O MÉTODO DE RIEMANN NA PROPAGAÇÃO DE ONDAS PLANAS EM MEIOS ELÁSTICOS INOMOGÊNEOS

Moysés Zindeluk

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.)

Aprovada por:

Luiz Bevilacqua
(Presidente)

Alberto Luiz Coimbra

Affonso Carlos S. da Silva Telles

Luiz Carlos Martins

Marco Antonio Raupp

Raúl Antonino Feijoo

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

NOVEMBRO DE 1978

in memoriam

Miguel Zindeluk

AGRADEÇO ao prof. Luiz Bevilacqua, a quem se devem as principais idéias aqui apresentadas, pelo otimismo , amizade e equilíbrio com que sempre me acompanhou.

aos colegas e amigos da COPPE e do CBPF, entre os quais Abimael D. Loula, Augusto César N. Galeão, Edgardo O. Taroco, Jules G. Slama, Marco Antonio Raupp, Raúl A. Feijoo e Roberto A. Tenembaum, por suas sugestões , colaboração e incentivo.

ao aluno Luis André Joia, bolsista de iniciação científica do CNPq, que com grande dedicação nos auxiliou nos trabalhos de computação.

à Sra. Alejandra Rotania de Pozzi, pela amizade e por sua datilografia cuidadosa.

aos amigos e familiares, pelo carinho e apoio.

à Ruth.

o autor

SUMÁRIO

Estabelecem-se as equações para os problemas unidimensionais de propagação de ondas de deslocamento e tensão em meios elásticos inomogêneos. O método de Riemann-Green é examinado e sua aplicação ao problema de valor inicial é desenvolvida. Com a solução numérica das equações integrais resultantes, a função de Riemann é construida, para meios suaves e seccionalmente suaves, apresentando-se vários exemplos de materiais e formas de onda. A possibilidade de se incluir condições de contorno é considerada, obtendo-se a solução para o meio semi-infinito.

ABSTRACT

The governing equations for one-dimensional displacement and stress waves in non-homogeneous elastic media are derived. The use of Riemann-Green's method is suggested and applied to the initial value problem. Upon numerical solution of the resulting integral equations, the Riemann function for smooth and sectionally-smooth media is constructed, several examples of materials and wave shapes being shown. The possible inclusion of boundary conditions is considered and the solution for semi-infinite media is obtained.

INDICE

CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO

1. Ondas em Meios Inomogêneos 1
2. Equação da Onda 14
3. Variáveis Caraterísticas 33

CAPÍTULO II: MÉTODO DE SOLUÇÃO

4. Operadores Adjuntos e Funções de Riemann-Green 61
5. O Método de Riemann 83
6. Meio Infinito 93
7. Meio Semi-Infinito 102

CAPÍTULO III: IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

8. Função de Riemann para Materiais Suaves e Seccionalmente Suaves 113
9. Solução Numérica do Problema de Cauchy 137
10. Exemplos 144

BIBLIOGRAFIA 172

APÊNDICE: Programa de Computação 177

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1. ONDAS EM MEIOS INOMOGÊNEOS

1.1. Problemas de propagação.

A presente escassez de métodos matemáticos e procedimentos numéricos diretamente aplicáveis a problemas de propagação de ondas não se deve, certamente, a que tais problemas sejam pouco frequentes. De fato, quase todos os movimentos da matéria envolvem a propagação de ondas, já que, para qualquer material real (não rígido), os esforços aplicados a uma dada porção se propagam para as partes vizinhas com velocidade finita.

Uma hipótese simplificadora, implícita em muitos trabalhos, é aplicável quando a escala de tempo em que ocorrem mudanças importantes nas condições dinâmicas (e.g. a intensidade de uma ação externa) é muito maior que o tempo em que as ondas percorrem todo o dominio de interesse. Tal situação é deliberadamente provocada, por exemplo, no ensaio mecânico de materiais, onde a curva tensão x deformação é obtida com pequena velocidade de deformação. Para corpos de prova longos e deformações rápidas, não se poderia determinar as propriedades do material sem o recurso a uma análise de propagação[1,2]. Ainda sob tal hipótese, vários processos industriais de conformação, aparentemente rápidos, são analisados com modelos quase-estáticos.

Embora de difícil tratamento, os problemas de propagação de ondas são inevitáveis na abordagem de certos fenômenos naturais, tais como os sismos e a circulação sanguinea, e num grande número de processos tecnologicamente importantes, como as deformações por impacto, os transientes hidráulicos, as ondas eletromagnéticas e acústicas na atmosfera, a prospecção geológica, a ultrasonografia, etc.

A maioria dos resultados conhecidos para problemas de propagação concerne problemas lineares, em meios homogêneos e configurações geométricas simples.

A não-linearidade é a dificuldade mais importante, pois descarta grande parte dos instrumentos de análise matemática disponiveis. Assim, embora se estude o comportamento dinâmico de materiais[3,4,5], as equações constitutivas não lineares são de dificil aplicação, exceto em alguns casos quase-lineares, em que se pode transformar o problema em um linear, pela transformação da hodógrafa[6,7]. O método das características[6], que será abordado adiante (sec. 3), é o único até hoje extensamente usado na solução numérica de problemas não-lineares de propagação. Como consequência da falta de métodos analíticos, muitos problemas não-lineares impõem o recurso a estimativas e experimentos[8,9].

1.2. Meios inomogêneos.

A modelagem matemática de um meio inomogêneo consiste, essencialmente, na adoção de padrões simples para a variação espacial dos parâmetros constitutivos. A adequação do modelo depende largamente do tipo de meio e problema de propagação investigado.

Flutuações espaciais e temporais das propriedades mé dias são observáveis em todo meio real. Tal inomogeneidade aleatória[10] é um fator importante em certos fenômenos, como o espalhamento e a atenuação de ondas acústicas e eletromagnéticas, especialmente no caso de fluidos sujeitos a turbulencia[11].

O tipo de inomogeneidade que será aqui estudado, consiste na variação macroscópica das propriedades médias de um material. Superposta à inomogeneidade aleatória, essa inomogeneidade regular é frequentemente encontrada. Enquanto em meios fluidos, como a atmosfera[12] e o mar, os gradientes de propriedades ocorrem pela presença atual de campos não uniformes de temperatura e pressão, os meios sólidos, além de tais efeitos atuais, podem apresentar inomogeneidade regular permanente, como um efeito "cristalizado" de sua história de formação. Tal é o caso , por exemplo, dos solos[13] e de certos tecidos biológicos, como os ossos[14] .

As ligas metálicas têm seu comportamento diretamente ligado à estrutura granular microscópica, moldada ao longo de sua história térmica, quimica e mecânica. Assim, a não-uniformidade de um processo pode provocar inomogeneidade regular num corpo metálico. Um exemplo interessante é a produção de um corpo inomogêneo por um processo dinâmico de deformação plástica[8] (fig. 1.1.): um projétil, originalmente homogêneo, deforma-se ao colidir com um obstáculo. Sofrendo encruamento não-uniforme, o material do projétil é agora inomogêneo , quanto ao comportamento plástico.

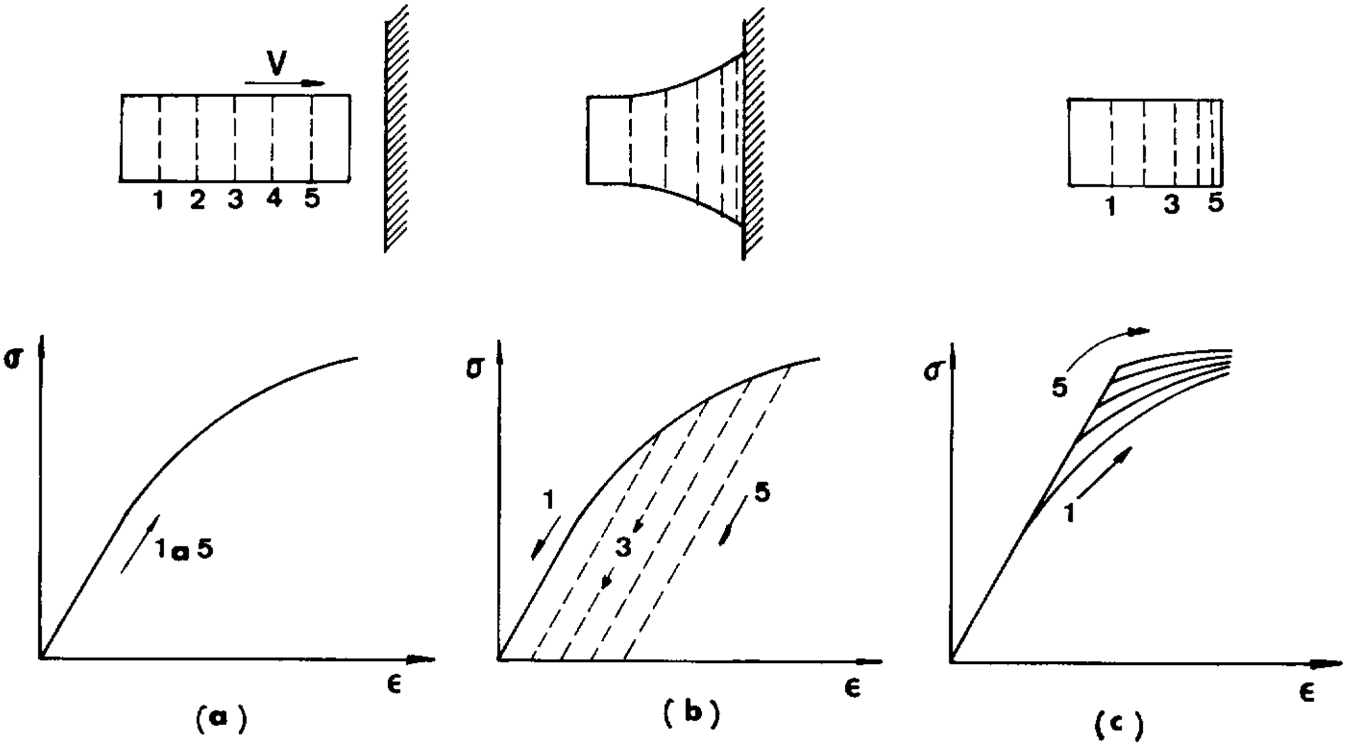


Figura 1.1.: Encruamento dinâmico
(a) projétil inicialmente homogêneo
(b) no impacto, cada região sofre deformação diferente
(c) corpo inomogêneo extraido do projétil

Do ponto de vista das aplicações práticas e também quanto ao tipo de problema matemático que colocam, os problemas de propagação de ondas em meios inomogêneos podem ser divididos em duas categorias: os problemas de simulação , em que se procura a resposta de um meio conhecido a uma excitação dada, e os problemas de identificação , em que se busca determinar o perfil das propriedades do meio, dada a excitação e registrada a resposta.

Embora os problemas de identificação tenham importantes aplicações (diagnóstico médico por sonografia, prospecção geo lógica, controle de qualidade) e, formalmente, pareçam até mais simples - porque reduzem a equações diferenciais de ordem inferior, em que as incógnitas são os coeficientes das equações de onda - sua real utilidade está vinculada à possibilidade de se construir a solução conhecendo-se a resposta do meio apenas em certo número de pontos (microfones, sondas, transdutores). Com tal restrição, os problemas de identificação se tornam bem mais complexos, envolvendo certo grau de indeterminação.

A figura 1.2. mostra uma ultrasonografia do ventre de uma gestante, que possibilitou avaliar a idade do feto pela dimensão da cabeça. Observemos que, apesar de parecer a imagem de uma área, é na realidade um conjunto de manchas, com as quais o especialista "interpola" visualmente a imagem completa. A execução matemática de tal leitura constituiria a solução aproximada para o problema de identificação.

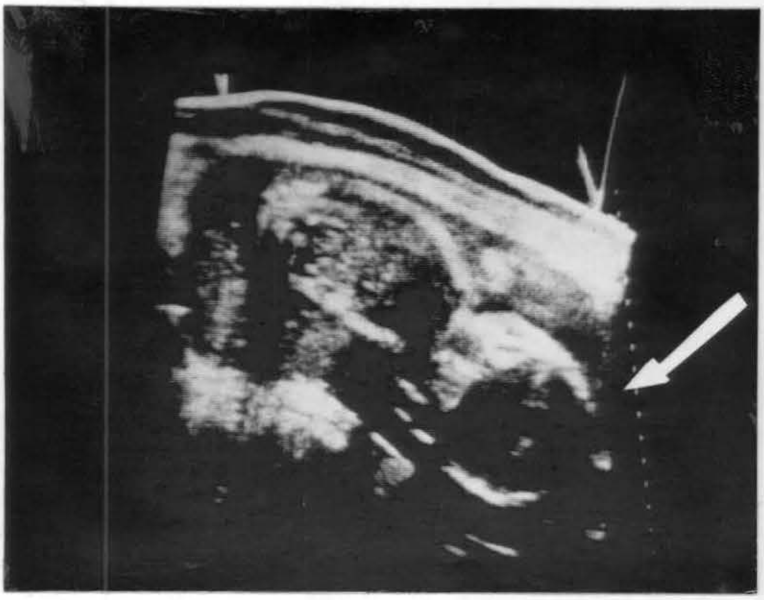


Figura 1.2.: Ultrasonografia do ventre de uma gestante.
A seta indica a cabeça do feto.

O desenvolvimento de tais procedimentos numéricos está intimamente ligado à solução dos problemas de simulação dentro dum contexto de fórmulas de representação, nas quais a solução é expressa como um funcional das propriedades do meio e das condições de excitação, sendo esses dois fatores claramente separados. Assim, um método de simulação totalmente numérico, em que as condições iniciais e de contorno e os carregamentos devam ser incorporados desde o inicio, fornece pouca visão das características próprias do material.

1.3. Aspectos geométricos.

Em problemas envolvendo interfaces, a complexidade geométrica de tais contornos pode trazer um obstáculo importante à análise. Quando tal complexidade é irremovível, tem-se obtido soluções com a simplificação das características da onda. Tal é o caso da onda plana, modelo apropriado para um pequeno trecho de superfície esférica, com os correspondentes métodos geométricos, amplamente utilizados em acústica arquitetônica e ótica.

Para a consideração simultanea de complexidade geométrica e inomogeneidade material, vê-se algum futuro no método dos elementos finitos. A maior dificuldade na aplicação de tal método a problemas hiperbólicos surge do fato de que nestes problemas é possível a propagação de superfícies de descontinuidade, cujo posicionamento no interior de elementos seria difícil. Além disso, tais superfícies trazem complicações à formulação das equações válidas para cada elemento[15].

Um recurso comum de simplificação geométrica é a consideração de modelos dotados de certa simetria, o que conduz a problemas uni e bi-dimensionais. Do ponto de vista da transmissão de sinais, tais modelos têm comportamento diferente dos tridimensionais, o que pode trazer certa dificuldade no tratamento do problema de identificação de meios inomogêneos. Neste sentido, os modelos uni-dimensionais podem trazer mais vantagem que os bi-dimensionais, como será visto a seguir.

Considere-se o problema de valor inicial para a propagação da perturbação $u(\underset{\sim}{x},t)$ em R^n, dado pela equação da onda

$$u_{tt} - c^2\nabla_n^2\, u = 0 \qquad \underset{\sim}{x} \in R^n,\ t>0 \qquad (1.1)$$

com as condições iniciais

$$\begin{aligned} u(\underset{\sim}{x},0) &= \phi(\underset{\sim}{x}) \\ u_t(\underset{\sim}{x},0) &= \psi(\underset{\sim}{x}) \end{aligned} \qquad \underset{\sim}{x} \in R^n \qquad (1.2)$$

onde ∇_n^2 é o Laplaciano n-dimensional e $u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$.

Para $n=1$, é fácil verificar que (1.1) admite a solução geral

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct) \qquad (1.3)$$

o que indica a possibilidade de propagação de ondas sem distorção. De fato, com as condições iniciais (1.2), obtém-se a solução de d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x-ct) + \phi(x+ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds\right] \qquad (1.4)$$

Observa-se da solução acima que a condição inicial de deslocamento se propaga inalterada, enquanto há dispersão da condição inicial de velocidade: o valor $u(x,t)$ depende de ψ em todo o intervalo $(x-ct, x+ct)$, e de ϕ apenas nos extremos desse intervalo.

As soluções tridimensionais apresentam a propriedade de manter a nitidez da perturbação inicial, tanto em ϕ como em ψ. De fato, para os problemas de radiação esférica (ver [16] , cap.III), pode-se utilizar soluções do tipo

$$u(R,t) = \frac{F(R-ct)}{R} + \frac{G(R+ct)}{R} \qquad (1.5)$$

e a solução $u(\underset{\sim}{x},t)$ do problema de Cauchy (1.1-2) para $n \geq 3$ ímpar envolve os valores de ϕ e ψ apenas na superficie esférica de raio ct , com centro em $\underset{\sim}{x}$.

A propriedade de nitidez observada acima, chamada principio de Huyghens, não é satisfeita pelas soluções para n par. Em particular, para n=2, não é possivel construir soluções progressivas tais como (1.3) e (1.5) e a solução $u(\underset{\sim}{x},t)$ do problema de valor inicial depende[16] dos valores de ϕ e ψ em todo o disco de raio ct, com centro em $\underset{\sim}{x}$.

Do exposto acima, conclui-se que os modelos unidimensionais podem ser utilizados com vantagem no estudo de propagação de ondas em meios inomogêneos, ao menos no caso de velocidade inicial nula, em que a distorção apresentada pelas ondas de tensão e deslocamento poderá ser diretamente associada à inomogeneidade. A simplicidade matemática e essa facilidade de identificação tornam os modelos unidimensionais convenientes e úteis.

1.4. Vantagens do método de Riemann.

A maior parte deste trabalho será dedicada à construção de soluções para o problema de valor inicial de propagação de ondas unidimensionais $u(x,t)$ em um meio elástico inomogêneo. Tal problema é descrito por uma equação diferencial linear hiperbólica, sucintamente descrita por

$$L[u] = f(x,t) \qquad x \varepsilon (-\infty,\infty),\ t>t_o$$

e pelas condições iniciais

$$u(x,t_o) = \phi(x)$$

$$u_t(x,\ t_o) = \psi(x)$$

ou, de forma mais compacta, com $\underset{\sim}{U} = (u, u_t)$

$$\underset{\sim}{U}(t_o) = (\phi, \psi)$$

Em vista do que foi exposto no §1.2 , é desejável estabelecer um procedimento cuja parte analítica consista em uma solução formal que separe claramente as caraterísticas do material inomogêneo das condições iniciais e esforços aplicados. Além disso, o trabalho numérico requerido para a efetiva construção de soluções particulares deve ser simplificado.

Para esclarecer melhor as vantagens específicas do método que será proposto, convém citar dois métodos importantes, usualmente empregados em problemas de propagação.

Na efetiva construção numérica de soluções, são utilizados métodos de *diferenças finitas* , geralmente sobre uma malha caraterística (ver sec. 3), no plano xt. Atualmente, tais métodos são os mais econômicos e precisos, tendo sido estendidos a mais dimensões espaciais[17]. Para a integração da equação diferencial, requer-se o uso das condições iniciais e dos carregamentos. Isto significa que uma visão geral do efeito da inomogeneidade sobre a onda é obtida somente por indução, a partir de um certo número de experimentos numéricos.

A *análise espectral* é outro método muito utilizado em problemas lineares de dinâmica de meios continuos. Neste mé todo, a variável tempo é eliminada pelo uso da transformação de Fourier. Isto corresponde a se admitir, com os coeficientes de L independentes do tempo, a existência de soluções periódicas do tipo $u(x,t) = F(x) \exp(i\omega t)$, onde ω é a frequência angular. Embora se tenha obtido resultados importantes com esse tipo de análise[12,13,18], é evidente a dificuldade de construir numericamente a solução para condições iniciais e esforços não periódicos, o que envolveria a inversão numérica da transformação de Fourier. Por outro lado, existe evidencia matemática de que a resposta de um meio inomogêneo à excitação periódica não é, em geral, periódica, o que põe em questão a validade da decomposição espectral, na análise de meios continuamente inomogêneos. Este fato será apresentado com mais detalhes na sec. 3.

A possibilidade de se obter uma representação explicita para a solução $u(x,t)$, em termos dos dados $\underset{\sim}{U}(t_o)$ e $f(x,t)$, é assegurada pelo fato de que a solução, sendo um funcional linear continuo dos dados, pode ser representada por uma integração (ver [16],pgs. 453 e 672). Isto significa que, dado o ponto (x,t), existe um intervalo I e um "dominio de dependencia" Ω, tais que $u(x,t)$ pode ser representada por uma expressão da forma

$$u(x,t) = \int_I \underset{\sim}{K}_1 . \underset{\sim}{U} \, ds + \int_\Omega K_2 f \, dA$$

Para equações hiperbólicas, a primeira de tais representações foi obtida por Riemann e será aqui utilizada. Nessa representação, os nucleos K_1 e K_2 são derivados de uma unica função de transferência $W(x,t,\xi,t_o)$, a função de Riemann. Como será mostrado na sec.4, esta abordagem é estreitamente relacionada com o método das funções de Green, amplamente utilizado em problemas eliticos e parabólicos. Para meios inomogêneos suaves e seccionalmente suaves, ie, aqueles cujos parâmetros constitutivos possuem derivadas espaciais até a segunda ordem em quase todos os pontos, a formulação clássica de Riemann pode ser aplicada sem o recurso à teoria das distribuições, básica para a abordagem pelas funções de Green.

Apesar de sua elegancia e clareza, o método de Riemann não tem sido empregado na construção de soluções e sim,principalmente, como uma prova construtiva de sua existência. A explicação parece ser a dificuldade na obtenção da função de Riemann. Os vários métodos já encontrados para essa construção foram relatados por COPSON[20]. Dentre esses o que parece mais adequado ao tratamento numérico envolve a solução de uma equação integral, num dominio bidimensional. A resolução numérica dessa equação integral parece exigir um esquema de interpolação global, num dominio cuja área cresce com o quadrado de $(t-t_o)$. Com isso, pode parecer que o método tem limitações quanto ao espaço de memória requerido. Isto é obviamente falso, porque, sendo equivalente a uma equação diferencial hiperbólica, a equação integral pode ser resolvida por um processo numérico que se "propaga" dentro do dominio. De fato, como será observado ao se estabelecer o procedimento numérico, a interpolação seccional para dominios grandes conduz a sistemas de equações algébricas lineares com grande desacoplamento entre as incógnitas, obtendo-se matrizes globais quase-triangulares. Assim, a construção numérica da função de Riemann se reduz à resolução de uma sequência de sistemas algébricos lineares de baixa ordem. O processo, portanto, não tem limitações de memória e sim de tempo de computação.

A efetiva construção numérica das soluções para alguns exemplos mostrará que a função de Riemann é um instrumento interessante para esta classe de problemas, com a vantagem de conter toda a informação quanto às caraterísticas propagatórias do meio inomogêneo.

2. EQUAÇÃO DA ONDA.

O método de solução exposto neste trabalho será aplicado ao problema de propagação de ondas planas em meios elásticos estratificados. É conveniente estabelecer inicialmente as equações dinâmicas para um meio elástico inomogêneo.

2.1. Deslocamento e deformação.

Um corpo contínuo C é observado por um sistema de referência no espaço, na configuração K, ver fig. 2.1. O movimento de C no referencial R é, portanto, a sequência temporal de configurações K(t).

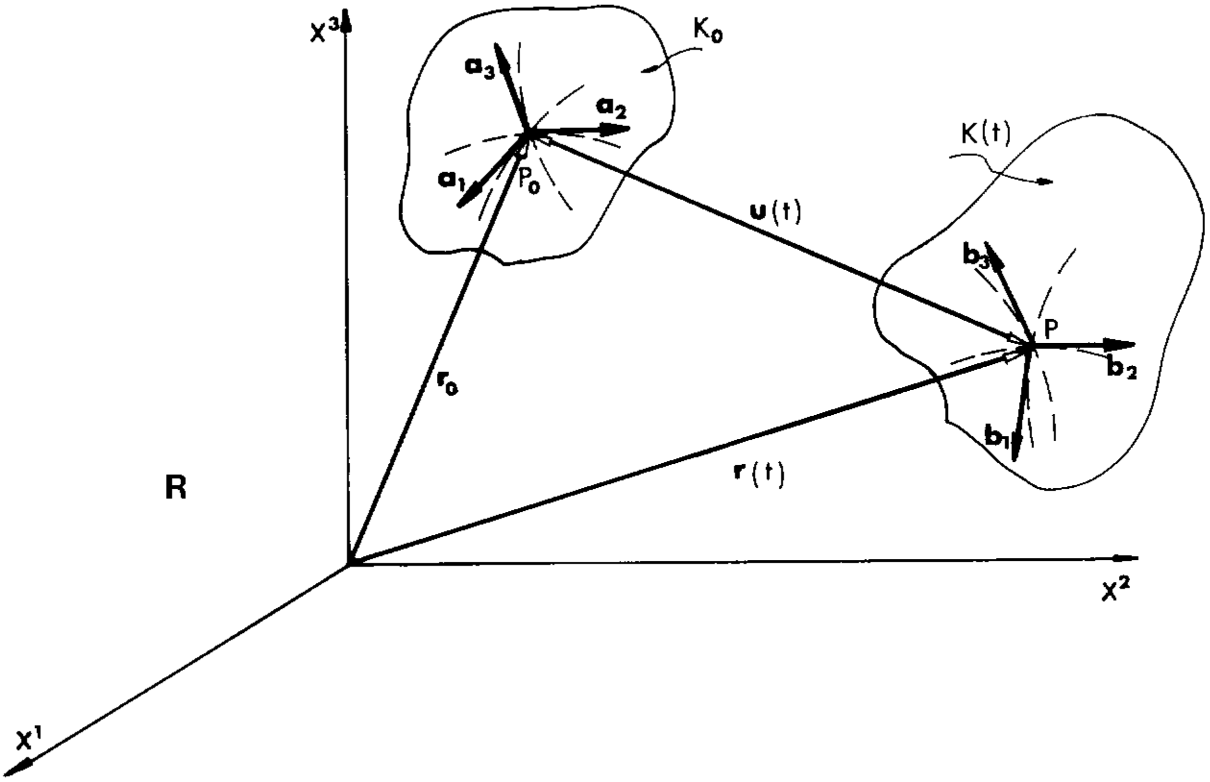


Fig.2.1.: Deslocamento de um corpo contínuo entre duas configurações.

Para um corpo sólido, é útil tomar-se também uma configuração de referência K_o , geralmente uma configuração factivel[21] e, mais comumente para materiais elásticos, a configuração natural, indeformada. Sobre a configuração de referência, define-se um sistema de coordenadas y^i , adequado à geometria do sólido. Se a posição de referência de uma particula X é $\underset{\sim}{r}_o$, os vetores $\underset{\sim}{a}_i = \partial \underset{\sim}{r}_o / \partial y^i$ constituem uma base natural de referência. O tensor métrico dessa configuração será

$$g_{ij} = \underset{\sim}{a}_i \cdot \underset{\sim}{a}_j$$

Na configuração deformada K(t), sendo $\underset{\sim}{b}_i$ os vetores da base natural do sistema deformado[22] , tem-se a métrica

$$h_{ij} = \underset{\sim}{b}_i \cdot \underset{\sim}{b}_j$$

Sendo $\underset{\sim}{r}(t)$ a posição da particula X, o deslocamento de X no instante t é dado por

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{r} - \underset{\sim}{r}_o = u^i \underset{\sim}{a}_i = w^i \underset{\sim}{b}_i = u_i \underset{\sim}{a}^i = w_i \underset{\sim}{b}^i$$

onde $\underset{\sim}{a}^i$ e $\underset{\sim}{b}^i$ são as bases duais, satisfazendo

$$\underset{\sim}{a}^i \cdot \underset{\sim}{a}_j = \underset{\sim}{b}^i \cdot \underset{\sim}{b}_j = \delta^i_j$$

A deformação de C entre K_o e K(t) é definida pelo tensor $\underset{\sim}{\varepsilon}$, com

$$2\varepsilon_{ij} = h_{ij} - g_{ij}$$

Pode-se mostrar que, em termos dos componentes do deslocamento na base de referência, a deformação é

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + u^k_{,i} u_{k,j}$$

onde $u_{j,i}$ é a derivada covariante em relação a y^i (ver [22]). Considerando pequenas as deformações, o tensor deformação $\underset{\sim}{\varepsilon}$ será aproximado por $\underset{\sim}{e}$, dado pela expressão linear

$$2\, e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \tag{2.1}$$

e a deformação volumétrica, traço do tensor deformação, será

$$\theta = e^i_i = g^{ij}\, e_{ij} \tag{2.2}$$

A hipótese de pequenas deformações permite confundir as coordenadas deformadas com as de referência, com a consequente linearização das expressões, nas coordenadas de referência, para as derivadas espaciais efetuadas na configuração atual.

2.2. Equação dinâmica.

A equação constitutiva de Cauchy para um sólido elástico linear isotrópico[23], relaciona a tensão $\underset{\sim}{\sigma}$ com a deformação $\underset{\sim}{e}$ por

$$\sigma^i_j = \lambda\theta\delta^i_j + 2\mu e^i_j \tag{2.3}$$

onde λ e μ são os parâmetros constitutivos de Lamé, cuja relação com os módulos de Young e Poisson é

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.4}$$

A forma diferencial do balanço da quantidade de movimento linear em um meio contínuo é descrita pela equação dinâmica de Cauchy

$$\mathrm{div}\,\underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{0} \tag{2.5}$$

ou, em componentes

$$\sigma^{ij}_{,j} + f^i = 0$$

onde $\underset{\sim}{f} = \rho(\underset{\sim}{b} - \ddot{\underset{\sim}{r}})$, sendo ρ a massa específica local do meio, $\rho\underset{\sim}{b}$ o resultante das forças de corpo e $\ddot{\underset{\sim}{r}}$ a aceleração.

Para um sólido inomogêneo, admite-se a variação espacial dos parâmetros materiais. Assim, substituindo (2.3) em (2.5), obtém-se a equação de movimento para um meio elástico inomogêneo:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y^i} + \theta\frac{\partial\lambda}{\partial y^i} + 2e^k_i\frac{\partial\mu}{\partial y^k} + \mu g^{kj}u_{i,jk} + f_i = 0$$

ou, com o Laplaciano definido por $\nabla^2 u_i \equiv g^{kj}u_{i,jk}$, tem-se

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y^i} + \mu\nabla^2 u_i + \theta\frac{\partial\lambda}{\partial y^i} + 2e^k_i\frac{\partial\mu}{\partial y^k} + f_i = 0 \qquad (2.6)$$

2.3. Ondas de dilatação e distorção.

O sistema de equações diferenciais (2.6) é de tipo hiperbólico e o caráter propagatório de suas soluções é bem co nhecido. Tomando, para ilustração, o caso do material homogêneo pode-se mostrar[24] que existem dois tipos de solução, desacoplados, que se propagam com velocidades diferentes. Utiliza-se para o deslocamento $\underset{\sim}{u}$ a representação de Helmholtz

$$\underset{\sim}{u} = \text{grad}\ \phi + \text{rot}\ \underset{\sim}{\psi}$$

com a restrição div $\underset{\sim}{\psi}$= 0. Considerando, por simplicidade, a ausência de forças de corpo, a representação acima, substituida em (2.6), conduz a

$$\text{grad}\ \left[(\lambda+2\mu)\nabla^2\phi - \rho\ddot{\phi}\right] + \text{rot}\ (\mu\nabla^2\underset{\sim}{\psi} - \rho\ddot{\underset{\sim}{\psi}}) = \underset{\sim}{0}$$

equação que pode ser satisfeita se ϕ e $\underset{\sim}{\psi}$ forem soluções das equações

$$c_L^2\nabla^2\phi = \ddot{\phi} \qquad ; \qquad c_T^2\nabla^2\underset{\sim}{\psi} = \ddot{\underset{\sim}{\psi}}$$

onde

$$c_L^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho} \qquad ; \qquad c_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{2.7}$$

Tem-se, portanto, dois tipos de onda, propagando-se às velocidades c_L e c_T. A onda ϕ transporta dilatações, já que

$$\theta = u_{i,i} = \phi_{,ii} = \nabla^2\phi$$

enquanto a onda $\underset{\sim}{\psi}$ transporta distorções equivolumétricas, pois div $\underset{\sim}{\psi} = 0$.

2.4. Meios estratificados.

O modelo mais simples para um meio inomogêneo é o meio estratificado seccionalmente homogêneo, em que as interfaces onde o material sofre variação de propriedades são superfícies concentricas, ie, o material é homogêneo em camadas de espessura uniforme.

Do ponto de vista prático, serão considerados meios estratificados aqueles em que se pode estabelecer um sistema de coordenadas tal que as propriedades do material variam com uma coordenada apenas. Os meios estratificados mais comuns, portanto, têm camadas planas, cilindricas ou esféricas.

Enquanto o meio estratificado seccionalmente homogêneo encontra diversas aplicações, como em sismologia, prospecção geológica, isolamento acústico e dinâmica de compósitos, outros problemas requerem que se admita a variação continua de pa râmetros materiais. Será designado por meio estratificado contínuo, um meio em que as propriedades variam continuamente, admitindo-se que os gradientes de todas as propriedades materiais sejam paralelos em cada ponto. Neste caso, é possível, ao menos localmente, estabelecer um sistema de coordenadas na configuração de referência, tal que as propriedades do material só variam com uma coordenada, seja y^1. O paralelismo dos gradientes não é uma hipótese muito restritiva, considerando um dado evento como gerador da inomogeneidade. Tomando, por exemplo, um meio uniforme submetido a um campo de temperaturas, tem-se um exemplo de material inomogêneo contínuo[25].

Para um sólido elástico inomogêneo com estratificação contínua e diferenciável na coordenada y^1, a equação (2.6) terá os componentes

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y^1} + \mu\nabla^2 u_1 + \theta\frac{\partial\lambda}{\partial y^1} + 2e^1_1\frac{\partial\mu}{\partial y^1} + f_1 = 0 \qquad (2.8)$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y^i} + \mu\nabla^2 u_i + f_i = 0 \qquad i = 2,3$$

Os problemas unidimensionais para o sistema acima, reduzem-no ainda mais, conduzindo a equações e condições de contorno simples. Três casos unidimensionais podem ser considerados: tensão longitudinal, deslocamento longitudinal e cisalhamento, exemplificados a seguir.

2.5. Exemplo: ondas axisimétricas.

Considere-se, inicialmente, uma cavidade cilindrica longa, em um meio estratificado segundo a coordenada radial r. No caso de simetria axial de deslocamento e deformações, as equações (2.8) se reduzem ao sistema desacoplado

$$\rho \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2} = \mu(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \right) \tag{2.9}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[E^*(r) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \right] - 2\frac{u_r}{r} \frac{d\mu}{dr} \tag{2.10}$$

onde

$$E^* = \lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{2.11}$$

Assim, com o deslocamento longitudinal $u_z=0$, tem-se dois problemas unidimensionais desacoplados: a onda de cisalhamento (2.9) e a onda de dilatação (2.10), propagando-se com as velocidades c_T e c_L, respectivamente. O caso de ondas unidimensionais de tensão, que poderia ser obtido em uma placa fina, não será aqui discutido. É semelhante ao problema de ondas longitudinais em barras finas, examinado adiante.

2.6. Ondas planas.

Em um meio homogêneo, a equação dinâmica para uma perturbação representada pela intensidade $P(\underset{\sim}{r},t)$, será a equação da onda:

$$P_{tt} - c^2\nabla^2 P = 0 \tag{2.12}$$

Uma onda plana é uma solução da equação da onda tal que, a cada instante, P seja constante em cada elemento de uma familia de planos paralelos. Se (n_1, n_2, n_3) são os componentes cartesianos do vetor $\underset{\sim}{n}$ unitário normal à onda, $\underset{\sim}{n}$ define a direção de propagação da onda e a equação de tais planos será

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

e, para qualquer forma de onda $F(\xi)$, a função

$$P(\underset{\sim}{r},t) = F(d \pm ct) = F(\underset{\sim}{r}.\underset{\sim}{n} \pm ct)$$

é solução de (2.12).

Uma forma particularmente util de onda plana é a onda harmônica com a forma $F(\xi) = \phi(\omega)\ \exp\ (i\omega\xi/c)$, ie, a onda

$$P_\omega(\underset{\sim}{r},t) = \phi(\omega)\ \exp\left[\frac{i\omega}{c}\ (\underset{\sim}{r}\cdot\underset{\sim}{n}\pm ct)\right]$$

com a qual se pode estudar aspectos importantes de propagação de ondas monocromáticas (com um único componente em frequência) em meios estratificados (ver [12] e [13]).

Os três casos de onda plana serão considerados, tomando-se, por simplicidade, a onda paralela ao plano $yz(x^2x^3)$. Num meio transversalmente ilimitado, pode-se ter uma onda longitudinal de deslocamento, com $u_2 = u_3 = 0$, que será chamada onda plana de dilatação, com $u_1 = u(x,t)$ satisfazendo o primeiro componente de (2.8) que, no caso homogêneo não-forçado, se reduz a

$$\rho u_{tt} - (\lambda + 2\mu)u_{xx} = 0 \qquad (2.13)$$

Assim, as ondas acima se propagam à velocidade c_L, definida em (2.7).

Considere-se agora o caso de uma barra fina, submetida a tensões longitudinais (na direção x). Com as tensões normais transversais σ_{22} e σ_{33} nulas (quanto a esta simplificação ver [28]), obtém-se da equação constitutiva (2.3):

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\,e_{11} = -\nu e_{11}$$

resultando, na direção x, a "lei de Hooke":

$$\sigma_{11} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda + \mu} e_{11} = E\ e_{11}$$

enquanto no caso de dilatação tinha-se

$$\sigma_{11} = (\lambda+2\mu)\ e_{11} = E^*\ e_{11}$$

Para a barra fina, portanto, tem-se ondas unidimensionais de tensão. No caso homogêneo não-forçado, a tensão $\sigma(x,t)$ e o deslocamento $u(x,t)$ satisfazem equações idênticas

$$\sigma_{tt} = c^2\sigma_{xx} \quad ; \quad u_{tt} = c^2\ u_{xx} \qquad (2.14)$$

onde $c^2 = E/\rho$.

No terceiro tipo de onda plana, tem-se os deslocamentos ortogonais à direção de propagação, por exemplo

$$\underset{\sim}{u}(x,t) = v(x,t)\underset{\sim}{n}_y + w(x,t)\underset{\sim}{n}_z$$

$$\underset{\sim}{n} \equiv \underset{\sim}{n}_x$$

e, com as tensões dadas por

$$\sigma_{21} = \mu v_x \quad ; \quad \sigma_{31} = \mu w_x$$

obtêm-se, no caso homogêneo, as equações

$$v_{tt} = c_T^2 \, v_{xx} \quad ; \quad w_{tt} = c_T^2 \, w_{xx} \tag{2.15}$$

onde c_T é a velocidade de propagação das ondas de cisalhamento, obtida em (2.7).

As equações completas para as ondas unidimensionais de dilatação e tensão em meios inomogêneos podem ser obtidas como casos particulares de (2.8), mas serão estabelecidas mais adiante por uma análise unidimensional.

2.7. Condições de contorno. Reflexão.

O problema de Cauchy para a equação(2.6) é, usualmente, o problema de valor inicial

$$L[\underset{\sim}{u}] = \underset{\sim}{f} \qquad \underset{\sim}{r} \in R^3 \; , \; t>0$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{r},0) &= \underset{\sim}{u}_o(\underset{\sim}{r}) \\ \underset{\sim}{u}_t(\underset{\sim}{r},0) &= \underset{\sim}{v}_o(\underset{\sim}{r}) \end{aligned}\right. \qquad \underset{\sim}{r} \in R^3 \tag{2.16}$$

Este problema tem solução única[16] em um ponto $P_o(\underset{\sim}{r}_o,t_o)$, se os coeficientes de L forem contínuos em $\Omega(P_o)$, o dominio de dependência do ponto P_o. A construção de soluções para materiais inomogêneos, em que as derivadas dos parâmetros materiais não sejam contínuas,e para corpos limitados, requer que se acrescente a (2.16) condições de contorno ou de interface adequadas.

As fronteiras espaciais para o problema de propagação de ondas são, portanto, as superfícies onde os parâmetros materiais, ou seus gradientes, sofrem descontinuidade. Dois casos extremos são os contornos rígido e livre onde, respectivamente , prevalecem as condições

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{r},t) &= \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{\sigma}(\underset{\sim}{r},t) &= \underset{\sim}{0} \end{aligned}\right\} \qquad \underset{\sim}{r} \in \Sigma,\ t>0 \qquad (2.17)$$

enquanto no caso geral impõe-se a continuidade de tensões e deslocamentos (ou velocidades) através das interfaces.

O procedimento usual[12,13] para a construção de soluções para a propagação de ondas planas em meios seccionalmente homogêneos, não requer a obtenção de uma solução geral. À solução direta de (2.16) são superpostos os efeitos do contorno de cada região homogênea, sob a forma de ondas refletidas e refratadas. O significado dessa divisão poderá ser melhor compreendido quando o problema for tratado no plano das variáveis caraterísticas (sec.3). É interessante agrupar as derivadas de segunda ordem da equação (2.6), inclusive $\underset{\sim}{u}_{tt}$, no operador de onda com velocidade variável, $O[\underset{\sim}{u}]$, ficando a equação na forma

$$L[\underset{\sim}{u}] \equiv O[\underset{\sim}{u}] + D\,[\underset{\sim}{u}] = \underset{\sim}{f}$$

ou

$$O[\underset{\sim}{u}] = \underset{\sim}{f} - D\,[\underset{\sim}{u}] \qquad (2.18)$$

onde os coeficientes de D são as derivadas espaciais das propriedades do meio.

Para meios seccionalmente homogêneos, o termo D é nulo no interior das regiões homogêneas, reduzindo-se a fontes concentradas no contorno. A forma acima indica a possibilidade de se construir as soluções por superposição, considerando a onda direta a excitar o termo D, dando origem à onda refletida sobre o meio de origem e à refratada, sobre a região vizinha.

Em meios inomogêneos contínuos, com variação lenta de parâmetros constitutivos, a equação (2.18) sugere o uso de um método de perturbações. A primeira aproximação, assim obtida, e conhecida como a solução WKB[12,24] (Wentzel-Kramers-Brillouin), fornece uma onda submetida à refração contínua, mas não inclui o efeito de reflexão.

2.8. Ondas planas em meio estratificado plano.

Por suas inúmeras aplicações, os modelos seccionalmente homogêneos planos têm sido bastante estudados. Com o uso de ondas planas, têm sido estudados os coeficientes de refração e reflexão de diversos tipos de interface.

No estudo da incidência de ondas planas sobre interfaces planas (ver[12], por exemplo), observa-se que, enquanto no interior de um meio homogêneo as ondas longitudinais e de cisalhamento são desacopladas, um tipo de onda pode gerar o outro, na interface. Isto é facilmente entendido se o deslocamento cisalhante for decomposto, com um componente (v) paralelo à interface(ver fig. 2.2). Em geologia, dá-se às ondas v e w os nomes de cisalhamento _horizontal_ e _vertical_, respectivamente.

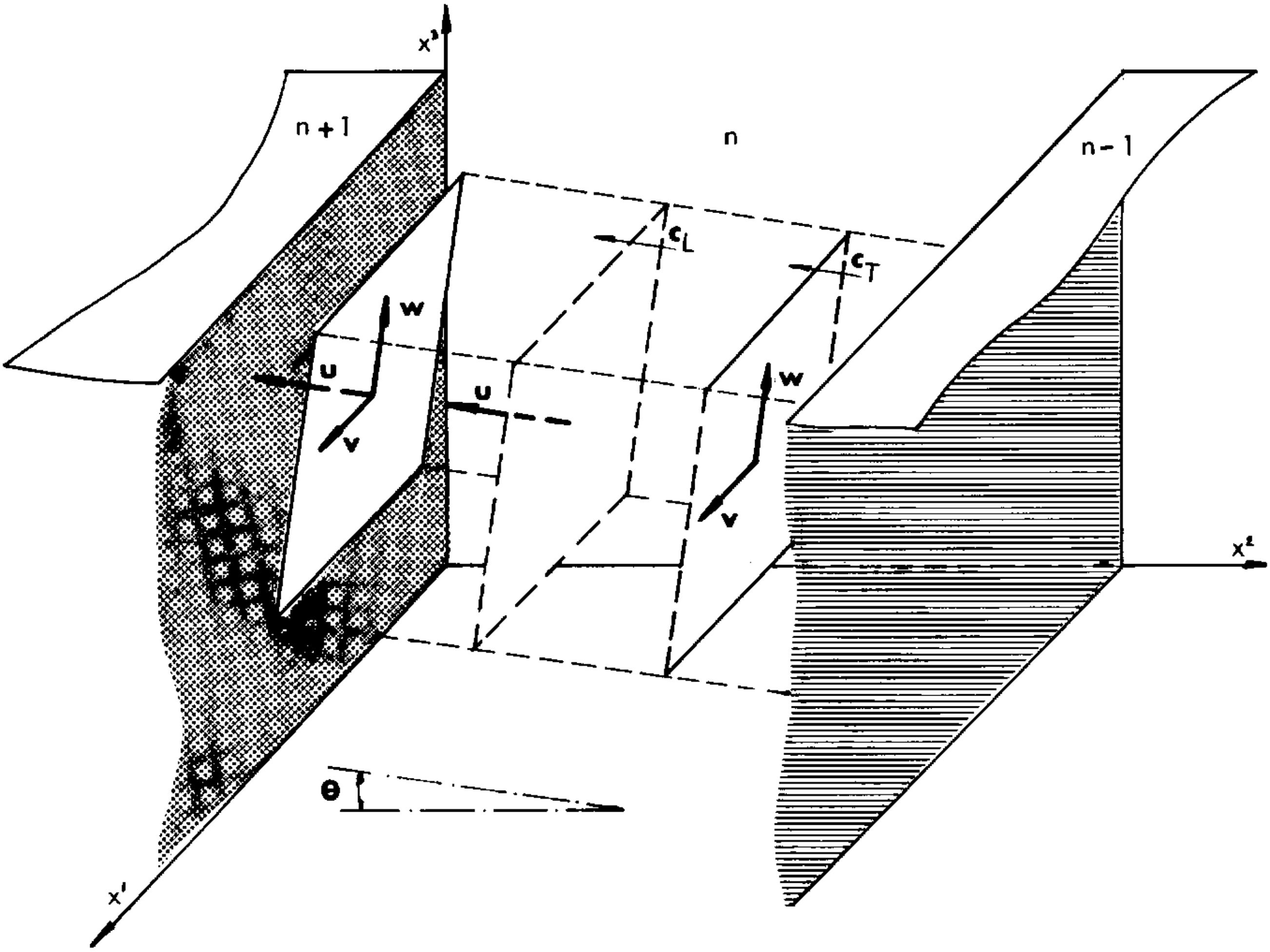


Fig. 2.2 : Onda plana na camada n de um meio estratificado seccionalmente homogêneo, incidindo com o ângulo de incidência θ sobre a camada n+1.

Note-se que, exceto para a incidência normal, $\theta = 0$, o deslocamento de dilatação u tem componente tangencial à interface e o deslocamento de cisalhamento vertical w tem componente normal a essa interface. Conclui-se que, exceto para incidência normal, os problemas de cisalhamento (vertical) e dilatação são acoplados nas interfaces das camadas.

Uma importante consequência do que se observou acima é que, num meio continuamente inomogêneo, as ondas de cisalhamento e dilatação são acopladas em todos os pontos. No caso especial de ondas planas em meio estratificado contínuo plano, esse acoplamento se restringe às ondas de cisalhamento vertical e dilatação, obtendo-se problemas unidimensionais desacoplados somente no caso de incidência normal.

2.9. Ondas em barras inomogêneas.

As ondas longitudinais mostradas no §2.6 como casos particulares da equação dinâmica geral (2.6), serão englobadas numa única forma de equação, que pode ser obtida por meio de uma abordagem mais simples, a partir de uma equação constitutiva unidimensional

$$\sigma = \gamma \varepsilon$$

onde σ é a tensão longitudinal, ε a deformação e γ a rigidez elástica.

Considere-se uma barra de eixo retilíneo, com seção transversal variável A(x), cujos parâmetros materiais ρ e γ podem variar com x. Obtém-se a equação dinâmica unidimensional estabelecendo-se o balanço de quantidade de movimento linear para o movimento médio de um elemento da barra. Se u(x,t) é o deslocamento em relação à configuração indeformada e σ a tensão de *engenharia*, ie, a tensão referida à seção indeformada, tem-se

$$(\rho A\, dx)u_{tt} = -\sigma A + (\sigma + \sigma_x dx)(A + A'dx) + p(x,t)dx$$

onde p(x,t) é um carregamento axial externo. Resulta daí a equação dinâmica

$$\rho u_{tt} = \sigma \frac{A'}{A} + \sigma_x + p(x,t)/A \qquad (2.19)$$

Pode-se agora introduzir na equação acima a equação constitutiva, em que, para pequenas deformações, se toma $\varepsilon = u_x$, obtendo-se

$$\rho u_{tt} = \left(\frac{A'}{A} + \frac{\gamma'}{\gamma}\right)\gamma u_x + \gamma u_{xx} + p(x,t)/A$$

ou, definindo $c^2 \equiv \gamma/\rho$, chega-se finalmente à equação de onda

$$u_{tt} - c^2\left[u_{xx} + \left(\frac{A'}{A} + \frac{\gamma'}{\gamma}\right) u_x\right] = f(x,t) \qquad (2.20)$$

onde $f = p/\rho A$

Com algumas formas especiais de $A(x)$, $\rho(x)$ e $\gamma(x)$, foram obtidas soluções exatas para problemas de valor inicial e de contorno (meio semi-infinito) para a equação acima. Ver especialmente as referências [2], [25], [26], [27].

Observe-se que, considerando $\gamma = E$, o módulo de Young ou $\gamma = E^*$ dado em (2.10), obtém-se as ondas longitudinais de tensão ou deformação, respectivamente. No primeiro caso, tem-se efetivamente o limite de barras finas, ie, despreza-se os efeitos de inércia lateral, considerando nulas as tensões laterais. Esta seria a primeira aproximação em uma análise bidimensional[27,28]. No segundo caso, considera-se o limite oposto, do meio transversalmente ilimitado, abandonando-se o termo A'/A. Esta é também a equação aplicável para deslocamentos e tensões no eixo da barra.

Frequentemente, é útil o estudo da propagação de ondas em termos da tensão σ. A obtenção da equação para a tensão decorre da derivação de (2.19) em relação a x, resultando:

$$\sigma_{tt} - c^2 \left[\sigma_{xx} + \left(\frac{A'}{A} - \frac{\rho'}{\rho}\right)\sigma_x + \rho\left(\frac{A'}{\rho A}\right)'\sigma \right] = g(x,t) \qquad (2.21)$$

onde

$$g(x,t) = \rho c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho A}\right)$$

3. VARIÁVEIS CARATERÍSTICAS.

3.1. Sistema Caraterístico.

O conceito de variáveis caraterísticas é muito útil no tratamento de problemas de propagação, especialmente no caso de problemas transientes, ie , problemas de valor inicial não-forçados. Como será visto a seguir, além de fornecer uma forma de equação mais adequada à integração, a formulação do problema de propagação em termos das variáveis caraterísticas permite antecipar várias propriedades de sua solução.

Para equações a duas variáveis independentes, tais como (2.20-21), o problema geral de Cauchy consiste em se conhecer, ao longo de uma curva Γ do plano xt , o valor da variável dependente e de sua derivada normal à curva. Tais problemas são geralmente denominados problemas de valor inicial, mas reservamos esta denominação para o caso especial (2.16) em que Γ é a linha $t = t_o$ e os dados de Cauchy, para a equação (2.20) por exemplo, são $u(x,t_o)$ e $u_t(x,t_o)$.

Um modo de se abordar o conceito de caraterísticas (ver [16] , Cap.V) consiste na verificação da existência de curvas Γ tais que, com a equação diferencial e os dados de Cauchy , não seja possivel determinar univocamente as derivadas de ordem superior normais à curva. Tais curvas são denominadas curvas caraterísticas e o problema de Cauchy correspondente não tem solução única. Podemos interpretar que a solução se propaga ao longo das curvas caraterísticas, sendo assim impossível estender os dados sobre uma dessas curvas à sua vizinhança.

Equações de propagação, como (2.20-21), possuem duas familias independentes de curvas caraterísticas e por esse critério são denominadas equações hiperbólicas. A determinação das caraterísticas será aqui estabelecida inicialmente por uma abordagem mais simples e esclarecedora que a indicada acima e que consiste (ver [6] , Cap.II e [22]) no estudo de um sistema de equações de primeira ordem, obtido diretamente da equação constitutiva (2.18) e da equação dinâmica (2.19).

O carater hiperbólico das equações e, consequentemente, as propriedades mais notáveis de suas soluções, é determinado pelos coeficientes das derivadas de ordem mais alta. No presente trabalho, não será abordado o problema de propagação de ondas em barras finas com seção variável. Esta restrição, sem diminuir a generalidade dos conceitos apresentados, permitirá que se trabalhe com equações mais simples.

Com a restrição acima e considerando, por ora, o caso não-forçado, obtém-se sistemas simples equivalentes a (2.20 - 21). Pode-se tomar como variáveis dependentes $\sigma = \gamma u_x$ e $v = u_t$ ou v e $\varepsilon = u_x$, ou ainda combinações dessas variáveis. Para σ e v, tem-se o sistema mais compacto

$$\sigma_t = \gamma v_x$$

$$\rho v_t = \sigma_x \tag{3.1}$$

que pode ser escrito na forma matricial

$$\underset{\sim}{X}\, \underset{\sim}{W}_x + \underset{\sim}{T}\, \underset{\sim}{W}_t = \underset{\sim}{0} \tag{3.2}$$

onde

$$\underset{\sim}{W} = \begin{bmatrix} \sigma \\ \\ v \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{\approx}{X} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \\ \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{\approx}{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & -\rho \end{bmatrix}$$

Busca-se direções caraterísticas no plano xt,ao longo das quais o sistema (3.2) fique desacoplado nas variáveis independentes, ie, forneça uma relação entre as derivadas de σ e v numa mesma direção. O sistema (3.2), hiperbólico, tem em cada ponto duas direções caraterísticas, cujas curvas integrais podem ser interpretadas como curvas coordenadas de uma transformação de variáveis independentes

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x,t) \\ \eta &= \eta(x,t) \end{aligned} \qquad (3.3)$$

com o Jacobiano

$$J \equiv \det \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \\ \eta_x & \eta_t \end{bmatrix} \qquad (3.4)$$

diferente de zero em todos os pontos. De fato, aplicando a transformação genérica (3.3) ao sistema (3.2), encontra-se

$$(\xi_x \underset{\sim}{X} + \xi_t \underset{\sim}{T})\underset{\sim}{W}_{\xi} + (\eta_x \underset{\sim}{X} + \eta_t \underset{\sim}{T})\underset{\sim}{W}_{\eta} = \underset{\sim}{0}$$

e, supondo que $\frac{\xi x}{\xi t} = \frac{dt}{dx} \neq 0$ em todos os pontos, tem-se, sobre as curvas η= cte

$$(\underset{\sim}{X} + \frac{dx}{dt}\underset{\sim}{T})\xi_x \underset{\sim}{W}_{\xi} = \underset{\sim}{0}$$

e, analogamente para as curvas ξ= cte.

$$(\underset{\sim}{X} + \frac{dx}{dt}\underset{\sim}{T})\eta_x \underset{\sim}{W}_{\eta} = \underset{\sim}{0}$$

As curvas em que os sistemas acima têm solução não-trivial satisfazem ã condição

$$\det (\underset{\sim}{X} + \frac{dx}{dt}\underset{\sim}{T}) = 0$$

ie

$$\det \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} & -\gamma \\ 1 & -\rho\frac{dx}{dt} \end{bmatrix} = 0$$

obtendo-se

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \pm\, c(x) \tag{3.5}$$

Assim, sobre cada curva caraterística (ver fig.3.1), o sistema (3.2) é reduzido a uma única equação diferencial ordinária. A variável independente dessa equação pode ser x,t ou a *variável caraterística* que não é constante ao longo da curva. Pode-se também escrever simplesmente o sistema na forma diferencial. Escolhendo arbitrariamente os sinais em (3.5), tem-se

$$c^{+}: \eta = \text{cte} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = c(x) \\ \sigma_{\xi} = \rho c v_{\xi} \quad (d\sigma = \rho c dv) \end{cases} \tag{3.6}$$

$$c^{-}: \xi = \text{cte} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -c(x) \\ \sigma_{\eta} = -\rho c v_{\eta} \quad (d\sigma = -\rho c dv) \end{cases} \tag{3.7}$$

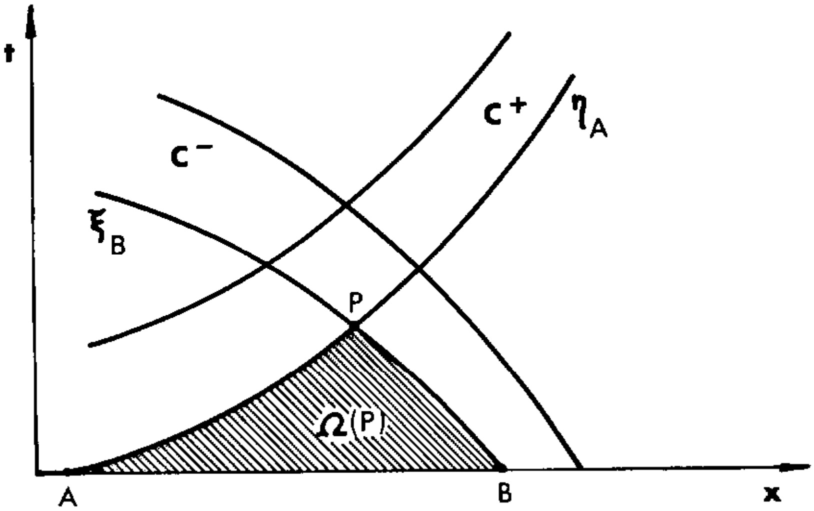


Fig.3.1: Curvas caraterísticas no plano xt. Mostra-se também o domínio de dependência para a solução no ponto $P(\xi_B, \eta_A)$.

O sistema caraterístico revela algumas das propriedades mais importantes das equações hiperbólicas:

i) ao longo das caraterísticas, (2.20-21) são operadores diferenciais interiores. Assim, através da caraterística ϕ = cte, a derivada exterior $u_{\phi\phi}$ pode sofrer descontinuidade. Num sentido generalizado, também u_ϕ e mesmo u podem sofrer tais descontinuidades, às quais se aplicam equações semelhantes a (3.6-7), como será visto no §3.3.

ii) condições iniciais no segmento AB(fig.3.1) determinam a solução em todo o dominio ABP. Em particular, a solução no ponto P depende apenas das condições iniciais em AB e do carregamento exter no no dominio ABP, denominado domínio de dependência de P(Ω(P)).

Como citado na sec.1, um método numérico amplamente utilizado na solução de problemas hiperbólicos consiste na divisão da região de interesse do plano xt em uma malha caraterística, onde o sistema (3.6-7) é integrado aproximadamente. A forma mais rudimentar de tal aproximação é dada pelas equações a diferenças finitas

$$c^+ : \Delta x = c\Delta t \quad ; \quad \Delta\sigma = \rho c \Delta v$$

$$c^- : \Delta x = -c\Delta t \quad ; \quad \Delta\sigma = -\rho c \Delta v$$

O método é especialmente útil em problemas não lineares, quando não se dispõe de recursos analíticos.

3.2. Variáveis caraterísticas e forma normal.

Para estabelecer uma transformação (3.3) compatível com (3.5), ie , com

$$\frac{\xi_x}{\xi_t} = -\frac{\eta_x}{\eta_t} = \frac{1}{c(x)}$$

pode-se escolher a forma

$$\begin{aligned} \xi &= \tau(x) + t \\ \eta &= \tau(x) - t \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde $\tau(x)$ será o tempo de propagação de uma perturbação, da origem até a posição x, dado por

$$\tau(x) = \int_0^x \frac{dy}{c(y)} \tag{3.9}$$

A transformação (3.8) é regular. De fato, como $c(x)>0$, o Jacobiano (3.4), a saber

$$J(x) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{c(x)} & 1 \\ \frac{1}{c(x)} & -1 \end{bmatrix} = -\frac{2}{c(x)}$$

é não-nulo e finito em todos os pontos. A transformação inversa será definida por

$$x = \tau^{-1}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \equiv X\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) = X(\tau) \tag{3.10}$$

$$t = \frac{\xi - \eta}{2} \tag{3.10}$$

Com a variável x deformada pela transformação(3.9), a fig. 3.2 mostra os elementos do problema de valor inicial no plano das variáveis caraterísticas $\xi\eta$. Observa-se que, para qualquer forma de c(x), as curvas caraterísticas no plano $\xi\eta$ são as retas coordenadas. Cumpre notar, também, que a transformação (3.8) adotada aqui para a definição das variáveis caraterísticas não é unica; quaisquer funções monótonas $\alpha(\xi)$ e $\beta(\eta)$ podem ser adotadas como variáveis caraterísticas.

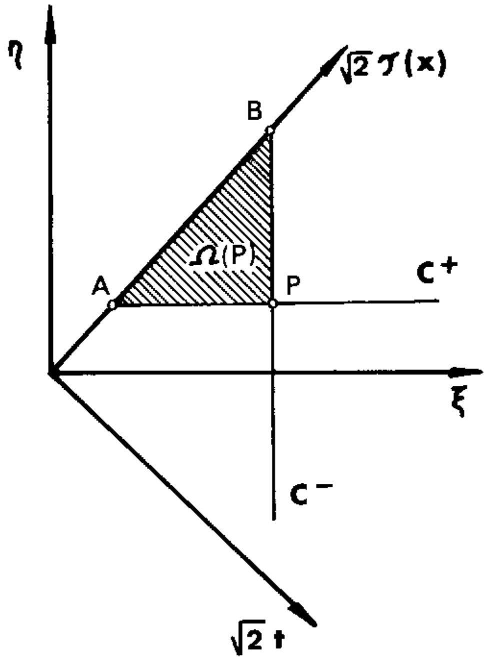


Fig. 3.2: Eixos x e t e domínio de dependência $\Omega(P)$ no plano das variáveis caraterísticas.

A forma assumida por (2.20-21) quando u e σ são tomados como funções das variáveis caraterísticas é denominada forma normal. Partindo da equação geral de 2ª ordem

$$L[u] = Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} + H(x,t,u_x,u_t,u) = 0$$

e com o uso da transformação (3.8), e.g.

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = \frac{1}{c(x)}(u_\xi + u_\eta)$$

obtém-se a forma normal

$$\bar{A}u_{\xi\xi} + 2\bar{B}_{\xi\eta} + \bar{C}u_{\eta\eta} + \bar{H}(\xi,\eta,\ u_\xi,u_\eta,u) = 0$$

Com a restrição de que a seção transversal é constante ou ilimitada, as equações (2.20-21) assumem a forma simples

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + \frac{\Upsilon'}{\Upsilon}u_x) = f(x,t) \qquad (3.11)$$

$$\sigma_{tt} - c^2(\sigma_{xx} - \frac{\rho'}{\rho}\sigma_x) = g(x,t) \qquad (3.12)$$

onde para uma barra de seção transversal A e um carregamento externo $p(x,t)$, tem-se

$$f(x,t) = \frac{p}{\rho A} \qquad g(x,t) = \frac{\rho c^2}{A}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{p}{\rho}) \qquad (3.13)$$

Para um meio transversalmente ilimitado, elimina-se A das expressões acima e p(x,t) é o carregamento por unidade de volume do meio.

No caso da equação (3.11), para as ondas de deslocamento, tem-se, assim, os coeficientes:

$$A = -c^2(x) \ ; \ B = 0 \ ; \ C = 1 \ ; \ H = -\frac{\Upsilon'}{\rho} u_x - f(x,t)$$

e os coeficientes da equação transformada serão então

$$\bar{A} = \xi_t^2 - c^2\xi_x^2 \ ; \ \bar{B} = \xi_t\eta_t - \xi_x\eta_x \ ; \ \bar{C} = \eta_t^2 - c^2\eta_x^2$$

$$\bar{H} = (\xi_{tt} - \frac{\Upsilon'}{\rho}\xi_{xx} - c^2\xi_x)u_\xi + (\eta_{tt} - \frac{\Upsilon'}{\rho}\eta_{xx} - c^2\eta_x)u_\eta - \bar{f}(\xi,\eta)$$

onde

$$\bar{f}(\xi,\eta) = f[x(\xi,\eta),t(\xi,\eta)]$$

Com as variáveis caraterísticas ξ,η definidas por (3.8), obtém-se a forma normal

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\bar{K}_u(\frac{\xi+\eta}{2})(u_\xi + u_\eta) = \bar{a}(\xi,\eta) \qquad (3.14)$$

onde $\bar{a} = \frac{1}{4}\bar{f}$ e o coeficiente $\bar{K}_u$, expressando a inomogeneidade, é

$$\bar{K}_u\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) = \bar{K}_u(\tau) = K_u(X(\tau))$$

com

$$K_u(x) = \frac{\Upsilon'}{\rho c} - c' = c\left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{c'}{c}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}(\rho c) = c\,\frac{d}{dx}\ln(\rho c) \quad (3.15)$$

Observa-se que o parâmetro material importante na determinação do comportamento inomogêneo é a impedância acústica $Z \equiv \rho c$. No caso homogêneo e não-forçado, a equação normal(3.14) se reduz a $u_{\xi\eta} = 0$, que pode ser integrada, obtendo-se a solução geral

$$u(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

ou

$$u(x,t) = F\left(\frac{x}{c} + t\right) + G\left(\frac{x}{c} - t\right)$$

Para a equação (3.12), governando as ondas de tensão pode-se aplicar procedimento análogo ao desenvolvido acima. Obtém-se a forma normal

$$\sigma_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\,\bar{K}_\sigma\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)(\sigma_\xi + \sigma_\eta) = \bar{b}(\xi,\eta) \quad (3.16)$$

onde

$$\bar{b}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\,\bar{g}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\,g[x(\xi,\eta),t(\xi,\eta)]$$

O coeficiente $\bar{K}_\sigma$ também envolve a variação da impedância acústica. Neste caso, tem-se

$$\bar{K}_\sigma\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) = \bar{K}_\sigma(\tau) = K_\sigma(X(\tau))$$

onde

$$K_\sigma(x) = -c\left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{c'}{c}\right) = c\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{1}{\rho c}\right)\right] = \rho c^2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\rho c}\right) \qquad (3.17)$$

A forma simples das equações (3.14-16) e o fato de se obter, no plano $\xi\eta$, uma malha caraterística retilínea ortogonal, trazem grande vantagem à formulação de métodos analítico-numéricos, como o método de Riemann, que será desenvolvido nas próximas seções. No restante desta seção, serão destacados alguns aspectos importantes da propagação de ondas em meios inomogêneos cuja observação é facilitada pela formulação caraterística.

3.3 Propagação de descontinuidades

As equações caraterísticas (3.6-7) podem ser aplica das a uma frente de onda descontinua, ie, uma superfície que se propaga no interior do corpo contínuo, através da qual a tensão e a velocidade das particulas são descontínuas. Embora não descreva toda a solução, a condição a ser obtida pela integração das equações caraterísticas ao longo da frente de onda contém a solução exata nessa superfície e uma primeira aproximação para a solução atrás dela.

Em problemas não-lineares, a condição de propagação de descontinuidades é especialmente útil quando se estuda uma onda simples, ie, uma onda incidindo sobre um meio inicialmente em repouso. Em problemas lineares, formas de onda complexas podem ser decompostas em ondas simples, devido à propriedade de superposição.

Para fixar idéias, a fig. 3.3 mostra a malha caraterística para a integração de uma onda retangular de tensões num meio semi-infinito com $\gamma(x) = \gamma_0 x^{-2}$. Para uma barra paraboloidal, com seção transversal $A(x) = A_0 x$ e massa específica constante $\rho = \rho_0$, uma solução exata para a resposta indicial, ie, à condição de contorno $\sigma(1,t) = H(t)$, onde H é o degrau unitário, foi obtida por GORDON e SANDAY[27]. A onda retangular mostrada na fig. 3.3, correspondendo à condição de contorno $\sigma(1,t) =$ $= \sigma_0 [H(t-t_0) - H(t-t_1)]$, é facilmente obtida pela superposição de soluções indiciais transladadas, resultando em

$$\sigma(x,t) = \frac{\sigma_0}{x} \left[H(t-t_0-\tau) - H(t-t_1-\tau)\right] \qquad (3.18)$$

onde

$$\tau(x) = (x^2 - 1)/2$$

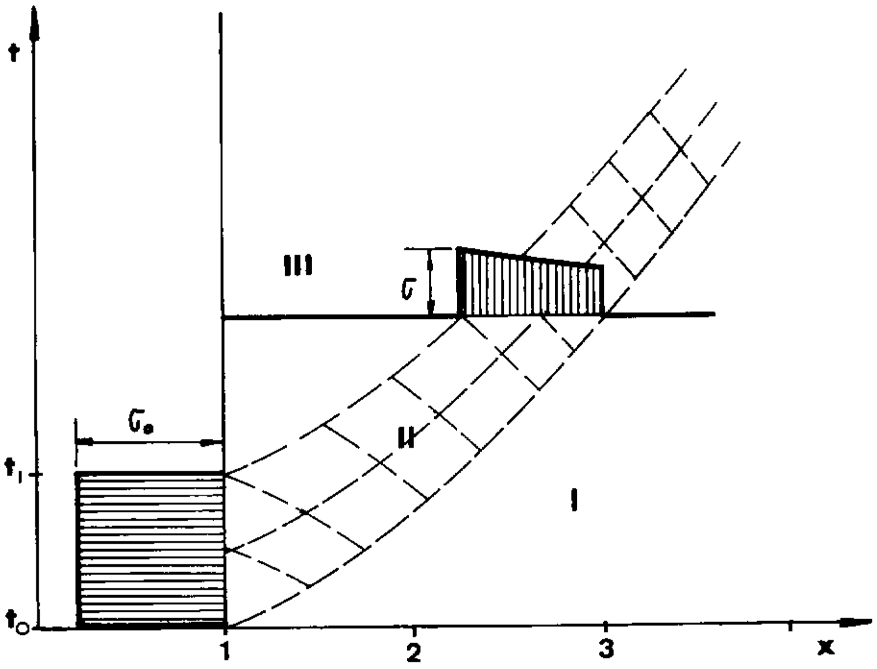


Fig.3.3: Faixa caraterística para um pulso retangular, num material com $c(x) = \frac{c_0}{x}$. Meio semi-infinito, $x \geq 1$.

Com relação às regiões do plano xt indicadas na fig. 3.3, pode-se indicar o seguinte comportamento para a solução simples acima:

- os pontos da região I estão em repouso, não sendo atingidos pela onda.
- o salto de tensão sofrido pelos pontos da frente de onda dianteira, dependem exclusivamente de sua posição x, podendo-se escrever

$$[\sigma]\ (x) = \frac{1}{x}\ [\sigma](1) = \frac{\sigma_0}{x}$$

onde o símbolo $[\sigma]$ indica o valor da descontinuidade em σ através da frente de onda.

- os pontos da região II estão sendo percorridos pela onda de tensão. Para este exemplo simples, a tensão nesses pontos também depende apenas de sua posição, como indica a solução (3.18).
- o salto em tensão através da frente de onda posterior é obtido diretamente do salto inicial nessa mesma frente, como

$$[\sigma](x) = \frac{1}{x}\,[\sigma](1) = -\,\frac{\sigma_o}{x}$$

- os pontos da região III, já varridos pela onda, estão novamente em repouso.

Um aspecto interessante da solução acima é que a energia da onda se mantém dentro da faixa principal II, definida pelas caraterísticas dianteira e posterior. A reflexão contínua da onda, que preencheria a região III com uma "cauda" da onda principal, não ocorre neste caso, porque a variação da impedância acústica do material é compensada por uma variação oposta da seção transversal. De fato, a impedância total da barra, que pode ser definida por $Z = \rho c A$, é constante para o exemplo citado.

Um comportamento mais geral é exemplificado por outro caso para o qual existe solução exata. Para a barra paraboloidal do exemplo anterior, com $\gamma(x) = \gamma_o x^{6/5}$, a solução indicial obtida por GORDON e SANDAY[27] é

$$\sigma(x,t) = x^{6/5}\; H(t-\tau)\;\; \exp(-\,\frac{3}{5}\,(t-\tau))\{(2x^{-9/5} - x^{-11/5} - x^{-7/5})$$

$$\sin[K(t-\tau)] + (x^{-7/5} - x^{-11/5})\cos[K(t-\tau)] + x^{-11/5}\} \qquad (3.19)$$

onde $K = \sqrt{3/5}$ e

$$\tau(x) = \frac{5}{2}(x^{2/5} - 1)$$

A solução para a onda retangular de tensões pode ser obtida por superposição de translações no tempo da solução indicial (3.19). Evitando escrever a longa expressão daí resultante, pode-se antecipar algumas de suas propriedades observando diretamente a solução indicial (3.19). Embora a forma das curvas caraterísticas seja diferente, o aspecto geral da faixa de onda principal (ver fig.3.4) é semelhante ao mostrado na fig.3.3. Quanto à solução, a única semelhança reside na região I, cujos pontos estão em repouso, não atingidos ainda pela onda. Na frente de onda dianteira, tem-se $t = \tau + t_o$. Assim, o salto na tensão através dessa frente, correspondendo ao valor da tensão logo após sua passagem, é função exclusiva da posição x, a saber

$$[\sigma](x) = x^{-1/5}[\sigma](1) = \sigma_o\, x^{-1/5}$$

Na frente de onda posterior, o salto na tensão pode também ser escrito como função exclusiva da posição. Este salto, no entanto, não anula a tensão atrás da onda, na região III. Assim, parte da energia da onda é refletida pela inomogeneidade e a onda deixa uma "cauda" após sua passagem.

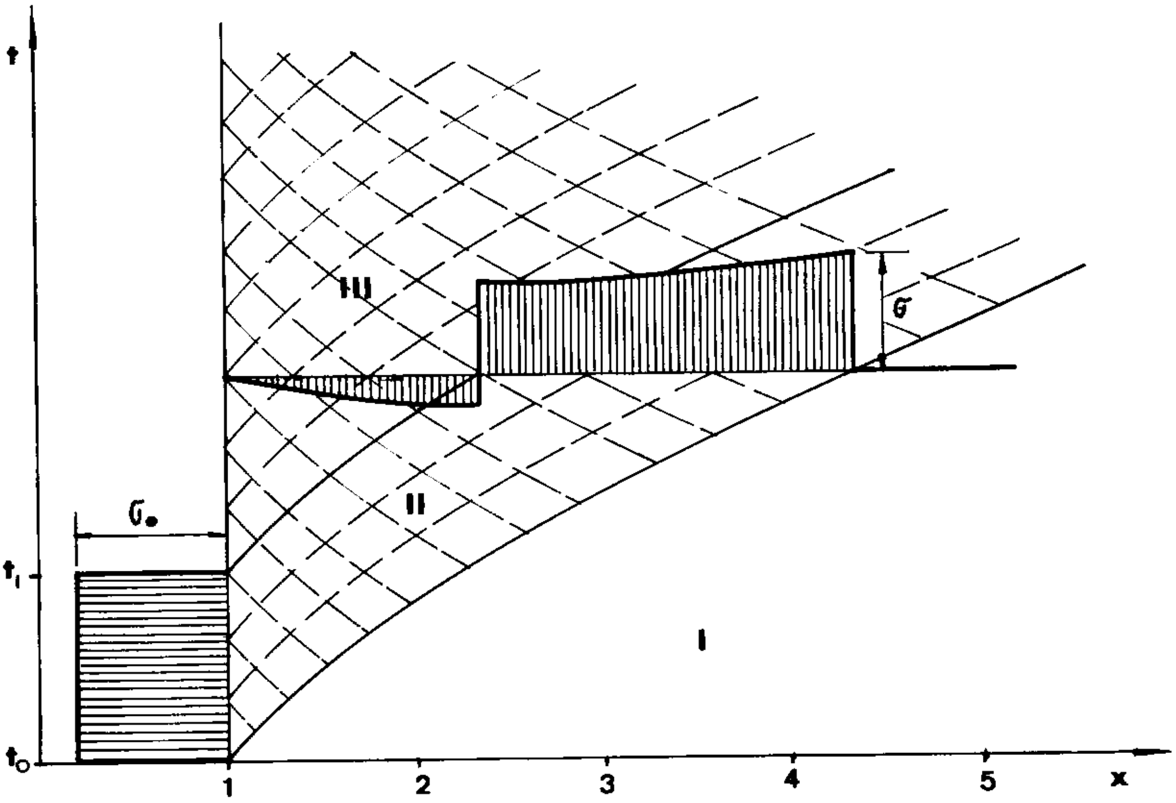


Fig. 3.4: Faixa caraterística para um pulso retangular, num material com $c(x) = c_o\, x^{3/5}$, $x \geq 1$

Como o processo de reflexão atinge todos os pontos atrás da frente de onda dianteira, a solução no interior da faixa principal II não é função apenas da posição: à onda direta, refratada, que corresponde à solução exata apenas na frente de onda dianteira, se superpõe o efeito de reflexão contínua da onda.

Para a propagação de ondas de tensão em barras inomogêneas com seção variável, pode-se observar dos exemplos citados acima, que os fenômenos de refração e reflexão são governados, respectivamente, pelos parâmetros $\rho c/A$ e ρcA. De fato, para a barra inomogênea do primeiro exemplo tem-se

$$\rho c/A = (\rho_o c_o/A_o)x^{-2} \; ; \; \rho c A = \rho_o c_o A_o$$

e para o segundo exemplo

$$\rho c/A = (\rho_o c_o/A_o)x^{-2/5} \; ; \; \rho c A = \rho_o c_o A_o x^{8/5}$$

Assim, tendo em vista as propriedades das soluções encontradas para os dois exemplos, vê-se a onda direta, refratada, é determinada pelo valor de $\rho c/A$, enquanto a ocorrência de reflexão está de alguma forma ligada à variação de $\rho c A$. A posição algo incômoda da seção transversal nos dois parâmetros pode ser evitada se, em lugar da tensão, se trabalha com a força $F = \sigma A$. Nos problemas que serão aqui tratados, a seção transversal não varia ou é ilimitada e tanto a reflexão quanto a refração serão determinadas pela impedância mecânica $Z = \rho c$ do meio.

A onda direta, primeira aproximação para a solução total, é denominada solução WKB(Wentzel-Kramers-Brillouin) e corresponde à solução exata para os saltos através de frentes de onda descontínua. A expressão para a propagação dessas descontinuidades será obtida a seguir, pela integração do sistema caraterístico (3.6-7).

Considere-se uma onda no sentido x crescente, com uma frente de onda descontínua, C^+(fig. 3.5). Sobre a frente descontínua, os valores de σ e v são indefinidos, mas de ambos os lados, numa vizinhança arbitrariamente próxima de C^+, é satisfeita a equação caraterística (3.6). Se (σ^+, v^+) e (σ^-, v^-) são os limites de (σ, v) quando se aproxima C^+ a montante e jusante, respectivamente, tem-se então

$$d\sigma^+ = \rho c \, dv^+$$

$$d\sigma^- = \rho c \, dv^-$$

Os saltos em tensão e velocidade trazidos pela frente de onda descontínua, definidos por

$$[\sigma] = \sigma^+ - \sigma^- \quad ; \quad [v] = v^+ - v^-$$

satisfazem, em vista das equações acima, a relação

$$d[\sigma] = \rho c \, d[v] \qquad (3.20)$$

ao longo de C^+. Por outro lado, em cada ponto, C^+ intercepta uma caraterística C^-, ao longo da qual σ e v devem satisfazer (3.7). Os saltos $[\sigma]$ e $[v]$ devem então satisfazer uma forma integrada dessa equação. Num sentido generalizado, $[\sigma]$ pode ser considerado como a integral de $d\sigma$ entre P' e P", ao longo de C^-, no limite $(P' \rightarrow P \leftarrow P")$, o mesmo ocorrendo com $[v]$. Se ρc é contínuo em P, tem-se então

$$[\sigma] = -\rho c [v] \qquad (3.21)$$

A expressão acima pode ser obtida por um balanço de quantidade de movimento, referido como balanço de Hugoniot (ver [21]). Acompanhando C^+, observa-se que um elemento material, de seção transversal unitária e comprimento $dx = c(x)dt$, recebe a impulsão $-[\sigma]dt$ (σ é positivo na tração), dai resultando a variação $\rho[v]dx$ na quantidade de movimento. Segue-se (3.21).

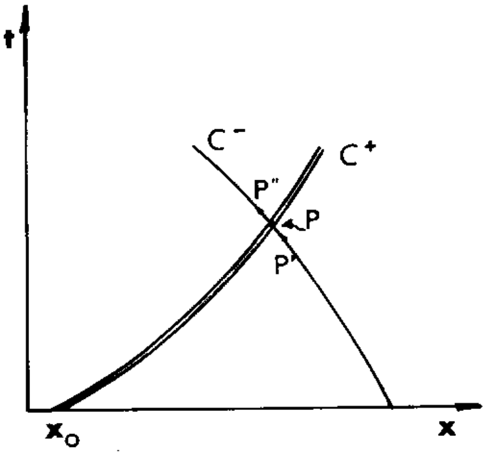


Fig. 3.5: Frente de onda descontinua C^+, emanada de $x = x_0$

Se o meio é inomogêneo, com $Z(x) = \rho(x)\ c(x)$, pode-se obter o efeito de refração contínua da frente de onda. Dividindo (3.20) por (3.21), obtém-se

$$\frac{d[\sigma]}{[\sigma]} = -\frac{d[v]}{[v]}$$

que, integrada, resulta em

$$[\sigma]\ [v] = [\sigma]_0\ [v]_0 \tag{3.22}$$

onde $[\sigma]_o$ e $[v]_o$ são os valores de $[\sigma]$ e $[v]$ em um ponto inicial x_o . Com a relação acima e utilizando novamente (3.21), obtém-se

$$\frac{[\sigma]}{[\sigma]_o} = \frac{[v]_o}{[v]} = \frac{Z}{Z_o} \frac{[v]}{[v]_o}$$

ou então

$$\frac{[\sigma]}{[\sigma]_o} = \frac{[v]_o}{[v]} = \sqrt{\frac{Z}{Z_o}} \qquad (3.23)$$

onde $Z = \rho c$ é a impedância acústica.

Na sec. 5 será visto que o efeito de distorção da onda por refração contínua, descrito pela relação acima, permitirá obter uma forma notável (auto-adjunta) para a equação normal (3.11), mediante a transformação de variável dependente

$$U(x,t) = \lambda_u(x)\, u(x,t)$$

onde $\lambda_u(x) = \sqrt{\dfrac{Z(x)}{Z(0)}}$.

3.4 Reflexão e refração de onda em descontinuidade material.

Os materiais cujas propriedades sofrem, em algumas superfícies, descontinuidades finitas, serão denominados seccionalmente contínuos. Se tais descontinuidades são as únicas variações sofridas pelos parâmetros constitutivos, o material será denominado seccionalmente homogêneo. Nesses materiais, uma onda que atinge a superfície de descontinuidade sofre reflexão e refração concentrada, ie, é alterada de um valor finito ao passar pela descontinuidade.

A fig. 3.6 ilustra, em um meio seccionalmente homogêneo unidimensional, o impacto, sobre o ponto x_o de descontinuidade material, de uma onda incidente de tensão σ_I, originando a onda transmitida (refratada) σ_T e a onda refletida σ_R. As impedâncias acústicas à direita e à esquerda de $x = x_o$ são

$$Z^- = \rho c\Big|_{x=x_o^-} \quad ; \quad Z^+ = \rho c\Big|_{x=x_o^+}$$

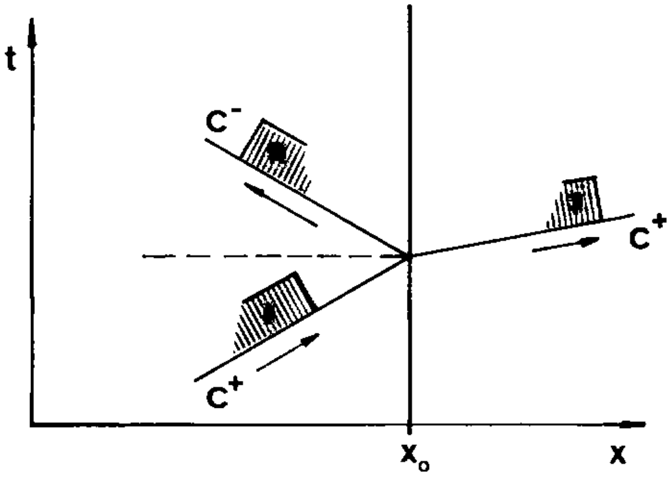


Fig.3.6: Ondas incidente, refletida e transmitida na interface de dois materiais.

Tensões, deslocamentos e velocidades devem ser contínuos através da reta (não-caraterística) $x = x_o$. Isto decorre da exigência de equilíbrio e continuidade do meio. A continuidade de tensões implica

$$\sigma_I + \sigma_R = \sigma_T \tag{3.24}$$

Com o uso da forma finita (3.21) de (3.7) para σ_R e de uma forma finita correspondente de (3.6) para σ_I e σ_T, a continuidade de velocidades leva a

$$\frac{\sigma_I - \sigma_R}{Z^-} = \frac{\sigma_T}{Z^+} \tag{3.25}$$

Em geral, a relação acima só se aplica às frentes de onda descontínua. Nos meios seccionalmente homogêneos, em que não há outra causa para deformação da onda, (3.25) pode ser aplicada a toda a onda. A solução do sistema (3.24-25) será

$$\sigma_T = \frac{2\,Z^+}{Z^- + Z^+}\,\sigma_I \tag{3.26}$$

$$\sigma_R = \frac{Z^+ - Z^-}{Z^- + Z^+}\,\sigma_I \tag{3.27}$$

As expressões acima permitem solucionar a propagação de ondas em meios seccionalmente homogêneos. A solução WKB pode ser obtida a partir de (3.27), considerando o meio continuamente inomogêneo como o limite de um meio finamente laminado (ver [12], §15). De fato, observando que, por (3.24)

$$\sigma_R = \sigma_T - \sigma_I$$

obtém-se de (3.27) a expressão diferencial

$$d\sigma = \frac{dZ}{2Z}\,\sigma$$

cuja integração conduz a (3.23).

3.5 Não-periodicidade das soluções.

Como citado na sec.1, o método mais amplamente utilizado na abordagem de problemas lineares de propagação em sistemas complexos baseia-se na análise de Fourier, com a qual se obtêm padrões arbitrários de onda pela superposição de ondas harmônicas da forma indicada no §2.6. Este enfoque corresponde à hipótese de que a resposta do sistema à excitação periódica com frequência ω, é também periódica no tempo, com a mesma frequência ω. Se as condições iniciais não são nulas, tal periodicidade se verificaria, garante a hipótese, para um tempo suficientemente grande de excitação periódica.

Com a hipótese de periodicidade no tempo, esta variável é eliminada obtendo-se, para a descrição da onda monocromática, uma equação espacial elítica. Apesar de atraente, este enfoque pode não conduzir à solução correta dos problemas de propagação em meios inomogêneos, como foi mostrado por GUNZBURGER e KLEINSTEIN[19]. Nesse trabalho, os autores analisam o sistema hiperbólico

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & -b(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \underset{\sim}{f}(x,t) \qquad (3.28)$$

onde a excitação $\underset{\sim}{f}(x,t)$, no caso geral e no caso particular de meio semi-infinito excitado no contorno $x = 0$ são, respectivamente

$$\underset{\sim}{f}(x,t) = \begin{bmatrix} m(x) \\ n(x) \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad ; \quad \underset{\sim}{f}(x,t) = \begin{bmatrix} C_1\delta(x) \\ C_2\delta(x) \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

Definindo os coeficientes $\bar{B}$ e $\bar{C}$, que surgem na forma caraterística das equações (3.28), por

$$Bb = \bar{B}(a+b) \quad ; \quad Ca = \bar{C}(a+b) \tag{3.29}$$

pode-se resumir os resultados de [19] como:

1) Se $\bar{B}$ e $\bar{C}$ não são idênticamente nulos, as soluções não serão, em geral, periódicas.

2) Se $\bar{B}$ e $\bar{C}$ são identicamente nulos, a solução é periódica.

O sistema de equações (3.1), reescrito na forma

$$\sigma_t - \rho c^2 v_x = 0$$

$$\sigma_x - \rho v_t = 0$$

pode ser transformado em um sistema da forma (3.28), com a definição de novas variáveis dependentes

$$\phi \equiv \sigma - \rho c v$$

$$\psi \equiv \sigma + \rho c v$$

Observe-se que, dependendo do sentido de propagação, uma das variáveis acima avalia a diferença entre a solução exata e a solução WKB, dada por $\sigma \pm \rho c v = cte$. Obtêm-se com facilidade o sistema sa tisfeito por ϕ e ψ , que, no caso não-forçado, é

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}_t + c(x)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}_x + \frac{c'(x)}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = 0$$

sendo a periodicidade da resposta comandada pelos coeficientes

$$\bar{B} = -\bar{C} = \frac{c'(x)}{4}$$

Convém citar aqui mais um resultado interessante obtido em [19] : se os coeficientes B e C são nulos fora de uma região compacta, a solução é periódica. Assim, uma onda monocromática que passa por uma inclusão inomogênea num meio homogêneo, pode sofrer alterações apenas em fase e amplitude.

CAPÍTULO II

MÉTODO DE SOLUÇÃO

4. OPERADORES ADJUNTOS E FUNÇÕES DE GREEN.

4.1. Soluções fundamentais.

A solução sistemática de problemas para um dado sistema linear pode ser reduzida a mera tarefa computacional quando se possui uma solução fundamental, mediante a qual se possa representar todas as soluções para uma certa classe de problemas. Quando se quer investigar as caraterísticas de um sistema e comparar diversos sistemas, a solução de um problema específico pode ser útil, mas uma solução fundamental, que contém a resposta do sistema, é um padrão mais completo para análise e comparação.

Sujeita a condições de contorno adequadas à classe de problemas em estudo, tal solução fundamental é usualmente denominada função de Green para a classe. Nas equações de evolução, as condições iniciais podem ser tomadas como condições de contorno num domínio espaço-tempo, e o caráter especial da variável temporal permite uma variedade de abordagens formalmente diferentes.

No caso especifico do problema de Cauchy para a equação unidimensional de propagação de ondas, a função de Green causal correspondente é idêntica, no interior do dominio de dependência de um ponto (x_o,t_o), a uma função auxiliar utilizada por Riemann para obter sua fórmula de representação. Isto será mostrado no final desta seção. Embora o tratamento clássico de Riemann seja suficiente para o escopo deste trabalho, a extensão do estudo a domínios bi e tridimensionais e formas arbitrárias de inomogeneidade, se possível, exigirá o recurso à formulação moderna, especialmente ao conceito de funções generalizadas.

O objetivo desta seção é desenvolver o método de Riemann, apontando, paralelamente, as linhas gerais para o desenvolvimento do método das funções de Green. A dualidade entre operadores lineares será tomada como ponto de partida. Este aspecto será melhor observado tomando-se inicialmente o exemplo dos operadores algébricos lineares.

4.2. Operadores algébricos.

É interessante considerar os elementos do espaço euclideano E^n como funções de valor real sobre o conjunto de índices $N = \{1,2,...,n\}$. Para isso, sendo $\underset{\sim}{u}$ um elemento de E^n considere-se a representação

$$\underset{\sim}{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \underset{\sim}{\delta}_i$$

onde $\underset{\sim}{\delta}_i$, $(i=1,...,n)$, são os vetores da base canônica de E^n. O valor da função $\underset{\sim}{u}$ no ponto i será $u_i = \underset{\sim}{u}(i)$.

Com esse enfoque, cada elemento $\underset{\sim}{u} \in E^n$ define um funcional linear contínuo U sobre E^n, através do produto interno:

$$U[\underset{\sim}{v}] \equiv \langle \underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \qquad (4.1)$$

Em particular, os n funcionais Δ_i têm sua "ação" sobre um elemento $\underset{\sim}{v} \varepsilon E^n$ dada por

$$\Delta_i[\underset{\sim}{v}] = \langle \underset{\sim}{\delta}_i, \underset{\sim}{v} \rangle = v_i \tag{4.2}$$

Um operador algébrico A, sobre E^n, pode ser representado, em relação à base canônica,por uma matriz a_{ij}. O operador A^*, adjunto de A, é definido pela propriedade

$$\langle A\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \rangle = \langle \underset{\sim}{u}, A^*\underset{\sim}{v} \rangle \qquad u,v \; \varepsilon \; E^n \tag{4.3}$$

e pode ser representado pela matriz transposta $a^*_{ij} = a_{ji}$.

Uma sistemática para a solução de problemas da forma $A\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f}$ recorre à construção do operador inverso A^{-1}. Se tal operador existe, a solução será $\underset{\sim}{u} = A^{-1}\underset{\sim}{f}$. As colunas $\underset{\sim}{g}_i$ de A^{-1} são as soluções dos n problemas

$$A \; \underset{\sim}{g}_i = \underset{\sim}{\delta}_i \;, \; i=1,2,\ldots,n$$

O operador inverso A^{-1}, com matriz g_{ij} será denominado função de Green para o operador A. Estendendo às matrizes a notação adotada para as funções $\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{v} \; \varepsilon \; E^n$, tem-se

$$\underset{\sim}{u}(i) = \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{g}(i,j) \; \underset{\sim}{f}(j)$$

Observa-se que o vetor ("função de influência") $\underset{\sim}{g}_i$ indica a contribuição de f_i para os diversos componentes de $\underset{\sim}{u}$.

Outra expressão para a solução, obtida com o uso do operador adjunto A^*, servirá como introdução ao tratamento a ser dado aos operadores diferenciais. Consideremos como solução para o problema $A\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f}$, o elemento $\underset{\sim}{u} \in E^n$ tal que

$$<A\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v}> = <\underset{\sim}{f},\underset{\sim}{v}> \qquad \forall \underset{\sim}{v} \in E^n$$

ou, com (4.3)

$$<\underset{\sim}{u},A^*\underset{\sim}{v}> = <\underset{\sim}{f},\underset{\sim}{v}>$$

Sejam $\underset{\sim}{g}_i^*$ as soluções dos n problemas

$$A^* \underset{\sim}{g}_i^* = \underset{\sim}{\delta}_i \qquad i=1,\ldots,n$$

Então, em virtude de (4.2), tem-se

$$u_i = <\underset{\sim}{f},\underset{\sim}{g}_i^*>$$

ou

$$\underset{\sim}{u}(i) = \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{g}_i^*(j)\ \underset{\sim}{f}(j) = \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{g}^*\ (j,i)f(j)$$

Os vetores $\underset{\sim}{g}_i^*$, linhas da matriz de A^{-1}, indicam a contribuição dos vários componentes de $\underset{\sim}{f}$ para o componente u_i (solução no ponto i). Note-se a simetria entre a função de Green e sua adjunta, a saber

$$\underset{\sim}{g}(i,j) = \underset{\sim}{g}^*(j,i)$$

que também será observada nas funções de Green de variável contínua.

4.3. Operadores diferenciais.

O conceito de operadores adjuntos será fundamental para o desenvolvimento do método de Riemann e das funções de Green. Como se observa na definição (4.3) para operadores algébricos adjuntos, requer-se instituição de um funcional bilinear sobre os espaços de funções envolvidos pelos operadores diferenciais. Pode-se, no entanto, aceitar uma definição formal, que cumprirá sua função de dualidade dependendo do funcional bilinear a ser instituido.

Seja L um operador diferencial linear de ordem m, sobre um dado conjunto de funções $u(\underset{\sim}{x})$, $v(\underset{\sim}{x})$, $\underset{\sim}{x} \in R^n$. O adjunto formal de L é o operador L^* tal que, para quaisquer u,v

$$vL[u] - uL^*[v] = \operatorname{div} \underset{\sim}{J}(u,v) \tag{4.4}$$

onde $\underset{\sim}{J}$ é um vetor n-dimensional de operadores diferenciais bilineares de ordem m-1.

O exemplo de interesse para o presente trabalho é o do operador de 2ª ordem em R^2, que pode ser escrito na forma

$$L[u] \equiv Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Hu \tag{4.5}$$

Pela definição (4.4), com $\underset{\sim}{J} = (M,N)$, deve-se ter

$$vL[u] - uL^*[v] = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

Expandido os termos de $vL[u]$, tem-se

$$Avu_{xx} = (Avu_x)_x - u_x(Av)_x = \left[Avu_x - u(Av)_x\right]_x \underline{+ u(Av)_{xx}}$$

$$Bvu_{xy} = (Bvu_y)_x - u_y(Bv)_x = (Bvu_y)_x - \left[u(Bv)_x\right]_y \underline{+ u(Bv)_{xy}}$$

ou, alternativamente

$$Bvu_{xy} = (Bvu_x)_y - u_x(Bv)_y = -\Big[u(Bv)_y\Big]_x + (Bvu_x)_y \underline{+ u(Bv)_{xy}}$$

e os demais termos

$$Cvu_{yy} = (Cvu_y)_y - u_y(Cv)_y = \Big[Cvu_y - u(Cv)_y\Big]_y \underline{+ u(Cv)_{yy}}$$

$$Dvu_x = (Dvu)_x \underline{- u(Dv)_x}$$

$$Evu_y = (Evu)_y \underline{- u(Ev)_y}$$

$$Huv = \underline{Huv}$$

Reunindo-se os termos sublinhados nas expressões acima tem-se $uL^*[v]$ com

$$L^*[v] \equiv (Av)_{xx} + 2(Bv)_{xy} + (Cv)_{yy} - (Dv)_x - (Ev)_y + Hv \tag{4.6}$$

e os componentes (M,N) de $\underset{\sim}{J}(u,v)$, a menos de um vetor $(\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial x})$

de divergência nula, são

$$M = Avu_x - u(Av)_x + Bvu_y - u(Bv)_y + Duv \qquad (4.7)$$

$$N = Bvu_x - u(Bv)_x + Cvu_y - u(Cv)_y + Euv \qquad (4.8)$$

4.4. Soluções estritas e o teorema de Green.

Uma solução estrita, ou clássica, para a equação diferencial de ordem m

$$L[u] = f \qquad \text{em} \qquad D \subset R^n \qquad (4.9)$$

é uma função $u(\underset{\sim}{x})$, m-diferenciável, com as derivadas de ordem m ao menos seccionalmente continuas, que satisfaz a equação em todo ponto $\underset{\sim}{x} \in D$. Com essa definição clássica, os carregamentos f admissíveis se restringem à classe das funções seccionalmente contínuas.

Tomando (4.4) como ponto de partida, busca-se obter uma forma de definição semelhante a (4.3), ie, uma relação global de dualidade. Com os campos U, das soluções, e F, dos carregamentos, fortemente restritos como acima, é possível, para domínios limitados $\Omega \subset D$, estabelecer em UXF uma forma bilinear contínua, definida por

$$< u,f >_{\Omega} = \int_{\Omega} uf \, d\omega \tag{4.10}$$

onde $d\omega$ é o elemento de volume em R^n. Se Ω é convexo, o teorema de Green, a saber

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underset{\sim}{V} \, d\omega = \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{V} . \underset{\sim}{n} \, dS$$

pode ser aplicado à definição (4.4), fornecendo, com o funcional definido em (4.10):

$$< v,L[u] >_{\Omega} - < u,L^*[v] >_{\Omega} = B(u,v) \tag{4.11}$$

onde a forma bilinear B, envolvendo os valores de u,v e suas derivadas até a ordem m-1 no contorno é

$$B(u,v) = \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{J}(u,v) . \underset{\sim}{n} \, dS \tag{4.12}$$

Nas expressões acima, $\underset{\sim}{n}$ é o vetor unitário normal exterior a Ω e dS o elemento de arco em $\partial\Omega$.

Para o caso do operador de 2ª ordem (4.5), tem-se

$$B(u,v) = \oint_{\partial\Omega} -Ndx + Mdy \tag{4.13}$$

O método de Riemann utiliza estritamente a relação (4.11). Para o método das funções de Green, requer-se o conceito de solução generalizada, abordado a seguir.

4.5. Soluções Generalizadas. Distribuições.

Como observado na seção 3, as equações hiperbólicas admitem soluções com descontinuidades através de curvas caraterísticas. Tais soluções devem satisfazer a equação diferencial e eventuais condições de contorno em cada um dos subdomínios separados pela caraterística de descontinuidade e os valores da descontinuidade ao longo da curva caraterística são governados pela equação caraterística correspondente (ver §3.3).

Um primeiro exemplo de tais soluções descontínuas é fornecido pelas soluções para o problema de Cauchy com condições iniciais seccionalmente diferenciáveis ou seccionalmente contínuas, tais como as ondas triangulares e retangulares, respectivamente. Qualquer método adequado à construção de soluções estritas pode ser aplicado, nos subdomínios separados pelas caraterísticas de descontinuidade. A correspondente ampliação do campo U das soluções admissíveis pode ser entendida como a inclusão em U de limites fracos de sequências de soluções estritas (ver [16] cap. VI, Apêndice).

A caraterização rigorosa das soluções generalizadas fundamenta-se na teoria das distribuições (ver [16], [30] e [31]). Além de incluir os problemas generalizados de valor inicial e xemplificados acima e problemas com condições de contorno descontínuas (como o exemplo de §3.3), estende-se também o campo F dos carregamentos, admitindo-se entidades tais como as derivadas de funções seccionalmente contínuas.

A ampliação dos campos U e F, que permitirá a construção de soluções fundamentais para os operadores diferenciais lineares, baseia-se na caraterização das funções $f \varepsilon T \supset U \cup F$ como funcionais lineares continuos sobre um conjunto $\mathcal{D}$ de funções teste, suficientemente restrito, ou, como em (4.10), na definição de um funcional bilinear contínuo sobre $T \times \mathcal{D}$. Para funções teste são tomadas as funções de classe C_s^r de suporte compacto em R^n, ie, as funções r-diferenciáveis (com as derivadas de ordem r ao menos seccionalmente contínuas) que são identicamente nulas fora de algum subdominio limitado de R^n. Para se incluir todas as soluções generalizadas de uma equação de ordem m, deve-se ter $r \geq m$. Com isto, $\phi \varepsilon \mathcal{D}$ é nula no contorno de seu suporte, bem como suas derivadas até a ordem m-1.

Com as restrições acima, qualquer função f localmente integrável define um funcional (distribuição) sobre $\mathcal{D}$ por

$$< f,\phi > = \int_{R^n} f\phi \ d\omega \qquad (4.14)$$

O delta de Dirac é a distribuição $\delta_{\underset{\sim}{\xi}}(\underset{\sim}{x})$ tal que

$$< \delta_{\underset{\sim}{\xi}}(\underset{\sim}{x}), \phi(\underset{\sim}{x}) > = \phi(\underset{\sim}{\xi})$$

Note-se a semelhança entre a ação desta função ideal e a dos ve tores da base canônica de R^n, cf. (4.2).

Constituido o funcional, operações como a diferenciação, inaceitáveis para muitas das funções admitidas em T, podem ser interpretadas por sua ação sobre as funções teste. Para um operador diferencial linear L, tal ação é definida por

$$< L[u], \phi > = < u, L^*[\phi] > \qquad \forall \phi \in \mathcal{D},\ u \in T$$

onde L* é o adjunto formal de L, definido em (4.4). Observe-se que, para funções $u \in C_s^r$ obtém-se a expressão acima através do teorema de Green (4.11), dado que ϕ e suas derivadas até a ordem m-1 são nulas no contorno.

Uma solução generalizada (fraca) para a equação $L[u] = f$ em R^n, onde $f \in T$, será uma distribuição $u \in T$ tal que

$$< u, L^*[\phi] > = < f, \phi > \qquad \forall \phi \in \mathcal{D} \tag{4.15}$$

Uma solução fundamental para o operador L será uma distribuição $E(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi})$, dependendo de $\underset{\sim}{\xi}$ como parâmetro, solução generalizada de

$$L[E] = \delta_{\underset{\sim}{\xi}}(\underset{\sim}{x})$$

Duas soluções fundamentais diferem por uma solução do problema homogêneo

$L[u] = 0$. Condições de contorno específicas selecionam a solução fundamental adequada a uma classe de problemas. Esta será denominada função de Green para a classe. Para a construção de soluções via função de Green, utiliza-se a propriedade de superposição de soluções. Como exemplo, considere-se uma função $f(\underset{\sim}{x})$ integrável num domínio $\Omega \subset R^n$, e a distribuição definida pela combinação linear

$$u(\underset{\sim}{x}) = \int_\Omega g(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi})\ f(\underset{\sim}{\xi})\ d\omega_{\underset{\sim}{\xi}}$$

Essa distribuição é solução generalizada de $L[u] = f$ em Ω. De fato, como $g(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi})$ é solução generalizada de $L[g] = \delta_{\underset{\sim}{\xi}}(\underset{\sim}{x})$, tem-se, tendo em vista a definição (4.15):

$$<L[u],\phi> = <\int_\Omega L[g] f\ d\omega,\phi> = <\int_\Omega \delta_{\underset{\sim}{\xi}}(\underset{\sim}{x}) f(\underset{\sim}{\xi}) d\omega_{\underset{\sim}{\xi}},\phi> = <f(\underset{\sim}{x}),\phi>,\quad \phi\ \varepsilon \mathcal{D}(\Omega)$$

A solução assim obtida pode satisfazer condições homogêneas no contorno de Ω, se $g(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi})$ for a solução fundamental satisfazendo idênticas condições homogêneas para todo $\underset{\sim}{x}$ na fronteira de Ω e todo $\underset{\sim}{\xi}$ em Ω. Problemas com condições iniciais e de contorno inomogêneas podem ser homogeneizados com a adição de termos adequados à excitação f, mas é comum o desenvolvimento de uma forma de solução específica para cada tipo de problema.

Nas equações de evolução em que é separável a variável temporal, o operador linear L pode ser escrito na forma

$$L \equiv \frac{\partial^m}{\partial t^m} + \sum_{k=1}^{m-1} a_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} + A \qquad (4.16)$$

onde A é um operador linear espacial. Na hipótese de estacionariedade do sistema (não envelhecimento), os coeficientes a_k são constantes, o que permite a translação das soluções fundamentais para $t=0$:

$$E(\underset{\sim}{x},t,\underset{\sim}{\xi},t_o) = E(\underset{\sim}{x},t-t_o,\underset{\sim}{\xi},0) \equiv E(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi},\tau)$$

Uma solução fundamental causal para o operador L dado por (4.16) é uma distribuição $C(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi},t)$, solução generalizada de

$$L[C] = \delta_{\underset{\sim}{\xi}}(\underset{\sim}{x})\delta(t) \qquad t \geq 0 \quad , \quad \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\xi} \in R^n$$

$$C \equiv 0 \quad , \quad t<0$$

É importante observar que C é, equivalentemente, solução de problema de valor inicial

$$L[C] = 0 \quad , \quad t>0$$

$$C(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi},0^+) = \frac{\partial C}{\partial t}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi},0^+) = \ldots = \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi},0^+) = 0$$

$$\frac{\partial^{m-1}C}{\partial t^{m-1}}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi},0^+) = \delta_{\underset{\sim}{\xi}}(\underset{\sim}{x})$$

Em dominios espaciais sem fronteiras, impõe-se ainda à solução causal condições de limitação no infinito - como a condição de radiação de Sommerfeld, no caso hiperbólico - obtendo-se a função de Green de espaço livre, adequada à solução de problemas de valor inicial com o operador L.

Para problemas com condições de contorno espaciais , pode-se seguir o procedimento indicado acima, ie, impor à solução fundamental condições de contorno adequadas, ou, equivalentemente, substituir a excitação impulsiva por condições de contorno impulsivas (fontes concentradas no contorno).

Um paralelo entre a função de Green e o método de solução comentado no §4.2 e, em particular, a conexão entre a função de Green e a função de Riemann, são possiveis sempre que (4.11) for válida, no sentido das distribuições. As integrações (4.10) e (4.12) são consideradas como combinações lineares de uma familia de distribuições, ie , em $<u,v>_\Omega$ e em $B(u,v)$ um dos operandos, digamos $u(\underset{\sim}{x})$, é uma distribuição e o outro é uma familia $v(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi})$ de distribuições. Em cada ponto $\underset{\sim}{\xi}$, o par (u,v) pertence ao subconjunto $U\times F$ de T^2 e a igualdade presente em (4.11) é entendida como

$$<<L[u],v>_\Omega,\phi> - <<u,L^*[v]_\Omega>,\phi> = <B(u,v),\phi> \ \forall\phi \ \varepsilon\mathcal{D}(\Omega)$$

Para a obtenção da solução de $L[u] = f$ num domínio Ω limitado, como o domínio de dependência para a equação da onda, considere-se a função de Green adjunta $g^*(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi})$, solução de $L^*[g^*] = \delta_{\underset{\sim}{\xi}}(\underset{\sim}{x})$. Com o uso de (4.11), tem-se

$$<g^*, L[u]>_\Omega - <u,\delta_{\underset{\sim}{\xi}}(\underset{\sim}{x})>_\Omega = B(u,g^*) \qquad (4.18)$$

obtendo-se a solução

$$u(\underset{\sim}{\xi}) = <g^*(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi}),f(\underset{\sim}{x})>_\Omega - B(u(\underset{\sim}{x}), g^*(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi})) \quad \underset{\sim}{\xi} \in \Omega$$

com

$$<g^*,f>_\Omega - B(u,g^*) = 0 \qquad \xi \notin \Omega$$

4.6. Função de Green para a equação da onda.

Exemplifica-se o procedimento acima com o problema unidimensional de propagação de ondas em meio homogêneo

$$L[u] \equiv u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \qquad t>0$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \phi(x) \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \; x \in (-\infty,\infty) \qquad (4.19)$$

cuja solução, para $f \equiv 0$ é dada pela expressão de D'Alembert(1.4)

A função de Green causal $g(x,t,x_o,t_o)$ para o problema acima satisfaz

$$L[g] = \delta_{x_o}(x)\ \delta_{t_o}(t) \qquad t \geq t_o$$

$$g \equiv 0 \qquad t < t_o$$

ou o problema equivalente

$$L[g] = 0 \qquad t > t_o$$

$$g(x,t_o,x_o,t_o) = 0$$

$$g_t \Big|_{t=t_o} = \delta_{x_o}(x)$$

Aplicando formalmente a solução (1.4), obtém-se

$$g(x,t,x_o,t_o) = \frac{1}{2c}\ H(R(x_o,t_o))$$

onde $H(R)$ é a função de Heaviside de R, com valor

$$H(x,t) = \begin{cases} 1 & (x,t) \in R \\ 0 & (x,t) \notin R \end{cases}$$

e a região R é o cone de ondas progressivo, compreendido pelas caraterísticas C^+ e C^- emanando de (x_o,t_o) no sentido $t > t_o$ (fig. 4.1a).

A função de Green g é a função irradiação de(x_o,t_o), indicando o efeito do pulso de velocidade inicial. A função de Green causal adjunta g* satisfaz a mesma equação imposta a g $(L=L^*)$, com a troca de (x,t) por (x_o,t_o) e $g^* \equiv 0$, $t > t_o$, obtendo-se a solução

$$g^*(x,t,x_o,t_o) = \frac{1}{2c} H(R')$$

onde R' é o cone de ondas retrógrado (ver fig. 4.1b).

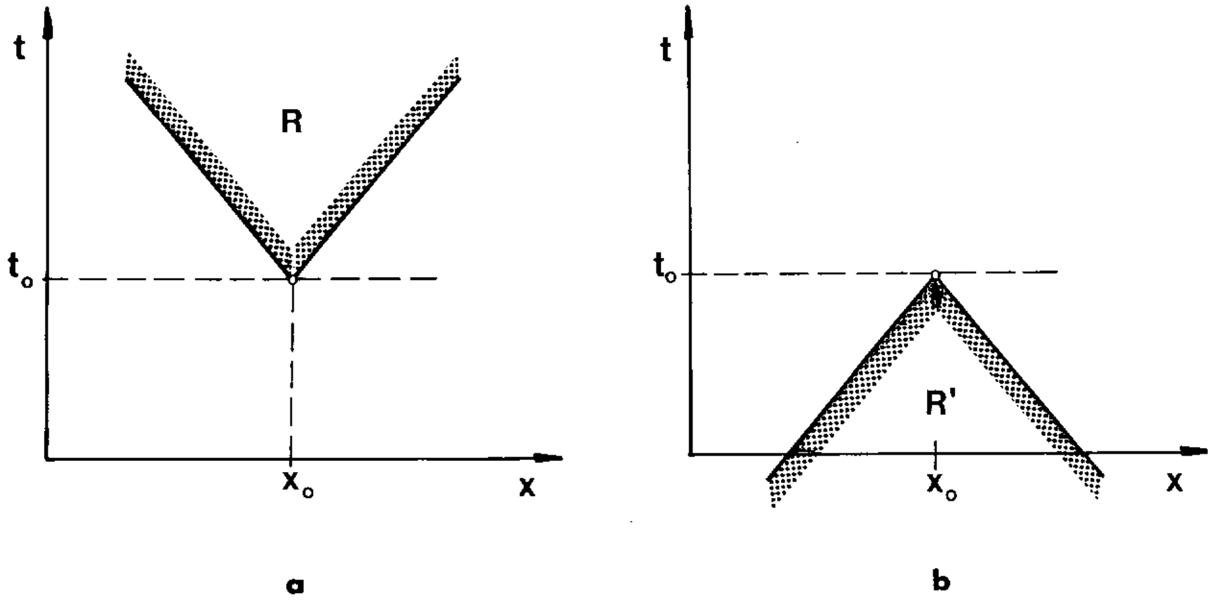


Fig.4.1: Cones de onda pelo ponto (x_o,t_o)

a) progressivo - dominio de influência de (x_o,t_o)

b) retrógrado - dominio de dependência de(x_o,t_o)

Para a solução de (4.19), aplica-se (4.18) a uma região conveniente, tendo-se a expressão

$$<g^*,f>_\Omega - <u,\ \delta_{x_o}(x)\ \delta_{t_o}(t)>_\Omega = B(u,g^*) \qquad (4.20)$$

onde, por (4.7), (4.8) e (4.13),

$$B(u,g^*) = \oint_{\partial\Omega} (ug_t^* - g^*u_t)\ dx - c^2(g^*u_x - ug_x^*)\ dt$$

Adotando o domínio $\Omega = (MNP)^+$(ver fig.4.2), exterior à região $R'\cap(t>0)$, inclue-se em Ω as linhas de descontinuidade de g^* e o 2º termo de (4.20) fornece

$$<u,\ \delta_{x_o}\delta_{t_o}>_\Omega = u(x_o,t_o)$$

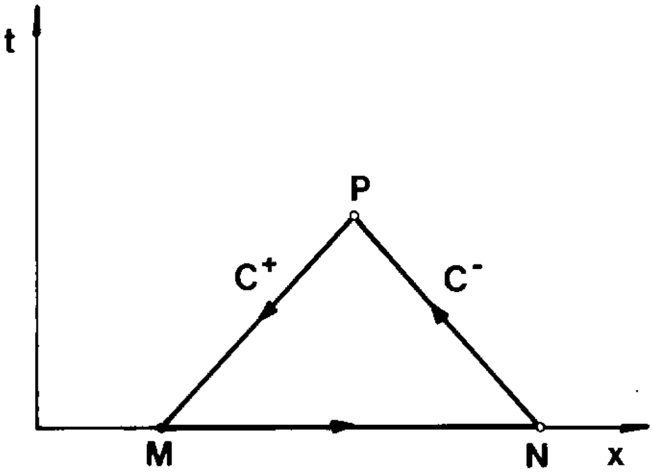


Fig. 4.2: Dominio Ω para a solução via função de Green

A integral de contorno pode ser dividida em três porções,

$$B = I_1 + I_2 + I_3$$

com

$$I_1 = \int_{M^+}^{N^+} \quad ; \quad I_2 = \int_{N^+}^{P^+} \quad ; \quad I_3 = \int_{P^+}^{M^+}$$

Como $g^* \equiv 0$ em N^+P^+ e P^+M^+, tem-se $I_2 = I_3 = 0$. Para I_1, tem-se $dt = 0$ e

$$B(u,g^*) = \int_{x_o-ct_o^+}^{x_o+ct_o^+} (\phi g_t^* - g^*\psi)\, dx$$

Observando que, entre $x = (x_o - ct_o)^-$ e $x = (x_o+ct_o)^+$, g^* sofre duas descontinuidades, a saber

$$\text{em } M : \quad g_t^* = -c\, g_x^* = -\frac{1}{2}\ \delta_{x_o-ct_o}(x)$$

$$\text{em } N : \quad g_t^* = c\, g_x^* = -\frac{1}{2}\ \delta_{x_o+ct_o}(x)$$

obtém-se finalmente a expressão para a solução de (4.19) como

$$u(x_o,t_o) = \frac{1}{2}[\phi(x_o-ct_o) + \phi(x_o+ct_o)] + \frac{1}{2c}\int_{x_o-ct_o}^{x_o+ct_o} \psi(x)\, dx \tag{4.21}$$

$$+ \frac{1}{2c} \iint_{\Omega} f(x,t)\, dx\, dt$$

4.7. Função de Riemann para a equação da onda.

Para obter a solução acima por um processo clássico, tome-se para região Ω onde se estabelece a relação (4.20) o interior de MNP ($\Omega = M^- N^- P^-$). Tal região não contém as linhas de descontinuidade de g^* e o 2º termo de (4.20) se reduz a $\langle u, \delta_{x_o} \delta_{t_o} \rangle_\Omega = 0$. Por outro lado, em I_1, $g^*_t \equiv 0$ e

$$I_1 = - \frac{1}{2c} \int_{x_o - ct_o}^{x_o + ct_o} \psi(x)\, dx$$

Já em I_2 e I_3, $g^* \equiv \frac{1}{2c}$, obtendo-se

$$I_2 = u(P) - u(N)$$

$$I_3 = u(P) - u(M)$$

a esta reinterpretação de (4.20) conduz à mesma expressão(4.21) para $u(x_o, t_o) = u(P)$.

Observa-se então que, como somente os valores contínuos de g^* foram usados, não se requer o conceito de soluções ideais. A função de Riemann $w(x,t,x_o,t_o)$, solução do problema caraterístico

$$L^*[w] = 0 \qquad \text{em } R'$$

$$w \equiv \frac{1}{2c} \qquad \text{em } C^+: x-ct = x_o - ct_o$$

$$C^-: x+ct = x_o + ct_o$$

é idêntica a g* no interior de R', representando igualmente bem a solução fundamental e não contendo, necessàriamente, as descontinuidades presentes em g*.

A construção de funções de Riemann normalizadas, com $w(x_o,t_o,x_o,t_o) = 1$, para o problema de propagação de ondas em meios inomogêneos será vista a seguir.

5. O MÉTODO DE RIEMANN.

5.1. A função de Riemann.

Como se pretendeu esclarecer com a discussão acima, pode-se desenvolver um método semi-analítico de solução, baseado numa fórmula de representação ou solução geral, recorrendo exclusivamente a um tratamento matemático clássico. Observe-se também que, dadas as definições (3.15-17) para os coeficientes K_u e K_σ das equações de onda(3.14-16), requer-se que a impedância Z(x) seja contínua e diferenciável em todos os pontos do domínio espacial do problema de propagação considerado. Cada descontinuidade em Z ou sua derivada impõe a divisão do domínio, com a adoção de condições de contorno adequadas (V.§3.4) para os subdomínios.

A primeira solução geral do problema de Cauchy para uma ampla classe de equações hiperbólicas foi apresentada por RIEMANN[32] e posteriormente generalizada por DARBOUX[33], aplicando-se a qualquer equação hiperbólica linear em duas variáveis.

Se L é um operador hiperbólico linear, a transformação para as variáveis caraterísticas (ξ,η), ver sec.3, leva L à forma normal

$$L[u] = 2u_{\xi\eta} + 2Du_\xi + 2Eu_\eta + H\,u \tag{5.1}$$

onde D, E, H são funções de (ξ,η). Como exemplo, tome-se a equação (2.20) para as ondas de deslocamento, cuja forma normal (3.14) pode ser reescrita como

$$L\,[u] \equiv 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{2}\bar{K}_u\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)(u_\xi + u_\eta) = 2\bar{a}(\xi,\eta) \tag{5.2}$$

O operador adjunto L^* será, tendo em vista (4.6)

$$L^*[v] = 2v_{\xi\eta} - 2(Dv)_\xi - 2(Ev)_\eta + Hv \qquad (5.3)$$

ou, no caso específico da equação (5.2)

$$L^*[v] = 2v_{\xi\eta} - \frac{1}{4}(\bar{K}' + 2\bar{K})(v_\xi + v_\eta) \qquad (5.4)$$

Se Ω é um domínio limitado do plano (ξ,η), a propriedade (4.4) do operador L^* permite obter, com o teorema de Green, a relação (4.11) que, neste caso, assume a forma

$$\iint_\Omega (vL[u] - uL^*[v])ds = \int_{\partial\Omega} [M\cos(\underset{\sim}{n},\xi) + N\cos(\underset{\sim}{n},\eta)]ds$$

$$= \oint_{\partial\Omega} - Nd\xi + Md\eta \qquad (5.5)$$

onde, por (4.7) e (4.8)

$$M \equiv vu_\eta - uv_\eta + 2Duv = (uv)_\eta - 2u(v_\eta - Dv)$$
$$N \equiv vu_\xi - uv_\xi + 2Euv = (uv)_\xi - 2u(v_\xi - Ev) \qquad (5.6)$$

Seja dado um problema de Cauchy para $L[u] = f$: sobre uma curva Γ suave $\eta = \lambda(\xi)$ (ver fig.5.1) tem-se os dados, que devem se restringir a duas combinações linearmente independentes de u, u_ξ, e u_η - usualmente $u\big|_\Gamma$ e $\frac{\partial u}{\partial \underset{\sim}{n}}\Big|_\Gamma$. De fato, se $\xi = \lambda_1(t)$ e $\eta = \lambda_2(t)$ são equações paramétricas de Γ, tem-se

$$\frac{d}{dt}(u\big|_\Gamma) = u_\xi\Big|_\Gamma \dot{\lambda}_1 + u_\eta\Big|_\Gamma \dot{\lambda}_2$$

Portanto, uma terceira condição nada acrescentaria aos dados.

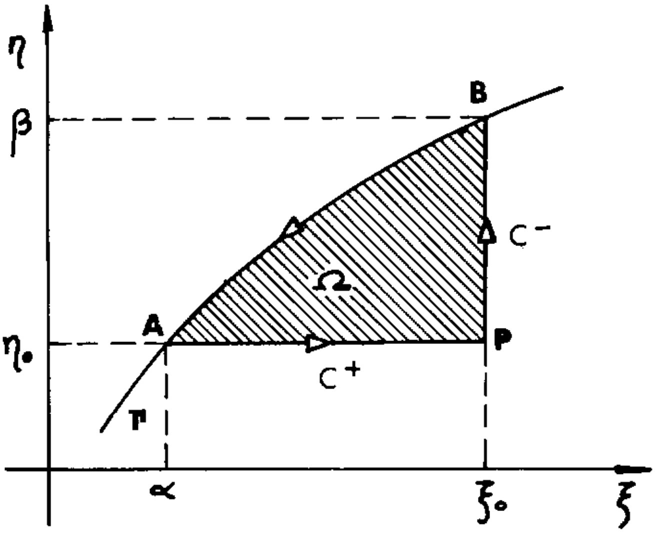


Fig.5.1: Domínio de dependência para a solução em P

O domínio de dependência para a solução $u(P)=u(\xi_o,\eta_o)$ é a região Ω limitada pelos segmentos de caraterísticas PB e PA e o segmento AB da curva de dados Γ(ver fig.5.1). A integral de contorno em (5.5) será desdobrada em

$$\oint_{\partial\Omega} = \int_A^P + \int_P^B + \int_B^A = I_1 + I_2 + I_3$$

Em AP tem-se $d\eta=0$, obtendo-se

$$I_1 = \int_\alpha^{\xi_o} - N d\xi = uv\Big|_{\xi_o}^{\alpha} + 2\int_\alpha^{\xi_o} u(v_\xi - Ev)d_\xi \qquad (5.7)$$

Analogamente em PB, onde $d\xi=0$, tem-se

$$I_2 = \int_{\eta_o}^{\beta} M d\eta = uv\Big|_{\eta_o}^{\beta} + 2\int_{\beta}^{\eta_o} (v_\xi - Dv)d\eta \tag{5.8}$$

Observando a primeira parcela nas expressões (5.7) e (5.8) acima, vê-se que é possível obter uma fórmula para a representação para a solução $u(\xi_o,\eta_o)$, envolvendo os valores de $u(\alpha,\eta_o)$ e $u(\xi_o,\beta)$ se para v for tomada a função de Riemann $w(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta)$, solução do problema caraterístico:

$$\begin{array}{ll} L^*[w] = 0 & (\xi,\eta) \in \Omega \\ w_\eta - Dw = 0 & \xi = \xi_o \text{ (PB)} \\ w_\xi - Ew = 0 & \eta = \eta_o \text{ (AP)} \end{array} \tag{5.9}$$

normalizado com $w(\xi_o,\eta_o,\xi_o,\eta_o) = w(P,P) = 1$

As condições de contorno impostas acima sobre w podem ser escritas como

$$\begin{array}{l} w(\xi_o,\eta_o,\xi_o,\eta) = \exp\left[\int_{\eta_o}^{\eta} D(\xi_o,\sigma)d\sigma\right] \\ w(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta_o) = \exp\left[\int_{\xi_o}^{\xi} E(\sigma,\eta_o)d\sigma\right] \end{array} \tag{5.10}$$

Para completar a fórmula de representação, expande-se a parcela I_3 da integral de contorno, obtendo-se

$$\begin{array}{l} I_3 = \int_A^B \left[(w_\xi - 2E\omega)u\Big|_\Gamma - wu_\xi\Big|_\Gamma\right]d\xi + \\ \qquad + \left[wu_\eta\Big|_\Gamma - (w_\eta - 2Dw)u\Big|_\Gamma\right]d\eta \end{array} \tag{5.11}$$

Assim, (5.5) fornece uma representação para a solução do problema de Cauchy, na forma

$$u(\xi_0,\eta_0) = \frac{1}{2}\Big[w(\xi_0,\eta_0,\alpha,\eta_0)u(\alpha,\eta_0) + w(\xi_0,\eta_0,\xi_0,\beta)u(\xi_0,\beta)\Big]$$

$$+ \frac{1}{2} I_3 - \frac{1}{2}\iint_\Omega w(\xi_0,\eta_0,\xi,\eta)\ f(\xi,\eta)dA \qquad (5.12)$$

Duas propriedades da função de Riemann, de fácil demonstração, serão úteis no decorrer deste trabalho.

P1: Se $w(\xi_0,\eta_0,\xi,\eta)$ é a função de Riemann para o operador L, e se uma transformação de variáveis independentes $T:(\xi,\eta) \rightarrow (r,s)$ leva L a $\bar{L}$, então $\bar{w}oT = w$, ie, se

$(r_0,s_0) = T(\xi_0,\eta_0)$ e $(r,s) = T(\xi,\eta)$ então

$\bar{w}(r_0,s_0,r,s) = w(\xi_0,\eta_0,\xi,\eta)$

Assim, no caso da transformação definida por (3.8), teremos

$$\bar{w}(x_0,t_0,x,t) = w(\xi_0,\eta_0,\xi,\eta) \qquad (5.13)$$

P2: Se a variável dependente sofre a transformação

$$u(\xi,\eta) = \Lambda(\xi,\eta)\ U(\xi,\eta) \qquad (5.14)$$

e se $W(\xi_0,\eta_0,\xi,\eta)$ é a função de Riemann para o operador diferencial transformado correspondente, então

$$W(\xi_0,\eta_0,\xi,\eta) = \frac{\Lambda(\xi,\eta)}{\Lambda(\xi_0,\eta_0)}\ w(\xi_0,\eta_0,\xi,\eta) \qquad (5.15)$$

5.2. Construção da função de Riemann.

Dentre os diversos métodos para a construção da função de Riemann (ver COPSON[20]), parece adequado ao tratamento numérico reduzir(5.9) a uma equação integral equivalente. Isto pode ser feito facilmente com o uso da propriedade P.2 enunciada acima, se for encontrada uma deformação $\Lambda(\xi,\eta)$ tal que, em lugar de (5.10), se tenha as condições de contorno normalizadas

$$W(\xi_o,\eta_o,\xi_o,\eta) \equiv W(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta_o) = 1 \tag{5.16}$$

Isto equivale a se exigir que, na equação transformada $\bar{L}[U]= F$, os coeficientes $\bar{E}$ e $\bar{D}$ sejam identicamente nulos, ie, que o operador $\bar{L}$ seja auto-adjunto ($\bar{L}^*= \bar{L}$). Nesse caso, o problema (5.9) é transformado na equação

$$\bar{L}^*[W] = W_{\xi\eta} + H(\xi,\eta)W = 0$$

com as condições de contorno (5.16). A solução de tal problema transformado é obviamente equivalente à solução para a equação integral de Volterra, de 2ª espécie

$$W(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) = 1 - \int_{\xi_o}^{\xi}\int_{\eta_o}^{\eta} H(r,s)W(\xi_o,\eta_o,r,s)ds\, dr$$

As condições de contorno (5.16) devem corresponder às (5.10) pela transformação (5.15). Deste ponto de vista, as condições sobre $\Lambda(\xi,\eta)$ são:

$$\begin{aligned} \Lambda(\xi_o,\eta)\ \exp\Big[\int_{\eta_o}^{\eta} D(\xi_o,\sigma)d\sigma\Big] &= \Lambda(\xi_o,\eta_o) \\ \Lambda(\xi,\eta_o)\ \exp\Big[\int_{\xi_o}^{\xi} E(\sigma,\eta_o)d\sigma\Big] &= \Lambda(\xi_o,\eta_o) \end{aligned} \qquad (5.17)$$

Outra forma dessas condições é obtida pela imposição de que o operador transformado $\bar{L}$ deve ser auto-adjunto. Partindo da transformação (5.14) e diferenciando sucessivamente, tem-se

$$u_\xi = \Lambda_\xi U + \Lambda U_\xi \quad ; \quad u_\eta = \Lambda_\eta U + \Lambda\ U_\eta$$

$$u_{\xi\eta} = \Lambda_{\xi\eta} U + \Lambda_\eta U_\xi + \Lambda_\xi U_\eta + \Lambda U_{\xi\eta}$$

e o operador (5.1) é levado a

$$\begin{aligned} \bar{L}[U] = 2\Lambda U_{\xi\eta} &+ 2(D\Lambda + \Lambda_\eta)U_\xi + 2(E\Lambda + \Lambda_\xi)U_\eta + \\ &+ 2(\Lambda_{\xi\eta} + D\Lambda_\xi + E\Lambda_\eta + \frac{1}{2}H\Lambda)U \end{aligned}$$

Agora, observando-se a expressão(4.6) para o operador adjunto, vê-se que $\bar{L}$ é auto-adjunto se e sòmente se

$$\begin{aligned} \Lambda_\eta + D\Lambda &= 0 \\ \Lambda_\xi + E\Lambda &= 0 \end{aligned} \qquad (5.18)$$

A condição de integrabilidade para o sistema acima é obtida diferenciando (5.18a) e (5.18b) em relação a ξ e a η, respectivamente, resultando em

$$(D\Lambda)_\xi = (E\Lambda)_\eta$$

ou, com Λ_ξe Λ_η de (5.18), vem

$$D_\xi = E_\eta \tag{5.19}$$

Tomando condições de contorno nas retas $\xi=\xi_o$ e $\eta=\eta_o$, integramos (5.18), obtendo as soluções:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\xi,\eta) &= \Lambda(\xi,\eta_o) \exp \left[-\int_{\eta_o}^{\eta} D(\xi,r)dr\right] \\ \Lambda_2(\xi,\eta) &= \Lambda(\xi_o,\eta) \exp \left[-\int_{\xi_o}^{\xi} E(r,\eta)dr\right] \end{aligned} \tag{5.20}$$

Exigindo que Λ_1 satisfaça(5.18b), tem-se

$$\Lambda_{1_\xi} + E\Lambda_1 = 0$$

ou , após simplificações

$$\left[E(\xi,\eta) - \int_{\eta_o}^{\eta} D_\xi(\xi,r)dr\right]\Lambda(\xi,\eta_o) = -\Lambda_\xi(\xi,\eta_o)$$

e, com a condição de integrabilidade (5.19):

$$E(\xi,\eta_o)\Lambda(\xi,\eta_o) = -\Lambda_\xi(\xi,\eta_o)$$

que, integrada em ξ, fornece

$$\Lambda(\xi,\eta_o) = \Lambda(\xi_o,\eta_o) \exp \left[-\int_{\xi_o}^{\xi} E(r,\eta_o)dr\right] \tag{5.21}$$

De modo análogo, exigindo que $\Lambda_2$satisfaça(5.18b),che ga-se a

$$\Lambda(\xi_o,\eta) = \Lambda(\xi_o,\eta_o)\ \exp\ \left[-\int_{\eta_o}^{\eta} D(\xi_o,r)dr\right] \qquad (5.22)$$

Assim, com as condições (5.21-22) inseridas em (5.20), as soluções Λ_1 e Λ_2 podem ser escritas como

$$\Lambda_1(\xi,\eta) = \Lambda(\xi_o,\eta_o)\ \exp -\left[\int_{\eta_o}^{\eta} D(\xi,r)dr + \int_{\xi_o}^{\xi} E(r,\eta_o)dr\right]$$

$$\Lambda_2(\xi,\eta) = \Lambda(\xi_o,\eta_o)\ \exp\ \left[\int_{\xi_o}^{\xi} E(r,\eta)dr + \int_{\eta_o}^{\eta} D(\xi_o,r)dr\right]$$

Apesar das diferenças entre as duas expressões acima, as condições de contorno (5.17) e o sistema de equações(5.18), satisfeitos por ambas as soluções implicam, como é fácil mostrar, que $\Lambda_1 \equiv \Lambda_2$. Uma fórmula conveniente para a transformação $\Lambda(\xi,\eta)$ pode ser, então, a expressão simetrizada

$$\Lambda(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\ [\Lambda_1(\xi,\eta) + \Lambda_2(\xi,\eta)]$$

No caso particular da equação (5.2), tem-se

$$D = E = \frac{1}{4}\ \bar{K}_u\ (\frac{\xi+\eta}{2}) = \frac{1}{4}\ \bar{K}_u(\tau)$$

A condição de integrabilidade (5.19) é satisfeita, pois $(\bar{K}_u)_\xi =$ $= (\bar{K}_u)_\eta = \bar{K}_u'/2$ e ao longo das retas $\xi-\eta$ = cte., caraterísticas para o sistema (5.18), integra-se a equação ordinária

$$\frac{1}{2}\ \Lambda + \frac{1}{4}\bar{K}_u\Lambda = 0$$

obtendo-se

$$\Lambda(\xi,\eta) = \Lambda(\xi_o,\eta_o)\ \exp\ [-\int_{\tau_o}^{\tau} \frac{1}{2}\ \bar{K}_u(r)dr]$$

sendo $\Lambda(\xi,\eta)$ função apenas de $x(\xi,\eta)$. De fato, tomando a definição(3.15)

$$K_u(x) = c(x)\ \frac{d}{dx}\ [\ell n(\rho c)]$$

e lembrando que, por (3.9), $d\tau = dx/c(x)$, tem-se

$$\int_{\tau_o}^{\tau} \bar{K}_u(r)dr = \ell n\ \frac{\rho c}{\rho_o c_o}$$

Assim, tomando como referência um ponto arbitrário x_o , com a normalização $\Lambda(\xi_o,\eta_o) = 1$, obtém-se, finalmente

$$\Lambda(\xi,\eta) = \lambda(x) = \sqrt{\frac{\rho_o c_o}{\rho(x)c(x)}} \qquad (5.24)$$

Como foi indicado no §3.3, a função acima descreve o efeito de refração de onda causado pela inomogeneidade do meio. Assim, a solução para a equação $U_{\xi\eta} = 0$ corresponde à solução WKB, considerando apenas a onda refratada. A forma específica das equações correspondentes à transformação (5.14) será vista a seguir.

6. MEIO INFINITO.

6.1. Solução do problema de Cauchy.

O procedimento delineado nas seções anteriores será agora aplicado à solução do problema de valor inicial para a propagação de ondas de deslocamento ou tensão em meios elásticos inomogêneos. É conveniente rescrever as equações e condições para tal problema, na forma original, normal e auto-adjunta, o que será feito sucintamente.

O problema de valor inicial para a equação(3.11)é

$$\begin{aligned} & u_{tt} - c^2(u_{xx} + \frac{\gamma'}{\gamma} u_x) = f(x,t), x \in R \ , \ t>0 \\ & \left.\begin{aligned} & u(x,0) = u_o(x) \\ & u_t(x,0) = v_o(x) \end{aligned}\right\} \quad x \in R \end{aligned} \tag{6.1}$$

e o correspondente problema de valor inicial para as ondas de tensão [equação (3.12)] será

$$\begin{aligned} & \sigma_{tt} - c^2(\sigma_{xx} - \frac{\rho'}{\rho} \sigma_x) = g(x,t) \ x \in R \ , \ t>0 \\ & \left.\begin{aligned} & \sigma(x,0) = \sigma_o(x) \\ & \sigma_t(x,0) = \omega_o(x) \end{aligned}\right\} \quad x \in R \end{aligned} \tag{6.2}$$

Com a definição (3.9) para o tempo de propagação e a transformação (3.8) das variáveis x,t para as variáveis caraterísticas ξ, η as equações e condições acima passam, no domínio caraterístico,para as formas normais

$$\begin{aligned} & u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\,\bar{K}_u\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)(u_\xi + u_\eta) = a(\xi,\eta) \qquad \xi-\eta>0 \\ & u(\xi,\xi) = \bar{u}_o(\xi) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \xi \in R \\ & [u_\xi - u_\eta](\xi,\xi) = \bar{v}_o(\xi) \end{aligned} \tag{6.3}$$

e

$$\begin{aligned} & \sigma_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\bar{K}_\sigma\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)(\sigma + \sigma) = b(\xi,\eta) \qquad \xi\ \eta>0 \\ & \sigma(\xi,\xi) = \bar{\sigma}_o(\xi) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \xi \in R \\ & [\sigma_\xi - \sigma_\eta](\xi,\xi) = \bar{\omega}_o(\xi) \end{aligned} \tag{6.4}$$

onde $\bar{K}_u$ e $\bar{K}_\sigma$ são dadas por (3.15-17), e tem-se ainda

$$\begin{aligned} a(\xi,\eta) &= -\frac{1}{4}\, f[x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)] \\ b(\xi,\eta) &= -\frac{1}{4}\, g[x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)] \\ \bar{u}_o(\xi) &= u_o(X(\xi)) \end{aligned}$$

onde X é a transformação inversa $\tau^{-1}(\xi)$, definida em (3.10a). A correspondência entre as demais condições é idêntica à indicada acima para $\bar{u}_o$.

Para levar (6.3a) e (6.4a) para a forma auto-adjunta, aplica-se a transformação de variável dependente (5.14) que, em vista do estabelecido no §5.2, será escrita:

$$\begin{aligned} U(\xi,\eta) &= \Lambda^{-1}(\xi,\eta)\ u\ (\xi,\eta) \\ T(\xi,\eta) &= \Lambda(\xi,\eta)\ \sigma\ (\xi,\eta) \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\Lambda(\xi,\eta) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{o}^{\frac{\xi+\eta}{2}} \bar{K}_u(\tau)d\tau\right] = \lambda\left[X\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\right]$$

com

$$\lambda(x) = \sqrt{\frac{\rho_o c_o}{\rho(x)c(x)}} \qquad (6.7)$$

Diferenciando a transformação (6.5), tem-se

$$\begin{aligned} U_\xi &= \frac{1}{\Lambda}\left(u_\xi + \frac{\bar{K}_u}{4}u\right) = \frac{1}{\Lambda}u_\xi + \frac{\bar{K}_u}{4}U \\ U_\eta &= \frac{1}{\Lambda}\left(u_\eta + \frac{\bar{K}_u}{4}u\right) = \frac{1}{\Lambda}u_\eta + \frac{\bar{K}_u}{4}U \qquad (6.8) \\ U_{\xi\eta} &= \frac{1}{\Lambda}\left[u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\bar{K}_u(u_\xi + u_\eta)\right] + \frac{1}{16}(\bar{K}_u^2 + 2\bar{K}_u')U \end{aligned}$$

e analogamente para (6.6), obtendo-se as equações a condições

$$\begin{aligned} & U_{\xi\eta} - \frac{1}{16}F_u\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)U = A(\xi,\eta) \qquad \xi-\eta>0 \\ & U(\xi,\xi) = \phi(\xi) \\ & \qquad\qquad\qquad \xi \in \mathbb{R} \qquad (6.9) \\ & [U_\xi - U_\eta](\xi,\xi) = \psi(\xi) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & T_{\xi\eta} - \frac{1}{16}F_\sigma\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)T = B(\xi,\eta) \quad , \quad \xi-\eta>0 \\ & T(\xi,\xi) = \mu(\xi) \\ & \qquad\qquad\qquad \xi \in \mathbb{R} \qquad (6.10) \\ & [T_\xi - T_\eta](\xi,\xi) = \nu(\xi) \end{aligned}$$

onde

$$F_u\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) = \bar{K}_u^2+2\bar{K}_u' = K^2+2cK'\Big|_{x=X\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)} \tag{6.11}$$

$$F_\sigma\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) = \bar{K}_\sigma^2+2\bar{K}_\sigma' = K^2-2cK'\Big|_{x=X\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)} \tag{6.12}$$

$$\left.\begin{aligned} \phi(\xi) &= \frac{1}{\Lambda}\,\bar{u}_o(\xi) = \frac{1}{\lambda}\,u_o\Big|_{x=X(\xi)} \\ \psi(\xi) &= \frac{1}{\Lambda}\,\bar{v}_o(\xi) = \frac{1}{\lambda}\,v_o\Big|_{x=X(\xi)} \end{aligned}\right. \tag{6.13}$$

$$\left.\begin{aligned} \mu(\xi) &= \Lambda\bar{\sigma}_o(\xi) = \lambda\sigma_o\Big|_{x=X(\xi)} \\ \nu(\xi) &= \Lambda\bar{\omega}_o(\xi) = \lambda\omega_o\Big|_{x=X(\xi)} \end{aligned}\right. \tag{6.14}$$

Como se viu na sec.5, as soluções para os problemas

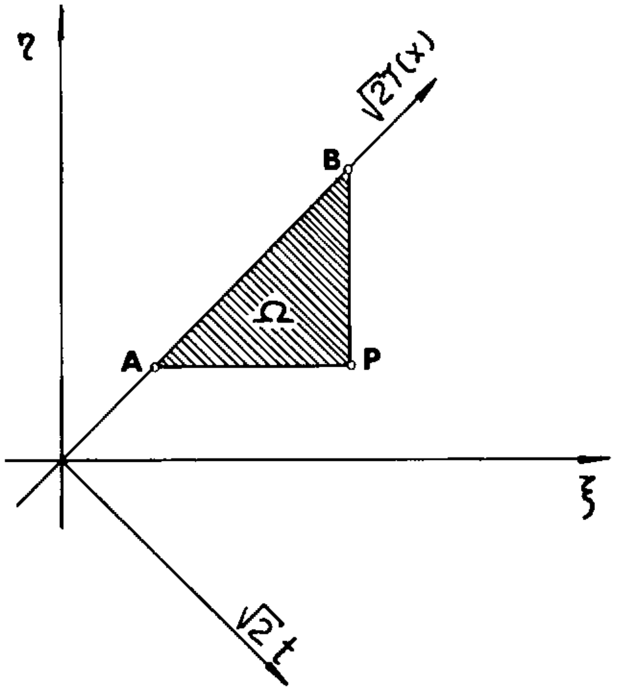


Fig.6.1: Domínio de dependência para a solução no ponto $\xi(\xi_o,\eta_o)$

de valor inicial (6.9-10) podem ser representadas para quaisquer valores da função de excitação (A ou B) e das condições iniciais, pela fórmula de representação (5.12), recorrendo-se à solução de um problema caraterístico, único para toda essa classe de problemas. A solução num ponto $P(\xi_o,\eta_o)$ (ver fig.6.1) dependerá dos valores iniciais no segmento (η_o,ξ_o)da reta Γ: $\xi_o=\eta_o$ e dos valores da função de excitação no interior do dominio de dependência Ω.

Para a solução no ponto P, as funções de Riemann $W_u \equiv W(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta)$ e $W_\sigma \equiv V(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta)$ devem satisfazer às equações

$$W_{\xi\eta} - \frac{1}{16} F_u W = 0 \qquad (6.15)$$

$$V_{\xi\eta} - \frac{1}{16} F_\sigma V = 0 \qquad (6.16)$$

com as condições de contorno normalizadas

$$W(\xi_o,\eta_o,\xi_o,\eta) = W(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta\ ) = V(\xi_o,\eta_o,\xi_o,\eta) = V(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta_o) = 1$$

A forma simples das equações e condições acima permite que se reduza o problema da obtenção das funções de Riemann à solução de uma forma simples da equação integral de Volterra de 2ª espécie, a saber

$$W(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) = 1 + \frac{1}{16}\int_{\xi_o}^{\xi}\int_{\eta_o}^{\eta} F_u\left(\frac{r+s}{2}\right) W(\xi_o,\eta_o,r,s)\,dr\,ds \qquad (6.17)$$

$$V(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) = 1 + \frac{1}{16}\int_{\xi_o}^{\xi}\int_{\eta_o}^{\eta} F_\sigma\left(\frac{r+s}{2}\right) V(\xi_o,\eta_o,r,s)\,dr\,ds \qquad (6.18)$$

É importante notar que, nessa forma simples de equação integral, o núcleo F não depende dos extremos de integração. Este fato tornará simples e econômica a solução numérica das equações acima, que será desenvolvida na sec.8. Seguindo, para as equações (6.9) e (6.10), o procedimento desenvolvido na sec.5 para a equação (5.1) obtém-se as fórmulas de representação:

$$U(\xi_o,\eta_o) = \frac{1}{2}\,[\phi(\xi_o) + \phi(\eta_o)] - \iint_\Omega A(\xi,\eta)\; W(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta)d\xi\, d\eta$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{\eta_o}^{\xi_o} \{\psi(\xi)\; W(\xi_o,\eta_o,\xi,\xi) -$$
$$-\phi(\xi)\,[W_\xi - W_\eta](\xi_o,\eta_o,\xi,\xi)\}d\xi \qquad (6.19)$$

$$T(\xi_o,\eta_o) = \frac{1}{2}\,[\mu(\xi_o) + \mu(\eta_o)] - \iint_\Omega B(\xi,\eta)\; V(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta)d\xi\, d\eta$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{\eta_o}^{\xi_o} \{\nu(\xi)\; V(\xi_o,\eta_o,\xi,\xi) -$$
$$-\mu(\xi)\,[V_\xi - V_\eta](\xi_o,\eta_o,\xi,\xi)\}d\xi \qquad (6.\ 20)$$

Conhecidas as funções de Riemann W e V, suas derivadas $W_t = W_\xi - W_\eta$ e $V_t = V_\xi - V_\eta$ podem ser calculadas por

$$W_\xi(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) = \frac{1}{16}\int_{\eta_o}^{\eta} F_u\left(\frac{\xi+s}{2}\right)\; W(\xi_o,\eta_o,\xi,s)ds$$
$$W_\eta(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) = \frac{1}{16}\int_{\xi_o}^{\xi} F_u\left(\frac{r+\eta}{2}\right)\; W(\xi_o,\eta_o,r,\eta)dr \qquad (6.21)$$

$$V_\xi(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) = \frac{1}{16}\int_{\eta_o}^{\eta} F_\sigma\left(\frac{\xi+s}{2}\right)\; V(\xi_o,\eta_o,\xi,s)ds \qquad (6.22a)$$

$$V_\eta(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) = \frac{1}{16}\int_{\xi_o}^{\xi} F_\sigma(\frac{r+s}{2})V(\xi_o,\eta_o,r,\eta)dr \qquad (6.22b)$$

6.2. Aspecto da solução para um pulso.

Os exemplos de onda mais interessantes para a caraterização da resposta de meios inomogêneos consistem em pulsos inicialmente concentrados de tensão ou deslocamento. Neste caso, considera-se nulas a função de excitação e a condição inicial de velocidade. A condição inicial de deslocamento ou tensão é uma forma de onda de suporte compacto, e.g. $u_o(x) = 0$ se $x \notin (x_i, x_f)$.

Duas vantagens importantes favorecem esse tipo de exemplo. Em virtude do suporte compacto das condições iniciais, as integrais simples que ocorrem em (6.19-20) tem sua amplitude limitada a, no máximo, o intervalo (ξ_i,ξ_f), ver fig.6.2. Por outro lado, a conveniência de se considerar condições iniciais de velocidade nula reside no fato, apontado no §1.3, de que as condições iniciais de velocidade se dispersem, mesmo em meios homogêneos. De fato, como para meios homogêneos $F_u = F_\sigma = 0$, tem-se de (6.17-18), $W = V = 1$ e, obviamente, $W_\xi = W_\eta = V_\xi = V_\eta = 0$. Assim, a condição inicial de velocidade apresenta, mesmo para meios homogêneos, uma contribuição integral - portanto dispersiva em termos de forma - o que não ocorre com a condição inicial de deslocamento ou tensão.

Exemplos específicos de pulsos em alguns materiais serão apresentados na sec.10. Por ora, é possível antecipar, pelo exame das expressões (6.19-20), o aspecto geral das soluções. A condição inicial $\phi(\xi)$ (ou$\mu(\xi)$) é nula fora do segmento IF da reta $t = 0(\xi=\eta)$, ver fig. 6.2. O semiplano $t>0$ é dividido nas regiões mostradas para as quais se tem:

regiões 1 e 5: tempo anterior ao da passagem da perturbação: prevalecem as condições iniciais.

região 2: onda principal C^+(x crescente): o termo $\phi(\eta_o)$ ou $\mu(\eta_o)$ é não-nulo; a caraterística FC^+ é a frente de onda C^+; para os pontos da frente de onda tem-se

$$u(x,t) = \frac{u_o(x_f)}{2} \sqrt{\frac{\rho c(x_f)}{\rho c(x)}}$$

$$\sigma(x,t) = \frac{\sigma_o(x_f)}{2} \sqrt{\frac{\rho c(x)}{\rho c(x_f)}}$$

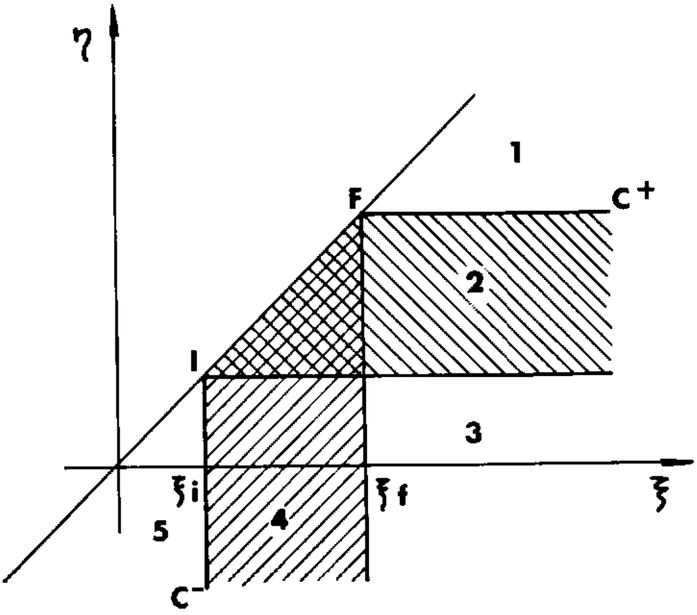


Fig.6.2: Regiões atingidas por um pulso inicial de tensão ou deslocamento.

região 4: onda principal C^-(x decrescente); o termo $\phi(\xi_o)$ou $\mu(\xi_o)$ é não-nulo. A caraterística IC^- é a frente de onda C^-; para os pontos dessa frente, tem-se

$$u(x,t) = \frac{u_o(x_i)}{2} \sqrt{\frac{\rho c(x_i)}{\rho c(x)}}$$

$$\sigma(x,t) = \frac{\sigma_o(x_i)}{2} \sqrt{\frac{\rho c(x)}{\rho c(x_i)}}$$

região $2\cap 4$: ondas superpostas; ambos os termos $\phi(\xi_o)$ e $\phi(\eta_o)$ ou $\mu(\xi_o)$ e $\mu(\eta_o)$ são não-nulos. Nesse periodo inicial, o pulso está se dividindo nas duas ondas principais descritas acima.

região 3: tempo posterior ao da passagem da onda principal; tanto $\phi(\xi_o)$ (ou $\mu(\xi_o)$) quanto $\phi(\eta_o)$ (ou $\mu(\eta_o)$) são nulos. O termo integral na fórmula de representação, presente em $2 \cup 3 \cup 4$, manifesta-se aqui isoladamente. Resultando da reflexão contínua da onda, o ruido presente nessa região ocorre em quase todo meio inomogêneo (ver §3.3).

7. MEIO SEMI-INFINITO.

O método de Riemann, associado a procedimentos numéricos para a resolução de equações integrais, é também aplicável a problemas de valor de contorno. Essa possibilidade será aqui ilustrada com o problema da propagação de ondas em um semi-espaço inomogêneo.

Como foi exposto nas seções anteriores, o problema unidimensional de propagação de ondas de deslocamento pode ser descrito pela equação transformada

$$U_{\xi\eta} - \frac{1}{16} F_u\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)U = A(\xi,\eta) \qquad (7.1)$$

Para esta equação, mostrou-se na seção anterior a solução do problema de Cauchy, com as condições iniciais

$$\begin{aligned} U(\xi,\xi) &= \phi(\xi) = \Lambda_u u_o(X(\xi)) \\ [U_\xi - U_\eta](\xi,\xi) &= \psi(\xi) = \Lambda_u v_o(X(\xi)) \end{aligned} \qquad (7.2)$$

Admita-se, agora, uma condição adicional, sobre a fronteira x=0 do semi-espaço elástico, representada no plano caraterístico como uma terceira condição de contorno, sobre a reta $\eta = -\xi$, na forma geral

$$a(\xi)U(\xi,-\xi) + b(\xi)[U_\xi+U_\eta](\xi,-\xi) = r(\xi) \qquad (7.3)$$

No caso particular em que $u(0,t)$ é prescrito, tem-se $b\equiv 0$ e a condição de Neumann:

$$U(\xi,-\xi) = p(\xi) = u(0,\xi) \tag{7.4}$$

já que $t = (\xi-\eta)/2$ e $\lambda(0) = 1$, por convenção. O caso $a\equiv 0$ corresponde à condição de Dirichlet

$$[U_\xi+U_\eta](\xi,-\xi) = r(\xi) \tag{7.5}$$

que não tem significado físico notável, exceto quando o meio é homogêneo no contorno. De fato, observada a transformação de variável dependente (6.5), tem-se

$$U_\xi+U_\eta = \Lambda_u(u_\xi+u_\eta) + \frac{1}{2}\,\bar{K}_u U$$

e, dado que

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = \frac{1}{c}\,(u_\xi+u_\eta)$$

a condição (7.5) corresponde a

$$[U_\xi+U_\eta](\xi,-\xi) = c_o u_x(0,\xi) + \frac{1}{2}\,K_o u(0,\xi)$$

onde $K_o = \left.\dfrac{d}{dx}\,\rho c\right|_{x=0}$

Assim, se $K_o = 0$, tem-se a correspondência direta entre a condição de Dirichlet (7.5) e a condição de tensão prescrita no contorno, a saber

$$[U_\xi + U_\eta](\xi,-\xi) \equiv r(\xi) = c_o u_x(0,\xi) = \frac{1}{\rho_o c_o}\,\sigma(0,\xi) \tag{7.6}$$

Em geral, ã condição de tensão prescrita em x=0 corresponde a condição de contorno

$$[U_\xi + U_\eta](\xi,-\xi) - \frac{1}{2}K_o U(\xi,-\xi) = \frac{1}{\rho_o c_o}\,\sigma(0,\xi) \tag{7.7}$$

O domínio do problema no plano caraterístico, mostrado na fig. 7.1, é limitado pelo contorno $\Gamma = \Gamma_i \cup \Gamma_c$. Sobre Γ_i valem as condições iniciais (7.2) e sobre Γ_c a condição de contorno (7.3). Observando o domínio de dependência Ω, para a solução em um ponto $P(\xi_o,\eta_o)$, nota-se que as caraterísticas da família C^-(ξ= cte.) interceptam o contorno Γ em dois pontos. A aparente superabundância de condições implica a necessidade de uma condição de compatibilidade entre os dados sobre Γ_i e Γ_c. Essa condição pode ser encarada como a propagação, ao longo da caraterística C^+: η= 0,da condição de compatibilidade na intercessão $\Gamma_i \cap \Gamma_c$, o ponto 0.

O envolvimento da condição de contorno depende do sinal de η_o. Pode-se dividir o processo de solução em três casos:

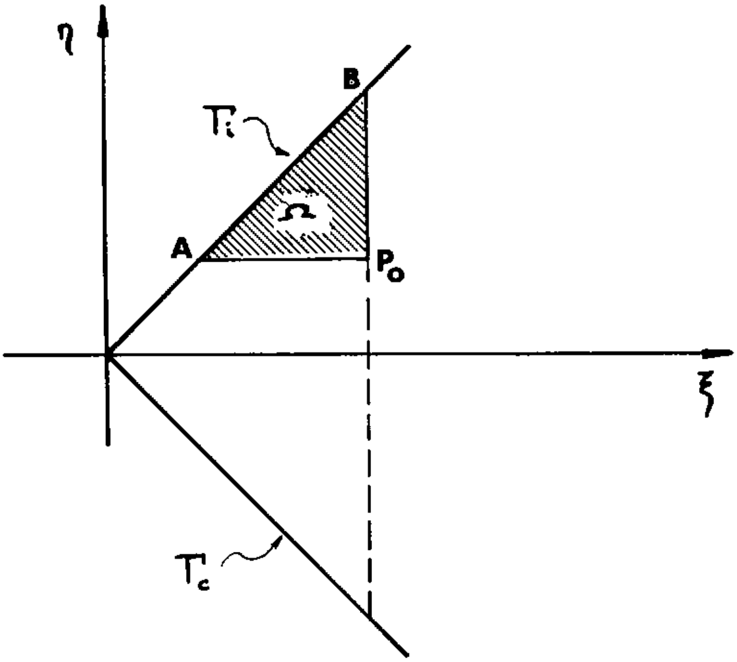


Fig.7.1: Domínio para o problema semi-infinito e domínio de dependência para o caso I(η_o>0)

I) *Região não afetada pelo contorno*: $\eta_o > 0$; $t > \tau(x) = \int_0^x \frac{ds}{c(s)}$

Tais pontos (ver fig. 7.1) não são afetados pela presença do contorno. A solução pode ser construida no domínio de dependência: $P_o(\xi_o,\eta_o)$ $B(\xi_o,\xi_o)$ $A(\eta_o,\eta_o)$, obtendo-se , com a função de Riemann, a solução (6.19), a saber

$$U(\xi_o,\eta_o) = \frac{1}{2}\{\phi(\xi_o) + \phi(\eta_o) + \int_{\xi_o}^{\eta_o} [\psi(\xi)W(\xi_o,\eta_o,\xi,\xi) \qquad (7.8)$$

$$+ \phi(\xi)[W_\xi - W_\eta](\xi_o,\eta_o,\xi,\xi)]d\xi\} -$$

$$- \iint_{\Omega} A(\xi,\eta)\, W(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta)\, ds\, d\eta$$

II) *Região afetada pelo contorno*: $\eta_o < 0$; $t < \tau(x)$

A solução pelo método de Riemann no domínio $\bar{\Omega}$: P_oBOA (ver fig. 7.2) envolve a integração da equação de Volterra em dominios nos quais o nucleo F_u tem descontinuidades intratáveis sem o recurso a funções generalizadas, o que não ocorre com o domínio Ω : P_o AB'. Após a determinação da solução em AB', utilizando a relação de compatibilidade em OP' , é possível determinar $U(\xi_o,\eta_o)$.

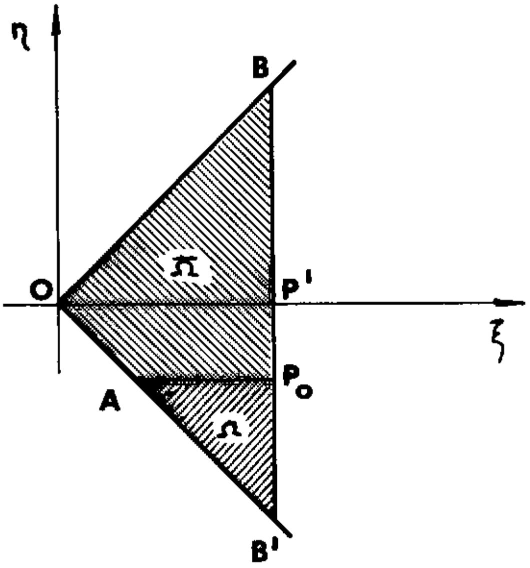


Fig.7.2: Domínios de dependência para o caso II

Partindo da forma (5.5) do teorema de Green,com o domínio acima indicado, onde se tem

P_oA : $\cos(\underset{\sim}{n},\xi) = 0$; $\cos(\underset{\sim}{n},\eta) = 1$; $ds=d\xi; W \equiv 1$; $W_\xi \equiv 0$
$B'P_o$: $\cos(\underset{\sim}{n},\xi) = 1$; $\cos(\underset{\sim}{n},\eta) = 0$; $ds=d\eta; W \equiv 1$; $W_\eta \equiv 0$
AB' : $\cos(\underset{\sim}{n},\xi) = \cos(\underset{\sim}{n},\eta) = - 2/2$

obtém-se, com o procedimento indicado no §5.1 e parametrizando as integrais de linha com a variável ξ:

$$U(\xi_o,\eta_o) = \frac{1}{2}\{U(\xi_o,-\xi_o) + U(-\eta_o,\eta_o) - 2\iint_\Omega AWd\xi d\eta$$

$$+ \int_{-\eta_o}^{\xi_o}\{W(\xi_o,\eta_o,\xi,-\xi)\left[U_\xi+U_\eta\right](\xi,-\xi) -$$

$$- U(\xi,-\xi)\left[W_\xi+W_\eta\right](\xi_o,\eta_o,\xi,-\xi)\}d\xi\} \qquad (7.9)$$

Para as condições padrão de tensões e deslocamentos prescritos em x=0 adota-se a notação

$$p(\xi) \equiv U(\xi,-\xi) = u(0,\xi)$$
$$\qquad (7.10)$$
$$q(\xi) \equiv \left[U_\xi+U_\eta - \frac{1}{2}K_oU\right] \quad (\xi,-\xi) = \frac{1}{\rho_o c_o}\sigma(0,\xi)$$

Somando e subtraindo $\frac{1}{2}K_oU$ às parcelas do integrando de (7.9), obtém-se a representação para a solução

$$U(\xi_o,\eta_o) = \frac{1}{2}\{p(\xi_o) + p(-\eta_o) + \int_{-\eta_o}^{\xi_o}\left[q(\xi)W(\xi_o,\eta_o,\xi,-\xi) -\right.$$

$$- p(\xi)\left[W_\xi + W_\eta - \frac{1}{2} K_o W\right](\xi_o, \eta_o, \xi, -\xi)]d\xi\} -$$

$$- \iint_\Omega A\ W d\xi d\eta \qquad (7.11)$$

Sobre o contorno AB' , apenas uma das condições p ou q ,ou uma combinação linear (7.3), é conhecida. A completa solução depende pois de uma condição adicional de compatibilidade, desenvolvida a seguir.

III) *Fronteira de compatibilidade*: $\eta_o = 0$; $t = \tau(x)$

Pode-se expressar a solução para o ponto $P_o(\eta_o, 0)$ em ambos os domínios de dependência Ω e $\bar{\Omega}$ (ver fig.7.3), com as expressões (7.8) e (7.11), respectivamente.

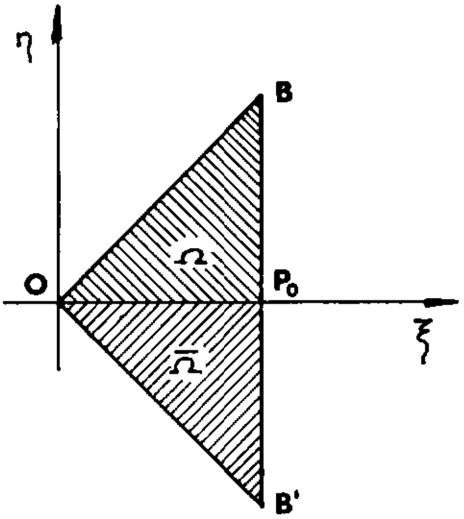


Fig. 7.3: Domínios de dependência para a solução na fronteira de compatibilidade, caso III(η_o= 0).

A solução obtida por $\Omega(P_oBO)$, como limite de (7.8), é:

$$U^{+}(\xi_o) \equiv U(\xi_o,0^{+}) = \frac{1}{2}\,\{\phi(\xi_o) + \phi(0) + \int_{\xi_o}^{0} \Big[\psi(\xi)W(\xi_o,0,\xi,\xi) +$$

$$+ \phi(\xi)\big[W_{\xi}-W_{\eta}\big](\xi_o,0,\xi,\xi)\Big]d\xi\} - \iint_{\Omega} AW\, d\xi d\eta \qquad (7.12)$$

Por outro lado, obtém-se a solução U^{-} pelo domínio $\bar{\Omega}(P_o OB')$, como o caso limite de (7.11):

$$U^{-}(\xi_o) \equiv U(\xi_o,0^{-}) = \frac{1}{2}\,\{p(\xi_o) + p(0) + \int_{0}^{\xi_o} \Big[q(\xi)W(\xi_o,0,\xi,-\xi)$$

$$- p(\xi)\big[W_{\xi}+W_{\eta}\big](\xi_o,\ ,\xi,\ -\xi)\Big]d\xi\} - \iint_{\Omega} AW\, d\xi d\eta \qquad (7.13)$$

Estritamente, é inaceitável qualquer descontinuidade no deslocamento, mesmo através de uma curva caraterística. Resulta daí a condição forte de compatibilidade

$$[U](\xi_o) \equiv U^{+}(\xi_o) - U^{-}(\xi_o) = 0$$

que deve ocorrer para qualquer ξ_o. Portanto

$$[U](\xi) \equiv 0 \qquad (7.14)$$

o que impõe às condições iniciais e de contorno a condição de compatibilidade

$$\phi(0) = p(0) = u(0,0)$$

Modelos idealizados para ondas de deslocamento com grandes deformações concentradas podem ser acolhidos no contexto das soluções generalizadas, como exposto na sec.4. Nesse caso, a condição acima é relaxada e se o salto inicial é:

$$[U](0) = \phi(o) - p(o)$$

tem-se, como em (3.23)

$$[U](\xi) = \frac{\rho_o c_o}{\rho c(x)} [U](0) = \lambda_u(x)[U](0) \qquad (7.15)$$

onde $x = X(\xi) = \tau^{-1}(\xi)$

Assim, com a solução (7.12) e a condição (7.14) ou (7.15), tem-se construida a solução $U^-(\xi)$. A representação (7.13) fornece então uma equação integral, de 1ª espécie para $q(\xi)$ ou de 2ª espécie para $p(\xi)$, completando, com a condição de contorno (13.3), as condições de Cauchy sobre Γc. A forma geral da equação integral de compatibilidade é

$$\begin{aligned} p(\xi) + \int_o^\xi \{q(r)W(\xi,0,r,-r) - p(r)[W_\xi + W_\eta - \tfrac{1}{2}K_o W](\xi,0,r,-r)\}dr \\ = \Lambda_u(\xi)(\phi_o - p_o) + \phi(\xi) + \int_o^\xi \{\psi(r)W(\xi,0,r,r) + \\ + \phi(r)[W_\xi - W_\eta](\xi,0,r,r)\}dr + 2\Big[\iint_{\bar{\Omega}} A(r,s)W(\xi,0,r,s)dr\,ds \\ - \iint_\Omega A(r,s)W(\xi,0,r,s)\,drds\Big] \equiv B(\xi) \qquad (7.16) \end{aligned}$$

Observe-se que, após a solução (numérica) da equação integral (6.17), o sistema (7.3), (7.16) pode ter solução numérica pela quadratura gaussiana da equação acima. Os algoritmos para este problema não serão aqui desenvolvidos, mas o tratamento numérico dado ao problema do meio infinito, reportado nas seções seguintes, pode ser facilmente estendido para a inclusão de condições de contorno.

É interessante citar aqui as formas simples da equação (7.16) em dois importantes casos particulares de condições de contorno:

Caso 1 : extremidade fixa.

Neste caso, tem-se $p(\xi) \equiv 0$ e (7.16) fornece, para $q(\xi)$, a equação integral de 1ª espécie

$$\int_0^{\xi} q(r)W(\xi,0,r,-r)dr = B(\xi) \qquad (7.17)$$

Assim, no caso não forçado, $A \equiv 0$, e com velocidade inicial nula, obtém-se

$$\int_0^{\xi} q(r)W(\xi,0,r,-r)dr = \phi(\xi) + \int_0^{\xi} \phi(r)\left[W_{\xi}-W_{\eta}\right](\xi,0,r,r)dr = 2U^{+}(\xi) \qquad (7.18)$$

e a representação (7.11) fornece a solução num ponto $(\xi_o,-\eta_o)$ como

$$U(\xi_o,-\eta_o) = \frac{1}{2}\int_{\eta_o}^{\xi_o} q(\xi)W(\xi_o,-\eta_o,\xi,-\xi)d\xi \qquad (7.19)$$

Caso 2: extremidade livre.

Este caso corresponde à tensão nula no contorno,ou, com (7.10b), $q(\xi)\equiv 0$. A equação (7.16) se reduz aqui à equação integral de 2ª espécie

$$p(\xi) - \int_o^\xi p(r)\left[W_\xi + W_\eta - \frac{1}{2} K_o W\right](\xi,0,r,-r)dr = B(\xi) \qquad (7.20)$$

obtendo-se expressões igualmente simples para a solução(7.11).

CAPÍTULO III

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

8. FUNÇÃO DE RIEMANN PARA MATERIAIS SUAVES E SECCIONALMENTE SUAVES.

8.1. Tipos de material inomogêneo.

Do ponto de vista matemático, os diversos modelos de meio inomogêneo serão aqui classificados segundo sua suavidade de variação. Observe-se que o coeficiente do termo que representa o efeito da inomogeneidade contém a primeira derivada espacial dos parâmetros materiais, no caso da equação de onda (6.1-2) ou de sua forma normal (6.3-4), figurando a derivada segunda na equação auto-adjunta (6.9-10). Assim, os coeficientes de tais equações podem ser desde funções suaves até funções generalizadas.

A seguinte classificação pode ser adotada, segundo a suavidade e continuidade da impedância acústica $Z(x) = \rho c(x)$

I. Material *suave*: Z, Z', Z'' continuos (fig. 8.1a)

II. Material *seccionalmente suave*: Z e Z' contínuos. Z'' tem um número finito de descontinuidades finitas (fig.8.1b).

III.Material *seccionalmente diferenciável*: Z contínuo. Z'tem um número finito de descontinuidades finitas(fig.8.1c).

IV. Material *seccionalmente contínuo*: Z tem um número finito de descontinuidades finitas (fig. 8.1d).

O procedimento numérico a ser desenvolvido a seguir é adequado aos tipos I e II de material. Para a solução com o método de Riemann, de problemas com materiais dos tipos III e IV, impõe-se, estritamente, a divisão do domínio espacial de solução pelas superfícies de descontinuidade material, ou a ampliação do tratamento para se incluir coeficientes generalizados.

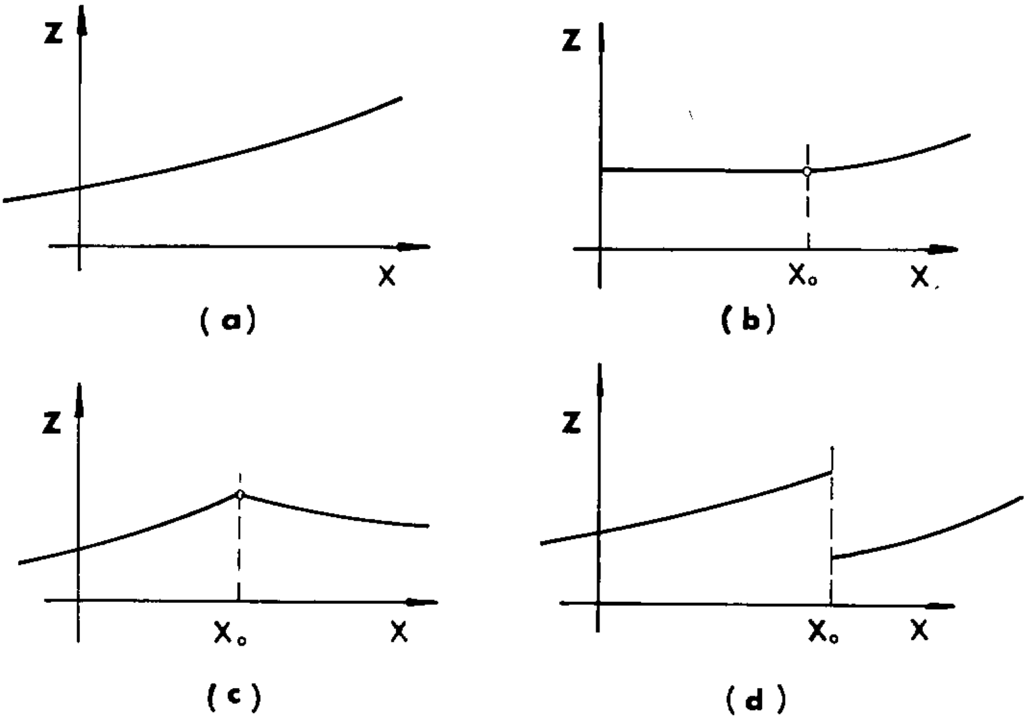


Fig. 8.1: Tipos de material inomogêneo. (a): tipo I. (b),(c), (d): tipos II, III e IV, respectivamente, mostrando-se uma descontinuidade em $x=x_o$.

8.2 O método iterativo.

A função de Riemann pode ser construida pela solução de um caso simples da equação integral de Volterra, em duas dimensões. A forma geral de tal equação é

$$W(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) = \lambda(\xi,\eta) + \int_{\xi_o}^{\xi}\int_{\eta_o}^{\eta} H(\xi,\eta,r,s)W(\xi_o,\eta_o,r,s)\, ds\, dr \quad (8.1)$$

no domínio retangular $R:\{\xi\ \varepsilon(\xi_o,\bar{\xi}),\eta\varepsilon(\eta_o,\bar{\eta})\}$

No presente estudo de propagação de ondas, o núcleo $H = F(\frac{r+s}{2})$, definido em (6.11-12), independe do extremo de integração (ξ,η) e ainda se tem $\lambda(\xi,\eta) \equiv 1$. Para os materiais suaves e seccionalmente suaves (tipos I e II), o núcleo H é quadrado-integrável no domínio limitado R. Nesses casos, estendendo-se resultados conhecidos para a equação de Volterra de 2ª espécie num domínio unidimensional (ver [35]), estabelece-se a convergência $\{W_n\} \to W$, numa norma dependente do tipo de material, do método iterativo (Picard), com a lei de formação

$$W_{n+1}\ (\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) = \lambda(\xi,\eta) + \int_{\xi_o}^{\xi}\int_{\eta_o}^{\eta} H(\xi,\eta,r,s)W_n(\xi_o,\eta_o,r,s)ds\, dr$$

podendo-se tomar $W_o \equiv \lambda$.

Este método é equivalente a se obter a solução com a expressão

$$W(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) = \lambda(\xi,\eta) + \int_{\xi_o}^{\xi}\int_{\eta_o}^{\eta} \bar{H}(\xi,\eta,r,s)\ \lambda(r,s)ds\, dr$$

onde o núcleo resolvente $\bar{H}$ é a soma de uma série de núcleos iterados $\{H_n\}$ com a fórmula de recorrência

$$H_1 = H(\xi,\eta,r,s)$$

$$H_{n+1}(\xi,\eta,r,s) = \int_{\xi_0}^{\xi}\int_{\eta_0}^{\eta} H(\xi,\eta,\ x,y)\ H_n(x,y,r,s)dy\ dx$$

Esta última formulação é mais adequada quando, para um dado núcleo, se tem uma variedade de condições de contorno $\lambda(\xi,\eta)$.

Para formas especiais do núcleo H, o método iterativo pode conduzir à solução (exata) da equação integral, como é mostrado no exemplo clássico a seguir. No entanto, o método iterativo é inconveniente como base para procedimentos numéricos , pois envolve grande número de quadraturas em todo o domínio R.

8.3. Exemplo de solução iterada: material I.1

O exemplo mais simples de material inomogêneo a ser estudado (sec.10) é o material suave linearmente inomogêneo(I.1), com densidade constante ρ_o e velocidade de propagação $c(x) = c_o(1+\alpha x)$. Neste caso, o núcleo da equação integral é $F_u = F_\sigma = (c_o\alpha)^2$, uma constante positiva. Assim, fazendo $H = \beta^2/4$, tem-se

$$W_o \equiv 1$$

$$W_1 = 1 + \frac{\beta^2}{4}\int_{\xi_o}^{\xi}\int_{\eta_o}^{\eta} ds\, dr = 1 + \frac{\beta^2}{4}\left[(\xi-\xi_o)(\eta-\eta_o)\right]$$

$$W_2 = 1 + \frac{\beta^2}{4}\int_{\xi_o}^{\xi}\int_{\eta_o}^{\eta}\left[1 + \frac{\beta^2}{4}(r-\xi_o)(s-\eta_o)\right]ds\, dr =$$

$$= 1 + \frac{\beta^2}{4}(\xi-\xi_o)(\eta-\eta_o) + \left(\frac{\beta^2}{4}\right)^2\frac{(\xi-\xi_o)^2}{2}\ \frac{(\eta-\eta_o)^2}{2}$$

$$W_k = 1 + \dots + \left(\frac{\beta^2}{4}\right)^k \frac{(\xi-\xi_o)^k(\eta-\eta_o)^k}{(k!)^2}$$

Portanto

$$W(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left[\frac{\beta\sqrt{(\xi-\xi_o)(\eta-\eta_o)}}{2}\right]^{2k} = I_o\left[\beta\sqrt{(\xi-\xi_o)(\eta-\eta_o)}\right]$$

Para o problema de valor inicial (ver fig.6.1), tem-se $\xi < \xi_o$ e $\eta > \eta_o$, ie

$$\sqrt{(\xi-\xi_o)(\eta-\eta_o)} = i\sqrt{(\xi_o-\xi)(\eta-\eta_o)}$$

donde

$$W(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) = J_o\left[\beta\sqrt{(\xi_o-\xi)(\eta-\eta_o)}\right] \qquad (8.2)$$

8.4 Solução numérica da equação integral.

A solução numérica das equações integrais (6.17-18), para a construção das funções de Riemann será aqui desenvolvida tomando-se como ponto de partida os esquemas propostos por de HOOG e WEISS[36] para o caso unidimensional. Esses "métodos implícitos de Runge-Kutta", bem como os métodos de diferenças finitas expostos em outro trabalho dos mesmos autores[37], podem também ser aplicados à solução da equação integral (7.16) para a propagação de ondas em meio semi-infinito.

Os esquemas numéricos propostos se baseiam na quadratura exata de esquemas de interpolação para o integrando HW, reduzindo a equação integral a um sistema de equações algébricas lineares para os valores aproximados de W em pontos convenientemente distribuidos. Inicialmente, considere-se a equação unidimensional

$$y(t) = \lambda(t) + \int_o^t K(t,s)\; y(s)ds \qquad (8.3)$$

com o núcleo K bem comportado em $0 \leq s \leq t \leq \bar{t}$. O domínio $(0,\bar{t})$ será dividido, uniformemente por simplicidade, em

$$t_{ij} = t_i + u_j h \quad i=1,\dots,M \; ; \; j=1,\dots,n$$

com

$$t_i = (i-1)h \quad ; \quad h = \frac{\bar{t}}{M+1} \quad ; \; 0 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_n = 1$$

Para cada t_{ij}, (8.3) fornece

$$y(t_{ij}) = \lambda(t_{ij}) + \int_0^{t_i} K(t_{ij},s)\, y(s)ds + \int_{t_i}^{t_{ij}} K(t_{ij},s)\, y(s)ds$$

A exposição será simplificada adotando-se o caso em que o núcleo K não depende do extremo de integração, ou seja, $K(t,s) \equiv H(s)$, o que ocorre nas equações de propagação.

O esquema de interpolação pode ser desenvolvido a partir do polinômio de grau n

$$\omega(x) = (x-u_1)(x-u_2)\dots(x-u_n)$$

A interpolação por polinômios de grau n-1 de uma função f(x) no intervalo (0,1), baseada nos pontos u_i pode ser escrita como

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\ \pi_i(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \pi_i(x)$$

onde $\pi_i(x)$ é o polinômio de Lagrange de grau n-1, dado por

$$\pi_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x-u_i)\omega'(u_i)}$$

Com os pesos de integração definidos pelas integrais exatas

$$a_{jk} \equiv \int_o^{u_j} \pi_k(x)\ dx$$

$$a_k \equiv \int_o^1 \pi_k(x)\ dx = a_{nk} \tag{8.4}$$

tem-se, para $s\,\varepsilon(t_i, t_{in} = t_{i+1})$, as fórmulas de quadratura

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s)ds \sim h \sum_{k=1}^{n} a_k\ \ f(t_{ik})$$

$$\int_{t_i}^{t_{ij}} f(s)ds \sim h \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, f(t_{ik})$$

O primeiro esquema proposto por de HOOG e WEISS é

$$y_{ij} = \lambda(t_{ij}) + h \sum_{\ell=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{n} a_k H(t_{\ell k}) y_{\ell k} + h \sum_{k=1}^{n} a_{jk} H(t_{ik}) y_{ik} \tag{8.5}$$

onde $y_{ij} \equiv y(t_{ij})$. O esquema acima corresponde à interpolação do integrando H(s) y(s), para $s\varepsilon(t_\ell, t_{\ell+1})$, por

$$Hy(s) \sim \sum_{k=1}^{n} H(t_{\ell k})\, y_{\ell k}\, \pi_k\left(\frac{s-t_\ell}{h}\right)$$

A análise de convergência para este esquema numérico indica que a mais alta ordem de convergência (2n-1) é obtida quando os pontos u_i são os pontos de Radau[38]. Se for necessário tomar $u_1 = 0$, os pontos de Lobatto garantem a convergência de ordem 2n-2.

Outro esquema proposto em [36] se aplica aos casos em que o núcleo K(t,s) é mal comportado para s>t, utilizando para a integral no intervalo (t_i, t_{ij}) o esquema

$$\int_{t_i}^{t_{ij}} f(s)ds \sim h\, u_j \sum_{k=1}^{n} a_k\, f(t_i+u_k u_j h)$$

que evita utilizar valores do núcleo em pontos posteriores ao extremo de integração e dispensa o uso dos pesos parciais de integração a_{jk}. Para este método, a terceira parcela de (8.5) toma a forma

$$hu_j \sum_{k=1}^{n} a_k\, H(t_i+u_j u_k h) \sum_{r=1}^{n} y_{ir}\pi_r(u_j - u_k) \qquad (8.6)$$

É importante notar que nos esquemas acima enunciados, efetua-se a quadratura exata de uma função que interpola o integrando Hy, o que é inconveniente no caso de núcleos seccionalmente contínuos. Para fixar idéias, considere-se a representação aproximada das integrais, em $x\varepsilon(0,1)$, do produto $f(x)g(x)$, onde $g(x)$ é uma função conhecida. Aproximando $f(x)$ pela interpolação

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\pi_i(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i\pi_i(x)$$

tem-se

$$\int_o^{u_k} f(x)g(x)dx \sim \sum_{i=1}^{n} f_i \int_o^{u_k} g(x)\pi_i(x)dx \equiv \sum_{i=1}^{n} C_i f_i$$

Mesmo com g(x) conhecido, pode ser inconveniente avaliar C_i de forma fechada. A vantagem desta formulação reside na possibilidade de se efetuar esta segunda quadratura por meio de um esquema numérico adequado ao comportamento de g(x). Seja, por exemplo, a interpolação

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} g_j \ell_j(x)$$

Nesse caso

$$C_i = \sum_{j=1}^{p} g_j \int_o^{u_k} \ell_j \pi_i \, dx$$

Em particular, quando g(x) é interpolado pelos mesmos polinômios π_i empregados para f, tem-se

$$\int_o^{u_k} f(x)g(x)dx \sim \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_i g_j a_{ij}^{k} \qquad (8.7)$$

onde

$$a_{ij}^{k} \equiv \int_{0}^{u_k} \pi_i(x)\pi_j(x)dx \qquad (8.8)$$

8.5 Esquemas numéricos para a equação bidimensional.

O produto de esquemas de interpolação unidimensionais e as correspondentes fórmulas de quadratura, ou o uso de fórmulas de quadratura específicas para regiões bidimensionais, permitem a extensão do tratamento numérico proposto no § anterior à equação (8.1) que, fixado o ponto paramétrico (ξ_0,η_0) , pode ser escrita

$$W(\xi,\eta) = \lambda(\xi,\eta) + \int_{\xi_0}^{\xi}\int_{\eta_0}^{\eta} H(r,s)W(r,s)\, ds\, dr \qquad (8.9)$$

O domínio R: $\{\xi \,\varepsilon(\bar{\xi},\xi_0);\ \eta\,\varepsilon(\eta_0\bar{\eta})\}$ é dividido na malha, não necessariamente uniforme

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi_1 > \xi_2 > \xi_3 > \ldots > \xi_M > \xi_{M+1} = \bar{\xi} \\ \eta_0 &= \eta_1 < \eta_2 < \eta_3 < \ldots < \eta_N < \eta_{N+1} = \bar{\eta} \end{aligned} \qquad (8.10)$$

com os passos

$$h_i = \xi_{i+1} - \xi_i \qquad i = 1,\ldots,M$$

$$k_j = \eta_{j+1} - \eta_j \qquad j = 1,\ldots,N$$

O esquema de interpolação seccional, para um dado conjunto $0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n = 1$, tem para coordenadas nodais os valores

$$\xi_{ij} = \xi_i + u_j h_i \quad ; \quad \eta_{\ell m} = \eta_\ell + u_m k_\ell$$

Assim, a interpolação de uma função $f(\xi,\eta)$ no elemento (i,ℓ)da malha é

$$f(\xi,\eta) \sim \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} f_{ij\ell m}\, \pi_j\left(\frac{\xi-\xi_i}{h_i}\right) \pi_m\left(\frac{\eta-\eta_\ell}{k_\ell}\right) \qquad (8.11)$$

onde

$$f_{ij\ell m} \equiv f(\xi_{ij},\eta_{\ell m})$$

Não se incluirá a possibilidade de interpolações de ordens diferentes em ξ e η , pois nos problemas de propagação se tem $H(r,s) = F(\frac{r+s}{2})$, não havendo diferença de comportamento nas direções ξ e η .

Todos os esquemas numéricos desenvolvidos a seguir se aplicam à mesma malha (8.10), resultando em sistemas de equações algébricas lineares para as M.N. n^2 incógnitas $W_{ij\ell m}$. Com o primeiro esquema de HOOG e WEISS, o sistema global obti do ē

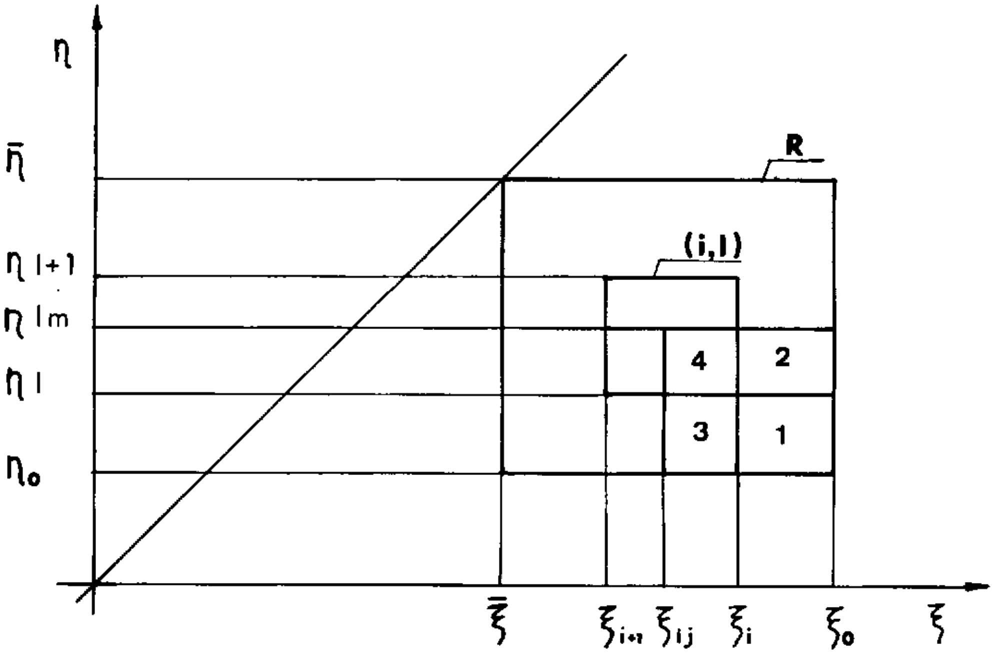
$$W_{ij\ell m} = 1 + \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{r=1}^{n} \sum_{q=1}^{\ell=1} \sum_{s=1}^{n} a_r a_s \; W_{prqs} \; H_{prqs} \; h_p \; k_q$$

$$+ \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_r a_{ms} \; W_{pr\ell s} \; H_{pr\ell s} \; h_p \; k_\ell$$

$$+ \sum_{q=1}^{\ell-1} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{jr} a_s \; W_{irqs} \; H_{irqs} \; h_i \; k_q$$

$$+ \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{jr} a_{ms} W_{ir\ell s} \; H_{ir\ell s} \; h_i \; k_\ell \qquad (8.12)$$

onde a_k e a_{jk} são os mesmos definidos em (8.4).



η
$\bar{\eta}$
R
(i,l)
η_{l+1}
η_{lm}
η_l
η_o
4
2
3
1
$\bar{\xi}$
ξ_{i+1}
ξ_{ij}
ξ_i
ξ_o
ξ

Fig. 8.2: Dominio R para a solução $W(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta)$, com o desdobramento de $W_{ij\ell m}$.

A aparente complexidade e elevada dimensão do sistema acima é contornada observando-se que há um acoplamento sequencial entre os subgrupos (i,ℓ) de n^2 equações. Este fato pode ser observado desdobrando-se a equação (8.9) nas regiões 1 a 4, mostradas na fig. 8.2.

Tomando a equação (8.9) na sua forma mais simples (6.17-18), tem-se

$$W_{ij\ell m} = 1 + \int_{\xi_o}^{\xi_{ij}} \int_{\eta_o}^{\eta_{\ell m}} H(\xi,\eta)\, W(\xi,\eta)\, d\eta\, d\xi \qquad (8.13)$$

que pode ser desdobrada em

$$W_{ij\ell m} = 1 + \int_{\xi_o}^{\xi_i} \int_{\eta_o}^{\eta_\ell} \ldots + \int_{\xi_o}^{\xi_i} \int_{\eta_\ell}^{\eta_{\ell m}} \ldots + $$
$$+ \int_{\xi_i}^{\xi_{ij}} \int_{\eta_o}^{\eta_\ell} \ldots + \int_{\xi_i}^{\xi_{ij}} \int_{\eta_\ell}^{\eta_{\ell m}} \ldots$$

integrais cujos domínios são, respectivamente, 1,2,3 e 4 (Fig. 8.2.). Assim, reinterpretando (8.12) em cada integral, obtém-se

$$W_{ij\ell m} = 1 + \left[W_{(i-1)n(\ell-1)n} - 1\right] + \left[W_{(i-1)n\ell m} - W_{(i-1)n(\ell-1)n}\right]$$
$$+ \left[W_{ij(\ell-1)n} - W_{(i-1)n(\ell-1)n}\right] +$$
$$+ \int_{\xi_i}^{\xi_{ij}} \int_{\eta_\ell}^{\eta_{\ell m}} H(\xi,\eta)\, W(\xi,\eta)\, d\eta d\xi$$

ou seja

$$W_{ij\ell m} - \int_{\xi_i}^{\xi_{ij}}\int_{\eta_\ell}^{\eta_{\ell m}} H(\xi,\eta)\, W(\xi,\eta)d\eta\, d\xi = \tag{8.14}$$

$$= W_{(i-1)n\ell m} + W_{ij(\ell-1)m} - W_{(i-1)n(\ell-1)n}$$

A equação acima mostra que, da longa expressão(8.12), apenas o último termo, correspondente à integral no interior do domínio (i,ℓ), deve ser retido. A região 1 **U** 2 **U** 3 (fig.8.2) é o"domínio de dependência" para a solução no ponto ijℓm; a solução dos M.N. sistemas lineares a n² incógnitas pode ser efetuada em diversas sequências, como ilustra a fig. 8.3.

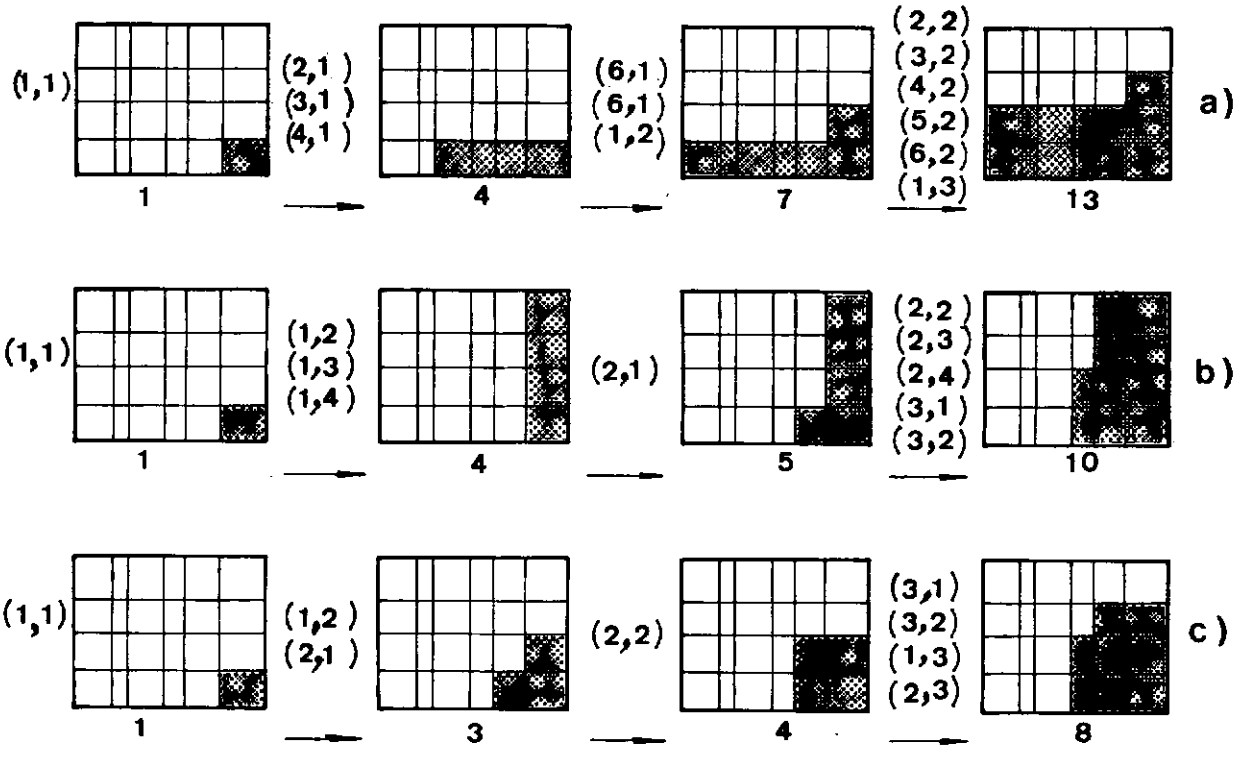

(1,1)
1
(2,1)
(3,1)
(4,1)
4
(6,1)
(6,1)
(1,2)
7
(2,2)
(3,2)
(4,2)
(5,2)
(6,2)
(1,3)
13
a)
(1,1)
1
(1,2)
(1,3)
(1,4)
4
(2,1)
5
(2,2)
(2,3)
(2,4)
(3,1)
(3,2)
10
b)
(1,1)
1
(1,2)
(2,1)
3
(2,2)
4
(3,1)
(3,2)
(1,3)
(2,3)
8
c)

Fig.8.3: Sequências possíveis na solução de (8.14)

Designando o sistema linear (i,ℓ) por

$$A_{\alpha\beta}^{(i,\ell)} \; W_{\beta}^{(i,\ell)} = B_{\alpha}^{(i,\ell)} \qquad \alpha,\beta = 1,\ldots,n^2 \quad (8.15)$$

tem-se, em correspondência com (8.14), a redução de índices

$$\alpha = n(j-1) + m$$
$$\beta = n(r-1) + s$$

À integral presente em (8.14) será aplicado um esquema de quadratura adequado à forma do núcleo H, baseando-se nos valores nodais de W. Tais esquemas numéricos podem ser representados pela fórmula geral

$$\int_{\xi_i}^{\xi_{ij}} \int_{\eta_\ell}^{\eta_{\ell m}} H(\xi,\eta)\; W(\xi,\eta) d\eta \; d\xi \;\sim\; \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} C_{ir\ell s}^{jm} \; W_{ir\ell s} \qquad (8.16)$$

e (8.14) fica aproximada pelo (i,ℓ)-ésimo sistema linear

$$W_{ij\ell m} - \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} C_{ir\ell s}^{jm} W_{ir\ell s} = \qquad (8.17)$$

$$= W_{(i-1)n\ell m} \; W_{ij(\ell-1)n} - W_{(i-1)n(\ell-1)n}$$

Assim, tendo em vista a correspondência acima definida ($jm \leftrightarrow \alpha$, $rs \leftrightarrow \beta$), a matriz dos coeficientes do sistema (i,ℓ) é

$$A_{\alpha\beta}^{(i,\ell)} = \delta_{\alpha\beta} - C_{ir\ell s}^{jm} \qquad (8.18)$$

Para o primeiro esquema numérico, (8.12) é substituída pela sequência de equações da forma (8.15), com

$$C^{jm}_{ir\ell s} = a_j r^a ms \; H_{ir\ell s} \; h_i \; k_\ell \tag{8.19}$$

O segundo esquema proposto por de HOOG e WEISS , requerendo os valores do núcleo apenas para $\xi \geq \xi_{ij}$, $\eta \leq \eta_{\ell m}$, é estendido ao caso bidimensional com

$$C^{jm}_{ir\ell s} = u_j u_m h_i k_\ell \sum_{p=1}^{n} \sum_{f=1}^{n} a_p a_q \; H(\xi_i + u_p u_j h_i, \eta_\ell + u_q u_m k_\ell) .$$

$$\cdot \pi_r(u_p u_j) \pi_s(u_q u_m) \tag{8.20}$$

Como observado no §8.4., os métodos de solução aproximada propostos acima utilizam fórmulas de quadratura baseadas na interpolação do integrando HW. Como sugerido naquele parágrafo, pode-se estabelecer processos de quadratura mais adequados à forma do núcleo H, desde que se separe a interpolação de W da fórmula de quadratura para HW. Mantendo para W a interpolação seccional (8.11), a saber

$$W(\xi,\eta) \sim \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} W_{ir\ell s} \; \pi_r\left(\frac{\xi-\xi_i}{h_i}\right) \; \pi_s\left(\frac{\eta-\eta_\ell}{k_\ell}\right); \; (\xi,\eta) \in R(i,\ell)$$

tem-se, para a integral (8.16), os coeficientes de quadratura

$$C^{jm}_{ir\ell s} = \int_{\xi_i}^{\xi_{ij}} \int_{\eta_\ell}^{\eta_{\ell m}} H(\xi,\eta) \pi_r\left(\frac{\xi-\xi_i}{h_i}\right) \pi_s\left(\frac{\eta-\eta_\ell}{k_\ell}\right) d\eta \; d\xi \tag{8.21}$$

Quando $H(\xi,\eta)$ é contínua no retângulo (i,ℓ), pode-se considerar também para H a interpolação (8.11), resultando, como sugerido por (8.7)

$$C_{ir\ell s}^{jm} = h_i\, k_\ell \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} a_{rp}^{j}\, a_{sq}^{m}\, H_{ip\ell q} \tag{8.22}$$

8.6. Tratamento numérico para materiais seccionalmente suaves (II).

Nos exemplos mais simples de materiais dos tipos II a IV, as descontinuidades do núcleo das equações integrais(6.17-18) ocorrem em apenas uma ou duas retas $\xi+\eta$ = cte(x=cte.), correspondendo, respectivamente, à transição súbita entre dois materiais suaves ou à presença duma camada inomogênea. O segundo caso, mais geral, será aqui tratado, para os materiais seccionalmente suaves (tipo II).

Para os materiais do tipo II, os núcleos F_u e F_σ das equações integrais, definidos em (6.11-12) são funções seccionalmente contínuas da variável espacial x, sofrendo descontinuidades em linhas não caraterísticas, como mostra a fig. 8.4. Estabelecendo-se a malha (8.10) de modo que as linhas de descontinuidade sejam diagonais de quadrados da malha, qualquer dos esquemas numéricos descritos anteriormente pode ser aplicado aos demais elementos.

Nos elementos em que o núcleo é descontínuo, a interpolação suave, com H assumindo, sobre a diagonal, o valor mé dio da descontinuidade, e a aplicação dos esquemas de quadratura (8.19,20,22), não conduz a resultados numéricos satisfatórios.

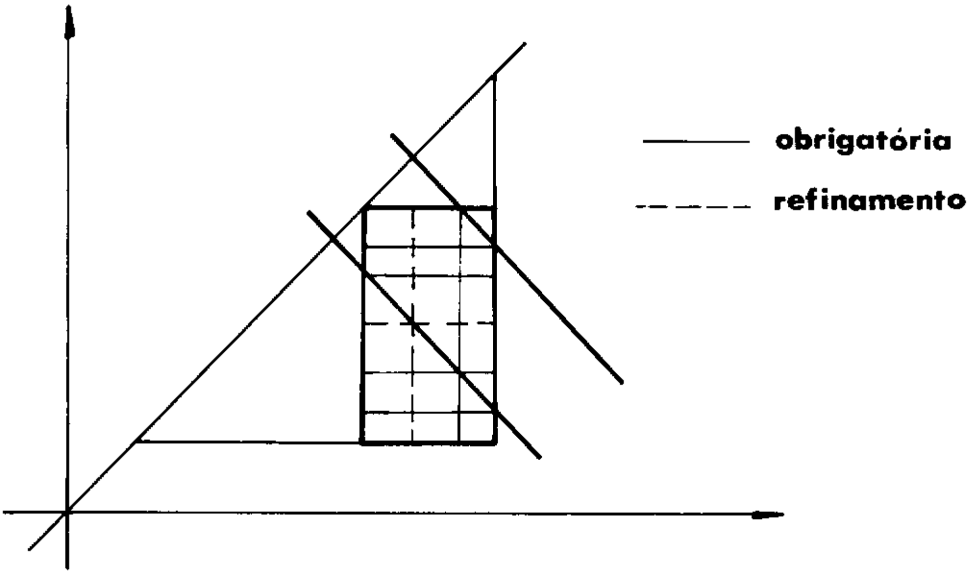

obrigatória
refinamento

Fig. 8.4: Malha de integração para um material com duas descontinuidades.

Torna-se necessário, para a quadratura numérica de (8.21), um método adequado ao caráter descontínuo de H, baseado nas regiões triangulares determinadas pelas linhas de descontinuidade. O domínio da integral (8.21), nos elementos (i,ℓ) em que é problemática, é mostrado na fig. 8.5.

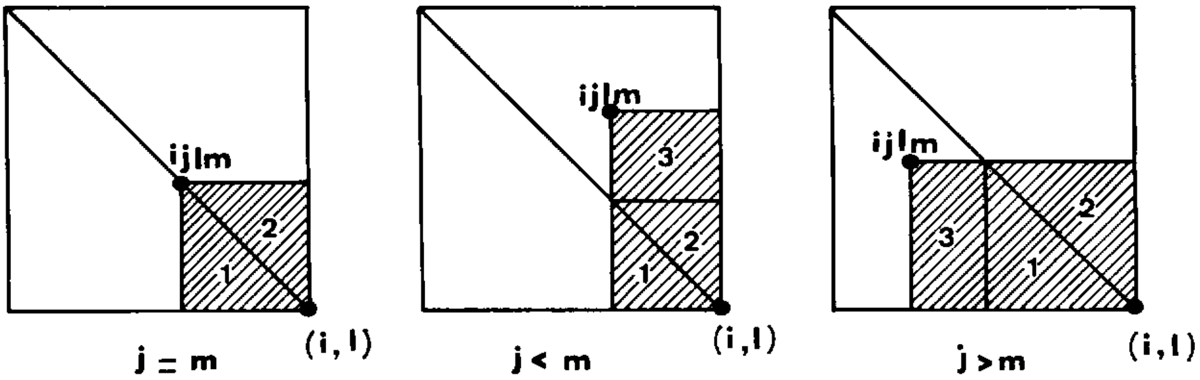

ijlm
1
2
(i,l)
j = m
ijlm
1
2
3
(i,l)
j< m
ijlm
1
2
3
(i,l)
j >m

Fig.8.5: Domínio da integral (8.21).

Vê-se que tal domínio contém dois triângulos, com mais um retângulo, se $j \neq m$. O integrando de (8.21) é contínuo em qualquer ponto interior a essas regiões. Cada triângulo pode ser mapeado no triângulo de área 1/2, com vértices (0,0), (0,1) e (1,0), num plano xy, para o qual se constroem fórmulas de quadratura.

O procedimento adotado neste trabalho consiste no "produto cônico" de fórmulas de quadratura unidimensional, que recorre ao mapeamento afim do triângulo em um quadrado. Deve-se avaliar

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)dy\,dx$$

Efetuando a transformação

$$u = x \quad ; \quad v = \frac{y}{1-x} \quad , \quad 0 \leqslant x < 1$$

com a inversa

$$x = u \quad ; \quad y = v(1-u), \quad 0 \leqslant u < 1$$

e o Jacobiano

$$J = 1-u$$

obtém-se, para a integral I, a representação

$$I = \lim_{z \to 1} \int_0^1 \int_0^z \bar{f}(u,v)(1-u)du\,dv$$

com

$$\bar{f}(u,v) = f\left[u, v(1-u)\right]$$

A integração numérica, agora em um retângulo, pode seguir qualquer método adequado, fornecendo

$$I \sim \sum_{q,t} A_{qt}\, f\left[x_q, x_t(1-x_q)\right](1-x_q)$$

onde x_q, x_t ε $(0,1)$ são os pontos de integração e A_{qt} os respectivos pesos. Tomando, por exemplo os pontos de Radau $x_q = u_q$, $q = 1,\ldots,p$, tem-se

$$A_{qt} = a_q a_t$$

A contribuição do elemento 1 (fig. 8.5), é estabelecida pela correspondência

$$\begin{array}{cccc}
 & & j \leq m & j > m \\
(0,0) & \leftrightarrow & (\xi_{ij}, \eta_\ell) & (\xi_{im}, \eta_\ell) \\
(0,1) & \leftrightarrow & (\xi_i\ , \eta_\ell) & (\xi_i\ , \eta_\ell) \\
(1,0) & & (\xi_{ij}, \eta_{\ell j}) & (\xi_{im}, \eta_{\ell m})
\end{array}$$

obtendo-se, para j=m a parcela

$$I_{ij} = -\sum_{q=1}^{p}\sum_{t=1}^{p} A_{qt}(u_j h_i)^2\, H\left[\xi_{ij} - x_q u_j h_i, \eta_\ell + x_t(1-x_q)u_j k_\ell\right] \cdot \pi_r\left[(1-x_q)u_j\right]\pi_s\left[x_t(1-x_q)u_j\right](1-x_q) \qquad (8.23)$$

De modo similar, a contribuição do triângulo 2 é a parcela

$$I_{2j} = -\sum_{q=1}^{p}\sum_{t=1}^{p} A_{qt}(u_j h_i)^2 \, H[\xi_i + x_q u_j h_i, \eta_{\ell j} - x_t(1-x_q)u_j k_\ell] \cdot$$

$$\cdot \pi_r(x_q u_j)\pi_s[1-x_t(1-x_q)u_j](1-x_q) \qquad (8.24)$$

Assim, tem-se, para j=m

$$C^{jm}_{ir\ell s} = I_{1j} + I_{2j} \equiv C^{jj}_{ir\ell s}$$

para j<m

$$C^{jm}_{ir\ell s} = C^{jj}_{ir\ell s} + I_{3jm} \qquad (8.25)$$

e para j>m

$$C^{jm}_{ir\ell s} = C^{mm}_{ir\ell s} + I_{3jm}$$

onde a integral I_{3jm}, no retângulo 3 (fig. 8.5), pode ser avaliada pelo mesmo processo aplicado à imagem retangular do triângulo, obtendo-se, para j>m

$$I_{3jm} \sim (u_j - u_m)u_m h_i k_\ell \sum_{q=1}^{p}\sum_{t=1}^{p} A_{qt} H[\xi_{im} + x_q(u_j - u_m)h_i, \eta_\ell + x_t u_m k_\ell]$$

$$\cdot \pi_r[u_m + x_q(u_j - u_m)]\pi_s(x_t u_m) \qquad (8.26)$$

e para j<m :

$$I_{3jm} \sim (u_m-u_j)u_jh_ik_\ell \sum_{q=1}^{p} \sum_{t=1}^{p} A_{qt}H\left[\xi_i+x_qu_jh_i, \eta_{\ell j}+x_t(u_m-u_j)k_\ell\right]$$

$$\cdot\pi_r(x_qu_j)\pi_s\left[u_j+x_t(u_m-u_j)\right] \quad (8.27)$$

A fig. 8.6 ilustra a divisão de um elemento, com a adoção de n=4 pontos de Radau e p=2 pontos de Gauss-Lebesgue para a interpolação de W e a integração acima descrita, respectivamente. Os valores n=3 e n=4 foram empregados, com p=2 , na elaboração dos exemplos apresentados na sec. 10.

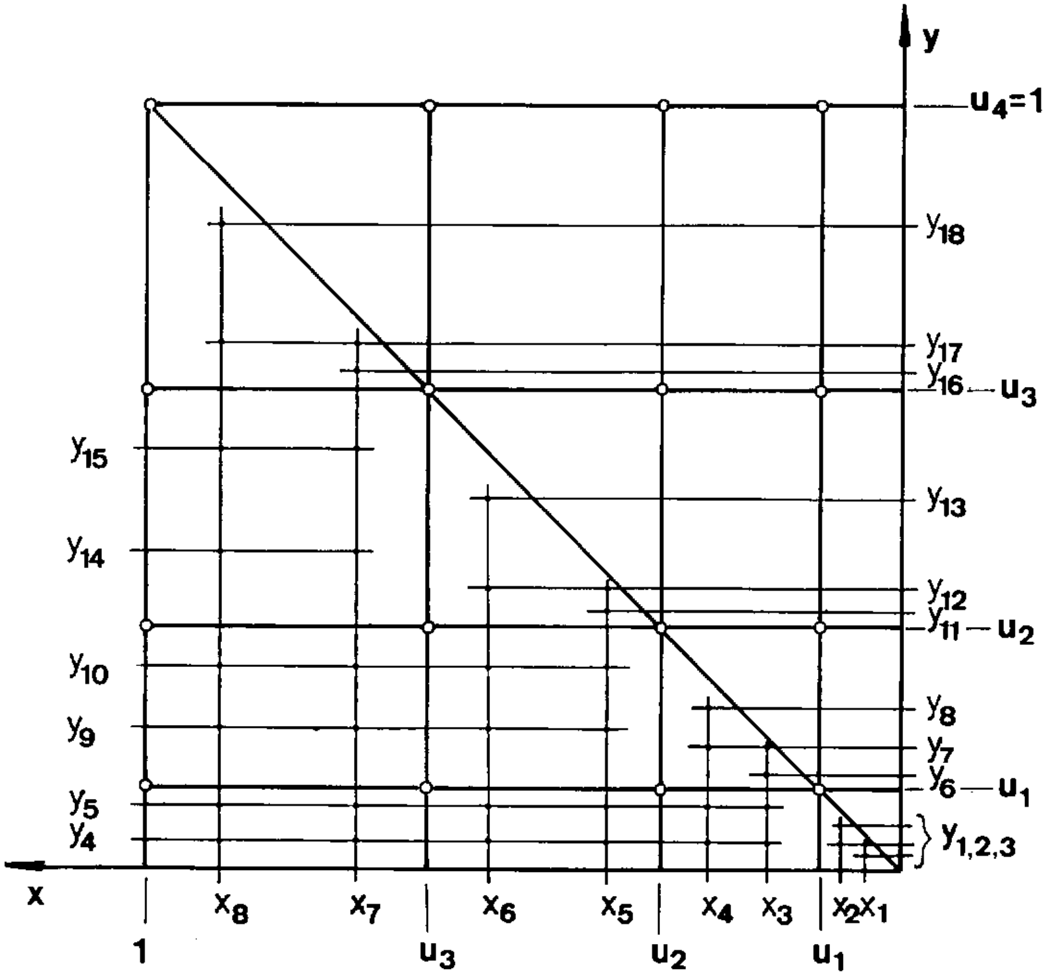

y
u4=1
y18
y17
y16
u3
y15
y13
y14
y12
y11
u2
y10
y9
y8
y7
y6
u1
y5
y4
y1,2,3
x
x8
x7
x6
x5
x4
x3
x2
x1
1
u3
u2
u1

Fig.8.6: Elemento triangular para materiais do tipo II.

9. SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE CAUCHY.

9.1. Divisão do domínio de dependência e integral de linha.

A solução para o problema de valor inicial será determinada pela expressão (6.19) ou (6.20), o que requer a escolha de um processo de quadratura para a integral de linha presente nessa expressão. O número e a posição dos pontos (ξ,ξ) em que se deve determinar a função de Riemann $W(\xi_o,\eta_o,\xi,\xi)$ e sua derivada $W_t = W_\xi - W_\eta$, depende do método de quadratura empregado, da precisão requerida e da eventual presença de descontinuidades nas condições iniciais.

Para cada um dos pontos P_i, a determinação de $W(P_o,P_i)$ requer o estabelecimento, no domínio retangular R_i, de uma malha (8.10). Dado o aspecto sequencial da construção numérica de W, ilustrado na fig. 8.3, é evidente a economia computacional conseguida pelo estabelecimento de malha única em todo o domínio de dependência do ponto $P_o(\xi_o,\eta_o)$. Como ilustra a fig. 9.1, a obtenção da função de Riemann no ponto de integração P_{i+1} envolve a solução da equação integral (8.9) em um domínio R_{i+1} cuja malha é compatível com a do domínio R_i.

Como já se dispõe da solução no subdomínio $R_{i+1} \cap R_i$, a construção de $W(P_o,\ P_{i+1})$ requer a integração numérica apenas em uma pequena faixa adicional.

Observa-se que, com a integral de linha parametrizada pela variável ξ como em (6.19-20) , os passos para essa integração serão os mesmos h_i da integração numérica da função de Riemann. Ainda é importante notar que, dada a "reflexão" da ma

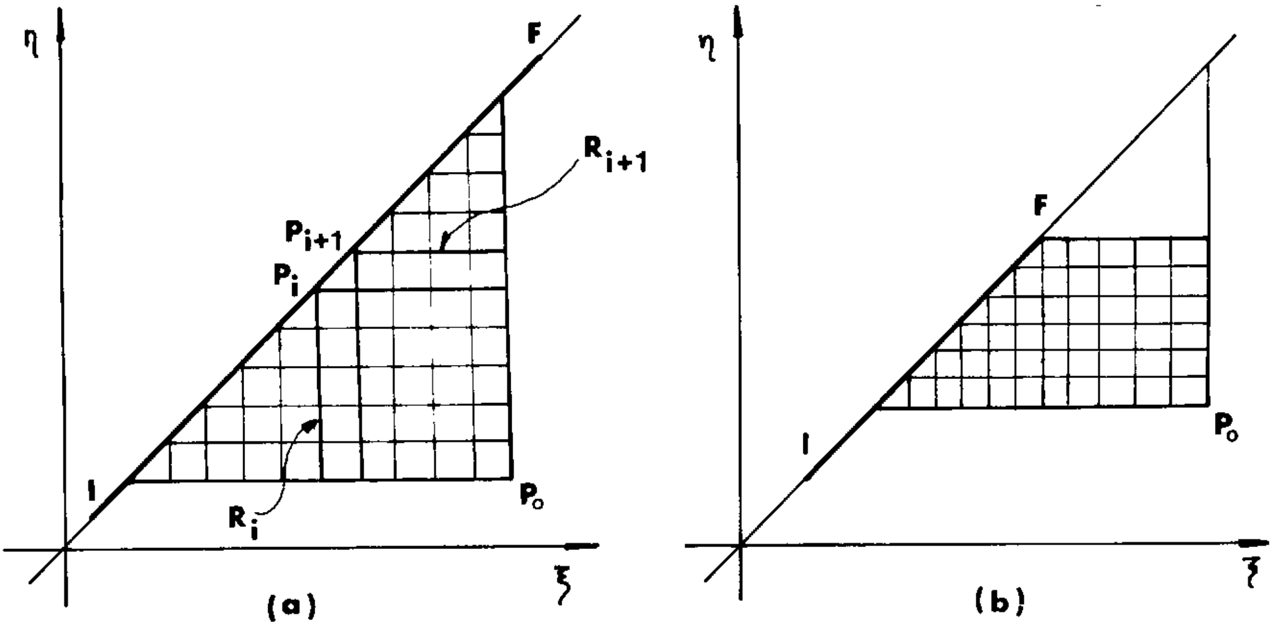


Fig. 9.1: Malha única sobre o domínio de dependência do ponto P_o.

(a) condições iniciais não nulas em todo o domínio $\partial\Omega(P_o)$

(b) condições iniciais se anulando em parte do contorno $\partial\Omega(P_o)$

lha na reta inicial $\xi = \eta$, tem-se a igualdade entre os passos h_i e k_ℓ envolvidos na integral de linha, sendo os demais arbitrários. O estabelecimento da malha (8.10) deve, portanto, atender ao espaçamento de pontos requerido pelo processo de quadratura adotado para a integral de linha. Para materiais suaves (tipo I) e condições iniciais também suaves, isto pode ser conseguido pela geração de malha adequada , ou pela estensão da solução de Riemann para t < 0, obtendo-se pontos adicionais em t = 0 pela interpolação no interior dos quadrados da malha com diagonal t=0 (fig. 9.2).

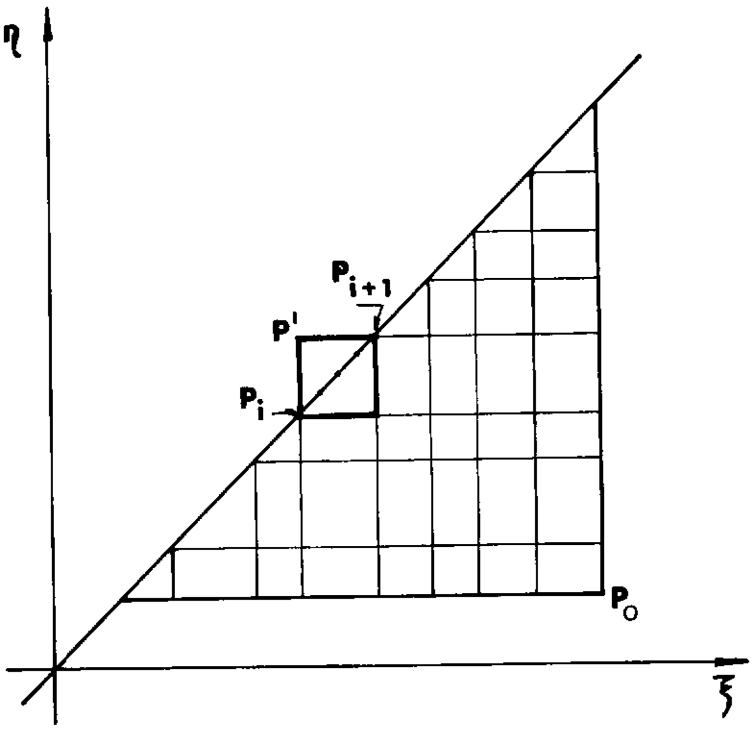


Fig.9.2: Obtenção de pontos no intervalo (P_i, P_{i+1}) por interpolação.

No caso de núcleos seccionalmente contínuos (II), a divisão do domínio de dependência deve manter as linhas de descontinuidade em diagonais de quadrados da malha, como observado no §8.6. Impõe-se assim,uma divisão inicial obrigatória, seguida do refinamento da malha (fig. 9.3).

Outro aspecto importante na geração da malha obrigatória refere-se à presença de descontinuidades na condição inicial de deslocamento ou tensão. Tais descontinuidades não são suavizadas na propagação, como foi visto no §3.3. Para que o processo numérico não suavize as descontinuidades iniciais, é necessário incluir as caraterísticas emanando dos pontos de descontinuidade na divisão obrigatória.

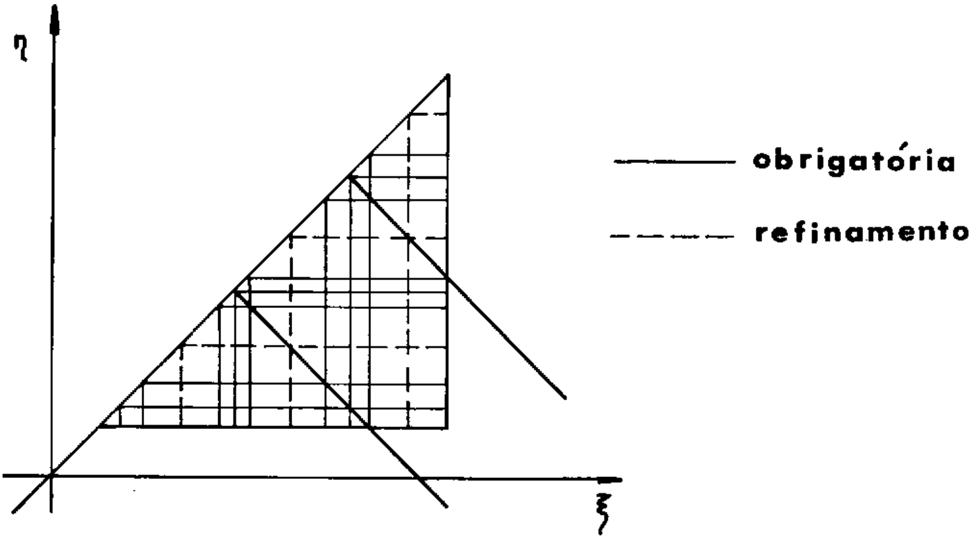


Fig. 9.3: Malha em todo o domínio para material tipo II, com duas descontinuidades.

O maior inconveniente criado pela presença da divisão obrigatória é a impossibilidade de fixar passos de integração arbitrários. Pode-se, no entanto, refinar a malha obrigatória para obter uma distribuição de pontos adequada a qualquer processo de quadratura que envolva pontos distribuidos de forma simétrica, nos intervalos da malha obrigatória. A simetria é conveniente, dado que cada redivisão pode originar uma série de divisões, por reflexão na reta $\xi = \eta$ e intercessão com as linhas de descontinuidade material. Os pontos necessários à integração por trapézios ou pelos processos de Gauss-Legendre e Gauss-Lobatto[38], podem ser assim obtidos. O refinamento da malha pode ser trocado ou combinado com a obtenção de pontos adicionais pela interpolação na solução de Riemann estendida a t<0. A fig. 9.4 ilustra essas duas possibilidades.

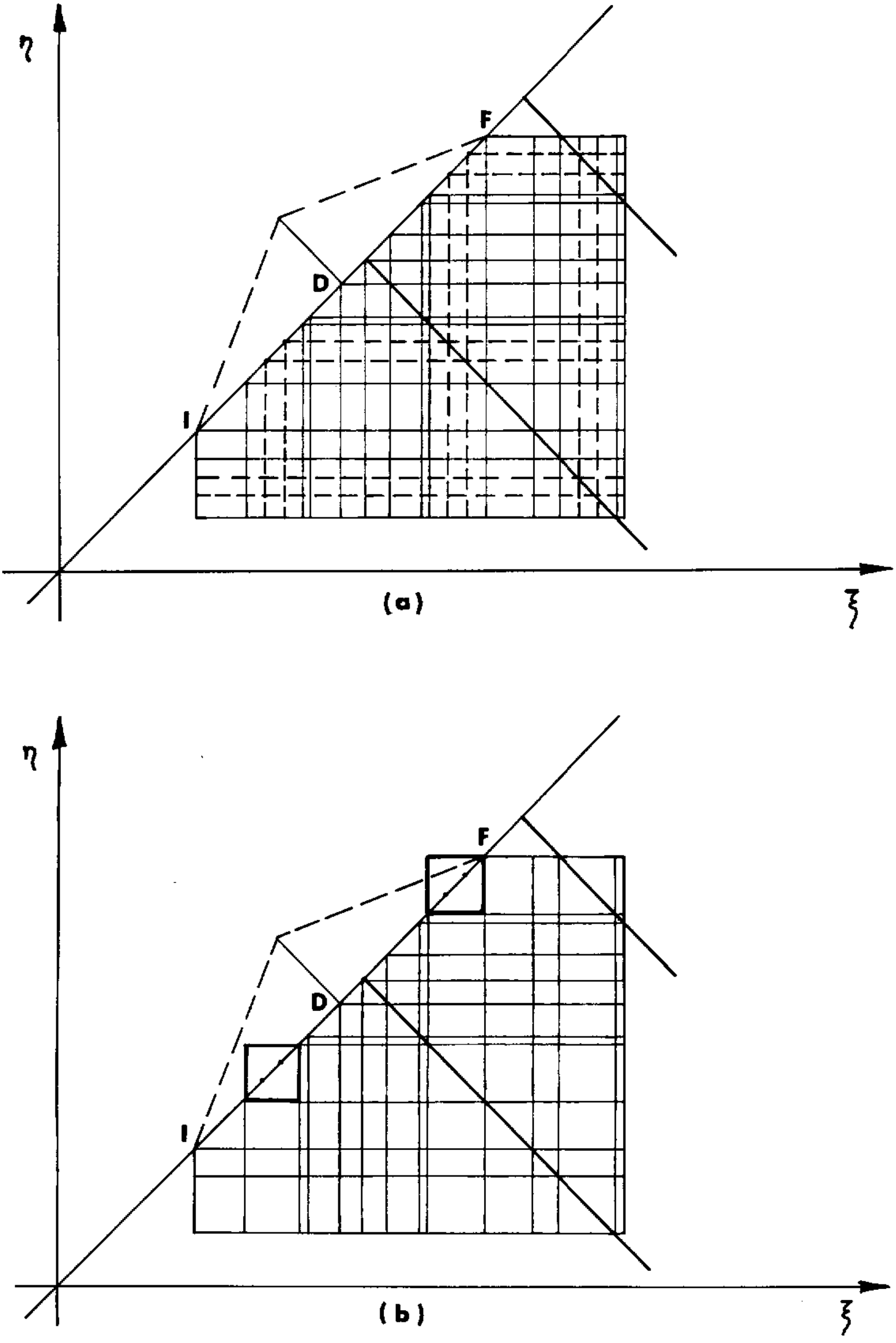


Fig. 9.4: obtenção de pontos de integração especificados no interior de malha arbitrária

(a) com refinamento da malha

(b) com interpolação em elementos adicionais.

9.2 Diferenciação numérica da função de Riemann.

Como se observou no §1.4 e pode ser confirmado analisando os termos das fórmulas de representação (6.19-20), o efeito da inomogeneidade do meio sobre a forma de uma onda é mais claramente destacado quando se têm condições iniciais de velocidade nula. Tomando (6.19) como exemplo, isto reduzirá a integral a ser avaliada ao termo

$$\int_{\eta_o}^{\xi_o} \phi(\xi)\ W_t(\xi_o,\eta_o,\xi,\xi)\ d\xi \quad ; \quad W_t \equiv W_\xi - W_\eta$$

Dos diversos procedimentos possíveis para o cálculo das derivadas W_ξ e W_η, o mais econômico e impreciso consiste na diferenciação da função interpolante no último retângulo, (M,N), da malha. Essa função interpolante é

$$W(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) \sim \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} W_{MjNm}\ \pi_j\left(\frac{\xi-\xi_M}{h_M}\right)\pi_m\left(\frac{\eta-\eta_N}{k_N}\right) \ ; \ (\xi,\eta)\varepsilon\ R(M,N)$$

que, diferenciada, fornece

$$W_\xi \sim \frac{1}{h_M} \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \pi'_j\ \left(\frac{\xi-\xi_M}{h_M}\right)\pi_m\left(\frac{\eta-\eta_N}{k_N}\right) \quad W_{MjNm}$$

$$W_\eta \sim \frac{1}{k_N} \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \pi_j\ \left(\frac{\xi-\xi_M}{h_M}\right)\pi'_m\left(\frac{\eta-\eta_N}{k_N}\right) \quad W_{MjNm}$$

Em particular, para limites coincidindo com uma reta $\eta = \eta_{Nq}$ ou $\xi = \xi_{Mp}$, tem-se, respectivamente

$$W_\xi(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta_{Nq}) \sim \frac{1}{h_M} \sum_{j=1}^{n} W_{MjNq}\, \pi_j' \left(\frac{\xi-\xi_M}{h_M}\right)$$

$$W_\eta(\xi_o,\eta_o,\xi_{Mp},\eta) \sim \frac{1}{k_N} \sum_{m=1}^{n} W_{MpNm}\, \pi_m' \left(\frac{\eta-\eta_N}{k_N}\right)$$

Esquemas certamente mais precisos recorrem à construção das derivadas pela integração numérica das equações (6.21) ou (6.22). Novamente neste caso, a economia computacional requer a compatibilização entre os diversos pontos em que se deve obter a função de Riemann W(ou V), necessária para a determinação das derivadas pelas fórmulas (6.21-22). A opção adotada para a confecção dos exemplos da sec.10 utiliza a malha única em todo o domínio de dependência, estabelecida no § anterior.

Assim, os esquemas unidimensionais de quadratura numérica cujo produto foi empregado para a solução numérica das equações integrais (6.17-18) são simultaneamente utilizados para a quadratura de (6.21-22). Essa simultaneidade é especialmente útil no caso dos materiais seccionalmente suaves, em que o integrando de (6.21-22) é descontínuo em diagonais de quadrados da malha. A fina divisão desses quadrados, ilustrada na fig. 8.6 , é aproveitada na integração numérica de W_ξ e W_η , evitando-se assim o erro resultante da suavização do integrando.

10. EXEMPLOS.

10.1. Materiais e condições iniciais.

Com o procedimento numérico sugerido nas seções anteriores, foi elaborado um programa de computação digital, em linguagem FORTRAN(ver Apêndice), permitindo solucionar os problemas de valor inicial (6.1-2) para condições iniciais arbitrárias e qualquer modelo suave ou seccionalmente suave de material inomogêneo.

A melhor identificação dos efeitos da inomogeneidade é obtida com formas de onda retilíneas (retangular, triangular, trapezoidal) e velocidade inicial nula (ver §1.3). As ondas triangular de deslocamentos e retangular de tensões serão aqui empregadas,à excessão de um exemplo(fig.10.5), em que se mostra a propagação de um pulso parabólico de deslocamento e as tensões correspondentes.

Nos modelos de material inomogêneo escolhidos para os exemplos que seguem, permitiu-se apenas a variação espacial da constante elástica $\gamma(x)$, mantendo-se constante a massa específica $\rho(x) \equiv \rho_o$. A variação da impedância acústica $Z(x) = \rho(x)c(x)$ fica assim exclusivamente ligada à da velocidade de propagação.

Os exemplos com materiais suaves (fig.10.1), já apresentados em [34] , são:

I.1 : Variação linear de $c(x)$

I.2 : Variação quadrática de $c(x)$

enquanto os exemplos seccionalmente suaves (ver §8.1)consistem em vários casos dos tipos básicos:

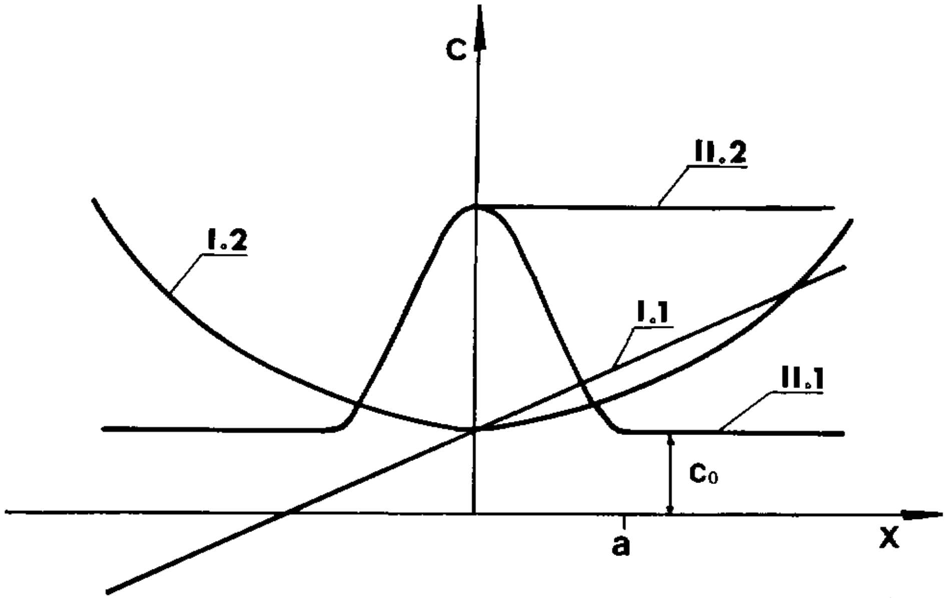


Fig. 10.1 : Tipos básicos para os exemplos de inomogeneidade.

II.1 : Camada inomogênea (obstáculo)cosenoidal.

II.2 : Camada de transição cosenoidal.

10.2. Exemplos para o material I.1

Neste modelo, a velocidade de propagação varia linearmente, na forma

$$c(x) = c_o(1+\alpha x) \ , \quad \alpha>0 \ , \quad x> -\frac{1}{\alpha} \tag{10.1}$$

O "tempo de propagação", definido em (3.9), será

$$\tau(x) = \int_0^x \frac{dy}{c(y)} = \frac{1}{c_o\alpha} \ \ell n(1+\alpha x) \tag{10.2}$$

o que leva o ponto $x = -1/\alpha$ a $-\infty$, na escala de tempo, mantendo assim $c>0$ em todo o domínio de influência das condições iniciais.

Dado um pulso inicial, i.e. uma condição inicial de suporte compacto, a reflexão do semi-pulso que se propaga na direção C^- não influirá muito sobre a cauda refletida do semi-pulso C^+. A deformação da frente de onda C^+, devida à refração, é governada por $\lambda(x)$, definido em (6.7) como

$$\lambda(x) \equiv \frac{\rho_o c_o}{\rho(x)c(x)} = \frac{1}{1+\alpha x} = \exp(-c_o\alpha\tau/2) \qquad (10.3)$$

As funções de Riemann W e V são as soluções das equações integrais (6.17-18), respectivamente, cujos núcleos são dados pelas expressões (6.11-12), reduzindo-se, no caso $\rho\equiv\rho_o$, a

$$\begin{aligned} F_u(x) &= (c')^2 + 2\,c\,c'' \\ F_\sigma(x) &= (c')^2 - 2\,c\,c'' \end{aligned} \qquad (10.4)$$

obtendo-se, para o presente modelo

$$F_u = F_\sigma = (c_o\alpha)^2$$

Como foi mostrado no §8.3, as equações integrais(6.17-18) tem, neste caso, a solução exata

$$W(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) = V(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) = J_o\left[\frac{c_o\alpha}{2}\sqrt{(\xi_o-\xi)(\eta-\eta_o)}\right]$$

com a qual se verificou a convergência e precisão do método numérico, com resultados muito satisfatórios, possivelmente melhores que num caso geral, já que aqui a interpolação do núcleo é exata. Também a interpolação da própria função de Riemann é bastante precisa, bastando notar que, em toda a faixa de valores do argumento envolvida na construção dos exemplos aqui citados, a diferença entre $J_o(x)$ e o polinômio de 2º grau: $1 - x^2/4$ permanece inferior a 10^{-2}.

A fig. 10.2 ilustra o comportamento das funções de Riemann, nas variáveis dependentes e independentes originais u,σ, x e t. Em virtude de (5.15) e das transformações (6.5-6), tais funções são dadas por

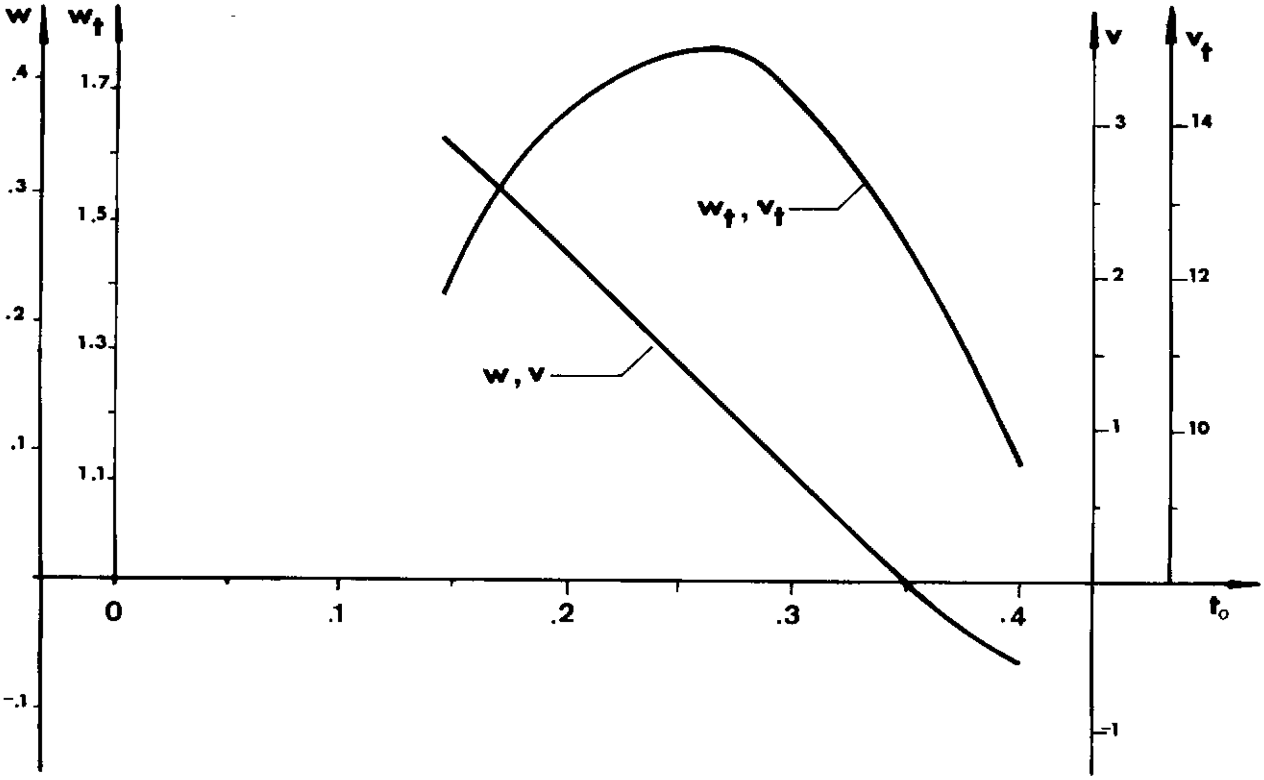


Fig. 10.2: Funções de Riemann w e v e derivadas w_t e v_t para $\alpha = 15$ e o argumento $(.5,t_o,0,0)$.

$$\begin{aligned} w(x_o,t_o,x,t) &= \frac{\lambda(x)}{\lambda(x_o)}\ W(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) \\ v(x_o,t_o,x,t) &= \frac{\lambda(x_o)}{\lambda(x)}\ V(\xi_o,\eta_o,\xi,\eta) \end{aligned} \qquad (10.5)$$

É interessante notar que, dada a igualdade $F_u = F_\sigma$ ambas as derivadas W_t e V_t tem o mesmo sinal (positivo para t_o-t pequeno). Das fórmulas de representação (6.19-20), conclui-se que as ondas refletidas de tensão e deslocamento têm, ambas, sinal contrário ao da onda incidente, como se vê nas figs.10.3-4. Tal comportamento, que ocorre sempre que $|2cc''|<(c')^2$,é surpreendente. De fato, com base na análise da reflexão de onda em descontinuidades (ver §3.4), espera-se que, no caso da incidência sobre um obstáculo de maior impedância, a onda refletida de tensão tenha o mesmo sinal que a incidente, ocorrendo o contrário com a de deslocamento.

Na classe de modelos do tipo $c(x) = c_o x^k$, com x>1 , tais como os citados no §3.3(ver figs.3.3-4), a reflexão de mesmo sinal para u e σ ocorre quando 0<k<2, não havendo reflexão se k=0(material homogêneo). Para k=2, é nula a reflexão da tensão.

As figuras 10.3-5 ilustram algumas formas de onda no presente caso. Note-se a amplificação da onda de tensão com a raiz quadrada da impedância, já prevista na solução WKB, ocorrendo o inverso com o deslocamento. O suporte de todos os pulsos cresce a medida que a velocidade de propagação aumenta. Na fig. 10.5, é também mostrada a onda de tensão correspondente a um pulso parabólico de deslocamento, notando-se que a onda refletida tem sua tensão praticamente nula, devido aos efeitos contrários dos trechos positivo e negativo da tensão incidente.

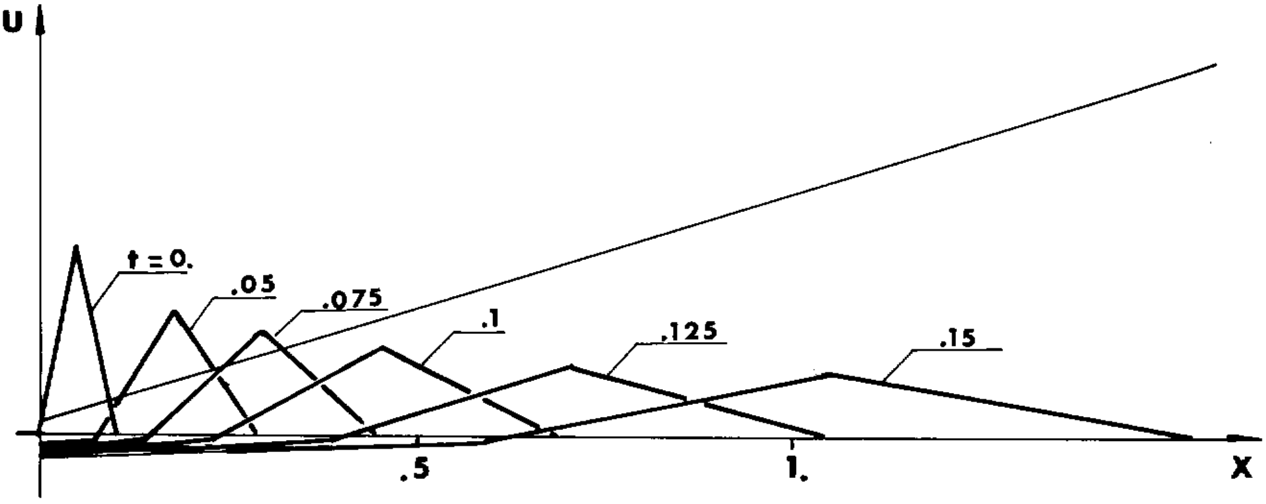


Fig.10.3: Onda triangular de deslocamento no material I.1

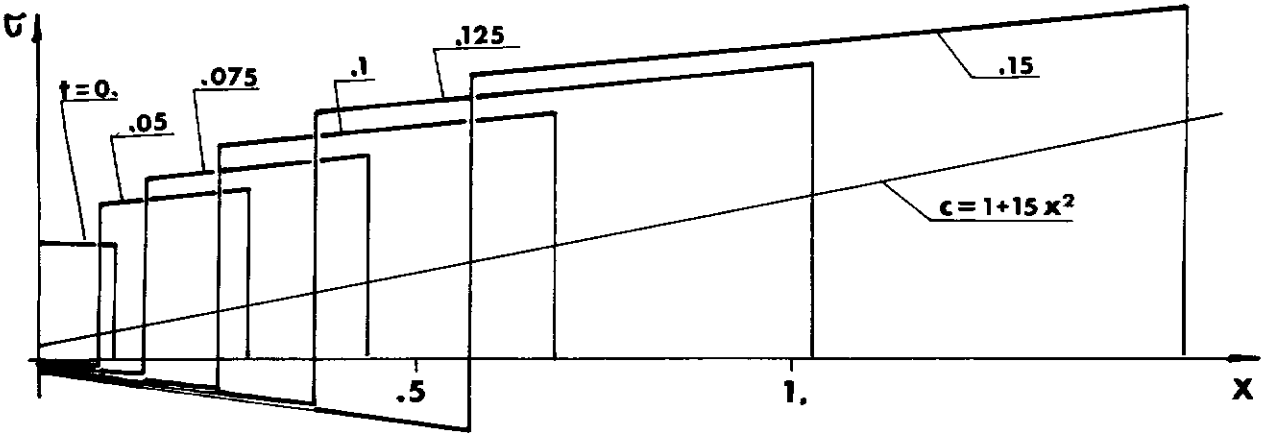


Fig. 10.4: Onda retangular de tensões no material I.1

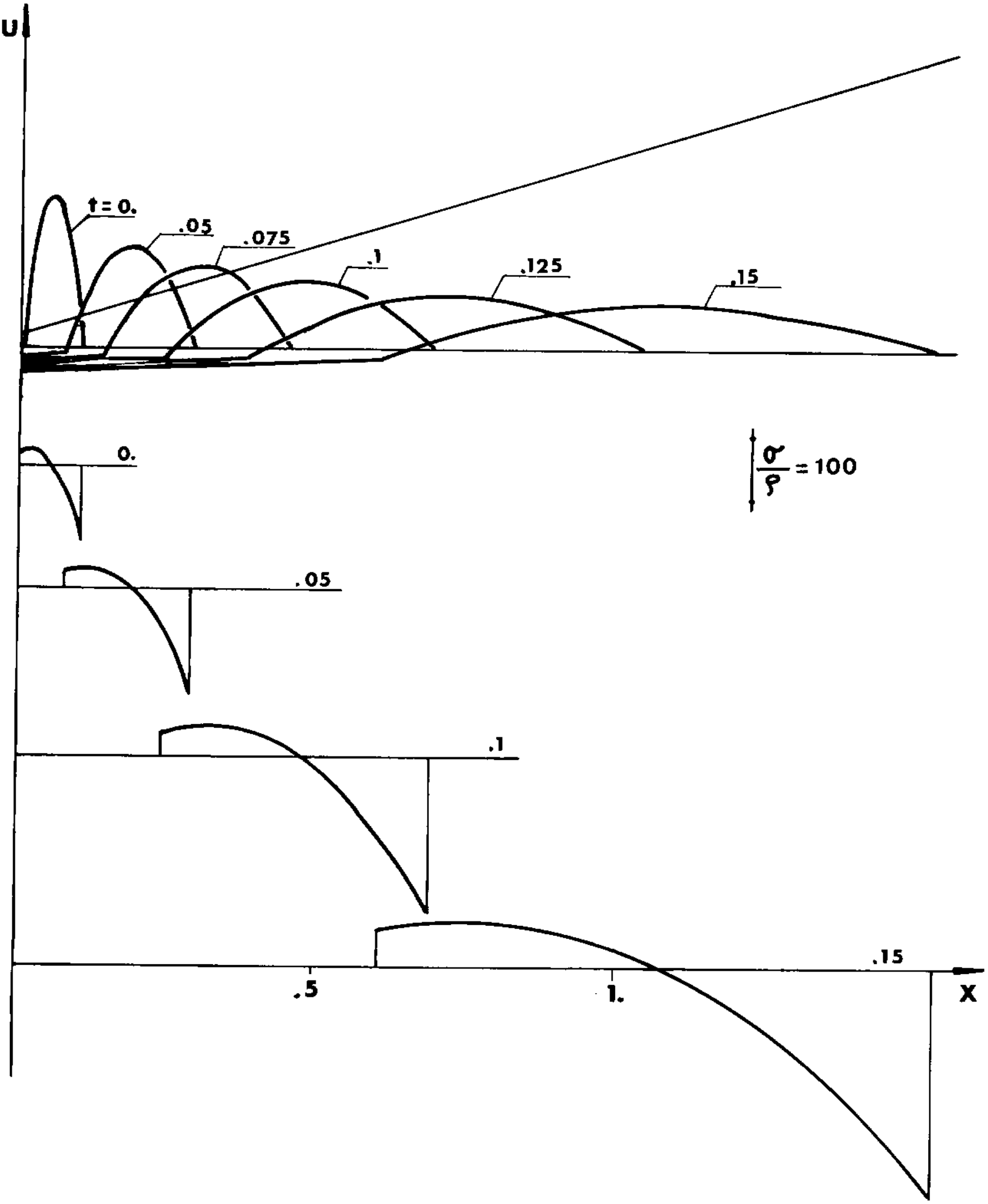


Fig. 10.5: Onda parabólica de deslocamento e respectivas tensões no material I.1

10.3 Exemplos com o material I.2

O segundo modelo suave é dado pela distribuição de velocidades de propagação

$$c(x) = c_o(1+\alpha x^2) \quad , \qquad \alpha > 0 \tag{10.6}$$

resultando no tempo de propagação

$$\tau(x) = \frac{1}{c_o\sqrt{\alpha}} \quad \mathrm{arctg}\ (\sqrt{\alpha}x) \tag{10.7}$$

com a inversão $X(\tau) = \mathrm{tg}(c_o\sqrt{\alpha}\tau)/\sqrt{\alpha}$. A deformação na frente de onda devida à variação da impedância será descrita por

$$\lambda(x) = (1+\alpha x^2)^{1/2} = \sec(c_o\sqrt{\alpha}\tau) \tag{10.8}$$

A diferença mais notável entre este modelo e o anterior ocorre na reflexão de ondas. Os núcleos F_u e F_σ, definidos em (10.4), são, no presente caso

$$\begin{aligned} F_u &= 4\ c_o^2 \quad (1+2\alpha x^2) = 4\ c_o^2\alpha \left[1+2\mathrm{tg}^2(c_o\sqrt{\alpha}\tau)\right] \\ F_\sigma &= -4\ c_o^2\alpha \end{aligned} \tag{10.9}$$

notando-se que a reflexão da tensão tem agora o mesmo sinal da onda incidente. Observa-se também em (10.9) que o valor absoluto da reflexão é sempre menor para a tensão que para o deslocamento. Isto não será notado nos exemplos aqui ilustrados, já que, nas variáveis originais u e σ , também a reflexão é afetada pela defor

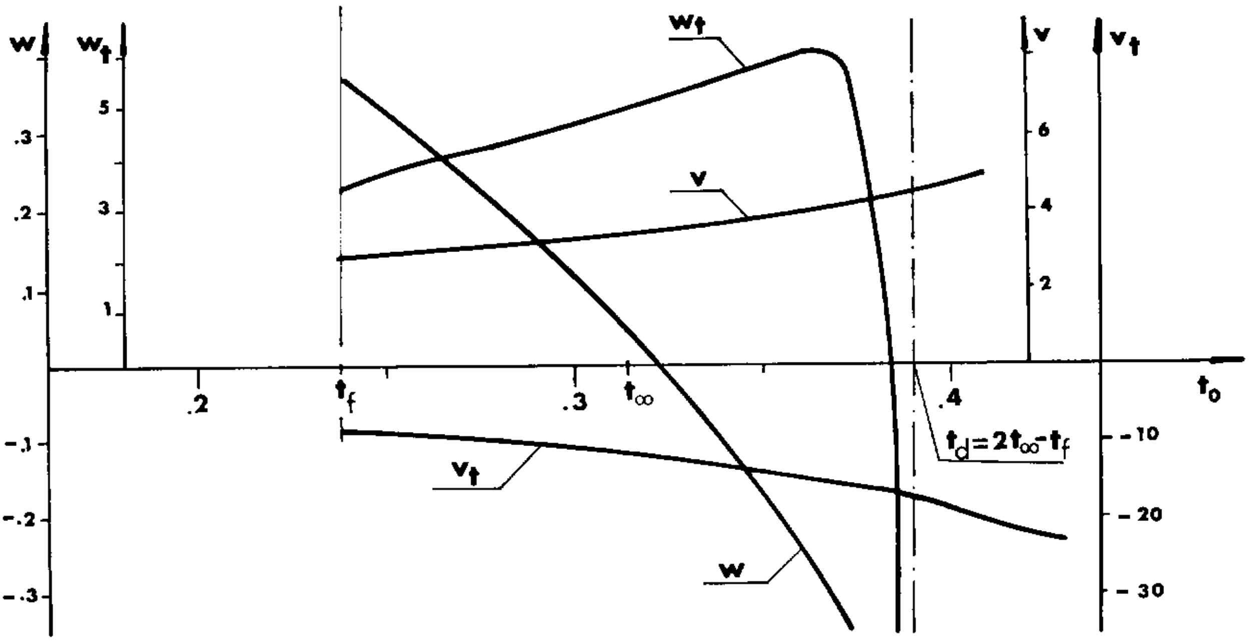


Fig.10.6: Funções de Riemann w e v e derivadas w_t e v_t para α= 25 e o argumento $(.5,t_o,0,0)$.

mação λ. O comportamento das funções de Riemann e suas derivadas é ilustrado na fig.10.6. Em particular para a função V, é fácilmente obtida como solução exata uma função de Bessel, correspondente à solução (8.2) para argumento negativo.

As figuras 10.7-9 ilustram a propagação de algumas formas de onda. Um aspecto importante a ressaltar, válido para todos os exemplos desta seção, é que a forma inicial da onda (t=0) é a metade do valor inicial imposto ao problema de Cauchy. No presente material isto implica que o que se vê nas figuras como uma " cauda " de reflexão é, de fato, a superposição das caudas dos pulsos C^+ e C^-(não mostrado). Isto poderia ser evitado com a construção de um modelo seccionalmente suave, com $c(x) = c_o$ para $x<0$ e $c(x)$ dado por (10.6) para $x>0$.

Outro aspecto interessante, ilustrado especialmente pela fig. 10.7, decorre imediatamente de (10.9): a reflexão de uma onda (de tensão ou de deslocamento) tem o mesmo sinal, quer

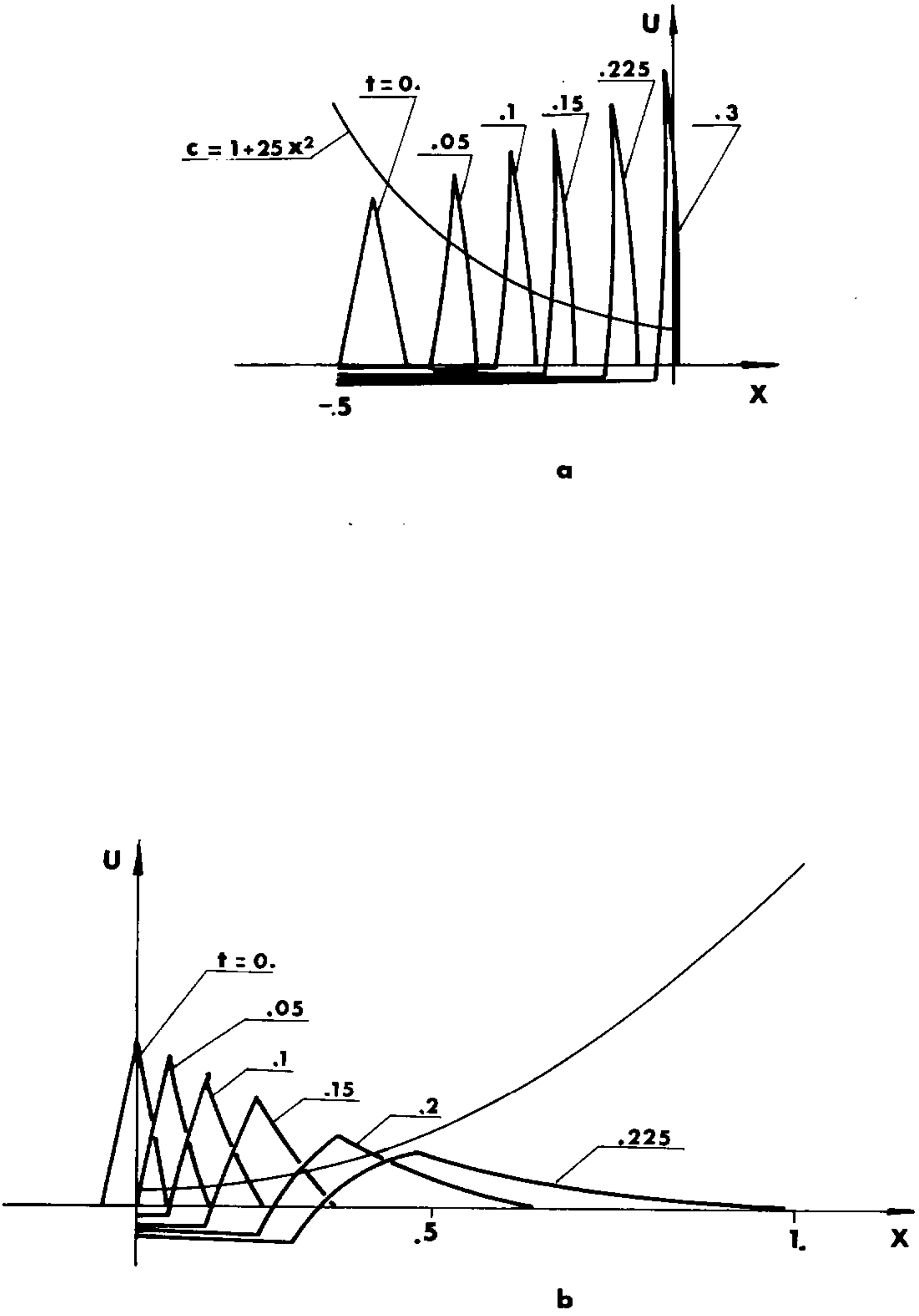


Fig.10.7: Onda triangular de deslocamentos no material I.2.α = 25, c_o = 1

a) no sentido de impedância decrescente

b) no sentido de impedância crescente

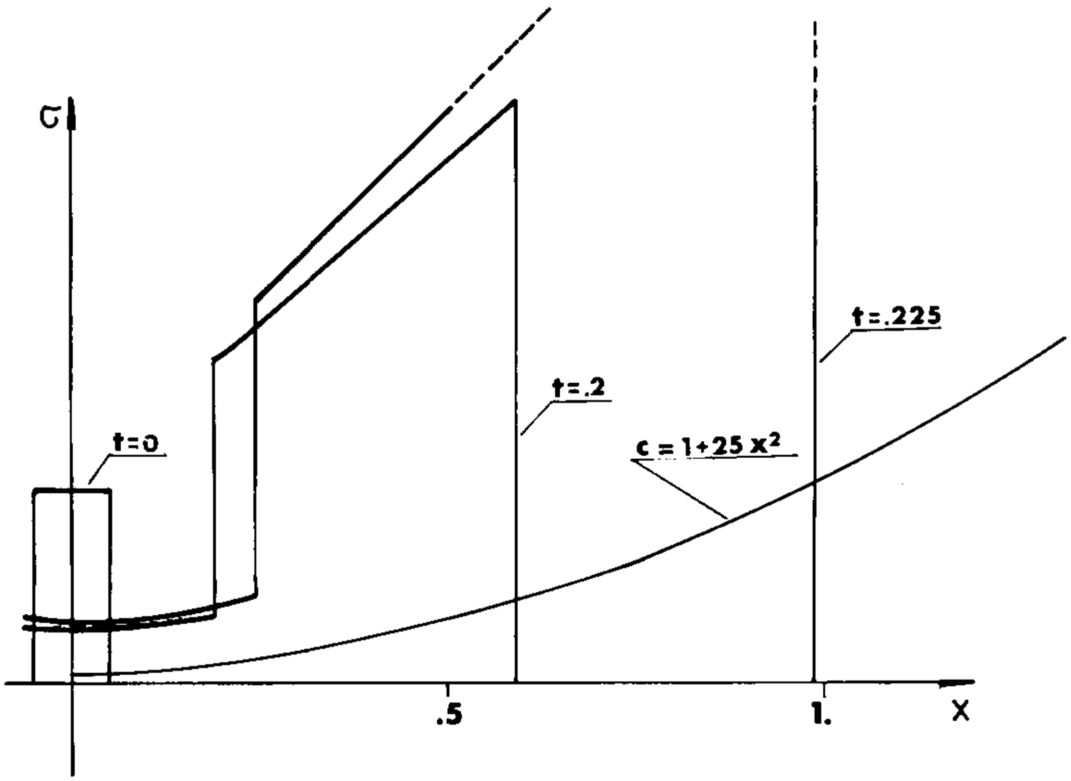


Fig. 10.8 : Onda retangular de tensões no material I.2

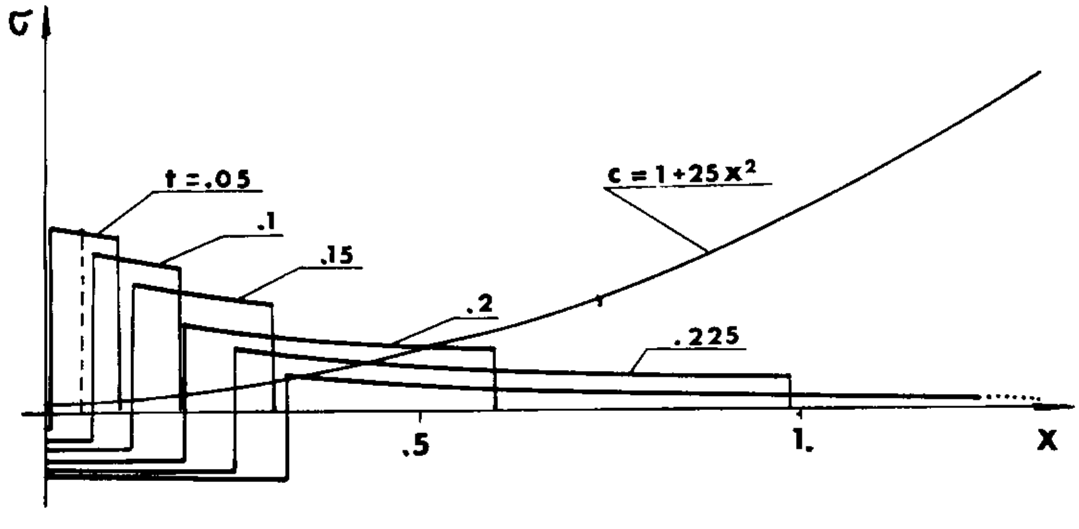


Fig. 10.9: Onda retangular de deslocamentos no material I.2

se propague no sentido de impedância crescente ou decrescente.

Os passos de integração adotados para a elaboração dos exemplos desta seção foram determinados em testes de convergência, com o critério de que o máximo erro não fosse visível na escala da representação gráfica. A tabela 10.1 exemplifica tais testes.

Posição	h = .5		h = .25	
	calculado	interpolado	calculado	interpolado
0	-.06487	-.06653	-.06616	-.06678
.05	-.06538	-.06708	-.06691	-.06743
.2	-.06882	-.07008	-.06987	-.07046
.25	-.05771	-.05807	-.06014	-.06112
.3	-.03969	-.03957	-.04241	-.04327
.35	-.02282	-.02264	-.02443	-.02493
.4	-.01229	-.01214	-.01298	-.01320
.45	-.00583	-.00573	-.00583	-.00582

Tab. 10.1 : Valores do deslocamento refletido,no tempo t=0.2, para um pulso triangular inicial de amplitude 1.

Os valores da tabela acima foram calculados com n=3 pontos de Radau na construção da função de Riemann e p=2 pontos interiores de Lobatto na integral de linha, calculados ou interpolados entre os extremos dos intervalos (ver secs.8 e 9).

10.4 Exemplos com o material II.1

O desenvolvimento de técnicas numéricas adequadas ao tratamento de meios seccionalmente suaves (ver sec.8) permitiu maior flexibilidade na modelagem de meios inomogêneos. O exemplo mais interessante de tal classe de modelos é uma camada inomogênea, descrita pela velocidade de propagação

$$c(x) = \begin{cases} c_o & , \ |x| \geqslant a \\ c_m\left(1+\alpha\cos\frac{\pi x}{a}\right) & , \ |x| < a \end{cases} \tag{10.10}$$

onde, sendo $c_1 = c(0)$(ver fig.10.1), se tem

$$\alpha = \frac{c_1 - c_o}{c_1 + c_o} \quad , \quad c_m = \frac{c_o}{1-\alpha} = \frac{c_1 + c_o}{2}$$

O tempo de propagação a partir de x=0 , definido em (3.9), tem, para o presente modelo, a expressão

$$\tau(x) = \begin{cases} \dfrac{2a}{c_o \pi \lambda_o} \operatorname{arctg}\left[\dfrac{1}{\lambda_o} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)\right] , & |x| < a \\ \dfrac{x+sa}{c_o} + \dfrac{sa}{c_o \lambda_o} \quad , & |x| \geqslant a \end{cases} \tag{10.11}$$

onde $s \equiv x/|x| = \tau/|\tau|$ e $\lambda_o \equiv \sqrt{c_1/c_o}$

com a inversão

$$X(\tau)=\begin{cases} \dfrac{2a}{\pi}\ \mathrm{arctg}\left[\lambda_o\ \mathrm{tg}\left(\dfrac{c_o\pi\tau}{2a}\ \lambda_o\right)\right], & |\tau| < \dfrac{a}{c_o\lambda_o} \\ c_o\left[\tau - \dfrac{sa}{c_o\lambda_o}(1-\lambda_o)\right], & |\tau| \geqslant \dfrac{a}{c_o\lambda_o} \end{cases} \qquad (10.12)$$

A deformação da frente de onda, no caso de uma onda oriunda da região homogênea, só existirá dentro da região inomogênea. Convencionou-se, no entanto, referir todas as frentes ao ponto x=0, resultando daí

$$\lambda(x)=\begin{cases} \lambda_o, & |x| \geqslant a \\ \sqrt{\dfrac{1+\alpha\cos(\frac{\pi x}{a})}{1+\alpha}}, & |x| < a \end{cases} \qquad (10.13)$$

Quanto aos núcleos das equações integrais que determinam as funções de Riemann, estes são nulos para a região homogênea (|x| < a), tendo, no interior do obstáculo, as expressões

$$F_u = F^2\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - 2\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \frac{2}{\alpha}\ \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]$$

$$F_\sigma = F^2\left[\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \frac{2}{\alpha}\ \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right] \qquad (10.14)$$

onde $F = c_o\alpha\pi/a(1-\alpha)$, sofrendo os núcleos descontinuidades nas retas $\xi + \eta=\pm 2a/c_o\lambda_o$

As expressões (10.14) indicam que o comportamento do obstáculo quanto à reflexão de ondas de tensão e deslocamento é diferente em cada uma de suas subcamadas de espessura a/4. Os exemplos apresentados a seguir se restringirão às caraterísticas globais de reflexão, mais interessantes do ponto de vista da identificação de inomogeneidade.

A figura 10.10 mostra o comportamento das funções de Riemann para um obstáculo duro ($c_1/c_o = 2$). Para condições iniciais não-nulas na região homogênea $x<-a$, o argumento$(-a,t_o,-a,0)$ descreve a onda refletida e o argumento $(a,t_o,-a,0)$ descreve a influência da reflexão sobre a onda transmitida. Nota-se que a perturbação da onda de deslocamentos é negativa na reflexão e positiva na transmissão, ocorrendo o contrário com uma onda de tensões.

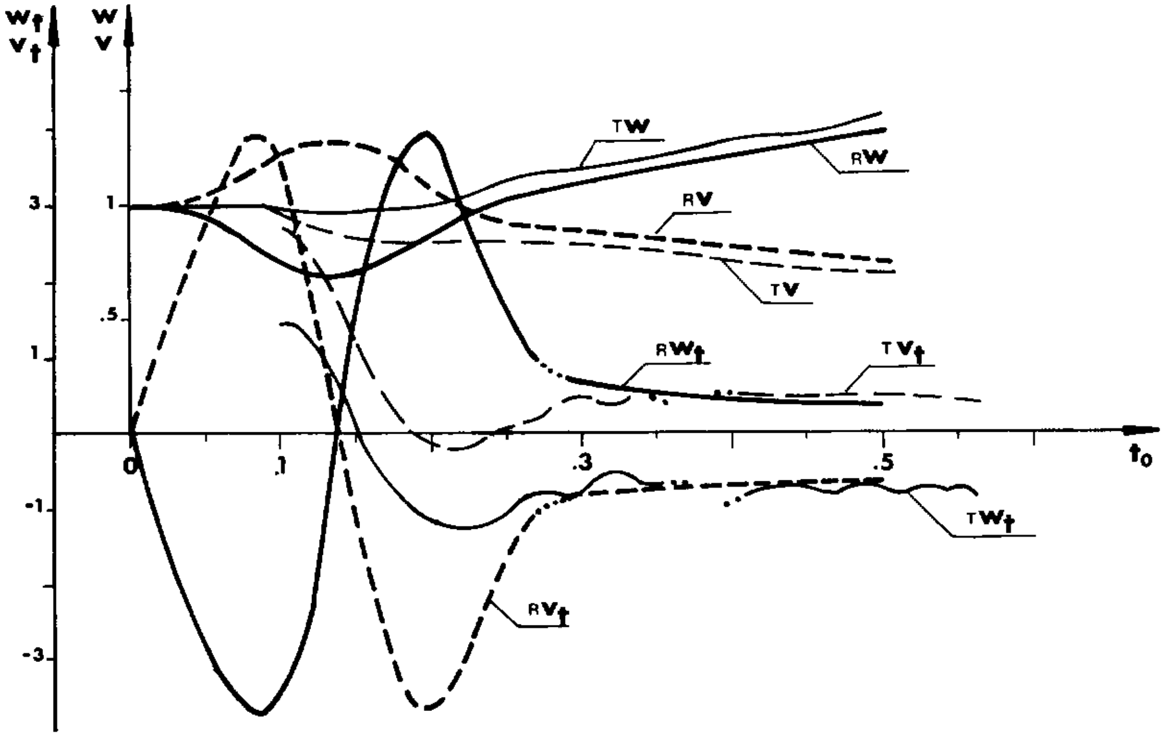


Fig. 10.10: Funções de Riemann w e v e derivadas w_t e v_t, para o material II.1 ($c_1/c_o=2$; $c_o=1$; $a=.1$), com os argumentos $(-.1,t_o,-.1,0)$ e $(.1,t_o,-.1,0)$

Um primeiro exemplo para o comportamento descrito acima é fornecido pela passagem de uma onda triangular, de amplitude unitária e comprimento a. Tal perturbação pode ser gerada por uma condição inicial de deslocamento, na forma de um pulso triangular de amplitude 2, com suporte (-2a,-a), por exemplo.A semi-onda que se propaga na direção C^- pode ser eliminada do estudo, pois não sofre reflexão.

A figura 10.11 mostra a história de deslocamento do ponto $x = -2a$. Observa-se a passagem de dois pulsos refletidos,de sinais alternados, seguidos de uma cauda de pequeno conteúdo energético. Não se pode ainda estabelecer a relação entre a onda refletida e as caraterísticas do obstáculo, mas é forçoso observar que a duração dos pulsos refletidos é bastante próxima ao tempo de dupla travessia (eco) do obstáculo, dado por $T = 4a/c_o\lambda_o$, podendo-se conjeturar também a existência de uma relação simples entre as caraterísticas do obstáculo e a amplitude dos pulsos refletidos (próxima a.14, no presente exemplo).

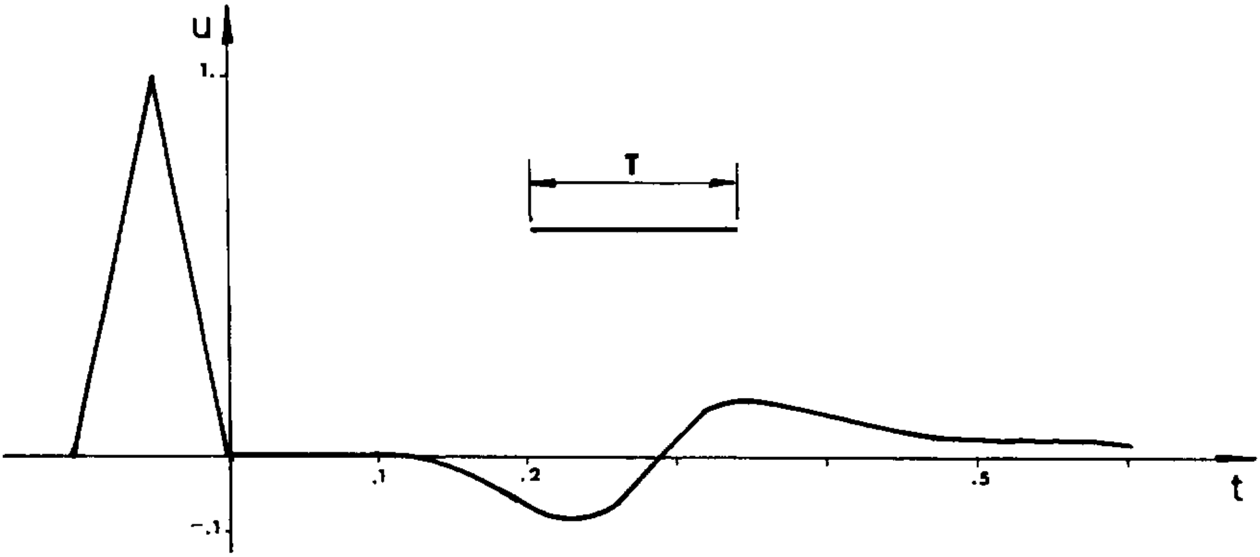


Fig.10.11: Onda triangular de deslocamento incidente e refletida no material II.1(obstáculo duro, $c_1/c_o= 2$)

Os exemplos apresentados nas figs. 10.13-19 fornecem mais elementos para a compreensão do comportamento do presente modelo. A fig. 10.12 ilustra parte de um teste de convergência , mostrando-se o primeiro pulso refletido da onda triangular de deslocamento, em função da posição (ver fig. 10.13) para o instante t = .3. Com base nos testes de convergência, todos os exemplos a seguir foram construidos com n=3 pontos de Radau e p=2 pontos interiores de Lobatto (ver secs.8 e 9) em passos sempre inferiores a .1.

As figs. 10.13-14 ilustra os instantes iniciais da propagação de um pulso triangular de deslocamentos e um retangular de tensões, respectivamente, através do obstáculo duro, com $c_1/c_o = 2$. Os aspectos mais importantes são notados nas ondas refletidas, destacando-se a inversão de sinal, que ocorre apenas na onda de deslocamento. Observando a forma da onda de tensão, destacada para t = .35, note-se também um pulso negativo,superposto em parte à onda transmitida.

Nos demais exemplos, efetuam-se algumas variações nos parâmetros dos exemplos acima. Para uma onda retangular muito longa (fig.10.15), não se observa muito grande diferença nos primeiros pulsos (refletido e transmitido), em relação aos obtidos com a onda média do primeiro exemplo. Destaca-se, nesta figura, a diferença entre a forma da onda e a solução WKB, notando-se grande diferença na energia acumulada no obstáculo.

O efeito de um obstáculo mais duro ($c_1/c_o = 4$) é mostrado nas figs.10.16-17. Neste caso especial, o tempo de travessia do obstáculo é igual ao período da onda, notando-se mesmo grande semelhança entre a forma da onda principal quando inteiramente contida no obstáculo (t = .1) e a forma da cauda de reflexão contida no obstáculo, após um intervalo de dupla travessia

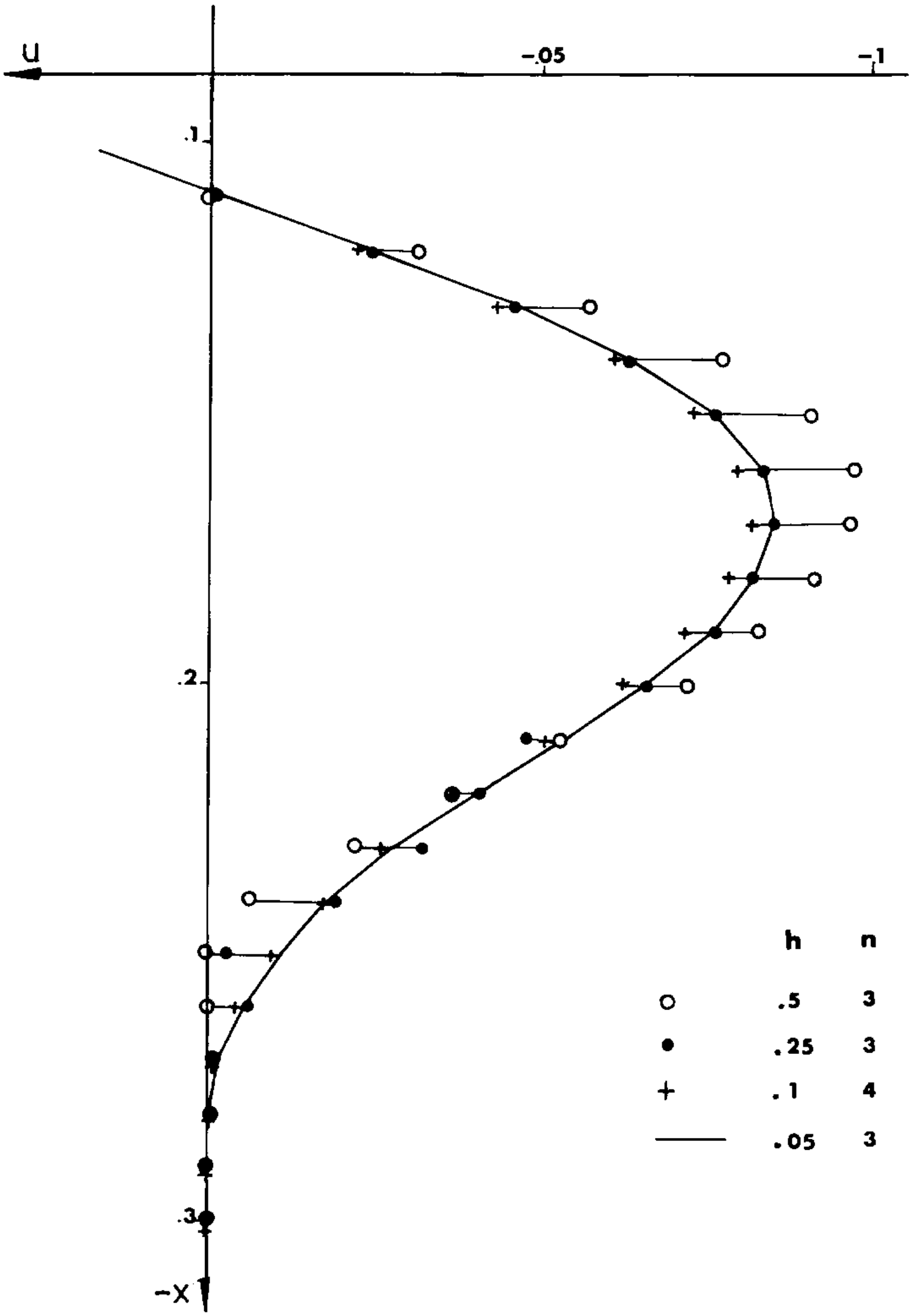


Fig. 10.12: Teste de convergência. Trecho inicial da forma de onda para t=.3 (onda triangular de deslocamento. $c_1/c_o = 2$)

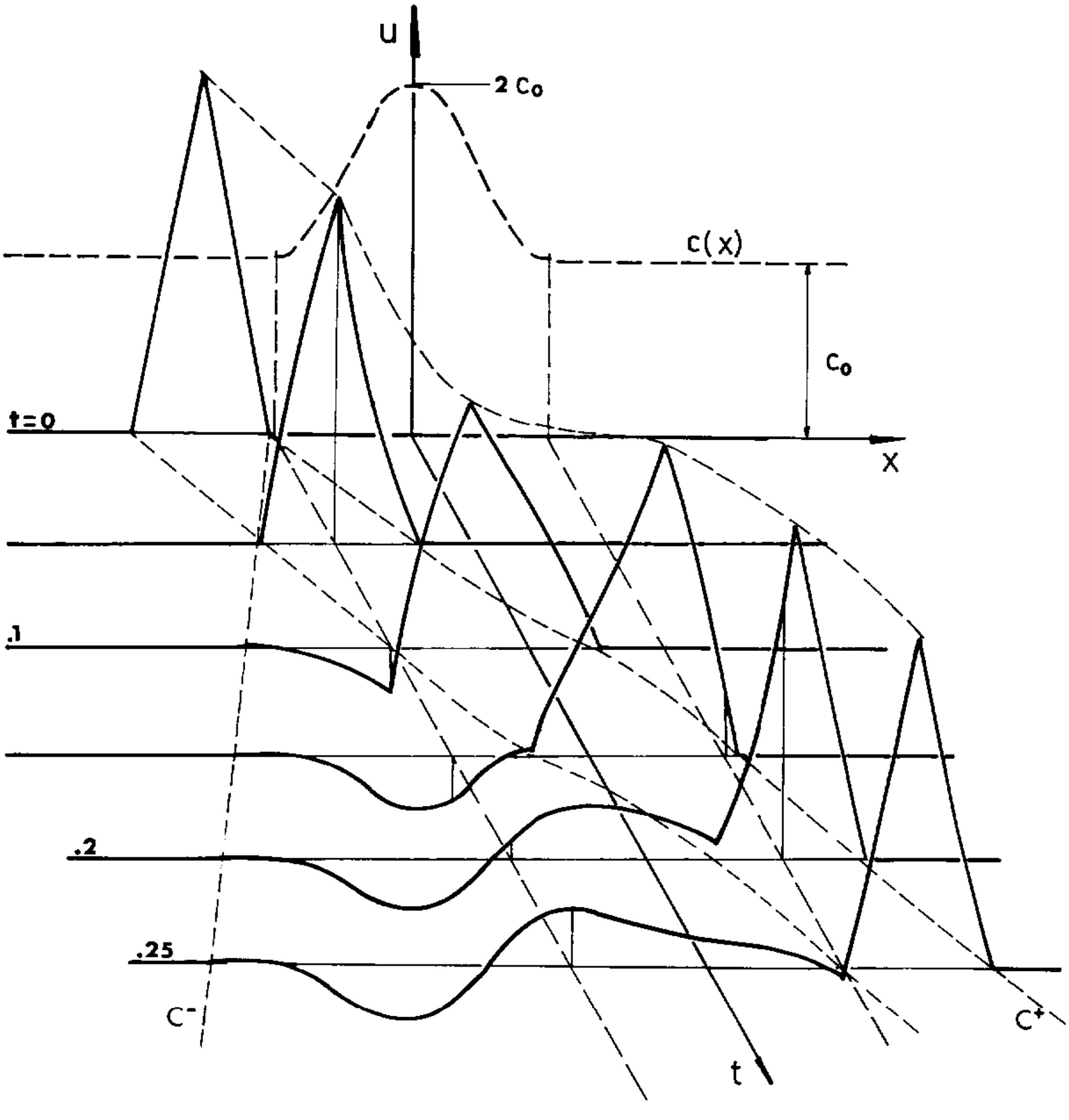

u
2 c₀
c(x)
c₀
t=0
X
.1
.2
.25
C⁻
C⁺
t

Fig.10.13: Onda triangular de deslocamento no material II.1 (obstáculo duro, $c_1/c_0 = 2$)

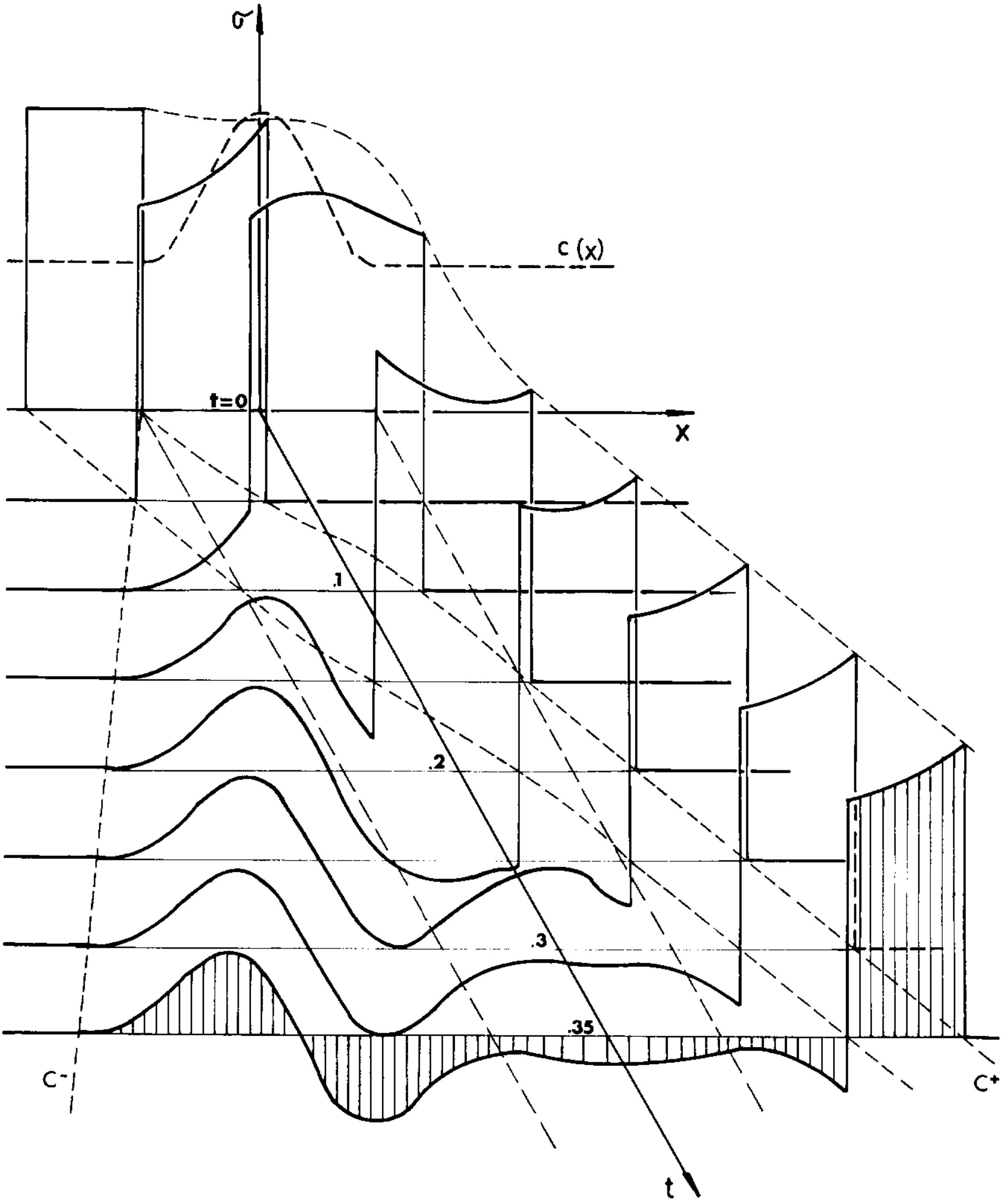


Fig. 10.14: Onda retangular de tensão no material II.1 (obstáculo duro, $c_1/c_0 = 2$)

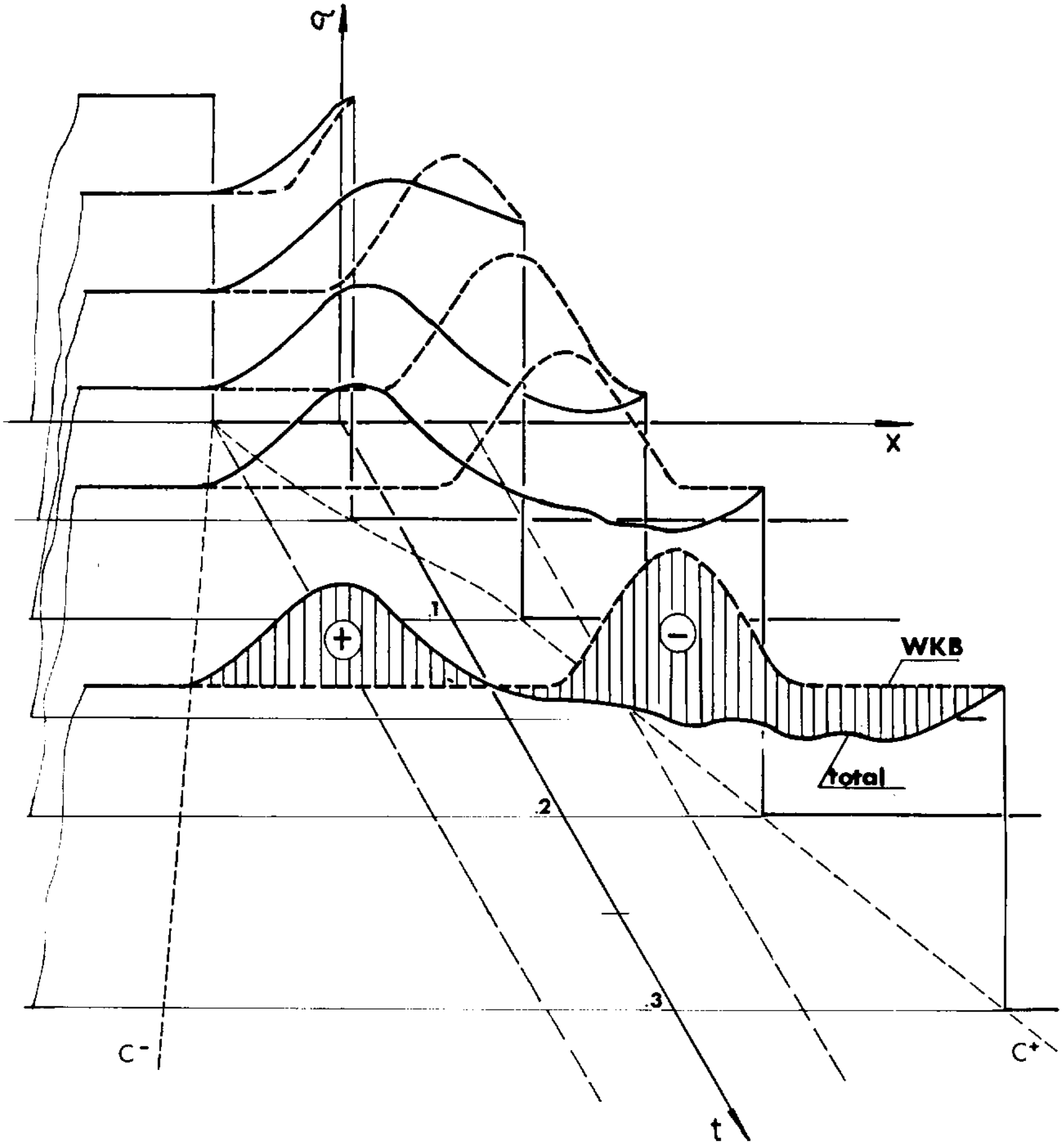

σ
X
1
2
3
WKB
total
+
−
C⁻
C⁺
t

Fig. 10.15: Onda retangular longa de tensão no material II.1 (obstáculo duro, $c_1/c_0 = 2$)

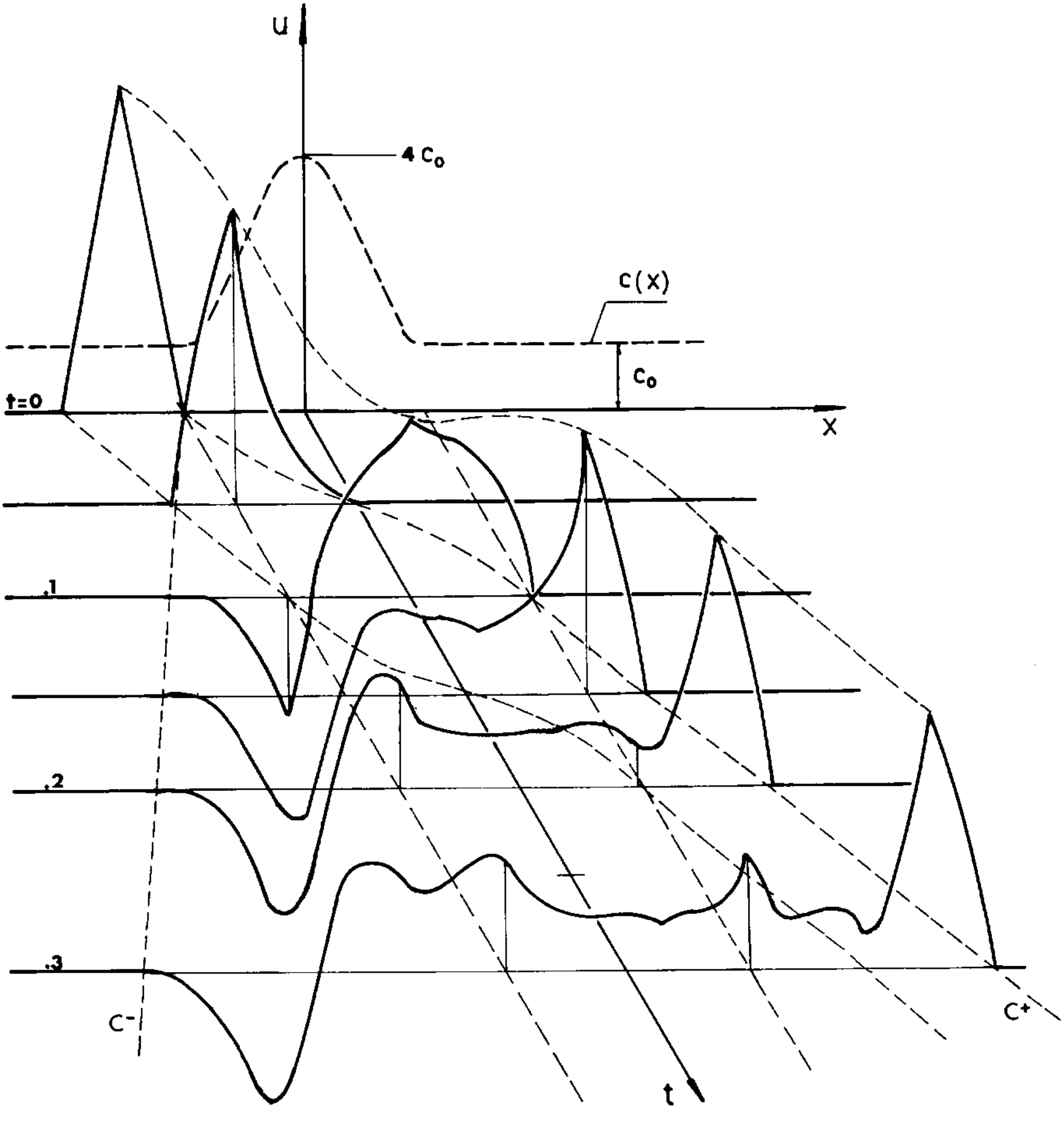


Fig. 10.16: Onda triangular de deslocamento no material II.1 (obstáculo duro, $c_1/c_0 = 4$)

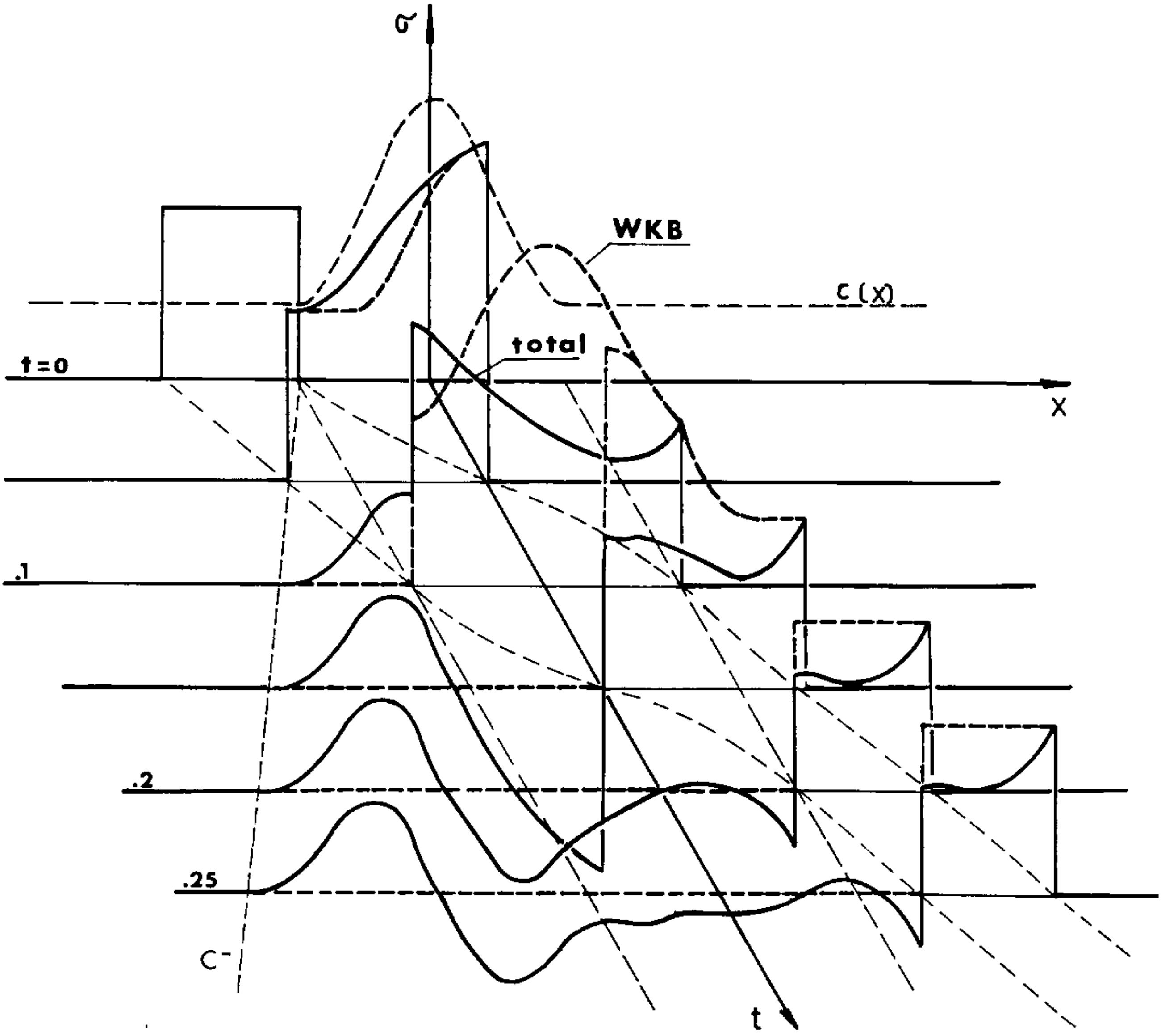


Fig. 10.17: Onda retangular de tensão no material II.1

(obstáculo duro, $c_1/c_0 = 4$)

(t = .3). Observe-se também o encurtamento e aumento de amplitude do pulso refletido, devidos ao menor tempo de travessia e maior impedância do obstáculo. A maior tendência à ondulação na cauda refletida é atribuida à relação entre o tempo de travessia e o período da onda incidente.

As figs. 10.18-19, em que se mostra a propagação dos pulsos através de um obstáculo mole ($c_1/c_0 = 1/2$) reproduzem também, principalmente no primeiro pulso refletido, as caraterísticas de inomogeneidade: nota-se a inversão do sentido das ondas refletidas, o seu alongamento correspondente ao maior tempo de travessia do obstáculo e sua menor amplitude, devida ao pequeno valor da impedância acústica no interior da inomogeneidade.

Embora ainda se possam obter resultados analíticos para os problemas de identificação, as informações que se podem retirar de uma criteriosa variação de parâmetros nos problemas de simulação podem ser valiosas, como se pretendeu ilustrar nestes exemplos. Com a possibilidade de solução numérica dos problemas com modelos seccionalmente suaves, dispõe-se de maior flexibilidade na modelagem de meios inomogêneos.

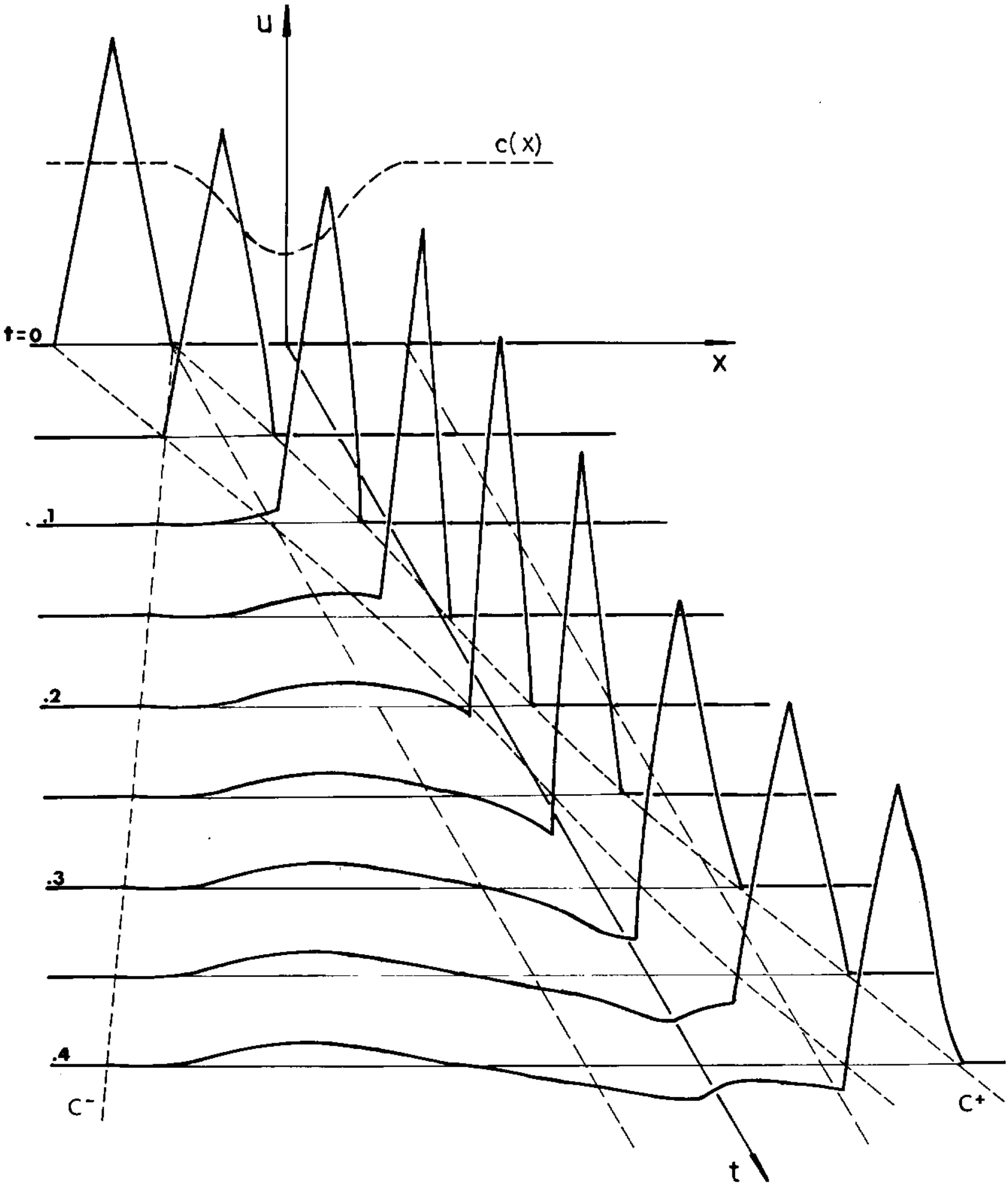

u
c(x)
t=0
x
.1
.2
.3
.4
C⁻
C⁺
t

Fig. 10.18: Onda triangular de deslocamento no material II.1(obstáculo mole, $c_1/c_0 = 1/2$)

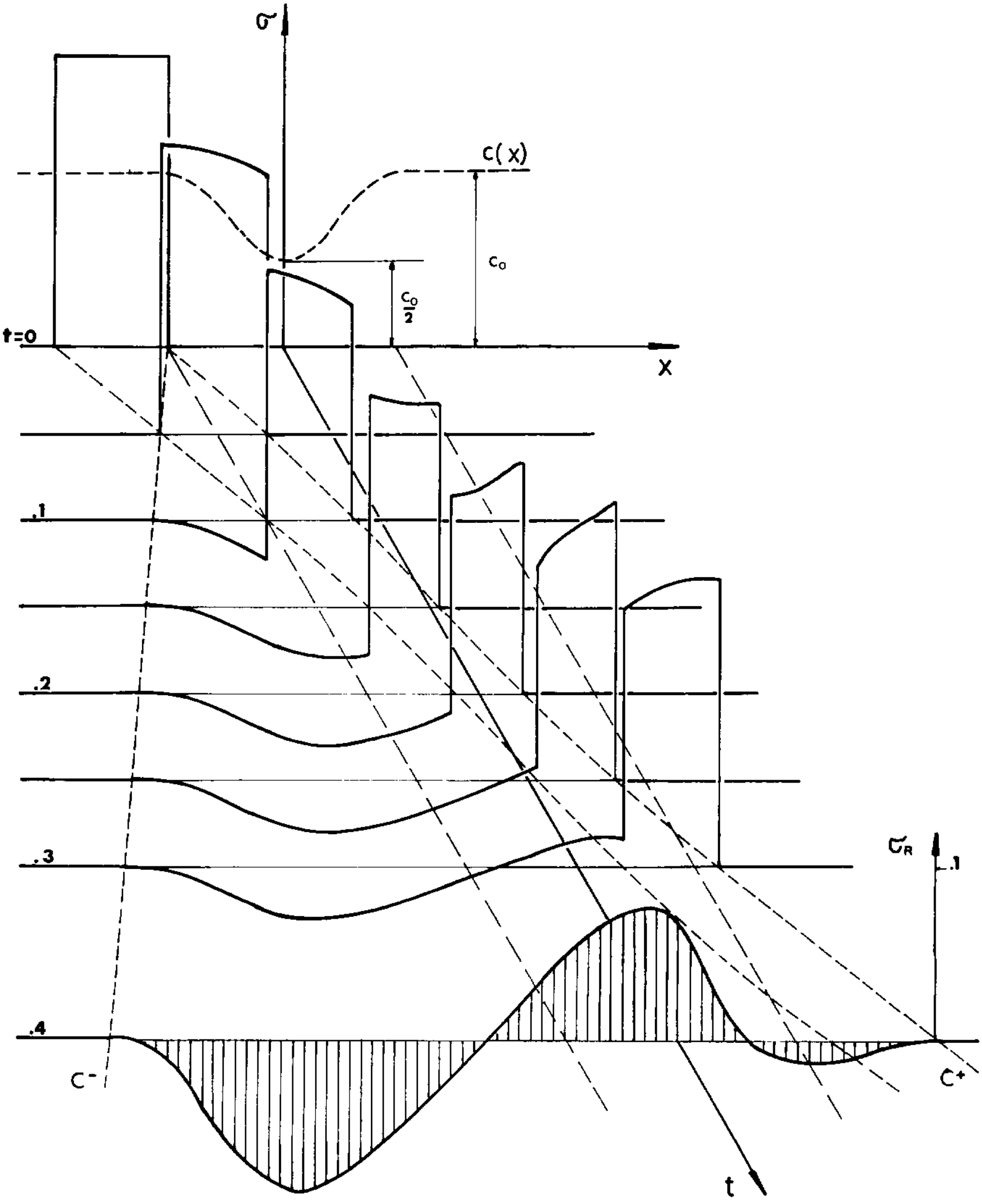

σ
c(x)
c_0
$\frac{c_0}{2}$
t=0
X
.1
.2
.3
.4
σ_R
.1
C⁻
C⁺
t

Fig. 10.19: Onda retangular de tensão no material II.1 (obstáculo mole, $c_1/c_0 = 1/2$)

10.5 Exemplos com o material II.2

Um modelo de inomogeneidade seccionalmente suave pode ser obtido a partir do anterior (II.1). Trata-se de uma *camada de transição* entre dois meios homogêneos. Uma aplicação interessante deste modelo é o "casamento de impedâncias" na junção de dois materiais diferentes, com o objetivo de maximizar a transmissão de sinal.

Para uma camada de espessura *a* , as expressões de interesse para este modelo são idênticas às do material II.1, a saber, (10.10-14) para x<0 tendo-se, para x>0, as expressões

$$\begin{aligned} &c(x) \equiv c_1 = c_0\lambda_0^2 \;;\quad \tau(x) = \frac{x}{c_1} \;;\quad X(\tau) = c_1\tau \\ &\lambda(x) \equiv 1 \;;\quad F_u \equiv F_\sigma \equiv 0 \end{aligned} \tag{10.15}$$

O estabelecimento de um modelo de transição que minimize a reflexão de onda é um problema interessante que pode ser investigado com a simulação numérica ora apresentada. O modelo apresentado acima já revela caraterísticas interessantes neste sentido. Como mostram as figuras 10.20-21, após a reflexão inicial, reduzida, a energia capturada pela transição é emitida lentamente, com efeitos de eco. Para efeito de comparação, note-se que numa transição brusca haveria reflexão de 33% da onda incidente. Tais efeitos de reverberação também estão presentes no material II.1, sendo claramente notados quando se desenvolve o estudo detalhado do comportamento das funções de Riemann.

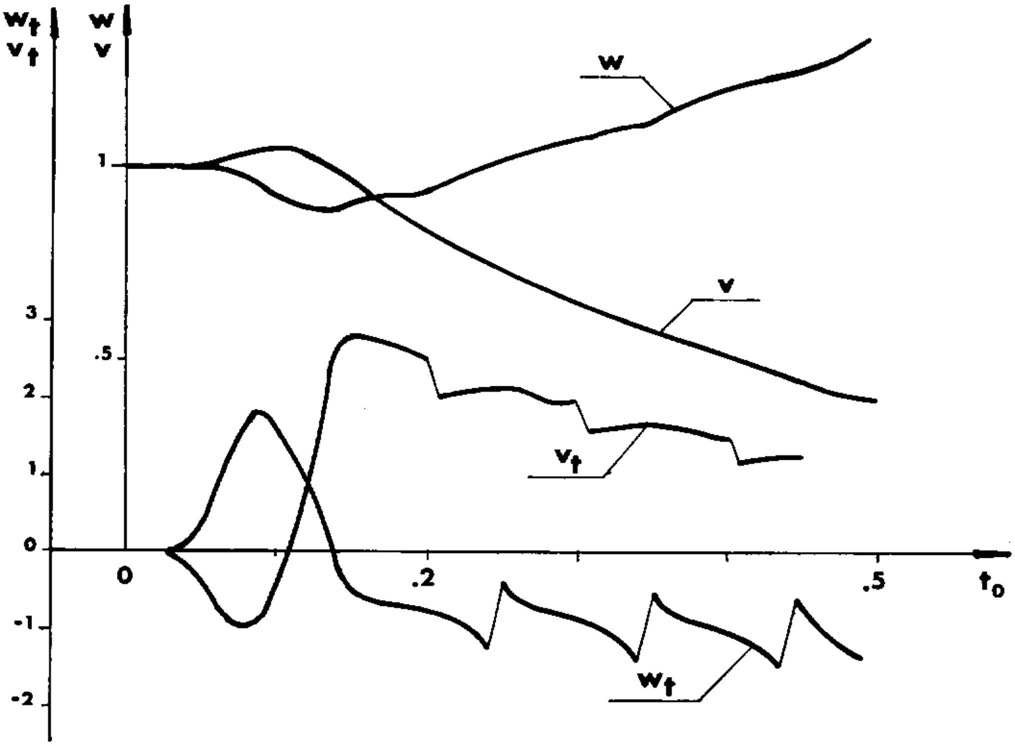


Fig.10.20: Funções de Riemann para o material II.2 e o argumento $(-.1, t_o, -.1, 0)$; transição mole-duro $(c_1/c_o = 2)$

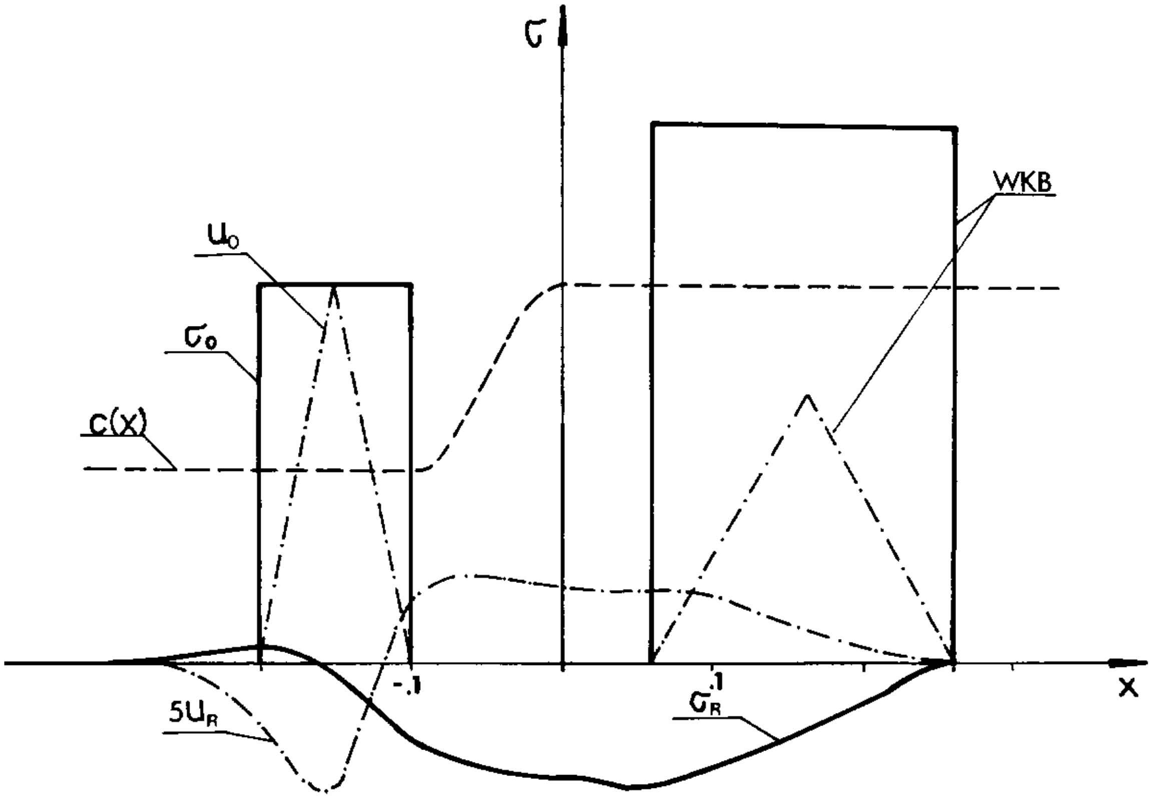


Fig. 10.21: Solução WKB e influência da reflexão para ondas de tensão e deslocamento no material II.2. t=0,2.

BIBLIOGRAFIA

[1] LEE,E.H. - The Continuum Mechanics Aspect of Material Properties Determination, Energetics, Vol.III, 85,W.Mueller, 1967.

[2] BEDDOE, B. - Propagation of Elastic Stress Waves in a Necked Rod , J. Sound & Vibration, 2(2), 150-166, 1965.

[3] KHAN, A.S. - Behaviour of Aluminium During the Passage of Large-Amplitude Plastic Waves , Int.J.Mech.Sci., 15,503 516, 1973.

[4] LINDHOLM,U.S.; YEAKLEY,L.M. - Dynamic Deformation of Single and Policrystaline Aluminium, J.Math. Phys.Solids, 13, 41-53, 1965.

[5] MONTEIRO, S.N.; NOBREGA, R.B.; ZINDELUK, M. - Escoamento Plástico por Onda Compressiva Uniaxial, III Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, A-5, 79-90, 1975.

[6] COURANT,R.; FRIEDRICHS,K.O. - Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience, 1948.

[7] BEVILACQUA,L. - The Hodograph Transformation in Plastic Waves with Discontinuous Loading Conditions, ASME 71 - APMW-12, J. Appl.Mech., 407-415, 1972.

[8] CRISTESCU, N. - Dynamic Plasticity, North-Holland, 1967.

[9] JOHNSON, W. - Impact Strenght of Materials ,E.Arnold, 1972.

[10] CHERNOV, L.A. - Wave Propagation in a Random Media, McGraw-Hill, 1960.

[11] ADAMS, R.N.; DENMAN, E.D. - Wave Propagation and Turbulent Media , American Elsevier, NY, 1966.

[12] BREKHOVSKIKH, L.M. - Waves in Layered Media, Academic Press 1960.

[13] EWING, W.M.; JARDETZKY, W.S.; PRESS, F. - Elastic Waves in Layered Media , McGraw-Hill, 1957.

[14] VAYO, H.W.; GHISTA, D.N. - Wave Propagation in Bone Media , Bull. Math. Biophysics, 33, 463-479, 1971.

[15] FOST,R.B.; ODEN,J.T.; WELLFORD,L.C.Jr. - A Finite Element Analysis of Shocks and Finite-Amplitude Waves in One-Dimensional Hyperelastic Bodies at Finite Strain , Int.J.Solids Structures, 11,377-401,1975.

[16] COURANT, R.; HILBERT,D. - Methods of Mathematical Physics , Vol.II, Interscience, 1965.

[17] CLIFTON,R.J. - A Difference Method for Plane Problems in Dynamic Elasticity, Quart.Appl.Math, XXV(1), 97 - 116, 1967.

[18] ROSENHOUSE,G. - Plane Disturbance Propagation in Inhomogeneous Media. General Solution, Int. J. Eng.Sci., 11, 1197-1220, 1974.

[19] GUNZBURGER,M.D.; KLEINSTEIN,C.G. - On the Mathematical Conditions for the Existence of Periodic Fluctuations in Non-Uniform Media, J. Sound & Vib., 48(3), 345-357, 1976.

[20] COPSON,E.T. - On the Riemann-Green Function , Arch. Ratl. Mech.Anal., I, 324-256, 1958.

[21] SEDOV,L.I. - A Course in Continuum Mechanics , Vol.4 , Wolters-Noordhoff, 1972.

[22] SOKOLNIKOFF,I.S. - Mathematical Theory of Elasticity.

[23] TRUESDELL,C.; TOUPIN,R.A. - The Classical Field Theories. Hadbuch der Physik, Vol.III/1, Springer-Verlag, 1960.

[24] ACHENBACH,J.D. - Wave Propagation in Elastic Solids,North-Holland, 1973.

[25] FRANCIS,P.H. - Note on the Propagation of Elastic Waves in a Non-homogeneous Rod a Finite Lenght, J. Appl. Mech., 226-227, 1967.

[26] NAYFEH,A.H.; NEMAT NASSER,S. - Elastic Waves in Inhomogeneous

Elastic Media , J. Appl.Mech., 72-APM-3,696-702,1972.

[27] GORDON, P.; SANDAY,S.C. - Elastic Waves in Heterogeneous Bars of Varying Cross-Section, J. Franklin Inst., 303(2), 129-145, 1977.

[28] ROGGE,T. - Longitudinal Wave Propagation in Bars with Variable Cross Section, Z.A.M.P., 22, 299-307, 1971.

[29] BEVILACQUA, L. - The Hodograph Transformation in Plastic Wave Propagation, Dissertation, Stanford University, 1971.

[30] SCHWARTZ, L. - Methodes Mathematiques pour les Sciences Physiques, Herrmann, 1961.

[31] STAKGOLD,I. - Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Vol.II.

[32] RIEMANN,B. - Uber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Abhandl. Ges. Wiss. Gottingen, Math.Phys.Klasse, Vol.8, 1860.

[33] DARBOUX,G. - Leçons sur la Theorie des Surfaces,Vol.II, tomo IV, Gauthier-Villars, 1889.

[34] BEVILACQUA,L.; ZINDELUK,M.; FEIJOO,R.A. - Riemann Solution for Plane Waves in Non-Homogeneous Media, I.U.T.A.M. XIV Congress Delft, Holanda, 1976.

[35] TRICOMI, F.G. - Integral Equations, Interscience, 1957.

[36] DE HOOG,F.; WEISS,R. - Implicit Runge-Kutta Methods for Second Kind Volterra Integral Equations, Numer. Math., 23, 199-213, 1975.

[37] DE HOOG, F.; WEISS,R. - On the Solution of Volterra Integral Equations of the First Kind, Numer.Math.,21,22-32, 1973.

[38] HILDEBRAND,F.B. - Introduction to Numerical Analysis,McGraw-Hill, 1956.

APÊNDICE

Programa de computação para problemas de valor inicial em meio infinito.

Para a solução do problema de Cauchy apresentado na sec.6, pelo método de Riemann, usando as técnicas numéricas descritas nas secs.8 e 9, foi desenvolvido um programa em linguagem Fortran, listado, em parte, no final deste Apêndice.

Foram implementadas as condições iniciais de deslocamento ou tensão, na forma de pulso concentrado retangular, triangular ou parabólico, para os quatro tipos de material descritos na sec.10, com velocidade inicial nula, podendo-se obter como resultado as formas da onda para determinados instantes ou as curvas deslocamento vs. tempo e tensão vs. tempo para pontos especificados.

Na solução das equações integrais, os pontos de interpolação no subdomínio (i,ℓ), ver sec.8, podem ser 9(n=3) ou 16(n=4), sendo dispostos pelo critério de Radau. A quadratura numérica da equação integral é feita, nos elementos (i,ℓ) onde o núcleo é contínuo, usando o esquema (8.19); nos elementos com descontinuidade, a integral (8.23) é calculada com o uso de sub-elementos retangulares e triangulares, como ilustra a fig.8.6, com quatro nós interiores distribuidos pelo critério de Gauss-Legendre, ver expressões (8.24-29).

Obtida a função de Riemann, a solução é construida por quadratura numérica dessa função com as condições iniciais , ao longo da reta $\xi=\eta(t=0)$. Os procedimentos numéricos disponíveis no programa são: integração por trapézios, Gauss-Legendre com até 8 pontos interiores e Gauss-Lobatto com até 4 pontos interiores em cada intervalo, cuja amplitude máxima H é especificada. Mesmo sob a especificação de um esquema de quadratura Gaussiano, o programa adota a regra do trapézio para intervalos menores que H/10.

Nos pontos interiores de integração, a função de Riemann pode ser calculada ou obtida por interpolação dentro de um elemento adicional cuja diagonal é o eixo t=0.

As subrotinas e funções do programa, cuja estrutura é ilustrada adiante, têm suas atribuições assim descritas(destacadas com * as listadas ao final do Apêndice):

LEDOR: lê dados; escreve preâmbulo com os dados

RADAU: preenche matrizes com coordenadas dos pontos de Radau e coeficientes de integração.

INPOLA*: calcula matriz de interpolação para os pontos interiores na diagonal de um elemento quadrado.

POLI*: calcula o valor do polinômio de interpolação de Lagrange.

COEFI: preenche vetores com coordenadas e coeficientes de integração de Gauss-Legendre.

LOBATO: preenche vetores com coordenadas e coeficientes de integração de Gauss-Lobatto.

RIEMANN*: efetua a integração numérica do produto da função de Riemann e derivada normal pelas condições iniciais.

TAU: calcula o tempo de propagação $\tau(x)$.

UFUNC: estabelece o valor da condição inicial em cada ponto x.

ALFA : calcula a deformação $\lambda(x)$ da onda direta.

VPROP: fornece a velocidade de propagação $c(x)$.

XINV : fornece a transformação inversa $X(\tau)$.

VOLTRA:* calcula a função de Riemann e suas derivadas de primeira ordem, no domínio de dependência de um ponto (x_o,t_o).

DITRI:* divide o domínio de dependência para a solução numérica levando em conta o processo especificado para a integração feita em RIEMANN, bem como a presença de descontinuidade no núcleo e nas condições iniciais.

INSER: reordena vetor de pontos de integração, inserindo novos pontos oriundos do refinamento da malha.

XKER : calcula os valores dos núcleos das equações integrais.

MAQUA:* gera matriz de integração para o elemento retangular suave.

MATRI:* gera matriz de integração para o elemento descontínuo triangular inferior (fig.8.6).

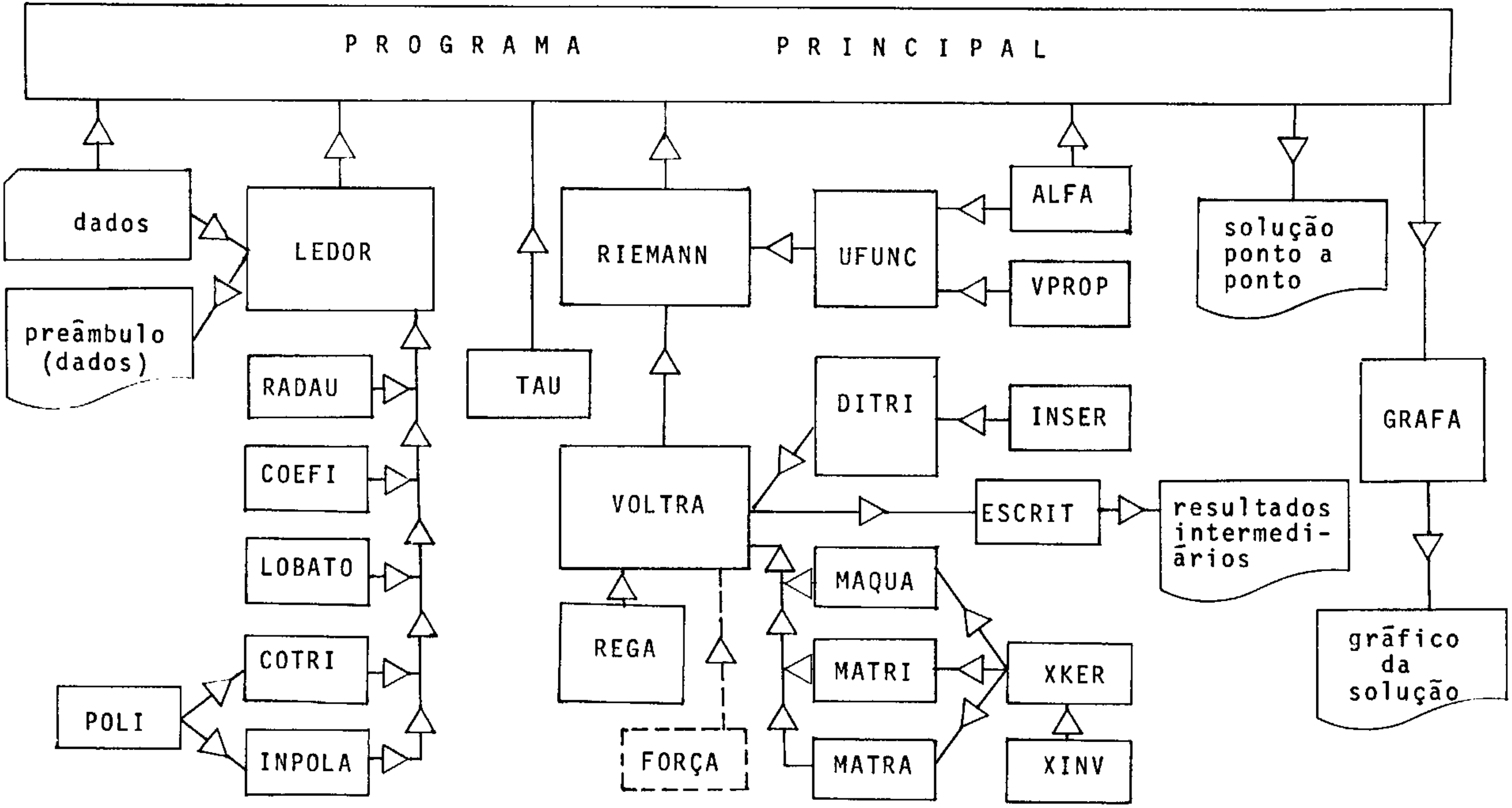
MATRA: gera matriz de integração para o elemento descontínuo triangular superior.

REGA : resolve o sistema algébrico linear (i,ℓ) pelo método de Gauss-Choleski.

GRAFA: escreve e representa graficamente a solução.

ESCRIT: escreve, em vários níveis de opção, os resultados intermediários, para exame e teste de convergência de processos numéricos internos.

FORÇA: designação reservada para uma subrotina que especifique os valores do carregamento $f(x,t)$, permitindo resolver os problemas de resposta forçada. A integração bidimensional da contribuição de f é efetuada junto com a construção da função de Riemann. O carregamento f deve ser contínuo nas variáveis x e t, para que este procedimento seja preciso.


PROGRAMA PRINCIPAL
dados
preâmbulo (dados)
LEDOR
RADAU
COEFI
LOBATO
COTRI
INPOLA
POLI
TAU
RIEMANN
UFUNC
ALFA
VPROP
VOLTRA
REGA
FORÇA
DITRI
INSER
ESCRIT
resultados intermediários
MAQUA
MATRI
MATRA
XKER
XINV
solução ponto a ponto
GRAFA
gráfico da solução

```
C      PROPAGACAO DE ONDAS;ZINDELUK/BEVILACQUA 1977
FILE   5=CARTOES, UNIT=READER
FILE   6=IMPRESS, UNIT=PRINTER
       DIMENSION UXVTF(4000),TIT(6)
       COMMON ISIG,IMAT,IFUNC
       COMMON VU(2),PROP(10),U0,V0,H
       COMMON XI,XF,CHIA,CHIB,CHIO,ETAO
       COMMON CHI(8),PESO(8),CRADO(4,4),PRADO(4),CINT(5,16)
       COMMON C1,C2,VX(8),VY(18),POX(4,8),POY(4,18)
       COMMON LR,LW,NPINT,IA,IB,IC,NR,NS,IE,JFO
       COMMON /DIV/ DX,DT,UNIX(2),UNIT(2),XIE,TIE,NX,NT,MODO
C***
C      PROPAGACAO DA ONDA UFUNC NO MEIO
C      INFINITO NAO HOMOGENEO IMAT.
C      METODO DE RIEMANN: A EQ INTEGRAL DE
C      VOLTERRA QUE OCORRE E' RESOLVIDA NUMERICA-
C      MENTE POR QUADRATURA GAUSSIANA DE RADAU
C***
       LR=5;LW=6
       READ(LR,10)NJOB,INIDO,IE,JFO
   10  FORMAT(4I5)
       DO 100 IJOB=1,NJOB
        WRITE(LW,20)IJOB,NJOB
   20   FORMAT(1H1,10X,'JOB ',I3,'/',I3)
C***
C   LEITURA DOS DADOS
C***
        CALL LEDOR
C***
C   TRABALHO COM OS DADOS
C***
        ITEN=1
        IF(ISIG.EQ.4)ITEN=2
        K=1
        IF(ISIG.EQ.1.OR.ITEN.EQ.2)K=0
        IFOR=1+MODO+2*K
        IF(IMAT.LT.3) GO TO 1
        PROP(8)=SQRT(1./PROP(2))
        PROP(9)=PROP(2)
        PROP(4)=3.1415926536
       PRCP(2)=(PRCP(2)-1.)/(PRUP(2)+1.)
       PROP(5)=-TAU(PROP(3))
       PROP(6)=-PROP(5)
       PROP(7)=PRCP(5)/100.
       IF(IMAT.EQ.4) PRCP(6)=0.
      GO TO 2
    1 PRUP(5)=-100.
      PRCP(6) = 100.
C***
C     EXTREMOS NO PLANO CSI,ETA
2     XP=XI
      CHIA=TAU(XP)
      XP=XF
      CHIB=TAU(XP)
C ESCREVER O CONTEUDO DO COMMCN (OPCIONAL)
      IF(IE.GE.5) CALL ESCRIT
       IF(MODO.EQ.1)GO TO 12
C***
C    PRCGRAMA PARA X VARIAVEL
C***
       DO 4 I=1,NT
        T=DT*(I-1)+TIE
      DO 5 KT=1,6
      TIT(KT)=T
    5 CONTINUE
        R=T+CHIB
        XFIM=XINV(R,R)
        NX=(XFIM-XIE)/DX+3
        IDO=1
        IF(I.GT.1) GO TO 11
         IDO=INIDO
   11   WRITE(LW,30)  T,IDO
   30  FORMAT(1H1,'TEMPO=',F15.7,'A PARTIR DO PONTO',I5)
         DO 8 J=IDO,NX
         X=XIE+DX*(J-1)
         UXVTF(J)=X
         IF(ITEN.EQ.2)ISIG=1
         CHIC=TAU(X)+T
         ETAO=CHIC-2.*T
         IF(IES.GE.1)WRITE(LW,29)T,X,CHIC,ETAO
   29 FORMAT(/2X,'CALCULO NO TEMPO',F10.5,'POSICAO',F10.5,/,'
     1=======================================================',/,
     22X,'COORDENADAS CARATERISTICAS: CSI=',F10.5,'ETA=',F10.5)
C** CALCULO DA RESPOSTA NO DOMINIO CSI,ETA
         CALL RIEMAN(U,SUM)
C ESCREVER O CONTEUDO DO COMMON (OPCIONAL)
      IF(IE.GE.6) CALL ESCRIT
C** CALCULO DA RESPOSTA EM X,T
         IJ=NX+J
         CSI=CHIO
         ETA=ETAO
      AL=ALFA(CSI,ETA)
         UXVTF(IJ)=U/AL
         IJJ=2*NX+J
      UXVTF(IJJ)=SUM/AL
      IJK=3*NX+J
      UXVTF(IJK)=UXVTF(IJ)+UXVTF(IJJ)
      WRITE(LW,39)
   39 FORMAT(14X,'POSICAO',8X,'ONDA DIRETA',5X,'REFLEXO',7X,
     1'TOTAL')
          WRITE(LW,40) UXVTF(J),UXVTF(IJ),UXVTF(IJJ),UXVTF(IJK)
   40      FORMAT(10X,4(2X,E14.7))
         IF(ITEN.EQ.1)GO TO 8
C** CALCULO DA TENSAO CORRESPONDENTE
         ISIG=2
         CALL RIEMAN(U,SUM)
      IJL=4*NX+J
      UXVTF(IJL)=U*AL
      IJM=5*NX+J
      UXVTF(IJM)=SUM*AL
       IJN=6*NX+J
      UXVTF(IJN)=UXVTF(IJL)+UXVTF(IJM)
      WRITE(LW,50)UXVTF(IJL),UXVTF(IJM),UXVTF(IJN)
   50 FORMAT(1H+,76X,3(2X,E14.7))
    8    CONTINUE
      M=3*ITEN+1
        CALL GRAFA(UXVTF,NX,M,TIT,IFOR)
    4   CONTINUE
       GO TO 100
C***
```

```
C    TEMPO VARIAVEL, POSICOES FIXAS
C***
   12  DO 14 I=1,NX
        X=XIE+DX*(I-1)
      DO 15 KT=1,6
   15 TIT(KT)=X
        X=TAU(X)
        TI =X-CHIB-3*DT
       NAUX=(TI-TIE)/DT
       TIE=TIE+NAUX*DT
       IDO=1
       IF(I.GT.1) GO TO 16
       IDO=INIDO
   16  WRITE(LW,60) T,IDO
   60  FORMAT(1H1,'POSICAO=',F15.7,'A PARTIR DO INSTANTE',I5)
        DO 18 J=IDO,NT
         IF(ITEN.EQ.2)ISIG=1
         T=TIE+DT*(J-1)
         UXVTF(J)=T
         CHIO=X+T
         ETAO=X-T
         CALL RIEMAN(U,SUM)
         IJ=NT+J
         CSI=CHIO
         ETA=ETAO
      AL=ALFA(CSI,ETA)
      UXVTF(IJ)=U/AL
         IJJ=2*NT+J
      UXVTF(IJJ)=SUM/AL
      IJK=3*NT+J
      UXVTF(IJK)=UXVTF(IJ)+UXVTF(IJJ)
      WRITE(LW,49)
   49 FORMAT(14X,' TEMPO ',8X,'ONDA DIRETA',5X,'REFLEXO',7X,
     1'TOTAL')
          WRITE(LW,40) UXVTF(J),UXVTF(IJ),UXVTF(IJJ),UXVTF(IJK)
         IF(ITEN.EQ.1)GO TO 18
         ISIG=2
         CALL RIEMAN(U,SUM)
      IJL=4*NT+J
      UXVTF(IJL)=U/AL
      IJM=5*NT+J
      UXVTF(IJM)=SUM/AL
       IJN=6*NT+J
      UXVTF(IJN)=UXVTF(IJL)+UXVTF(IJM)
      WRITE(LW,50)UXVTF(IJL),UXVTF(IJM),UXVTF(IJN)
   18    CONTINUE
      M=3*ITEN+1
      CALL GRAFA(UXVTF,NT,M,TIT,IFOR)
   14   CONTINUE
  100  CONTINUE
      STOP
      END
      SUBROUTINE INPOLA
      DIMENSION PX(4),PY(4),V(4)
      COMMON ISIG,IMAT,IFUNC
      COMMON VU(2),PROP(10),U0,V0,H,AU2(6)
      COMMON CHI(8),PESO(8),A(4,4),U(4),CINT(5,16)
      COMMON C1,C2,VX(8),VY(18),POX(4,8),POY(4,18)
      COMMON LR,LW,NPINT,IA,IB,IC,NR,NS,IE,JFO
      DO 2 I=1,NR
    2 V(I)=U(I)
C     ESTABELECER COEFICIENTES GAUSS
      N=NR
      IF(IA.EQ.1) GO TO 4
      CALL COEFI
      GO TO 5
    4 CALL LOBATO
    5 IF(IC.EQ.1) RETURN
C     COEFICIENTES DE INTERPOLACAO
      DO 15 I=1,IB
      Y=(CHI(I+IA)+1.)/2.
      X=1.-Y
      DO 10 J=1,NR
      PX(J)=POLI(X,N,J,V)
      PY(J)=POLI(Y,N,J,V)
   10 CONTINUE
      DO 15 J=1,NR
      IP=NR*(J-1)
      DO 15 M=1,NR
      IALFA=IP+M
      CINT(I,IALFA)=PX(J)*PY(M)
   15 CONTINUE
      RETURN
      END
      FUNCTION POLI(X,N,J,U)
      DIMENSION U(4)
      POLI=1.
      DO 10 I=1,N
      IF(I.EQ.J) GO TO 10
      POLI = POLI*(X-U(I))/(U(J)-U(I))
   10 CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE COTRI
      DIMENSION V(4)
      COMMON IAU(3),AUX(53),U(4),AU2(80)
      COMMON C1,C2,X(8),Y(18),POX(4,8),POY(4,18)
      COMMON LR,LW,NPINT,IA,IB,IC,NR,NS,IE
      C2=1.5773502692/2.
      C1=1.-C2
      C3=C1**2
      C4=C1*C2
      C5=C2**2
C     VETOR DE RADAU V
      DO 5 I=1,NR
    5 V(I)=U(I)
      N=NR
C     ABCISSAS (TRIANGULO INFERIOR)
      K=0
      DO 10 I=1,NR
      X(K+1)=C1 * U(I)
      X(K+2)=C2 * U(I)
      IF(I.EQ.1) GO TO 10
      X(K+1)=X(K+1)+C2*U(I-1)
      X(K+2)=X(K+2)+C1*U(I-1)
   10 K=K+2
C     VALORES DOS POLINOMIOS NAS ABCISSAS
      DO 12 I=1,NR
      DO 12 J=1,K
   12 POX(I,J)=POLI(X(J),N,I,V)
C     ORDENADAS
      K=0
      UP=0.
      DO 20 I=1,NR
      IF(I.EQ.1) GO TO 15
      HI=U(I-1)-UP
      Y(K+1)=C1*HI+UP
      Y(K+2)=C2*HI+UP
      K=K+2
      UP=U(I-1)
   15 HI=U(I)-UP
      Y(K+1)=UP+ C3 *HI
      Y(K+2)=UP+ C4 *HI
      Y(K+3)=UP+ C5 *HI
   20 K=K+3
C     VALORES DOS POLINOMIOS NAS ORDENADAS
      DO 22 I=1,NR
      DO 22 J=1,K
   22 POY(I,J)=POLI(Y(J),N,I,V)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE RIEMAN(U,SUM)
      DIMENSION W(750),DW(750),PI(750),IP(750)
      COMMON ISIG,IMAT,IFUNC
      COMMON VU(2),PROP(10),UO,VO,H
      COMMON X1,X2,CHIA,CHIB,CHIC,ETAO
      COMMON CHI(8),PESO(8),CRADO(4,4),PRADO(4),CINT(5,16)
      COMMON C1,C2,VX(8),VY(18),POX(4,8),POY(4,18)
      COMMON LR,LW,NPINT,IA,IB,IC,NR,NS,IE,JFO
C     ESTA SUBROTINA PERMITE O CALCULO DA FORMA DA ONDA
C     U NO PONTO (CHIO,ETAO);AS VARIAVEIS CHI CORRESPONDEM
C     AOS PONTOS DE INTEGRACAO DE GAUSS(IA=0)OU LOBATTO
C     (IA=1), COM IB PONTOS INTERIORES. QUANDO IB =0,A
C     INTEGRACAO E FEITA POR TRAPEZIOS, O QUE TAMBEM OCORRE
C     NOS INTERVALOS MUITO PEQUENOS
C     ***
C     FRENTES DE ONDA
C     ***
      U=0
      SUM=0.
      IF(JFO.GE.1) GO TO 55
      X=CHIO
      CALL UFUNC(X,X,1)
      U=U+0.5*VU(1)
      X=ETAO
      CALL UFUNC(X,X,1)
      U=U+0.5*VU(1)
C     A SOLUCAO ATE AQUI CONTEM APENAS A ONDA DIRETA.
C     ***
C     DETERMINACAO DO INTERVALO REAL DE INTEGRACAO.
C     ***
   55 XI=CHIA
      XF=CHIB
      IF(ETAO.GE.CHIB) RETURN
      IF(CHIC.LE.CHIA) RETURN
      IF(CHIC.LT.CHIB) XF=CHIC
      IF(ETAO.GT.CHIA) XI=ETAO
C     ***
C     FUNCAO DE RIEMANN
C     ***
      CALL VOLTRA(U,SUM,XI,XF,W,DW,PI,IP,NP)
```

```
       IF(JFO.GE.1) RETURN
      IF(IE.GE.1) WRITE(LW,50)NP,(PI(I),W(I),DW(I),I=1,NP)
   50 FORMAT(/5X,I3,' PONTOS DE INTEGRACAO',10X,'RIEMANN',8X,
     1'DERIVADAS',30(/12X,3(2X,F15.7)))
      I=1  ; J=1
      IF(IB.EQ.0) GO TO 30
C     ***
C     INTEGRACAO POR GAUSS OU LOBATTO
C     ***
      KK=IB+2
    5 IF(I.GE.NP) GO TO 45
      IF(I.EQ.IP(J)) GO TO 25
      HI=PI(I+IB+1)-PI(I)
      IF(IA.EQ.1) GO TO 15
C     ***
C     GAUSS
C     ***
      DO 10 IJ=1,IB
      X=PI(I+IJ)
      CALL UFUNC(X,X,2)
   10 SUM=SUM+(W(I+IJ)*VU(2)-VU(1)*DW(I+IJ))*PESO(IJ)*HI/4.
      I=I+IB+1
      GO TO 5
C     ***
C     LOBATTO
C     ***
   15 I=I-1
      DO 20 IJ=1,KK
      X=PI(I+IJ)
      CALL UFUNC(X,X,2)
   20 SUM=SUM+(W(I+IJ)*VU(2)-VU(1)*DW(I+IJ))*PESO(IJ)*HI/4.
      I=I+KK
      GO TO 5
C     INTEGRACAO PARA PASSO PEQUENO(TRAPEZIO ISOLADO)
   25 K=0
      J=J+1
      HI=PI(I+1)-PI(I)
   26 X=PI(I)
      CALL UFUNC(X,X,2)
      SUM=SUM+(W(I)*VU(2)-VU(1)*DW(I))*HI/4.
      IF(K.EQ.1) GO TO 5
      K=1
      I=I+1
      GO TO 26
C     ***
C     TRAPEZIO
C     ***
   30 X=PI(I)
      CALL UFUNC(X,X,2)
      SUM=SUM+(W(1)*VU(2)-VU(1)*DW(1))*(PI(2)-PI(1))/4.
      IF(NP.EQ.2) GO TO 40
      K=NP-1
      DO 35 I=2,K
      X=PI(I)
      CALL UFUNC(X,X,2)
   35 SUM=SUM+(W(I)*VU(2)-VU(1)*DW(I))*(PI(I+1)-PI(I-1))/4.
   40 X=PI(NP)
      CALL UFUNC(X,X,2)
      SUM=SUM+(W(NP)*VU(2)-VU(1)*DW(NP))*(PI(NP)-PI(NP-1))/4.
   45 RETURN
      END
      SUBROUTINE VOLTRA(Z,SUM,X1,X2,W,DW,PI,IP,NP)
      DIMENSION W(750),DW(750),PI(750),IP(750)
      DIMENSION HX(800),HT(800),AX(800),AT(800),V(10)
      DIMENSION XMAT(16,16),Y(16),VI(16),WI(3000),DWI(3000)
      DIMENSION WL(4),DWL(4),DWC(16),DWE(16)
      DIMENSION DEMAX(16,16),DEMAT(16,16)
      COMMON ISIG,IMAT,IFUNC
      COMMON VU(2),P(10),UO,VO,H
      COMMON XA,XB,CHIA,CHIB,CHIO,ETAO
      COMMON CHI(8),PESO(8),A(4,4),U(4),CINT(5,16)
      COMMON C1,C2,VX(8),VY(18),POX(4,8),POY(4,18)
      COMMON LR,LW,NPINT,IA,IB,IC,NR,NS,IE,JFO
C     ***
C     PREPARAR PARA DIVIDIR DOMINIO
C     ***
      V(1)=CHIO
      V(2)=ETAO
      V(3)=P(5)
      V(4)=P(6)
      V(5)=X1
      V(6)=X2
      IF(IFUNC.NE.2) GO TO 3
      XM=(XA+XB)/2.
      XM=TAU(XM)
      IF((XM-X1)*(XM-X2))2,3,3
    2 NX=7
      V(7)=XM
      GO TO 4
    3 NX=6
C     ***
C     DIVISAO DO DOMINIO
C     ***
    4 CALL DITRI(V,AX,AT,NX,NT,I1,I2,IP,NP,PI)
C     PREPARACAO DOS ACUMULADORES E RESULTADOS
C     HOMOGENEOS PASSOS DE INTEGRACAO
      NMAX=NX
      IF(NT.GT.NX) NMAX=NT
      NO=NMAX*NR
      DO 5 I=1,NP
      W(I)=1.
      OW(I)=0.
    5 CONTINUE
      DO 6 I=1,NO
      WI(I)=1.
      DWI(I)=0.
    6 CONTINUE
      DO 7 I=1,NMAX
      HX(I)=AX(I+1)-AX(I)
      HT(I)=AT(I+1)-AT(I)
    7 CONTINUE
       IF(IE.GT.2)WRITE(LW,333)(V(I),I=1,7),I1,I2,NP,NX,NT,
     1(IP(I),I=1,NP)
  333 FORMAT(/2X,'DITRI',7(2X,F10.5),/,2X,'INDICES',5(2X,I3),/
     12X,'INICIAIS:'2(/2X,15(2X,I3)))
       IF(IE.GT.2)WRITE(LW,444)(AX(I),HX(I),I=1,NX)
  444 FORMAT(/2X,'PONTO/PASSO X:',8(/5X,4(F10.5,2X,F10.5,5X)))
       IF(IE.GT.2)WRITE(LW,555)(AT(I),HT(I),I=1,NT)
  555 FORMAT(/2X,'PONTO/PASSO T:',8(/5X,4(F10.5,2X,F10.5,5X)))
      IF(I1*I2.GT.0.AND.JFO.EQ.0) RETURN
C     PREPARAR INTEGRACAO
      VA=1. ; NX1=NX-1;  NT1=NT-1
      IFA=0 ; DA=0.
      IF(IP(1).NE.1.AND.IA.EQ.0)GO TO 10
      IF(ABS(AT(1)-X1).GT. 1.E-06) GO TO 10
    8 DO 9 I=1,NX1
      DO 9 J=1,NR
      XIJ=AX(I)+U(J)*HX(I)
    9 DA=DA+A(NR,J)*XKER(XIJ,X1)*HX(I)
      DWL(NR)=DA
C     VARREDURA DE INTEGRACAO
   10 DO 200 L=1,NT1
      HL=HT(L)
      TL=AT(L)
C     FAIXA MORTA?
      IF(ABS(TL-X1).LE. 1.E-06) GO TO 15
      IF(TL-X1)12,15,20
   12 IFA=1
      GO TO 22
   15 IFA=0
      IW=1
      IIP=1
      W(1)=WI(NX1*NR)
      DW(1)=DWI(NX1*NR) - DWL(NR)
      IF(IC.EQ.0)NX1=NX1+1
   20 NX1=NX1-1
      ITRA=0
      IF(IP(IIP).EQ.IW.AND.IC.EQ.0)ITRA=1
      IF(ITRA.EQ.1.AND.ITRO.EQ.0)NX1=NX1-1
      IF(ITRA.EQ.0.AND.ITRO.EQ.1)NX1=NX1+1
       ITRO=ITRA
C     INICIALIZAR A DIREITA DA FAIXA
   22 DO 25 I=1,NR
      WL(I)=1.
   25 DWL(I)=0.
       VA=1.
C     VARREDURA HORIZONTAL
      IF(NX1.EQ.0)GO TO 200
      DO 100 I=1,NX1
      XI=AX(I)
      IX=NR*(I-1)
      HI=HX(I)
C     VERIFICAR POSICAO DO ELEMENTO
C     PREENCHER COEFICIENTES DE INTEGRACAO
      ETA=2.*P(5)-XI
      IF(ABS(TL-ETA)-1.E-06)31,31,26
   26 IF(TL-ETA)30,31,32
   30 IEL=2
      GO TO 40
   31 IEL=1
      CALL MATRA(XMAT,HI,HL,XI,TL,DEMAX,DEMAT)
      GO TO 40
   32 ETA=2*P(6)-XI
      IF(ABS(ETA-TL)-1.E-06)34,34,27
   27 IF(ETA-TL)33,34,35
   33 IEL=2
      GO TO 40
   34 IEL=-1
      CALL MATRI(XMAT,HI,HL,XI,TL,DEMAX,DEMAT)
      GO TO 40
   35 IEL=0
```

```
      CALL MAQUA(XMAT,HI,HL,XI,TL,DEMAX,DEMAT)
C     VETOR INDEPENDENTE
C     (SOLUCAO, PARA IEL=2)
   40 CONTINUE
      IF(IE.GE.2)WRITE(LW,222)IEL,HI,HL
  222 FORMAT(2X,'ELEMENTO',I3,2X,'LADOS',2(2X,F15.7))
      IF(IE.LE.3) GO TO 74
      WRITE(LW,111)((XMAT(K1,K2),K2=1,NS),K1=1,NS)
  111 FORMAT(5X,'MATRIZ DO ELEMENTO', 9(/, 9(2X,F10.5)))
   74 DO 75 J=1,NR
      IJ=IX+J
      DO 75 M=1,NR
      IALFA=NR*(J-1)+M
      VI(IALFA)=WL(M)+WI(IJ)-VA
      DWC(IALFA)=DWI(IJ)
      DWE(IALFA)=DWL(M)
      IF(IEL.NE.2) GO TO 75
      Y(IALFA)=VI(IALFA)
   75 CONTINUE
      IF(IEL.EQ.2) GO TO 90
C     RESOLUCAO DOS SISTEMA LINEAR
      N=NS
      CALL REGA(XMAT,VI,Y,N)
C     CALCULO DAS DERIVADAS POR INTEGRACAO
C
      DO 80 IALFA=1,NS
      DO 80 IBET=1,NS
      DWC(IALFA)=DWC(IALFA)+DEMAX(IALFA,IBET)*Y(IBET)
      DWE(IALFA)=DWE(IALFA)+DEMAT(IALFA,IBET)*Y(IBET)
   80 CONTINUE
C     TRANSCRICAO DOS RESULTADOS
   90 VA=WI(IX+NR)
      DA=DWL(NR)
       IF(IE.GT.2)WRITE(LW,91)(Y(J),J=1,NS)
   91 FORMAT(5X,'SOLUCAO NO ELEMENTO',4(/5(2X,F10.5)))
       IF(IE.GT.2)WRITE(LW,92)(WI(IX+J),WL(J),J=1,NR)
   92 FORMAT(5X,'CONDICOES DE CONTORNO',2(/2(5X,2(2X,F10.5))))
      DO 95 J=1,NR
      IJ=IX+J
      IALFA=J*NR
      WI(IJ)=Y(IALFA)
      DWI(IJ)=DWC(IALFA)
      IALFA=NR*(NR-1)+J
      WL(J)=Y(IALFA)
      DWL(J)=DWE(IALFA)
   95 CONTINUE
      IF(JFG.GE.1) CALL FORCA(Z,SUM,Y,HI,HL,XI,TL)
  100 CONTINUE
      IF(IFA.EQ.1)GO TO 200
      IF(IP(IIP).EQ.IW) GO TO 115
      IF(IC.EQ.1.OR.IB.EQ.0)GO TO 120
C     INTERPOLACAO
      DO 110 I=1,IB
      IW=IW+1; W(IW)=0.
      DW(IW)=0.
      DO 110 IALFA=1,NS
      W(IW)=CINT(I,IALFA)*Y(IALFA)+W(IW)
      DW(IW)=CINT(I,IALFA)*(DWC(IALFA)-DWE(IALFA))+DW(IW)
  110 CONTINUE
      GO TO 125
  115 IIP=IIP+1
  120 IW=IW+1
      W(IW)=WI(IX+NR)
      DW(IW)=DWI(IX+NR)-DWL(NR)
      GO TO 200
  125 IF(IX.EQ.0) GO TO 200
      IW=IW+1
      W(IW)=WI(IX)
      DW(IW)=DWI(IX)-DA
  200 CONTINUE
C     VERIFICAR VALOR FINAL
      IF(IW.EQ.NP) GO TO 210
      DA=0.
      W(NP)=1.
      DO 205 L=1,NT1
      DO 205 M=1,NR
      TLM=AT(L)+U(M)*HT(L)
      DA=DA+A(NR,M)*XKER(X2,TLM)*HT(L)
  205 CONTINUE
      DW(NP)=DA
  210 RETURN
      END
      SUBROUTINE DITRI(V,HX,HY,M,N,I1,I2,IP,NP,PI)
      DIMENSION V(10),HX(800),HY(800),VX1(800),VX2(800),VY1(800)
      DIMENSION VY2(800),IP(750),PI(750)
      COMMON ISIG,IMAT,IFUNC
      COMMON VU(2),PROP(10),UO,VO,H
      COMMON XA,XB,CHIA,CHIB,CHIC,ETAO
      COMMON CHI(8),PESO(8),CRADC(4,4),PRADC(4),CINT(5,16)
      COMMON C1,C2,VX(8),VY(18),PCX(4,8),PGY(4,18)
      COMMON LR,LW,NPINT,IA,IB,IC,NR,NS,IE,JFO
C     DIVIDE O DOMINIO DE DEPENDENCIA
C     ***
C     PREPARACAL
C     ***
      J=M; KX=0
      M=2 ; N=2
      HX(1)=V(1); HX(2)=V(5)
      HY(1)=V(2) ; HY(2)=V(6)
      A6=2.*V(3); A7=2.*V(4)
      A1=A7-V(5)
      A2=A6-V(1)
      A3=A6-V(5)
      A4=A7-V(1)
      A5=A7-V(2)
C     ***
C     DEFINICAO DO DOMINIO
C     ***
      IF(A1-V(2))1,1,2
    1 I1=1
      I2=1
      GO TO 17
    2 IF(A2-V(6))4,3,3
    3 I1=-1
      I2=-1
      GO TO 17
    4 IF(A3-V(2))5,5,6
    5 I1=1
      GO TO 9
    6 I1=0
      IF(JFO.GT.0) GO TO 9
      IF(A2-V(2))9,9,7
```

```
  7 HY(1)=A2
    IF(A2-V(5)+1.E-06)9,9,8
  8 HY(1)=V(5)
  9 IF(A4-V(6))11,10,10
 10 I2=-1
    GO TO 14
 11 I2=0
    IF(JFG.GT.0) GO TO 14
    IF(A5-V(1))12,14,14
 12 HX(1)=A5
    IF(A5-V(6)-1.E-06)13,14,14
 13 HX(1)=V(6)
C   ***
C   INCLUSAO DAS DESCONTINUIDADES
C   ***
 14 DO 16 I=3,J
    IF((V(I)-HX(M))*(V(I)-HY(N)))15,15,16
 15 X=V(I)
    CALL INSER(X,HX,M)
    CALL INSER(X,HY,N)
 16 CONTINUE
    XMA=HX(1); XMI=HX(M)
    YMA=HY(N); YMI=HY(1)
 17 IF(I1*I2)57,18,29
 29 IF(JFG.GT.0) GO TO 57
    GO TO 69
C   ***
C   CICLO DE INTERSECOES
C   ***
 18 DO 19 I=1,M
    VX1(I)=HX(I)
 19 VX2(I)=HX(I)
    DO 20 I=1,N
    VY1(I)=HY(I)
 20 VY2(I)=HY(I)
    NX=M ; NY=N ; IU=1
 21 KX1=1
    KX2=1; KY1=1
    KY2=1
    JX1=NX; JX2=NX
```

```
      JY1=NY ; JY2=NY
C     RETA R1
   22 IN=0
      IF(I1.NE.0) GO TO 35
      IF(JX2.LT.KX2) GO TO 30
      IN=1
      DO 28 I=KX2,JX2
      X=A6-VX2(I)
      T=VX2(I)-X
      IF(T)28,28,25
   25 IF((X-YMI)*(X-YMA))26,28,28
   26 JY1=JY1+1
      VY1(JY1)=X
      IF((X-XMI)*(X-XMA))27,28,28
   27 JX1=JX1+1
      VX1(JX1)=X
   28 CONTINUE
      KX2=I
   30 IF(JY2.LT.KY2) GO TO 35
      IN=1
      DO 34 I=KY2,JY2
      X=A6-VY2(I)
      T=X-VY2(I)
      IF(T)34,34,31
   31 IF((X-XMI)*(X-XMA))32,34,34
   32 JX1=JX1+1
      VX1(JX1)=X
      IF((X-YMI)*(X-YMA))33,34,34
   33 JY1=JY1+1
      VY1(JY1)=X
   34 CONTINUE
      KY2=I
C     RETA R2
   35 IF(I2.NE.0)GO TO 45
      IF(JX1.LT.KX1) GO TO 40
      IN=1
      DO 39 I=KX1,JX1
      X=A7-VX1(I)
      T=VX1(I)-X
      IF(T)39,39,36
   36 IF((X-YMI)*(X-YMA))37,39,39
   37 JY2=JY2+1
      VY2(JY2)=X
      IF((X-XMI)*(X-XMA))38,39,39
   38 JX2=JX2+1
      VX2(JX2)=X
   39 CONTINUE
      KX1=I
   40 IF(JY1.LT.KY1) GO TO 45
      IN=1
      DO 44 I=KY1,JY1
      X=A7-VY1(I)
      T=X-VY1(I)
      IF(T)44,44,41
   41 IF((X-XMI)*(X-XMA))42,44,44
   42 JX2=JX2+1
      VX2(JX2)=X
      IF((X-YMI)*(X-YMA))43,44,44
   43 JY2=JY2+1
      VY2(JY2)=X
   44 CONTINUE
      KY1=I
   45 IF(IN.EQ.1) GO TO 22
C     ***
C     INSERCAO DOS NOVOS VALORES X
C     ***
      IF(JX1.LE.NX) GO TO 47
      J=NX+1
      DO 46 I=J,JX1
      X=VX1(I)
      CALL INSER(X,HX,M)
   46 CONTINUE
   47 IF(JX2.LE.NX) GO TO 49
      J=NX+1
      DO 48 I=J,JX2
      X=VX2(I)
      CALL INSER(X,HX,M)
   48 CONTINUE
   49 IF(M.LE.750) GO TO 51
   50 WRITE(LW,90)IU,M
```

```
      STOP
C     ***
C     INSERCAO DOS NOVOS VALORES Y
C     ***
   51 IF(JY1.LE.NY) GO TO 53
      J=NY+1
      DO 52 I=J,JY1
      X=VY1(I)
      CALL INSER(X,HY,N)
   52 CONTINUE
   53 IF(JY2.LE.NY) GO TO 55
      J=NY+1
      DO 54 I=J,JY2
      X=VY2(I)
      CALL INSER(X,HY,N)
   54 CONTINUE
   55 IF(N.LE.750) GO TO 57
   56 WRITE(LW,100)IU,N
      STOP
C     ***
C     REFINAMENTO DA MALHA
C     ***
   57 IU=2
C     **
C     EM X
C     **
      NX=0
      DO 59 I=2,M
      X=HX(I)-HX(I-1)
      L=ABS(X/H)
      IF(L.EQ.0) GO TO 59
      DO 59 J=1,L
      NY=NX+1
      VX1(NX)=HX(I-1)+(J*X)/(L+1)
   59 CONTINUE
   60 IF(NX.LE.0) GO TO 62
      DO 61 I=1,NX
      X=VX1(I)
      CALL INSER(X,HX,M)
   61 CONTINUE
```

```
      IF(M.GT.750) GO TO 56
   62 IF(IU.NE.2) GO TO 83
      NY=0
      DO 65 I=2,N
      X=HY(I)-HY(I-1)
      L=ABS(X/H)
      IF(L.EQ.0) GO TO 65
      DO 65 J=1,L
      NY=NY+1
      VY1(NY)=HY(I-1)+(J*X)/(L+1)
   65 CONTINUE
   66.IF(NY.LE.0) GO TO 68
      DO 67 I=1,NY
      X=VY1(I)
      CALL INSER(X,HY,N)
   67 CONTINUE
      IF(N.GT.750) GO TO 56
   68 IF(IU.EQ.2) GO TO 70
   69 RETURN
C     ***
C     *REDIVISAO PARA INTEGRAL DE LINHA
C     ***
   70 NP=0
      IF(IB.NE.4) GO TO 73
      DO 71 I=1,M
      X=HX(M-I+1)
      IF(X.GT.V(5)) GO TO 72
      NP=NP+1
      PI(NP)=X
   71 CONTINUE
   72 RETURN
C     ***
C     PONTOS INTERIORES
C     ***
   73 NX=0
      IU=3
      NA=0
      MM1=M-1
      II=1
      DO 82 I=1,MM1
      GO TO (74,75),II
   74 NP=NP+1
      PI(NP)=HX(M-I+1)
   75 X=HX(M-I)-HX(M-I+1)
      IF(HX(M-I).GT.V(6))II=2
      IF(X-H/10.)76,76,78
   76 GO TO (77,82),II
   77 NA=NA+1
      IP(NA)=NP
      GO TO 82
   78 Y=(HX(M-I+1)+HX(M-I))/2.
      X=X/2.
      IF(IC.EQ.0.AND.II.EQ.2) GO TO 82
      DO 81 J=1,IB
      P=Y+CHI(J+IA)*X
      IF(IC.EQ.0) GO TO 79
      NX=NX+1
      VX1(NX)=P
   79 GO TO (80,81),II
   80 NP=NP+1
      PI(NP)=P
   81 CONTINUE
   82 CONTINUE
      IF(II.EQ.2)GO TO 60
      NP=NP+1
      PI(NP)=HX(1)
      GO TO 60
   83 IF(IC.EQ.0) RETURN
      NY=0
      DO 85 I=2,N
      X=HY(I)-HY(I-1)
      IF(X-H/10.)85,85,84
   84 X=X/2.
      Y=(HY(I)+HY(I-1))/2.
      DO 85 J=1,IB
      NY=NY+1
      VY1(NY)=Y+CHI(J+IA)*X
   85 CONTINUE
      GO TO 66
   90 FORMAT('EXCESSO EM X:',I3,'/',I3,'PONTOS')
  100 FORMAT('EXCESSO EM Y:',I3,'/',I3,'PONTOS')
      END
      SUBROUTINE MAQUA(XMAT,HI,HL,XI,TL,DEMAX,DEMAT)
      DIMENSION XMAT(16,16),DEMAX(16,16),DEMAT(16,16)
      COMMON ISIG,IMAT,IFUNC
      COMMON VU(2),PROP(10),UC,VC,H
      COMMON XA,XB,CHIA,CHIB,CHIC,ETAC
      COMMON CHI(8),PESO(8),A(4,4),U(4),CINT(5,16)
      COMMON C1,C2,VX(8),VY(16),POX(4,8),POY(4,16)
      COMMON LR,LW,NPINT,IA,IB,IC,NR,NS,IE,JFO
      AREA=HI*HL
      DO 50 IR=1,NR
      XIR=XI+U(IR)*HI
      DO 50 LS=1,NR
      TLS=TL+U(LS)*HL
      IBETA=NR*(IR-1)+LS
      X=XKER(XIR,TLS)
      DO 50 J=1,NR
      DO 50 M=1,NR
      IALFA=NR*(J-1)+M
      XMAT(IALFA,IBETA)=-A(J,IR)*A(M,LS)*X*AREA
C     MATRIZ PARA DERIVADA EM CSI
      IF(J.NE.IR) GO TO 10
      DEMAX(IALFA,IBETA)=A(M,LS)*X*HL
      GO TO 15
   10 DEMAX(IALFA,IBETA)=0.
C     MATRIZ PARA DERIVADA EM ETA
   15 IF(M.NE.LS) GO TO 20
      DEMAT(IALFA,IBETA)=A(J,IR)*X*HI
        GO TO 50
   20 DEMAT(IALFA,IBETA)=0.
   50 CONTINUE
      DO 55 I=1,NS
      XMAT(I,I)=XMAT(I,I)+1.
   55 CONTINUE
   25 RETURN
      END
      ITA=IBE+IS
C     DERIVADAS
         DX(IFA,ITA)=0.
         DT(IFA,ITA)=0.
      IF(IR.NE.J) GO TO 15
         DX(IFA,ITA)=(XK5*POY(IS,IY-1)+XK6*POY(IS,IY))
     *   *YLA/2.
      IF(M.EQ.1) GO TO 15
      DX(IFA,ITA)= DX(IFA,ITA)+ DX(IFA-1,ITA)
   15 IF(IS.NE.M) GO TO 16
         DT(IFA,ITA)=-(XK7*POX(IR,IX-1)+XK8*POX(IR,IX))
     *   *XLA/2. + DT(IFA-NR,ITA)
C     MATRIZ DO SISTEMA(I,L)
   16    B(IFA,ITA)=((XK1*POX(IR,IX-1)+XK3*POX(IR,IX))*POY(IS
     1,IY-1)+(XK2*POX(IR,IX-1)+XK4*POX(IR,IX))* POY(IS,IY))*
     2AREA/4.
         B(IFA,ITA)= B(IFA,ITA)+ B(IFA-NR,ITA)
      IF(M.EQ.1) GO TO 20
      IA1=IFA-1
      B(IFA,ITA)= B(IFA,ITA)+ B(IA1,ITA) -B(IA1-NR,ITA)
   20 CONTINUE
C     TRIANGULOS
   25 IY=5*J-3
      Y1=Y(IY-1)*HL+TL
      Y2=Y(IY)*HL+TL
      Y3=Y(IY+1)*HL+TL
      Y4=X(IX-1)*HL+TL
      Y5=X(IX)*HL+TL
      IFA=IAL+J
      XK1=XKER(X1,Y1)
      XK2=XKER(X1,Y2)
      XK3=XKER(X2,Y2)
      XK4=XKER(X2,Y3)
      XK5=XKER(X0,Y4)
      XK6=XKER(X0,Y5)
      YLA=(U(J)-UP)*HL
      AREA=YLA*XLA
      DO 30 IR=1,NR
      IBE=NR*(IR-1)
      DO 30 IS=1,NR
      SUBROUTINE MATRI(B,HI,HL,XI,TL,DX,DT)
      DIMENSION B(16,16),DX(16,16),DT(16,16)
      COMMON ISIG,IMAT,IFUNC
      COMMON VU(2),PROP(10),UO,VO,H
      COMMON XA,XB,CHIA,CHIB,CHIC,ETAC
      COMMON CHI(8),PESO(8),A(4,4),U(4),CINT(5,16)
      COMMON C1,C2,X(8),Y(15),PCX(4,3),PCY(4,18)
      COMMON LR,LK,NPINT,IA,IB,IC,NR,NS,IE,JFG
C     INTEGRA ELEMENTO TRIANGULAR INFERIOR
      DO 30 J=1,NS
      IX=2*J
      X1=XI+X(IX-1)*HI
      X2=XI+X(IX)*HI
      XO=XI+U(J)*HI
      IAL=NR*(J-1)
      UP=0.
      IF(J.EQ.1) GO TO 25
C     RETANGULOS
      JM1=J-1
      XLA=-(U(J)-U(J-1))*HI
      DO 20 M=1,JM1
      IFA=IAL+M
      IY=5*M
      Y1=Y(IY-1)*HL+TL
      Y2=Y(IY)*HL+TL
      YO=U(M)*HL+TL
      XK1=XKER(X1,Y1)
      XK2=XKER(X1,Y2)
      XK3=XKER(X2,Y1)
      XK4=XKER(X2,Y2)
      XK5=XKER(XO,Y1)
      XK6=XKER(XO,Y2)
      XK7=XKER(X1,YO)
      XK8=XKER(X2,YO)
      YLA=(U(M)-UP)*HL
      AREA=XLA*YLA
      UP=U(M)
      DO 20 IR=1,NR
      IBE=NR*(IR-1)
      DO 20 IS=1,NR
      ITA=IBE+IS
C     DERIVADAS
         DX(IFA,ITA)=0.
         DT(IFA,ITA)=0.
      IF(IR.NE.J) GO TO 27
       DX(IFA,ITA)=(XK5*POX(IS,IX-1)+XK6*POX(IS,IX))*YLA/2.
      IF(J.EQ.1) GO TO 27
         DX(IFA,ITA)= DX(IFA,ITA)+DX(IFA-1,ITA)
   27 B(IFA,ITA)=((XK1*POY(IS,IY-1)+XK2*POY(IS,IY))+C1*POX(IR
C     MATRIZ DO SISTEMA(I,L)
     1,IX-1)+(XK3*POY(IS,IY)+XK4*POY(IS,IY+1))*C2*POX(IR,IX))
     2*AREA/4.
      IF(J.EQ.1) GO TO 28
      B(IFA,ITA)=B(IFA,ITA)+B(IFA-1,ITA)
   28 IF(J.EQ.NR) GO TO 30
      JM1=J+1
C     ELEMENTOS NULOS
      DO 30 M=JM1,NR
      IFO=IAL+M
      DX(IFO,ITA)=DX(IFA,ITA)
      DT(IFO,ITA)=0.
      B(IFO,ITA)=B(IFA,ITA)
   30 CONTINUE
      DO 35 I=1,NS
      B(I,I)=B(I,I)+1.
   35 CONTINUE
      RETURN
      END
```

DE - Leuza

PARA - Ferro

COPPE/UFRJ

DATA 22/3/79

○ opinar
○ providenciar
○ encaminhar
○ elaborar
○ conferir
○ despachar
○ comentar
○ arquivar

○ assinar
○ aprovar
○ julgar
○ comparecer
○ responder
○ devolver
○ circular
○ anexar

○ conforme nosso entendimento
○ conforme seu pedido
○ recado com ___________
○ não deixou recado
○ comunicar-se com ________
○ só para informação
○ URGENTE
○ VIDE VERSO

Por favor mandar tese de

- Zindeluk, Moyses.

" O método de Riemann na Propagação de Ondas Planas em Meios Elásticos Inomogeneos."

Obrigado

Leuza

TESE DOUTORADO