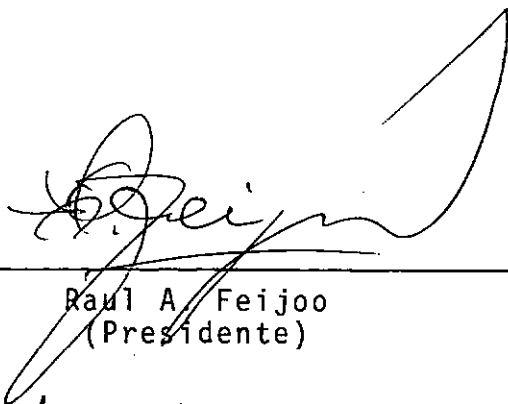


SOLUÇÕES NUMÉRICAS VIA MÉTODOS VARIACIONAIS DE
PROBLEMAS EM TERMOELASTICIDADE DINÂMICA ACOPLADA

Zeferino Antonio da Fonseca Lopez

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:



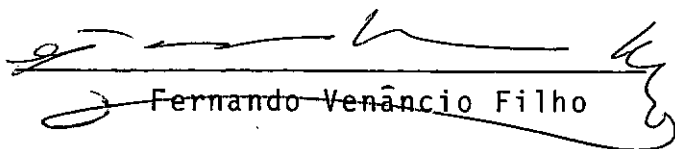
Raul A. Feijoo
(Presidente)



Luiz Bevilacqua



Luiz Carlos Martins



Fernando Venâncio Filho

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1977

A mi esposa
A mis padres
A mi hija.

AGRADECIMIENTO

Deseo expresar mi agradecimiento al profesor Raul Feijoo por la sugerencia del tema, así como también por la orientación y colaboración que prestó durante todo el desarrollo del presente trabajo.

Al profesor Luiz Bevilacqua por las enseñanzas impartidas en los cursos dictados en COPPE.

A mis compañeros de estudio por el estímulo dado durante la realización del presente trabajo.

Finalmente, quiero agradecer a quienes dedico este trabajo por el sacrificio, dedicación y constante colaboración que tuvieron en esta importante etapa de mi vida.

Zeferino A. da Fonseca Lopez

COPPE/UFRJ

Diciembre de 1977

RÉSUMEN

Se presenta en este trabajo una formulación variacional, equivalente al problema de valor inicial y de contorno, correspondiente a la teoría lineal de la termoelasticidad dinámica acoplada, en materiales conductores de calor, homogéneos e isotrópicos.

Para la obtención de las soluciones aproximadas, se propone un algoritmo numérico desarrollándose su implementación con el Método de los Elementos Finitos.

Por último, se presentan algunos resultados numéricos a los efectos de verificar la eficiencia del algoritmo propuesto.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma formulação variacional, equivalente ao problema de valor inicial e de contorno, correspondente à teoria linear da termoelasticidade dinâmica acoplada, em materiais condutores de calor, homogêneos e isotrópicos.

Para a obtenção das soluções aproximadas, propõe-se um algoritmo numérico desenvolvendo-se sua implementação com o Método dos Elementos Finitos.

Por último, apresentam-se alguns resultados numéricos a fim de verificar a eficiência do algoritmo proposto.

ABSTRACT

In this work, a variational formulation of the initial and boundary value problem, corresponding to the linear theory of coupled dynamic thermoelasticity in homogeneous isotropic heat-conducting materials, is presented.

To obtain approximate solutions, a numerical algorithm was developed and implemented using the Finite Elements Method.

Finally, some numerical results are presented to show the efficiency of the proposed algorithm.

INDICE

	<u>PAG.</u>
INTRODUCCION	1
CAPITULO I : PRINCIPIOS MECANICOS Y TERMODINAMICOS	3
1.1. Conservación de la Masa	4
1.2. Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal y Angular	5
1.3. Conservación de la Energía (Primera Ley de la Termodinamica)	6
1.4. Desigualdad de Clausius-Duhem	8
1.5. Materiales Elásticos	10
1.6. Principio de Indiferencia del Observador	13
1.7. Consecuencias de la Inecuación de Conducción de Calor	16
1.8. Teoria Lineal de la Termoelasticidad...	17
1.9. Isotropia	23
CAPITULO II . TERMOELASTICIDAD DINAMICA ACOPLADA	25
2.1. Ecuaciones Básicas	25
2.2. Formulación Variacional	27
2.3. Esquema Numérico	30
CAPITULO III. FUNCIONES DE INTERPOLACION	34
3.1. Funciones de Aproximación	34
3.2. Elemento Isoparamétrico Cuadrático	38

	<u>PAG.</u>
CAPITULO IV. RESULTADOS NUMERICOS	42
4.1. Formulaci3n del Problema	43
CAPITULO V. CONCLUSIONES	59
BIBLIOGRAFIA	60
NOMENCLATURA	63
APENDICE A. RESULTADOS NUMERICOS CORRESPONDIENTES AL SE- GUNDO PROBLEMA DE DANILOVSKAYA (CONVECCI3N), H = 0,50	65

INTRODUCCION

La aplicación de métodos variacionales tanto para el desarrollo de la teoría, como para la obtención de soluciones aproximadas del problema de valor inicial y de contorno en termoelasticidad acoplada, se inicia con el trabajo pionero de BIOT [27] en 1956. Posteriormente numerosos autores contribuyeron al desenvolvimiento de esta nueva area de investigación [1], [2], [19], [20], [21], donde existe a su vez una extensa bibliografía al respecto.

El objetivo de este trabajo es presentar una formulación variacional conjuntamente con un algoritmo numérico, que ha de permitir determinar, en forma aproximada, el campo de desplazamientos, tensiones y temperatura en un cuerpo material termoelástico, isotrópico, homogéneo, cuando sometido a la acción de efectos mecánicos y térmicos.

Desde que toda la formulación variacional está fundamentada en la teoría lineal de la termoelasticidad acoplada, se ha creído conveniente presentar en el Capítulo I un breve resumen de dicha teoría. Para un estudio más detallado consúltese [1].

En el Capítulo II se plantea una formulación variacional equivalente al problema de valor inicial y de contorno de finido en el capítulo anterior. Se propone a su vez, un algoritmo numérico que permitirá la obtención de soluciones aproximadas del problema variacional establecido. Puede demostrarse [16], [17], [26], que este algoritmo es convergente e incondicionalmente estable.

En el Capítulo III, se detalla la implementación del Método de los Elementos Finitos, con el algoritmo numérico propuesto. La construcción del espacio de aproximación, a través del Método de los Elementos Finitos, es analizada para el caso de elementos isoparamétricos cuadráticos.

Por último, en el Capítulo IV, son presentados algunos resultados numéricos con el objetivo de mostrar la eficiencia del algoritmo numérico.

CAPITULO IPRINCIPIOS MECANICOS Y TERMODINAMICOS

La teoria de la termoelasticidad estudia el equilibrio de cuerpos, tratados como sistemas termodinámicos, cuya interacción con el medio ambiente está limitada al trabajo mecánico, fuerzas externas e intercambio de calor.

Así, en todo proceso termomecánico, se deben verificar cinco ecuaciones básicas que definen los siguientes principios:

- a) Conservación de la Masa
- b) Conservación de la cantidad de Movimiento Lineal
- c) Conservación de la cantidad de Movimiento Angular
- d) Conservación de la Energía
- e) Segunda Ley de la Termodinámica

Antes de entrar en la formulación de tales principios, considérese un cuerpo B , cuyos elementos \bar{X} , serán llamados puntos materiales. Para cada instante de tiempo t , estos puntos tienen una posición en el espacio:

$$x = p_t(\bar{X}) \quad \text{o} \quad x = p(\bar{X}, t)$$

ocupando una cierta región $B_t \subset \mathbb{R}^3$, que será llamada, configuración de B en el instante t . Para cada t , la aplicación $p_t: B \rightarrow B_t$ se supone biyectiva.

Por otro lado, la masa m , induce en \mathbb{R}^3 para cada t , una medida que se asume completamente continua sobre B_t , existien

do así, una densidad de masa ρ . La masa del cuerpo será entendida como una propiedad fundamental y por lo tanto asignada a priori como parte de la especificación del cuerpo. De esta manera, para toda parte* P de B se tendrá:

$$m(P) = \int_{P_t} \rho \, dv \quad (1.1)$$

donde P_t es la configuración de P en el instante t y dv es un diferencial de volumen.

A continuación se escribirán las formas globales y locales de los cinco principios enunciados anteriormente, suponiendo el campo de funciones lo suficientemente regular como para permitir, inclusive, las formas locales de dichos principios.

1.1. CONSERVACION DE LA MASA

Para toda parte $P \in B$ y cada instante t , se debe verificar:

$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \rho \, dv = 0 \quad (1.2)$$

La forma local del principio anterior es:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v = 0 \quad (1.3)$$

o su equivalente:

$$\rho' + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad (1.4)$$

*Ver [18]

Donde v es la descripción espacial de la velocidad y donde:

\dot{h} : es la derivada material, respecto al tiempo t de h .

h' : es la derivada espacial, respecto al tiempo t de h .

Sea el sistema de fuerzas $\{s, b\}$ donde b representa la fuerza de masa por unidad de volumen y $s(n, x, t)$ representa la fuerza por unidad de superficie actuando sobre $\Gamma(P_t)$ contorno de P_t , en el punto x , con normal n . Luego se tendrá:

1.2. CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL Y ANGULAR

Para toda parte P de B y todo t , debe verificarse:

$$\int_{\Gamma(P_t)} s d\Gamma + \int_{P_t} b dv = \int_{P_t} \rho \dot{v} dv \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(P_t)} (x-0) \wedge s d\Gamma + \int_{P_t} (x-0) \wedge b dv &= \\ &= \int_{P_t} (x-0) \wedge \rho \dot{v} dv \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde 0 es un punto arbitrario, respecto al cual se calcula el momento.

En base a los principios anteriores, el teorema de Cauchy, establece la existencia del tensor de tensiones T (tensor de tensiones de Cauchy) tal que:

$$s = Tn \quad (1.7)$$

$$\operatorname{div} T + b = \rho \dot{v} \quad (1.8)$$

$$T = T^T \text{ (simétrico)} \quad (1.9)$$

siendo (1.8) y (1.9), las formas locales de (1.5) y (1.6) respectivamente.

Defínase ahora las siguientes funciones:

ϵ : energía interna específica

q : vector flujo de calor

r : suministro de calor por unidad de masa en la unidad de tiempo (absorbido por el cuerpo y suministrado por radiación por el medio ambiente)

η : entropía específica

θ : temperatura absoluta, que se supondrá siempre positiva ($\theta > 0$)

Con estas funciones así definidas, se tiene:

1.3. CONSERVACION DE LA ENERGIA (Primera ley de la Termodinámica)

Para toda parte P de B y todo t , debe satisfacerse:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{P_t} v \cdot v \rho \, dv + \int_{P_t} \dot{\epsilon} \rho \, dv = \int_{P_t} v \cdot b \, dv + \\ + \int_{\Gamma_s(P_t)} v \cdot s \, d\Gamma + \int_{P_t} r \rho \, dv - \int_{\Gamma_q(P_t)} q \cdot n \, d\Gamma \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde Γ_s y Γ_q son parte del contorno Γ en donde s y q están definidas.

La ecuación anterior puede ser escrita de una forma más compacta:

$$\frac{d}{dt}(K+U) = W+Q \quad (1.11)$$

donde:

$$K = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{P_t} v \cdot v \rho \, dv ; \text{energía cinética}$$

$$U = \int_{P_t} \epsilon \rho \, dv ; \text{energía interna}$$

$$W = \int_{P_t} v \cdot b \, dv + \int_{\Gamma_s(P_t)} v \cdot s \, d\Gamma ; \text{potencia del sistema de fuerzas}$$

$$Q = \int_{P_t} r \rho \, dv - \int_{\Gamma_q(P_t)} q \cdot n \, d\Gamma ; \text{energía calorífica suministrada a } B \text{ por unidad de tiempo en el instante } t$$

Admitiendo la regularidad necesaria, localmente, la ecuación (1.10) es equivalente a:

$$\rho \dot{\epsilon} - \rho r + \operatorname{div} q - T \cdot L = 0 \quad (1.12)$$

Dada la simetría de T , se puede escribir:

$$\rho \dot{\epsilon} - \rho r + \operatorname{div} q - T \cdot D = 0 \quad (1.13)$$

donde L es el gradiente de la velocidad y D es la parte simétrica de L . [$D = \frac{1}{2}(L+L^T)$].

OBSERVACION: Haciendo uso de (1.10) y (1.13), sumando y restando

$$\int_{P_t} T \cdot D \, dv, \text{ la ecuación (1.10) toma la forma:}$$

$$\dot{K} = - \int_{P_t} T \cdot D \, dv + W \quad (1.14)$$

1.4. DESIGUALDAD DE CLAUSIUS-DUHEM (segunda ley de la termodinámica)

La producción total de entropía en una parte P de B , está definida por:

$$\Gamma = \int_{P_t} \dot{\eta} \rho \, dv - \int_{P_t} \frac{r}{\theta} \rho \, dv + \int_{\Gamma q(P_t)} \frac{1}{\theta} q \cdot n \, d\Gamma \quad (1.15)$$

donde:

$\frac{r}{\theta}$: suministro de entropía por radiación

$\frac{q}{\theta}$: vector flujo de entropía

Supuestas adecuadas condiciones de regularidad, la ecuación (1.15) puede ser escrita como:

$$\Gamma = \int_{P_t} \gamma \rho \, dv \geq 0 \quad (1.16)$$

donde γ es la producción específica de entropía y está definida por:

$$\gamma = \dot{\eta} - \frac{r}{\theta} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(q/\theta)$$

$$\gamma = \dot{\eta} - \frac{r}{\theta} + \frac{1}{\rho\theta} \operatorname{div} q - \frac{1}{\rho\theta^2} q \cdot \operatorname{grad} \theta \quad (1.17)$$

En base a las definiciones anteriores, para toda parte P de B y todo t , se debe verificar:

$$\Gamma \geq 0 \quad (1.18)$$

cuya forma local es:

$$\gamma \geq 0 \quad (1.19)$$

De esta última expresión y recordando que $\theta > 0$, resulta:

$$\rho \dot{\theta} \eta - \rho r + \operatorname{div} q - \frac{1}{\theta} q \cdot \operatorname{grad} \theta \geq 0 \quad (1.20)$$

Definiendo ahora, las siguientes funciones:

$$\psi = \varepsilon - \eta \theta \quad (1.21)$$

$$\sigma = T.L - \rho(\dot{\psi} + \eta \dot{\theta}) \quad (1.22)$$

ψ : energía libre

σ : disipación interna

De (1.21) y (1.22) se pueden obtener las siguientes ecuaciones:

$$\rho \dot{\varepsilon} = T.L + \rho \dot{\eta} \theta - \sigma \quad (1.23)$$

$$\rho \dot{\psi} = T.L - \rho \dot{\eta} \theta - \sigma \quad (1.24)$$

La primera se obtiene derivando (1.21) en relación al tiempo e introduciendo el valor de $\dot{\psi}$ en (1.22). La segunda, introduciendo el valor de $\rho \dot{\varepsilon}$ obtenido de la derivación antes indicada en (1.23).

Si ahora se sustituye (1.23) en la forma local de la primera ley de la termodinámica (1.12), se obtiene:

$$\rho \dot{\theta} \eta = \rho r - \operatorname{div} q + \sigma \quad (1.25)$$

Esta ecuación es importante, puesto que representa la forma local del principio de la conservación de la energía, como

función de la entropía específica, la disipación interna y las variables de calor q y r .

Sustituyendo (1.25) en (1.20), resulta:

$$\sigma - \frac{1}{\theta} q \cdot \text{grad } \theta \geq 0 \quad (1.26)$$

Esta ecuación es conocida como la forma local de la disipación.

Apesar de haberse formulado todas las ecuaciones que deben satisfacerse en cualquier proceso termomecánico, es imposible, hasta el momento, predecir el comportamiento de dos sólidos constituidos de materiales diferentes. La caracterización del comportamiento de un determinado material viene definida por medio de las llamadas ecuaciones constitutivas. Cabe observar, que un estudio profundo de la teoría que envuelve tal tipo de ecuaciones, escapa al objetivo del presente trabajo, pudiendo ser encontrada en [1], [5], [7], [18].

1.5. MATERIALES ELASTICOS

Un material homogéneo, elástico con conducción de calor, está definido por cuatro ecuaciones constitutivas:

$$\psi = \hat{\psi}(F, \theta, g) \quad (1.27.a)$$

$$\eta = \hat{\eta}(F, \theta, g) \quad (1.27.b)$$

$$T = \hat{T}(F, \theta, g) \quad (1.27.c)$$

$$q = \hat{q}(F, \theta, g) \quad (1.27.d)$$

donde:

$g = \text{grad } \theta$

F : denota el gradiente de deformación en el punto material \bar{X} para el instante t , calculado respecto a una configuración fija de referencia. Si se identifica el punto material \bar{X} con su posición X en la configuración de referencia, resulta:

$$F = \nabla_X p(X, t) \quad (1.28)$$

De la definición anterior, se sigue que las funciones $\hat{\psi}$, $\hat{\eta}$, \hat{T} y \hat{q} , dependen de la configuración de referencia adoptada.

De (1.27.a) se obtiene:

$$\dot{\psi} = \partial_F \psi \cdot \dot{F} + \partial_\theta \psi \dot{\theta} + \partial_g \psi \cdot \dot{g} \quad (1.29)$$

sustituyendo (1.29) en (1.26):

$$T \cdot L - \rho \partial_F \psi \cdot \dot{F} - \rho \partial_\theta \psi \dot{\theta} - \rho \partial_g \psi \cdot \dot{g} - \rho \eta \dot{\theta} - \frac{1}{\theta} q \cdot g \geq 0 \quad (1.30)$$

desde que:

$$L = \dot{F} F^{-1} \quad (1.31)$$

y

$$T \cdot (\dot{F} F^{-1}) = [T(F)^{-T}] \cdot \dot{F} \quad (1.32)$$

resulta:

$$(-\rho \partial_F \psi + T(F)^{-T}) \cdot \dot{F} - \rho (\partial_\theta \psi + \eta) \dot{\theta} - \rho \partial_g \psi \cdot \dot{g} - \frac{1}{\theta} q \cdot g \geq 0 \quad (1.33)$$

como esta ecuación debe verificarse para todo \dot{F} , $\dot{\theta}$, \dot{g} y g arbi-

trarios*, se concluye que:

$$T = \rho \partial_F \psi F^T \quad (1.34.a)$$

$$\eta = -\partial_\theta \psi \quad (1.34.b)$$

$$\partial_g \psi = 0 \quad (1.34.c)$$

$$-q.g \geq 0 \quad (1.34.d)$$

La ecuación (1.34.c) indica que ψ es independiente de g , es decir: $\psi = \hat{\psi}(F, \theta)$, a su vez, de las dos anteriores se sigue que: $\eta = \hat{\eta}(F, \theta)$ y $T = \hat{T}(F, \theta)$.

Como consecuencia de estos resultados se concluye que $\sigma = 0$. En efecto, de la ecuación (1.22)

$$\sigma = T.L - \rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta})$$

$$\sigma = T.L - \rho\left(\frac{1}{\rho} TF^{-T} \cdot \dot{F} - \eta\dot{\theta} + \eta\dot{\theta}\right)$$

$$\sigma = T.L - TF^{-T} \cdot \dot{F} = T.L - T \cdot \dot{F} F^{-1}$$

$$\sigma = T.L - T.L = 0 \quad (1.35)$$

Luego, la forma local del principio de la conservación de la energía queda como:

$$\rho\theta\dot{\eta} = \rho r - \text{div } q \quad (1.36)$$

La ecuación (1.21) puede ahora ser reescrita como:

$$\epsilon = \psi + \eta\theta = \hat{\psi}(F, \theta) + \theta\hat{\eta}(F, \theta) = \hat{\epsilon}(F, \theta) \quad (1.37)$$

y se definirá el número:

$$c = c(F, \theta) = \partial_\theta \hat{\epsilon}(F, \theta) \quad (1.38)$$

* [1] pag. 303

llamado, "calor específico". De acuerdo a la expresión anterior se tendrá:

$$\begin{aligned}
 c(F, \theta) &= \partial_{\theta} \widehat{\psi} + \widehat{\eta} + \theta \partial_{\theta} \widehat{\eta} \\
 c(F, \theta) &= -\widehat{\eta} + \widehat{\eta} + \theta \partial_{\theta} \widehat{\eta} \\
 c(F, \theta) &= \theta \partial_{\theta} \widehat{\eta}(F, \theta)
 \end{aligned}
 \tag{1.39}$$

Este resultado será de gran utilidad mas adelante.

1.6. PRINCIPIO DE LA INDIFERENCIA DEL OBSERVADOR

Este principio establece que las hipótesis constitutivas deben ser independientes del observador.

Si el índice * permite representar la magnitud vista por el nuevo observador y Q es el tensor ortogonal asociado a tal cambio, se tiene que las variables mecánicas y termodinámicas se transforman como sigue:

$$F^* = QF$$

$$\theta^* = \theta$$

$$g^* = Qg$$

$$U^* = U$$

$$L^* = QLQ^T + \dot{Q} Q^T$$

$$\psi^* = \psi$$

$$\eta^* = \eta$$

$$T^* = QTQ^T$$

$$q^* = Qq$$

De lo anterior resulta:

$$\psi = \hat{\psi}(F, \theta) = \hat{\psi}(F^*, \theta^*) = \hat{\psi}(QF, \theta) \quad (1.40.a)$$

$$\eta = \hat{\eta}(F, \theta) = \hat{\eta}(F^*, \theta^*) = \hat{\eta}(QF, \theta) \quad (1.40.b)$$

$$T = \hat{T}(F, \theta) = Q^T \hat{T}(F^*, \theta^*) Q = Q^T \hat{T}(QF, \theta) Q \quad (1.40.c)$$

$$q = \hat{q}(F, \theta, g) = Q^T \hat{q}(F^*, \theta^*, g^*) = Q^T \hat{q}(QF, \theta, Qg) \quad (1.40.d)$$

De la decomposición polar de F , $F = RU$, adoptando $Q = R^T$ y definiendo el tensor \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} (F^T F - \mathbb{I}) \quad (1.41)$$

donde:

\mathbb{I} : es el tensor identidad

Las ecuaciones (1.40) se transforman en:

$$\psi = \tilde{\psi}(\mathbf{C}, \theta) \quad (1.42.a)$$

$$\eta = \tilde{\eta}(\mathbf{C}, \theta) \quad (1.42.b)$$

$$T = F \tilde{T}(\mathbf{C}, \theta) F^T \quad (1.42.c)$$

$$q = F \tilde{q}(\mathbf{C}, \theta, F^T g) \quad (1.42.d)$$

donde \hat{T} y \hat{q} están relacionados con \tilde{T} y \tilde{q} através de:

$$\hat{T}(U, \theta) = U \tilde{T}(\mathbf{C}, \theta) U$$

$$\hat{q}(U, \theta, \mu) = U \tilde{q}(\mathbf{C}, \theta, U\mu)$$

De la ecuación (1.42.a) se obtiene:

$$\dot{\psi} = \partial_{\mathbf{C}} \tilde{\psi} \cdot \dot{\mathbf{C}} + \partial_{\theta} \tilde{\psi} \dot{\theta} \quad (1.43)$$

y de (1.41):

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} [\dot{F}^T F + F^T \dot{F}] = \frac{1}{2} [F^T L^T F + F^T L F] \quad (1.44)$$

sustituyendo en (1.43), resulta:

$$\dot{\psi} = \partial_{\mathbf{c}} \tilde{\psi} \cdot \frac{1}{2} [F^T L^T F + (F^T L^T F)^T] + \partial_{\theta} \tilde{\psi} \dot{\theta} \quad (1.45)$$

Como $\partial_{\mathbf{c}} \tilde{\psi}$ es un tensor simétrico, la expresión anterior puede escribirse:

$$\dot{\psi} = \partial_{\mathbf{c}} \tilde{\psi} \cdot F^T L^T F + \partial_{\theta} \tilde{\psi} \dot{\theta} = F \partial_{\mathbf{c}} \tilde{\psi} F^T \cdot L + \partial_{\theta} \tilde{\psi} \dot{\theta} \quad (1.46)$$

Sustituyendo este resultado en la desigual de Clausius-Duhem:

$$-\rho \dot{\psi} - \rho \eta \dot{\theta} + T \cdot L - \frac{1}{\theta} q \cdot g \geq 0$$

resulta:

$$(-\rho F \partial_{\mathbf{c}} \tilde{\psi} F^T + T) \cdot L - \rho (\eta + \partial_{\theta} \tilde{\psi}) \dot{\theta} - \frac{1}{\theta} q \cdot g \geq 0 \quad (1.47)$$

que debe verificarse para todo L , $\dot{\theta}$ y g , luego:

$$T = \rho F \partial_{\mathbf{c}} \tilde{\psi} F^T \quad (1.48)$$

de donde se concluye que T es simétrico. Además:

$$\eta = -\partial_{\theta} \tilde{\psi} \quad (1.49)$$

De (1.42.b), (1.42.c), (1.48) y (1.49) se concluye que:

$$\tilde{T}(\mathbf{c}, \theta) = \rho \partial_{\mathbf{c}} \tilde{\psi}(\mathbf{c}, \theta) \quad (1.50)$$

$$\tilde{\eta}(\mathbf{c}, \theta) = -\partial_{\theta} \tilde{\psi}(\mathbf{c}, \theta) \quad (1.51)$$

Por último, de (1.47) y (1.42.d) se llega:

$$F \tilde{q}(\mathbf{c}, \theta, F^T g) \cdot g \leq 0 \quad (1.52)$$

o lo que es lo mismo:

$$\bar{q}(\mathbf{C}, \theta, F^T g) \cdot F^T g \leq 0 \quad (1.53)$$

1.7. CONSECUENCIAS DE LA INECUACION DE CONDUCCION DE CALOR

En esta sección se obtendrá una importante consecuencia de esta inecuación:

Sea la derivada de $\bar{q}(\mathbf{C}, \theta, F^T g)$, con relación a g , calculada en $g = 0$, representada de la siguiente forma:

$$\left. \partial_g \bar{q}(\mathbf{C}, \theta, F^T g) \right|_{g=0} = -\mathbb{K}(\mathbf{C}, \theta) F^T \quad (1.54)$$

donde:

$$\mathbb{K}(\mathbf{C}, \theta)^* = - \left. \partial_{F^T g} \bar{q}(\mathbf{C}, \theta, F^T g) \right|_{g=0} \quad (1.55)$$

Desarrollando $\bar{q}(\mathbf{C}, \theta, F^T g)$ en serie de Taylor alrededor de $g = 0$, resulta:

$$\bar{q}(\mathbf{C}, \theta, F^T g) = \bar{q}(\mathbf{C}, \theta, 0) - \mathbb{K}(\mathbf{C}, \theta) F^T g + o(|g|) \quad (1.56)$$

para $g \rightarrow 0$

De esta expresión y de (1.53) se llega:

$$\bar{q}(\mathbf{C}, \theta, 0) \cdot F^T g - \mathbb{K}(\mathbf{C}, \theta) F^T g \cdot F^T g + o(|g|^2) \leq 0 \quad (1.57)$$

para $g \rightarrow 0$

Esta inecuación se verifica para todo g , solo si:

$$\bar{q}(\mathbf{C}, \theta, 0) = 0 \quad (1.58)$$

y además se concluye que el tensor de conductividad es positivo

* Tensor de conductividad

semi-definido.

La ecuación (1.58) trae como consecuencia:

$$\partial_{\mathbf{C}} \tilde{q}(\mathbf{C}, \theta, 0) = 0 \quad (1.59)$$

$$\partial_{\theta} \tilde{q}(\mathbf{C}, \theta, 0) = 0 \quad (1.60)$$

Estos resultados serán de utilidad en la próxima sección.

1.8. TEORIA LINEAL DE LA TERMOELASTICIDAD

El sistema completo de ecuaciones diferenciales, para problemas no lineales de termoelasticidad, fué derivado en las secciones anteriores. Estas ecuaciones son:

- Ecuación de movimiento:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (1.61)$$

- Conservación de la Energía:

$$\rho \dot{\eta} \theta = \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q} \quad (1.62)$$

- Ecuaciones Constitutivas:

$$\psi = \tilde{\psi}(\mathbf{C}, \theta) \quad (1.63.a)$$

$$\eta = \tilde{\eta}(\mathbf{C}, \theta) \quad (1.63.b)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{C}, \theta) \mathbf{F}^T \quad (1.63.c)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{F}^T \mathbf{g}) \quad (1.63.d)$$

Adoptando una configuración de referencia, resulta:

$$\mathbf{F} = \mathbf{B} + \nabla \mathbf{u} \quad (1.64)$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}] \quad (1.65)$$

$$F^T \text{grad } \theta = \nabla \theta \quad (1.66)$$

donde u , representa el campo de desplazamientos.

Por supuesto, las ecuaciones constitutivas deben satisfacer:

$$\tilde{T}(\mathbf{C}, \theta) = \rho \partial_{\mathbf{C}} \tilde{\psi}(\mathbf{C}, \theta) \quad (1.67.a)$$

$$\tilde{\eta}(\mathbf{C}, \theta) = -\partial_{\theta} \tilde{\psi}(\mathbf{C}, \theta) \quad (1.67.b)$$

$$\tilde{q}(\mathbf{C}, \theta, \nabla \theta) \cdot \nabla \theta \leq 0 \quad (1.67.c)$$

En esta sección se determinará una aproximación lineal del sistema anterior, bajo las siguientes hipótesis:

- i) El gradiente del desplazamiento y su tasa de variación respecto al tiempo son pequeños.
 - ii) La temperatura es aproximadamente igual a la temperatura T_0 , llamada temperatura de referencia.
 - iii) El gradiente de la temperatura y su tasa son pequeños.
- Luego, se está asumiendo que:

$$[\nabla u], [\nabla \dot{u}], |\theta - T_0|, |\nabla \theta|, |\dot{\theta}| \leq \delta \quad (1.68)$$

donde:

δ es pequeño.

En vista de estas suposiciones, se podrá escribir:

$$F = \mathbb{I} + O(\delta) \quad (1.69)$$

Si se introduce el tensor infinitesimal de deformación E , definido por:

$$E = \frac{1}{2} [\nabla u + \nabla u^T] \quad (1.70)$$

de acuerdo con (1.64) y (1.68):

$$E = O(\delta) \quad (1.71)$$

$$\dot{E} = O(\delta) \quad (1.71.a)$$

$$C = \frac{1}{2} [F^T F - II] = \frac{1}{2} [(II + \nabla u^T)(II + \nabla u) - II]$$

$$C = \frac{1}{2} [\nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u] = E + O(\delta^2) \quad (1.72)$$

Por lo tanto:

$$C = E \quad (1.73)$$

$$\dot{C} = \dot{E} \quad (1.74)$$

Para $F = II$ y $\theta = T_0$, se tiene:

$$C = 0 \quad (1.75)$$

y

$$T = \bar{T}(0, T_0) \quad (1.76)$$

Es decir, esta ecuación representa la tensión residual o sea, la tensión que el sólido tendría en la configuración de referencia con temperatura T_0 .

En lo que sigue se supondrá:

$$\bar{T}(0, T_0) = 0 \quad (1.77)$$

y que T_0 es una temperatura uniforme.

Si se designa con:

$$C = \partial_{\mathbf{c}} \bar{T}(\mathbf{c}, \theta) \Big|_{\substack{\mathbf{c}=0 \\ \theta=T_0}} \quad (1.78)$$

$$M = \partial_{\theta} \bar{T}(\mathbf{c}, \theta) \Big|_{\substack{\mathbf{c}=0 \\ \theta=T_0}} \quad (1.79)$$

y se expande en serie de Taylor $\bar{T}(\mathbf{c}, \theta)$, alrededor de $\mathbf{c}=0$ y $\theta=T_0$:

$$\bar{T}(\mathbf{c}, \theta) = \bar{T}(0, T_0) + \mathbf{c}[E] + (\theta - T_0)M + O(\delta) \quad (1.80)$$

que de acuerdo com (1.77), queda:

$$\bar{T}(\mathbf{c}, \theta) = \mathbf{c}[E] + (\theta - T_0)M + O(\delta) \quad (1.81)$$

De (1.81), (1.63.c) y (1.69) se sigue:

$$T = [\mathbb{I} + O(\delta)] \bar{T}[\mathbb{I} + O(\delta)] = [\mathbb{I} + O(\delta)] [\bar{T} + \bar{T} O(\delta)]$$

$$T = \bar{T}(\mathbf{c}, \theta) + O(\delta) \quad (1.82)$$

o sea que:

$$T = \mathbf{c}[E] + (\theta - T_0)M \quad (1.83)$$

Por otro lado, expandiendo $\tilde{q}(\mathbf{c}, \theta, \nabla\theta)$ alrededor del punto $\mathbf{c} = 0$, $\theta = T_0$ y $\nabla\theta = 0$ y llevando en cuenta los resultados obtenidos en la sección 1.7:

$$\tilde{q}(\mathbf{c}, \theta, \nabla\theta) = -\mathbf{K}(\mathbf{c}, \theta) \Big|_{\substack{\mathbf{c}=0 \\ \theta=T_0 \\ \nabla\theta=0}} \nabla\theta + O(\delta) = -\mathbf{K}\nabla\theta + O(\delta) \quad (1.84)$$

Esta ecuación indica, que a menos de un error del orden de δ , el flujo de calor depende linealmente del gradiente de temperatura y es independiente de la deformación y temperatura.

Ahora, solamente resta obtener la forma linealizada de la ecuación de la energía (1.42.a). Así, de la ecuación (1.42.b), se tiene:

$$\dot{\bar{n}} = \partial_{\mathbf{c}} \bar{n}(\mathbf{c}, \theta) \cdot \dot{\mathbf{c}} + \partial_{\theta} \bar{n}(\mathbf{c}, \theta) \dot{\theta} \quad (1.85)$$

Pero:

$$\partial_{\mathbf{c}} \bar{n}(\mathbf{c}, \theta) = \partial_{\mathbf{c}} \bar{n}(\mathbf{c}, \theta) \Big|_{\substack{\mathbf{c}=0 \\ \theta=T_0}} + O(\delta) \quad (1.86)$$

y

$$\partial_{\theta} \bar{n}(\mathbf{c}, \theta) = \partial_{\theta} \bar{n}(\mathbf{c}, \theta) \Big|_{\substack{\mathbf{c}=0 \\ \theta=T_0}} + O(\delta) \quad (1.87)$$

que juntamente con (1.50) y (1.51) dan:

$$\partial_{\mathbf{c}} \bar{n} = -\partial_{\mathbf{c}} \partial_{\theta} \bar{\psi} = -\partial_{\theta} \partial_{\mathbf{c}} \bar{\psi} = -\partial_{\theta} \left(\frac{1}{\rho} T \right)$$

$$\partial_{\mathbf{c}} \bar{n} = -\frac{1}{\rho} \partial_{\theta} T \quad (1.88)$$

Sustituyendo (1.79) en esta expresión:

$$\partial_{\mathbf{c}} \bar{n} = -\frac{1}{\rho} M \quad (1.89)$$

De la ecuación (1.39) se puede escribir:

$$c = T_0 \partial_{\theta} \bar{n} \Big|_{\substack{\mathbf{c}=0 \\ \theta=T_0}} \quad (1.90)$$

que representa el calor específico correspondiente a deformación nula y temperatura constante.

Sustituyendo (1.89) y (1.90) en (1.85) y de acuerdo

con (1.74) resulta:

$$\dot{\eta} = - \frac{1}{\rho} M \cdot \dot{E} + \frac{c}{T_0} \dot{\theta} \quad (1.91)$$

Si se multiplica esta ecuación por $\rho\theta$ (despreciando los términos de orden superior a δ), resulta:

$$\rho\theta\dot{\eta} = - T_0 M \cdot \dot{E} + \rho c \dot{\theta} \quad (1.92)$$

que sustituida en (1.36) da:

$$T_0 M \cdot \dot{E} - \rho_0 c \dot{\theta} - \text{div } q + \rho_0 r = 0 \quad (1.93)$$

ya que, en vista de (1.69), $\rho = \rho_0$, donde ρ_0 representa la densidad de masa en la configuración de referencia.

En definitiva, las ecuaciones básicas de la teoría de la termoelasticidad, dentro de la teoría lineal son:

- Ecuación de Movimiento:

$$\text{div } T + b = \rho_0 \ddot{u} \quad (1.94.a)$$

- Ecuación de conducción de calor:

$$T_0 M \cdot \dot{E} - \rho_0 c \dot{\theta} - \text{div } q + \rho_0 r = 0 \quad (1.94.b)$$

- Ecuación cinemática:

$$E = \frac{1}{2} [\nabla U + \nabla U^T] \quad (1.94.c)$$

- Ecuaciones constitutivas:

$$T = C[E] + (\theta - T_0)M \quad (1.94.d)$$

$$q = - K \nabla \theta \quad (1.94.e)$$

En la solución de problemas de termoelasticidad, es práctica común realizar dos tipos de aproximaciones.

La primera consiste en eliminar el término $T_0 M \cdot \dot{E}$ en la

ecuación de conducción de calor, obteniéndose la llamada solución desacoplada. Este nombre proviene del hecho de que (1.94.b) se transforma en la ecuación clásica de conducción de calor y una vez conocida su solución, la distribución de temperatura entra como dato en la ecuación de movimiento.

La segunda aproximación, llamada de teoría quasi-estática, resulta del hecho de eliminar el término $\rho \ddot{u}$ en la ecuación de movimiento.

Dado que se utilizarán técnicas variacionales en la solución del sistema (1.94), no se efectuará ninguna de estas aproximaciones sobre dicho sistema.

1.9. ISOTROPIA

Si se supone isotropía tanto mecánica cuanto térmica, el tensor $C[E]$ viene dado por*:

$$C[E] = 2\mu[E] + \lambda(\text{tr}E)\mathbb{I} \quad (1.95)$$

y

$$M = m\mathbb{I}$$

$$K = k\mathbb{I}$$

donde de nuevo, \mathbb{I} : representa el tensor identidad.

y

$$m = -\alpha(3\lambda + 2\mu)$$

λ, μ : son los coeficientes de lamé isotérmicos.

*Detalle en [5] y [18].

Finalmente, se puede escribir las ecuaciones fundamentales de la termoelasticidad lineal, para un sólido homogéneo e isotrópico:

- Ecuación de Movimiento

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (1.96.a)$$

- Ecuación de Conducción de Calor

$$mT_0(\operatorname{tr} \dot{\mathbf{E}}) - \rho c \dot{\theta} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r = 0 \quad (1.96.b)$$

- Ecuación cinemática

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \quad (1.96.c)$$

- Ecuaciones constitutivas

$$\mathbf{T} = 2\mu[\mathbf{E}] + \lambda(\operatorname{tr} \mathbf{E}) \mathbb{I} + m(\theta - T_0) \mathbb{I} \quad (1.96.d)$$

$$\mathbf{q} = -k \nabla \theta \quad (1.96.e)$$

CAPITULO IITERMOELASTICIDAD DINAMICA ACOPLADA

2.1. ECUACIONES BASICAS

Asūmase que el cuerpo en estudio, en su configuraciōn de referencia, ocupa la regiōn $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de contorno Γ y dado el intervalo $[0, t_0)$, el problema de valor inicial y de contorno, consistirā en:

Dadas las ecuaciones cinemáticas:

$$E(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad (2.1)$$

las ecuaciones constitutivas:

$$T = 2\mu[E(u)] + \lambda \operatorname{tr}(E(u))\mathbb{I} + m(\theta - T_0)\mathbb{I} \quad (2.2)$$

$$q = -k \nabla \theta \quad (2.3)$$

y dado:

- i) Las fuerzas de masa b por unidad de volumen y el suministro de calor r por unidad de masa en la unidad de tiempo, definidas en $\Omega \times [0, t_0)$
- ii) Las tracciones superficiales s en $\Gamma_3 \times [0, t_0)$
- iii) El flujo de calor q en $\Gamma_4 \times [0, t_0)$

A esta altura es interesante especificar la naturaleza del flujo de calor en $\Gamma_4 \times [0, t_0)$.

Existen dos posibilidades a considerar*:

* [2] pags. 143-144

iii.a) flujo prescrito q_1 definido en $\Gamma_{4p} \times [0, t_0)$

iii.b) flujo producido por convección q_2 definido en $\Gamma_{4c} \times [0, t_0)$ y que viene dado por:

$$q_2 = h(\theta - T_\infty) \quad (2.4)$$

donde:

h : coeficiente de convección

T_∞ : temperatura del fluido que circunda el cuerpo.

Obviamente: $\Gamma_{4p} \cup \Gamma_{4c} = \Gamma_4$ y

$$\Gamma_{4p} \cap \Gamma_{4c} = \emptyset^{**}$$

iv) La densidad de masa ρ_0 definida en Ω

Determinar (u, θ) , de modo que sean satisfechas las siguientes ecuaciones:

A. Condiciones Iniciales:

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.5.a)$$

$$\dot{u}(x, 0) = v_0(x) \quad (2.5.b)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0 \quad (2.5.c)$$

B. Condiciones de Contorno:

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) \quad \text{en } (x, t) \in \Gamma_1 \times [0, t_0) \quad (2.6.a)$$

$$\theta(x, t) = \bar{\theta}(x, t) \quad \text{en } (x, t) \in \Gamma_2 \times [0, t_0) \quad (2.6.b)$$

$$s(x, t) = T(x, t)n(x) \quad \text{en } (x, t) \in \Gamma_3 \times [0, t_0) \quad (2.6.c)$$

$$q(x, t) = q(x, t)n(x) \quad \text{en } (x, t) \in \Gamma_4 \times [0, t_0) \quad (2.6.d)$$

** conjunto vacío

C. Ecuación de Movimiento:

$$\operatorname{div} T + b = \rho_0 \ddot{u} \quad \text{en } \Omega \times [0, t_0) \quad (2.7)$$

D. Ecuación de Conducción de Calor:

$$\rho_0 c \dot{\theta} - m T_0 \operatorname{tr}[E(\dot{u})] = \rho_0 r - \operatorname{div} q \quad \text{en } \Omega \times [0, t_0) \quad (2.8)$$

2.2. FORMULACION VARIACIONAL

En esta sección, se presentará una formulación variacional que permitirá la obtención de soluciones débiles del problema asociado a la teoría lineal de la termoelasticidad dinámica acoplada, en cuerpos elásticos, conductores de calor, homogéneos e isotrópicos. Para ello se definirán:

$$K_{in} = \{(u, \theta); u \text{ y } \theta \text{ satisfacen las condiciones de contorno (2.6.a,b)}\}$$

y

$$\operatorname{Var}\{(\bar{u}, \bar{\theta}); \bar{u} = 0 \text{ en } \Gamma_1 \times [0, t_0) \text{ y} \\ \bar{\theta} = 0 \text{ en } \Gamma_2 \times [0, t_0)\}$$

Luego, si se multiplica la ecuación (2.7) por $\dot{\bar{u}}$ y se integra sobre Ω :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} T \cdot \dot{\bar{u}} + b \cdot \dot{\bar{u}}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{u} \cdot \dot{\bar{u}} d\Omega \quad (2.9)$$

pero:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(T^T \dot{\bar{u}}) d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} T \cdot \dot{\bar{u}} d\Omega + \int_{\Omega} T \cdot \nabla \dot{\bar{u}} d\Omega \quad (2.10)$$

Luego:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} T \cdot \dot{\hat{u}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div}(T^T \dot{\hat{u}}) \, d\Omega - \int_{\Omega} T \cdot \nabla \dot{\hat{u}} \, d\Omega \quad (2.11)$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la primera integral del segundo miembro, y haciendo uso de la condición de contorno (2.6.c), se tiene:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} T \cdot \dot{\hat{u}} \, d\Omega = \int_{\Gamma_3} s \cdot \dot{\hat{u}} \, d\Gamma - \int_{\Omega} T \cdot \nabla \dot{\hat{u}} \, d\Omega \quad (2.12)$$

y en vista de la simetría de T y de (2.1) se puede escribir finalmente:

$$\int_{\Omega} \rho_0 \ddot{u} \cdot \dot{\hat{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega} T \cdot E(\dot{\hat{u}}) \, d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot \dot{\hat{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_3} s \cdot \dot{\hat{u}} \, d\Gamma \quad (2.13)$$

Obsérvese que (2.12) constituye un funcional equivalente a (1.14).

Si ahora se multiplica la ecuación (2.8) por $\bar{\theta}$ y se integra sobre Ω :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_0 c \dot{\theta} \bar{\theta} \, d\Omega - \int_{\Omega} m T_0 \operatorname{tr}(E(\dot{u})) \bar{\theta} \, d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \rho_0 r \bar{\theta} \, d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div} q \bar{\theta} \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.14)$$

pero:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} q \bar{\theta} \, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\bar{\theta} q) \, d\Omega - \int_{\Omega} q \cdot \nabla \bar{\theta} \, d\Omega \quad (2.15)$$

Aplicando de nuevo el teorema de la divergencia a la primera integral del segundo miembro de esta ecuación y haciendo uso de la condición de contorno (2.6.d), se tiene:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} q \bar{\theta} \, d\Omega = \int_{\Gamma_4} q \bar{\theta} \, d\Gamma - \int_{\Omega} q \cdot \nabla \bar{\theta} \, d\Omega \quad (2.16)$$

De acuerdo a (iii.a) y (iii.b) se transforma en:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} q \bar{\theta} \, d\Omega = \int_{\Gamma_{4p}} q_1 \bar{\theta} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{4c}} h(\theta - T_{\infty}) \bar{\theta} \, d\Gamma - \int_{\Omega} q \cdot \nabla \bar{\theta} \, d\Omega \quad (2.17)$$

Sustituyendo esta expresión en (2.14) y teniendo presente (2.3), queda:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_0 c \dot{\theta} \bar{\theta} \, d\Omega - \int_{\Omega} m T_0 \operatorname{tr}[E(\dot{u})] \bar{\theta} \, d\Omega + \int_{\Omega} k \nabla \theta \cdot \nabla \bar{\theta} \, d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \rho_0 r \bar{\theta} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{4p}} q_1 \bar{\theta} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{4c}} h(\theta - T_{\infty}) \bar{\theta} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.18)$$

Entonces, el problema de valor inicial y de contorno es equivalente al de determinar $\{u, \theta\} \in K_{in}$, tal que, para todo $t \in [0, t_0)$ y todo $\{\bar{u}, \bar{\theta}\} \in \operatorname{Var}$, se verifiquen:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{u} \cdot \dot{\bar{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \{2\mu E(u) \cdot E(\dot{\bar{u}}) + \lambda \operatorname{tr} E(u) \operatorname{tr} E(\dot{\bar{u}})\} \, d\Omega + \\ + \int_{\Omega} m(\theta - T_0) \operatorname{tr} E(\dot{\bar{u}}) \, d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot \dot{\bar{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_3} s \cdot \dot{\bar{u}} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.19.a)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_0 c \dot{\theta} \bar{\theta} \, d\Omega - \int_{\Omega} m T_0 \operatorname{tr}[E(\dot{u})] \bar{\theta} \, d\Omega + \int_{\Omega} k \nabla \theta \cdot \nabla \bar{\theta} \, d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \rho_0 r \bar{\theta} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{4p}} q_1 \bar{\theta} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{4c}} h(\theta - T_{\infty}) \bar{\theta} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.19.b)$$

con las condiciones iniciales:

$$(u(0), \bar{u}) = (u_0, \bar{u}) \quad (2.19.c)$$

$$(\dot{u}(0), \dot{\bar{u}}) = (v_0, \dot{\bar{u}}) \quad (2.19.d)$$

$$(\theta(0), \bar{\theta}) = (\theta_0, \bar{\theta}) \quad (2.19.e)$$

OBSERVACION: Puede demostrarse [16], [17] que existe una única solución $\{u, \theta\} \in K_{in}$ que satisface (2.19)

2.3. ESQUEMA NUMERICO

Se pueden obtener soluciones aproximadas para el sistema (2.19) definiendo los espacios de dimensión finita

$$K_{in}^h \subset K_{in} \quad \text{y} \quad \text{Var}^h \subset \text{Var}.$$

Las ecuaciones (2.19.a) y (2.19.b) referidas a estos espacios toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_0 \dot{u}^h \cdot \dot{\bar{u}}^h d\Omega + \int_{\Omega} \{2\mu E(u^h) \cdot E(\dot{\bar{u}}^h) + \lambda \text{tr} E(u^h) \text{tr} E(\dot{\bar{u}}^h)\} d\Omega + \\ + \int_{\Omega} m(\theta^h - T_0) \text{tr} E(\dot{\bar{u}}^h) d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot \dot{\bar{u}}^h d\Omega + \int_{\Gamma_s} s \cdot \dot{\bar{u}}^h d\Gamma \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_0 c \dot{\theta}^h \bar{\theta}^h d\Omega - \int_{\Omega} m T_0 \text{tr} [E(\dot{u}^h)] \bar{\theta}^h d\Omega + \int_{\Omega} k \nabla \theta^h \cdot \nabla \bar{\theta}^h d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \rho_0 r \bar{\theta}^h d\Omega - \int_{\Gamma_{4p}} q_1 \bar{\theta}^h d\Gamma - \int_{\Gamma_{4c}} h(\theta^h - T_{\infty}) \bar{\theta}^h d\Gamma \end{aligned} \quad (2.21)$$

Entonces, el problema consiste en determinar $(u^h, \theta^h) \in K_{in}^h$ tal que, (2.20) y (2.21) se verifiquen para todo $t \in [0, t_0]$ y todo $(\bar{u}^h, \bar{\theta}^h) \in \text{Var}^h$, con las condiciones iniciales:

$$(u^h(0), \bar{u}^h) = (u_0, \bar{u}^h) \quad (2.22)$$

$$(\dot{u}^h(0), \dot{\bar{u}}^h) = (v^0, \dot{\bar{u}}^h) = (v_0, \dot{\bar{u}}^h) \quad (2.23)$$

$$(\theta^h(0), \bar{\theta}^h) = (\theta_0, \bar{\theta}^h) \quad (2.24)$$

Dado un entero $N > 0$, siendo $\Delta t = t_0/(N+1)$ y $n=2, \dots, N+1$, se definirán en Kin^h , aproximaciones $\{U^n, \theta^n\}$ para $\{u(n\Delta t), \theta(n\Delta t)\}$, a través del siguiente esquema numérico:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_0 \left[\frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{(\Delta t)^2} \right] \dot{\bar{u}}^h d\Omega + \int_{\Omega} \{ 2\mu E [M_s U^n]; E [\dot{\bar{u}}^h] + \\ + \lambda \text{tr} E [M_s U^n] \text{tr} E (\dot{\bar{u}}^h) \} d\Omega = - \int_{\Omega} m(\theta^n - T_0) \text{tr} E (\dot{\bar{u}}^h) d\Omega + \\ + \int_{\Omega} b \cdot \dot{\bar{u}}^h d\Omega + \int_{\Gamma_3} s \cdot \dot{\bar{u}}^h d\Gamma \end{aligned} \quad (2.25.a)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_0 c \left[\frac{\theta^{n+1} - \theta^{n-1}}{2\Delta t} \right] \bar{\theta}^h d\Omega + \int_{\Gamma_{4c}} h [M_s \theta^n] \bar{\theta}^h d\Gamma + \int_{\Omega} K \nabla (M_s \theta^n) \cdot \\ \cdot \nabla \bar{\theta}^h d\Omega = \int_{\Omega} m T_0 \text{tr} E \left[\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} \right] \bar{\theta}^h d\Omega + \int_{\Omega} \rho_0 r \bar{\theta}^h d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_{4c}} h T_{\infty} \bar{\theta}^h d\Gamma - \int_{\Gamma_{4p}} q_1 \bar{\theta}^h d\Gamma \end{aligned} \quad (2.25.b)$$

válido para $n=1, 2, \dots, N$ y todo $(\bar{u}^h, \bar{\theta}^h) \in \text{Var}^h$.

donde:

$$M_s U^n = s U^{n+1} + (1-2s)U^n + s U^{n-1}$$

$$M_s \theta^n = s \theta^{n+1} + (1-2s)\theta^n + s \theta^{n-1}$$

La utilización del algoritmo en el primer paso ($n=1$), requiere el conocimiento de $\{U^0, \theta^0\}$ y $\{U^1, \theta^1\}$. Estos valores se

obtendrán a partir de las condiciones iniciales, la fórmula de Taylor y la ecuación (2.19.b) calculada en $t \cong \Delta t/2$.

En efecto, $\{U^0, \theta^0\}$ son las condiciones iniciales y U^1 se puede conocer por:

$$U^1 = U^0 + \dot{U}^0(\Delta t) + O(\Delta t)^2 \quad (2.26)$$

que debido a (2.23) se transforma en:

$$U^1 = U^0 + V^0(\Delta t) + O(\Delta t)^2 \quad (2.26.a)$$

y de acuerdo a lo propuesto anteriormente, (2.19.b) toma la forma:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 c \left[\frac{\theta^1 - \theta^0}{(\Delta t)} \right] \bar{\theta}^h d\Omega + \int_{\Gamma_{4c}} h \left(\frac{\theta^1 + \theta^0}{2} \right) \bar{\theta}^h d\Gamma + \int_{\Omega} K \nabla \left(\frac{\theta^1 + \theta^0}{2} \right) \nabla \bar{\theta}^h d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} m T_0 \text{tr} E \left[\frac{U^1 - U^0}{(\Delta t)} \right] \bar{\theta}^h d\Omega + \int_{\Omega} \rho_0 r \Big|_{\frac{\Delta t}{2}} \bar{\theta}^h d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_{4c}} h T_{\infty} \Big|_{\frac{\Delta t}{2}} \bar{\theta}^h d\Gamma - \int_{\Gamma_{4p}} q_1 \Big|_{\frac{\Delta t}{2}} \bar{\theta}^h d\Gamma \end{aligned} \quad (2.27)$$

OBSERVACION: En el algoritmo propuesto, puede notarse que las ecuaciones (2.25.a) y (2.25.b) son desacopladas en el siguiente sentido: la incógnita U^{n+1} es calculada en (2.25.a) y luego utilizada en (2.25.b) para el cálculo de θ^{n+1} . Este desacoplamiento es importante ya que reduce el tiempo computacional de cálculo.

A su vez, como fué demostrado en [16], [17], el al

goritmo numérico (2.25) es incondicionalmente estable para todo $s \in (0, 1/2]$ y para cualquier $n=1, 2, \dots, N+1$.

Nótese además que el error con respecto al tiempo de la solución aproximada es del orden de $(\Delta t)^2$.

Una vez establecida la base para K_n^h y Var_n^h , las ecuaciones variacionales anteriores, se reducen a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales para los coeficientes U^{n+1} y θ^{n+1} . Las matrices del sistema resultan simétricas y positivas definidas [16], [17], [26].

CAPÍTULO III

FUNCIONES DE INTERPOLACION

3.1. FUNCIONES DE APROXIMACION

La construcción de las funciones de aproximación (funciones bases para los espacios K^h y Var^h) será efectuada mediante el Método de los Elementos Finitos.

El Método de los Elementos Finitos propone la discretización de la región Ω , de contorno Γ (Fig. 3.1), en un número finito de sub-regiones Ω_e , $e=1,2,\dots,M$, llamadas elementos finitos, de modo que:

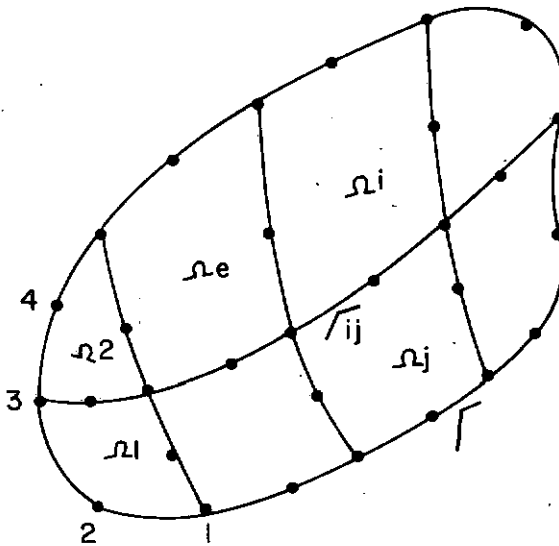


FIGURA 3 - 1

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \phi \quad \forall_{i,j} \quad (3.1)$$

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega_e \quad (3.2)$$

$$\Gamma_{ij} = \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j \quad (3.3)$$

y donde se definen a nivel de cada elemento e , los $N^{(e)}$ nudos asociados a tal elemento.

Las funciones de aproximación son construidas a nivel de cada elemento (aproximación local), independientemente de los otros elementos. La función global de aproximación se obtiene mediante el ensamble adecuado de todos los elementos.

En particular, se adoptarán, a nivel de cada elemento, las siguientes representaciones para las funciones de Kin^h y Var^h :

$$U^{(e)} = U_i^{(e)} \underline{w}_i \quad (3.4.a)$$

$$\bar{u}^{(e)} = \bar{u}_i^{(e)} \underline{w}_i \quad (3.4.b)$$

$$\theta^{(e)} = \theta_i^{(e)} \omega_i \quad (3.4.c)$$

$$\bar{\theta}^{(e)} = \bar{\theta}_i^{(e)} \omega_i \quad (3.4.d)$$

donde la sumatoria en i queda sobre entendida. El rango de variación de este índice depende del número de incógnitas asociadas a cada nudo.

Las funciones \underline{w}_i y ω_i son conocidas con el nombre de funciones de interpolación local, siendo $U_i^{(e)}$ y $\theta_i^{(e)}$ los desplazamientos y temperatura asociados a dichas funciones de interpolación.

Así, sustituyendo las expresiones (3.4) en las ecuaciones (2.25.a) y (2.25.b), se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \hat{u}_i \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{\rho_0}{(\Delta t)^2} \underline{w}_j \cdot \underline{w}_i + 2\mu s E(\underline{w}_j) \cdot E(\underline{w}_i) + \lambda s \operatorname{tr} E(\underline{w}_j) \operatorname{tr} E(\underline{w}_i) \right] d\Omega U_j^{n+1} - \right. \\
& \left. - \int_{\Omega} \left[\frac{2\rho_0}{(\Delta t)^2} \underline{w}_j \cdot \underline{w}_i - 2\mu(1-2s) E(\underline{w}_j) \cdot E(\underline{w}_i) - \lambda(1-2s) \operatorname{tr} E(\underline{w}_j) \operatorname{tr} E(\underline{w}_i) \right] \right. \\
& \left. : d\Omega U_j^n + \int_{\Omega} \left[\frac{\rho_0}{(\Delta t)^2} \underline{w}_j \cdot \underline{w}_i + 2\mu s E(\underline{w}_j) \cdot E(\underline{w}_i) + \lambda s \operatorname{tr} E(\underline{w}_j) \operatorname{tr} E(\underline{w}_i) \right] \right. \\
& \left. \cdot d\Omega U_j^{n-1} + \int_{\Omega} m \omega_j \operatorname{tr} E(\underline{w}_i) d\Omega (\theta^n - T_0)_j - \int_{\Omega} b \cdot \underline{w}_i d\Omega - \int_{\Gamma_3} s \cdot \underline{w}_i d\Gamma \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{\theta}_i \left\{ \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{\rho_{oc}}{2\Delta t} \omega_j \omega_i + s k \nabla(\omega_j) \cdot \nabla(\omega_i) \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{4c}} h s \omega_j \omega_i d\Gamma \right\} \theta_j^{n+1} + \right. \\
& \left. + \left\{ \int_{\Omega} \left[(1-2s) k \nabla(\omega_j) \cdot \nabla(\omega_i) \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{4c}} h(1-2s) \omega_j \omega_i d\Gamma \right\} \theta_j^n - \right. \\
& \left. - \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{\rho_{oc}}{2\Delta t} \omega_j \omega_i - s k \nabla(\omega_j) \cdot \nabla(\omega_i) \right] d\Omega - \int_{\Gamma_{4c}} h s \omega_j \omega_i d\Gamma \right\} \theta_j^{n-1} - \right. \\
& \left. - \int_{\Omega} m T_0 E(\underline{w}_j) \omega_i d\Omega \left(\frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)_j - \int_{\Omega} \rho_0 r \omega_i d\Omega - \int_{\Gamma_{4c}} h T_{\infty} \omega_j \omega_i d\Gamma + \right. \\
& \left. + \int_{\Gamma_{4p}} q_1 \omega_i d\Gamma \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde el índice (e) ha sido eliminado para simplificar la notación.

En vista de que tanto \hat{u} como $\hat{\theta}$ son arbitrarios, las ecuaciones anteriores pueden escribirse como:

$$\left[\frac{M_1}{(\Delta t)^2} + sK_1 \right] U^{n+1} = \left[\frac{M_1}{(\Delta t)^2} - (1-2s)K_1 \right] U^n - \left[\frac{M_1}{(\Delta t)^2} + sK_1 \right] U^{n-1} - H_1(\theta^n - T_0) + F_1 \quad (3.7)$$

$$\left[\frac{M_2}{2\Delta t} + sK_2 \right] \theta^{n+1} = F_2 - [(1-2s)K_2] \theta^n + \left[\frac{M_2}{2\Delta t} - sK_2 \right] \theta^{n-1} + H_2 \left(\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} \right) \quad (3.8)$$

donde:

$$[M_1]_{ij} = \int_{\Omega} \rho_0 \underline{w}_j \cdot \underline{w}_i d\Omega \quad (3.9)$$

$$[K_1]_{ij} = \int_{\Omega} \{ 2\mu E(\underline{w}_j) \cdot E(\underline{w}_i) + \lambda \text{tr}E(\underline{w}_j) \text{tr}E(\underline{w}_i) \} d\Omega \quad (3.10)$$

$$[H_1]_{ij} = \int_{\Omega} m \omega_j \text{tr}E(\underline{w}_i) d\Omega \quad (3.11)$$

$$[F_1]_i = \int_{\Omega} \underline{b} \cdot \underline{w}_i d\Omega + \int_{\Gamma_3} \underline{s} \cdot \underline{w}_i d\Gamma \quad (3.12)$$

$$[M_2]_{ij} = \int_{\Omega} \rho_0 c \omega_j \omega_i d\Omega \quad (3.13)$$

$$[K_2]_{ij} = \int_{\Omega} k \nabla(\omega_j) \cdot \nabla(\omega_i) d\Omega + \int_{\Gamma_{4c}} h \omega_j \omega_i d\Gamma \quad (3.14)$$

$$[H_2]_{ij} = \int_{\Omega} m T_0 \text{tr}E(\underline{w}_j) \omega_i d\Omega \quad (3.15)$$

$$[F_2]_i = \int_{\Omega} \rho_0 r \omega_i d\Omega + \int_{\Gamma_{4c}} h T_{\infty} \omega_j \omega_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{4p}} q_1 \omega_i d\Gamma \quad (3.16)$$

y

U^{n+1} : vector de incógnitas del elemento e-ésimo asociado a desplazamientos y correspondientes al instante $t=(n+1)\Delta t$

θ^{n+1} : idem a lo anterior pero con temperatura

Si se introduce ahora las ecuaciones (3.4) en (2.27) se

llega a:

$$\left[\frac{M_2}{\Delta t} + \frac{K_2}{2} \right] \theta^1 = \left[\frac{M_2}{\Delta t} - \frac{K_2}{2} \right] \theta^0 + H_2 \left(\frac{U^1 - U^0}{\Delta t} \right) + F_2 \Big|_{\frac{\Delta t}{2}} \quad (3.17)$$

El ensamble adecuado sobre todos los elementos de las ecuaciones (3.7) y (3.8) conducirá a un sistema del tipo:

$$K_1^* U^{n+1} = F_1^* \quad (3.18)$$

$$K_2^* \theta^{n+1} = F_2^* \quad (3.19)$$

que después de la introducción de las condiciones de contorno impuestas en K_{in}^h y V_{ar}^h , se transforma en el sistema de ecuaciones algebraicas correspondientes a las ecuaciones variacionales (2.25.a) y (2.25.b). De igual forma, del ensamblaje de (3.17) resultarán los valores de θ^1 .

3.2. ELEMENTO ISOPARAMETRICO CUADRATICO

Las funciones de interpolación w_i y ω_i dependen del tipo de elemento empleado en la discretización de cada problema. Debido a que en la solución de los problemas propuestos en el próximo capítulo se utilizó el elemento isoparamétrico cuadrático, se pasará a la formulación de dichas funciones de interpolación.

Para ello considérese una región bidimensional Ω y sea Ω_e , el elemento isoparamétrico cuadrático con 8 nudos locales (Fig. 3.2).

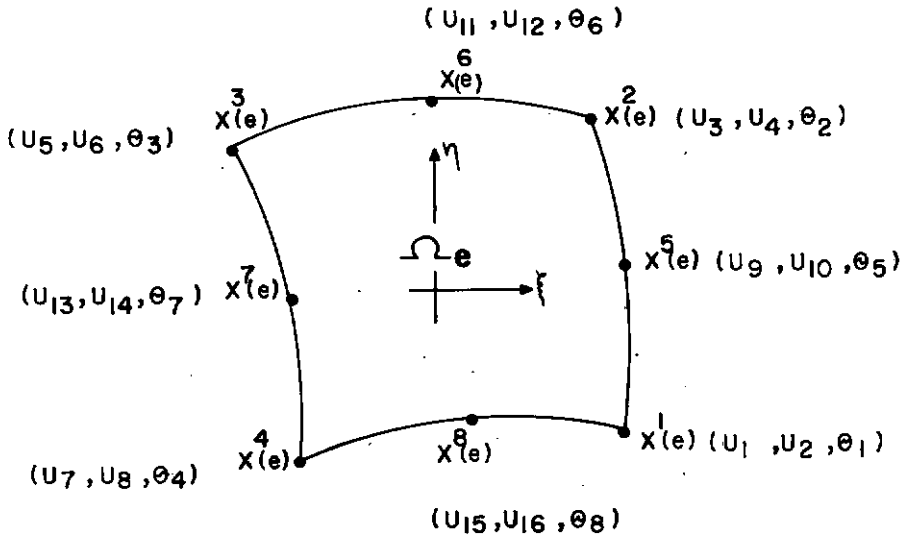


FIGURA 3 - 2

Si se considera Ω_e referido a un sistema de ejes ortogonales, $\{X_1^N, X_2^N\}$ serán las coordenadas, referidas a tal sistema, del nudo local $X_{(e)}^N$.

En este tipo de elemento las coordenadas de cualquier punto $X, \{X_1, X_2\}$, están definidas por la siguiente transformación:

$$X_1 = \sum_{i=1}^8 \phi_i(\xi, \eta) X_1^i \quad -1 \leq \xi, \eta \leq 1$$

$$X_2 = \sum_{i=1}^8 \phi_i(\xi, \eta) X_2^i \quad -1 \leq \xi, \eta \leq 1$$

donde:

$$\phi_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$$

$$\phi_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$$

$$\phi_5 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$\phi_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$\phi_7 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

$$\phi_8 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

De acuerdo a lo anterior y la numeración indicada en la Fig. 3.2 para las incógnitas, las funciones de interpolación serán:

$$\underline{w}_1 = \{\phi_1, 0\}; \underline{w}_2 = \{0, \phi_1\}; \underline{w}_3 = \{\phi_2, 0\}; \underline{w}_4 = \{0, \phi_2\};$$

$$\underline{w}_5 = \{\phi_3, 0\}; \underline{w}_6 = \{0, \phi_3\}; \underline{w}_7 = \{\phi_4, 0\}; \underline{w}_8 = \{0, \phi_4\};$$

$$\underline{w}_9 = \{\phi_5, 0\}; \underline{w}_{10} = \{0, \phi_5\}; \underline{w}_{11} = \{\phi_6, 0\}; \underline{w}_{12} = \{0, \phi_6\};$$

$$\underline{w}_{13} = \{\phi_7, 0\}; \underline{w}_{14} = \{0, \phi_7\}; \underline{w}_{15} = \{\phi_8, 0\}; \underline{w}_{16} = \{0, \phi_8\}.$$

y

$$\omega_1 = \phi_1; \omega_2 = \phi_2; \omega_3 = \phi_3; \omega_4 = \phi_4; \omega_5 = \phi_5; \omega_6 = \phi_6;$$

$$\omega_7 = \phi_7; \omega_8 = \phi_8.$$

OBSERVACION: Con estos elementos, el orden de las matrices definidas en (3.9)-(3.16) es:

$M_1, K_1 : 16 \times 16$

$M_2, K_2 : 8 \times 8$

$F_1 : 16 \times 1$

$F_2 : 8 \times 1$

$H_1 : 16 \times 8$

$H_2 : 8 \times 16$

CAPITULO IV

RESULTADOS NUMERICOS

Se atribuye a Danilovskaya la primera solución analítica del problema de valor inicial y de contorno en termoelasticidad dinámica desacoplada en el año de 1950.

El problema estudiado consistió en un semi-espacio elástico lineal, homogéneo e isotrópico, expuesto subitamente a un cambio brusco de temperatura en el plano de contorno, que se asume libre de tensiones. Más tarde, en el año de 1952, Danilovskaya extendió sus resultados, haciendo que en el contorno, la transferencia de calor tuviera lugar por convección.

Sternberg y Chakravorty [20], determinaron en 1959, expresiones analíticas para los desplazamientos en el primer caso y obtuvieron las soluciones para los desplazamientos y esfuerzos en el caso de que el semi-espacio esté sujeto a un cambio gradual de temperatura en su plano de contorno. Posteriormente, en 1968, Nickell y Sackman [19], propusieron un algoritmo numérico para la obtención de soluciones aproximadas en la teoría de termoelasticidad dinámica acoplada. El algoritmo propuesto por estos autores es diferente al del presente trabajo, siendo el sistema de ecuaciones resultante, acoplado en las variables U^{n+1} y θ^{n+1} .

Con el fin de poner de manifiesto la validez del algoritmo numérico propuesto en el Capítulo II, se resolvieron los problemas antes mencionados. En todos los casos, la solución numérica es comparada con la solución "exacta", obtenida por inver

si3n num3rica de la transformada de Laplace, extraida de [19].

4.1. FORMULACION DEL PROBLEMA

Sea el semi-espacio lineal, homog3neo e isotr3pico ($X_1 > 0$) con el plano $X_1 = 0$ libre de tensiones para todo instante de tiempo. Dicho plano se supone expuesto a dos tipos (no simultaneos) de comportamiento de temperatura:

- 1) Exposici3n s3bita a una alta temperatura ambiental T_∞ (convecci3n; segundo problema de Danilovskaya);
- 2) Temperatura prescrita, que puede ser s3bita y constante para todo instante de tiempo (primer problema de Danilovskaya), o variable, creciendo en una forma lineal hasta un cierto intervalo de tiempo finito a partir del cual permanece constante (problema de Sternberg-Chakravorty).

Se supone adem3s que sobre el cuerpo no actuan fuerzas de masa, que no hay suministro de calor por radiaci3n y que el problema es unidimensional. Luego:

$$u_2 = u_3 = 0 \quad (4.1)$$

$$u_1(x, t) = u_1(x_1, t) \quad (4.2)$$

$$\theta(x, t) = \theta(x_1, t) \quad (4.3)$$

Las condiciones iniciales (2.5.a,b,c) son:

$$u_0 = 0 \quad (4.4.a)$$

$$v_0 = 0 \quad (4.4.b)$$

$$\theta_0 = T_0 \quad (4.4.c)$$

y las condiciones de contorno (2.6.a,b,c,d) son:

$$\Gamma_1 = \phi \quad (4.5.a)$$

$$\Gamma_3 = \phi \quad (4.5.b)$$

$$\Gamma_{4p} = \phi \quad (4.5.c)$$

y para la temperatura, dependiendo del problema a analizar serán:

a) Para el caso de convección:

$$q_2 = h(\theta - T_\infty) \quad (4.5.d)$$

b) Para el caso de exposición súbita del cuerpo a la temperatura:

$$\theta(0,t) = T_0 + (\theta_1 - T_0)\omega(t) \quad (4.5.e)$$

donde:

θ_1 es una temperatura constante y $\omega(t)$ es la función de Heaviside, definida por:

$$\omega(t) = 0 \quad \text{para } -\infty < t < 0$$

$$\omega(t) = 1 \quad \text{para } 0 < t < \infty$$

c) Para el caso de exposición gradual de temperatura:

$$\theta(0,t) = f(t) \quad (4.5.f)$$

con:

$$f(t) = 0 \quad \text{para } -\infty < t < 0$$

$$f(t) = T_0 + (\theta_1 - T_0) \frac{t}{t_0} \quad \text{para } 0 \leq t \leq t_0$$

$$f(t) = \theta_1 \quad \text{para} \quad t_0 \leq t < \infty$$

Graficamente, esta condición de contorno corresponde:

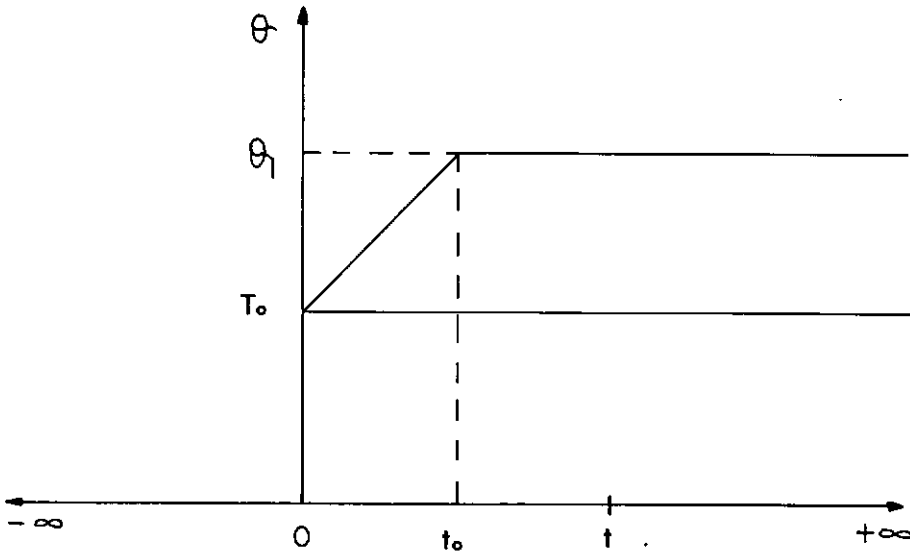


FIGURA 4 - 1

Introduciendo las variables adimensionales

$$a^2 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \right) \quad ; \quad \xi = \frac{a x_1}{k}$$

$$\sigma = \frac{T_{11}}{\beta T_0} \quad ; \quad \tau = \frac{a^2 t}{k}$$

$$\theta = \frac{\theta - T_0}{T_0} \quad ; \quad u = \frac{a(\lambda + 2\mu) u_1}{k \beta T_0}$$

$$\delta = \beta^2 T_0 / \rho_0 c (\lambda + 2\mu)$$

donde:

$$k = \frac{K}{\rho_0 c} \quad ; \quad \beta = -m$$

Con estas variables adimensionales, las condiciones iniciales (4.4.a,b,c) pasan a ser:

$$u_0 = 0 \quad (4.6.a)$$

$$v_0 = 0 \quad (4.6.b)$$

$$\theta_0 = 0 \quad (4.6.c)$$

y las condiciones de contorno (4.5.d,e,f) pasan a ser:

a) Para el caso de convección:

$$q_2 = H(\theta - 1) \quad (4.7.a)$$

donde:

$$H = \frac{k h}{aK}$$

b) Para el caso de exposición súbita del cuerpo a la temperatura:

$$\theta(0, \tau) = \omega(\tau) \quad (4.7.b)$$

con:

$$\omega(\tau) = 0 \quad \text{para } -\infty < \tau < 0$$

$$\omega(\tau) = 1 \quad \text{para } 0 < \tau < \infty$$

c) Para el caso de exposición gradual del cuerpo a la temperatura:

$$\theta(0, \tau) = \bar{f}(\tau) \quad (4.7.c)$$

con:

$$\bar{f}(\tau) = 0 \quad \text{para } -\infty < \tau \leq 0$$

$$\bar{F}(\tau) = \tau/\tau_0 \quad \text{para } 0 \leq \tau \leq \tau_0$$

$$\bar{F}(\tau) = 1 \quad \text{para } \tau_0 \leq \tau \leq \infty$$

Graficamente, esta condición de contorno corresponde a:

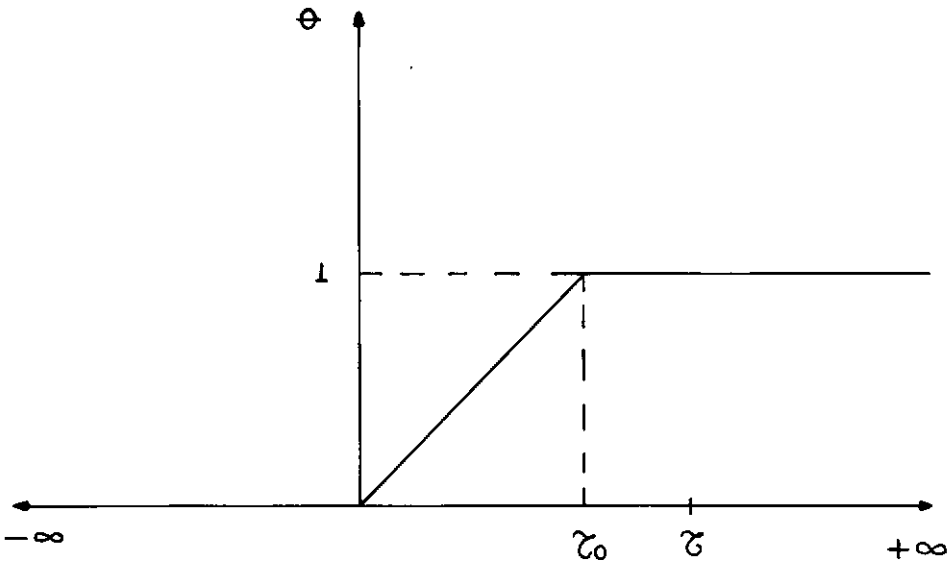


FIGURA 4 - 2

donde:

$$\tau_0 = \frac{a^2 t_0}{k}$$

Cada uno de los problemas descritos en (1) y (2) fueron calculados para tres valores diferentes de δ :

$\delta = 0,00$ (correspondiente a la teoría desacoplada)

$\delta = 0,36$

$\delta = 1,00$

y dos valores de H:

$$H = 0,50$$

$$H = 5,00$$

Tales problemas fueron estudiados para una región finita (entre $x_1 = 0$ y $x_1 = 4$), la cual fué discretizada en 40 elementos isoparamétricos cuadráticos iguales. Se tomó un valor de tiempo adimensional τ igual a 2.00, siendo el intervalo de tiempo $\Delta\tau = 0,01$. A su vez, por conveniencia se tomó:

$$\frac{(\theta_1 - T_0)}{T_0} = 1$$

$$\frac{(T_\infty - T_0)}{T_0} = 1$$

El valor de $s \in (0, 1/2]$ considerado fué de $1/4$.

De la figura (4.3) a la (4.5), se muestran las distribuciones de temperatura, desplazamientos y tensiones en el plano $\xi = 1.00$, como una función del tiempo, para el segundo problema de Danilovskaya (convección) con $H = 0,50$. Las figs. (4.6), (4.7) y (4.8) corresponden al mismo problema pero con $H = 5.00$. De modo análogo, de la fig. (4.9) a la fig. (4.14) se muestran los resultados del problema de Sternberg-Chakravorty para $\tau_0 = 0,25$ y $\tau_0 = 1.00$.

Las figs. (4.15) y (4.16) muestran como varia la temperatura en tres secciones diferentes del semi-espacio; $\xi = 0.5, 1.0, 1.5$.

En todas las figuras mencionadas hasta aqui, la "solución exacta" representa la solución obtenida mediante la técnica

de la inversión numérica de la transformada de Laplace

En los tres últimos gráficos puede notarse la influencia del factor τ_0 en el problema de Sternberg-Chakravorty con $\delta = 0$ (teoría desacoplada) en la distribución de temperatura, desplazamientos y tensiones. Nótese además la relación inversa entre los esfuerzos y τ_0 . Para el caso presentado, el esfuerzo máximo para $\tau_0 = 0,25$ es el 67.64% del esfuerzo máximo para $\tau_0 = 0,00$, siendo para $\tau_0 = 1.00$ apenas el 37.37%.

Por último en el Apéndice A, se presentan los resultados numéricos para el segundo problema de Danilovskaya con $H = 0,50$.

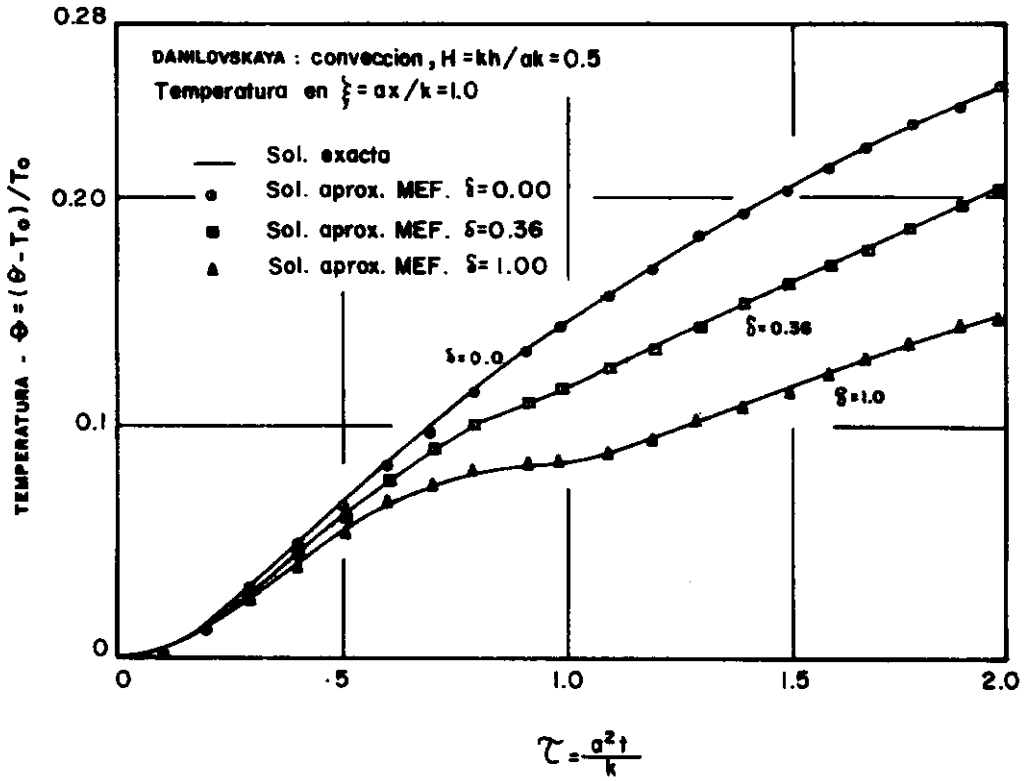


FIGURA 4-3

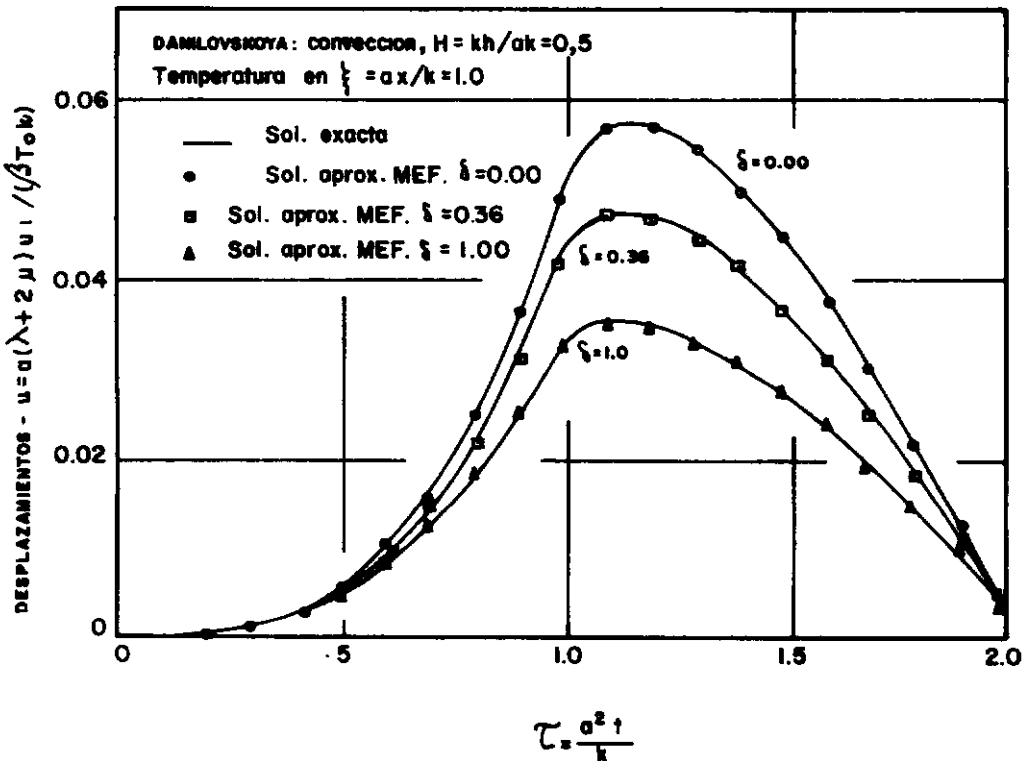


FIGURA 4-4

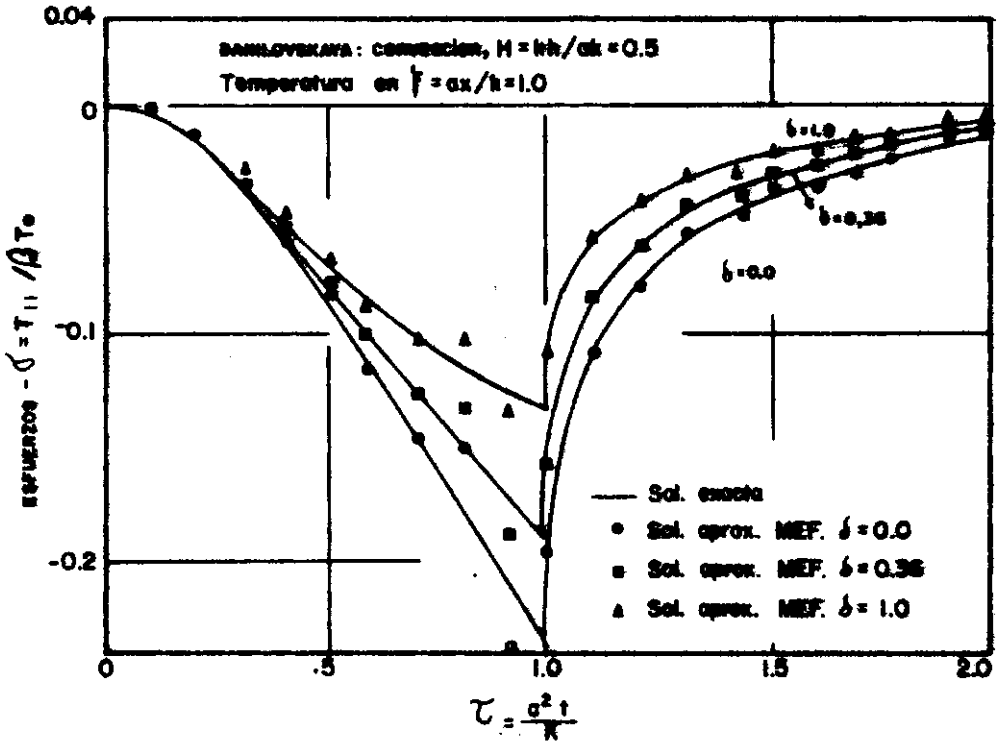


FIGURA - 4-5

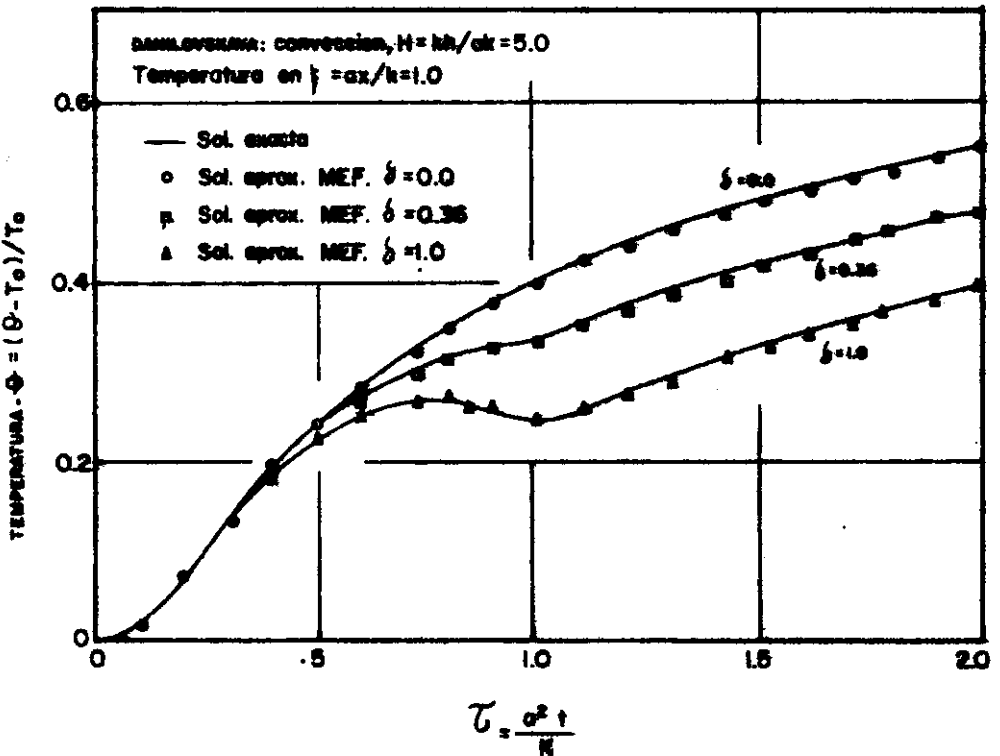
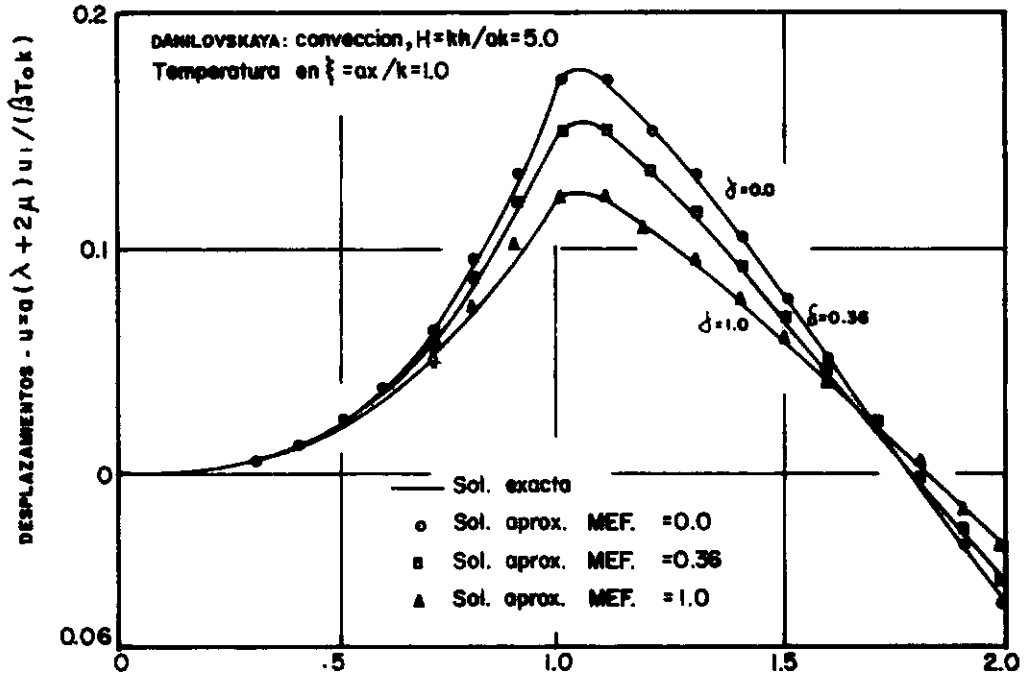
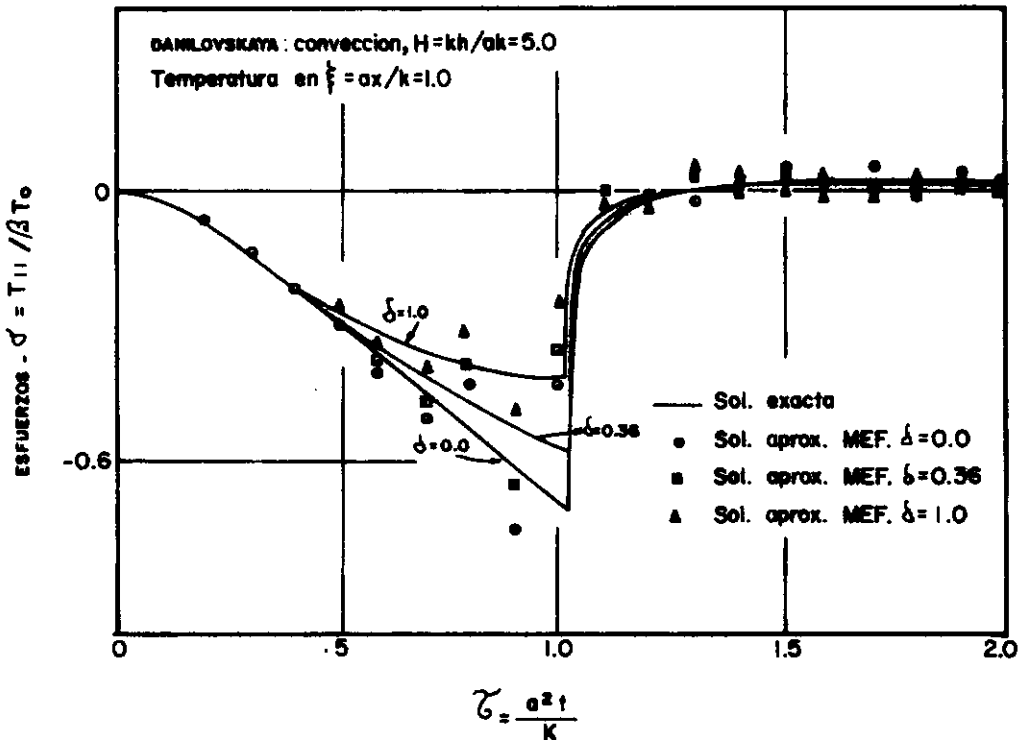


FIGURA - 4-6



$$\tau = \frac{a^2 t}{K}$$

FIGURA - 4 - 7



$$\tau = \frac{a^2 t}{K}$$

FIGURA - 4 - 8

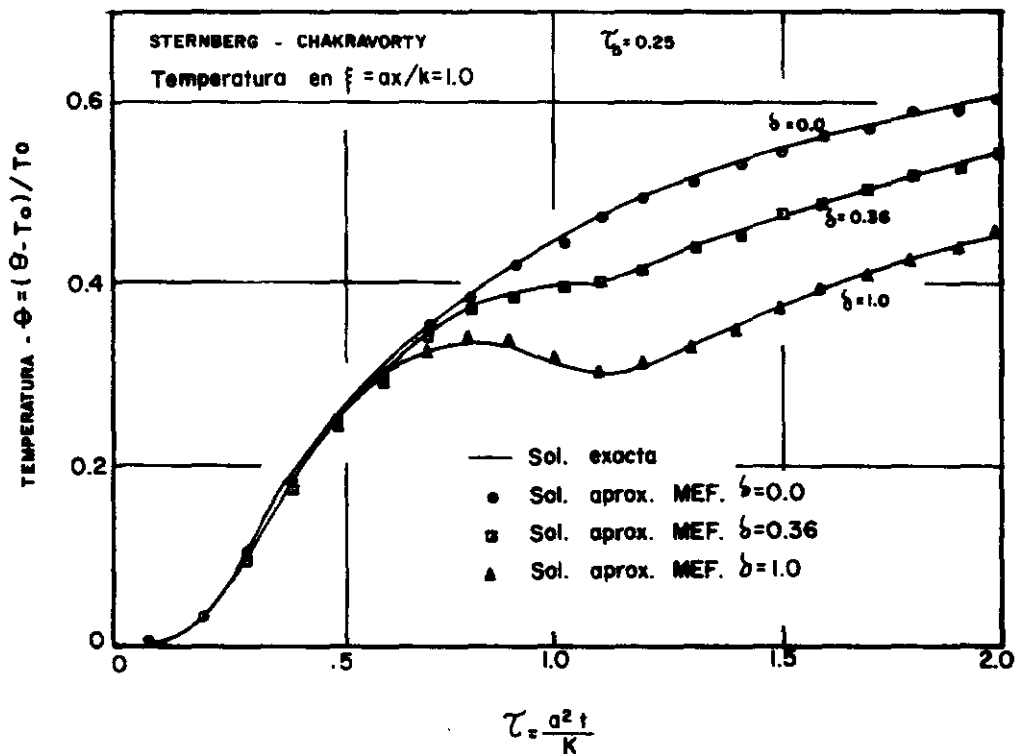


FIGURA - 4 - 9

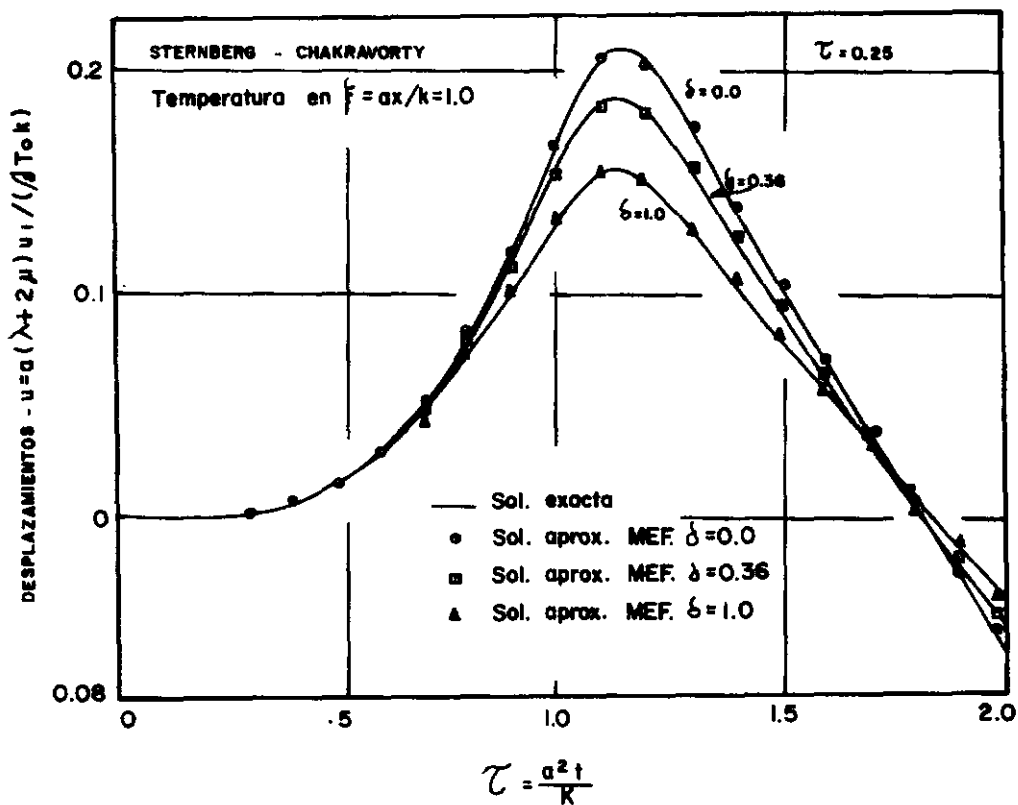


FIGURA - 4 - 10

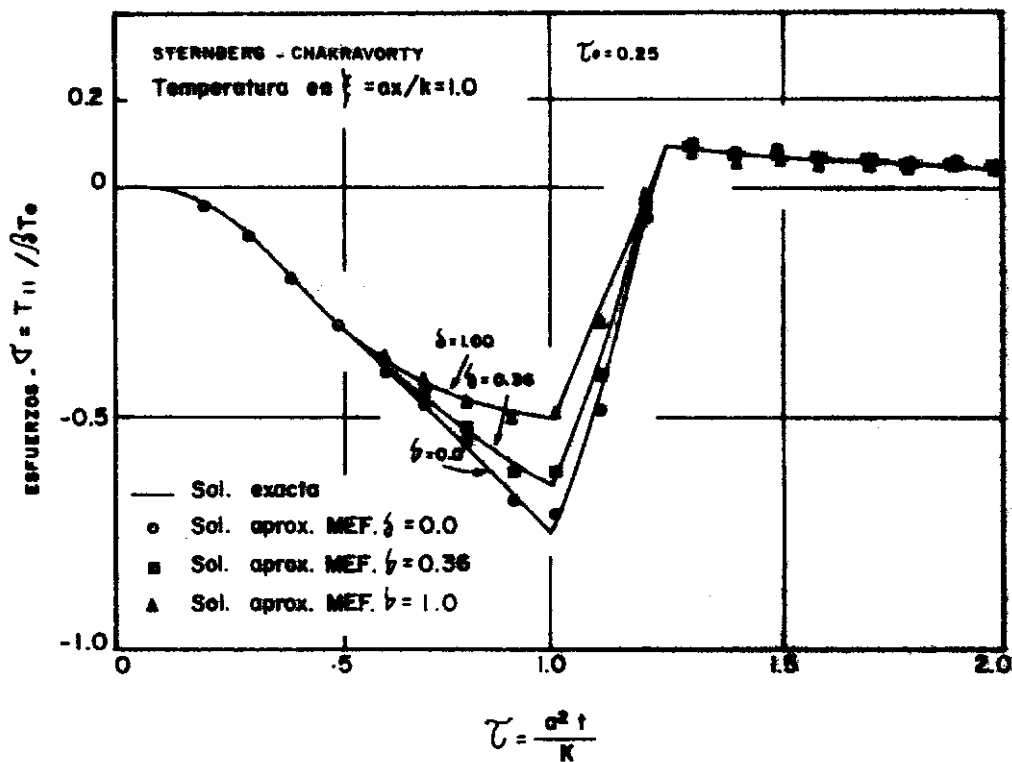


FIGURA - 4 - 11

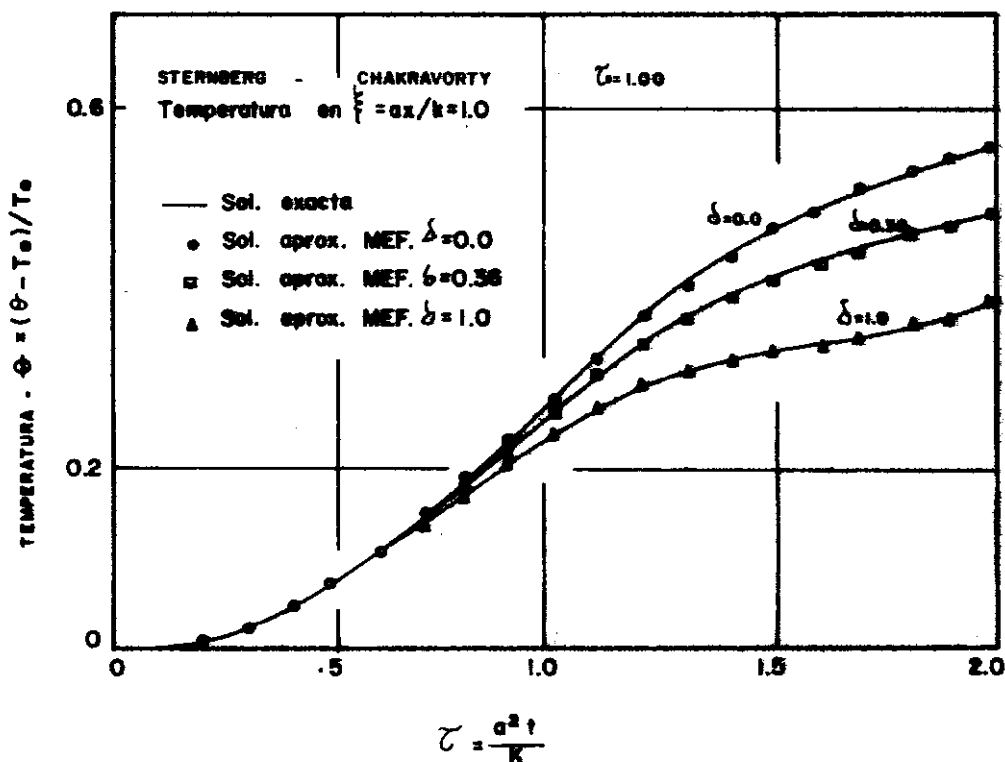


FIGURA - 4 - 12

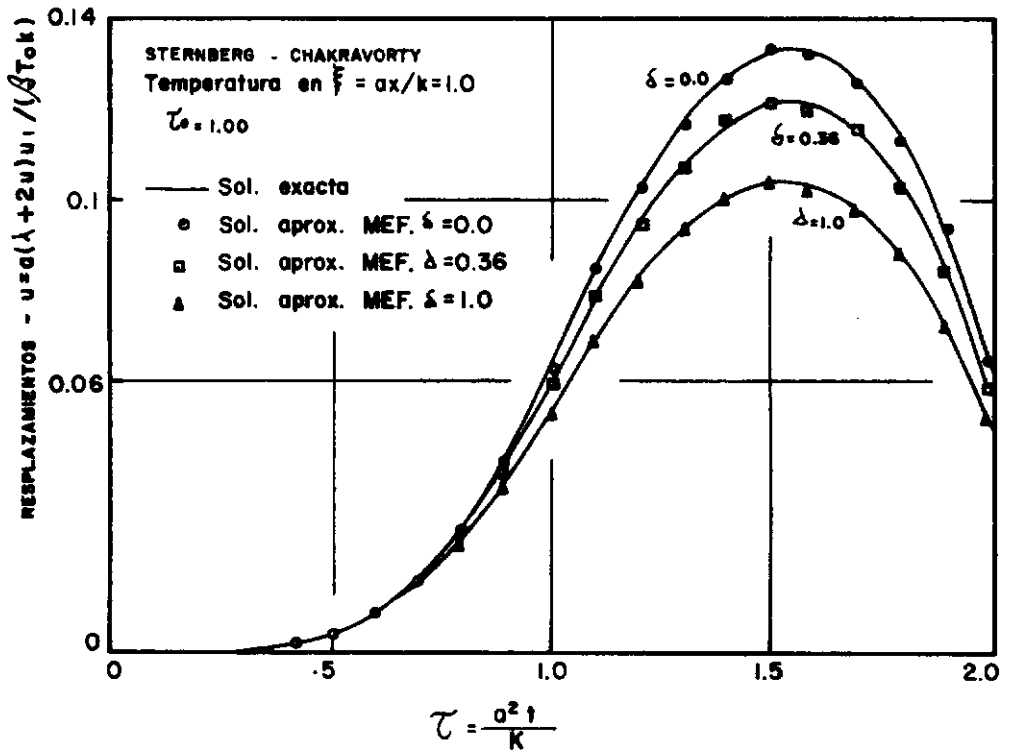


FIGURA - 4 - 13

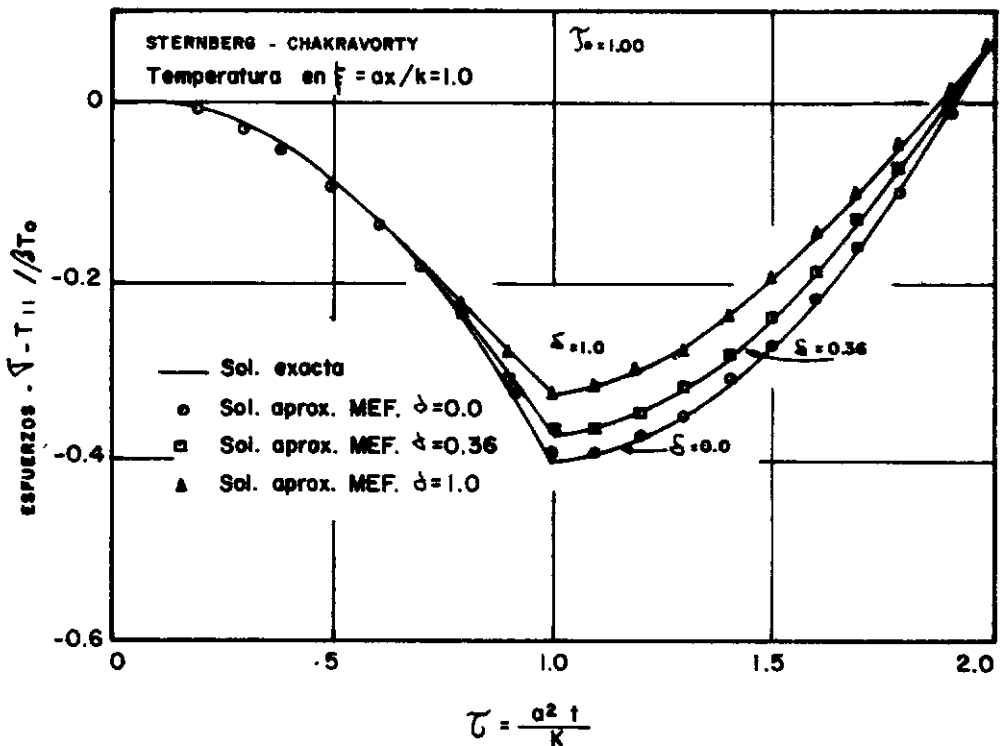


FIGURA - 4 - 14

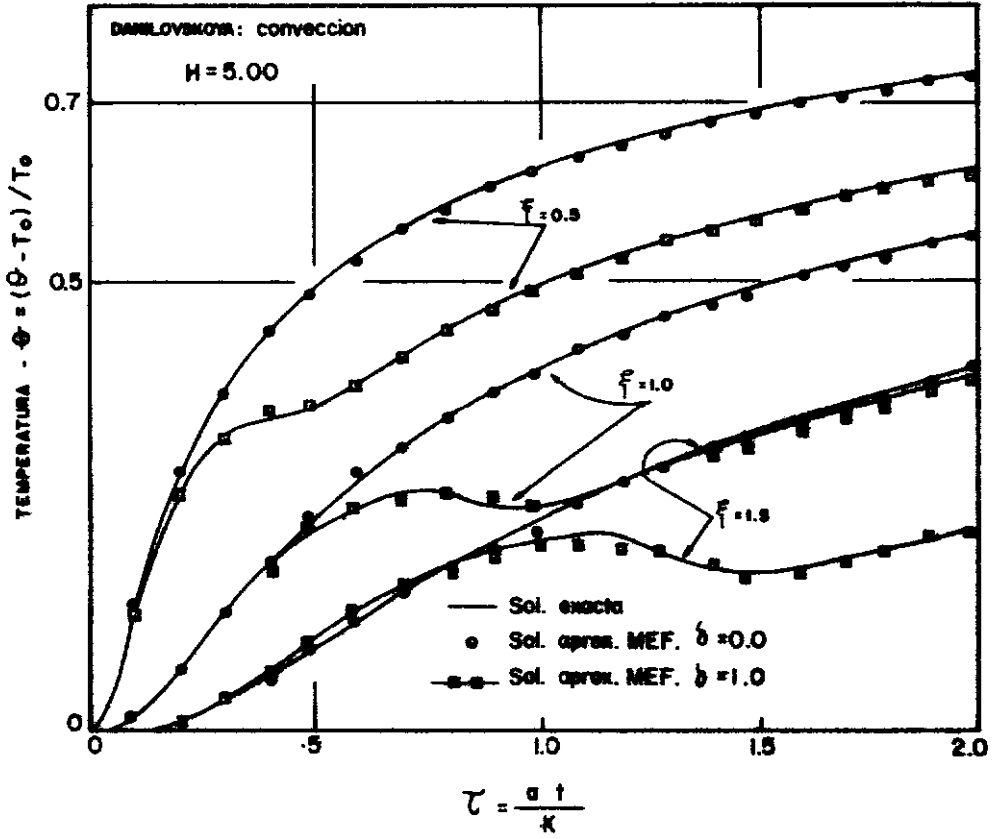


FIGURA - 4 - 15

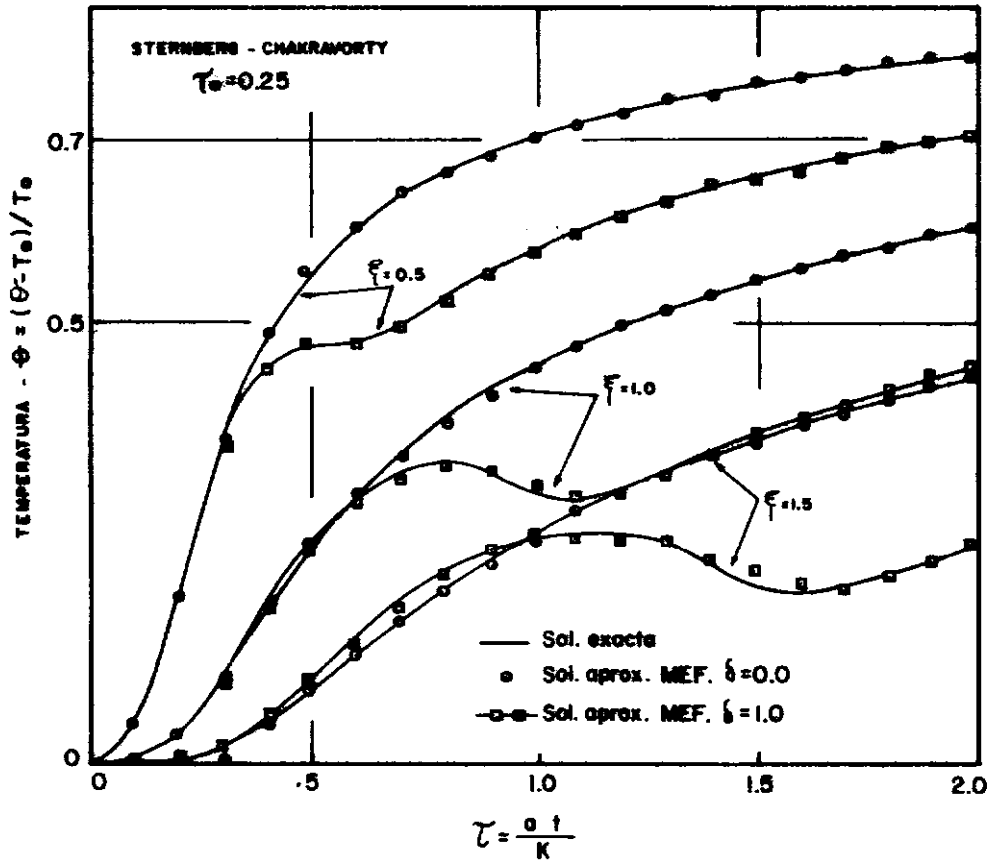


FIGURA - 4 - 16

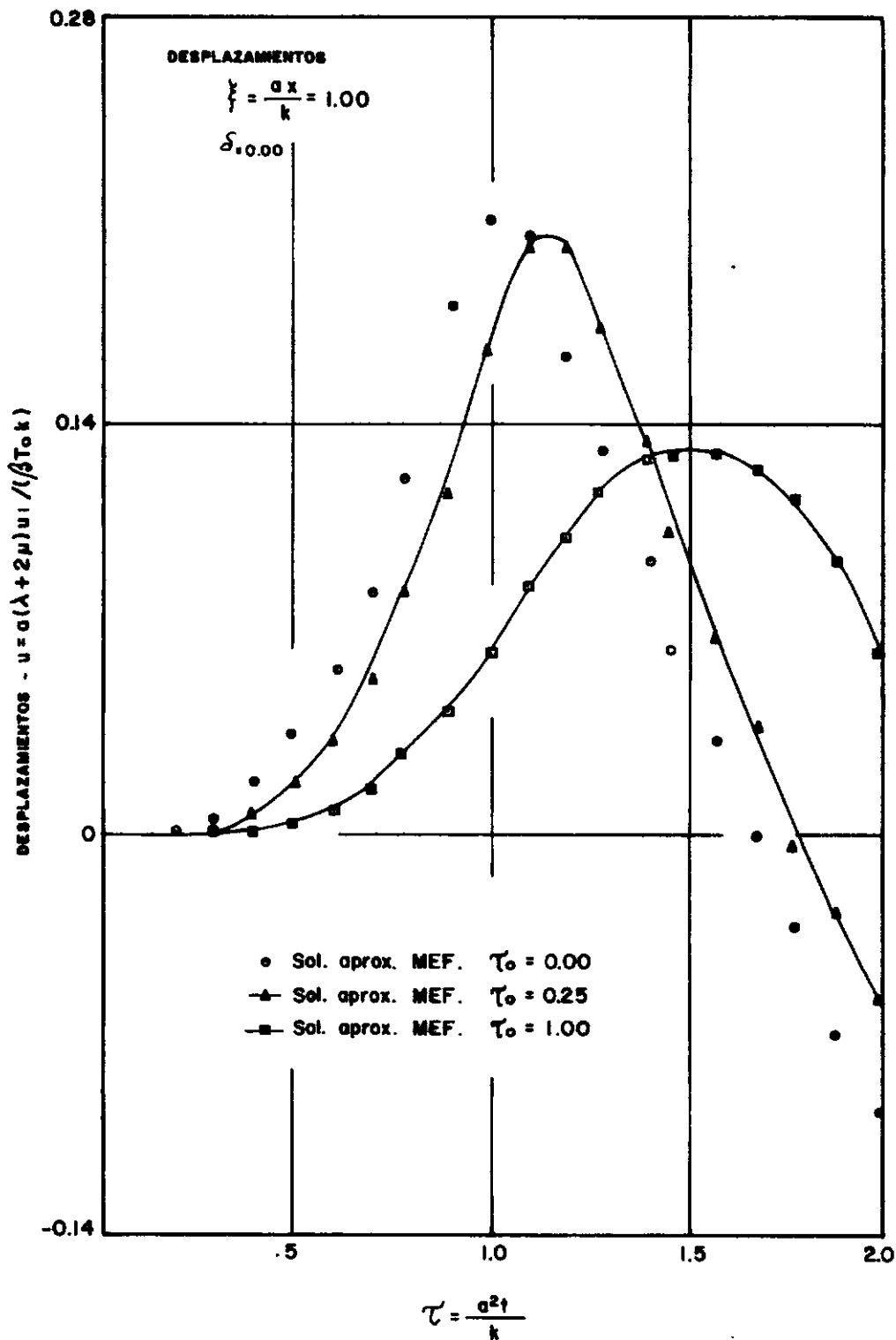
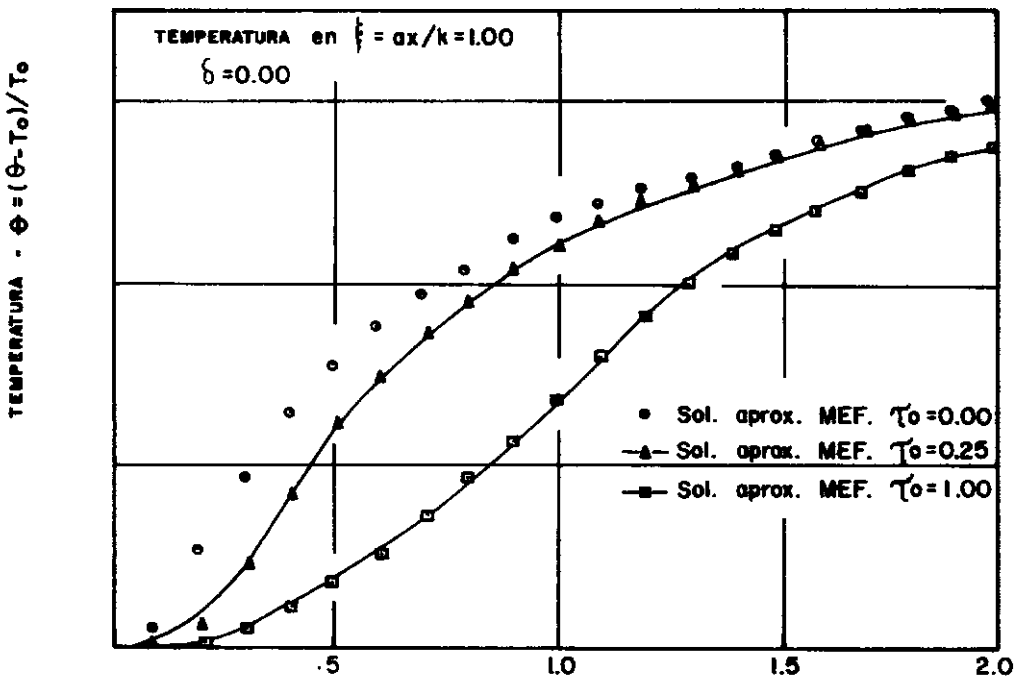
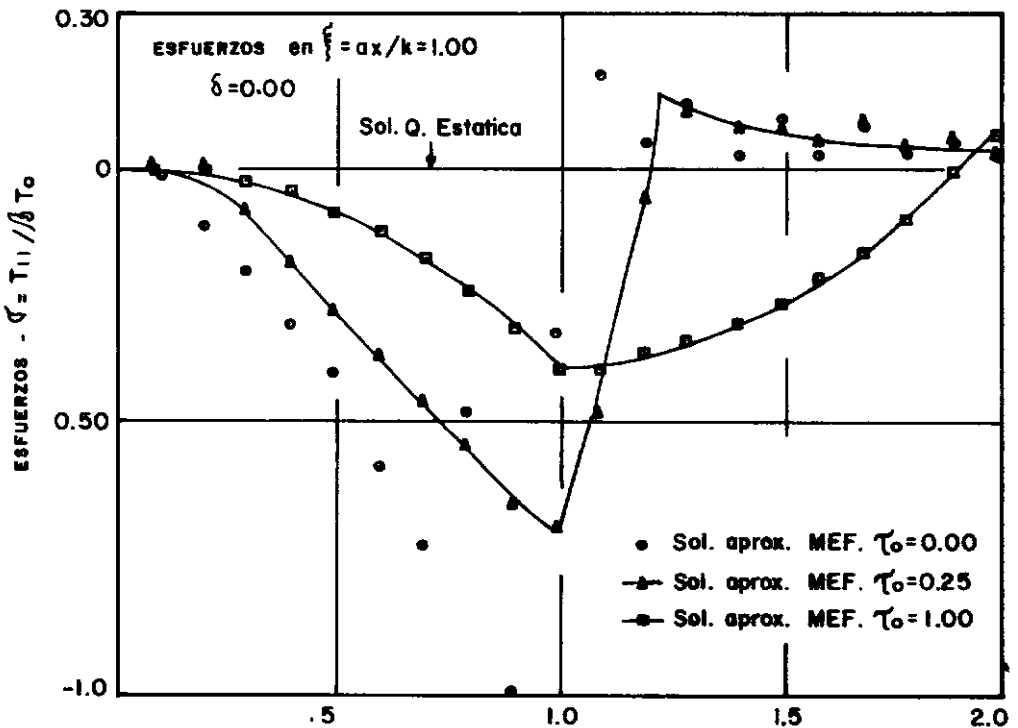


FIGURA - 4 - 17



$$\tau = \frac{a^2 t}{k}$$

FIGURA - 4 - 18



$$\tau = \frac{a^2 t}{k}$$

FIGURA - 4 - 19

CAPITULO VCONCLUSIONES

De los resultados obtenidos y mostrados en las figuras del Capítulo IV, se puede afirmar que el algoritmo propuesto conjuntamente con el Método de los Elementos Finitos, es eficiente y conduce a resultados comparables a los presentados en [19], con la ventaja de que en el algoritmo del presente trabajo, las variables U^{n+1} y θ^{n+1} están desacopladas, reduciendo por lo tanto el tiempo computacional de cálculo.

Si bien los ejemplos numéricos correspondieron a problemas unidimensionales, el programa elaborado permite analizar problemas bidimensionales, pudiendo fácilmente ser extendido para analizar problemas axisimétricos y tridimensionales.

Por otra parte, el empleo de una formulación variacional, conjuntamente con el Método de los Elementos Finitos, permite abordar problemas donde las condiciones y forma de contornos pueden ser más complejas que las tratadas en los ejemplos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CARLSON, D.E., "Linear Thermoelasticity", in Truesdell, C., ed., Handbuck der Physics, Band VI a/2, Springer, Berlin, (1972).
- [2] BOLEY, B.A., and WEINER, J.H., "Theory of Thermal Stresses", John Wiley & Sons, Inc., New York (1960).
- [3] KOVALENKO, A.D., "Thermoelasticity, Basic Theory and Applications", Wolters-Noordhoff Publishing Groningen(1969).
- [4] GATEWOOD, B.E., "Thermal Stresses", Mc Graw Hill Book Co., New York (1957).
- [5] MALVERN, L.E., "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Pretince-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1969).
- [6] FUNG, Y.C., "Foundations of Solids Mechanics", Pretince Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1965).
- [7] ERIGEN, A.C., "Nonlinear Theory of Continuous Media", Mc Graw Hill Book Company, New York (1962).
- [8] HILDEBRAND, F.B., "Methods of Applied Mathematics", Pretince Hall, of India Privated Limited, New Delhi (1968).
- [9] WILHELM FLÜGGE, "Tensor Analysis and Continuum Mechanics", Apringer-Verlag Berlin Heidelberg, New York (1972).
- [10] ODEN, J.T. "Finite Elements of Nonlinear Continua", Mc Graw Hill Book Co., New York (1972).
- [11] HUEBNER, K.H., "The Finite Element Method for Engineers", John Wiley & Sons, New York (1975).

- [12] ZIENKIEWICZ, "The Finite Element Method in Engineering Science", Mc Graw Hill, London (1971).
- [13] ROBINSON, J., "Integrated Theory of Finite Element Methods", John Wiley & Sons, New York (1973).
- [14] TIMOSHENKO, S.P. and GOODIER, J.N., "Theory of Elasticity", Mc Graw Hill Kogakusha, Ltd. (1970).
- [15] CARNAHAN, B.; LUTHER, A.H. and WILKES, J.O., "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, Inc., New York(1969).
- [16] FEIJOO, R.A.; MOURA, C.A. y DA FONSECA, Z., "Un Metodo Variacional en Problemas de Termoelasticidad Acoplada", a aparecer en los relatorios del CBPF, serie B.
- [17] MOURA, C.A.; FEIJOO, R.A. y DA FONSECA, Z., "Estudo Numérico de Problemas Lineares en Termo-Elasticidade Acoplada", Comunicación presentada en el VI Seminário Brasileiro de Análise, Rio de Janeiro, Noviembre 1977.
- [18] GURTIN, M.E., "An Introduction to Classical Continuum Mechanics (1)", Notas publicadas en: Carnegie-Mellon Univ., Pittsburgh.
- [19] NICKELL, R.E. and SACKANAN, J.L., "Approximate Solutions in Linear Coupled Thermoelasticity", Journal of Applied Mechanics, Junio 1968, pgs. 255-266.
- [20] STERNBERG, E. and CHAKRAVORTY, J.G., "On Inercia Effects in a Transient Thermoelastic Problems", Journal of Applied Mechanics, Serie E, Diciembre 1959, pgs. 503-509.
- [21] BOLEY, B.A., and TOLLINS, I.S., "Transient Coupled Thermoelastic Boundary Value Problems in the Half-Space", Journal of Applied Mechanics, Diciembre 1962, pgs. 637-646.

- [22] ACHENBACH, J.D., "Approximate Transient Solutions for the Coupled Equations of Thermoelasticity", The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 36, No 1, Enero 1964, pgs. 10-18.
- [23] FEIJOO, R.A., "Distribución Estacionaria y no Estacionaria de Temperaturas en Solidos Bidimensionales y Axisimetricos", Seminario No 4, COPPE, Marzo 1975.
- [24] FEIJOO, R.A., "Metodo das Funções de Interpolação Sequenciais", Tesis Doctor en Ciencias, COPPE-Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil (1975).
- [25] WILSON, E.L. and NICKEL, R.E., "Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis", Nuclear Engineering and Design (1966), pags. 276-286.
- [26] FEIJOO, R.A.; MOURA, C.A.; DA FONSECA, Z., "Aplicación del Metodo de Elementos Finitos de Termoelasticidad Acoplada", a ser publicado en las XIX Jornadas Sud-Americanas de Ingeniería Estructural en Santiago de Chile, Abril 1977.
- [27] BIOT, M.A., "Thermo-elasticity and irreversible thermodynamics", J.Appl.Phys. 27 (1956) 240.

NOMENCLATURA

m	masa
ρ	densidad de masa en la configuración deformada
ρ_0	densidad de masa en la configuración de referencia
t	tiempo
b	fuerza de masa por unidad de volumen
s	fuerza por unidad de superficie
T	tensor de tensiones en la configuración deformada
e	energía interna específica
q	vector flujo de calor
r	suministro de calor por unidad de masa en la unidad de tiempo
η	entropía específica
θ	temperatura absoluta
K	energía cinética
U	energía interna
W	potencia del sistema de fuerzas
Q	energía calorífica
L	gradiente de velocidad
\dot{I}	producción total de entropía
ψ	energía libre
σ	disipación interna
g	gradiente de la temperatura

F	gradiente de deformaci3n
c	calor espec3fico
K	tensor de conductividad
\mathbb{I}	tensor identidad
E	tensor infinitesimal de deformaci3n
α	coeficiente de dilataci3n t3rmica
λ, μ	coeficientes de Lam3 isot3rmicos
k	conductividad t3rmica
k	difusividad t3rmica
Ω	regi3n de dominio del problema
Γ	contorno de Ω
h	coeficiente de convecci3n
T_∞	temperatura del medio que rodea Ω
T_0	temperatura de referencia
$\underline{w}_i, \omega_i$	funciones de interpolaci3n
ϕ	conjunto vacio
δ	par3metro de acoplamiento
θ_0	temperatura inicial
v_0	velocidad inicial
ω	funci3n de Heaviside
η	entropia espec3fica

APENDICE A

Segundo Problema de Danilovskaya : Conveccion

$\xi = 1.00$

$\delta = 0.00$

$H = 0.50$

	θ	u	σ
.1	0,0020467	.549648*10 ⁻⁵	-0,00150
.2	0,0138531	.162155*10 ⁻³	-0,01310
.3	0,0309665	.849021*10 ⁻³	-0,03230
.4	0,0493876	.246573*10 ⁻²	-0,05540
.5	0,0676221	.536989*10 ⁻²	-0,08210
.6	0,0851388	.978379*10 ⁻²	-0,11520
.7	0,1017701	.157709*10 ⁻¹	-0,14205
.8	0,1174928	.248783*10 ⁻¹	-0,15195
.9	0,1323414	.361632*10 ⁻¹	-0,22610
1.0	0,1463723	.497529*10 ⁻¹	-0,19845
1.1	0,1596475	.567676*10 ⁻¹	-0,10625
1.2	.1722287	.566485*10 ⁻¹	-0,07920
1.3	.1841735	.545729*10 ⁻¹	-0,05520
1.4	.1955351	.498170*10 ⁻¹	-0,05035
1.5	.2063616	.444165*10 ⁻¹	-0,03495
1.6	.2166967	.374571*10 ⁻¹	-0,03465
1.7	.2265800	.299111*10 ⁻¹	-0,02300
1.8	.2360472	.214364*10 ⁻¹	-0,02365
1.9	.2451307	.122582*10 ⁻¹	-0,01540
2.0	.2538598	.276023*10 ⁻²	-0,01655

Segundo Problema de Danilovskaya : Conveccion

$\xi = 1.00$

$\delta = 0.36$

$H = 0.50$

	θ	u	σ
.1	0,0020063	.541987*10 ⁻⁵	-0,00140
.2	0,0134027	.156857*10 ⁻³	-0,01270
.3	0,0296430	.811424*10 ⁻³	-0,03090
.4	0,0466935	.232670*10 ⁻²	-0,05220
.5	0,0629934	.499832*10 ⁻²	-0,07610
.6	0,0779376	.897508*10 ⁻²	-0,10460
.7	0,0912888	.142360*10 ⁻¹	-0,12645
.8	0,1026428	.219927*10 ⁻¹	-0,13140
.9	0,1122433	.313619*10 ⁻¹	-0,18800
1.0	0,1199024	.421696*10 ⁻¹	-0,15900
1.1	0,1285429	.473877*10 ⁻¹	-0,08245
1.2	0,1380952	.469939*10 ⁻¹	-0,06225
1.3	0,1475618	.450644*10 ⁻¹	-0,04265
1.4	0,1569154	.411329*10 ⁻¹	-0,03930
1.5	0,1659718	.366404*10 ⁻¹	-0,02710
1.6	0,1747959	.310030*10 ⁻¹	-0,02665
1.7	0,1833376	.248330*10 ⁻¹	-0,01785
1.8	0,1916230	.179702*10 ⁻¹	-0,01795
1.9	0,1996645	.105483*10 ⁻¹	-0,01220
2.0	0,2074516	.286800*10 ⁻²	-0,01260

Segundo Problema de Danilovskaya : Conveccion

$\xi = 1.00$

$\delta = 1.00$

$H = 0.50$

	θ	u	σ
.1	0,0019409	.529173*10 ⁻⁵	-0,00140
.2	0,0127182	.148565*10 ⁻³	-0,01200
.3	0,0276401	.753549*10 ⁻³	-0,02875
.4	0,0426104	.211506*10 ⁻²	-0,04745
.5	0,0559928	.443912*10 ⁻²	-0,06710
.6	0,0671642	.777593*10 ⁻²	-0,08885
.7	0,0759436	.120078*10 ⁻¹	-0,10375
.8	0,0816994	.179188*10 ⁻¹	-0,10290
.9	0,0851068	.247457*10 ⁻¹	-0,13765
1.0	0,0861155	.320938*10 ⁻¹	-0,11030
1.1	0,0901617	.353137*10 ⁻¹	-0,05580
1.2	0,0965310	.348435*10 ⁻¹	-0,04335
1.3	0,1033393	.333298*10 ⁻¹	-0,02970
1.4	0,1104246	.305676*10 ⁻¹	-0,02760
1.5	0,1174845	.273491*10 ⁻¹	-0,01940
1.6	0,1245321	.234087*10 ⁻¹	-0,01875
1.7	0,1314996	.190311*10 ⁻¹	-0,01320
1.8	0,1383630	.141943*10 ⁻¹	-0,01275
1.9	0,1451415	.896832*10 ⁻²	-0,00935
2.0	0,1517854	.352983*10 ⁻²	-0,00920