intervalos eram considerados, aumentando-os progressivamente.

O procedimento acima foi utilizado nos modelos da figura 6.2 (método dos elementos finitos, sistema 41 x 41) e figura 6.3.a (método quasi-finito, sistema 64 x 64) chegando-se ao valor de 3,52 segundos/passo para o primeiro e 1,619 segundos/passo para o seguinte. Como o total de passos utilizados nos dois casos foi o mesmo, iniciando-se com intervalo de 0,1 e seguindo-se com o intervalo de 1, conclui-se que o modelo segundo o método quasi - finito consome a metade do tempo que o clássico método dos elementos finitos, muito embora a precisão deste seja maior.

Ao introduzir-se o refinamento no método quasi - finito na figura 6.3.b aumenta-se a precisão, porém observa-se que o modelo é instável para intervalos de tempo grandes o que não ocorre com os modelos em 6.2 e 6.3.a. Este fato requer a utilização do intervalo 0,1 para todo o processo transiente com o modelo em 6.3.b, aumentando-se de uma ordem de grandeza o tempo total de processamento.

6.2 - SOLUÇÃO DO CAMPO TÉRMICO EM UM RADIADOR SOLAR

No exemplo da seção anterior não ficou clara a vantagem do método quasi-finito com respeito ao método dos elementos finitos. O problema indicado para demonstrar a flexibilidade do método quasi-finito é aquele de um radiador solar mostrado na figura 6.9.

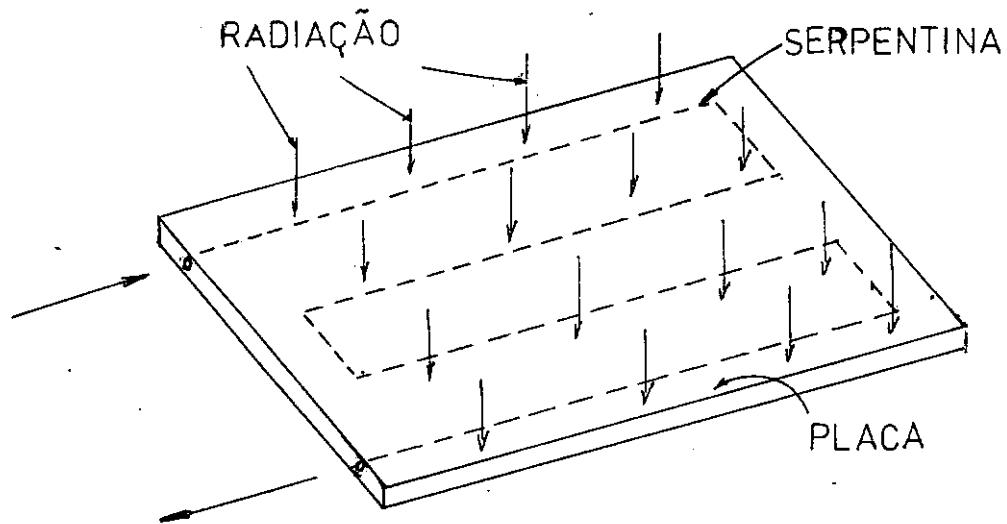


FIGURA 6.9 - (Radiador solar)

No aparelho acima incide radiação, a uma taxa conhecida, sobre uma placa de metal envolta em ar. No interior da placa flui água por uma serpentina, com a função de receber a energia proveniente do sol. Com respeito à água conhece-se apenas o valor da temperatura no ponto de entrada sendo o seu valor ao longo da tubulação juntamente com a temperatura na placa as incógnitas do problema. Assim, deve-se determinar a temperatura do fluido, o que não é possível pelo desenvolvimento

por elementos finitos no Capítulo III mas resolvível pelo método do quasi-finito.

O modelo utilizado para a solução vem a seguir.

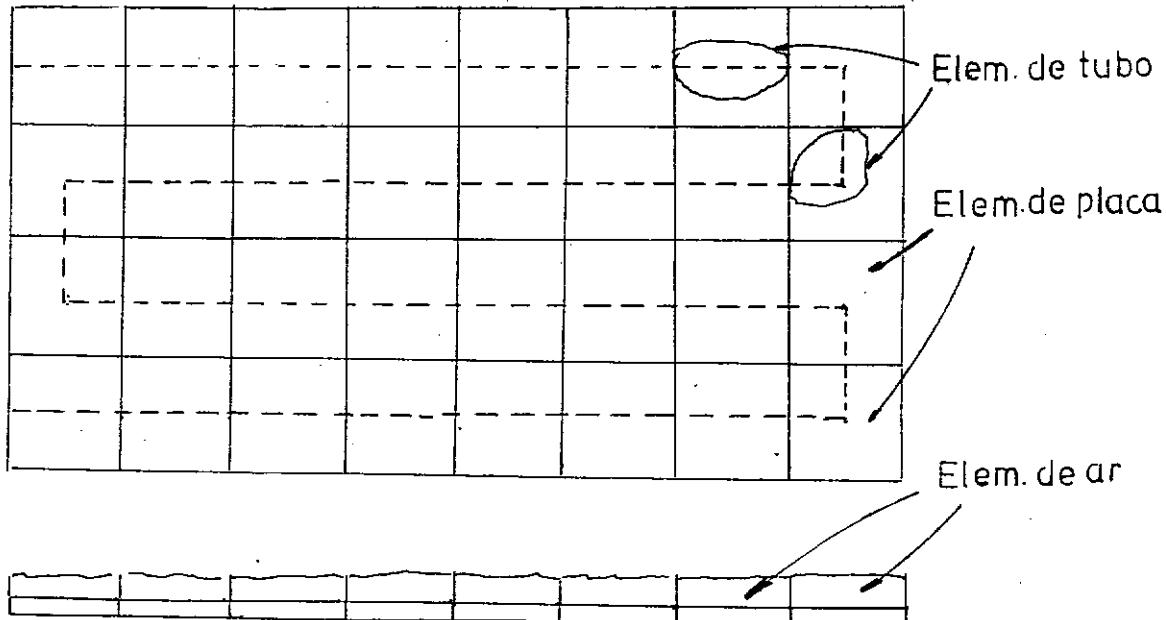


FIGURA 6.10 (Modelo de um radiador solar segundo o método quasi-finito)

As dimensões da placa são $1,60 \times 0,80 \times 0,02\text{m}$ e o diâmetro do tubo $0,015\text{m}$. A velocidade do fluido na tubulação é de $0,1\text{ m/s}$.

O modelo leva a um total de 64 elementos com temperaturas desconhecidas (32 oriundos da placa e 32 da tubulação) e a 33 elementos com temperatura fixa (32 representando o ar e 1 a entrada da tubulação).

Os seguintes tipos e totais de conexões térmicas são utilizados.

- a) placa/placa (condução) - 52 conexões
- b) placa/tubo (convecção) - 32 conexões
- c) placa/ar (convecção) - 32 conexões
- d) tubo/tubo (transferência de massa) - 32 conexões

As propriedades físicas envolvidas são atribuídos os seguintes valores como função da temperatura (ver seção 5).

- a) coeficiente de condutividade da placa

$$k = 383,8 \text{ W/m}^{\circ}\text{K} \text{ (independente da temperatura)}$$

- b) calor específico da água

$$c_p(0^{\circ}\text{K}) = 4217 \text{ J/kg } ^{\circ}\text{K}$$

$$c_p(90^{\circ}\text{K}) = 4205 \text{ J/kg } ^{\circ}\text{K}$$

- c) densidade da água

$$\rho(0^{\circ}\text{K}) = 999,8 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho(90^{\circ}\text{K}) = 965,2 \text{ kg/m}^3$$

- d) coeficiente de convecção placa/ar

$$h_1 = 7,43 \text{ W/m}^2 \text{ } ^{\circ}\text{K} \text{ (independente da temperatura)}$$

- e) coeficiente de convecção placa/tubo

$$h_2(20^{\circ}\text{K}) = 1000 \text{ W/m}^2 \text{ } ^{\circ}\text{K}$$

$$h_2(100^{\circ}\text{K}) = 1200 \text{ W/m}^2 \text{ } ^{\circ}\text{K}$$

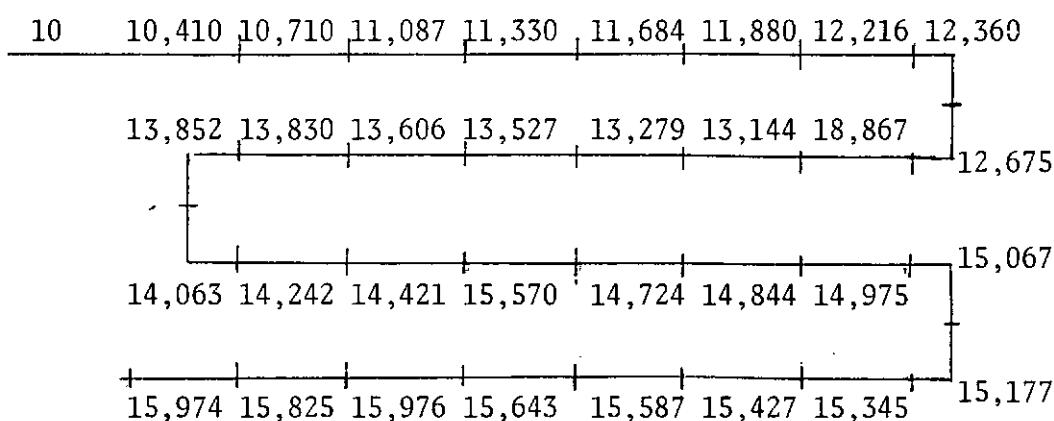
O calor que surge em cada elemento por unidade de tempo decorrente do fluxo radiativo por unidade de área, tem o valor $Q = 0,12 \text{ W/seg.}$

A temperatura do ar foi suposta a 20°C e a da água na entrada da serpentina 10°C .

A solução em regime permanente para o problema acima está mostrada na figura 6.11, observando-se que a temperatura da água elevou-se de $5,974^\circ\text{K}$.

13,294	13,424	13,597	13,747	13,906	14,025	14,151	14,212
14,791	14,820	14,822	14,838	14,819	14,803	14,756	14,716
15,626	15,677	15,736	15,783	15,824	15,848	15,867	15,873
16,568	16,534	16,522	16,480	16,450	16,392	16,392	16,289

a) Temperaturas no centro dos elementos de placa



b) Temperaturas no centro dos elementos de fluido

FIGURA 6.11 - (Distribuição de temperaturas em radiador solar)

6.3 CAMPO DE TEMPERATURAS NO ESPELHO DE UM TROCADOR DE CALOR

Estrutura das mais solicitadas termicamente é o espelho de um trocador de calor, sendo que a análise do mesmo pode ser convenientemente realizada pelo método quasi-finito.

Um trocador de calor é um equipamento, em geral com a seguinte forma:

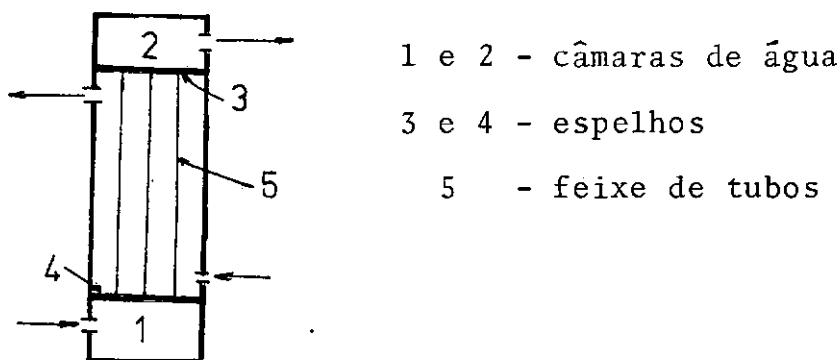


FIGURA 6.12 - (Esquema de trocador de calor)

Normalmente o líquido a ser refrigerado entra em uma das câmaras e flui através do espelho para um feixe de tubos que está em contato o refrigerante, dando-se a troca de calor.

O espelho sofre as seguintes solicitações térmicas:

- Parte superior em contato com fluido frio.
- Parte inferior em contato com fluido quente.
- Interior do espelho em contato com o fluido quente dos tubos.

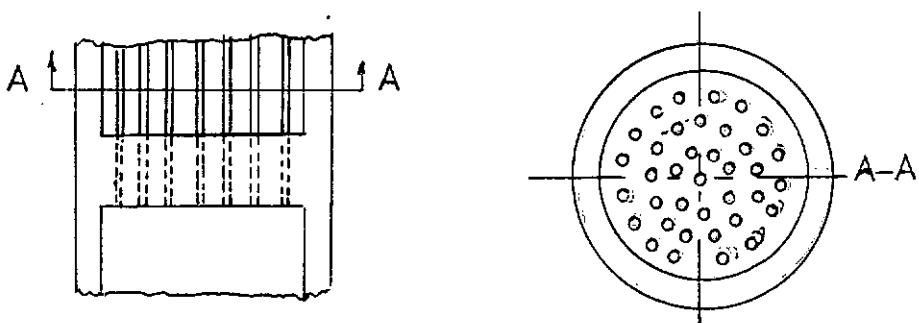


FIGURA 6.13 - (Geometria do espelho de um trocador de calor)

Para a solução do problema foi considerada a temperatura nos tubos no interior do espelho constante e igual à temperatura na câmara inferior. Com esta hipótese a temperatura do fluido não é incógnita, ao contrário do exemplo da seção 5.2, ficando para ser determinado o campo de temperaturas no espelho e nas paredes do trocador na proximidade do mesmo.

Um fato que deve ser observado é que a geometria do espelho introduz um certo tipo de anisotropia no mesmo pois o fluxo de calor se dará de modo diferente nas direções radial e axial, devido à existência de furos para a passagem de fluido, como pode ser visto na figura 6.14.

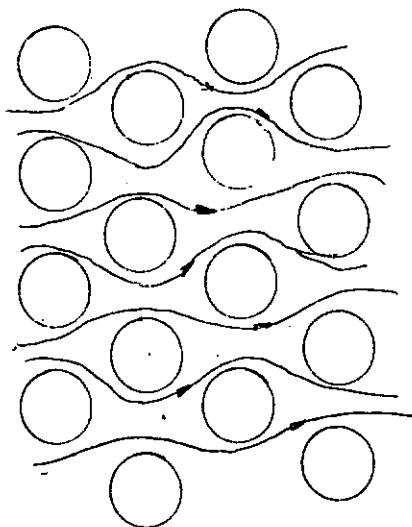
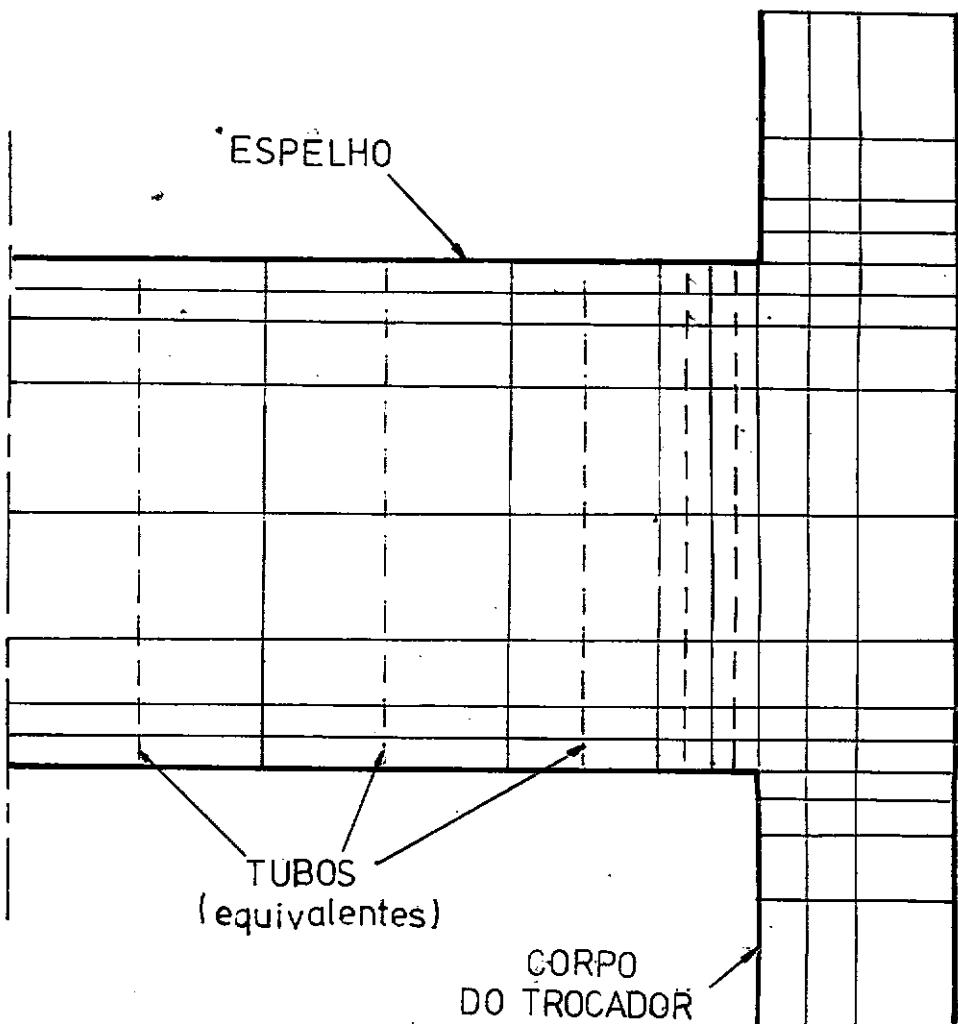


FIGURA 6.14 - (Fluxo de calor radial em espelho de trocador de calor)

Um modo de se considerar a modificação no fluxo radial é utilizar apenas uma percentagem da área na ausência de tubulações. Este procedimento é coerente com a observação que os furos são obstáculos ao fluxo de calor. Para determinar-se esta área hipotética, uma possibilidade é a realização de estudos experimentais para uma dada geometria de feixe de tubos. No presente caso, arbitrou-se o valor de 50%.

Com respeito ao fluxo axial é suficiente considerar a área real de troca de calor, subtraindo-se a área da seção transversal dos tubos.

O modelo para a solução do campo de temperaturas na região do espelho pelo método quasi-finito vem a seguir.



(FIGURA 6.15 - (Modelo para a solução do campo de temperatura no espelho trocador de calor)

Com respeito aos elementos no espelho, deve-se considerar a troca por convecção com os tubos indicados pelas linhas pontilhadas.

Existe, ainda, a troca por convecção nas partes superior e inferior do espelho.

No modelo da figura 6.15 chegou-se a um total de 88 elementos com temperaturas a determinar e 56 com temperaturas fixas (40 oriundos do fluido nos tubos do espelho, 8 do fluido na parte superior e 8 na parte inferior).

As seguintes conexões térmicas são utilizadas

- a). Espelho/espelho (condução) - 152 conexões
- b) Espelho/tubo (convecção) - 40 conexões
- c) Espelho/fluido (convecção) - 16 conexões

As propriedades físicas envolvidas tomam os seguintes valores:

- a) condutividade

$$k = 383 \text{ W/m}^{\circ}\text{K}$$

- b) coeficiente de convecção espelho/tubo

$$h_1 = 4600 \text{ W/m}^2 \text{ }^{\circ}\text{K}$$

- c) coeficiente de convecção espelho/água (parte superior e inferior)

$$h_2 = 5948 \text{ W/m}^2 \text{ }^{\circ}\text{K}$$

As propriedades acima foram supostas independentes da temperatura. Observa-se que não se considera troca de calor por transferência de massa, por ser a temperatura do fluido nos tubos conhecida de antemão. Não existindo, assim, a necessidade de definir-se o calor específico e a densidade no refido fluido.

Para a temperatura de 175°C do fluido quente (câmara inferior e interior do espelho) e 20°C na parte superior, obtém-se a distribuição de calor no espelho de trocador de calor mostrada na figura 6.10 que pode ser utilizado para o cálculo de tensões na peça estrutural.

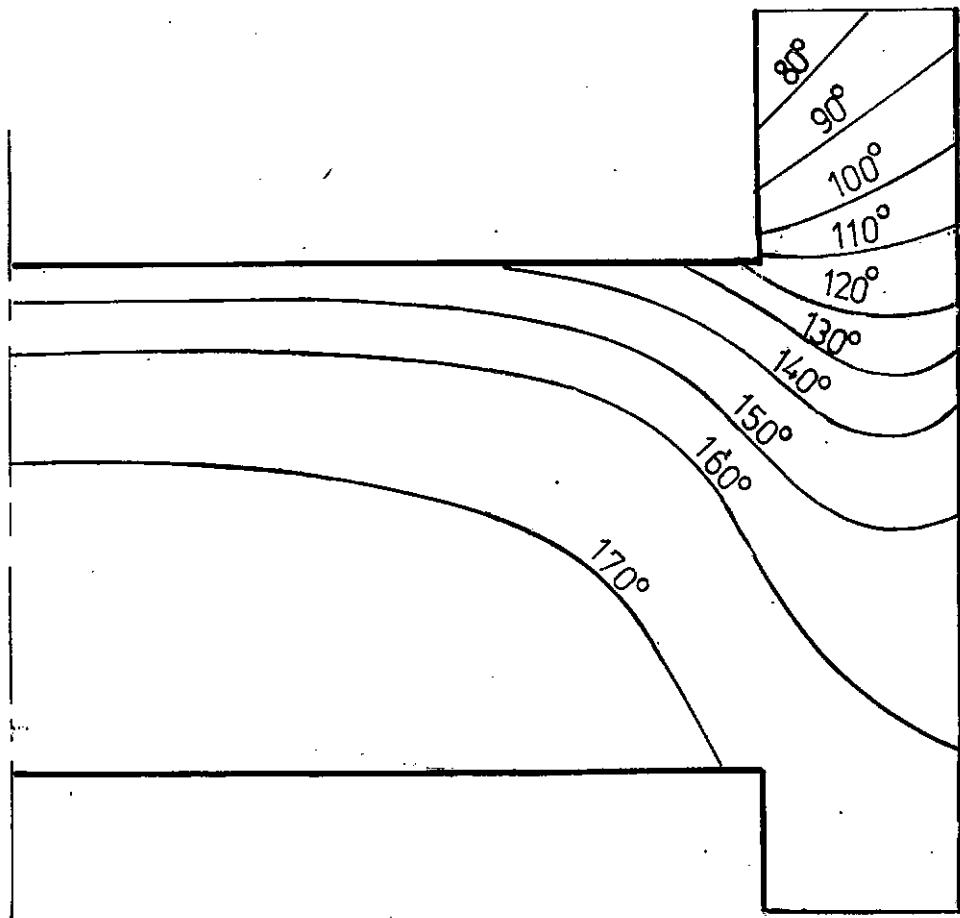


FIGURA 6.16 - (Distribuição de temperaturas no espelho)

CONCLUSÕES

Os métodos desenvolvidos são ferramentas po-
derosas e complementares para o cálculo de campos térmicos.

Obteve-se com o método quasi-fi-
nito resultados comparáveis aos obtidos pela utilização de ele-
mentos finitos, fato que torna o primeiro bastante confiável. A
lém disso, a sua flexibilidade permite a análise de problemas de
difícil tratamento por elementos finitos.

Para a continuidade do estudo do método
quasi-finito sugere-se:

- Pesquisa da sua estabilidade em processos transien-
tes sobre malhas onde utiliza-se elementos com diferenças acen-
tuadas nas dimensões volumétricas, pois verifica-se que nestes
casos o desenvolvimento torna-se instável para intervalos de
tempo grandes;

- Extender o desenvolvimento feito para fluidos in-
compressíveis em tubulações, a gases e misturas gasosas.

APÊNDICE A

INTEGRAIS SOBRE UM TRIÂNGULO

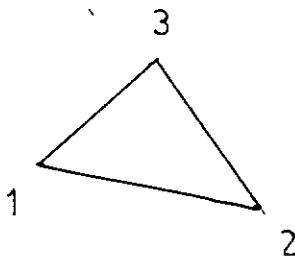


FIGURA A.1 - (Triângulo)

$$\int \int_S x \, dx dy = \frac{S}{3} (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\int \int_S y \, dx dy = \frac{S}{3} (y_1 + y_2 + y_3)$$

$$\begin{aligned} \int \int_S x^2 \, dx dy &= \frac{S}{6} (x_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + \\ &\quad + x_3 x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \int_S y^2 \, dx dy &= \frac{S}{6} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1 y_2 + y_2 y_3 + \\ &\quad + y_3 y_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \int_S xy \, dx dy &= \frac{S}{12} \left[(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + \right. \\ &\quad \left. + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \right] \end{aligned}$$

INTEGRAIS SOBRE UM SEGMENTO DE RETA

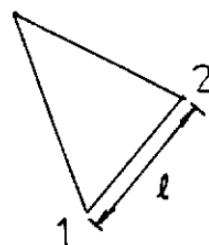


FIGURA A.2 - (Segmento de Reta)

$$\int_{\ell} x \, d \ell = \frac{\ell}{2} (x_1 + x_2)$$

$$\int_{\ell} y \, d \ell = \frac{\ell}{2} (y_1 + y_2)$$

$$\int_{\ell} x^2 \, d \ell = \frac{\ell}{3} (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$$

$$\int_{\ell} y^2 \, d \ell = \frac{\ell}{3} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

$$\begin{aligned} \int_{\ell} xy \, d \ell &= \frac{\ell}{6} \left\{ y_1 [2x_1 + x_2] + y_2 [x_1 + 2x_2] \right\} \end{aligned}$$

INTEGRAIS SOBRE UM TRIÂNGULO

$$\int \int_S x^3 dx dy = \frac{S}{10} \left([x_1^3 + x_2^3 + x_3^3] + [x_1 + x_2 + x_3][x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1] - [x_1 x_2 x_3] \right)$$

$$\int \int_S x^2 y dx dy = \frac{S}{30} \left([x_1^2 + x_2^2 + x_3^2][y_1 + y_2 + y_3] + 2[x_1 + x_2 + x_3][x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3] + [y_1 x_2 x_3 + y_2 x_3 x_1 + y_3 x_1 x_2] \right)$$

$$\int \int_S xy^2 dx dy = \frac{S}{30} \left([y_1^2 + y_2^2 + y_3^2][x_1 + x_2 + x_3] + 2[y_1 + y_2 + y_3][x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3] + [x_1 y_2 y_3 + x_2 y_3 y_1 + x_3 y_1 y_2] \right)$$

INTEGRAIS SOBRE UM SEGMENTO DE RETA

$$\int_{\ell} \alpha_{14} = \int_{\ell} x^3 d\ell = \frac{\ell}{4} (x_1 + x_2) (x_1^2 + x_2^2)$$

$$\begin{aligned} \int_{\ell} \alpha_{15} = & \int_{\ell} x^2 y d\ell = \frac{\ell}{12} (3y_2 x_2^2 + x_2^2 y_1 + x_1^2 y_2 + 3x_1^2 y_1 + \\ & + 2x_1 x_2 y_2 + 2x_1 x_2 y_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\ell} \alpha_{16} = & \int_{\ell} x y^2 d\ell = \frac{\ell}{12} (3x_2 y_2^2 + 3x_1 y_1^2 + x_2 y_1^2 + x_1 y_2^2 + \\ & + 2x_1 y_1 y_2 + 2x_2 y_1 y_2) \end{aligned}$$

APÊNDICE B

O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4^a ORDEM

A solução de uma equação diferencial do tipo,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad x \in [a, b] \quad (B-1)$$

onde a e b são os extremos do domínio, pode ser obtida de modo iterativo como segue.

Seja,

$$u_i \approx y(x_i) , \quad (B-2)$$

onde u_i é o valor aproximado da função solução em um ponto x_i do intervalo $[a, b]$.

De acordo com o proposto por Runge e Kutta o valor u_{i+1} aproximado sobre um ponto x_{i+1} distando h de x_i pode ser calculado pelo esquema abaixo, desenvolvido a partir de considerações sobre a expansão em série de Taylor em uma vizinhança de x .

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (B-3)$$

onde

$$k_1 = f(x_i, u_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2} h, u_i + \frac{1}{2} h k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2} h, u_i + \frac{1}{2} h k_2)$$

$$k_4 = f(x_i + h, u_i + h k_3)$$

Os termos k_1 , k_2 , k_3 e k_4 tem as seguintes interpretações:

- a) k_1 - Aproximação da derivada da função solução no ponto x_i (como pode ser visto de (B-1)).
- b) k_2 - Aproximação da derivada da função no ponto $x_i + \frac{1}{2} h$, sendo o valor da ordenada calculado a partir de k_1 e u_i .
- c) k_3 - Aproximação da derivada da função em $x_i + \frac{1}{2} h$, sendo o valor calculado com o valor da derivada dado por k_2 , e u_i .
- d) k_4 - Aproximação da derivada da função em $x_i + h$, com o valor da ordenada obtido em função de k_3 e u_i .

É feita a média ponderada dos valores dados por k_1 , k_2 , k_3 e k_4 , atribuindo-se respectivamente os pesos 1, 2, 2 e 1, chegando-se à (B-3).

Conhecendo-se um par ordenado, condição inicial do problema (x_0, y_0) pode-se obter o valor da função sucessivamente através de (B-3).

O erro introduzido a cada passo com intervalo h é proporcional à quarta potência do intervalo.

O método pode ser extendido a um sistema do tipo:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

⋮

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (B-4)$$

a partir da condição inicial.

$$y_1(x_0) = y_{1,0}$$

$$y_2(x_0) = y_{2,0}$$

⋮

$$y_n(x_0) = y_{n,0} \quad (B-5)$$

Observa-se que um caso particular do sistema

(B-4) é a equação matricial abaixo

$$\dot{\{y\}} = [M_0] \{y\} + \{R\} \quad (B-6)$$

onde o ponto sobre y indica derivada relativa ao tempo.

Conhecendo-se o valor da função solução $\{y_i\}$ em um determinado ponto x_i a aproximação da mesma $\{y_{i+1}\}$ em um ponto x_{i+1} distante h de x_i , pode ser obtida por

$$\{y_{i+1}\} = \{y_i\} + \frac{h}{6} (\{k_1\} + 2 \{k_2\} + 2 \{k_3\} + \{k_4\}) \quad (B-7)$$

onde

$$\{k_1\} = [M_0] \{y_i\} + \{R\}$$

$$\{k_2\} = [M_0] \{\bar{y}_i\} + \{R\},$$

$$\text{sendo } \{\bar{y}_i\} = \{y_i\} + \frac{h}{2} \{k_1\}$$

$$\{k_3\} = [M_0] \{\bar{\bar{y}}_i\} + \{R\},$$

$$\text{sendo } \{\bar{\bar{y}}_i\} = \{y_i\} + \frac{h}{2} \{k_2\}$$

$$\{k_4\} = [M_0] \{\bar{\bar{\bar{y}}}_i\} + \{R\}$$

$$\text{sendo } \{\bar{\bar{\bar{y}}}_i\} = \{y_i\} + h \{k_3\}$$

O esquema acima permite desenvolver-se a solução a partir de uma condição inicial $\{y_0\}$. Um fluxograma vem a seguir.

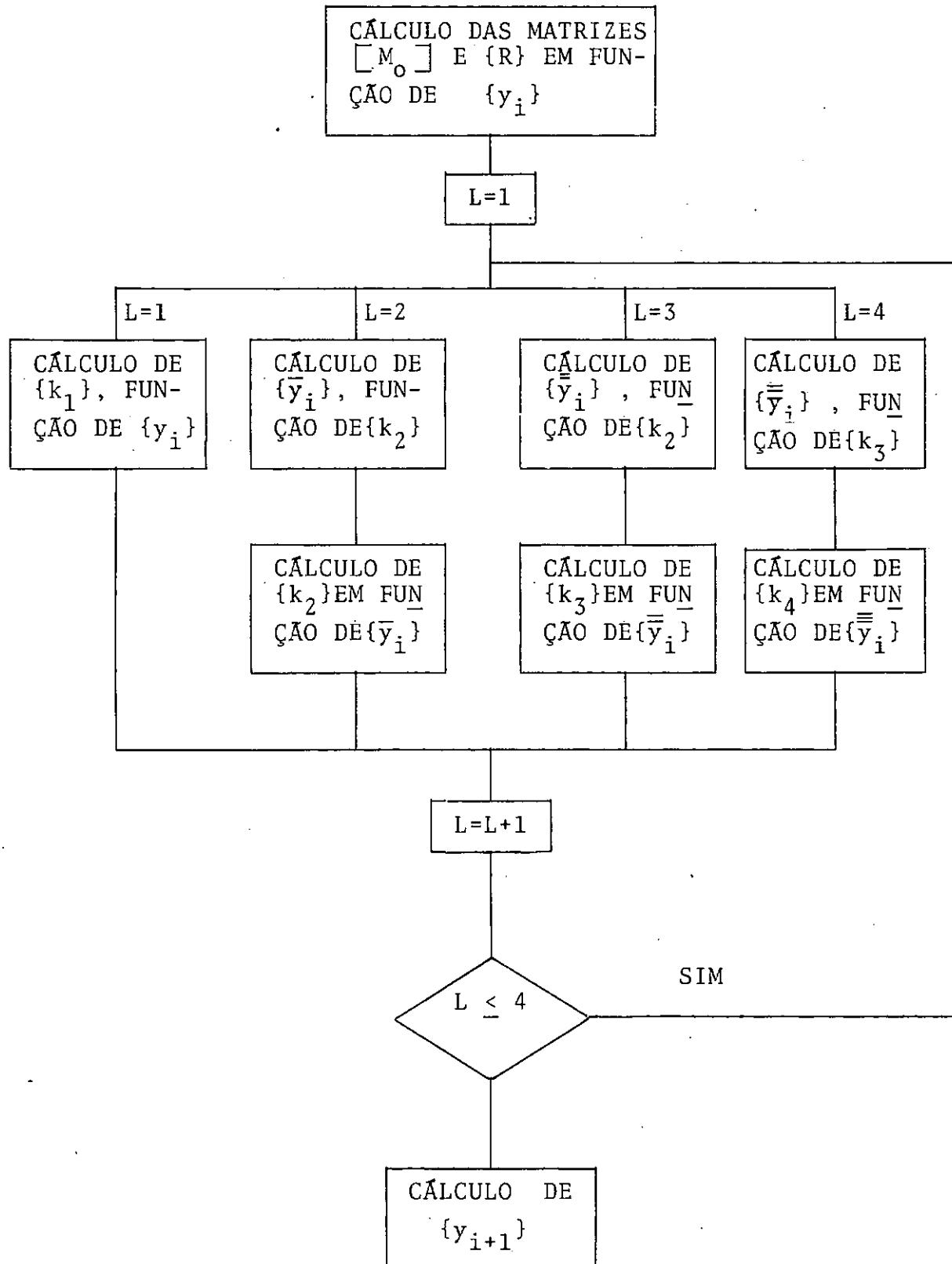


FIGURA B.1 - (Algoritmo para a utilização do método de Runge-Kutta de 4^a ordem)

APÊNDICE C

PROGRAMAS DE COMPUTADOR E ENTRADA DE DADOS

C.1 - PROGRAMA PARA CÁLCULO DE CAMPOS TÉRMICOS TRANSIENTES PELO MÉTODO QUASI-FINITO

a) Restrições de numeração

- Os elementos devem ser numerados de modo que nenhum receba numeração superior ao total de elementos do modelo.

- Nenhum elemento com temperatura desconhecida deverá ser numerado com valor superior ao total de elementos com temperatura desconhecida.

- Os elementos com temperaturas fixas, por consequência, recebem valores de numeração superior ao total de elementos com temperatura desconhecida e menores ou igual que o total de elementos.

b) Restrições de dimensionamento

- Número máximo de elementos = 200 (soma NU+NN).

- Número máximo de elementos com temperatura

desconhecida = 150 (NU).

- Número máximo de circuitos ao longo do tempo = 10 (NLOOP).

- Número máximo de tipos de materiais = 5 (NMC).

- Número máximo de tipos de convecção = 5 (NMV).

OBS.: Ver definição de NU, NN, NLOOP, NMC e NMV, nos 2º e 4º cartões de dados.

c) Cartões de dados

1º	TÍTULO	1 cartão
----	--------	----------

20A4

2º	TZERO	NLOOP	1 cartão
----	-------	-------	----------

F10.3 I5

TZERO - Tempo a partir do qual se inicia o processo transiente.

NLOOP - Total de circuitos ao longo do tempo (ver seção 5.3)

PAS(I)	NPAS1(I)	INT1(I)	NCL(I)	Tantos cartões quanto for o valor de NLOOP
--------	----------	---------	--------	--

F10.3 I5 I5 I5

I - Índice variando de 1 até NLOOP

desconhecida = 150 (NU).

- Número máximo de circuitos ao longo do tempo = 10 (NLOOP).
- Número máximo de tipos de materiais = 5 (NMC).
- Número máximo de tipos de convecção = 5 (NMV).

OBS.: Ver definição de NU, NN, NLOOP, NMC e NMV, nos 2º e 4º cartões de dados.

c) Cartões de dados

1º	TÍTULO		1 cartão
	20A4		

2º	TZERO	NLOOP	1 cartão
	F10.3	I5	

TZERO - Tempo a partir do qual se inicia o processo transiente.

NLOOP - Total de circuitos ao longo do tempo (ver seção 5.3)

3º	PAS(I)	NPAS1(I)	INT1(I)	NC1(I)	Tantos cartões quanto for o valor de NLOOP
	F10.3	I5	I5	I5	

I - Índice variando de 1 até NLOOP

5°	I	T(I)	Q(I)
	I5	F10.3	F10.3

tantos cartões quanto for a soma NU+NN

I - Numeração do elemento (não deve exceder a 200)

T(I) - Temperatura no elemento "I"

Q(I) - Geração de calor no elemento "I"

OBS.: Caso o elemento pertença ao contorno ou não haja geração de calor deve-se deixar o espaço correspondente em branco.

6°	I	MC(I)	VOL(I)
	I5	I5	F10.3

tantos cartões quanto for a soma NU+NN

I - Numeração do elemento (não deve exceder a 200)

MC(I) - Índice do material de que se constitui o elemento "I"

VOL(I) - Volume do elemento "I"

7°	I	TP1(I)	CP1(I)	TP2(I)	CP2(I)
	I5	F10.3	F10.3	F10.3	F10.3

tantos cartões quanto for o valor de NMC

I - Numeração do material (não deve exceder a 5)

TP1(I) - Temperatura associada a CP1(I)

CP1(I) - Valor do calor específico na temperatura TP1(I)
(Ver seção 5.3)

TP2(I) - Temperatura associada a CP2(I)

CP2(I) - Valor do calor específico na temperatura TP2(I)
(Ver seção 5.3)

8º	I	TC1(I)	COND1(I)	TC2(I)	COND2(I)	tantos cartões quanto for o valor de NMC
	I5	F10.3	F10.3	F10.3	F10.3	

Aproximação linear das condutividades. Ver detalhes no 7º grupo de cartões.

9º	I	TH1(I)	CH1(I)	TH2(I)	CH2(I)	tantos cartões quanto for o valor de NMC
	I5	F10.3	F10.3	F10.3	F10.3	

Aproximação linear das densidades. Ver detalhes no 7º grupo de cartões.

10º	I	TV1(I)	CV1(I)	TV2(I)	CV2(I)	tantos cartões quanto for o valor de NMV
	I5	F10.3	F10.3	F10.3	F10.3	

Aproximação linear dos coeficientes de convecção. Ver detalhes no 7º grupo de cartões.

11º	A	B1	NA	NB	M	NH	tantos cartões quanto for NHC
	I5	I5	I5	I5	I5	I5	

A - Área de troca de calor (se M=1, 2 ou 3), ou velocidade (M=4)

B1 - Distância de troca de calor

OBS.: No caso de M=1, torna-se sem sentido a distância de troca de calor devendo o espaço ser deixado em branco.

NA,NB - Numeração dos elementos envolvidos na ligação térmica

OBS.: Ligações térmicas de um elemento com si próprio, ou entre elementos com temperaturas conhecidas serão recusadas, parando o programa.

M - Índice do modo de troca (1,2,3 ou 4 respectivamente para convecção, condução, radiação ou transferência de massa).

NH - Índice do tipo de convecção (fornecido apenas para M=1).

A seguir vem a listagem do programa para regime transiente.

```

COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
  COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
  COMMON/RUN/PHI(150),SAVEY(150)
  DIMENSION TITLE(20),TETA(21,200)
  DIMENSION PAS(10),NPAS1(10),INT1(10),NC1(10)
  DIMENSION TP1(5),CP1(5),TP2(5),CP2(5)
  DIMENSION TC1(5),COND1(5),TC2(5),COND2(5)
  DIMENSION TH1(5),CH1(5),TH2(5),CH2(5)
  DIMENSION TV1(5),CV1(5),TV2(5),CV2(5)
  DIMENSION F(150),Y(150)
  DIMENSION TEMPO(21)
  LOGICAL BOOL
  BOOL=.TRUE.
  READ(5,10)(TITLE(I),I=1,20)
10 FORMAT(20A4)
  WRITE(6,10)(TITLE(I),I=1,20)
  READ(5,14)TZERO,NLOOP
  WRITE(6,14)TZERO,NLOOP
14 FORMAT(F10.3,51S)
  DO 15 I=1,NLOOP
  READ(5,14)PAS(I),NPAS1(I),INT1(I),NC1(I)
  WRITE(6,14)PAS(I),NPAS1(I),INT1(I),NC1(I)
15 CONTINUE
  READ(5,20)NU,NN,JHC,NMC,NMV
20 FORMAT(6I5,2F10.3)
  WRITE(6,25)NU,NN,JHC,NMC,NMV
25 FORMAT('1',///,T20,'NOS DESCONHECIDOS=',I3,
      ///,T20,'NOS CONHECIDOS=',I3,
      ///,T20,'NUM. DE CONEXOES TERMICAS=',I3,
      ///,T20,'NUM. DE MODOS DE CONDUCAO=',I3,
      ///,T20,'NUM. DE MODOS DE CONVECCAO=',I3)
      N1=NU+1
      N2=NU+NN
      DO 50 L=1,N2
      READ(5,40)(I,T(I),Q(I))
40 FORMAT(I5,4F10.3)
50 CONTINUE
  WRITE(6,60)
60 FORMAT(///,T20,'TEMPERATURAS INICIAIS')
  DO 70 I=1,N2
  WRITE(6,40)(I,T(I),Q(I))
70 CONTINUE
  DO 85 L=1,N2
  READ(5,80)(I,MC(I),VOL(I))
80 FORMAT(2I5,F10.3)
85 CONTINUE
  WRITE(6,90)
90 FORMAT(//,T20,'VOLUMES E MODOS FISICOS')
  DO 100 I=1,N2
  WRITE(6,80)(I,MC(I),VOL(I))
100 CONTINUE
  DO 110 L=1,NMC

```

```

      READ(5,40)(I,TP1(I),CP1(I),TP2(I),CP2(I))
110 CONTINUE
      WRITE(6,120)
120 FORMAT(///,T20,'CALOR ESPECIFICO')
      DO 130 I=1,NMC
      WRITE(6,40)(I,TP1(I),CP1(I),TP2(I),CP2(I))
130 CONTINUE
      DO 140 L=1,NMC
      READ(5,40)(I,TC1(I),COND1(I),TC2(I),COND2(I))
140 CONTINUE
      WRITE(6,150)
150 FORMAT(///,T20,'CONDUTIVIDADE')
      DO 160 I=1,NMC
      WRITE(6,40)(I,TC1(I),COND1(I),TC2(I),COND2(I))
160 CONTINUE
      DO 170 L=1,NMC
      READ(5,40)(I,TH1(I),CH1(I),TH2(I),CH2(I))
170 CONTINUE
      WRITE(6,180)
180 FORMAT(///,T20,'DENSIDADE')
      DO 190 I=1,NMC
      WRITE(6,40)(I,TH1(I),CH1(I),TH2(I),CH2(I))
190 CONTINUE
      DO 200 L=1,NMV
      READ(5,40)(I,TV1(I),CV1(I),TV2(I),CV2(I))
200 CONTINUE
      WRITE(6,210)
210 FORMAT(///,T20,'CONVECAO')
      DO 220 I=1,NMV
      WRITE(6,40)(I,TV1(I),CV1(I),TV2(I),CV2(I))
220 CONTINUE

```

C
C GERACAO DOS COEFICIENTES
C DAS FUNCOES LINEARES
C

```

      DO 230 K=1,NMC
      X1=TP1(K)
      Y1=CP1(K)
      X2=TP2(K)
      Y2=CP2(K)
      CALL LINE(X1,Y1,X2,Y2,ANG,D)
      BOOL=ANG.EQ.0.AND.BOOL
      ACP(K)=ANG
      DCP(K)=D

```

```

C
      X1=TC1(K)
      Y1=COND2(K)
      X2=TC2(K)
      Y2=COND2(K)
      CALL LINE(X1,Y1,X2,Y2,ANG,D)
      BOOL=ANG.EQ.0.AND.BOOL
      ACOND(K)=ANG
      DCOND(K)=D

```

```

X1=TH1(K)
Y1=CH1(K)
X2=TH2(K)
Y2=CH2(K)
CALL LINE(X1,Y1,X2,Y2,ANG,D)
BOOL=ANG.EQ.0.AND.BOOL
ACH(K)=ANG
DCH(K)=D

```

230 CONTINUE

```

C
DO 240 K=1,NMV
X1=TV1(K)
Y1=CV1(K)
X2=TV2(K)
Y2=CV2(K)
CALL LINE(X1,Y1,X2,Y2,ANG,D)
BOOL=ANG.EQ.0.AND.BOOL
ACV(K)=ANG
DCV(K)=D

```

240 CONTINUE

C C MONTAGEM DA MATRIZ C C

```
WRITE(6,330)
```

```
330 FORMAT('1',T20,'CONEXOES TERMICAS',//,T20,
%'A',T40,'B1',T50,'NA',T60,'NB',T70,'M',T80,'NH')
```

```
--DO--460 L=1,NHC
```

```
READ(S,340)A,B1,NA,NB,M,NH
```

```
340 FORMAT(2F10.3,20X,4I5)
```

```
WRITE(6,345)A,B1,NA,NB,M,NH
```

```
345 FORMAT(//,T18,F10.2,T38,F8.2,T47,I3,T57,
$I3,T67,I3,T87,I3)
```

```
LUX=1
```

```
IF(NA=NB)370,350,360
```

```
350 WRITE(6,355)
```

```
355 FORMAT(//,T20,'ERRO DE DADOA (NA=NB)')
```

```
GO TO 1000
```

```
360 NS=NB
```

```
NB=NA
```

```
NA=NS
```

```
370 IF(NA=NU)390,390,380
```

```
380 WRITE(6,385)
```

```
385 FORMAT(//,T20,'ERRO DE DADOS (NA>NU)')
```

```
GO TO 1000
```

```
390 GO TO (400,410,420),M
```

```
400 CALL CONVE
```

```
IF(ICOD)430,430,1000
```

```
410 CALL CONDU
```

```
IF(ICOD)430,430,1000
```

```
C      OPCAO PARA RADIACAO
```

420 CONTINUE

430 GO TO (440,460),LUX

440 IF(NB-NU)450,450,460

450 NS=NB

```

NB=NA
NA=NS
LUX=2
GO TO 390
460 CONTINUE
C
C           SOLUCAO DO PROBLEMA TRANSIENTE
C
DO 470 I=1,NU
Y(I)=T(I)
TETA(1,I)=T(I)
470 CONTINUE
DO 475 I=N1,N2
TETA(1,I)=T(I)
475 CONTINUE
C
C           CALCULO DO CAMPO TRANSIENTE
C
TEM=TZERO
NP#1
TEMPO(1)=TEM
480 PASSO=PAS(NP)
NPAS=NPAS1(NP)
INT=INT1(NP)
NC=NC1(NP)
IESP=0
ICAL=0
IM=1
DO 600 M=1,NPAS
ICAL=ICAL+1
IF(M.EQ.1.AND.NP.EQ.1) GO TO 500
IF(ICAL.LT.NC.OR.B00L) GO TO 540
ICAL=0
500 DO 530 I=1,NU
K=N(I,1)
IF(K.EQ.0)GO TO 511
DO 510 L=1,K
CALL SUBV(I,L)
510 CONTINUE
511 K=N(I,2)
IF(K.EQ.0)GO TO 521
DO 520 L=1,K
CALL SUBC(I,L)
520 CONTINUE
521 K=N(I,3)
IF(K.EQ.0)GO TO 523
DO 522 L=1,K
CALL SUBR(I,L)
522 CONTINUE
523 K=N(I,4)
IF(K.EQ.0)GO TO 526
DO 525 L=1,K
CALL SUBTR(I,L)
525 CONTINUE

```

```

526 CONTINUE
B(I)=B(I)+Q(I)
530 CONTINUE
DO 535 I=1,NU
K=MC(I)
T1=DCP(K)+ACP(K)*T(I)
T2=DCH(K)+ACP(K)*T(I)
ALFA=VOL(I)*T1*T2
B(I)=B(I)/ALFA
DO 532 J=1,NU
H(I,J)=H(I,J)/ALFA
532 CONTINUE
535 CONTINUE
WRITE(6,536)NP,M
536 FORMAT(/,T20,'MATRIZES RECALCULADAS PARA'
  ' LOOP=',I3,'E M=',I3)
  WRITE(6,1015)((H(IKZ,JKZ),JKZ=1,NU),IKZ=1,NU)
1015 FORMAT(10X,'H',/,12(F10.5))
  WRITE(6,1016)(B(JKZ),JKZ=1,NU)
1016 FORMAT(10X,'B' ,/,12(F10.5))

C
C          CALCULO DO CAMPO DE TEMPERATURA
C          NO INSTANTE SEGUINTE (MET. DE RUNGE-KUTTA 4)
540 DO 560 IRUN=1,4
  DO 550 I=1,NU
    F(I)=0.
    -- 545 J=1,NU
    F(I)=F(I)+H(I,J)*Y(J)
545 CONTINUE
  F(I)=F(I)+B(I)
550 CONTINUE
C
C          CALL RUNGE(NU,Y,F,TEM,PASSO,IRUN)
C
560 CONTINUE
  DO 565 I=1,NU
    T(I)=Y(I)
565 CONTINUE
  IESP=IESP+1
  IF(IESP.LT.INT)GO TO 600
  IESP=0
  IM=IM+1
  DO 570 J=1,NU
    TETA(IM,J)=Y(J)
570 CONTINUE
  DO 580 J=N1,N2
    TETA(IM,J)=TETA(1,J)
580 CONTINUE
  TEMPO(IM)=TEM
600 CONTINUE
  WRITE(6,610)NP,NPAS,INT,ICAL,PASSO
610 FORMAT('1',///,T20,'LOOP=',I3,
  ///,T20,'NUM. DE PASSOS=',I5,
  ///,T20,'ESP. DE IMPRESSAO=',I5,

```

```

%//,T20,'ESP. DE CALCULO=',15,
%//,T20,'PASSO='F6.4)
DO 640 I=1,IM
  WRITE(6,620)TEMPO(I)
620 FORMAT(//,10X,'TEMPO=',F8.3)
  WRITE(6,630)(TETA(I,J),J=1,N2)
630 FORMAT(//,10(2X,F10.5))
640 CONTINUE
  IF(IESP.EQ.0) GO TO 650
  WRITE(6,645)NP,IESP
645 FORMAT(//,120,'VERIFIQUE DADOS LOOP=',I3,
  //,120,'IESP=',I3)
650 IF(ICAL.EQ.0.OR.B00L) GO TO 660
  WRITE(6,655)NP,ICAL
655 FORMAT(//,T20,'VERIFIQUE DADOS LOOP=',I3,
  //,T20,'ICAL=',I3)
  CALL EXIT
660 IF(NP.GE.NLOOP) GO TO 1000
  NP=NP+1
  TEMPO(1)=TEMPO(IM)
  DO 670 J=1,NU
    TETA(1,J)=T(J)
670 CONTINUE
  GO TO 480
1000 CALL EXIT
END
SUBROUTINE CONVE
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
ICOD=0
N(NA,1)=N(NA,1)+1
IF(N(NA,1)-3)30,30,10
10 WRITE(6,20)NA
20 FORMAT(//,'N. DE LIGACOES DE CONVECCAO'
  ' SUPERIOR A 3, NO=',I3)
  ICOD=1
  RETURN
30 K=4+N(NA,1)
  N(NA,K)=NB
  K1=1+2.*N(NA,1)-1
  K2=K1+1
  C(NA,K1)=A
  C(NA,K2)=FLOAT(NH)
  RETURN
END
SUBROUTINE CONDU
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
ICOD=0
N(NA,2)=N(NA,2)+1

```

```

IF(N(NA,2)=6)30,30,10
10 WRITE(6,20)NA
20 FORMAT(//,'N. DE LIGACOES DE CONDUCAO'
  ' SUPERIOR A 6, NO=',I3)
  ICOD=1
  RETURN
30 K=N(NA,2)+7
  N(NA,K)=NB
  K1=7+2*(N(NA,2)-1)
  K2=K1+1
  C(NA,K1)=A
  C(NA,K2)=B1
  RETURN
END
SUBROUTINE PADI
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
  ICOD=0
  N(NA,3)=N(NA,3)+1
  IF(N(NA,3)=8)30,30,10
10 WRITE(6,20)NA
20 FORMAT(//,'N. DE LIGACOES DE RADIACAO'
  '$SUPERIOR A 8, NO=',I3)
  ICOD=1
  RETURN
30 K=N(NA,3)+13
  N(NA,K)=NB
  K1=19+2*(N(NA,3)-1)
  K2=K1+1
  C(NA,K1)=A
  C(NA,K2)=B1
  RETURN
END
SUBROUTINE TRANSF
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
  ICOD=0
  N(NA,4)=N(NA,4)+1
  IF(N(NA,4)=2)30,30,10
10 WRITE(6,20)I
20 FORMAT(10X,'NUM. DE LIGACOES DE TRANSF.'
  '$ DE MASSA SUPERIOR A 2, NO=',I3)
  ICOD=1
  RETURN
30 K=21+N(NA,4)
  N(NA,K)=NB
  K1=35+3*(N(NA,4)-1)
  K2=K1+1
  K3=K1+2
  C(NA,K1)=A

```

```

C(NA,K2)=B1
C(NA,K3)=NH
RETURN
END
SUBROUTINE SUBV(I,L)
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
J1=4+L
J=N(I,J1)
J2=1+2*(L-1)
J3=J2+1
NH=IFIX(C(I,J3))
TE=(T(I)+T(J))/?
EH=DCV(NH)+ACV(NH)*TE
HH=EH*C(I,J2)
H(I,I)=H(I,I)-HH
IF(J=NU)10,10,20
10 H(I,J)=H(I,J)+HH
RETURN
20 B(I)=B(I)+HH*T(J)
RETURN
END
SUBROUTINE SUHC(I,L)
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
J1=7+L
J2=7+2*(L-1)
J3=J2+1
J=N(I,J1)
JJ=MC(I)
A1=DCOND(JJ)+ACOND(JJ)*T(I)
JJ=MC(J)
A2=DCOND(JJ)+ACOND(JJ)*T(J)
AK=(2.0*A1*A2)/(A1+A2)
HH=C(I,J2)*AK/C(I,J3)
H(I,I)=H(I,I)-HH
IF(J=NU)10,10,20
10 H(I,J)=H(I,J)+HH
RETURN
20 B(I)=B(I)+HH*T(J)
RETURN
END
SUBROUTINE SUBR(I,L)
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
J1=13+L
J=N(I,J1)
J2=19+2*(L-1)

```

```

J3=J2+1
TB1=T(I)+273.
TB2=T(J)+273.
U=(TB1**2+TB2**2)*(TB1+TB2)
HH=C(I,J2)*C(T,J3)*U
H(I,I)=H(I,I)-HH
IF(J=NU)10,10,20
10 H(I,J)=H(I,J)+HH
RETURN
20 B(I)=B(I)+HH*T(J)
RETURN
END
SUBROUTINE SUBTR(I,L)
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),U(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
J1=21+L
J=N(I,J1)
J2=35+3*(L-1)
J3=J2+1
J4=J2+2
VEL=C(I,J2)
D=C(I,J3)
NH=C(I,J4)
IF(I.LT.J)VEL=-VEL
TE=T(I)
CP=DCP(NH)+ACP(NH)*TE
CH=DCH(NH)+ACH(NH)*TE
ALFA=CH*VOL(I)*CP
HH=ALFA*VEL/(2.*D)
H(I,I)=H(I,I)-HH
IF(J=NU)10,10,20
10 H(I,J)=H(I,J)+HH
RETURN
20 B(I)=B(I)+HH*T(J)
RETURN
END
SUBROUTINE LINE(X1,Y1,X2,Y2,ANG,D)
ANG=(Y1-Y2)/(X1-X2)
D=Y1-X1*ANG
RETURN
END
SUBROUTINE RUNGF(N,Y,F,X,H,M)
COMMON/RUN/PHI(150),SAVEY(150)
DIMENSION Y(N),F(N)
GO TO(1,2,3,4),M
C
C      PASSO 1
C
1 DO 22 J=1,N
  SAVEY(J)=Y(J)
  PHI(J)=F(J)
22 Y(J)=SAVEY(J)+0.5*H*F(J)

```

```
X=X+0.5*H
GO TO 100
C
C          PASSO 2
C
2 DO 33 J=1,N
PHI(J)=PHI(J)+2.*F(J)
33 Y(J)=SAVEY(J)+0.5*H*F(J)
GO TO 100
C
C          PASSO 3
C
3 DO 44 J=1,N
PHI(J)=PHT(J)+2.*F(J)
44 Y(J)=SAVEY(J+H+F(J))
X=X+0.5*H
GO TO 100
C
C          PASSO 4
C
4 DO 55 J=1,N
55 Y(J)=SAVEY(J)+(PHT(J)+F(J))*H/6.
100 RETURN
END
```

C.2 - PROGRAMA PARA O CÁLCULO DE CAMPOS TÉRMICOS EM REGIME PERMANENTE PELO MÉTODO QUASI-FINITO.

a) As restrições de numeração e dimensionamento são as mesmas apresentadas nos itens a), b) e c) de C.1.

b) Cartões de dados

1º

TITULO

1 cartão

20A4

2º

NU	NM	NHC	NMC	NMU	NMAX	TOL
I5	I5	I5	I5	I5	I5	F10.3

1 cartão

NU, NN, NHC, NMC, NMV - Ver 4º grupo de cartões em

C.1

NMAX - Número máximo de iterações para a procura do campo de temperaturas.

TOL - Tolerância desejada no campo de temperaturas (Ver figura)

A partir do cartão acima o usuário deve fornecer os 7 grupos de dados apresentados do 4º ao 11º grupos de dados em C.1, na ordem em que estes aparecem.

A seguir pode ser observado o programa para regime permanente pelo método quasi-finito.

```

COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
DIMENSION TITLE(20),TETA(10,200)
DIMENSION TP1(5),CP1(5),TP2(5),CP2(5)
DIMENSION TC1(5),COND1(5),TC2(5),COND2(5)
DIMENSION TH1(5),CH1(5),TH2(5),CH2(5)
DIMENSION TV1(10),CV1(10),TV2(10),CV2(10)
DIMENSION X(150),UL(150,150)
LOGICAL BOOL
BOOL=.TRUE.
READ(5,10)(TITLE(I),I=1,20)
10 FORMAT(20A4)
WRITE(6,10)(TITLE(I),I=1,20)
READ(5,20)NU,NN,NHC,NMC,NMV,NMAX,TOL
20 FORMAT(6I5,2F10.3)
WRITE(6,25)NU,NN,NHC,NMC
25 FORMAT('1',///,T20,'NOS DESCONHECIDOS=',I3,
      ///,T20,'NOS CONHECIDOS=',I3,
      ///,T20,'NUM. DE CONEXOES TERMICAS=',I3,
      ///,T20,'NUM. DE MODOS DE CONDUCAO=',I3)
      WRITE(6,30)NMV,NMAX,TOL
30 FORMAT(//,T20,'NUM. DE MODOS DE CONVECCAO=',I3,
      ///,T20,'NUM. MAX. DE ITERACOES=',I3,
      ///,T20,'TOLERANCIA='F6.4)
-- N1=NU+1
-- N2=NU+NN
DO 50 L=1,N2
READ(5,40)(I,T(I),Q(I))
40 FORMAT(I5,4F10.3)
50 CONTINUE
WRITE(6,50)
60 FORMAT(///,T20,'TEMPERATURAS INICIAIS')
DO 70 I=1,N2
WRITE(6,40)(I,T(I),Q(I))
70 CONTINUE
DO 85 L=1,N2
READ(5,80)(I,MC(I),VOL(I))
80 FORMAT(2I5,F10.3)
85 CONTINUE
WRITE(6,90)
90 FORMAT(//,T20,'VOLUMES E MODOS FISICOS')
DO 100 I=1,N2
WRITE(6,95)(I,MC(I),VOL(I))
95 FORMAT(2I5,E12.4)
100 CONTINUE
DO 110 L=1,NMC
READ(5,40)(I,TP1(I),CP1(I),TP2(I),CP2(I))
110 CONTINUE
WRITE(6,120)
120 FORMAT(///,T20,'CALOR ESPECIFICO')
DO 130 I=1,NMC
WRITE(6,40)(I,TP1(I),CP1(I),TP2(I),CP2(I))

```

```

130 CONTINUE
    DO 140 L=1,NMC
        READ(5,40)(I,TC1(I),COND1(I),TC2(I),COND2(I))
140 CONTINUE
    WRITE(6,150)
150 FORMAT(///,T20,'CONDUTIVIDADE')
    DO 160 I=1,NMC
        WRITE(6,40)(I,TC1(I),COND1(I),TC2(I),COND2(I))
160 CONTINUE
    DO 170 L=1,NMC
        READ(5,40)(I,TH1(I),CH1(I),TH2(I),CH2(I))
170 CONTINUE
    WRITE(6,180)
180 FORMAT(///,T20,'DENSIDADE')
    DO 190 I=1,NMC
        WRITE(6,40)(I,TH1(I),CH1(I),TH2(I),CH2(I))
190 CONTINUE
    DO 200 L=1,NMV
        READ(5,40)(I,TV1(I),CV1(I),TV2(I),CV2(I))
200 CONTINUE
    WRITE(6,210)
210 FORMAT(///,T20,'CONVECCAO')
    DO 220 I=1,NMV
        WRITE(6,40)(I,TV1(I),CV1(I),TV2(I),CV2(I))
220 CONTINUE
C
C----- GERACAO DOS COEFICIENTES
C----- DAS FUNCOES LINEARES
C
    DO 230 K=1,NMC
        X1=TP1(K)
        Y1=CP1(K)
        X2=TP2(K)
        Y2=CP2(K)
        CALL LINE(X1,Y1,X2,Y2,ANG,D)
        BOOL=ANG.EQ.0.AND.BOOL
        ACP(K)=ANG
        DCP(K)=D
C
        X1=TC1(K)
        Y1=COND2(K)
        X2=TC2(K)
        Y2=COND2(K)
        CALL LINE(X1,Y1,X2,Y2,ANG,D)
        BOOL=ANG.EQ.0.AND.BOOL
        ACOND(K)=ANG
        DCOND(K)=D
C
        X1=TH1(K)
        Y1=CH1(K)
        X2=TH2(K)
        Y2=CH2(K)
        CALL LINE(X1,Y1,X2,Y2,ANG,D)
        BOOL=ANG.EQ.0.AND.BOOL

```

ACH(K)=ANG

DCH(K)=D

230 CONTINUE

DO 240 K=1,NMV

X1=TV1(K)

Y1=CV1(K)

X2=TV2(K)

Y2=CV2(K)

CALL LINE(X1,Y1,X2,Y2,ANG,D)

BOOL=ANG.EQ.0.AND.BOOL

ACV(K)=ANG

DCV(K)=D

240 CONTINUE

C C GERACAO DO CAMPO INICIAL DE TEMPERATURAS

TM=0.

DO 250 I=N1,N2

TM=TM+T(I)

250 CONTINUE

TM=TM/NU

DO 260 I=1,NU

T(I)=TM

260 CONTINUE

C C MONTAGEM DA MATRIZ C

WRITE(6,330)

330 FORMAT('1',T20,'CONEXOES TERMICAS',//,T20,
%'A',T40,'B1',T50,'NA',T60,'NB',T70,'M',T80,'NH')

DO 460 L=1,NHC

READ(5,340)A,B1,NA,NB,M,NH

340 FORMAT(2F10.3,415)

WRITE(6,345)A,B1,NA,NB,M,NH

345 FORMAT(/,T18,F10.5,T38,F8.4,T47,I3,T57,
\$I3,T67,I3,T87,I3)

LUX=1

IF(NA-NB)370,350,360

350 WRITE(6,355)

355 FORMAT(//,T20,'ERRO DE DADOS (NA=NB)')

GO TO 1000

360 NS=NB

NB=NA

NA=NS

370 IF(NA-NU)390,390,380

380 WRITE(6,385)

385 FORMAT(//,T20,'ERRO DE DADOS (NA>NU)')

GO TO 1000

390 GO TO(400,410,420,425),M

400 CALL CONVE

IF(ICOD)430,430,1000

410 CALL CONDU

IF(ICOD)430,430,1000

C OPCAO PARA RADIAÇÃO

```

420 CONTINUE
425 CALL TRANSF
   IF(ICOD)430,430,1000
430 GO TO (440,460),LUX
440 IF(NB=NU)450,450,460
450 NB=NB
   NB=NA
   NA=NS
   LUX=2
   GO TO 390
460 CONTINUE

```

C SOLUCAO DO SISTEMA LTNEAR C

```

M=1
DO 470 I=1,NU
   TETA(M,I)=T(I)
470 CONTINUE
480 DO 500 I=1,NU
   B(I)=0.
   DO 490 J=1,NU
   H(I,J)=0.
490 CONTINUE
500 CONTINUE
DO 530 I=1,NU
   K=N(I,1)
   IF(K.EQ.0)GO TO 511
   DO 510 L=1,K
   CALL SUBV(I,L)
510 CONTINUE
511 K=N(I,2)
   IF(K.EQ.0)GO TO 521
   DO 520 L=1,K
   CALL SUBC(I,L)
520 CONTINUE
521 K=N(I,3)
   IF(K.EQ.0)GO TO 523
   DO 522 L=1,K
   CALL SUBR(I,L)
522 CONTINUE
523 K=N(I,4)
   IF(K.EQ.0)GO TO 529
   DO 528 L=1,K
   CALL SUBTR(I,L)
528 CONTINUE
529 B(I)=-B(I)-D(I)
530 CONTINUE
   CALL DECOM1(150,NU,H,UL)
   CALL SOLVE1(150,NU,UL,B,X)
   IF(.NOT.B00L) GO TO 580
   DO 540 I=1,NU
   T(I)=X(I)
540 CONTINUE

```

```

      WRITE(6,550)
550 FORMAT(///,T20,'CAMPO DE TEMPERATURAS'
      %' (PROP. FIS. CONSTANTES)',//,T21,'NO',T33,'TEMP.')
      DO 570 I=1,NU
      WRITE(6,560)I,T(I)
560 FORMAT(/,T20,I3,10X,F10.3)
570 CONTINUE
      CALL EXIT
580 M=M+1
      DO 590 I=1,NU
      TETA(M,I)=X(I)
590 CONTINUE

C
C          VERIFICACAO DA CONVERGENCIA
C
      TMAX=ABS(TETA(M,1)-T(1))
      DO 600 I=2,NP=NFIX
      TT=ABS(TETA(M,I)-T(I))
      IF(TT.LT.TMAX)GO TO 600
      TMAX=TT
600 CONTINUE
      IF(TMAX.GT.TOL)GO TO 640
      WRITE(6,610)M,TOL
610 FORMAT(///,T20,'CONVERGIU COM UM NUM. DE'
      %' ITERACOES=',I2,2X,'E TOLERANCIA=',F6.4)
      DO 630 I=1,NU
      WRITE(6,620)(I,(TETA(M1,I),M1=1,M)) -----
620 FORMAT(/,20X,I3,5X,B(F10.3,2X))
630 CONTINUE
      CALL EXIT
640 IF(M.EQ.NMAX)GO TO 660
      DO 650 I=1,NU
      T(I)=X(I)
650 CONTINUE
      GO TO 480
660 WRITE(6,670)M,TOL
670 FORMAT(///,T20,'NAO CONVERGIU COM UM NUM.'
      %' DE ITERACOES=',I2,2X,'E TOLERANCIA=',F6.4)
      DO 680 I=1,NU
      WRITE(6,620)(I,(TETA(M1,I ),M1=1,M))
680 CONTINUE
1000 CALL EXIT
END

SUBROUTINE CONVE
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
ICOD=0
N(NA,1)=N(NA,1)+1
IF(N(NA,1)=3)30,30,10
30 WRITE(6,20)NA
20 FORMAT(//,'N. DE LIGACOES DE CONVECCAO'
      %' SUPERIOR A 3, NO=',I3)

```

```

ICOD=1
RETURN
30 K=4+N(NA,1)
N(NA,K)=NB
K1=1+2.*(N(NA,1)-1)
K2=K1+1
C(NA,K1)=A
C(NA,K2)=FLOAT(NH)
RETURN
END
SUBROUTINE CONDU
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
ICOD=0
N(NA,2)=N(NA,2)+1
IF(N(NA,2)=6)30,30,10
10 WRITE(6,20)NA
20 FORMAT(//,'N. DE LIGACOES DE CONDUCAO'
$' SUPERIOR A 6, NO=',I3)
ICOD=1
RETURN
30 K=N(NA,2)+7
N(NA,K)=NB
K1=7+2.*(N(NA,2)-1)
K2=K1+1
C(NA,K1)=A
C(NA,K2)=B1
RETURN
END
SUBROUTINE RADI
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),S(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
ICOD=0
N(NA,3)=N(NA,3)+1
IF(N(NA,3)=8)30,30,10
10 WRITE(6,20)NA
20 FORMAT(//,'N. DE LIGACOES DE RADIAÇÃO'
$' SUPERIOR A 8, NO=',I3)
ICOD=1
RETURN
30 K=N(NA,3)+13
N(NA,K)=NB
K1=19+2*(N(NA,3)-1)
K2=K1+1
C(NA,K1)=A
C(NA,K2)=B1
RETURN
END
SUBROUTINE TRANSF
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,

```

```

%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
ICOD=0
N(NA,4)=N(NA,4)+1
IF(N(NA,4)-2)30,30,10
10 WRITE(6,20)
20 FORMAT(10X,'NUM. DE LIGACOES DE TRANSF.'
$' DE MASSA SUPERIOR A 2, NO= ',I3)
ICOD=1
RETURN
30 K=21+N(NA,4)
N(NA,K)=NB
K1=35+3*(N(NA,4)-1)
K2=K1+1
K3=K1+2
C(NA,K1)=A
C(NA,K2)=B1
C(NA,K3)=NH
RETURN
END
SUBROUTINE SUBV(I,L)
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
J1=4+L
J=N(I,J1)
J2=1+2*(L-1)
J3=J2+1
NH=IFIX(C(I,J3))
TE=(T(I)+T(J))/2.
EH=DCV(NH)+ACV(NH)*TE
HH=EH*C(I,J2)
H(I,I)=H(I,I)-HH
IF(J-NU)10,10,20
10 H(I,J)=H(I,J)+HH
RETURN
20 B(I)=B(I)+HH*T(J)
RETURN
END
SUBROUTINE SUBC(I,L)
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
J1=7+L
J2=7+2*(L-1)
J3=J2+1
J=N(I,J1)
JJ=MC(I)
A1=DCOND(JJ)+ACOND(JJ)*T(I)
JJ=MC(J)
A2=DCOND(JJ)+ACOND(JJ)*T(J)

```

```

AK=(2.0*A1*A2)/(A1+A2)
HH=C(I,J2)*AK/C(I,J3)
H(I,I)=H(I,I)-HH
IF(J-NU)10,10,20
10 H(I,J)=H(I,J)+HH
RETURN
20 B(I)=B(I)+HH*T(J)
RETURN
END
SUBROUTINE SUBR(I,L)
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
J1=13+L
J=N(I,J1)
J2=19+2*(L-1)
J3=J2+1
TB1=T(I)+273.
TB2=T(J)+273.
U=(TB1**2+TB2**2)*(TB1+TB2)
HH=C(I,J2)*C(I,J3)*U
H(I,I)=H(I,I)-HH
IF(J-NU)10,10,20
10 H(I,J)=H(I,J)+HH
RETURN
20 B(I)=B(I)+HH*T(J)
RETURN
END
SUBROUTINE SUBTR(I,L)
COMMON N(150,23),C(150,40),NU,A,B1,NA,NB,NH,
%ICOD,H(150,150),B(150),MC(200),ACOND(5),DCOND(5),
%ACV(10),DCV(10),T(200),Q(200)
COMMON VOL(150),ACP(5),DCP(5),ACH(5),DCH(5)
J1=21+L
J=N(I,J1)
J2=35+3*(L-1)
J3=J2+1
J4=J2+2
VEL=C(I,J2)
D=C(I,J3)
NH=C(I,J4)
IF(I.LT.J) VEL=-VEL
TE=T(I)
CP=DCP(NH)+ACP(NH)*TE
CH=DCH(NH)+ACH(NH)*TE
ALFA=CH*VOL(I)*CP
HH=ALFA*VEL/(2.+D)
H(I,I)=H(I,I)-HH
IF(J-NU)10,10,20
10 H(I,J)=H(I,J)+HH
RETURN
20 B(I)=B(I)+HH*T(J)
RETURN

```

```

END
SUBROUTINE LINE(X1,Y1,X2,Y2,ANG,D)
ANG=(Y1-Y2)/(X1-X2)
D=Y1-X1*ANG
RETURN
END
SUBROUTINE DECOM1(NDIM,N,A,UL)
COMMON/COM20/ IPS(150)
DIMENSION A(NDIM,NDIM),UL(NDIM,NDIM)
DIMENSION SCALES(150)
ZERO=0.0
DO 5 I=1,N
IPS(I)=I
ROWNRM=0.
DO 2 J=1,N
UL(I,J)=A(I,J)
IF(ROWNRM-ABS(UL(I,J))) 1,2,2
1 ROWNRM=ABS(UL(I,J))
2 CONTINUE
IF(ROWNRM.EQ.ZERO) GO TO 4
3 SCALES(I)=1./ROWNRM
GO TO 5
4 CALL SING(1)
SCALES(I)=0.
5 CONTINUE
NM1=N-1
----DO 17 K=1,NM1 ---- - - - - -
BIG=0.
DO 11 I=K,N
IP=IPS(I)
SIZE=ABS(UL(IP,K)*SCALES(IP))
IF(SIZE-BIG) 11,11,10
10 BIG=SIZE
IDXPIV=I
11 CONTINUE
IF(BIG.EQ.ZERO) GO TO 12
GO TO 13
12 CALL SING(2)
GO TO 17
13 IF(IDXPIV-K) 14,15,14
14 J=IPS(K)
IPS(K)=IPS(IDXPIV)
IPS(IDXPIV)=J
15 KP=IPS(K)
PIVOT=UL(KP,K)
KP1=K+1
DO 16 I=KP1,N
IP=IPS(I)
EM=-UL(IP,K)/PIVOT
UL(IP,K)=-EM
DO 16 J=KP1,N
UL(IP,J)=UL(IP,J)+EM*UL(KP,J)
16 CONTINUE
17 CONTINUE

```

```

KP=IPS(N)
IF(ABS(UL(KP,N)).EQ.ZERO) GO TO 18
GO TO 19
18 CALL SING(2)
19 RETURN
END
SUBROUTINE SOLVE1(NDIM,N,UL,B,X)
COMMON/COM20/ IPS(150)
DIMENSION UL(NDIM,NDIM)
DIMENSION B(1),X(1)
NP1=N+1
IP=IPS(1)
X(1)=B(IP)
DO 2 I=2,N
IP=IPS(I)
IM1=I-1
SUM=0.
DO 1 J=1,IM1
1 SUM=SUM+UL(IP,J)*X(J)
2 X(I)=B(IP)-SUM
IP=IPS(N)
X(N)=X(N)/UL(IP,N)
DO 4 IBACK=2,N
I=NP1-IBACK
IP=IPS(I)
IP1=I+1
SUM=0.
DO 3 J=IP1,N
3 SUM=SUM+UL(IP,J)*X(J)
4 X(I)=(X(I)-SUM)/UL(IP,I)
RETURN
END
SUBROUTINE SING(IWHY)
11 FORMAT(//10X,'MATRIZ CON FILA NULA EN DECOMP')
%' - DIVIDE POR ZERO EM SOLVE'
NOT=6
GO TO (1,2),IWHY
1 WRITE(NOT,11)
GO TO 10
2 WRITE(NOT,12)
10 RETURN
END

```

BIBLIOGRAFIA

- 1 - A.N. MAZZAWI, A Quasi-Finite Approach for the Determination of the Temperature in a Single Point Cutting Tool, Thesis, Sir George Williams University, Canada, 1970.
- 2 - W.M. MANSOUR et al., Temperature Field and Crater Wear in Metal Cutting Using a Quasi-Finite Element Approach, Int. J. Prod. Res., 1973, vol. 11, n° 1, 59-68.
- 3 - W.M. MANSOUR et al., A Quasi-Finite Element Model for Determining Isotherms in Contact Surfaces in Motion, Canadian Congress of Applied Mechanics, 1971.
- 4 - ODEN, J.T., Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, 1972.
- 5 - FINLAYSON, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972.
- 6 - L.E. ELSGOLD, Calculus of Variations, Addison Wesley, 1962.
- 7 - A.M. ARTHURS, Calculus of Variations, Routledge and Kegan Paul, 1975.
- 8 - O.C. ZIENKIEWICS, The Finite Element Method, McGraw-Hill, 1977.
- 9 - V. ARPACI, Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley, 1966
- 10 - DESAI and ABEL, Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand Reinhold Company, 1972.

- 11 - F. KREITH, Princípios de Transmissão de Calor, Edgar Blucher, 1965.
- 12 - M.F. SPIEGEL, Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas, McGraw-Hill do Brasil, 1974.
- 13 - FORSYTHE and MOLER, Computer Solution of Linear Algebraic Systems.
- 14 - A. LOULA e A.C. GALEÃO, Vibrações de Sistemas Elásticos Lineares, Publicação Didática, COPPE/UFRJ, 1976.